

93765

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMEL OPERATÖR TEORİSİ
KAVRAMLARI**

Müh. Hülya TUNA

**F.B.E Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 7 Temmuz 2000
Tez Danışmanı : Prof. Tahir ŞİŞMAN (YTÜ)
Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdullah YILDIZ (SAKARYA Ü.)
Prof. Dr. Mustafa SİVRİ (YTÜ)

25-07-2000

İSTANBUL, 2000

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1 GİRİŞ.....	1
2 UZAYLAR VE İLGİLİ KAVRAMLAR	2
2.1 Kompleks N-Uzayı	2
2.1.1 Cauchy-Schwarz eşitsizliği.....	3
2.1.2 Üçgen eşitsizliği.....	5
2.2 Hilbert Uzayı	5
2.2.1 Bir noktanın sonlu boyutlu alt uzaya uzaklığı	7
2.2.2 Paralelkenar teoremi	7
2.2.3 Ortonormal sistemler	9
2.3 Banach Uzayları.....	10
2.3.1 İlgili kavramlar	10
2.3.2 Vektör uzayı.....	11
2.3.2.1 Altuzay.....	14
3 SINIRLI LİNEER OPERATÖR TEORİSİNİN KAVRAMLARI	21
3.1 Eşlenik Operatör	21
3.2 Kendi Kendine Eş Operatörler.....	23
3.3 Normal ve Üniter Operatörler.....	27
3.4 İzdüşüm Operatörleri	30
3.5 Pozitif Operatör	32
3.6 Sürekli Lineer Dönüşümler.....	35
3.7 Lineer Fonksiyoneller.....	36
3.7.1 Sınırlı lineer fonksiyoneller	37
3.8 Sonlu Boyutlu Uzaylarda Lineer Operatörler ve Fonksiyoneller	39
3.9 Operatör ve Fonksiyonel Dizilerinin Yakınsaklığı.....	42
4 SONUÇLAR.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

SİMGE LİSTESİ

C^n	n boyutlu kompleks sayılar uzayı
R^n	n boyutlu reel sayılar uzayı
H	Hilbert uzayı
B	Banach uzayı
T	Operatör
T^*	Eşlenik operatör
P	Projeksiyon operatörü
$M^\perp$	M uzayının diki
$\langle, \rangle$	İç çarpım
$\ \cdot \ $	Norm
$L(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına lineer sınırlı operatörler
$\dim(X)$	X uzayının boyutu
$L(H)$	H Hilbert uzayından H Hilbert uzayına lineer sınırlı operatorler uzayı

ÖNSÖZ

Bu çalışma fonksiyonel analiz, uygulamalı matematik, operatörler gibi konularda lisans üstü ve doktora çalışması yapacak araştırmacılar için kavramları öğrenme ve anlama bakımından faydalı olacaktır. Çalışma, konunun geniş bir spektruma sahip olması nedeniyle uygulamalı matematik ve fonksiyonel analiz konularında sıkça karşılaşılan kavramlarla kısıtlandırılmıştır. İçerik olarak en temel ve ana kavramlar seçilmiş, ileri derecede teorik araştırmalara temel teşkil etmesi maksadına uygun konu seçimleri yapılmıştır. Konu itibarı ile tezin adından da anlaşılacağı üzere temel operatörler esas alınmış ilk bölümde buna bağlı olarak operatör uzayları incelenmiş ve örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise operatör bahsine geçilmiş temel tanımlamalar yapıldıktan sonra operatör çeşitlerinden bahsedilmiştir. Lisans ve yüksek lisans eğitimimde katkılarından dolayı başta tez danışmanım Prof.Tahir Şişman olmak üzere hocam Prof.Dr. AbdullahYıldız ile tüm hocalarıma teşekkür ederim. Faydalı olması Dileğiyle...



ÖZET

Bu çalışmada Temel Operatör Teorisi kavramlarının bir incelemesi gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Operatör Kavramı incelemesinden önce operatörlerin işlem gördüğü sıkça karşılaşılan en temel uzaylar örnekleriyle beraber ortaya konmuş ardından operatör tipleri ve özelliklerinin incelenmesine geçilmiştir. Bu işlemler yapılırken sıkça rastlanılan operatör tipleri ve bunların en temel özellikleri verilmeye çalışılmıştır.



ABSTRACT

In this study, It is aimed to study of the Concept of the Basic Operator Theory ,before studying of Operator Concept, some important well known mathematical spaces on which operators work, are concerned and dealt with. After that familiar operators and their some important properties are explained.



1. GİRİŞ

Temel operatör teorisi tüm matematik dallarının doğrudan veya dolaylı olarak ilişkide bulunduğu ve kavramlarından faydalandığı matematiğin esas bölümlerinden biridir. En basit $Ax=b$ denkleminde en karmaşık yapılara kadar operatör kavramından bahsetmek mümkündür. Bu alanda genel anlamda incelemeler belirli tiplere oranla daha azdır. Yani araştırmacılar genellikle operatörlerin belli özelliklere haiz grupları üzerinde incelemelerini yoğunlaştırmışlardır. Oysa spesifik uygulamalardan çok bir bilim adamının mevcut tüm yapıları bilmesi yapacağı araştırmalarda kendisine bir ufuk kazandıracaktır. Ayrıca yapılan çalışmaların matematiksel karşılığının ilgili kavram ve teoremlere dayandırılması araştırmanın bilimselliğini teşkil edecektir.

Bu çalışmada amaçlanan operatörler teorisi kavramlarının ve özelliklerinin detaylı bir şekilde derlenmesi olmuştur. Bu anlamda konunun önde gelen eserleri incelenerek bir sentez oluşturulmuştur. Bu işlem gerçekleştirilirken öncelikle matematiğin temel taşı olan uzaylar ile ilgili tanım ve kavramlar verilmiş ardından temel operatör teorisi ile ilgili kısma geçilmiştir.

2. UZAYLAR VE İLGİLİ KAVRAMLAR

Bu bölümde üzerinde operatörlerin çalıştığı en temel matematik uzayların tanıtımı yapılacaktır. Uzay yapılarının ve özelliklerinin iyi bilinmesi temel operatör teorisinin anlaşılması bakımından büyük önem taşımaktadır. Aşağıda temel operatör teorisi içinde sıkça karşılaşılan bu uzayların tanıtımı yapılacaktır.

2.1 Kompleks N-Uzayı

C kompleks sayılar kümesini belirtsin ve $H=C^n$ toplama ve skaler çarpımın aşağıdaki şekilde ifade edildiği n elemanlı $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ kompleks sayılar kümesi olsun.

$x=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ve $y=(\eta_1, \dots, \eta_n)$ olmak üzere

$$x+y=(\xi_1+\eta_1, \dots, \xi_n+\eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n) \quad \alpha \in C^n$$

Compleks değerli $\langle, \rangle$ fonksiyonu

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \quad (2.1)$$

Şeklinde H^*H de kartezyen çarpım ile belirlenir ve buna H uzayında iç çarpım denir.

İç çarpım özellikleri x, y ve $z \in H$ olmak üzere ;

- (i) Sadece $x \neq 0$ iken $\langle x, x \rangle > 0$
- (ii) $\forall x, y$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

$$(iv) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$$

(ii) (iii) ve (iv) ye bağılı olarak şunları yazmak mümkündür:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$$

$$\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$$

Her bir $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektör olarak adlandırılır. x vektörünün boyu veya normu $\|x\|$ olarak sembolize edilir ve

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

Eğer $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ düzlemde iki vektör ise, θ x ve y arasındaki açı olmak üzere iç çarpımları

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.3)$$

dır.

Böylece $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ olur. Bu eşitsizlik C^n de sadece iç çarpım özelliklerine bağlı olarak ispatlanacaktır.

2.1.1 Cauchy-Schwarz eşitsizliği

Eğer x ve y C^n kompleks düzleminde iki vektör ise;

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.4)$$

$y \neq 0$ olduğu durumlarda sadece ve sadece bazı $\lambda \in \mathbb{C}$ ler için $x = \lambda y$ eşitliğinden sözedilebilir.

İspat: Herhangi $\lambda \in \mathbb{C}$ için (i)-(iv) koşulları sağlatılacak olursa

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \|x\|^2 - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \langle y, x \rangle + \lambda \bar{\lambda} \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda \langle y, x \rangle + |\lambda|^2 \|y\|^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Eğer $\langle x, y \rangle = 0$ olursa eşitsizlik manasız olur. Bunun için $\langle x, y \rangle \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (2.5)

de $\lambda = \frac{\|x\|^2}{\langle y, x \rangle}$ yazılarak;

$$0 \leq -\|x\|^2 + \frac{\|x\|^4 \|y\|^2}{|\langle x, y \rangle|^2}$$

elde edilir.

$y \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\langle y, x \rangle = 0$ ise sadece ve sadece $x=0$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde bir eşitlikten sözedilebilir. Eğer $\langle y, x \rangle \neq 0$ ise sadece ve sadece (2.5) eşitliği $x = \lambda y$

olduğu durumlarda $\lambda = \frac{\|x\|^2}{\langle y, x \rangle}$ için sağlandığında eşitsizlik de sağlanmış olur.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir sonucu olarak $x = (|x_1|, \dots, |x_n|)$, $y = (|y_1|, \dots, |y_n|)$ 'ye uygulayacak olursak şunlar elde edilir:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

Altındaki eşitsizlik düzlemdeki vektörlere uygulandığında , üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamının uzunluğundan büyük veya eşit olduğunu ifade eder.

2.1.2 Üçgen eşitsizliği

$x, y \in C^n$ için

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2.7)$$

dir. Buna üçgen eşitsizliği denir.

İspat: Cauchy-Schwarz eşitsizliği ile ispat mümkündür.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

2.2 Hillbert Uzayı

Lineer Uzay: E x, y, z elemanlar kümesi olsun. Eğer bu kümenin elemanları için aşağıdaki işlemler tanımlı ise E 'ye lineer uzay denir.

- 1) $x, y \in E$ için $x+y \in E$ olsun.
- 2) $x \in E$ ve $\alpha \in C$ (kompleks sayılar) olmak üzere $\alpha x \in E$ olsun.

$$I_1: \quad x+y=y+x$$

$$I_2: \quad x+(y+z)=(x+y)+z$$

$$I_3: \quad E \text{ kümesinde } 0 \text{ denilen öyle bir eleman olsun ki } x+0=x \text{ olsun.}$$

$$I_4: \quad \text{Herhangi } x \text{ keyfi elemanı için } E \text{ kümesinde } -x \text{ elemanı mevcut olsun ki } x+(-x)=0 \text{ olsun.}$$

$$\Pi_1: \quad \alpha(x+y)=\alpha x + \alpha y \quad (\alpha : \text{kompleks sayı})$$

$$\Pi_2: \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha, \beta \text{ keyfi sayılar.})$$

$$\Pi_3: \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\alpha, \beta \text{ keyfi sayılar.})$$

$$\Pi_4: \quad 1 \cdot x = x \text{ olsun.}$$

Örnek: Reel sayılar kümesi bir lineer reel uzay oluşturur.

: Tüm $\mathbb{C}$ kompleks sayılar uzayı bir lineer kompleks uzay oluşturur.

: $\mathbb{R}^n (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{R}$ ise bu uzay lineer uzay oluşturur.

: $\mathbb{C}^n (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad x_i \in \mathbb{C}$ ise bu uzay lineer uzay oluşturur.

