

47055

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERTÜRBASYON KURAMI VE İLKELERİ



H.Mashar CİNMAN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Yavuz AKSOY

İSTANBUL , 1995

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
T.C. İSTANBUL MÜHÜRÜ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
----------------	----

SUMMARY	III
-------------------	-----

BÖLÜM I

DÜZGÜN PERTÜRBASYON	1
-------------------------------	---

1.1. Temel Bilgiler	1
-------------------------------	---

1.2. Düzgün Pertürbasyon Yöntemleri	2
---	---

1.3. Küçük Değere Sahip Parametre İle Helmholtz Denklemi	6
--	---

1.4. Isı İletkenliği	8
--------------------------------	---

1.5. Non-Linear Klein-Gordon Denklemi	10
---	----

BÖLÜM II

TEKİL PERTÜRBASYON VE SINIR KATMAN TEORİSİ	13
--	----

2.1. Genel Tanımlar	13
-------------------------------	----

2.2. Bir Birinci Mertebe Denklemin Tekil Pertürbasyonu	14
--	----

2.3. Bir İç Sınır Katmanı	18
-------------------------------------	----

2.4. Hiperbolik Bir Denklemin Tekil Pertürbasyonu	22
---	----

SONUÇ

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bana destek olan ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Yavuz AKSOY 'a teşekkür ederim.

Ayrıca aileme, gösterdiği anlayıştan dolayı Atilla ATALAY 'a ve Arş. Gör. Çiğdem GENÇ 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

H.Mashar CİNMAN

İstanbul,1995

Ö Z E T

Pertürbasyon Kuramı ve İlkeleri adı altında yaptığım bu çalışma iki bölümden meydana gelmektedir.

Birinci bölümde pertürbasyon yöntemleri hakkında genel bir bilgi verip, düzgün pertürbasyon yöntemi ve bunun Helmholtz ve non-lineer Klein-Gordon denklemlerine uygulanmasını inceledik.

İkinci bölümde ise bazı kavramlardan bahsedip, bir birinci mertebe denklemin ve hiperbolik bir denklemin tekil pertürbasyonları ile ilgilenip, sınır katman teorisi hakkında bilgi verdik.

S U M M A R Y

This thesis which is under named *Perturbation Theory* contains two chapter.

In the first chapter, we give general information about perturbation methods, and study regular perturbation method which is applied to Helmholtz and non-linear Klein-Gordon equations.

In the second chapter, we mention some concepts, interest singular perturbation of a hyperbolic equation and a first order equation and give information about boundry layer theory.

BÖLÜM 1

DÜZGÜN PERTÜRBASYON

1.1. TEMEL BİLGİLER

Eğer çözümün seri açılımı yakınsarsa veya yakınsaması beklenirse, sözü edilen teknikten, sık sık bir "*pertürbasyon yöntemi*" olarak söz edilir. Eğer seri yakınsıyor ama asimptotikse, ilk birkaç terim sınır parametre değerleri göz önüne alındığında iyi bir yaklaşım verir ve üstteki teknik bir "*asimptotik yöntem*" olarak adlandırılır.

Genel olarak, kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ilgili problemler için bir asimptotik seri veya pertürbasyonda bütün terimleri belirtmek zordur. Bu yüzden serideki sadece ilk bir kaç terim belirlenir. Bir çok problem için tam sonuçlar, sonucun yakınsak veya asimptotik türü hakkında uygun olmasına rağmen, seri çözümleri oluşturma üzerinde konsantre olup genel olarak sadece serinin ilk birkaç terimini alacağız.

Verilen problemin çözümü için uygun açılım şekilleri her durumda belli değildir. Bundan dolayı bazı problemlerin tam çözümleri üzerinde durmak ve bu çözümleri bir seri de konu ile ilgili küçük veya büyük değere sahip parametrelerle birlikte genişletmek sık sık faydalıdır.

Pertürbasyon teknikleri, orjinal problemin çözümlerinin bir çok özelliğini kapsayan çözümleri olan, daha basit bir denklem tarafından verilen denklemlerin yerine geçmesi için de kullanılabilir. Bu özellikle, pertürbasyon yöntemlerinin problemi lineer yapmak için kullanıldıkları non-lineer denklemler için önemlidir.

Mertebe sembolü O olmak üzere, eğer

$|F(x)/G(x)| \rightarrow A$, $x \rightarrow a$ A :herhangi bir sabit (ve $a \pm\infty$ olabilir.) ise

$$F(x) = 0[G(x)] \quad , x \rightarrow a \quad (1.1.1)$$

olarak tanımlanır. Eğer (1.1.1) uygunsa, $x = a$ civarında F , G nin mertebesidir denir. k parametresine göre, değişen $f(x)$ fonksiyonu asimptotik kuvvet serisine sahiptir.

Eğer her N için,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)k^{-n} + O[k^N] \quad , k \rightarrow \infty \quad (1.1.2)$$

oluyorsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)k^{-n} \quad (1.1.3)$$

$k \rightarrow \infty$ iken uygundur. Sonucun bütün x ler için uygun olduğu farzedilir. ($\varepsilon = \frac{1}{k}$)

Mertebe sembolü 0 olmak üzere, eğer $F(x)/G(x) \rightarrow 0 \quad , x \rightarrow a$ ise

$$F(x) = o[G(x)] \quad , x \rightarrow a \quad (1.1.4)$$

olarak tanımlanır. Böylelikle (1.1.2) yi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)k^{-n} + o[k^{-N+1}] \quad , k \rightarrow \infty \quad (1.1.5)$$

olarak yazabiliriz. Biz, çalışmalarımızda O mertebe sembolünü kullanacağız.

1.2. DÜZGÜN PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ

Bir lineer veya non-lineer diferansiyel denklem göz önüne alıyoruz. Bunu operatörle

$$L(u, \varepsilon) = 0 \quad (1.2.1)$$

olarak ifade edelim.

Bu denklem yeteri kadar küçük seçilmiş bir ε parametresine göre değişir. Eğer (1.2.1) eliptik tipse, uygun sınır koşulları ∂G veya sonsuzda alınacaktır. Eğer (1.2.1) hiperbolik veya parabolik tipse, ∂G veya sonsuzda alınan sınır koşullarına ek olarak bütün $t > 0$ için başlangıç verisi $t = 0$ zamanında G de verilir. Sınır veya başlangıç verisi ε a bağlı olacaktır; ama sınır ∂G ε dan bağımsız olarak tanımlanmış farzedilir. (1.2.1) e benzer olarak, "indirgenmiş" yada "pertürbe edilmemiş" problem, $\varepsilon = 0$ olarak (1.2.1) deki şekilde ele alınır. Böylelikle,

$$L(v, 0) = 0 \quad (1.2.2)$$

denklemini ele alınmış olur. Eğer indirgenmiş problemin tek bir çözümü varsa, verilen problem "*düzgün pertürbasyon problemi*" olarak adlandırılır. Eğer bu durum yoksa bir "*singüler pertürbasyon problemi*" dir.

Eğer indirgenmiş denklem, verilen denklemden farklı bir tipte veya mertebede ise, bir singüler pertürbasyon problemi vardır demektir. Bununla birlikte verilen denklemin tipi ve mertebesi değişse bile indirgenmiş problem çözülebilir niteliktedir. Örneğin;

$$u(0, t) = f(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.3)$$

sınır koşulları ile

$$\varepsilon u_{tt} - c^2 u_{xx} + u_t = 0 \quad , \quad x > 0 \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.4)$$

"*işaret problemi*", hiperbolik denklem için,

$$v(0, t) = f(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.5)$$

sınır koşulları ile ,

$$c^2 v_{xx} - v_t = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.6)$$

olarak parabolik denklem haline gelir.

Verilen ve indirgenmiş problemin her ikisi birden bu durumda çözülebilir.

