

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

85095

MODÜLER GRUPLARIN ALT GRUPLARI

Kadriye ŞİMŞEK

F.B.E: Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TEZ YATIRILMASI MERKEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ	i
ÖNSÖZ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ	1
2. MODÜLER GRUP	3
2.1 İnhojen Lineer Dönüşümler.....	3
2.1.1 Tanım.....	3
2.1.2 İnhojen lineer dönüşümlerin önemli özellikleri.....	3
2.1.2.1 Tanım.....	3
2.1.3 Sabit noktalı inhojen lineer dönüşümlerin sınıflandırılması..	4
2.1.4 Reel katsayılı inhojen lineer dönüşümler ve Öklid olmayan geometri.....	5
2.2 Homojen Lineer Dönüşümler.....	7
2.2.1 Tanım.....	7
2.2.2 Homojen ve inhojen lineer dönüşümler arasındaki ilişki.....	7
2.2.3 Aynı sabit noktalı dönüşümler	7
2.3 Modüler Grup	8
2.3.1 Tanım	8
2.4 Üreteçler	9
2.5 Esas Bölge	9
2.5.1 Tanım	9
2.5.2 Üst yarı düzlemin bölümlere ayrılması	10
3.	11
3.1 Modüler Grupların Alt Grupları	11
3.1.1 Homojen ve inhojen gruplar	11
3.1.2 Eşdeğer Sınıflar ve Sabit Noktalar	13
3.2 Esas Kongrüans Grupları	15
3.2.1 N. Basamaktan homojen esas kongrüans grubu.....	16
3.2.2 Γ_N nin Mertebesi	17
3.2.3 N. basamaktan inhojen esas kongrüans grubu.....	19
3.3 Kongrüans Gruplar	21
3.3.1 Homojen Kongrüans Gruplar	21
3.3.2 Özel Kongrüans Gruplar	24
3.3.3 $\Gamma_0(q)$ Alt Grubu	25
3.3.4 İnhojen kongrüans gruplar	27
3.4 Esas Bölge	27
3.4.1 Esas bölge	28
3.4.2 Bir esas bölgenin sınırı	30
3.4.3 Eşlenik Alt Gruplar, Normal Alt Gruplar.....	31

İÇİNDEKİLER

Sayfa

3.5. Özel Alt Gruplar İçin Esas Bölge	33
3.5.1 $\Gamma[2]$ Esas Kongrüans Grubu İçin Esas Bölge	33
3.5.3 $\Gamma_1 := \Gamma[2] \cup \Gamma[2]\Gamma$ Theta grubu esas bölgesi	34
3.5.4 $\Gamma_1 := \Gamma[2]U\Gamma[2]U\Gamma[2](U\Gamma)^2$ Grubunun esas bölgesi.....	36
3.5.5 $\Gamma[N]$ Esas kongrüans alt grubu için eşdeğer olmayan kaspların sistemi.....	37
3.5.6 q bir asal sayı olmak üzere $\Gamma^0(q)$ grubunun esas bölgesi.....	39
3.6 $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Bölüm Uzayı.....	41
3.6.1 $\mathcal{H}^*$ ve $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Topolojik Uzayları	41
3.6.2 $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Yüzeyi.....	45
3.6.3 $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Riemann Yüzeyi	48
3.7 Esas Bölgenin Tipi.....	48
3.7.1 Çok yüzlü üzerindeki Euler Teoremi	48
3.7.2 Modüler grubun alt gruplarına çokyüzlü üzerindeki teoremin uygulamaları	49
3.7.3 Dallanma şeması ve normal alt grup eşlemesi.....	51
3.7.4 Tip formülünün incelenmesi.....	55
3.8 $\Gamma_0(N)$ nin Esas Bölgesinin Tipi.....	58
3.8.1 $\text{Mod } \Gamma_0(N)$ kongrüansı.....	58
3.8.2 ε_p ve ε_i nin bulunması.....	60
3.8.3 σ_∞ un hesaplanması.....	62
4. SONUÇLAR.....	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	67

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	9
Şekil 2.2	10
Şekil 3.1	34
Şekil 3.2	34
Şekil 3.3	35
Şekil 3.4	36
Şekil 3.5	36
Şekil 3.6.....	36
Şekil 3.7	39
Şekil 3.8	40
Şekil 3.9	42
Şekil 3.10	52
Şekil 3.11	54



ÖNSÖZ

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmanın her aşamasında verdiği destekten ve kaynak bulmamdaki yardımlarından dolayı danışman hocam Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER' e teşekkür ederim.



ÖZET

Bu tezde modüler gruplara kısaca değinildikten sonra modüler grupların alt grupları incelenmiştir.

Birinci bölümde öncelikle homojen ve inhomojen lineer dönüşüm kavramları ve bu iki dönüşüm arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Bu dönüşümler kullanılarak modüler grubun tanımı yapılmıştır. Modüler grup yardımıyla modüler dönüşümler sınıflandırılmış, modüler grubun üreteç ve bağlantılarına yer verilmiştir. Daha sonra temel bölge tanımlanıp temel bölgenin varlığına bağlı olarak, üst yarı düzlemin bölümlere ayrılması incelenmiştir.

İkinci bölümde modüler grupların alt gruplarına ayrıntılı olarak yer verilmiştir. Esas kogrüans grupları tanımlanmış ve daha sonra özel kongrüans gruplarına yer verilmiştir. Daha sonra alt gruplar için esas bölgeler gösterilmiştir. $\mathcal{H}^*/\Gamma$ bölüm uzayı ayrıntılı olarak ele alındıktan sonra esas bölgenin tip formülü verilmiş ve normal alt gruplara karşılık gelen dallanma şemaları çizilmiştir. Son olarak da $\Gamma_0(N)$ nin esas bölgesinin tipi incelenmiştir.



ABSTRACT

In this thesis after modular groups was mentioned the subgroups of modular groups are studied.

In chapter I firstly homogeneous and inhomogeneous linear transformation concepts and relation between these two concepts are considered. The modular group is defined by using these transformations. After this modular transformations are classified by means of the transformations and also generators of the modular groups and their relations are studied. Moreover, fundamental region is defined. Tessellation upper half plane is examined because of existence of fundamental region.

In chapter II the subgroup of modular groups are studied with details. Principle congruence groups and special congruence groups have been defined. After that principle region was shown for subgroups. The quotient space $\mathcal{H}^*/\Gamma$ is studied in details and the genus formula of principal regions is given. The branch schemas corresponding to normal subgroups was drawn. Finally the genus of $\Gamma_0(N)$ of principal region has been studied.



1 GİRİŞ

Bu tezde esas olarak modüler grupların alt grupları ele alınmış birlikte homojen ve inhomojen lineer dönüşümler de incelenmiştir.

Birinci Bölüm: Bu bölümde ilk olarak homojen ve inhomojen lineer dönüşümler tanımlanıp önemli özellikleri ifade edilmiştir. $L: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, z \rightarrow W = L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$,

$ad-bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ inhomojen lineer dönüşümü terslenebilir ve bu dönüşümler $\hat{\mathbb{C}}$ 'nin çemberlerinin kümesini korur. İnhomojen modüler dönüşümler kümesi $\mathcal{L}$ ile gösterilir. $L \in \mathcal{L}$ özdeş olmadığı takdirde en çok iki sabit noktaya sahiptir. Sabit noktalarına göre L dönüşümü, hiperbolik, eliptik, loksodromik ve parabolik dönüşümler şeklinde sınıflandırılır. Eğer $ad-bc > 0$ ise L , reel eksen, üst yarı düzlem ve reel eksene dik olan yarı çemberleri korur. $\mathbb{C}$ üzerinde 2×2 lik terslenebilir matrislerin grubu $\mathcal{A}$ olmak üzere ve $\det A \neq 0$ iken $L_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, z \rightarrow w = A.z$ dönüşümüne homojen lineer dönüşüm denir. $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}, A \rightarrow L_A$ eşlemesi bir izomorfidir ve $\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ ile gösterilir. Homojen ve inhomojen lineer dönüşümler arasındaki ilişki $\varphi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{L}, A \rightarrow \bar{A}: z \rightarrow w = \bar{A}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ homomorfisi ile verilir.