Bu şekilde örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Teorem: E bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in E$ için

$$(i) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Schwarz eşitsizliği})$$

$$(ii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Üçgen eşitsizliği})$$

$$(iii) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{Paralelkenar kuralı}) \quad (2.9)$$

İspat: (i) ve (ii) nin ispatı (2.4) ve (2.7) teki ispatların aynısıdır.

$$\begin{aligned} & \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \\ &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Tanım: $\{x_n\}$ dizisi $\in H$ olsun. $x \in H$ için eğer $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ise $x_n \rightarrow x$ 'e yakınsar ve bu dizi yakınsak bir dizidir denir.

Eğer $\{x_n\} \in H$ dizisi $n, m \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ ise Cauchy Dizisi olarak adlandırılır.

Eğer H deki her Cauchy Dizisi yine H deki bir vektöre yakınsarsa H tam olarak adlandırılır. Bir tam iç çarpım uzayı Hilbert Uzayı olarak adlandırılır. Bu uzay C^n kompleks sayılar uzayının en genel halidir.

2.2.1 Bir noktanın sonlu boyutlu alt uzaya uzaklığı

Bu bölümde E bir iç çarpım uzayını temsil edecektir.

Tanım: Bir $v \in E$ noktasından $S \subset E$ kümesine olan $d(v, S)$ uzaklığı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$d(v, S) = \inf \{ \|v - s\| : s \in S \} \quad (2.10)$$

Eğer M , E 'nin sonlu boyutlu alt uzayı ise her $v \in E$ için $d(v, M) = \|v - w\|$ şeklinde tek bir $w \in M$ noktası mevcuttur. Buradan $z \neq w$ olmak üzere her $z \in M$ için $\|v - w\| < \|v - z\|$ yazılabilir.

Tanım: Eğer $u, v \in E$ vektörlerinin iç çarpımları $\langle u, v \rangle = 0$ ise bu vektörler ortogonaldir denir ve $u \perp v$ şeklinde gösterilir. $M \subset E$ olmak üzere her $m \in M$ için $v \perp m$ ise v vektörü M kümesine göre ortogonaldir denir. Vektörler sistemi $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ $i \neq j$ için $\phi_i \perp \phi_j$ ise ortogonal olarak adlandırılır. Eğer $\|\phi_i\| = 1$, $1 \leq i$ ise sistem ortonormal olarak adlandırılır.

2.2.2 Paralelkenar teoremi

Eğer $u \perp v$ ise

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ dir.} \quad (2.11)$$

İspat: $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Ana probleme geri dönülecek olursa E nin sonlu boyutlu alt uzayı M ile $v \in E$ vektörünün verildiği görülür. Burada bulunmak istenen $d(v, M) = \|v - w\|$ gibi bir $w \in M$ vektörüdür.

Eğer $v - w \perp M$ şeklinde bir $w \in M$ vektörü var ise bu w vektörü

$d(v, M) = \|v - w\|$ şeklinde M de tektir. Aslında eğer $z \in M$ ve $z \neq w$ ise $w - z \in M$ dir ve $v - w$ ile $w - z$ ye paralelkenar teoremi uygulanırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\|v - z\|^2 = \|v - w + w - z\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - z\|^2 > \|v - w\|^2 \quad (2.10)$$

w yı bulmak için $\phi_1, \dots, \phi_n$, M kümesi için ortonormal bazlar olsun. $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j$ yazılırsa her bir k için

$$0 = \langle v - w, \phi_k \rangle = \langle v, \phi_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j, \phi_k \right\rangle = \langle v, \phi_k \rangle - \alpha_k$$

Buradan

$$w = \sum_{j=1}^n \langle v, \phi_j \rangle \phi_j \text{ yazılabilir.}$$

Teorem: M , E ' nin sonlu boyutlu altuzayı ve $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de M altuzayı için ortonormal bazlar

olsun. Her bir $v \in E$ için M de $\|v - w\| = d(v, M)$ özelliğini sağlayan $w = \sum_{j=1}^n \langle v, \phi_j \rangle \phi_j$ vektörü tektir.

Teorem: $M \subseteq E$ 'nin altuzayı olsun. $v \in E$ ve $w \in M$ olduğunu kabul edelim. Sadece ve sadece $\|v - w\| = d(v, M)$ iken $v - w \perp M$ olur.

2.2.3 Ortonormal sistemler

Lineer Cebirden çağrışımla, H Hilbert uzayından alınan $u_1, u_2, \dots, u_n$ lineer bağımsız vektörler kullanılarak $\text{sp}\{\varphi_i\}_{i=1}^k = \text{sp}\{u_i\}_{i=1}^k$ şartına haiz aşağıdaki şekilde elde edilen φ_i 'ler ile teşkil edilen yapıya ortonormal sistem denir. Bu kuruluş;

$\varphi_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, \varphi_i \rangle \varphi_i$ olmak kaydı ile $\varphi_k = \frac{u_k - w_k}{\|u_k - w_k\|}$ şeklinde verilir. Aşağıda

verilen teorem ile $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ değerlerini bulma zorunluluğu olmadan φ_n değerinin bulunmasını sağlaması bakımından önemlidir.

Teorem: (Gram-Schmidt ortogonalleştirme işlemi)

Eğer $u_1, u_2, \dots$ H 'da lineer bağımsız vektörler ise, Yine H 'da aşağıdaki şekilde verilen

$\varphi_1, \varphi_2, \dots$ vektörleri de ortonormal bir yapı teşkil eder ve $\text{sp}\{\varphi_i\}_{i=1}^k = \text{sp}\{u_i\}_{i=1}^k$ $k \geq 1$ dir. $\varphi_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

ve $w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, \varphi_i \rangle \varphi_i$ olmak üzere $\varphi_n = \frac{u_n - w_n}{\|u_n - w_n\|}$

$$w_n = -\frac{1}{\det(\langle u_i, u_j \rangle)_{i,j=1}^{n-1}} \det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \dots & \langle u_{n-1}, u_1 \rangle & \langle u_n, u_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle u_1, u_{n-1} \rangle & \dots & \langle u_{n-1}, u_{n-1} \rangle & \langle u_n, u_{n-1} \rangle \\ u_1 & \dots & u_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dir.

2.3 Banach Uzayları

Vektör uzayı alınır ve üzerinde bir norm vasıtası ile bir metrik tanımlanırsa önemli ve kullanışlı metrik uzaylar elde edilir. Elde edilen uzaya Normlu Uzay denir. Eğer bu normlu uzay tam bir metrik uzay ise buna da Banach Uzayı denir. Normlu uzaylar teorisi özellikle Banach Uzayları ve bunlar üzerine tanımlı lineer operatörler teorisi fonksiyonel analizin çok gelişmiş bölümlerini temsil ederler. Bu tanımlamaları daha iyi ortaya koymak için bazı temel kavramların verilmesi gerekir.

2.3.1 İlgili kavramlar

Normlu uzay, üzerinde bir norm vasıtası ile metriğin verildiği vektör uzayıdır. Bu kavram düzlem veya üç boyutlu uzayda bir vektörün boyunun genelleştirilmesidir. Banach uzayı tam metrik uzay olan bir normlu uzaydır. Bir normlu uzay eğer kapanışa sahipse bu Banach Uzayıdır. Normlu bir uzayda sonsuz seriler tanımlanabilir ve kullanılabilir.

X normlu uzayından bir başka Y normlu uzayına yapılan dönüşüme Operatör denir. Yine bu X normlu uzayından skaler birer uzay olan $\mathbb{R}$ reel sayılar ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar uzayına yapılan dönüşüme ise Fonksiyonel denir. Bu iki kavramdan önemlileri sınırlı operatör ve sınırlı fonksiyoneldir. Çünkü bunlar süreklidirler ve vektör uzayları yapısında avantaj sağlarlar. Eğer lineer bir operatör sınırlı ise süreklidir. Bu önemli bir sonuçtur ve vektör uzayları burada fonksiyonellerin ve operatörlerin üzerinde çalıştığından büyük önem taşıyacaktır.

Bir X normlu uzayından verilen bir Y normlu uzayına dönüşümü sağlayan tüm sınırlı lineer operatörler kümesi $L(X, Y)$ ile gösterilir ve bir normlu uzay teşkil eder. Benzer şekilde X normlu uzayı üzerinde tanımlı sınırlı lineer fonksiyoneller kümesi de bir normlu uzaydır. Buna X in dual uzayı denir ve X' ile gösterilir.

Analizlerde sonsuz boyutlu normlu uzaylar sonlu boyutlulardan daha önemlidir. Sonlu boyutlu olanlar basit olup onlar üzerinde tanımlı operatörler matrislerle temsil edilebilirler.

Bu çalışmada uzaylar X ve Y , operatörler büyük harfler ile (özellikle T), bir x elemanına T operatörünün etkisi yani x 'in görüntüsü Tx ile (parantez kullanılmadan), fonksiyoneller küçük harfle (özellikle f), bir x elemanının f deki değeri $f(x)$ ile (parantez ile) gösterilecektir. Bu kullanım oldukça yaygındır.

2.3.2 Vektör uzayı

Vektör Uzayları matematiğin birçok alanlarında ve onun uygulamalarında önemli bir rol oynar. Aslında, farklı pratik ve teorik problemlerde bir X kümesinin varlığı kabul edilir. Bu X kümesinin elemanları üç boyutlu uzayda vektörler, sayı dizileri veya fonksiyonlar olabilir ve bu elemanlar sabitler (sayılar) ile toplanabilir ve çarpılabilir. Sonuç ise tekrar X kümesinin bir elemanı olur. Böyle belirli durumlar aşağıda tanımlanan vektör uzayının içeriğini ifade eder. Tanım genel alan K 'yı içerecektir fakat fonksiyonel analizde K , R (reel sayılar) veya C (kompleks sayılar) olarak kullanılacaktır. K 'nın elemanları skalerler olarak adlandırılır, bizim konumuzda ise reel veya kompleks sayılar olacaklardır.

Tanım (Vektör Uzayı)

Bir K alanı üzerindeki vektör uzayı veya lineer uzay, elemanları $x, y, \dots$ gibi vektörler olan ve iki cebirsel işlemi sağlayan, boş olmayan bir X kümesidir. Bu işlemler, K 'nın elemanları ile gerçekleştirilen vektör toplamı ve vektörler ile skalerlerin çarpımı olarak adlandırılır.

Vektör toplamı her sıralı (x, y) vektör çiftini bir $x+y$ vektörüne dönüştürür. Bu x ve y vektörlerinin toplamı olarak adlandırılır ve değişme ile birleşme özelliklerini sağlar. Her vektör için şu eşitlikler yazılabilir:

$$x+y=y+x$$

$$x+(y+z)=(x+y)+z$$

Ayrıca sıfır vektörü olarak adlandırılan bir 0 vektörü ve her x vektörü için bir $-x$ vektörü vardır ki bütün vektörler için aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$x+0=x$$

$$x+(-x)=0$$

Vektörler ile skalerlerin çarpımı her x vektörü ve α skalerini bir αx vektörüne dönüştürür. Bu x vektörü ile α skalerinin çarpımı olarak adlandırılır ve her x, y vektörü ile α, β skalerleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$$

$$1x = x$$

Dağılma özelliğinden;

$$\alpha (x+y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

Tanımdan da anlaşılacağı üzere vektör toplamı $X+X \rightarrow X$ 'e ,skalerler ile çarpımı ise $K \cdot X \rightarrow X$ 'e tanımlanmıştır. K, X vektör uzayının vektör alanı veya katsayılar alanı olarak adlandırılır. Eğer $K=\mathbb{R}$ ise X reel vektör uzayı, $K=\mathbb{C}$ ise X kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır.