(1.2.3) de varılmış sınır koşulları ile

$$\varepsilon(u_{tt} - c^2 u_{xx}) + u_x = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.7)$$

hiperbolik denklemi

$$v_x = 0 \quad , \quad x > 0 \quad , \quad -\infty < t < \infty \quad (1.2.8)$$

haline gelir. (sınır koşulları (1.2.5) ile)

$v(x, t)$ için indirgenmiş problemin (tek) çözümü $v = f(t)$ dir.

Örneğin, biharmonik denklem için sınır değer problemini göz önüne alıyoruz.

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0 \quad , \quad x \in G \quad (1.2.9)$$

ve sınır koşulları için

$$u = f \quad , \quad \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} + u = g \quad , \quad x \in \partial G \quad (1.2.10)$$

olur.

u için indirgenmiş denklem aynı zamanda biharmonik denklemdir; ancak indirgenmiş sınır şartları ∂G de $u = f$ ve $u = g$ olmasını gerektiriyor. Böylelikle $f = g$ olmadıkça, u için indirgenmiş problemin çözümü yoktur. $f = g$ olsa dahi indirgenmiş problemin çözümü bir sınır koşulu olmadığından ötürü tek değildir. Böylelikle (1.2.9), (1.2.10) bir singüler pertürbasyon problemidir.

Pertürbasyon serisinde (1.2.1) in u çözümünü genişletiyoruz.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \quad (1.2.11)$$

u ve u_0 arasındaki fark, (yani $u - u_0$) indirgenmiş veya pertürbe edilmemiş problemin u_0 çözümünde bir "pertürbasyon" olarak söz edilir.

Bunu (1.2.1) de yerine koyduğumuzda,

$$L(u, \varepsilon) = L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n, \varepsilon \right) = 0 \quad (1.2.12)$$

elde edilir. $L(u, \varepsilon)$ u u ve ε un bir kuvvet serisine açılabilirliğini farzedelim. Sonuç olarak (1.2.12) bir seri şeklinde yazılabilir.

$$L(u, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_1, u_0) \varepsilon^n = 0 \quad (1.2.13)$$

L_n : Lineer veya non-lineer olan diferansiyel operatörüdür.

Verilen problemi, pertürbasyon yöntemi ile çözmek için (1.2.13) de ε^n in katsayıları sıfıra eşitlenir:

$$L_n(u_n, u_{n-1}, \dots, u_0) = 0 \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.2.14)$$

öncelikle indirgenmiş denklem çözülür.

$$L_0(u_0) = 0 \quad (1.2.15)$$

$$L_1(u_1, u_0) = 0 \quad (1.2.16)$$

...

...

...

Eğer verilen (1.2.1) denklemi lineer ise, $L_n(u_n, \dots, u_0) = 0$ denklemleri $L_0(u_0) = 0$ denkleminin genel olarak non-homojen yorumlarıdır. Bununla birlikte, $L_0(u_0) = 0$ kendisi de bir non-homojen denklem olabilecektir. Verilen problem non-lineer olsa bile, indirgenmiş problem lineer olduktan sonra, bütün (1.2.14) denklemleri aynı türün homojen veya non-homojen denklemleridir.

Örneğin, eğer

$$L(u, \varepsilon) = u_t + uu_x - \varepsilon u = 0 \quad (1.2.17)$$

denklemini göz önüne alırsak,

$$L_0(u_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1.2.18)$$

buluruz.

$$L_1(u_1, u_0) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - u_0 = 0 \quad (1.2.19)$$

dır. Bununla birlikte, problem

$$L(u, \varepsilon) = u_t + \varepsilon uu_x - u_{xx} = 0 \quad (1.2.20)$$

$$L_0(u_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (1.2.21)$$

$$L_1(u_1, u_0) = \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1.2.22)$$

verir.

Şimdi birkaç pertürbasyon yöntemi örneği göz önüne alacağız. Her örnek, yöntemin farklı bir yönünü vurguluyor. İlk örnekte tam çözümün kolayca elde

edildiği ve tam sonuç ile pertürbasyon teorisinin sonuçlarının karşılaştırıldığı bir problemi tartışacağız.

1.3.KÜÇÜK BİR DEĞERE SAHİP PARAMETRE İLE HELMHOLTZ DENKLEMİ

$$u_{xx} + u_{yy} + \varepsilon^2 u = 0 \quad (1.3.1)$$

denklemini göz önüne alıyoruz, $x^2 + y^2 < 1$ (birim dairede)

$$u(x, y) = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (1.3.2)$$

(1.3.1) ve (1.3.2) nin çözümünün tek olduğu gibi ε^2 parametresinin de yeteri kadar küçük bir değere sahip olduğu farzediliyor. Çözmek için öncelikle ε^2 nin kuvvetlerine göre açılmış bir pertürbasyon serisiyle işe başlıyoruz.

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \varepsilon^{2n} \quad (1.3.3)$$

(1.3.3) ü (1.3.1) ve (1.3.2) de yerine koyuyoruz.

$$\nabla^2 u + \varepsilon^2 u = \nabla^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^{2n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^{2n+2} \quad (1.3.4)$$

$$= \nabla^2 u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\nabla^2 u_n + u_{n-1}] \varepsilon^{2n} = 0$$

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) \varepsilon^{2n} = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (1.3.5)$$

(1.3.4) de ε^2 nin kuvvetlerini sıfıra eşitlersek,

$$\nabla^2 u_0 = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\nabla^2 u_n = -u_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \quad (1.3.7)$$

ve sınır koşulları ;

$$u_0(x, y) = 1 \quad , \quad u_n(x, y) = 0, \quad n \geq 1 \quad , \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (1.3.8)$$

u_n için denklemler (1.3.8) sınır koşullarını kullanarak ve (1.3.6) ile başlayarak tekrarlanarak çözülebilir. Pertürbasyon yöntemi (1.3.1) "*Helmholtz denklemini*" (1.3.6) (1.3.7) "*Laplace ve Poisson*" denklemleri sistemiyle değiştirmiştir. r ve θ kutupsal koordinatlar olmak üzere, Laplace ve Poisson denklemleri gibi Helmholtz denklemi de θ dan bağımsız çözümleri arayarak çözülebilir.

$u = u(r)$ olmak üzere (1.3.1),

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \varepsilon^2 u = 0 \quad (1.3.9)$$

şekline alır.

(1.3.9) bir Bessel denklemdir. $r = 0$ da sınırlanan ve sınır şartı $u(1) = 1$ olan (1.3.9) un çözümü açıkça,

$$u = \frac{J_0(\varepsilon r)}{J_0(\varepsilon)} \quad (1.3.10)$$

şeklinde gerçekleşecektir.

u_n için problemi çözmek istediğimizde tekrar $u_n = u_n(r)$ farzedip, $u_0(r)$ için elde ediyoruz.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} = 0 \quad , \quad u_0 = 1 \quad , \quad r = 1 \quad (1.3.11)$$

(1.3.11) in sınırlı çözümü,

$$u_0 = 1 \quad (1.3.12)$$

dir. Denklem, $u_1(r)$ için

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} = -u_0 = -1 \quad , \quad u_1 = 0 \quad , \quad r = 1 \quad (1.3.13)$$

şeklini alır ve bir integrasyon işlemi ile sınırlı çözüm,

$$u_1 = \frac{1 - r^2}{4} \quad (1.3.14)$$

olarak bulunur. Böylece,

$$u = 1 + \frac{\varepsilon^2(1 - r^2)}{4} + O(\varepsilon^4) \quad (1.3.15)$$

olur. $J_0(z)$ ise,

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + O(z^2) \quad (1.3.16)$$

açılımına sahip olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{J_0(\varepsilon r)}{J_0(\varepsilon)} &= \frac{1 - \frac{(\varepsilon r)^2}{4} + O(\varepsilon^4)}{1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + O(\varepsilon^4)} \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2(1 - r^2)}{4} + O(\varepsilon^4)\end{aligned}\tag{1.3.17}$$

elde edilir.