Homojen modüler dönüşümler, elemanları rasyonel tam sayılar olan 1 determinantlı homojen lineer dönüşümlerdir. Homojen modüler dönüşümlerin oluşturduğu gruba homojen modüler grup denir. $\bar{A}: z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü ise inhomojen modüler dönüşümdür. Bu dönüşümler üst yarı $\mathcal{H}$ düzlemini, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini korur. Γ ve $\bar{\Gamma}$ arasındaki ilişki $\Gamma \setminus \{\mp I\} \cong \bar{\Gamma}$ izomorfisi ile verilir.

Modüler grubun üreteçleri ve aralarındaki bağıntıların yanı sıra temel küme ve temel bölge tanımlanmış ve temel bölgenin Γ modüler grubunun elemanları altındaki görüntüleri yardımı ile üst yarı düzlem bölümlere ayrılmıştır.

İkinci bölümde ilk olarak modüler gruplar, eşdeğer sınıflar ve sabit noktalara yer verilmiştir. Daha sonra esas kongrüans grupları üzerinde durulmuş olup Γ_N 'nin mertebesi

$$|\bar{\Gamma}_N| = \begin{cases} \mu(2) \\ \frac{1}{2} \mu(N) = \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \end{cases}, \begin{matrix} N=2 \text{ için} \\ N>2 \text{ için} \end{matrix}$$

olarak elde edilmiştir. Γ_1 kongrüans grubunun F koduktörünün keyfi $A \in \Gamma$ için $AU^N A^{-1} \in \Gamma_1$ olan en küçük N doğal sayısı olduğu gösterilmiş, daha sonra üç özel

kongrüans grubu $\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$,

$\Gamma^0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{N} \right\}$, $\Gamma_0^0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$ olarak

tanımlanmıştır. Ayrıca bazı özel alt gruplar için esas bölgeler gösterilmiştir. Daha sonra da $\mathcal{H}^*$ Riemann yüzeyi tanımlanmıştır. Esas bölgenin tipi tanımlanmış çok yüzlü üzerindeki Euler teoremi verilmiştir. Modüler gruplarına çok yüzlü üzerinde Euler teoreminin uygulamaları yapılmıştır.



2. MODÜLER GRUP

2.1 İnhojen Lineer Dönüşümler

2.1.1 Tanım : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini ve $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresini gösterebilir.

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ parametreler olduğunda $ad - bc \neq 0$ sağlayan

$$L: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad z \rightarrow w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.1)$$

tasviri inhojen lineer bir dönüşümdür. Tüm inhojen lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}$ ile gösterilecektir.

2.1.2 İnhojen lineer dönüşümlerin önemli özellikleri

$L \in \mathcal{L}$ tersi alınabilir ve $L^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ters dönüşümü $w \rightarrow z = L^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$ ile

verilmiştir. $\mathcal{L}$ fonksiyonların bileşim işlemi altında bir gruptur. Ayrıca $L \in \mathcal{L}$,

$z \neq \frac{-d}{c}$ olmak üzere $z \in \mathbb{C}$ için holomorftur. $z = \infty$ ve $z = \frac{-d}{c}$ deki durumu

resiprokallerin girişi ile genel bir şekilde belirlenebilir. Burada $L \in \mathcal{L}$ de açılar korunur. Bundan başka açıları koruyan bütün dönüşümler kümesi $\mathcal{L}$ bu Riemann küresini kendi üzerine dönüştürür.

2.1.2.1 Tanım: Eğer $S(\tau_0) = \tau_0$ olacak şekilde $\pm I'$ dan farklı bir $S \in \Gamma$ varsa $\tau_0 \in \mathcal{H}^*$,

Γ nın bir sabit noktası olarak adlandırılır.

2.1.3 Sabit noktalı inhomojen lineer dönüşümlerin sınıflandırılması

Eğer $L \in \mathcal{L}$ birim tasvir değilse o takdirde en fazla iki sabit noktaya sahiptir. $L \in \mathcal{L} \setminus \mathbb{C}$ nin üç farklı noktası ve bunların görüntüleri ile tek olarak belirlenir. L tasviri

$$z_1 \rightarrow w_1, z_2 \rightarrow w_2, z_3 \rightarrow w_3$$

olmak üzere

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (2.2)$$

eşitliğini sağlar. Buradaki terimlerden birinin ∞ olması halinde uygun değişiklikler yapılmalıdır. Eğer denklem (2.2)'yi w 'ye göre çözersek denklem (2.1) formundaki L 'yi elde ederiz.

$$D(z_1, z_2, z_3, z) := \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \quad (2.3)$$

ifadesine z_1, z_2, z_3 ve z noktalarının iki kat oranı denir. Burada dört noktanın iki kat oranı değişmez. Sabit noktalara dayanarak $L \in \mathcal{L}$ tanımını aşağıda verelim.

Teorem 2.1:

i) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ayrık iki sabit nokta olmak üzere $L \in \mathcal{L}$

$$\frac{L(z) - z_1}{L(z) - z_2} = \lambda \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$$

normal formundadır.

ii) $z_1 \in \mathbb{C}$ ve ∞ sabit noktaları için $L \in \mathcal{L}$

$$L(z) - z_1 = \lambda(z - z_1), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, 1$$

formundadır.

iii) $z_0 \in \mathbb{C}$ bir sabit noktası için $L \in \mathcal{L}$

$$\frac{1}{L(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

dır.

iv) ∞ tek sabit nokta ise $L \in \mathcal{L}$

$$L(z) = z + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0$$

formundadır.

Yukarıda bulunan $\lambda \neq 0, 1$ çarpanına L' nin çarpanı denir. L' ye

$\lambda > 0$ ise hiperbolik dönüşüm

$|\lambda| = 1$ ise eliptik dönüşüm

$\lambda < 0$ ve $|\lambda| \neq 1$ ise loksodromik dönüşüm

tek sabit noktalı bir lineer dönüşüm ise parabolik dönüşüm denir.

2.1.4 Reel katsayılı inhomojen lineer dönüşümler ve Öklid olmayan geometri

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $ad - bc > 0$ ise o takdirde L reel eksenini kendisine dönüştürür ve yine $L, \mathcal{H}$ üst yarı düzlemi kendisine dönüştürür. Özellikle L , reel eksene dik olan $\mathcal{H}$ daki (düşey yarı doğrular dahil) yarı çemberlerin kümesini, kendi üzerine dönüştürür.

Eğer noktaları, üst yarı düzlemin noktaları olan bu yarı çemberler bir geometrinin doğruları olarak tanımlanırsa, o zaman Öklid olmayan (N.E.) bir geometrinin Poincore modeli elde edilir. Kesişim noktasında, onların Öklid teğetleri arasında Öklid açısı olarak 2 N.E. doğru arasındaki açı ölçülür. İki $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ noktası arasındaki N.E. $\delta(z_1, z_2)$ uzaklığını tanımlamak için reel eksene ortogonal ve z_1, z_2 noktalarından geçen Öklid-çemberinin reel ∞_1 ve ∞_2 noktalarını göz önüne alalım, ∞_1 ve ∞_2 noktaları öyle nitelendirilir ki, bu çember üzerinde ∞_1, z_1, z_2 ve ∞_2 noktaları devirsel olarak birbirini izler. O zaman reel pozitif logaritmayla

$$\delta(z_1, z_2) := \log D(z_1, z_2, \infty_1, \infty_2) \quad (2.4)$$

tanımlarız. Eğer bir lineer dönüşümle dört katlı $(\infty_1, z_1, z_2, \infty_2)$, $(0, 1, \lambda, \infty)$ üzerine dönüştürülürse bu seçimin mümkün olduğu görülür.

Işın, doğru parçası ve dairenin notasyonları Öklid geometrisinden alınacaktır. Eğer K, μ merkezli ve r yarıçaplı bir N.E. çemberi ise, o zaman onun $z \rightarrow w := \frac{z - \mu}{z - \bar{\mu}}$ dönüşümü altındaki görüntüsü ($\bar{\mu}$ ve μ 'nün kompleks eşleniğidir) $w=0$ merkezli bir E çemberidir. Çünkü $z=\mu$ boyunca olan N.E.-doğruları $w=0$ boyunca olan E-doğrularına dönüştürülür, reel z eksenini, $w=0$ civarındaki bir E.-çemberi üzerine tasvir edilir ve lineer dönüşüm altındaki iki kat oranının değişmezliği, K' 'nin görüntüsünün bir E-çemberi olduğunu gösterir. Bundan dolayı, N.E. K çemberinin bir E çemberi olduğunu görürüz. Bununla beraber, onun E.-merkezi ve yarıçapı farklıdır.