Çok yaygın olarak kullanılan bazı vektör uzayları aşağıda verilmiştir;

$1.\mathbb{R}^n$ uzayı: Bu uzay n adet reel sayı ile teşkil edilen ve elemanları $x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ şeklinde sıralı n 'liler olarak verilen elemanlar uzayıdır. Bu uzay iki cebirsel işlemin aşağıdaki klasik şekilde verilmesiyle reel bir vektör uzayı olarak ortaya çıkar.

$$x + y = (\zeta_1 + \eta_1, \zeta_2 + \eta_2, \dots, \zeta_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha \zeta_1, \alpha \zeta_2, \dots, \alpha \zeta_n)$$

Burada α Reel sayılar kümesinden alınan bir skalerdir.

2. C^n uzayı: Tamamen benzer tarzda bir diğer vektör uzayı C^n teşkil edilebilir. Bu uzayın yine n 'li olarak isimlendirilen elemanları C kompleks sayılar kümesinden alınarak teşkil edilir. Cebirsel işlemler R^n için verilen tarzdadır. Kısaca bu uzayda bir vektör uzayıdır.

3. $C[a,b]$ uzayı: Bu uzayın elemanları $[a,b]$ aralığından sürekli, reel değerli fonksiyonlardan ibarettir. Tüm bu fonksiyonlar uzayı real bir vektör uzayı yapısında olup cebirsel işlemler uzay üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$

$$(\alpha x)(t) = \alpha x(t) \quad \alpha \in R \text{ dir.}$$

Gerçekten de $x+y$ ve αx $[a,b]$ aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlardır. R reel sayılar kümesi üzerinde tüm türevlenebilen fonksiyonlar kümesi, verilen bir A kümesi üzerinde sınırlı fonksiyonlar kümesi ve verilen bir $[a,b]$ aralığında belirli bir anlamda integrale haiz fonksiyonlar kümesi gibi yapılar da birer vektör uzayıdır.

4-) l^2 uzayı: Bu uzayın elemanları yakınsak sonsuz dizilerdir. Uzay için cebirsel işlemler ise aşağıdaki formda verilmektedir.

$$(\zeta_1, \zeta_2, \dots) + (\eta_1, \eta_2, \dots) = (\zeta_1 + \eta_1, \zeta_2 + \eta_2, \dots)$$

$$\alpha(\zeta_1, \zeta_2, \dots) = (\alpha \zeta_1, \alpha \zeta_2, \dots)$$

Gerçekten de $x = (\zeta_i) \in l^2$ (yani $\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^2 < \infty$) ve $y = (\eta_i) \in l^2$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden $x+y \in l^2$ dir. Yine $\alpha x \in l^2$ olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer vektör uzayları elemanları l^∞ da, l^p (burada $1 < p < +\infty$) uzayları ile kurulan yapılardır.

2.3.2.1 Alt uzay

X vektör uzayının boş olmayan Y alt kümesi verilsin. $y_1, y_2 \in Y$ ve α, β skalerler olmak üzere $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ şartı sağlanıyor ise Y kümesine X kümesinden alınan iki cebirsel işleme göre vektör alt uzayı denir. Yani Y kümesi de bir vektör uzayıdır. X kümesinin $X=Y$ alt uzayına improper alt uzay ve $X(\neq \{0\})$ kümeler proper alt uzaylar denir.

Bir X vektör uzayının vektör olarak isimlendirilen $x_1, x_2, \dots, x_m$ elemanlarının lineer birleşimi;

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ skalerlerdir. X kümesinin bir M alt kümesinden alınan vektörlerin lineer birleşimi $\text{Span } M$ olarak isimlendirilir.

X kümesinin M alt kümesine ait $x_1, x_2, \dots, x_r$ $r \geq 1$ vektörlerinin lineer bağımsızlığı kavramı aşağıdaki şekilde verilir.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0 \quad (2.14)$$

eşitliği $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ skalerleri hepsi birden sıfır olmadan gerçekleşiyorsa bu vektörlere lineer bağımsızdır denir.

X vektör uzayı için verilen bir n pozitif sayısı için n adet lineer bağımsız eleman (vektör) bulunabiliyorsa ve $n+1$ vektör için bu yapı artık lineer bağımlı hale dönüşüyorsa, X uzayının

boyutu n dir denir ve $n=\dim X$ olarak gösterilir. Tanım gereği $X = \{0\}$ kümesi sonlu boyutlu olup bu hal için $\dim X=0$ dır. Eğer X vektör uzayı sonlu boyutlu değilse sonsuz boyutludur denir. Yani bu halde yukarıdaki tarifteki n sayısını tespit etmek mümkün olmamaktadır.

$\dim X=n$ için X vektör uzayından alınan lineer bağımsızlığı sağlayan n elemana uzayın bazı denir.

Yukarıdaki örneklerde verilen X vektör uzayları bir çok hallerde aynı zamanda üzerinde bir d metriğinin verildiği birer metrik uzaylardır. Bununla birlikte cebirsel yapı ve metrik arasında böyle bir bağ yok ise cebir ve metrik kavramlarının birlikte kullanımı ile faydalı ve uygulanabilir bir teori kurmak mümkün değildir. Böyle bir cebirsel ve geometrik ihtiyacı karşılamak üzere X kümesi üzerinde tanımlı d metriği yerine norm olarak isimlendirilen ve aşağıdaki belirtilecek özelliklere haiz yeni bir yapı gerekecektir.

Tanım (Banach uzayı):

X vektör uzayı üzerinde, aşağıdaki özelliklere haiz bir norm tarifi verilerek bu uzaylar normlu uzay haline gelirler. Eğer bu şartları sağlayan X normlu uzayı aynı zamanda tam bir uzay ise bu uzaya Banach uzayı denir. İlgili X vektör uzayından alınan her Cauchy dizisi ilgili norma göre aynı uzayda yakınsak ise X uzayına tam uzay denir.

X vektör uzayı üzerinde (reel ve kompleks) değerli bir norm $x \in X$ için $\|x\|$ şeklinde temsil edilir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- 1-) $\|x\| \geq 0$
- 2-) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 3-) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- 4-) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

Burada x ve y keyfi X vektör uzayının elemanları ve α ise skaler bir değerdir. Bu şekilde verilen X üzerindeki norm $d(x,y)=\|x-y\|$ şeklinde bir metrik tarifler. Bu metriğe normdan üretilen metrik denir. Bu tanımlamalar temel vektör cebri için x elemanının uzunluğu olup $\|x\|=\|x\|$ şeklinde gösterilir. Neticede her normlu uzay ve Banach uzayı aynı zamanda metrik uzaylardır.

Banach uzayları, tam uzay olmanın getirdiği özellikler nedeniyle önem taşımaktadır.

Yukarıda her norm tarifinden bir metrik tarifi çıkarılabileceği vurgulanmıştı. Fakat verilen bir X vektör uzayı üzerinde verilen her metrik bir normdan elde edilebilir yargısı her zaman doğrudur.

X bir vektör uzayı olmak üzere ve $x,y,z \in X$ için

- 1-) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$
- 2-) $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$
- 3-) $(x,y)=\overline{(y,x)}$
- 4-) $(x,x) \geq 0 \quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$

özelliklerini sağlayan (.) yapısına iç çarpım denir. Bu özellikleri tüm elemanları için sağlayan X vektör uzayına ise iç çarpım uzayı veya ön Hilbert uzayı denir. Aynı zamanda iç çarpımdan aşağıdaki şekilde elde edilen metriğe göre verilen X vektör uzayı tam bir uzay ise bu uzaya Hilbert uzayı denir.

X ön Hilbert uzayında verilen iç çarpımdan $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ şeklinde bir norm elde etmek mümkündür. Ayrıca X üzerinde bir metrik

$$(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y),(x-y)} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Neticede, iç çarpım uzayları normlu uzaylardır ve Hilbert uzayları ise Banach uzaylarıdır.

$L(H) : H \rightarrow H$ 'ya (H :Hilbert Uzayı) sınırlı, lineer operatörler uzayı olsun. Bu uzay bir vektör uzayı olup $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ şeklinde reel değerli bir ifade ile $L(H)$ üzerinde yukarıdaki norm özelliklerini temin eder. Tersine Hilbert uzayı olarak, $L(H)$ uzayı üzerinde $(\cdot, \cdot)_1$ şeklinde tanımlı $\|A\| = (A, A)_1^{1/2}$ bağıntıyı sağlayacak bir iç çarpım bulmak mümkün değildir. Gerçekten de eğer böyle bir iç çarpım mevcut olsaydı, $L(H)$ 'dan alınan A ve B operatör elemanları için paralel kenar özelliği sağlanmış olacaktı. Yani

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 = 2(\|A\|^2 + \|B\|^2) \quad (2.16)$$

Fakat eğer $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ birim dik bir yapıya sahip H 'da bir vektör çifti iseler;

$$Ax = (x, \varphi_1)\varphi_1, \quad Bx = (x, \varphi_2)\varphi_2$$

olup aşağıdaki eşitliği sağlar;

$$1 = \|A\| = \|B\| = \|A + B\| = \|A - B\|$$

Bu sonuç ise paralel kenar kuralının ihlali anlamına gelmektedir. Bu örnek ve benzerleri üzerinde iç çarpım kurallarına uymayan normun geçerli olduğu uzaylar üzerinde çalışılması anlamına gelmektedir.

Bazı Banach uzay örnekleri aşağıda verilmektedir;

1-) Her Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır.

2-) $C[a,b]$ uzayı $a \leq x \leq b$ aralığında kompleks değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. Klasik anlamda uzay üzerinde verilen toplama ve skaler çarpma işlemleri ile C kompleks sayılar üzerine bir vektör uzayıdır. Bu uzay için norm

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \quad (2.17)$$

şeklinde verilir. $\{f_n - f_m\}$ dizisi düzgün olarak $[a,b]$ de sifıra yaklaştığında $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ $n, m \rightarrow \infty$ olduğundan, bu ifade düzgün Cauchy kriteri neticesinden $\{f_n\}$ $C([a,b])$ yakınsaktır. Dolayısı ile $C([a,b])$ Banach uzayıdır.

3-) $1 \leq p \leq \infty$ için elemanları $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots)$ ζ_i kompleks sayıları ile teşkil edilen ve $\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p < \infty$ şartını sağlayan elemanlardan kurulu l^p uzayı verilsin. Bu uzay için toplama ve skaler ile çarpma l^2 yakınsak sonsuz boyutlu diziler uzayı için verildiği formda alınırsa ilgili norm;

$$\|\zeta\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\zeta_n|^p \right)^{1/p} \quad (2.18)$$

şeklinde verilir. l^p uzayının tamamlanması l^2 uzayının tamamlanmasına benzer olarak verilir.

4-) l^∞ uzayı için, yani tüm sınırlı kompleks sayılar ile teşkil edilmiş sıralılar ile oluşturulan sonsuz diziler uzayı, bir inceleme yapılacak olunursa; Yine toplama ve bir skaler ile çarpma l^2 de olduğu gibi alınabilir. Dolayısı ile bu uzay da vektör uzayı olup;

$$\|(\zeta_1, \zeta_2, \dots)\| = \sup_n |\zeta_n| \quad (2.19)$$

l^∞ 'da bir norm tanımlar. Bu uzayında ilgili norma göre tam olduğu kolayca gösterilebilir.

5-) Diğer bir Banach uzayı örneği de $l^p(Z)$ ($1 \leq p \leq \infty$) ile gösterilen iki taraflı sonsuz boyutlu diziler uzayıdır. Bu uzayın elemanları;

$$\zeta = (\dots, \zeta_{-2}, \zeta_{-1}, \zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots)$$

şeklindedir. Uzay için norm;

$$\|\zeta\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\zeta_n|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$\|\zeta\|_p = \sup_n |\zeta_n| \quad p=\infty \quad (2.20)$$

şeklinde verilir.