(1.3.17) den elde edilen seri yeteri kadar küçük ε a yakınsar. Pertürbasyon sonucu, sadece ilk birkaç terimi alsak bile, birim çember boyunca tam çözüme iyi bir yaklaşım verir. Ancak bir sonraki örnekte görüleceği gibi pertürbasyon sonucu, tüm bölge üzerinde her zaman uygun değildir. Bir sonraki örnekte bölge sınırlandırılmamaktadır.

1.4. ISI İLETKENLİĞİ

Parabolik denklem için Cauchy problemini gözönüne alalım.

Yüzeydeki radyasyondan dolayı ısı kaybı olan bir çubuktaki ısı iletkenliğini tanımlayan

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty \tag{1.4.1}$$

başlangıç koşuluna sahip denklem,

$$u_t + \varepsilon u = u_{xx} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \tag{1.4.2}$$

olsun.

Değişkenlerin seçimi için

$$u(x, t) = e^{-t\varepsilon} \cdot v(x, t) \tag{1.4.3}$$

kullanılırsa,

$$v_t = v_{xx} \tag{1.4.4}$$

verir ve $v(x, 0) = f(x)$ dir.

Radyoaktif etki (1.4.2) ve (1.4.3) de εu terimini verir.

(1.4.2) nin çözümü (1.4.4) ısı denklemi için Cauchy probleminin çözümü ile ilgili olarak verilir. Bununla birlikte, (x,t) tanım kümesinin sınırsızlığının etkisini görmek için problemi pertürbasyon yöntemi ile çözmek isteyelim.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \varepsilon^n \quad (1.4.5)$$

ve (1.4.2) ve (1.4.1) de yerine yazalım. ε un kuvvetlerine göre eşitlesek,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -u_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \quad (1.4.7)$$

elde edilir.

Başlangıç koşulları,

$$u_0(x,0) = f(x) \quad (1.4.8)$$

$$u_n(x,0) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \quad (1.4.9)$$

olmak üzere,

$$u_0(x,t) = v(x,t) \quad (1.4.10)$$

dir.

$v(x,t)$ ise $v(x,0) = f(x)$ başlangıç koşuluna sahip (1.4.4) ün çözümüdür. Bunlardan,

$$u_n(x,t) = \frac{(-t)^n}{n!} v(x,t) \quad , \quad n \geq 0 \quad (1.4.11)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \frac{(-t)^n}{n!} [v_t - v_{xx}] - \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} v \quad (1.4.12)$$

$$= -u_{n-1}$$

olduğu gösterilmiş olur.

Tam pertürbasyon çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-t)^n}{n!} v(x, t) \right] \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\varepsilon t)^n}{n!} v(x, t) \quad (1.4.13)$$

$$= e^{-\varepsilon t} \cdot v(x, t)$$

olup bu da (1.4.3) tam çözümü ile aynıdır.

Şimdi de açıkça çözülemeyen bir non-linear problem göz önüne alacağız. Pertürbasyon yönteminin bunu çözülebilir lineer problemlere indirgediği gösterilecektir.

1.5. NON-LİNEER KLEIN-GORDON DENKLEMİ

$$w_{tt} - \eta^2 w_{xx} + c^2 w - \sigma w^3 = 0 \quad (1.5.1)$$

bir hiperbolik denklemdir. σ parametresi sıfıra eşitlendiğinde Klein - Gordon denklemine indirgenmiş olur. (1.5.1) deki katsayılar sabit farzedilmiştir. (1.5.1) için başlangıç değer problemi göz önüne alınmıştır.

$0 < \varepsilon \ll 1$ ve k :sabit olmak üzere,

$$w(x, 0) = \varepsilon \cos kx \quad , \quad w_t(x, 0) = 0 \quad (1.5.2)$$

başlangıç koşuluyla (1.5.1) denklemini göz önüne alacağız.

$$w = \varepsilon u \quad (1.5.3)$$

yapısında (1.5.1) in çözümünü arıyoruz. $u(x, t)$ için pertürbasyon yöntemini probleme uyguluyoruz;

$$u_{tt} - \eta^2 u_{xx} + c^2 u - \varepsilon^2 \sigma u^3 = 0 \quad (1.5.4)$$

$$u(x, 0) = \cos kx \quad , \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.5.5)$$

$u(x, t)$ yi açtığımızda,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n \quad (1.5.6)$$

ve bunu (1.5.4) de yerine yazdığımızda,

$$L_n(u_n) = \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + c^2 u_n = 0 \quad , \quad n = 0, 1 \quad (1.5.7)$$

$$L_2(u_2, u_1, u_0) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + c^2 u_2 - \sigma u_0^3 = 0 \quad (1.5.8)$$

$$L_3(u_3, u_2, u_1, u_0) = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + c^2 u_3 - 3\sigma u_0^2 u_1 = 0 \quad (1.5.9)$$

olur. Başlangıç koşulları,

$$u_0(x, 0) = \cos kx \quad , \quad u_n(x, 0) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \quad (1.5.10)$$

$$\frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad (1.5.11)$$

idi. $u_0(x, t)$ için başlangıç değer probleminin çözümü;

$$u_0(x, t) = \cos wt \cdot \cos kx \quad (1.5.12)$$

$$w^2 = \eta^2 k^2 + c^2 \quad (1.5.13)$$

(1.5.13), lineer Klein-Gordon denklemi için "dağınlık bağıntısı" dır. u_1 için denklem homojen veriye sahiptir. Böylece,

$$\cos^3 kx = \frac{3}{4} \cos kx + \frac{1}{4} \cos 3kx \quad (1.5.14)$$

olmak üzere

$$u_1(x, t) = 0 \quad (1.5.15)$$

olur.

$u_2(x, t)$ için denklem,

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \eta^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + c^2 u_2 = \frac{3\sigma}{4} \cos^3 wt \cdot \cos kx + \frac{\sigma}{4} \cos^3 wt \cdot \cos 3kx \quad (1.5.16)$$

olarak yazılabilecektir.

$F_1(t)$ ve $F_2(t)$ yi sabit farzedelim.

$$u_2(x, t) = F_1(t) \cos kx + F_2(t) \cos 3kx \quad (1.5.17)$$

ve bunu (1.5.16) da yerine yazarsak, adi diferansiyel denklemleri elde ederiz.

$$F_1''(t) + (\eta^2 k^2 + c^2)F_1(t) = \frac{3\sigma}{4}\cos^3 wt \quad (1.5.18)$$

$$F_2''(t) + (9\eta^2 k^2 + c^2)F_2(t) = \frac{\sigma}{4}\cos^3 wt \quad (1.5.19)$$

(1.5.14) deki kullanımla denklemler F_1 ve F_2 , belirsiz katsayılar yöntemiyle kolayca çözülebilir. Bu sonuçları kullanarak, (1.5.4) ün pertürbasyon seri çözümünün terimleri ile (1.5.5)

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \cos wt \cdot \cos kx + \varepsilon^2 \left[\frac{9\sigma}{32w} t \sin wt + \frac{3\sigma}{128w^2} (\cos wt - \cos 3wt) \right] \cos kx \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{3\sigma}{128\eta^2 k^2} (\cos wt - \cos \lambda t) + \frac{\sigma}{128c^2} (\cos \lambda t - \cos 3wt) \right] \cos 3kx \\ & + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

olduğu bulunur. $\lambda^2 = 9\eta^2 k^2 + c^2$ dir.