Eğer z_1 ve z_2 $\mathcal{H}$ da iki farklı nokta ise, o takdirde, onlardan eşit N.E.-uzaklığında olan $\mathcal{H}$ 'nın noktalarının kümesi, $[z_1, z_2]$ doğru parçasının N.E.-dikey açıortayı olan bir N.E.-doğrusudur. z_1 ve z_2 reel eksenin yukarısında aynı yükseklikteki noktaların bir çifti üzerine dönüştürülerek bu görülür. Bilindiği gibi, göz önüne aldığımız dönüşümler $\mathcal{H}$ 'nın konform tasvirlerinin kümesinin kendi üzerine olması koşulu ile aynıdır.

2.2. Homojen Lineer Dönüşümler

2.2.1 Tanım: $\mathcal{A}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tersi alınabilir, 2×2 ' lik matrislerin grubu olsun. Eğer

$A \in \mathcal{A}$ ise $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, nin determinanı

$|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ 'dır. Bundan başka $L, \mathbb{C}^2$, nin kendi üzerine olan terslenebilir lineer dönüşümleri grubu olsun. Bunlara lineer homojen dönüşümler denir.

$\forall A \in \mathcal{A}$ için, $L_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $z \rightarrow w = A.z$ dönüşümü L' ye aittir. Burada $A.z$, A' nin

$z = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ kolonuyla bir matris çarpımıdır ve $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ dir. Buradan

$$W = A.z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha w_1 + \beta w_2 \\ \gamma w_1 + \delta w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \text{ elde ederiz.}$$

2.2.2 Homojen ve inhomojen lineer dönüşümler arasındaki ilişki

$\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ için $A \rightarrow \bar{A}: z \rightarrow w = \bar{A}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ tekabülü $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

çekirdeği ile bir homomorfizmadır. ($\alpha I \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ tanımlanırsa). Eğer φ ,

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^*$, $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ birim modüllü matrislerinin $\mathcal{A}^*$ grubunu kendi

üzerine kısıtlarsa, o zaman φ' nin çekirdeği $\{\pm 1\}$ dir. $A \setminus \mathbb{C}^* \cong \mathcal{L}, \mathcal{A}^* | \{\pm 1\} \cong \mathcal{L}$ dir.

2.2.3. Aynı sabit noktalı dönüşümler

Sırasıyla sabit noktaları z_1 ve z_2 nokta çifti olan veya tek bir sabit z_0 noktasına sahip olan tüm $\bar{A} \in \mathcal{L}$ lerin grubunu göz önüne alalım. Eşleniklikten dolayı bu grup ya sabit $0, \infty$ nokta çiftine sahip olan tüm $\bar{A} \in \mathcal{L}$ grubuna yada tek sabit noktası ∞ olan $\bar{A} \in \mathcal{L}$ lerin grubuna izomorftir. Ayrıca normal formlar sırasıyla ya tüm $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ın

çarpımsal grubu ile yada tüm $\alpha \in \mathbb{C}$ nin toplamsal grubu ile tüm $\bar{A} \in \mathcal{L}$ grubunun izomorfizmini gösterir.

2.3 Modüler Grup

2.3.1 Tanım: Bir homojen modüler dönüşüm, elemanları rasyonel tam sayılar ve determinanı 1 olan bir homojen lineer dönüşümdür. Homojen modüler dönüşümler bir grup teşkil eder. Buna homojen modüler grup denir.

Bu grup tam birim modüler

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

matris grubuna izomorfiktir. 2.2.3. üncü bölümde verilen ϕ homomorfizmi,

inhomojen $\bar{\Gamma} := \{\bar{A} \mid A \in \Gamma\}$ modüler grubunu gösterir. Burada eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise

$$\bar{A} : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \text{ dir.}$$

$\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ elemanlarına inhomojen modüler dönüşümler denir. Bu dönüşümler, üst yarı $\mathcal{H}$ düzlemini $\mathbb{R}$ reel eksenini ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini korur.

Γ ve $\bar{\Gamma}$ arasındaki ilişki $\Gamma \setminus \{\mp I\} \cong \bar{\Gamma}$ izomorfizması ile verilir.

2.4 Üreteçler

Teorem 2.2:

Homojen modüler grup, sonsuz mertebeli $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve 4 mertebeli $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elemanları ile üretilir. Inhomojen modüler grup sonsuz mertebeli $\bar{U}: z \rightarrow z+1$ ve iki mertebeli $\bar{V}: z \rightarrow -\frac{1}{z}$ dönüşümleri ile üretilir.

2.5 Esas Bölge

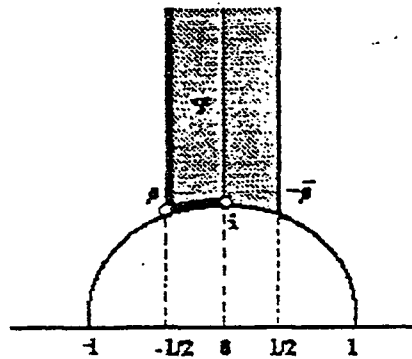
2.5.1 Tanım: (Esas küme, esas bölge): Eğer $\bar{\Gamma}$ altında eşdeğer olan $\mathcal{H}^*$ ın noktalarının her bir sınıfından tam olarak bir tane nokta içeriyorsa $\mathcal{F}$ kümesine $\mathcal{H}^*$ için $\bar{\Gamma}$ modüler grubunun bir esas kümesi denir.

Eğer $\mathcal{F}$ kümesi bir esas kümeyi içeriyorsa ve eğer $\tau \in \mathcal{F}, \bar{S}(\tau) \in \mathcal{F}, \bar{I} \neq \bar{S} \in \bar{\Gamma}$ olması τ ' nun $\mathcal{F}$ in bir sınır noktası olmasını gerektiriyorsa $\mathcal{F}$ e bir esas bölge denir.

Teorem 2.3:

$$\mathcal{F} := \left\{ \tau \mid \tau \in \mathcal{H}, |\operatorname{Re} \tau| < \frac{1}{2}, |\tau| > 1 \right\} \cup \{i\infty\} \cup \left\{ \tau \mid \operatorname{Re} \tau = \frac{-1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\} \cup \left\{ \tau \mid |\tau| = 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \tau \leq 0 \right\}$$

Kümesi $\mathcal{H}^*$ için $\bar{\Gamma}$ ' nin bir esas bölgesidir.



Şekil 2.1

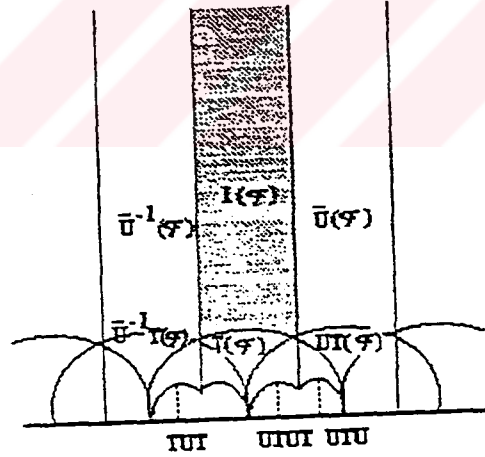
2.5.2 Üst yarı düzlemin bölümlere ayrılması