6-) $L_p([a,b])$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{1/p}$$

Banach uzayıdır.

7-) H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olmak üzere $L(H_1, H_2)$ operatörler uzayı Banach uzayıdır. Bunu görmek için $\{A_n\}$ $L(H_1, H_2)$ de verilmiş bir Cauchy dizisi olsun. Tüm $x \in H_1$ için

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

$m, n \rightarrow \infty$

H_2 tam olduğundan $\{A_n x\}$ yakınsaktır. A operatörü $A: H_1 \rightarrow H_2$ ve $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ olsun. Şimdi ise

A operatörünün $L(H_1, H_2)$ kümesinde ve $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ olduğu gösterilirse $L(H_1, H_2)$ uzayının tam

olduğu gösterilmiş olur. Verilen $\varepsilon \rightarrow 0$ için öyle bir N tamsayısı mevcuttur ki $n, m \geq N$ için $\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon$ dir. O halde eğer $\|x\| = 1$ ve $n \geq N$ olduğundan

$$\|A_n x - Ax\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon \quad (2.22)$$

Bu ise $A = (A - A_n) + A_n$ 'nin $L(H_1, H_2)$ 'de olmasını gerektirir. Netice olarak;

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0$$

dır. Yani bu norm'lu uzay aynı zaman da tamdır. O halde bir Banach uzayıdır.

3.SINIRLI LİNEER OPERATÖR TEORİSİNİN KAVRAMLARI

3.1 Eşlenik Operatör

$A \in L(H, H)$ olsun. $\forall y \in H$ için $f_y(x) = \langle Ax, y \rangle$ fonksiyoneli sınırlı lineer fonksiyoneldir.

Riesz teoreminden $y^* \in H$ olmak üzere $\forall x \in H$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\langle Ax, y \rangle = f_y(x) = \langle x, y^* \rangle \quad (3.1)$$

Bu A^* operatörünü oluşturur. Öyleki $A^* : H \rightarrow H$ ve $A^*y = y^*$ olacaktır. Buradan tüm $x \in H$ için

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (3.2)$$

yazılabilir. Bu A^* operatörüne A operatörünün eşleniği denir.

$A^* \in L(H, H)$ lineer operatörler kümesinden olup $\|A\| = \|A^*\|$ dır.

Gerçekten de verilen u ve $v \in H$ için $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\langle Ax, \alpha u + \beta v \rangle = \overline{\alpha} \langle Ax, u \rangle + \overline{\beta} \langle Ax, v \rangle = \langle x, \alpha A^*u + \beta A^*v \rangle \text{ dir.} \quad (3.3)$$

Netice olarak tanımdan $A^* \langle \alpha u + \beta v \rangle = \alpha A^*u + \beta A^*v$ olur.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle Ax, y \rangle = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle x, A^*y \rangle| = \|A^*\| \quad (3.4)$$

Örnekler:

1. $0^* = 0$ ve $I^* = I$ dır.
2. S_r, l_2 üzerinde sağa öteleme operatörü olsun. Verilen $y = (y_1, y_2, \dots)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ için

$$\langle S_1 x, y \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = x_1 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3 + \dots = \langle x, y^* \rangle$$

$$y^* = (y_2, y_3, \dots) \text{ dir.}$$

Buradan S_1^* operatörünün sola öteleme operatörü olduğu görülür.

3. S_1, l_2 üzerinde sola öteleme operatörü olsun. $y = (y_1, y_2, \dots)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ için

$\langle S_1 x, y \rangle = x_2 \bar{y}_1 + x_3 \bar{y}_2 + \dots = \langle x, y^* \rangle$ olur. $y^* = (0, y_1, y_2, \dots)$ dir. Buradan S_1^* ın sağa öteleme operatörü olduğu görülür.

4. $a(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı kompleks değerli lebesgue ölçülebilir fonksiyonu ve $A : L_2([a, b]) \rightarrow L_2([a, b])$ da $(Af)(t) = a(t) f(t)$ şeklinde tanımlanmış sınırlı lineer operatör olsun. Tüm $f, g \in L_2([a, b])$ için

$$\langle Af, g \rangle = \int_a^b a(t) f(t) \bar{g}(t) dt = \langle f, \bar{a}g \rangle \text{ olur.}$$

Buradan $(A^* g)(t) = \bar{a}(t) g(t)$ olur.

Teorem: $K : L_2([a, b]) \rightarrow L_2([a, b])$ operatörü $(Kf) = \int_a^b k(t, s) f(s) ds$ şeklinde tanımlanmış sınırlı lineer operatör olsun. $k \in L_2([a, b] \times [a, b])$ ve tüm $g \in L_2[a, b]$ için

$$(K^* g)(t) = \int_a^b k(s, t) g(s) ds \text{ dir.} \quad (3.5)$$

İspat: Fubini`'s teoremi yardımı ile teoremi aşağıdaki şekilde ispatlamak mümkündür.

$$\begin{aligned} \langle Kf, g \rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(t, s) f(s) ds \right) \bar{g}(t) dt \\ &= \int_a^b f(s) \left(\int_a^b k(t, s) \bar{g}(t) dt \right) ds = \langle f, g^* \rangle \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$g^*(s) = \int_a^b k(t,s)g(t)dt \text{ dir.} \quad (3.6)$$

Teorem: Eğer $A, B \in L(H, H)$ ise

$$(i) \quad (A+B)^* = A^* + B^*; \quad (3.7)$$

$$(ii) \quad (\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*, \alpha \in \mathbb{C}; \quad (3.8)$$

$$(iii) \quad A^{**} = A; \quad (3.9)$$

$$(iv) \quad H \text{ Hilbert Uzayı olmak üzere } D \in L(H, H) \text{ ise } (DA)^* = A^* D^* \text{ olur.}$$

İspat: (i) verilen $x, y \in H$ için

$$\langle (A+B)x, y \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle Bx, y \rangle = \langle x, A^*y + B^*y \rangle \text{ olur.}$$

$$(A+B)^*y = A^*y + B^*y$$

$$(ii) \quad \langle \alpha Ax, y \rangle = \alpha \langle x, A^*y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} A^*y \rangle \text{ buradan}$$

$$(\alpha A)^*y = \bar{\alpha} A^*y \text{ olur.}$$

$$(iii) \quad A^* \text{ in eşleniği tanımından } A^{**}x = Ax \text{ olur.}$$

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle x, A^*y \rangle = \langle y, Ax \rangle \text{ tir.}$$

$$(iv) \quad v \in H \text{ için}$$

$$\langle DAx, v \rangle = \langle Ax, D^*v \rangle = \langle x, A^*D^*v \rangle \text{ buradan}$$

$$(DA)^*v = A^*D^*v \text{ olur}$$

3.2 Kendi Kendine Eş Operatörler

$H \rightarrow H$.ye tanımlı bu operatörler ile $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi içerisindeki tüm sayılar arasında ilginç bir bağıntı vardır. $\mathbb{C}$ den alınan $z \rightarrow \bar{z}$ arasındaki bağıntı türünden bir bağıntı $T \rightarrow T^*$ arasında da mevcuttur. Operatör teorisinde bu benzerliğin operatörler üzerindeki benzerliğe aksetmesi oldukça faydalı sonuçlar doğurur. Bu sistemler arasındaki en önemli

fark ise $H \rightarrow H'$ 'ye tanımlı bu operatörlerin cebirsel işleminin komütatif olmamasıdır. Ayrıca tabii ki bu yapının kompleks sayılardaki yapıya oranla daha karmaşık olduğu açıktır.

Kompleks sayıların en önemli alt sistemi olan reel sayılar $z = \bar{z}$ ile karakterize edilmiştir. Benzer tarzda H üzerinde tanımlı öyle A operatörleri düşünülebilir ki bunların eşlenikleri kendine eş olsun. Yani $A = A^*$ olsun. Bu tip operatörlere kendi kendine eş operatör denir.

Biliyoruz ki $0^* = 0$ $I^* = I$ dır. Yani sıfır ve birim operatörler kendi kendine eş operatörlerdir.

A_1 ve A_2 kendi kendilerine eş operatörler ve α, β reel sayılar olmak üzere

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^* = \bar{\alpha} A_1^* + \bar{\beta} A_2^* = \alpha A_1 + \beta A_2 \text{ dir.} \quad (3.10)$$

Sonuç olarak kendi kendine eş iki operatörün lineer birleşimi de kendi kendine eştir. İlave olarak eğer $\{A_n\}$ A 'ya yakınsayan kendi kendine eş operatörler dizisi ise A da kendi kendine eş bir operatördür.

$$\begin{aligned} \|A - A^*\| &\leq \|A - A_n\| + \|A_n - A_n^*\| + \|A_n^* - A^*\| = \|A - A_n\| \\ &+ \|(A_n - A)^*\| = \|A - A_n\| + \|A_n - A\| = 2\|A_n - A\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$A - A^* = 0$$

$$A = A^*$$

Bu sonuç bizi aşağıdaki ilk teoreme götürür.

Teorem: $H \rightarrow H$ ye tüm lineer operatörler kümesinin kapalı reel lineer alt uzayı bu uzayın kendi kendine eş operatörler kümesidir. Bu uzaya birim operatörü içeren reel Banach Uzayı da denir.

Kendi kendine eş operatörler bahsinde kendi kendine eş iki operatörün çarpımı ile ilgili birşey belirtilmedi. Sebebi ise bu konuda az bilgiye sahip olunmasıdır. Aşağıdaki teorem bu bazda verilen bir neticeyi ortaya koyar.

Teorem: Eğer A_1 ve A_2 H de kendi kendine eş operatörler ise bunların çarpımı olan $A_1.A_2$ kendi kendine eştir $\Leftrightarrow A_1.A_2 = A_2.A_1$

İspat: Bu da aşağıdaki ifadenin neticesinde ortaya çıkar:

$$(A_1 A_2)^* = A_2^* . A_1^* = A_2 . A_1 \quad (3.11)$$

T operatörü H da rastgele bir operatör ise tüm x, y ler için aşağıdaki ifadeyi doğrulamak mümkündür.

$$T = 0 \Leftrightarrow (Tx, y) = 0$$

Açıktır ki her x için $T = 0 \Rightarrow (Tx, x) = 0$ dir.

Teorem: Eğer T , H üzerinde tanımlı bir operatör ve her x için $(Tx, x) = 0$ ise $T=0$ dir.

İspat: Tüm x, y ler için $(Tx, y) = 0$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. İspat ise aşağıdaki eşitliğin gerçekleşmesine bağlıdır.

$$(T(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y) - |\alpha|^2 (Tx, x) - |\beta|^2 (Ty, y) = \alpha \bar{\beta} (Tx, y) + \bar{\alpha} \beta (Ty, x) \quad (3.12)$$

Bu eşitliğin sol tarafı hipotez gereği aynı zamanda sağ tarafı tüm α, β lar için sıfıra eşittir. Dolayısı ile $\alpha = 1, \beta = 1$ yazılabilir. Bu durumda eşitlik

$$(Tx, y) + (Ty, x) = 0 \quad (3.13)$$

halini alır.

Eğer $\alpha = i, \beta = 1$ yazarsak eşitlik

$$i(Tx, y) - i(Ty, x) = 0 \quad (3.14)$$

halini alır.

(3.14) eşitliğini i 'ye bölüp sonucu (3.13) ye eklersek $2(Tx, y) = 0$ olup $(Tx, y) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Dikkat edilecek husus ispatın gerekliliği için reel sayılar yerine kompleks sayıların kullanıldığıdır. Bu sonuç aşağıdaki teoremin ispatında da kullanılacaktır ki bu teorem kendi kendine eş operatörlerin reel sayılara güçlü bir bağla bağlı olduğunu göstermektedir.