(1.5.20) sonucu sadece $t < O(\varepsilon^{-2})$ gibi t değerleri için geçerlidir.

$$\cos wt + \frac{9\varepsilon^2 \sigma}{32w} t \sin wt = \cos \left[\left(w - \frac{9\varepsilon^2 \sigma}{32w} \right) t \right] + O(\varepsilon^4) \quad (1.5.21)$$

olur. (1.5.20) nin sağındaki ilk iki terimi değiştirmek için (1.5.21) i kullanarak

$$u(x, t) = \cos \left[\left(w - \frac{9\varepsilon^2 \sigma}{32w} \right) t \right] \cos kx + \varepsilon^2 [\dots] + O(\varepsilon^3) \quad (1.5.22)$$

sonucu elde edilir.

BÖLÜM 2

TEKİL PERTÜRBASYON VE SINIR KATMAN TEORİSİ

2.1. GENEL TANIMLAR

Tekil pertürbasyon teorisinde denklemlerdeki en yüksek türevli terimlerinden bir ya da daha fazlasını çarpan kabul eden küçük bir değere sahip parametreyi taşıyan kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesiyle ilgileniyoruz. Bu nedenle, söz konusu parametre sıfıra eşitlendiğinde, belirli bir denklemin ya merteye ya da türü (veya hem merteye hem de tür) değişmiş olur. Genel olarak, bu da düzgün bir pertürbasyon seri çözümünün, belirli bir problemdeki ilk ve/veya sınır verileri için yetersiz olduğunu göstermektedir. Bu durumda da, belirli bir problemin çözümünün tüm problem verileri için yeterli olduğu bir biçimden, pertürbasyon serileri tarafından ortaya koyulan bir biçime doğru hızla değiştiği sınır ya da başlangıç katmanları işin içine katmak gerekli olacaktır. Sınır katmanlarının ve o bölgelerde verilen denklemlerin yaklaşık biçimlerinin belirlenmesi "*sınır katman teorisi*" nin konusuna girer. Çözümlerin sınır katmanlarında geçerli kılınacağı süreç, dış bölgede geçerli olan pertürbasyon seri çözümleriyle tanımlanır. Buna genellikle "*eşleme süreci*" adı verilmektedir. Pertürbasyon ve sınır katman açılımlarını belirlemek için kullanılan bu genel sürece bazen "*eşleştirilmiş asimptotik açılımlar*" adı verilmektedir. Pertürbasyon ile sınır katman çözümlerini bir araya getirme yoluyla, kesin çözüme ulaşmanın zor ya da imkansız olduğu problemlerde ya da çözümün yorumlanıp değerlendirildiği durumlarda, çözüm konusunda oldukça yaklaşık bir açıklamaya ulaşılmaktadır.

Tekil pertürbasyon teorisinin bazen, düzgün pertürbasyon teorisinin herhangi bir nedenle yetersiz kaldığı problemlerde çözüm olarak sunulduğu görülmektedir. Bu durumda en yüksek türev ile çarpılan küçük bir değere sahip parametre olmayabilir, ancak bunun nedeni sonsuz bir bölge üzerinde düzgün olmayan bir çözümle sonuçlanan seküler terimlerin varlığı veya problemdeki veriler içinde küçük bir değere sahip parametrenin bulunması olabilir. Bununla birlikte, bu bölümdeki tartışmamızı, önceki paragrafta ele alınan problem türüyle sınırlayacağız.

Tekil pertürbasyon ve sınır katmanı problemlerinin her türünü kapsayan genel bir teori ortaya koymak karmaşık bir iş olacağı için, birinci mertebe denklemle ilgili iki basit örnek vererek başlayacağız. Daha sonra, genel bir bakış açısıyla ve bir dizi örnek yardımıyla ikinci ve daha yüksek mertebe denklemler üzerinde duracağız.

2.2. BİR BİRİNCİ MERTEBE DENKLEMİN TEKİL PERTÜRBASYONU

$$\varepsilon(u_t + u_x) + u = \sin t \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \quad (2.2.1)$$

denklemini için başlangıç değer problemi,

$$u(x, 0) = f(x) \quad (2.2.2)$$

ile $0 < \varepsilon \ll 1$ ve $f(x)$ düzgün bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}(\sin t - \varepsilon \cos t) + [f(x - t) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2}] \exp\left(\frac{-t}{\varepsilon}\right) \quad (2.2.3)$$

çözümüne sahiptir.

(2.2.1) ve (2.2.2) yi alışılmış pertürbasyon serisiyle çözmek istersek,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n \quad (2.2.4)$$

elde ederiz. (2.2.4) ü (2.2.1) de yerine koyarak ve ε un kuvvetlerine göre eşitleyerek

$$u_0 = \sin t \quad (2.2.5)$$

$$u_n = -\left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right) \quad , \quad n \geq 1 \quad (2.2.6)$$

sistemini elde ederiz. Buradan kolaylıkla, $n \geq 0$ olmak üzere

$$u_{2n} = (-1)^n \sin t \quad , \quad u_{2n+1} = (-1)^{n+1} \cos t \quad (2.2.7)$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda (2.2.4) pertürbasyon serisinin terimleri $u(x, t)$ yi sağlaması gereken (2.2.2) başlangıç değeri ne olursa olsun belirlenir. Bunun da

ötesinde, pertürbasyon serisi,

$$u(x, t) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \right] \sin t - \varepsilon \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{2n} \right] \cos t \quad (2.2.8)$$

$$= \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \sin t - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \cos t$$

(2.2.2) başlangıç koşulunu sağlamaz. Bunu nedeni de (2.2.1) deki indirgenmiş problem $-\varepsilon$ burada sifıra eşitlenmiştir- bir diferansiyel denklem bile değildir: Bu nedenle keyfi başlangıç değerleri alamaz. Bu indirgenmiş problem (2.2.5), (2.2.6) da gösterildiği gibi geleneksel pertürbasyon yaklaşımından kaynaklanan her türlü denklemleri karakterize etmektedir ve bunların hiçbirisi bir diferansiyel denklem değildir.

(2.2.8) pertürbasyon çözümü ile (2.2.3) deki tam çözümü karşılaştırdığımızda, her iki çözüm arasındaki farkın $0 \leq t \leq O(\varepsilon)$ bölgesinde önem taşıyan bir terim olduğunu görüyoruz. Bu da $t > O(\varepsilon)$ olduğunda, üstel $\exp(\frac{-t}{\varepsilon})$ nin küçük bir değere sahip olduğunu ve göz ardı edilebileceğini gösterir. Bu durumda da (2.2.1) ve (2.2.2) nin çözümüne (2.2.8) pertürbasyon sonucu ile yaklaşılır. Bununla birlikte, x eksenini yakınındaki $O(\varepsilon)$ enindeki bir katman içinde, (2.2.3) deki üstel terim önemlidir ve göz ardı edilemez.

$t = \varepsilon$ kabul ettiğimizde, $\sin t = \sin \varepsilon = \varepsilon$ ve $\cos t = \cos \varepsilon = 1$ elde edilir.

Bu durumda pertürbasyon serisindeki ilk iki terim,

$$\sin t - \varepsilon \cos t = \varepsilon - \varepsilon = 0 \quad (2.2.9)$$

olur. Bu da her iki terimin de ε da aynı mertebede olduklarını gösterir. Bu nedenle, pertürbasyon serileri $t = O(\varepsilon)$ olan bölgede iyi tanımlanmamıştır ve çözümün geçerli bir tanımı olamaz. (2.2.8) in $t = 0$ yakınında geçerli olmadığını biliyoruz, çünkü başlangıç koşulunu sağlayamamaktadır. Bununla birlikte süregiden tartışma, alışlagelmiş pertürbasyon yönteminin geçersiz olduğu bölgenin yaklaşık tanımını belirlemektedir.