Inhomojen modüler dönüşüm ρ , i ve $i\infty$ ' dan farklı bir $\tau \in \mathcal{F}$ noktasının görüntüsü ile tek olarak belirlenir. Bu sonuç şu şekilde de formüle edilebilir. ρ , i ve $i\infty$ ' a denk olmayan her $\tau \in \mathcal{H}$ noktası $\bar{\Gamma}$ altında kesin olarak bir kere $\mathcal{F}$ ' deki bir noktanın görüntüsü olur. Açıkça i ' ye denk olan bu noktalar iki kez, ρ ' ya denk olan noktalar üç kez, $i\infty$ ' a denk olan noktalar sonsuz kez örtülür. Bir $\mathcal{F}_S$ modüler üçgeni ile $\bar{S}$ altında $\mathcal{F}$ ' in görüntüsünü belirtelim yani herhangi bir $\bar{S} \in \bar{\Gamma}$ için $\mathcal{F}_S = \bar{S}(\mathcal{F})$ olsun. Tabi ki $\mathcal{F}_S$ ' de bir esas bölgedir. Modüler üçgenlerin kümesi üst yarı $\mathcal{H}^*$ düzlemini örter. Her modüler $\mathcal{F}_S$ üçgeni, üç modüler üçgene komşudur. Şöyle ki

$$\mathcal{F}_{SU} = \overline{SU}(\mathcal{F}) = \overline{SUS^{-1}}(\mathcal{F}) = \overline{SUS^{-1}}(\mathcal{F}_S)$$

$$\mathcal{F}_{SU^{-1}} = \overline{SU^{-1}}(\mathcal{F}) = \overline{SUS^{-1}}(\mathcal{F}) = \overline{SU^{-1}S^{-1}}(\mathcal{F}_S)$$

$$\mathcal{F}_{ST} = \overline{ST}(\mathcal{F}) = \overline{STS^{-1}}(\mathcal{F}) = \overline{STS^{-1}}(\mathcal{F}_S)$$



Şekil 2.2

BÖLÜM 3

3.1 Modüler Grupların Alt Grupları

3.1.1 Homojen ve inhomojen gruplar

Γ_1, Γ homojen grubunun bir alt grubu olsun.

$$\varphi: A \rightarrow \bar{A}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \bar{A}: \tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

dönüşümü $\bar{\Gamma}$ inhomojen modüler grubunun $\bar{\Gamma}_1 := \varphi(\Gamma_1)$ alt grubuna Γ_1 ' in bir homomorfizmi olur. Bu homomorfizma eğer $-I \in \Gamma_1$ ise $\{\pm I\}$ çekirdeğine sahiptir ve eğer $-I \notin \Gamma_1$ ise bu bir isomorfizmadır.

Karşıt olarak eğer bir $\bar{\Gamma}$ dönüşümler grubu

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$$

formunda verilmiş ise o zaman $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris formları kümesi bir $\Gamma_1 \subset \Gamma$ grubudur ve

verilen grup $\bar{\Gamma}_1 = \varphi(\Gamma_1)$ dir. Bu Γ_1 grubu $-I$ matrisini kapsar. Bununla birlikte Γ ' nin $-I$ ' yı kapsamayan alt grupları da vardır.

Böyle gruplar için $\Gamma_1 \cup (-I)\Gamma_1$ bir $\bar{\Gamma}_1 := \varphi(\Gamma_1) = \varphi(\Gamma_1 \cup (-I)\Gamma_1)$ e genişletilmiş uygun grup olur. $\Gamma_0, -I$ matrisini kapsamadığı zaman bu $\bar{\Gamma}$ grubu Γ ' nin Γ_0 alt grubunun φ altındaki görüntüsüne isomorf değildir.

Gerçekten $\bar{\Gamma}$ grubu $\varphi(\Gamma_0) = \bar{\Gamma}$ 'den elde edilir ki bu $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinden biridir ve dolayısıyla karesi $-I$ 'ya eşit olan bu matris Γ_0 'ın içinde bulunur.

Şimdi Γ_1 i, Γ nın bir alt grubu varsayalım ve $-I, \Gamma_1$ de bulunsun.

$$\Gamma = \bigcup_{v=1}^{\mu} \Gamma_1 S_v, \quad S_v \in \Gamma$$

koset ayrışması

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{v=1}^{\mu} \bar{\Gamma}_1 \bar{S}_v, \quad \bar{S}_v \in \bar{\Gamma}$$

ayrışmasını belirtir.

$$\mu = (\Gamma : \Gamma_1), \quad \bar{\mu} = (\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}_1)$$

indisleri için, eğer

$$-I \in \Gamma_1 \text{ ise } \bar{\mu} = \mu$$

sonucu çıkar.

Diğer taraftan eğer

$$-I \notin \Gamma_1 \text{ ise } \bar{\mu} = \frac{1}{2} \mu$$

olur.

Eğer Γ_1, Γ da normal ise o zaman $\bar{\Gamma}_1 = \varphi(\Gamma_1)$, $\bar{\Gamma}$ de normaldir ve tersi de doğrudur.

Her $A \in \Gamma$ için $A\Gamma_1 A^{-1} = \Gamma_1$

olduğu zaman

her $\bar{A} \in \bar{\Gamma}$ için $\bar{A}\bar{\Gamma}_1 \bar{A}^{-1} = \bar{\Gamma}_1$

olduğu sonucu çıkar ve bundan başka $-I \in \Gamma_1$ olup olmadığından bağımsızdır.

3.1.2 Eşdeğer Sınıflar ve Sabit Noktalar

Modüler gruplar için olan tanımların bazılarını alt gruplara aktarabiliriz,

Eğer, $\tau' = S(\tau)$

gibi bir $S \in \Gamma_1$ varsa $\tau, \tau' \in \mathcal{H}^*$ noktaları (Γ nin içindeki Γ_1 lerin, her bir seçimi için) $\bar{\Gamma}$ nin $\bar{\Gamma}_1 = \phi(\Gamma_1)$ alt grubu altında eşdeğer olarak adlandırılır.

$\bar{\Gamma}_1$ altında biri diğerine eşdeğer olan $\mathcal{H}^*$ in bütün bu noktaları kümesi $\bar{\Gamma}_1$ alt grubu altında bir eşdeğer sınıftır.

$\bar{\Gamma}_1$ için bir $\mathcal{F}$ esas kümesi $\mathcal{H}^*$ in noktalarının kümesidir, öyle ki $\mathcal{H}^*$ in her noktası $\mathcal{F}$ nin bir noktasına tam olarak eşdeğerdir.

$(\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}_1)$ sonlu indis durumundaki $\bar{\Gamma}_1$ nin esas bölgesi bölüm 3.4 de ayrıntılı olarak incelenecektir.

Eğer,

$$S(\tau_0) = \tau_0$$

olacak şekilde $\pm I$ dan farklı bir $S \in \Gamma_1$ varsa $\tau_0 \in \mathcal{H}^*$, $\bar{\Gamma}_1$ nin sabit noktası olarak adlandırılır.

$\bar{\Gamma}$ nin bir $\bar{\Gamma}_1 = \varphi(\Gamma_1)$ alt grubu altında eşdeğer olan noktalar hakkındaki iki teoremi ispatlayalım.

1-) Eğer $\tau_0 \in \mathcal{H}^*$, $\bar{L} \in \bar{\Gamma}_1$ süstitüsyonunun bir sabit noktası ise o zaman $L_1 \in \Gamma_1$ olan $L_1(\tau_0) = \tau_1$, $\bar{L}_1 \bar{L} \bar{L}_1^{-1} \in \bar{\Gamma}_1$ süstitüsyonunun bir sabit noktasıdır. Bu

$$L(\tau_0) = \tau_0$$

dan çıkar ki

$$(L_1 L L_1^{-1})(L_1(\tau_0)) = L_1(\tau_0)$$

dır.

Elbette eğer

$$L^f = \pm I \text{ ise } (L_1 L L_1^{-1})^f = \pm I$$

dır.

2-) r , ya bir rasyonel sayı yada $i\infty$ ve $r = A(i\infty)$ olsun öyle ki $A \in \Gamma$ dır. Bundan başka $AU^k A^{-1} \in \Gamma_1$ olan en küçük k doğal sayısı K olsun.

Eğer,

$$r' = L_1(r), L_1 \in \Gamma_1$$

ise ki, eğer

$$A' = L_1 A \text{ olan } r' = A'(i\infty)$$

ise o zaman

$$A' U^k A'^{-1} \in \Gamma_1$$

olan en küçük k doğal sayısı K dir.