Teorem: H üzerinde Toperatörü kendi kendine eş ise $\Leftrightarrow (Tx, x)$ tüm x ler için reeldir.

İspat: T operatörü kendi kendine eş olduğundan

$$\overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (x, T^* x) = (Tx, x) \quad (3.15)$$

dır. Bu ise tüm x ler için (Tx, x) in reel olduğunu gösterir. Diğer taraftan (Tx, x) tüm x ler için reel olduğundan

$$(Tx, x) = \overline{(Tx, x)} = \overline{(x, T^* x)} = (T^* x, x) \text{ veya tüm } x \text{ ler için} \\ ([T - T^*]x, x) = 0 \text{ olur.}$$

Bir önceki teorem sonucundan $T - T^* = 0$ olmak zorundadır. Buradan da $T = T^*$ sonucuna ulaşılır.

Bu teorem bize kendi kendine eş operatörleri mukayese imkanı tanır. Yani A_1 ve A_2 kendi kendine eş operatörler ise tüm x ler için eğer $(A_1 x, x) \leq (A_2 x, x) \Rightarrow A_1 \leq A_2$ olur. Bu bağıntının ana gerçekleri aşağıda özetlenmiştir.

Teorem: H Hillbert uzayı üzerinde tanımlı tüm kendi kendine eş operatörlerin reel Banach Uzayı , lineer yapıları ve sıra yapıları arasındaki bağ aşağıdaki şekilde verilen kısmi sıralı bir kümedir:

- (1) Eğer $A_1 \leq A_2$ ise her A için $A_1 + A \leq A_2 + A$ dir.
- (2) Eğer $A_1 \leq A_2$ ve $\alpha \geq 0$ ise $\alpha A_1 \leq \alpha A_2$ dir.

İspat: $A_1 \leq A_2$ ve $A_2 \leq A_1$ olarak kabul edelim. Bir önceki teoremden tüm x değerleri için $([A_1 - A_2]x, x) = 0$ $A_1 - A_2 = 0$ ve $A_1 = A_2$ dir.

(1) ve (2) ifadelerinin ispatı kolaydır.

Örneğin eğer $A_1 \leq A_2$ yani her x için $(A_1 x, x) \leq (A_2 x, x)$ ise
 $(A_1 x, x) + (Ax, x) \leq (A_2 x, x) + (Ax, x)$

veya her x için

$((A_1 + A)x, x) \leq ((A_2 + A)x, x)$ yazılır.

$A_1 + A \leq A_2 + A$ dır.

Eğer $A \geq 0$ yani her x için $(Ax, x) \geq 0$ ise A kendi kendine eş operatörü pozitifdir denir.

Açıktır ki 0 ve birim operatörü olan I pozitifdir ve T^*T ve TT^* rastgele bir operatör olan T için bunlar da pozitifdir.

3.3 Normal ve Üniter Operatörler

H üzerinde verilen bir N operatörü kendi eşleniği ile komüt edebiliyorsa yani $NN^* = N^*N$ oluyorsa N operatörüne normal operatör denir. Bu tip operatörler H üzerinde en genel operatörlerdir öyleki bunlar üzerinde temel ve açık teori mümkün olur.

Her kendi kendine eş operatör açık olarak normal operatördür. Eğer N operatörü normal ve α her hangi bir skaler ise αN de normal operatördür. İlave olarak $\{N_k\}$ normal operatörler dizisi yakınsak ve limiti N ise N de normaldir.

$$N_k^* \rightarrow N^*$$

$$\begin{aligned} \|NN^* - N^*N\| &\leq \|NN^* - N_k N_k^*\| + \|N_k N_k^* - N_k^* N_k\| \\ &+ \|N_k^* N_k - N^*N\| = \|NN^* - N_k N_k^*\| + \|N_k^* N_k - N^*N\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$NN^* - N^*N = 0 \text{ olur.}$$

Teorem: H üzerindeki lineer operatörler kümesinin H de verilen tüm normal operatörler kümesi H üzerindeki lineer operatörlerin kapalı bir alt kümesidir. Öyleki bu küme tüm kendi kendine eş operatörleri içerir ve skaler çarpmaya göre de kapalıdır. Doğal olarak iki normal

operatörün toplamının ve çarpımının da normal olup olmadığı merak konusudur. Genel olarak değildir. Bununla birlikte aşağıdaki teoremler mevcuttur.

Teorem: Eğer N_1 ve N_2 H üzerinde normal operatörler ise öyleki biri diğerinin eşleniği ile komüt edebiliyorsa $N_1 + N_2$ ve $N_1.N_2$ de normaldirler.

İspat: $N_1 N_2^* = N_2^* N_1 \Leftrightarrow N_2 N_1^* = N_1^* N_2$ ifadesi teoremin kabul ifadesidir. $N_1 + N_2$ nin normal olduğunu göstermek için aşağıdaki hesaplama yapılır.

$$\begin{aligned} (N_1 + N_2)(N_1 + N_2)^* &= (N_1 + N_2)(N_1^* + N_2^*) \\ &= N_1 N_1^* + N_1 N_2^* + N_2 N_1^* + N_2 N_2^* \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (N_1 + N_2)^*(N_1 + N_2) &= (N_1^* + N_2^*)(N_1 + N_2) \\ &= N_1^* N_1 + N_1^* N_2 + N_2^* N_1 + N_2^* N_2 \end{aligned}$$

Benzer tarzda $N_1.N_2$ nin normal olduğu aşağıdaki ifade ile gösterilir.

$$N_1 N_2 (N_1 N_2)^* = N_1 N_2 N_2^* N_1^* = N_1 N_2^* N_2 N_1^* = N_2^* N_1 N_1^* N_2 = N_2^* N_1^* N_1 N_2 = (N_1 N_2)^* N_1 N_2$$

Teorem: Tüm x 'ler için H üzerinde T operatörü normaldir $\Leftrightarrow \|T^* x\| = \|Tx\|$

İspat:

$$\begin{aligned} \|T^* x\| = \|Tx\| &\Leftrightarrow \|T^* x\|^2 = \|Tx\|^2 \Leftrightarrow (T^* x, T^* x) \\ &= (Tx, Tx) \Leftrightarrow (TT^* x, x) = (T^* Tx, x) \Leftrightarrow (TT^* - T^* T)x, x = 0 \end{aligned}$$

Aşağıdaki teoremdeki ifade sıkça kullanılan bir neticedir.

Teorem: Eğer N , H üzerinde normal bir operatör ise $\|N^2\| = \|N\|^2$ dir.

İspat: Önceki teoremten faydalananarak her x için

$$\|N^2x\| = \|NNx\| = \|N^*Nx\|$$

esitliğı yazılabilir ve bu ifade $\|N^2\| = \|N^*N\|$ olduğunu gösterir.

$$\|N^2\| = \|N^*N\| \text{ ispat böylece tamamlanmış olur.}$$

Bilindiğı üzere herhangi bir z kompleks sayısı a ve b reel sayılar olmak üzere $z=a+ib$ şeklinde tek türlü ifade edilmektedir. Bu reel sayılar z 'nin reel ve imajinal kısmı olarak $a = \frac{(z + \bar{z})}{2}$,

$$b = \frac{(z - \bar{z})}{2i} \text{ eşitlikleri ile gösterilebilir. Genel operatörler ve kompleks sayılar arasındaki}$$

benzerlik ile kendi kendine eş operatörler ve reel sayılar arasındaki benzerlik bize H 'de verilen herhangi bir T operatörü için $A_1 = \frac{(T + T^*)}{2}$ $A_2 = \frac{(T - T^*)}{2i}$ ifadesini sağlar. Burada A_1 ve A_2 nin kendi kendine eş olduğu açıktır ve $T = A_1 + iA_2$ dir. T nin bu şekildeki tek ifadesi T^* 'ın aşağıdaki ifadesini doğurur.

$$T^* = A_1 - iA_2$$

Buradaki A_1 ve A_2 kendi kendine eş operatörleri T operatörünün reel ve imajinal kısmıdır.

$B(H)$ H deki lineer operatörler kümesinin $B(H)$ nın yapısının karmaşıklığı operatör çarpımının komüt edememesindendir.

Teorem: Eğer T , H üzerinde bir operatör ise T normaldir $\Leftrightarrow T$ nin imajinal ve reel kısımları komüt edebilir.

İspat: Eğer A_1 ve A_2 T nin sırası ile reel ve imajinal kısımları ise $T = A_1 + iA_2$ ve $T^* = A_1 - iA_2$ dir.

$$TT^* = (A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) = A_1^2 + A_2^2 + i(A_2A_1 - A_1A_2) \text{ ve}$$

$$T^*T = (A_1 - iA_2)(A_1 + iA_2) = A_1^2 + A_2^2 + i(A_1A_2 - A_2A_1)$$

Açıktır ki eğer $A_1A_2 = A_2A_1$ ise

$$TT^* = T^*T \text{ dir.}$$

Tersi olarak da eğer $TT^* = T^*T$ ise

$$A_1A_2 - A_2A_1 = A_2A_1 - A_1A_2$$

$$2A_1A_2 = 2A_2A_1 \text{ ve}$$

$$A_1A_2 = A_2A_1 \text{ dir.}$$

Muhtemelen kompleks düzlemin en önemli alt sistemi reel sayılardan sonra birim dairedir.

Öyleki birim daire de şu eşitlikler ile ifade edilir $|z| = 1$ veya $z\bar{z} = \bar{z}z = 1$. H üzerinde verilen U

operatörü $UU^* = U^*U = I$ eşitliğini sağlıyorsa U operatörüne üniterdir denir. Üniter operatörler ki bunlar aynı zamanda normal operatörlerdir kompleks sayılardaki mutlak değer 1 ifadesine denk düşerler. Tanımından da açıkça anlaşılacağı üzere H üzerindeki üniter operatörler tekil operatörler olmayıp tersleri eşleniklerine eşittir.

Teorem: Eğer T, H üzerinde verilmiş bir operatör ise aşağıdaki ifadelerin biri diğerine denktir.

$$(1) \quad T^*T = I; \quad (3.16)$$

$$(2) \quad (Tx, Ty) = (x, y) \text{ her } x, y \text{ için}; \quad (3.17)$$

$$(3) \quad \|Tx\| = \|x\| \text{ her } x \text{ için}; \quad (3.18)$$

İspat: Eğer (1) doğru ise her x ve y için $(T^*Tx, Ty) = (x, y)$ veya $(Tx, Ty) = (x, y)$ olur ve böylece (2) de doğrulanır.

Eğer (2) doğru ise $y=x$ almak sureti ile her x için $(Tx, Tx) = (x, x)$ veya $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$ olur ve böylece (3) te doğrulanır.

$$\|Tx\| = \|x\| \Rightarrow \|Tx\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow (Tx, Tx) = (x, x) \Rightarrow (T^*Tx, x) = (x, x) \Rightarrow ([T^*T - I]x, x) = 0$$

3.4 İzdüşüm Operatörleri

Banach Uzayı üzerindeki bir izdüşüm operatörü B , B 'de karesi kendisine eşit olan operatördür. Bir başka deyişle $P^2 = P$ özelliğine haiz operatöre izdüşüm operatörü denir. Her P izdüşüm operatörü M ve N şeklinde kapalı lineer alt uzay çifti tanımlar. Bunlar sırası ile P nin görüntüsü ve sıfır (null) uzayıdır. Öyleki B Banach Uzayı ise $B = M \oplus N$ dir ve tersine her kapalı M ve N lineer alt uzay çifti görüntüsü M ve null uzayı N olan bir P izdüşüm

operatörü belirler. Bu yolla B Banach Uzayı üzerindeki izdüşüm operatörleri ile B yi tamamı ile geren ve iki uzayda da sıfır vektörünün ortak olduğu kapalı lineer alt uzay çifti arasında birebir ilişkilendirme mevcuttur.