Vardığımız önemli sonuç, pertürbasyon sonucunun başlangıç koşulunu yerine getirememesi nedeniyle tamamem saf dışı bırakılmak durumunda olmadığını

göstermektedir. Yalnızca x eksenı yakınındaki bir başlangıç katmanda $O(\varepsilon)$ bulunan farklı yada değıştirilmiş bir yaklaşımla yer değıştirmesi gerekir. Başlangıç katmanındaki denklemleri incelemek için "transformasyon genişletme" kavramını ortaya koyuyoruz.

$$t = \varepsilon^r \tau \quad (2.2.10)$$

Burada pozitif sabit olan r belirlenecektir. ε küçük bir değere sahip olduğu için, τ değışkeni küçük bir değere sahip yada makul ölçüdeki t değerlerine bile büyük gelmektedir. Böylece, x eksenı yakınındaki bölge genişletilmiş olur. $r = 1$ seçeneğinin problemimiz için uygun olduğuna göstermiş olduk, ancak bunun sınır katmanı argümanlarını kullanarak doğrudan (2.2.1) denklemini göstermek istiyoruz.

$$\varepsilon^{1-r} \hat{u}_\tau + \varepsilon \hat{u}_x + \hat{u} = \sin \varepsilon^r \tau = \varepsilon^r \tau - \frac{\varepsilon^{3r} \tau^3}{6} + O(\varepsilon^{5r}) \quad (2.2.11)$$

olup buradan da, $\hat{u}(x, \tau) = u(x, \varepsilon^r \tau)$ ile (2.2.10) (2.2.1) den (2.2.11) i elde ederiz.

Eğer $r = 1$ ise, $\hat{u}_\tau$ ve $\hat{u}$ terimleri arasında bir denge vardır. $\hat{u}_\tau$ terimini elde ederek başlangıç katmanda başlangıç koşulunu ortadan kaldıracak bir diferansiyel denkleme sahip olmamız gerekir. Ayrıca (2.2.1) deki indirgenmiş denklemden, $\hat{u}$ terimini elde etmek istiyoruz. Bu yüzden, ortaya çıkması beklenen sonuç, başlangıç katmandan (2.2.8) pertürbasyon serisinin geçerli olduğu dış bölgeye düzgün bir geçiştir. $r > 1$ olduğunda, $\hat{u}_\tau$ önde gelen terimdir. Bu r seçimi, başlangıç koşulunun göz önüne alınabileceği eşitliklere yol açmaktadır. $r < 1$ olduğunda, $\hat{u}$ önde gelen terimdir ve herhangi bir şey elde edilmiş olmaz.

$r = 1$ i (2.2.11) de yerine yazdığımızda,

$$\hat{u}_\tau + \hat{u} + \varepsilon \hat{u}_x = \sin \varepsilon \tau = \varepsilon \tau - \frac{\varepsilon^3 \tau^3}{6} + O(\varepsilon^5) \quad (2.2.12)$$

elde ederiz. $\tau = 0$ olduğunda başlangıç koşulu,

$$\hat{u}(x, 0) = f(x) \quad (2.2.13)$$

dir. (2.2.12) yi pertürbasyon yöntemi ile çözeriz ve

$$\hat{u}(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x, \tau) \varepsilon^n \quad (2.2.14)$$

elde ederiz. (2.2.14) ü (2.2.12) de yerine koyarak ve ε un kuvvetlerine göre eşitleyerek,

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau} + \hat{u}_0 = 0 \quad (2.2.15)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \tau} + \hat{u}_1 = \tau - \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} \quad (2.2.16)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial \tau} + \hat{u}_2 = -\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x} \quad (2.2.17)$$

elde edilir. Bu adi diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları,

$$\hat{u}_0(x, 0) = f(x) \quad , \quad \hat{u}_n(x, 0) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \quad (2.2.18)$$

dir. Sınır katman denklemleri genellikle adi diferansiyel denklemlerdir. İlk iki sınır katmanı terimi olan $\hat{u}_n(x, \tau)$ nın başlangıç değer problemlerinin çözümleri

$$\hat{u}_0(x, \tau) = f(x)e^{-\tau} \quad (2.2.19)$$

$$\hat{u}_1(x, \tau) = \tau - 1 + [1 - \tau f'(x)]e^{-\tau} \quad (2.2.20)$$

dir. Böylelikle,

$$\hat{u}(x, \tau) = f(x)e^{-\tau} + \varepsilon \{ \tau - 1 + [1 - \tau f'(x)]e^{-\tau} \} + O(\varepsilon^2) \quad (2.2.21)$$

elde edilir.

Genel olarak, dış pertürbasyon açılımında ortaya çıkan bilinmeyenleri belirlemek için eşleme işlemini uygulamamız gerekmektedir. Diğer bir deyişle (2.2.8) pertürbasyon serisinin ve (2.2.14) sınır katman serisinin ortak bir geçerlilik bölgesine sahip olduğunu varsayalım. Daha sonra, her iki seriyi tek bir değişken kümesi içinde dile getirip, bunlara karşılık gelen terimleri belirleriz. Bu problemdeki (dış) pertürbasyon serisi bütünüyle belirlenmiş olduğu için, eşleme işlemini göstererek çözümün sınırlı katman biçiminden nasıl $t > O(\varepsilon)$ dış bölgesinde geçerli olan biçime dönüştüğünü yansıtmayı amaçlıyoruz. Elimizde ortak bir geçerlilik bölgesine sahip olduğu varsayılan bir bağıntı bulunmaktadır. O da,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \varepsilon \tau) \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x, \tau) \varepsilon^n \quad (2.2.22)$$

dır. Buradan da,

$$u_0 + \varepsilon u_1 = \sin(\varepsilon\tau) - \varepsilon \cos(\varepsilon\tau) = \varepsilon\tau - \varepsilon + O(\varepsilon^3) \quad (2.2.23)$$

ve

$$\hat{u}_0 + \varepsilon \hat{u}_1 = f(x)e^{-\tau} + \varepsilon[\tau - 1] + \varepsilon[1 - \tau f'(x)]e^{-\tau} = \varepsilon\tau - \varepsilon \quad (2.2.24)$$

ilişkilerine ulaşılır. Burada, eşleme yapmak amacıyla τ nun büyük bir değere sahip olduğunu ve böylelikle $e^{-\tau}$ nun gözardı edilebileceğini, ancak $\varepsilon\tau$ nun küçük bir değere sahip olduğunu ve $\sin(\varepsilon\tau)$ ve $\cos(\varepsilon\tau)$ nun kuvvet serisi açılımlarında önde gelen terimler tarafından yakınsayabileceğini varsaydık. Bu süreci, formel hale getirebilmek için örneğin $\tau = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$ olduğu kabul edilerek, τ nun küçük bir değere sahip ε için büyük gelmesi sağlanır. Ancak $\varepsilon\tau = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ oldukça küçüktür. Sonra, eşlemenin gerçekleştirildiği bölge $t = \varepsilon\tau = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$ ye karşılık gelir.

(2.2.23) ü ve (2.2.24) ü karşılaştırarak her ikisinin de elde edilen ε mertebesiyle uyumlu olduğunu görürüz. Bunun ardından, yaptığımız pertürbasyondan ve sınır katmanı sonuçlarından da anlaşılacağı gibi (2.2.1), (2.2.3) ün yaklaşık $u(x, t)$ çözümü,

$$u(x, t) = t - \varepsilon + [f(x) - tf'(x) + \varepsilon]e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \quad , \quad 0 \leq t \leq O(\varepsilon) \quad (2.2.25)$$

ve

$$u(x, t) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \sin t - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \cos t = \sin t - \varepsilon \cos t + O(\varepsilon^2) \quad (2.2.26)$$

gibidir. ($t > O(\varepsilon)$ için)

2.3. BİR İÇ SINIR KATMANI

Başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \quad (2.3.1)$$

olan bir birinci mertebe denklem,

$$\varepsilon(u_t + u_x) + (t - 1)^2 u = 1 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \quad (2.3.2)$$

olsun. (2.3.2) nin kesin çözümü,

$$u(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} \exp \left[-\frac{(t-1)^3}{3\varepsilon} \right] \int_0^t \exp \left[\frac{(s-1)^3}{3\varepsilon} \right] ds \quad (2.3.3)$$

dir. Başlangıç koşulunun x den bağımsız olması nedeniyle (2.3.1), (2.3.2) nin adi diferansiyel denklem problemi olduğunu kabul edebiliriz. Yine de bu problemin pertürbasyon çözümünde ortaya çıkan olayı incelemekte yarar vardır. Çünkü bu durum daha genel problemlerde de ortaya çıkabilmektedir.