Bu

$$A U^k A^{-1} = L_1^{-1} A' U^k A'^{-1} L_1$$

den elde edilir ki

$$A U^k A^{-1} \text{ ve } A' U^k A'^{-1}$$

aynı zamanda Γ_1 e aittir. $\bar{A} \bar{U}^k \bar{A}^{-1}$ dönüşümü

$$\bar{A} \bar{U}^k \bar{A}^{-1} \in \Gamma_1 \text{ ile eşdeğer olan } A U^k A^{-1} \in \Gamma_1$$

için $A(i\infty)=r$ sabit noktalı $\bar{\Gamma}_1$ den elde edilen bütün devirli grubunun üreticidir.

3.2. Esas Kongrüans Grupları

Bir N doğal sayısı için modülü N olan $z \in \mathbb{Z}$ için belirtilen kalan sınıfı z_N olsun ve N modüllü bütün kalan sınıflarının belirtilen halkası $\mathbb{Z}_N$ olsun. $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ özel lineer gruba isomorf olan homojen modüler dönüşümler grubunu önceki gibi Γ ile belirtelim. $SL(2, \mathbb{Z}_N)$ grubu için Γ_N sembolünü kullanalım.

3.2.1 N. Basamaktan homojen esas kongrüans grubu

$\mathbb{Z}'$ 'in $\mathbb{Z}_N$ üzerine $z \rightarrow z_N$ homomorfizm halkası

$$\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma_N, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_N & b_N \\ c_N & d_N \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

olan Γ nın Γ_N üzerine σ grup homomorfizmini sağlar.

σ nın

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\} \quad (3.2)$$

çekirdeği Γ 'nın bir normal alt grubudur ve N. basamaktan esas homojen kongrüans grubu olarak adlandırılır.

Biz $\sigma(\Gamma)$ görüntüsünün Γ_N tam grubuna isomorf olduğunu göstereceğiz. Bu aşağıdaki lemmayla ifade edilir.

Lemma 1: a,b,c,d tam sayılar olmak üzere

$$ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$$

nin her bir a,b,c,d, çözümü için

$$a'd' - b'c' = 1$$

olan $a' \equiv a, b' \equiv b, c' \equiv c$ ve $d' \equiv d \pmod{N}$ tam sayıları vardır.

İspat : İspat iki adımda yapılır. $(c,d)=1$ in en büyük ortak bölen olduğunu kabul edebiliriz. İlk önce $(c',d')=1$ olan $c' \equiv c \pmod{N}$ ve $d' \equiv d \pmod{N}$ olan c', d' tamsayılarının olduğunu gösteririz. Varsayımımızdan $(c,d,N)=1$ dir. Eğer $c=0$ ise o zaman $c':=N$ ve $d':=d$ seçebiliriz. Aksi halde form p bir asal sayı olmak üzere $P := \prod_{p|C, p \nmid N} p$ çarpımıdır ve o zaman

$c' := c$, $d' := d + \ell_N$ kümesidir ki ℓ burada $d + \ell_N \equiv 1 \pmod{P}$ durumuna bağlı olarak seçilebilir. Bu seçim $(N,P)=1$ olduğundan mümkündür. Şimdi $d' \equiv 1 \pmod{P}$, $c' \equiv 0 \pmod{P}$ ve böylece istendiği gibi $(c',d')=1$ dir. $(c,d)=1$ kabulümüzden çıkar. O zaman $xd-yc=1$ eşitliği a_1, b_1 tam sayı çözümüne sahiptir. $A_1 := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{pmatrix}$, Γ nın bir elemanıdır. Eğer

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ise o zaman}$$

$$AA_1^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b_1 \\ -c & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & a_1b-ab_1 \\ 0 & a_1d-cb_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$$

veya $A = U^k A_1 \pmod{N}$ bununla birlikte $U^k A_1 \in \Gamma$ dır.

Bundan dolayı $U^k A_1$ in girişiyle istenilen a', b', c' ve d' çözümünü verir.

Teorem 3.1 : σ homomorfizmi altında Γ nın görüntüsüyle $\Gamma_N = SL(2, \mathbb{Z}_N)$:

$$\sigma(\Gamma) \cong \Gamma / (\Gamma_N) \cong \Gamma_N$$

dir.

3.2.2 Γ_N nin Mertebesi

Şimdi Γ_N nin $\mu(N) := |\Gamma_N|$ mertebesini belirleyelim. Bu

$$ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$$

nin kongrüant olmayan çözümlerinin sayısına eşdeğerdir. Dolayısıyla $(N_1, N_2)=1$ için

$$\mu(N_1, N_2) = \mu(N_1) \cdot \mu(N_2)$$

dir. Dolayısıyla bir $N=p^\alpha$ asal sayısının kuvvetlerine kendimizi kısıtlayabiliriz. Burada $\varphi(p^\alpha)$, $a \not\equiv 0 \pmod p$ olan $a \pmod{p^\alpha}$ nın kalan sınıflarıdır. Burada $\varphi(n)$ Euler fonksiyonunu tanımlamak üzere $\pmod n$ kalan sınıflarının sayısıdır ki n 'ye bağlı olarak asaldır. a, b ve c sayıları için bu sınıfların her birine $\pmod{p^\alpha}$ keyfi olarak seçilebilir. $d \pmod{p^\alpha}$ tek olarak hesaplanır. Bu halde $\varphi(p^\alpha)$. $p^{2\alpha}$ ların hepsi çözümlerdir. $p^{\alpha-1}$, $a \equiv 0 \pmod p$ olan $a \pmod{p^\alpha}$ kalan sınıflarıdır ve bunların her birine karşılık $d \pmod{p^\alpha}$ keyfi olarak seçilebilir. Bu halde $(p, b, c)=1$ olduğundan $b \pmod{p^\alpha}$ yine tek olarak belirlenir. Buradan $\varphi(p^\alpha)$. $p^{2\alpha-1}$ ek çözümleri vardır. Hepsinden

$$\mu(p^\alpha) = \varphi(p^\alpha) \cdot p^{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = p^{3\alpha} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

elde ederiz.

Burada N sabiti için

$$|\Gamma_N| = \mu(N) = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \quad (3.3)$$

sonucuna varırız. Çarpım N nin asal bölenleri üzerinedir.

3.2.3 N. basamaktan inhomojen esas kongrüans grubu

Şimdi inhomojen durumu göz önünde bulunduralım. İnhojen modüler süstitüsyonlarının grubunu önceki $\bar{\Gamma}$ ile belirtelim. N. basamaktan inhomojen esas kongrüans grubundan

$$\bar{\Gamma}(N) := \left\{ \tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\} \quad (3.4)$$

grubunu anlarız.

$$\Gamma[N] := \Gamma[N] \cup (-I)\Gamma[N] \quad (3.5)$$

homojen grubu da esas kongrüans grup olarak adlandıracağız. $\{\pm I\}$ çekirdeğine sahip

$$\bar{A} : \tau \rightarrow \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad \text{olan } \varphi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \bar{A}$$

homomorfizmi $\Gamma[N]$ in görüntüsü olarak $\bar{\Gamma}(N)$ elde edilebilir. $N > 2$ için $\Gamma[N]$, $\Gamma[N]$ i kapsar bununla birlikte $\bar{\Gamma}[N] = \bar{\Gamma}(N)$ dir. $\bar{\Gamma}(N)$ grubu $\bar{\Gamma}$ nin normal alt grubudur;

$$\bar{\Gamma}_N := \bar{\Gamma} / \bar{\Gamma}(N)$$

çarpan grubu N' inci basamaktan modüler grup olarak adlandırılır. Bölüm 3.1.1'in ışığında ve önceki sonuçtan $\bar{\Gamma}_N$ 'nin mertebesi

$$\text{eğer } N > 2 \text{ ise } |\bar{\Gamma}_N| = (\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}(N)) = (\Gamma : \Gamma[N]) = \frac{1}{2}(\Gamma : \Gamma(N))$$

den belirlenir. $N=2$ için olan sonuçla birlikte

$$|\bar{\Gamma}_N| = \begin{cases} \mu(2) & \text{için } N=2 \\ \frac{1}{2}\mu(N) = \frac{N^3}{2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) & \text{için } N>2 \end{cases} \quad (3.6)$$

elde ederiz.