B Banach Uzayı yerine H Hillbert Uzayı dikkate alındığında yukarıda bahsedilen lineer kapalı alt uzay çifti arasında ortogonalite mevcuttur.

Teorem: H üzerinde verilen görüntü uzayı M sıfır uzayı N olan bir P izdüşüm operatörü ise $M \perp N \Leftrightarrow P$ kendi kendine eşitir ve bu halde $N = M^\perp$ dir.

İspat: H deki her z vektörü tek türlü olarak x M den , y de N den olmak üzere $z=x+y$ şeklinde yazılabilir. Eğer $M \perp N$ ise öyleki $x \perp y$ ve $P^* = P$ olması $(P^* z, z) = (Pz, z)$ yi gerektirir. Bu ifade ise aşağıdaki ifadenin sonucudur ve

$$\begin{aligned} (P^* z, z) &= (z, Pz) = (z, x) = (x + y, x) = (x, x) + (y, x) = (x, x) \text{ ve} \\ (P z, z) &= (x, z) = (x, x + y) = (x, x) + (x, y) = (x, x) \end{aligned}$$

Tersine $P = P^*$ ve $M \perp N$ ise x M den ,y de N den olmak üzere

$$(x, y) = (Px, y) = (x, P^* y) = (x, Py) = (x, 0) = 0$$

Neticede eğer $M \perp N$ ise $N = M^\perp$ olduğunu göstermek gerekir. Açıktır ki $N \subseteq M^\perp$ ise ve eğer $N \subsetneq M^\perp$ in özalt kümelerinden ise $M^\perp$ Hillbert Uzayının kapalı lineer özalt kümesidir. Neticede $M^\perp$ te sıfırdan farklı öyle bir z_0 vektörü vardır ki $z_0 \perp N$ dir. $z_0 \perp M$ ve $z_0 \perp N$ olduğundan $H = M \oplus N$ olduğundan $z_0 \perp H$ dir. Bu ise mümkün değildir. Neticede $N = M^\perp$ tir.

Hda görüntüsü ve sıfır uzayı ortogonal (dik) olan bir izdüşüm operatörü genellikle dik izdüşüm operatörü olarak isimlendirilir. Hillbert Uzayı teorisinde dikkate alınan izdüşüm operatörleri bu türdendir. Bu ifadelerin ışığında H de tanımlanan P izdüşüm operatörü netice olarak $P^2 = P$ ve $P^* = P$ eşitliğini sağlarlar. 0 ve I birim operatörleri izdüşüm operatörleridir. Bunlar ayrıktır $\Leftrightarrow H \neq \{0\}$

Hde tanımlı izdüşüm operatörleri ile kapalı lineer alt uzaylar arasında açık bir ilişki mevcuttur. Her P izdüşüm operatörü için bunun görüntü kümesi olan $M = \{Px : x \in H\}$ öyleki bu kapalı lineer alt uzaydır. Tersine her kapalı lineer M alt uzayı için görüntü kümesi M olan bir izdüşüm operatörü x ve y ,M ve $M^\perp$ olmak üzere $P(x + y) = x$ olacak tarzda P operatörü vardır. Her iki haldede P ye M deki izdüşüm operatörü denir.

Açıktır ki Mde P bir izdüşüm operatörü $\Leftrightarrow I - P$ de $M^\perp$ e izdüşümdür. Ayrıca Mde P izdüşüm operatörü ise;

$$x \in M \Leftrightarrow Px = x \Leftrightarrow \|Px\| = \|x\| \text{ dir.}$$

Her $x \in H$ için

$$\|x\|^2 = \|Px + (I - P)x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 \quad (3.19)$$

İkinci bölümün sıfırdan farklı kısmı aşağıdaki zincir ifadesini doğurur.

$$\|Px\| = \|x\| \Rightarrow \|Px\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow \|(I - P)x\|^2 = 0 \Rightarrow Px = x$$

Ayrıca ifadelerden her x için şu sonuca varılır:

$$\|Px\| \leq \|x\| \text{ böylece } \|P\| \leq 1 \text{ dir.}$$

Eğer H de x rastgele bir vektör ise aşağıdaki eşitliği görmek kolaydır.

$$(Px, x) = (PPx, x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) = \|Px\|^2 \geq 0 \quad (3.20)$$

Neticede P pozitif operatördür. ($P \geq 0$) $I - P$ ayrıca izdüşüm operatörü olduğundan ayrıca şu eşitliği de elde etmek mümkündür.

$$0 \leq I - P \text{ veya } P \leq I \text{ 0} \leq P \leq I \text{ dir.}$$

T H de bir operatör olsun . H nin M kapalı lineer alt kümesi T altında değişmez (invariant)tır fakat şu koşul altında eğer $T(M) \subseteq M$ ise. Eğer bu ifade gerçekleşirse T nin M ye kısıtlanması ile T operatörü yalnız M de dikkate alınabilir ve neticede M dışındaki vektörlerin T ye uygulaması dikkate alınmayabilir. Eğer $M^\perp$ ve M T altında değişmez ise M T yi indirger ya da T , M tarafından yükseltir denir. Bu durum oldukça ilginç bir neticeyi ortaya koyar. T operatörünün tamamının yerine bunun M veya $M^\perp$ e indirgenmiş hali ile çalışma imkanı sağlar. Bu ise daha basit operatörler ile çalışma ihtimali ortaya çıkarır.

3.5 Pozitif Operatör

Eğer T operatörü kendi kendine eş bir operatör ise $\langle Tx, x \rangle$ reel bir sayıdır. Buradan tüm kendi kendine eş lineer sınırlı operatörler kümesini bir H kompleks Hilbert uzayı üzerinde dikkate almak ve bu küme üzerinde $\leq$ kısmi sıralama tanımlamak mümkün olabilir.

tüm $x \in H$ için;

$$\langle T_1 x, x \rangle \leq \langle T_2 x, x \rangle \quad \text{olduğunda} \quad T_1 \leq T_2 \quad (3.21)$$

$T_1 \leq T_2$ yerine $T_2 \geq T_1$ de yazılabilir.

Bu yapının önemli bir formu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. $T: H \rightarrow H$ kendi kendine eş lineer sınırlı bir operatör, tüm $x \in H$ için ;

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \text{olduğunda} \quad T \geq 0 \quad (3.22)$$

oluyorsa T operatörüne pozitif tanımlıdır denir. Yine benzer yaklaşımla $T \geq 0$ yerine $0 \leq T$ de yazmak mümkündür. Bu halde yukarıdaki özelliğe sahip operatöre negatif olmayan denildiği gibi alışla gelen söylev pozitif operatördür.

(3.21) ve (3.22) ifadesi arasındaki en temel bağıntı;

$$T_1 \leq T_2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq T_2 - T_1$$

şeklinde ifade edilir. Bir başka deyişle $T_2 - T_1$ pozitif olduğu sürece (3.21) ifadesi sağlanır.

Pozitif iki operatörün toplamıda pozitifdir. Bu netice tanımdan kolayca görülmektedir.

Teorem: (Pozitif Operatörlerin Çarpımı) Eğer H Hilbert uzayı üzerinde S ve T gibi iki kendi kendine eş lineer operatör pozitif ise ve komüt ediyorlar ise (yani $ST=TS$ ise) bu iki operatörün çarpımı ST pozitif bir operatördür.

İspat: Gösterilmesi gereken nihayi ifade tüm $x \in H$ için $\langle STx, x \rangle \geq 0$ dir. Eğer $S=0$ ise ifade sağlanır. Şimdi $S \neq 0$ olsun. İspat iki adımla gerçekleştirilecek bunlar (a) ve (b) olsun

$$(a) \quad S_1 = \frac{1}{\|S\|} S \quad S_{n+1} = S_n - S_n^2 \quad (n=1,2,\dots) \quad (3.23)$$

İspat tümevarımla yapılacaktır;

$$0 \leq S_n \leq I \quad (3.24)$$

(b) Bu aşamada da tüm $x \in H$ için $\langle STx, x \rangle \geq 0$ olduğu ispatlanacaktır. Şimdi ayrıntılı olarak bu bölümler gerçekleştirilecektir;

(a) $n=1$ için (3.24) eşitsizliği sağlanır. Gerçektende $S \geq 0$ kabulü ile $0 \leq S_1$ dir. Bu netice ardından Schwarz eşitsizliği kullanılarak $S_1 \leq I$ ve $\|Sx\| \leq \|S\| \|x\|$ dir.

$$\langle S_1 x, x \rangle = \frac{1}{\|S\|} \langle Sx, x \rangle \leq \frac{1}{\|S\|} \|Sx\| \|x\| \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x \rangle$$

(3.24) ifadesinin $n=k$ için doğru olduğu kabul edilsin;

$$0 \leq S_k \leq I \quad \text{buradan} \quad 0 \leq I - S_k \leq I$$

dir. S_k kendi kendine eş olduğundan, her $x \in H$ ve $y = S_k x$ için aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\langle S_k^2 (I - S_k) x, x \rangle = \langle (I - S_k) S_k x, S_k x \rangle = \langle (I - S_k) y, y \rangle \geq 0$$

Tanım gereği;

$$S_k^2 (I - S_k) \geq 0$$

Benzer yaklaşımla;

$$S_k (I - S_k)^2 \geq 0$$

Toplama ve sadeleştirmelerden sonra;

$$0 \leq S_k^2(I - S_k) + S_k(I - S_k)^2 = S_k - S_k^2 = S_{k+1}$$

Buradan $0 \leq S_{k+1}$ dir. $S_{k+1} \leq I$, $S_k^2 \geq 0$ ve $I - S_k \geq 0$ toplamak suretiyle gerçekten de;

$$0 \leq I - S_k + S_k^2 = I - S_{k+1}$$

Bu ise (3.24) ifadesinin tümevarım ispatıdır.

(b) Şimdi tüm $x \in H$ için $\langle STx, x \rangle \geq 0$ ifadesinin ispatına geçilebilir. (3.23) ifadesinden;

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^2 + S_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3 \end{aligned}$$

.....

$$= S_1^2 + S_2^2 + \dots S_n^2 + S_{n+1}$$

$S_{n+1} \geq 0$ bu ise aşağıdaki sonuca götürür;

$$S_1^2 + \dots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leq S_1 \quad (3.25)$$

Kısmı sıralama ($\leq$) bağıntısı ve S_j 'nin kendi kendine eş olmasından

$$\sum_{j=1}^n \|S_j x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle S_j x, S_j x \rangle = \sum_{j=1}^n \langle S_j^2 x, x \rangle \leq \langle S_1 x, x \rangle \quad (3.26)$$

n keyfi olduğundan $\|S_1 x\|^2 + \|S_2 x\|^2 + \dots$ sonsuz serisi yakınsaktır.