Öncelikle (2.3.1), (2.3.2) nin alışlagelmiş pertürbasyon seri çözümü olan,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \varepsilon^n \quad (2.3.4)$$

ilişisini ele alarak başlıyoruz. Önde gelen terimleri kolaylıkla elde edebiliriz.

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 = \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{2\varepsilon}{(t-1)^5} \quad (2.3.5)$$

(2.3.5) yalnızca başlangıç koşulu olan (2.3.1) i sağlamakla kalmaz, aynı zamanda $t = 1$ iken tekildir. Öte yandan (2.3.2) denklemi burada tekil değildir. Başlangıç koşulunu sağlamak için "genişletme transformasyonu" olan,

$$t = \varepsilon \tau \quad (2.3.6)$$

yu kullanarak ve (2.3.2) den hareket ederek,

$$\hat{u}_\tau + \varepsilon \hat{u}_x + \hat{u} - 2\varepsilon \tau \hat{u} + \varepsilon^2 \tau^2 \hat{u} = 1 \quad (2.3.7)$$

olduğunu gösterebiliriz.

Burada $\hat{u}(x, \tau) = u(x, \varepsilon \tau)$ dur. (2.3.6) yı elde edebilmek için bir önceki örnekte gösterilen yaklaşımı kullanabiliriz.

$$\hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n \varepsilon^n \quad (2.3.8)$$

olup ele alınırsa;

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau} + \hat{u}_0 = 1 \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \tau} + \hat{u}_1 = 2\tau \hat{u}_0 - \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} \quad (2.3.10)$$

olur. Bunlar önde gelen eşitliklerdir. $\hat{u}_n$ in başlangıç verileri;

$$\hat{u}_n(x, 0) = 0 \quad , \quad n \geq 0 \quad (2.3.11)$$

dir. Çözümler ise

$$\hat{u}_0 = 1 - e^{-\tau} \quad (2.3.12)$$

$$\hat{u}_1 = 2(\tau - 1) + (2 - \tau^2)e^{-\tau} \quad (2.3.13)$$

dir. Buradan da

$$\hat{u} = 1 - e^{-\tau} + \varepsilon [2(\tau - 1) + (2 - \tau^2)e^{-\tau}] \quad (2.3.14)$$

elde edilir.

(2.3.5) in küçük bir değere sahip t için genişletilmesi (2.3.14) ün ise büyük bir değere sahip τ için genişletilmesi durumunda, (2.3.5) ve (2.3.14) ün birbiriyle uyuyacağı ortaya konmuş olur.

$$t - 1 = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}}) \quad (2.3.15)$$

olduğunda (2.3.5) pertürbasyon serisinin bozulduğunu ve ε içinde aynı mertebede ikinci terimin önde gelen terim olduğunu biliyoruz. Bu $t = 1$ yakınındaki iç sınır katmanı bölgesinin genişliğinin $|t - 1| = O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ olduğunu gösterir. Sınır katmanında,

$$u = O[(t - 1)^{-2}] = O(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \quad (2.3.16)$$

olduğu ortaya çıkar. Bu nedenle, (2.3.1), (2.3.2) nin $t = 1$ yakınındaki sonucunu incelemek için,

$$t - 1 = \varepsilon^{\frac{1}{3}} \tau \quad , \quad u = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} v \quad (2.3.17)$$

kullanırız. Buradan da,

$$v_\tau + \tau^2 v + \varepsilon^{\frac{1}{3}} v_x = 1 \quad (2.3.18)$$

ilişkisine ulaşılır. Bu problemin yeni bir özelliği ise, yalnızca bağımsız bir değişkenin değil, aynı zamanda bağımlı değişkenin de genişletilmiş olmasıdır. Lineer olmayan problemlerde bu genellikle gerekmektedir ve homojen olmayan lineer denklemlerde de genellikle ortaya çıkmaktadır.

(2.3.18) deki $v(x, \tau)$ çözümünü belirlemek, pertürbasyon serisinin geçerli olduğu bölge olan $O(\varepsilon) < t < 1 - O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ e yaklaştıkça çözümün dış çözüm olan (2.3.5) ile bağdaşması gerekir. $v(x, \tau)$ nun sınır katman açılımı, (2.3.18) in yapısı ışığında $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ ün kuvvetleri olarak verilmiştir ve burada elimizde,

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varepsilon^{\frac{n}{3}} \quad (2.3.19)$$

var. Önde gelen eşitlik,

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + \tau^2 v_0 = 1 \quad (2.3.20)$$

dir ve bunun genel çözümü ise

$$v_0(x, \tau) = \exp\left[-\frac{\tau^3}{3}\right] \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma + b \cdot \exp\left[-\frac{\tau^3}{3}\right] \quad (2.3.21)$$

olarak elde edilir.

Buradaki keyfi sabit olan b henüz belirlenmemiştir. (2.3.21) ve (2.3.5) i bağdaştırmak için integrasyon ile

$$\int_{-\infty}^{\tau} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma = \frac{1}{\tau^2} \exp\left[\frac{\tau^3}{3}\right] + 2 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sigma^3} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma \quad (2.3.22)$$

ilişkisi elde edilir. Burada τ nun negatif olduğu varsayılır. Tekrar yapılan integrasyon ile

$$\int_{-\infty}^{\tau} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma = \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^5}\right) \exp\left[\frac{\tau^3}{3}\right] + 10 \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sigma^6} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma \quad (2.3.23)$$

bulunur. Bu durumda

$$v_0(x, \tau) = \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^5} + 10 \exp\left[-\frac{\tau^3}{3}\right] \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{\sigma^6} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma \quad (2.3.24)$$

elde edilir ve burada $b = 0$ olarak alınır. Çünkü aksi taktirde $\tau \rightarrow -\infty$ olması nedeniyle, sonuç üstel olarak büyüyecektir. (2.3.5) deki yapı sayesinde bundan kaçınılmış olur. Şimdi de τ cinsinden ifade edecek olursak,

$$u = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \left[\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^5} \right] \quad (2.3.25)$$

elde edilir. (2.3.17) nin ışığında, $u = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} v$ olduğu için (2.3.24) iç sınır katmanı ifadesinin (2.3.5) dış çözümle eşlendiğini görüyoruz.

Çözümle ilgili tartışmamızı bitirebilmek için, iç sınır katmanının üzerindeki bölgede ne olup bittiğini, diğer bir deyişle $t > 1 + O(\varepsilon^{\frac{1}{3}})$ olduğunda ne olduğunu belirlememiz gerekir. Dış çözüm olan (2.3.5) in bu bölgede geçerli olması beklenecektir. Ancak böyle olabilmesi için, dış çözümün, $\tau \rightarrow \infty$ durumunda iç sınır katmanı çözümüyle eşlenmesi gerekir. Bunu göstermek için $v_0(x, \tau)$ yu

$$v_0 = \exp\left[-\frac{\tau^3}{3}\right] \left\{ \int_{-\infty}^a \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma + \int_a^{\tau} \exp\left[\frac{\sigma^3}{3}\right] d\sigma \right\} \quad (2.3.26)$$

olarak yazalım. Burada hem a hem de τ pozitiftir ve $a < \tau$ dur. İkinci integralde daha önce yapıldığı gibi integrasyon uygulamak, $\tau \rightarrow \infty$ olduğunda dış çözüm olan (2.3.5) e eşlenebilen bir ifade ile sonuçlanır.