$N=2,3,4$ ve 5 basamaklarının $\bar{\Gamma}_N$ modüler grupları belirli düzenli rotasyon gruplarına ve dolayısıyla S_v belirli simetrik gruplarına ve A_v alterne gruplarına isomorf olduğunu ispatlayacağız. Özellikle

$$\bar{\Gamma}_2 \cong \text{üçgensel grup} \cong S_3 \text{ ve } |\bar{\Gamma}_2| = 6$$

$$\bar{\Gamma}_3 \cong \text{dört yüzlü grup} \cong A_4 \text{ ve } |\bar{\Gamma}_3| = 12$$

$$\bar{\Gamma}_4 \cong \text{sekiz yüzlü grup} \cong S_4 \text{ ve } |\bar{\Gamma}_4| = 24$$

$$\bar{\Gamma}_5 \cong \text{yirmi yüzlü grup} \cong A_5 \text{ ve } |\bar{\Gamma}_5| = 60$$

dir.

p asal basamaktan bir $\bar{\Gamma}_p$ modüler grubu, p elemanlı F_p alanı üzerindeki bir boyutlu $|P_1$ projektiv uzayının, projektiv dönüşümlerinin grubu gibi yorumlanabilir. Öyle bir

$$\bar{\Gamma}_p \cong \text{PSL}(2, p)$$

ye sahiptir ki burada $\text{PSL}(2, p)$ belirtilen $|P_1$ üzerindeki projektiv gruptur. Buradan $\bar{\Gamma}_p$, $p+1$ elemanlı permütasyon grubu gibi ifade edilebilir. Modüler grupların bütün alt gruplarının asal sayı basamakları biliniyor. $p \geq 5$ için modüler gruplar basittir.

$\bar{\Gamma}_5$ ve $\bar{\Gamma}_7$ grupları en düşük mertebeden devirli olmayan basit gruplardır.

3.3 Kongrüans Gruplar

Bu bölümde modüler grupların alt gruplarının daha genel bir sınıfı üzerinde duracağız.

3.3.1 Homojen Kongrüans Gruplar : Kondüktör : Γ' nın bir Γ_1 alt grubu, eğer N_1 inci basamaktan homojen esas kongrüans grup $\Gamma(N_1)$ i kapsarsa N_1 mertebeli homojen kongrüans grubu olarak adlandırılır. Bu N_1 sayısı Γ_1 ile tek türlü belirlenemez. Bununla birlikte en küçük mertebe F iyi tanımlanmıştır ve Γ_1 in kondüktörü olarak isimlendirilir.

Γ_1 için $\Gamma_1(F)$ yazılması daha uygundur. Kondüktör aşağıdaki özelliklerle karakterize edilir.

Teorem 3.2 : Bir Γ_1 kongrüans grubunun F kondüktörü en küçük N doğal sayısıdır, öyle ki keyfi $A \in \Gamma$ için

$$AU^N A^{-1} \in \Gamma_1$$

dir.

İspat: Eğer her $A \in \Gamma$ için $AU^N A^{-1} \in \Gamma_1$ de olacak şekilde en küçük doğal sayı N ise o zaman N , Γ_1 in her basamağını böler ve sonuç olarak F 'yi de böler. Bundan dolayı $N \leq F$ dir. Şimdi de her $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ nin Γ_1 in bir elemanı ve $N \geq F$ olduğunu gösterelim.

Bu sonucu $M \in \Gamma(N)$ matrislerin çarpımı gibi yazabiliriz. $M \in \Gamma_1$ olması durumunda bu yol açıktır. Açık olarak her $g \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & gN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \text{ dir. } (d, N) = (d, c) = 1 \text{ den dolayı}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & gN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + agN \\ c & d + cgN \end{pmatrix}$$

denklemindeki g tam sayısını $(d+cgN, F)=1$ olacak şekilde hesaplamak mümkündür. Bundan dolayı M nin d elemanı için $(d, F)=1$ farz edelim. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 1 & gN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cgN & b+dgN \\ c & d \end{pmatrix}$$

ve $(d, F)=1$ den dolayı $g \in \mathbb{Z}$ için

$$b+dgN = \left(\frac{b}{N} + dg \right) N \equiv 0 \pmod{F}$$

i çözebiliriz. Bu genelliği bozmadan ayrıca $b \equiv 0 \pmod{F}$ olduğunu varsayabileceğimiz anlamına gelir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ gN & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -gN \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi bu ifadeden açık olduğu üzere Γ_1 e aittir.

$(d, F)=1$ den dolayı

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ gN & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bgN & b \\ c+dgN & d \end{pmatrix}$$

denklemini gerektirir ki g yi $c+dgN \equiv 0 \pmod{F}$ olacak şekilde seçebiliriz. Böylece ayrıca varsayabiliriz ki $c \equiv 0 \pmod{F}$ ve

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \pmod{F}$$

dir. $ad \equiv 1 \pmod{F}$ den dolayı

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \pmod{F}$$

dir.

$ad \equiv 1 \pmod{F}$ den dolayı

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1-ad & d(2-ad) \end{pmatrix} \pmod{F} \quad (3.7)$$

dir.

Sonuç olarak $M=M_0L$ olan bir $L \in \Gamma(F) \subset \Gamma_1$ e sahibiz. Burada M_0 , (3.7) denkleminde sağ tarafta belirtilen matristir. M_0 'ı

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-d & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1-a & 2-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpımı gibi yazabiliriz. Yukarıda belirtilen görüşler ışığında burada birinci ve son çarpan Γ_1 dedir, $d \equiv 1 \pmod{N}$ olduğunda ortadaki çarpan Γ_1 de olduğu görüldüğü sürece bundan dolayı

$a \equiv 1 \pmod{N}$ ve

$$\begin{pmatrix} a & a-1 \\ 1-a & 2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Bu teorem 3.2 'yi ispatlar.

3.3.2 Özel Kongrüans Gruplar

Genellikle 3 özel kongrüans gruba özel isimler verilmesi alışıla gelmiştir.

$$\begin{aligned}\Gamma_0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \in \Gamma \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\} \\ \Gamma^0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv 0 \pmod{N} \right\} \\ \Gamma_0^0(N) &:= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \in \Gamma \mid b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}\end{aligned}\tag{3.8}$$

Yukarıdakilerin gruplar olduğu hemen anlaşılır.

$\Gamma(N)$ halinde olduğu gibi görünür ki kondüktörleri N dir. Açık olarak Γ da ki $\Gamma_0(N)$ nin indisine eşittir. $(\Gamma : \Gamma_0(N))$ nin indisini hesaplamak için

$$(L_0(N) : \Gamma(N)) = N \cdot \varphi(N)$$

olduğunu göz önüne alırsak. Çünkü eğer $c \equiv 0 \pmod{N}$ ise

$$ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$$

kongrüansı tam olarak $N \cdot \varphi(N)$ çözümüne sahip olduğundan (3.3) denklemindeki gibi μ_n olan

$$\mu_0(N) := (\Gamma : \Gamma_0(N)) = \frac{\mu(N)}{N \cdot \varphi(N)} = N \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)\tag{3.9}$$

indisini buluruz. Eğer $b \equiv c \equiv 0 \pmod{N}$ ise o zaman bizim kongrüansımız aynı $\varphi(N)$ kongrüans olmayan çözümüne sahiptir. Böylece

$$\left(\Gamma : \Gamma_0^0(N)\right) = \frac{\mu(N)}{\varphi(N)} = N^2 \cdot \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

dir.

3.3.3. $\Gamma_0(q)$ Alt Grubu

q herhangi bir pozitif tamsayı olsun.

$$\Gamma_0(q) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \mid c \equiv 0 \pmod{q} \right\}$$

şeklindeki Γ nin tüm $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ elemanlarının kümesidir.

$\Gamma_0(q)$, Γ nin bir alt grubudur.

Aşağıdaki teorem p , asal sayı olduğu zaman Γ nin her bir elemanının, $\Gamma_0(p)$ nin elemanları cinsinden gösterilebileceğini ifade eder.

Teorem 3.3: Γ tam modüler grubunun üreteçleri.

$$S_\tau = \frac{-1}{\tau} \quad \text{ve} \quad T_\tau = \tau + 1$$

dir. Γ daki her bir $V, U \notin \Gamma_0(p)$ için, p herhangi bir asal sayı olmak üzere,

$$V = PST^k$$

olacak şekilde $0 \leq k < p$ şeklinde bir k tamsayısı ve $\Gamma_0(p)$ de bir P elemanı vardır.