Neticede $\|S_n x\| \rightarrow 0$ ve $S_n x \rightarrow 0$ dir. (3.25) ifadesinden;

$$\left(\sum_{j=1}^n S_j^2 \right) x = (S_1 - S_{n+1})x \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad S_1 x$$

Tüm S_j ler T operatörü ile yer değiştirme özelliğine sahiptir. Çünkü bu operatörler $S_1 = \|S\|^{-1} S$ ifadesinin çarpımıdır ve T ve S yer değiştirme özelliğine sahiptirler. (3.26) ifadesinde $S = \|S\| S_1$ değerini, $T \geq 0$ ve iç çarpımın sürekliliği kullanılarak her $x \in H$ için $y_i = S_j x$ alınarak;

$$\langle STx, x \rangle = \|S\| \langle TS_1 x, x \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \|x\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle TS_j^2 x, x \rangle \\
&= \|x\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle Ty_j, y_j \rangle \geq 0
\end{aligned}$$

olur. Yani $\langle STx, x \rangle \geq 0$ dır.

Kısmı sıralama kavramı aşağıda verilen yapıları beraberinde getirir;

Tanım (Monoton Dizi): Bir H Hilbert uzayında kendi kendine eş lineer T_n operatörler dizisi (T_n) ya monoton artan;

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \dots\dots\dots$$

veya monoton azalan;

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \dots\dots\dots$$

formlarından biriyle ifade edilir.

Tanım (Bir pozitif operatörün karekökü) : Eğer T operatörü kendi kendine eş bir operatör ise $\langle T^2 x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle \geq 0$ olduğundan T^2 operatörü pozitifdir. Problem tersinden ele alındığında yani verilen bir pozitif T operatörü için öyle bir kendi kendine eş A operatörü $A^2=T$ olacak tarzda bulunsun. Bu arayış operatörlerin spektral temsillerinde kullanım alanı bulması bakımından önemlidir.

3.6 Sürekli Lineer Dönüşümler

N ve N' aynı çarpımlara sahip lineer normlu uzaylar ve $T, N \rightarrow N'$ de lineer bir dönüşüm olsun. T operatörüne sürekli denir. Bundan kasıt N metrik uzayından N' metrik uzayına dönüşümde T'nin sürekli olmasıdır. Bunun ifadesi ise N de $x_n \rightarrow x$ oluyorken N' de $T(x_n) \rightarrow T(x)$ olmasıdır.

Aşağıdaki ifadelerde, sürekliliğin gerekliliğini birçok faydalı denk formlarda ortaya konulması verilecektir.

Teorem: N ve N' normlu lineer uzaylar ve $T, N \rightarrow N'$ de lineer bir dönüşüm olsun. Aşağıda verilen herbir eşitliğin biri diğerine denktir.

- 1) T sürekli.
- 2) T orjinde sürekli. Yani $x_n \rightarrow 0 \implies T(x_n) \rightarrow 0$ dır.
- 3) Her $x \in N$ için $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı mevcuttur.
- 4) Eğer $S = \{x : \|x\| \leq 1\}$ N de kapalı bir küme ise $T(S)$ N' de sınırlıdır.

İspat: (1) $\Leftrightarrow$ (2). Eğer T sürekli ise $T(0)=0$ dır. Yani orjinde süreklidir. Diğer taraftan T orjinde sürekli ise

$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n - x \rightarrow 0 \Rightarrow T(x_n - x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow T(x_n) - T(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow T(x_n) \rightarrow T(x)$ dir.
Böylece T süreklidir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) (3) $\Rightarrow$ (2) ifadesi açıktır. Eğer öyle bir K mevcut ise $x_n \rightarrow 0$ olması $T(x_n) \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. (2) $\Rightarrow$ (3) olduğunu göstermek için böyle bir K olmadığını kabul edelim. Bu kabul her pozitif n değeri için öyle bir x_n vektörü vardır ki $\|T(x_n)\| > n\|x_n\|$ veya buna denk olan $\|T(x_n / n\|x_n\|)\| > 1$ dir. Eğer $y_n = x_n / n\|x_n\|$ alınırsa $y_n \rightarrow 0$ olduğu görülür. Fakat $T(y_n) \rightarrow \neq 0$ dır. Böylece T orjinde sürekli olmayacaktır.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) lineer normlu bir uzayın boş olmayan alt kümesi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ orjin merkezli kapalı bir küre tarafından içerilir. Bu ise (3) $\Rightarrow$ (4) olmasını gerektirir. Eğer $\|x\| \leq 1$ ise $\|T(x)\| \leq K$ olur. (4) $\Rightarrow$ (3) olduğunu göstermek için $T(S)$ nin orjin merkezli K yarıçaplı kapalı küre tarafından içerildiğini kabul edelim. Eğer $x=0$ ise $T(x)=0$ ve açık olarak $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ ve eğer $x \neq 0$ için $x/\|x\| \in S$ ve neticede $\|T(x/\|x\|)\| \leq K$ böylece $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ dir.

Eğer bu teoremdaki T lineer dönüşümü (3) şartını sağlıyorsa yani $\|T(x)\| \leq K\|x\|$ olacak şekilde bir K reel sayısı mevcut ise K ya T nin sınırı denir ve böyle T operatörlerine lineer sınırlı bir dönüşüm denir.

Bu teoreme göre T sınırlıdır $\Leftrightarrow T$ süreklidir. Böylece bu iki sıfat yani sınırlılık ile süreklilik birbiri yerine kullanılabilir. Kabul edelim ki T sürekli olsun. Böylece (4) şartı sağlanır ve T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \quad (3.27)$$

olur. Teoremin ispatından açıktır ki T nin tüm sınırları kümesi $T(S)$ yi içeren orjin merkezli kapalı kürelerin yarıçaplarından teşkil edilir. Bu ise T operatörünün normunun aşağıdaki şekilde ifade edilmesine imkan tanır:

$$\|T\| = \inf\{K : K \geq 0 \text{ ve } \|T(x)\| \leq K\|x\| \forall x \text{ için}\} \quad (3.28)$$

Buradan tüm x ler için $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ dir.

$N \rightarrow N'$ de tüm lineer sürekli (veya sınırlı) dönüşümlerin kümesi $B(N, N')$ şeklinde gösterilir. Buradaki B sınırlı (bounded) sıfatına denk olarak düşünülür.

3.7 Lineer Fonksiyoneller

Fonksiyonel, görüntü kümesi R reel sayılar veya C kompleks sayılar düzlemi olan bir operatördür. Fonksiyonel Analiz kavramı ise başlangıçta fonksiyonellerin analizi kavramından doğmuştur. Fonksiyonelleri klasik operatörlerden ayırmak için $f, g, h, \dots$ gibi küçük harf notasyonu kullanılır. Bu yaklaşım neticesi olarak değer kümesi $D(f)$ görüntü

kümesi de $R(f)$ ile gösterilir. f fonksiyonelinin $x \in D(f)$ deki değeri $f(x)$ şeklinde parantezli olarak gösterilir.

Tanım (Lineer Fonksiyonel):

Lineer bir fonksiyonel tanım kümesi bir X vektör uzayı içinde ve görüntü kümesi X 'in skaler alanı olan K da olan lineer bir operatördür.

$$f: D(f) \rightarrow K$$

Burada eğer X reel ise $K=R$ ve eğer X kompleks ise $K=C$ dir.

3.7.1 Sınırlı lineer fonksiyoneller

Lineer sınırlı fonksiyonel tanım kümesi $D(f)$ in içinde bulunduğu X normlu uzayının içindeki skaler görüntü kümesine sahip lineer sınırlı bir operatördür.

Öyleki c skaler reel sayı mevcuttur ki tüm $x \in D(f)$ için

$$|f(x)| \leq c\|x\| \text{ dir.} \quad (3.29)$$

İlave olarak f in normu

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (3.30)$$

veya

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)| \quad (3.31)$$

Neticede

$$|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \quad (3.32)$$

Teorem (Süreklilik ve Sınırlılık):

Bir normlu uzayda tanım kümesi $D(f)$ olan bir lineer f fonksiyoneli sadece ve sadece f sınırlı ise süreklidir.

Örnekler:

1. Norm: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında tanımlı $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ normu X vektör uzayı üzerinde lineer olmayan bir fonksiyoneldir.

2. Vektör çarpımı: Bilinen vektör çarpımı $f: R^3 \rightarrow R$ bir fonksiyonel tanımlar öyleki

$$f(x) = x.a = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3$$

ve burada $a = (\alpha_j) \in \mathbb{R}^3$ sabit tutulmuştur.

f fonksiyoneli lineerdir ve sınırlıdır. Gerçekten de $|f(x)| = |x.a| \leq \|x\| \|a\|$ dir.

Öyleki eğer tüm x ler üzerinde sabit bir norma göre supremum alınırsa (3.31) den $\|f\| \leq \|a\|$ olur. Diğer taraftan $x=a$ alarak ve (3.32) kullanılarak

$$\|f\| \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\| \text{ dır.}$$

Netice olarak $\|f\| = \|a\|$ dır.

3. Belirli integral: Kalkülüste olduğu gibi belirli integral tek bir fonksiyon olarak düşünülürse belirli integral bir sayıdan ibarettir. Bununla birlikte eğer belirli bir fonksiyon uzayı üzerinde bu integral dikkate alınırsa yapı tamamen değişir. Öyleki bu integral bu uzay üzerinde bir fonksiyonel olur. Bu fonksiyonele f denilsin. Uzay olarak da $C[a,b]$ $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı dikkate alınsın. Neticede f aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt \quad x \in C[a, b]$$

f lineerdir. Şimdi de f in sınırlı ve normunun da $\|f\| = b - a$ olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Gerçektende $J=[a,b]$ yazılarak ve $C[a,b]$ deki norm hatırlanarak

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a) \max_{t \in J} |x(t)| = (b-a) \|x\|$$

Normu 1 olan x ler üzerinde supremum alınırsa $\|f\| \leq b - a$ elde edilir. $\|f\| \geq b - a$ elde etmek için $x = x_0 = 1$ seçilirse $\|x_0\| = 1$ ve (3.32) eşitliği kullanılırsa

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = |f(x_0)| = \int_a^b dt = b - a$$

elde edilir. Neticede $\|f\| = b - a$ dır.

1. $C[a,b]$ uzayı: Diğer $C[a,b]$ üzerindeki pratik fonksiyonel şu şekilde elde edilir. Eğer sabit bir $t_0 \in J[a, b]$ seçilirse

$$f_1(x) = x(t_0) \quad x \in C[a, b]$$

f_1 lineerdir. f_1 sınırlıdır ve normu 1 dir. Gerçekten de

$$|f_1(x)| = |x(t_0)| \leq \|x\|$$

ve bu (3.30)dan $\|f_1\| \leq 1$ i gerektirir. Diğer taraftan $x_0 = 1$ için $\|x_0\| = 1$ olur ve (3.31) in de yardımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\|f_1\| \geq |f_1(x_0)| = 1$$

4. l^2 uzayı: l^2 uzayında da $a = (\alpha_j) \in l^2$ sabit bir nokta seçmek sureti ile f fonksiyoneli aşağıdaki şekilde teşkil edilir.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \alpha_j$$

Burada $x = (\zeta_j) \in l^2$ dir. Bu seriler mutlak yakınsaktır ve f fonksiyoneli sınırlıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak $j, 1$ den ∞ a değişmek sureti ile aşağıdaki ifade elde edilir.

$$|f(x)| = \left| \sum \zeta_j \alpha_j \right| \leq \sum |\zeta_j \alpha_j| \leq \sqrt{\sum |\zeta_j|^2} \sqrt{\sum |\alpha_j|^2} = \|x\| \|a\|$$

Tanım (Dual Uzay):

Bir X vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm lineer fonksiyoneller kümesi X içinde bir vektör uzayı oluştururlar. Bu uzay X^* ile gösterilir ve X in cebirsel dual uzayı denir. Bu uzayın cebirsel işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır. f_1 ve f_2 gibi iki fonksiyonelin toplamı olan s de bir fonksiyoneldir. Bu s fonksiyonelinin her $x \in X$ için değeri

$$s(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ olur.}$$

Bir f fonksiyonelinin α skaleri ile çarpımı olan p de bir fonksiyoneldir ve bu p fonksiyonelinin her $x \in X$ için değeri

$$p(x) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \text{ olur.}$$

3.8 Sonlu Boyutlu Uzaylarda Lineer Operatörler ve Fonksiyoneller

Sonlu boyutlu vektör uzayları sonsuz boyutlu vektör uzaylarına oran ile daha basittirler. Doğal olarak bu basitliğin böyle uzaylar üzerinde tanımlı olan fonksiyoneller ve operatörler açısından sebebi bir sorudur. Bu sorunun cevabı lineer operatörler ve onların sonlu boyuttaki bir X vektör uzayının cebirsel dual X^* yapısının sonlu boyutlu matrislerle olan bağlantısı bu sorunun cevabını ortaya koyacaktır.