2.4. HİPERBOLİK BİR DENKLEMİN TEKİL PERTÜRBASYONU

Sabit katsayıları olan ve $0 < \varepsilon \ll 1$ in geçerli olduğu,

$$\varepsilon(u_{tt} - c^2 u_{xx}) + u_t + au_x = 0 \quad (2.4.1)$$

ikinci mertebe hiperbolik denklemin özelliği, $\varepsilon = 0$ olduğunda birinci mertebe bir denkleme indirgenmesidir. Buradan kaynaklanabilecek sorunların bazılarını incelemek için, x ekseninde verilen başlangıç verileriyle,

$$u(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (2.4.2)$$

birlikte (2.4.1) deki Cauchy problemi üzerinde durulacaktır.

(2.4.1) ve (2.4.2) yi

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \varepsilon^n \quad (2.4.3)$$

pertürbasyon serisini kullanarak çözmeye çalışalım. (2.4.3) ü (2.4.1) de yerine koyarak ve ε un kuvvetlerini eşitleyerek,

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} + a \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} + a \frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \end{cases}, \quad n \geq 1 \quad (2.4.4)$$

"recursive" sistemini elde ederiz. Bu sistemin başlangıç koşulları,

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = f(x) \quad , \quad u_n(x, 0) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \\ \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t} = g(x) \quad , \quad \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

dır.

$u_n(x, t)$ ye ait denklemlerin her biri birinci mertebe olduğu için, $t = 0$ olduğunda her bir u_n için yalnızca tek bir başlangıç koşulu bulunabilir. Bu nedenle de, u_n in başlangıç değer problemleri genellikle çözülemez. Pertürbasyonun tekil olma niteliği böylelikle kanıtlanmış olmaktadır. Sonuç olarak, pertürbasyon serisinin x eksenini yakınında geçerli olmasını bekleyemeyiz. Yine de, (2.4.3) serisinin, x ekseninden uzakta olmasını ve $u(x, t)$ nin çözümünü yaklaşık olarak vermesini bekleriz.

$u_n(x, t)$ nin (2.4.4) deki ilk birkaç denkleminin genel çözümleri,

$$u_0(x, t) = F(x - at) \quad (2.4.6)$$

$$u_1(x, t) = t(c^2 - a^2)F''(x - at) + G(x - at) \quad (2.4.7)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = \frac{1}{2}t^2(c^2 - a^2)F'''(x - at) + 2at(c^2 - a^2)F'''(x - at) \\ + t(c^2 - a^2)G''(x - at) + H(x - at) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

dir. Burada F, G ve H keyfi fonksiyonlardır.

Tüm x ler için $F(x)$, $G(x)$ ve $H(x)$ in tüm türevleriyle birlikte uniform olarak bağlı olduğunu kabul ederek, (2.4.6), (2.4.7) ve (2.4.8) deki εt ve $(\varepsilon t)^2$ katsayılı seküler terimlerin (2.4.3) pertürbasyon açılımında ortaya çıktığını görüyoruz. Böylelikle (2.4.3) serisinin $\varepsilon t = O(1)$ için veya $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$ olduğunda geçerli olması beklenemez.

Ek olarak (2.4.6), (2.4.7) ve (2.4.8) den pertürbasyon serisindeki $u_n(x, t)$ terimlerinin sağa veya sola doğru $|a|$ hızıyla (a nın etkisi eksi veya artı oluşuna bağlı olarak) hareket eden dalgalar olduğunu anlıyoruz. Hiperbolik eşitlik olan (2.4.1) deki karışıklıkların hareket edebileceği maksimum hızın karakteristik hız olduğunu gösterdik. Bu hız c ye eşittir ve $|a| > c$ olursa, pertürbasyon yaklaştırma yöntemlerimiz gösterdiği karışıklıklar, karakteristik hızı aşan hızlarda hareket edebilir. Bu da teorik olarak mümkün olmadığından, $|a| > c$ olduğunda pertürbasyon serilerini tümüyle reddetmek zorunda olduğumuzu göstermektedir.

Pertürbasyon serisindeki bilinmeyen fonksiyonları belirlemek için bunu başlangıç verileriyle ilişkilendirmemiz gerekir; bu da sınır katman teorisi kullanarak yapılabilir. Pertürbasyon serisinin $t > 0$ olduktan sonra geçerli olmaya başlaması beklendiği için, x eksenini yakınında (2.4.1) ve (2.4.2) nin çözümünün başlangıç koşulunu yerine getiren yapıdan pertürbasyon serisi yapısına hızla geçtiği bir başlangıç katman olduğunu kabul ediyoruz.

(2.4.1) in sınır veya başlangıç katmandaki doğru biçimini belirlemek için genişletme transformasyonunu uyguluyoruz;

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^r} \quad (2.4.9)$$

Buradan da pozitif sabit olan r belirlenir. (2.4.9) u (2.4.1) de yerine koyarak

$$\varepsilon^{1-2r} \hat{u}_{\tau\tau} - \varepsilon c^2 \hat{u}_{xx} + \varepsilon^{-r} \hat{u}_\tau + a \hat{u}_x = 0 \quad (2.4.10)$$

elde ederiz, burada

$$\hat{u}(x, \tau) = u(x, \varepsilon^r \tau) \quad (2.4.11)$$

eşitliği kurulur. $\hat{u}$ nun $\tau = 0$ olduğundaki başlangıç verileri,

$$\hat{u}(x, 0) = f(x) \quad , \quad \hat{u}_\tau(x, 0) = \varepsilon^r g(x) \quad (2.4.12)$$

gibidir.

(2.4.9) daki sabit r yi belirlemek için, (2.4.9) daki en önemli terimlerin, ε da en az kuvveti (olasılıkla negatif) olanlar olduğunu ileri sürüyoruz. (2.4.10)

denklemini istediğimiz bir pertürbasyon yöntemiyle çözüyoruz ve (2.4.10) daki en önemli terimler, pertürbasyon serisindeki terimlerle sağlanması gereken (homojen veya homojen olmayan biçimde) denklemlerin temel yapısını belirliyor. Her bir terimin $\tau = 0$ da iki başlangıç koşulunu sağlaması gerektiği için, $u_{\tau\tau}$ nun önde gelen terim olarak korunmasını istiyoruz. Bu da (2.4.10) daki karşılaştırmalı terimlerde görüldüğü gibi $1 - 2r \leq -r$ olmasını gerektirir. $r > 1$ olarak seçiyorsak, yalnızca $\hat{u}_{\tau\tau}$ önde gelen terimi olur. Bununla birlikte, $r = 1$ olduğunda, hem $\hat{u}_{\tau\tau}$, hem de $\hat{u}_\tau$ ε da aynı mertebededir ve bu seçenek aynı zamanda sınır katmanı bölgesinde önemli olan $\hat{u}_{\tau\tau}$ terimi ile (2.4.3) pertürbasyon serisinin geçerli olduğu dış bölgedeki indirgenmiş problemdeki (u_t olarak geçiyor) $\hat{u}_\tau$ terimi arasında bir denge kurmaktadır. Bu nedenle, $r = 1$ olarak belirliyoruz. (2.4.10) da ε ile çarpım,

$$\hat{u}_{\tau\tau} + \hat{u}_\tau + \varepsilon a \hat{u}_x - \varepsilon^2 c^2 \hat{u}_{xx} = 0 \quad (2.4.13)$$

vermektedir ve burada veriler,

$$\hat{u}(x, 0) = f(x) \quad , \quad \hat{u}_\tau(x, 0) = \varepsilon g(x) \quad (2.4.14)$$

olmaktadır. (2.4.13), (2.4.14) ü çözmek için, (2.4.13), (2.4.14) e sınır katman açılımını

$$\hat{u}(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x, \tau) \varepsilon^n \quad (2.4.15)$$

uyguluyor ve ε un kuvvetlerini eşitleyerek,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \tau} = 0 \quad (2.4.16)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \tau} = -a \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x} \quad (2.4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_n}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial \tau} = -a \frac{\partial \hat{u}_{n-1}}{\partial x} + c^2 \frac{\partial^2 \hat{u}_{n-2}}{\partial x^2} \quad , \quad n \geq 2 \quad (2.4.18)$$

rekürsif denklem sistemini elde ediyoruz. Buradaki başlangıç verileri,

$$\hat{u}_0(x, 0) = f(x) \quad , \quad \hat{u}_n(x, 0) = 0 \quad , \quad n \geq 1 \quad (2.4.19)$$

ve

$$\frac{\partial \hat{u}_0(x, 0)}{\partial \tau} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{u}_1(x, 0)}{\partial \tau} = g(x) \quad , \quad \frac{\partial \hat{u}_n(x, 0)}{\partial \tau} = 0 \quad n \geq 2 \quad (2.4.20)$$

olmaktadır.