İspat: $c \not\equiv 0 \pmod{P}$ olacak şekilde

$V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ verilmiş olsun. Burada $V \in \Gamma$ olduğu için $V \notin \Gamma_0(p)$ den $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ dir.

$p \in \Gamma_0(p)$ idi. O zaman $c \equiv 0 \pmod{p}$ olmak üzere $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alalım ve $V = PST^k$ yı oluşturalım.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $0 \leq k < p$ şeklinde bir k tamsayısı bulmak isteyelim.

Buradaki tüm matrisler singüler olmadığından yani $ad-bc \neq 0$ olduğundan matrislerin tersleri vardır ve

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ matrisinin tersi ile her iki tarafı sağdan çarpalım

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ak-B & A \\ Ck-D & C \end{pmatrix}$$

$0 \leq k < p$ olmak üzere $kC \equiv D \pmod{P}$ kongrüansının çözümü olarak k' yı seçelim

$c \not\equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan bu mümkündür. Çünkü $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$ idi ve $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ idi.

Ayrıca $kC \equiv D$ den $p \mid kC - D$ ve $kC = pt + D$ olur. Bu durum $P \times C$ halinde gerçekleşir.

$\frac{kC}{p} = t + \frac{D}{p}$ olur ve p, C yi bölmez. Yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} a &= Ak - B & b &= A \\ c &= Ck - D & d &= C \end{aligned}$$

yazılır. $kC \equiv D \pmod{p}$ den $p \mid kC - D$ ve $kC - D = pt$ şeklinde $t \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $kC = Pt + D$ yazılır. Bu yazılırsa $kc = Pt + D - D \Rightarrow c = Pt$ olur yani $c \equiv 0 \pmod{p}$ ve $P \in \Gamma_0(P)$ olur. (p/c yani p/Pt)

3.3.4 İnhomojen kongrüans gruplar

$\bar{\Gamma}$ nin bir $\bar{\Gamma}_1$ alt grubu eğer Γ_1 ,

$$\varphi: A \rightarrow \bar{A}, A \in \bar{\Gamma}_1$$

dönüşümü altında N_1 inci basamaktan bir Γ_1 homojen grubunun görüntüsüne homomorf ise N_1 inci basamaktan bir inhomojen kongrüans grup olarak adlandırılır.

$\bar{\Gamma}$ nin bir $\bar{\Gamma}_1$ alt grubu $\bar{\Gamma}(N_1)$ inhomojen esas kongrüans grubu kapsar.

Eğer $\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}$ nin sonlu indisli keyfi bir alt grubu ve $\varphi(\Gamma_1) = \bar{\Gamma}_1$ ise Γ_1 in kondüktörünü $\bar{\Gamma}_1$ nin kondüktörü gibi seçebiliriz. Açık olarak iki (farklı olmaları gerekmeyen) Γ_1 ve $\Gamma_1 \cup (-1)\Gamma_1$ grupları aynı kondüktöre sahiptir, inhomojen grubunun kondüktörü ileride (teorem 3.6) açıklanacak olan bir geometrik anlamı vardır.

3.4 Esas Bölge

$\bar{\Gamma}_1$, $\bar{\Gamma}$ deki sonlu μ indisli bir alt grubu olsun. Burada ve bu bölümün aşağıdaki kısmında $\bar{\Gamma}_1$ nin $-I$ yı kapsayan Γ_1 grubunun φ altındaki görüntüsüne homomorf olduğunu varsayalım. Genellikle inhomojen grupların ve elemanların isimlendirilmesinde çizgi ihmal edilir. Bunun hiçbir düzensizliğe neden olmayacağına inanılır.

3.4.1 Esas bölge

$\mathcal{H}^*$ üst yarı düzleminin bir $\mathcal{F}$ kümesine, eğer Γ_1 altında eşdeğer noktaların her bir sınıfının bir temsilini tam olarak içerirse, Γ_1 grubu için bir esas küme denir. $\mathcal{F}_1$ kümesine, eğer bir esas kümeyi kapsarsa bir esas bölge denir ve eğer

$\tau \in \mathcal{F}_1, S(\tau) \in \mathcal{F}_1, S \neq I$ ve $S \in \Gamma_1$ ise τ , $\mathcal{F}_1$ in bir sınır noktasıdır. Γ_1 için bir $\mathcal{F}_1$ esas bölgesinin varlığı kolayca gösterilebilir.

Gerçekten eğer

$$\Gamma = \bigcup_{v=1}^{\mu} \Gamma_1 S_v, \mu = (\Gamma : \Gamma_1)$$

modüler grubun koset ayrışması ve eğer $\mathcal{F}$, Γ nın bir esas bölgesi ise o zaman

$$\mathcal{H}^* = \bigcup_{v=1}^{\mu} \Gamma_1 S_v(\mathcal{F})$$

dir. Bundan dolayı

$$\mathcal{F}_1 := \bigcup_{v=1}^{\mu} S_v(\mathcal{F}) \tag{3.10}$$

Γ_1 grubu için bir esas kümeyi kapsar. Eğer – her zaman mümkün olduğu gibi – S_v ler

$$v \neq v' \text{ için } S_v(\mathcal{F}) \cap S_{v'}(\mathcal{F}) = \emptyset$$

olacak şekilde seçilebilir. O zaman $\mathcal{F}_1$ in Γ_1 in eşdeğer noktaları $\mathcal{F}$ in sınırında bulunur.

Teorem 3.4: Γ_1 için modüler üçgenlerden oluşan bir $\mathcal{F}_1$ esas bölgesi vardır, öyle ki bunların her bir çifti ortak kenarlı bir modüler üçgenler zinciri ile bağlanabilir.

İspat : Genellikle sabit modüler üçgenden yola çıkarak $\mathcal{B}$ bölgemize $\mathcal{B}$ ile ortak bir kenara sahip olan ve $\mathcal{B}$ deki başka bir modüler üçgene eşdeğer olmayan bir modüler üçgeni ekleriz. Eğer bu yolla Γ_1 altında her eşdeğer noktalar sınıfının bir temsili bulunursa o zaman Γ_1 için $\mathcal{F}_1$ bir bağlantılı esas bölge olur. Eğer bütün eşdeğer sınıfların temsilleri bulunamazsa o zaman her bir $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{B}$ esas bölgesi için $\mathcal{B}$ de bulunmayan bir Δ modüler üçgeni vardır. Bununla birlikte bu mümkün değildir. Varsayımımız için $\mathcal{B}$ nin bir modüler üçgenin bir iç noktası ile, Δ' nin bir iç noktasını $i\infty$, i yada ρ' ya eşdeğer Γ' nin bir noktasından geçmeyen çokgensel bir yol ile birleştiririz. O zaman $\mathcal{B}$ den geçen bu yol boyunca $\mathcal{B}$ nin hiç bir üçgenine eşdeğer olmayan ilk modüler üçgen $\mathcal{B}$ deki bir üçgenle ortak kenara sahip olan bir üçgene eşdeğer olmalıdır. Bu $\mathcal{B}$ nin oluşturulması ile çelişkilidir. Modüler üçgenlerden bu şekilde oluşturulan $\mathcal{F}_1$ esas bölgesi basit bağlantılıdır. Aksi halde $\mathcal{F}_1$ de bir basit kapalı ℓ eğrisi vardır ki $\mathcal{F}_1$ de bir noktaya sürekli olarak küçülemez. ℓ açıkça birleşimi $\mathcal{F}_1$ yi kesmeyen modüler üçgenlerin $\mathcal{L}$ sonlu kümesini çevreler. Bu durumda $\overline{\mathcal{F}_1} := V(\mathcal{F}_1) \subseteq \varphi$ olan bir $V \in \Gamma_1$ süstitüsyonu vardır. Aynı zamanda $\overline{\mathcal{F}}$ basit bağlantılı değildir. Bu yöntemin tekrarı φ nin sonsuz çoklukta modüler üçgenlerden ibaret olduğu sonucuna götürür. Yukarıdaki inceleme ile bu bir çelişkidir ve teorem 3.4 ispatlanır.

Başka türlü durumda olmadıkça bir $\mathcal{F}_1$ in kenarları boyunca bağlantılı olan modüler üçgenlerden ibaret olduğunu varsayacağız. O zaman iki farklı esas bölgenin, ortak kenarları olan en çok bir bağlantılı kümeye sahip bir $L \in \Gamma_1$ süstitüsyonlarla bağlı olduklarını söyleyebiliriz.