Sonlu boyutlu vektör uzaylarında tanımlı lineer operatörler aşağıda açıklanacağı üzere sonlu boyutlu matrisler cinsinden ifade edilirler. Bu manada sonlu boyutlu haldeki lineer operatörler üzerindeki çalışmalarda matrisler en önemli araçlar olacaklardır. Bu bağlamda aşağıdaki teoremi hatırlamakta fayda vardır.

Teorem: Eğer bir X sonlu boyutlu normlu uzay ise bu X uzayı üzerindeki her lineer operatör sınırlıdır.

İspat: Dim $X=n$ olsun ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ X için bir baz olsun. Herhangi bir x vektörü için $x = \sum \xi_j e_j$ alınırsa X üzerindeki herhangi bir T lineer operatörü için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\|Tx\| = \left\| \sum \xi_j Te_j \right\| \leq \sum |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum |\xi_j|$$

Bu ifade ile

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum \xi_j e_j \right\| = \frac{1}{c} \|x\|$$

$$\|Tx\| \leq \gamma \|x\|$$

$$\gamma = \frac{1}{c} \max_k \|Te_k\|$$

buradan T operatörünün sınırlı olduğu görülür.

X ve Y aynı alan üzerinde tanımlı sonlu boyutlu vektör uzayları olsun. $T: X \rightarrow Y$ lineer bir operatör olarak verilsin. $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ X için bir baz seçilirse ve $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ Y için bir baz seçilirse her $x \in X$ in tek bir temsili aşağıdaki şekilde vardır.

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n \quad (3.33)$$

$$y = Tx = T \left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n \xi_k Te_k \quad (3.34)$$

T operatörü lineer olduğundan X in görüntüsü (3.33) temsili tek olduğundan aşağıdaki ilk sonuca varılır:

Sonuç: Eğer $y_k = Te_k$ $e_1, e_2, \dots, e_n$ olarak ifade edilirse Toperatörü tek türlü elde edilir.

y ve $y_k = Te_k$ Y de olduğundan tek türlü temsilleri aşağıdaki gibidir.

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j \quad (3.35)$$

$$Te_k = \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j \quad (3.36)$$

Bunların (3.34) de yerine konması ile

$$y = \sum_{j=1}^r \eta_j b_j = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k Te_k \right) = \sum_{k=1}^n \xi_k \sum_{j=1}^r \tau_{jk} b_j = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \right) b_j$$

ifadesi elde edilir. b_i ler lineer bağımsız bir küme teşkil ettiğinden soldaki b_i lerin katsayıları ile sağdakiler aynı olmak zorundadır. Bu ise (3.37) ifadesini doğurur.

$$\eta_j = \sum_{k=1}^n \tau_{jk} \xi_k \quad j = 1, \dots, r \quad (3.37)$$

$x = \sum \xi_k e_k$ ifadesinin görüntüsü olan $y = Tx = \sum n_j b_j$ ifadesi (3.37) den elde edilir.

(3.37) deki katsayılar ise aşağıdaki r satırlı n sütunlu matrisi oluştururlar.

$$T_{EB} = (\tau_{jk})$$

Eğer X için bir baz E ve Y için bir baz B verilirse E ve B nin elemanları belirli bir sıra ile düzenlendiğinde (bunlar rastgele fakat sabit) T_{EB} matrisi tek türlü olarak T operatörü tarafından belirlenir. Bu T_{EB} ise bazlara göre T operatörünün matris temsili olarak isimlendirilir.

$\tilde{x} = (\xi_k)$ sütun vektörü ve $\tilde{y} = (\eta_j)$ (3.37) eşitliği matris notasyonunda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\tilde{y} = T_{EB} \tilde{x} \quad (3.38)$$

Altta benzer tarzda (3.36) ifadesi matris notasyonu ile yazılabilir:

$$T e = T_{EB} \tau_b \quad (3.39)$$

Burada $T e$ elemanları $T e_1, \dots, T e_n$ olan sütun vektördür. (Bunlar ayrıca vektördürler.) b ise elemanları $b_1, \dots, b_r$ olan sütun vektördür.

Bu çalışmalar lineer T operatörünün X uzayı için verilen bir baz ve Y uzayı için verilen bir baza göre tek türlü matris temsiliinin varlığını gösterir. Tersine r satırlı ve n sütunlu herhangi bir matris lineer bir operatörü karşılık düşer. Öyleki bu da yine Y den ve X ten seçilen bazlara göre dir.

X üzerindeki lineer fonksiyoneller dikkate alındığında $\dim X = n$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bu X için bir baz ise önceden olduğu gibi bu fonksiyoneller X in cebirsel dual uzayı olan X^* ı yukarıda belirtilen üzere oluştururlar. Her bu manadaki f fonksiyoneli ve her $x = \sum \xi_j e_j \in X$

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \alpha_j \quad (3.40)$$

Buradan

$$\alpha_j = f(e_j) \quad j = 1, \dots, n \quad (3.41)$$

ve f tek türlü olarak X in n taban vektöründeki α_j değeri tarafından belirlenir.

3.9 Operatör ve Fonksiyonel Dizilerinin Yakınsaklığı

Sınırlı lineer operatör ve fonksiyonel dizileri, somut yapıların soyut formülasyonlarında sıkça ortaya çıkar. Örneğin Fourier serileri, interpolasyon polinom dizilerinin yakınsaklığında veya sayısal integrasyon metodlarında olduğu gibi. Bu haller de fonksiyonel veya operatör dizilerinin yakınsaklığı, ilgili norm dizilerinin sınırlılığı veya benzer özellikler ortaya çıkar.

Bir normlu uzayda eleman dizileri için kuvvetli veya zayıf yakınsaklık kavramlarının çok önemli olduğu yapılan çalışmalarla sabittir. $T_n \in B(X, Y)$ operatör dizileri için üç tip yakınsaklıktan bahsetmek mümkündür. Bunlar;

- (1) $B(X, Y)$ de norm anlamında yakınsaklık
- (2) Y de $(T_n x)$ 'in kuvvetli yakınsaklığı
- (3) Y de $(T_n x)$ 'in zayıf yakınsaklığı

Terminolojiler ve tanımlamalar aşağıdaki gibidir.

Tanım (Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı) : X ve Y normlu uzaylar olsun. $T_n \in B(X, Y)$ operatöründen oluşan (T_n) operatör dizisi için;

- (1) Eğer (T_n) $B(X, Y)$ deki norm anlamında yakınsak ise buna düzgün operatör yakınsaklığı
- (2) Eğer her $x \in X$ Y deki $(T_n x)$ dizisi kuvvetli yakınsak ise buna kuvvetli operatör yakınsaklığı
- (3) Eğer her $x \in X$ Y deki $(T_n x)$ dizisi zayıf yakınsak ise buna zayıf operatör yakınsaklığı denir.

Formülasyon anlamında $T: X \rightarrow Y$ operatörü

- (1) $\|T_n - T\| \rightarrow 0$
- (2) Tüm $x \in X$ için $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$
- (3) Tüm $x \in X$ ve Tüm $f \in Y'$ için $|f(T_n x) - f(Tx)| \rightarrow 0$ dir.

Sırasıyla T ye, (T_n) dizisinin düzgün, kuvvetli ve zayıf limit operatörü denir.

Farklı yakınsaklık tanımlarının kullanılması bu teoriye bir esneklik kazandırması bakımından önemlidir. Yukarıdaki (1) (2) ve (3) tarifleri için

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$$

bağıntısı mevcuttur.

Örnekler:

1. l^2 uzayı: l^2 uzayında öyle bir (T_n) operatör dizisi $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ şekliyle aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$T_n x = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots \end{pmatrix}_{n \text{ adet}}$$

burada $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l^2$ dir. Bu şekilde verilen operatör lineer ve sınırlıdır. Açıktır ki $T_n x \rightarrow 0 = 0x$ olduğundan (T_n) dizisi kuvvetli operatör yakınsaklığına sahiptir. Bununla birlikte $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$ olduğundan (T_n) dizisi düzgün operatör yakınsaklığına sahip değildir.

2. l^2 uzayı: l^2 uzayında öyle bir (T_n) operatör dizisi $T_n : l^2 \rightarrow l^2$ şekliyle bu sefer de aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$T_n x = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots \end{pmatrix}_{n \text{ adet}}$$

burada $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \in l^2$ dir. Bu şekilde verilen operatör de yine lineer ve sınırlıdır. Fakat (T_n) operatör dizisi sıfıra bu halde zayıf olarak yakınsar. Kuvvetli yakınsama yoktur.

Tanım (Fonksiyonellerin zayıf* veya kuvvetli yakınsamaları): (f_n) lineer sınırlı fonksiyonel dizisi normlu X uzayı üzerinde tanımlı olsun;

- (a) (f_n) 'in kuvvetli yakınsamasından kasıt , öyle bir $f \in X'$ mevcuttur ki $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ olsun. Bu halde ifade $f_n \rightarrow f$ şeklinde verilir.
- (b) (f_n) 'in zayıf* yakınsamasından kasıt ise, öyle bir $f \in X'$ mevcuttur ki tüm $x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dir. Bu halde ise ifade $f_n \xrightarrow{w^*} f$ şeklinde verilir.

(a) ve (b) ifadelerinde verilen f fonksiyoneline, (f_n) fonksiyonel dizisinin kuvvetli veya zayıf* limiti denir.

4.SONUÇLAR

Bilimsel çalışmalarda en temel eksiklik kavram, tanım ve özelliklerin araştırmacılar tarafından yeterince bilinmemesidir. Bu tez çalışması matematiğin her alanında çalışmalar yapacak araştırmacılar için bir kaynak oluşturacaktır. Gerek sıkça kullanılan uzay yapıları ve gerekse operatör tanım ve özelliklerinin sade ve öz bir dille ifade edilmesi bu alandaki kaynak boşluğunu dolduracak niteliktedir. Tez oluşturulurken temel kaynaklar kullanılmak sureti ile yoğun kullanıma haiz kavram ve yapılar seçilmeye özen gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

Gohberg I. and S., (1981) "Basic Operator Theory", Birkheuser Boston USA.

Simmons G.F., (1963) "Topology And Modern Analysis" McGraw-Hill Book Company, Inc United States of America.

Kreyszig E., (1978), "Introductory Functional Analysis With Application", John Wiley & Sons Canada .

Friedman B.,(1956) "Principles and Techniques of Applied Mathematics" , John Wiley & Sons New York -London- Sydney



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	10.01.1975	
Doğum yeri	Silistre	
Lise	1989-1993	Kağıthane Profilo Anadolu Teknik Lisesi
Lisans	1993-1997	Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya Metalurji Fak. Matematik Mühendisliği Bölümü