Sınır katmanı eşitliklerinin tümü, adi diferansiyel denklemlerdir ve bunların başlangıç verileri $\tau = 0$ olup kolayca çözülürler. $n = 1$ ve $n = 2$ olduğunda,

$$\hat{u}_0(x, \tau) = f(x) \quad (2.4.21)$$

$$\hat{u}_1(x, \tau) = (g(x) + af'(x))(1 - e^{-\tau}) - a\tau f'(x) \quad (2.4.22)$$

olduğunu görürüz. $\hat{u}_1$ deki önemli özellik τ veya t arttıkça azalan ve (2.4.3) pertürbasyon açılımını göz önüne aldığımızda fazla bir rol oynamayan $e^{-\tau} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ varlığıdır. (2.4.3) deki bilinmeyen fonksiyonları belirlemek için, her biri $u(x, t)$ nin tek çözümü olan (2.4.15) ve (2.4.3) ü eşleştirmeliyiz. (2.4.15) in x eksenı yakınındaki sınır katman bölgesinde geçerli olduğu kabul edilmektedir ve pertürbasyon serisi x ekseninden uzak bir bölgede geçerlidir. Buna karşın bunların ortak bir geçerlilik bölgesine sahip olduğu varsayılmaktadır. $u(x, t)$ nin pertürbasyonu ve sınır katman açılımları açısından bakılacak olursa elimizde,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, \varepsilon\tau) \varepsilon^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n(x, \tau) \varepsilon^n \quad , \quad t = \varepsilon\tau \quad (2.4.23)$$

vardır. $\varepsilon\tau$ nun, $t = \varepsilon\tau$ olduğunda $u_n(x, \varepsilon\tau)$ nun seri açılımlarında önde gelen terimler tarafından yakınsamasını sağlayacak kadar küçük bir değere sahip olduğunu kabul ediyoruz. Bununla birlikte, τ nun $\hat{u}_n(x, \tau)$ daki $e^{-\tau}$ ların gözardı edilebilmesini sağlayacak kadar büyük olması gerekir. $t = \varepsilon\tau = O(e^{\frac{1}{2}})$ olduğunda durum böyledir. (2.4.6), (2.4.7) yi kullanarak

$$u_0 + \varepsilon u_1 = F(x) - \varepsilon a\tau F'(x) + \varepsilon G(x) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4.24)$$

elde ederiz. $e^{-\tau}$ terimlerinin gözardı edilmesi

$$\hat{u}_0 + \varepsilon \hat{u}_1 = f(x) - \varepsilon a\tau f'(x) + \varepsilon g(x) + \varepsilon a f'(x) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4.25)$$

verir. (2.4.23) deki benzer ε terimlerinin karşılaştırılmasıyla, (2.4.24) ve (2.4.25) kullanılarak,

$$F(x) = f(x), G(x) = g(x) + af'(x) \quad (2.4.26)$$

elde edilir. Sonra (2.4.3) pertürbasyon serisi,

$$u(x, t) = f(x - at) + \varepsilon [t(c^2 - a^2)f''(x - at) + g(x - at) + af'(x - at)] + O(\varepsilon^2) \quad (2.4.27)$$

halini alır.

Pertürbasyon serisindeki diğer terimleri belirlemek için bu eşleme süreci yüksek mertebelere taşınabilir. (2.4.3) ü (2.4.1) yerine koyarak,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + a \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + a \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] = O(\varepsilon^2) \quad (2.4.28)$$

elde edilir. (2.4.28) den

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -a \frac{\partial u_0}{\partial x} + O(\varepsilon) \quad (2.4.29)$$

varılır, $u_n(x, t)$ çözümlerinin düzgün olduğu varsayılarak,

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + O(\varepsilon) \quad (2.4.30)$$

elde edilir. (2.4.30) un (2.4.28) de yerine konması yoluyla aynı yakınsama düzeyinde,

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + a \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + a \frac{\partial u_1}{\partial x} + (a^2 - c^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] = O(\varepsilon^2) \quad (2.4.31)$$

verir.

ε un benzer kuvvetlerini toplayarak, çözümleri (2.4.6) ve (2.4.7) olan u_0 ve u_1 in eşitliklerini buluruz. $(a^2 - c^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ terimi, (2.4.7) deki seküler terime yol açan terimdir. (2.4.31) deki terimleri yeniden gruplayarak bu seküleriteden kaçınabiliriz. O zaman eşitlik,

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + a \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon(a^2 - c^2) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right] + \varepsilon \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + a \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] = O(\varepsilon^2) \quad (2.4.32)$$

haline gelir.

Sol taraftaki birinci parantezde bulunan terim sıfıra eşitlenerek $u_0(x, t)$ nin difüzyon eşitliğini karşılaması sağlanır. $u_0(x, t)$ nin başlangıç verilerin (2.4.27) deki $u(x, t)$ olduğu ve $t = t_0 \leq O(\frac{1}{\varepsilon})$ da değerlendirildiği düşünülebilir. (2.4.1) in çözümünün büyük değere sahip t de bir difüzyon eşitliğini yaklaşık olarak sağlaması beklenecektir.

S O N U Ç

Çalışmamızda uygulamaları daha çok fizikte olan pertürbasyon yöntemleri hakkında bilgi verildi. Pertürbasyon yöntemleri Düzgün Pertürbasyon ve Tekil Pertürbasyon olmak üzere iki ana bölüm halinde incelenip bunların Helmholtz ve Klein-Gordon denklemlerine nasıl uygulandığı gösterildi. Sınır katman teorisi hakkında bilgi verildi.

Bu bilgilerden yararlanılarak iyi bir yaklaşım sağlamak için denklemin yapısına göre bir pertürbasyon yöntemi belirlenebilir. Düzgün pertürbasyon teorisinin herhangi bir nedenle yetersiz kaldığı problemlerde, tekil pertürbasyon teorisinin çözüm olarak sunduğu görülmektedir.

K A Y N A K L A R

1. KEVORKIAN,J. - COLE,J.D., 1981,
Perturbation Methods In Applied Mathematics,NEWYORK, Copyright
1981 by Springer-Verlog NEWYORK INC.
2. ZAUDERER,Erich,1989,
Partial Differential Equations Of Applied Mathematics,NEWYORK,
Copyright 1989 by John Wiley & Sons Inc.

Ö Z G E Ç M i Ő

Adı Soyadı : H.Mashar CİNMAN
Doğum Tarihi : 13 Ağustos 1970
Doğum Yeri : İstanbul
İlk Öğretim : 1981 yılında Behçet Kemal Çağlar
İlkokulundan mezun oldu.
Orta Öğretim : 1987 yılında Etiler Lisesinden mezun oldu.
Lisans Öğretimi : 1988 yılında Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümünde başladığı eğitimini
1992 yılında tamamladı.
Görevi : Öğrenci

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
KURUM BAŞKANLIĞI