$\mathcal{F}_1$ in basit bağlantılılığının ispatındaki gibi $\mathcal{F}_1 \cup L(\mathcal{F}_1)$ bir ortak bağlantılı kenarlar kümesi birden daha fazla olan modüler üçgenlerin iki kümesinin birleşimi olarak gösterilebilir.

3.4.2 Bir esas bölgenin sınırı

Şimdi bir $\mathcal{F}_1$ sabit esas bölgesinin sınırını göz önüne alalım. $\mathcal{F}_1$ de bulunmayan fakat $\mathcal{F}_1$ ile ortak bir kenarı olan her bir Δ modüler üçgenini inceleyelim.

Bir $V \in \Gamma_1$ dönüşümü vardır öyle ki $V(\Delta), \mathcal{F}_1$ üçgeninin bir sınırıdır. Tersleriyle birlikte böyle dönüşümler sınırlı süstitüsyonlar olarak adlandırılırlar. $V(\mathcal{F}_1)$ ve $\mathcal{F}_1$ sınır süstitüsyonları, esas bölgenin her bir komşuluğunda $\mathcal{F}_1$ dönüşümü kullanılmaya imkan verdiğinden aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.5: Sınır süstitüsyonları Γ_1 inhomojen grubunu üretirler.

Γ altında ρ, i ve $i\infty$ a eşdeğer olan noktalarda $\mathcal{F}_1$ in sınırının durumunu belirlemek istiyoruz. Eğer τ , Γ altında $\rho = e^{2\pi i/3}$ veya i 'ye eşdeğerse Γ_1 in bir sabit noktasıdır. O zaman $\mathcal{F}_1$ in sınır noktası olur. Yani τ , $\mathcal{F}_1$ in her bir seçimi için $\mathcal{F}_1$ in bir iç noktası olmaz. Bu durumda Γ altında i ye eşdeğer bir τ_i noktasında, τ_i ye değen $\mathcal{F}_1$ de bir modüler üçgen vardır. Diğer taraftan Γ altında τ_ρ da, ρ ya eşdeğer olan τ_ρ da yada $\mathcal{F}$ de bitişik iki modüler üçgenden biri Γ_1 altında τ_ρ ya eşdeğer tam olarak başka tek bir noktayı içerir. Γ_1 altında τ_ρ ya eşdeğer noktaların çevresinde $\mathcal{F}_1$ in üçgenlerinin iç açılarının toplamı bu son iki durumdan birinde $2\pi/3$ tür. Bir sabit $\tau_0 \in \mathcal{H}^*$ noktasını çevresi $\{L(\tau_0) | L \in \Gamma_1, L(\tau_0) \in \mathcal{F}_1^-\}$ noktalarının kümesidir. Eğer τ , Γ_1 in bir sabit noktası değil ise, o zaman τ da bitişik modüler üçgenlerin hepsi Γ_1 altında eşdeğer değildir ve $\mathcal{H}$ daki τ 'nın $\mathfrak{I}$ civarının tamamı, Γ_1 altında eşdeğer olmayan noktalardan ibarettir. Eğer $\tau \in \partial\mathcal{F}_1$ ise o zaman $\mathfrak{I}$ nun noktalarına eşdeğer olan $\mathcal{F}_1$ deki noktalar kümesi bağlantılı değildir. $L(\tau)$ noktalarına karşılık gelenler τ nun çevresine aittir. $L(\mathfrak{I}) \cap \mathcal{F}_1$ kısmi kümelerine sahibiz, bunun açılarının toplamı 2π dir.

Esas bölgenin rasyonel kaspları genellikle sabit noktalardır ve bunun için incelenen sınır noktalarıdır. Γ_1 altında τ_∞ sabitine eşdeğer noktaların çevresinde değen modüler üçgenler Γ_1 in süstitüsyonları ile τ_∞ daki bir yelpaze formuna dönüştürülebilir. τ_∞ sabit noktalı Γ nun dönüşümleri formu Γ_1 inkiler gibi bir devirsel grup olduğundan bu açıktır. Eğer bu

devirsel grubun üreteç elemanı $AU^K A^{-1}$, $K>0$ ise o zaman $v=0,1,2,\dots,k-1$ için $AU^v(\mathcal{F})$ üçgenleri, τ_∞ a değen bütün Γ_1 in eşdeğer olmayan üçgenlerinin oluşturduğu bir yelpaze formundadır. Esas bölgenin τ_∞ kaspında K genişliğinde bir yelpazeye sahip olduğunu söyleriz.

Teorem 3.6: Bir Γ_1 grubunun kondüktörü rasyonel kasplar genişliğindeki yelpazenin en küçük ortak katına eşittir.

3.4.3 Eşlenik Alt Gruplar, Normal Alt Gruplar

Γ_1 e eşlenik bir alt grubun bir esas bölgesi Γ_1 in $\mathcal{F}_1$ esas bölgesinden aşağıdaki teorem ile bulunabilir.

Teorem 3.7 : Eğer $\mathcal{F}_1$, Γ_1 için bir esas bölge ise ve eğer $L \in \Gamma$ ise o zaman

$$\mathcal{F}' := L^{-1}(\mathcal{F}_1)$$

Γ_1 'e eşlenik

$$\Gamma' := L^{-1}\Gamma_1 L$$

alt grubu için bir esas bölge olur.

İspat : $\mathcal{F}_1$, Γ_1 in bir esas bölgesi olsun. O zaman $\mathcal{H}^* = \Gamma_1(\mathcal{F}_1)$ dir ve

$$\mathcal{H}^* = (L^{-1}\Gamma_1 L)L^{-1}(\mathcal{F}_1)$$

dir ve o halde $L^{-1}(\mathcal{F}_1)$, Γ' nün bir esas kümesini içerir. Γ_1' altında eşdeğer noktalar, Γ_1 altında benzer eşdeğer noktalara karşılık gelir.

İlk önce Γ_1 'in, Γ 'da normal olduğu durumu göz önünde bulunduracağız. Bir yarı üçgen notasyonu tanımlamak faydalı olacaktır. Bu bir $A \in \Gamma^*$ olan $A(\mathcal{F}^*)$ bölgesidir ki burada Γ^* yansıma yoluyla genişletilmiş modüller grubu belirtir ve $\mathcal{F}^*$

$$\mathcal{F} := \left\{ \tau \in \mathcal{H}, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \tau \leq 0, |\tau| \geq 1 \right\} \cup \{i\infty\} \text{ dur.}$$

Eğer Γ_1 , Γ 'da normal ve eğer $\mathcal{F}_1$, Γ_1 için bir esas bölge ise o zaman her $L \in \Gamma$ için $L(\mathcal{F}_1)$ olduğu teorem 3.7'den çıkar.

Teorem 3.8 : Eğer Γ_1 , Γ 'da normal ise, o zaman sırasıyla ρ , i veya $i\infty$ a eşdeğer noktalarda bitişik eşdeğer olmayan bir çok yarı üçgen vardır.

İspat : Varsayalım ki τ_0 bazı $L \in \Gamma_1$ ler için $L(\tau_0) = \tau_0$ olan bir noktadır ve $M \in \Gamma$, τ_0 'ı τ_1 'e dönüştürür, o zaman

$$LM^{-1}(\tau_1) = M^{-1}(\tau_1) \text{ dir öyle ki } MLM^{-1}(\tau_1) = M^{-1}(\tau_1) \text{ dir.}$$

Γ_1 normal varsayıldığından $MLM^{-1} \in \Gamma_1$ dir. Böylece iddiamız ispatlanır.

Γ altında ρ , i veya $i\infty$ a eşdeğer noktalarda bitişik Γ_1 in eşdeğer olmayan yarı üçgenlerin yarı sayıları sırasıyla n_ρ , n_i ve n_∞ ile belirtiriz ve (n_i, n_ρ, n_∞) üçlüsüne normal alt grubunun dallanma şeması deriz. Açık olarak $n_i=1$ ve 2, $n_\rho=1$ veya 3 ve n_∞ , $U^{n_\infty} \in \Gamma_1$ olan en küçük tamsayıdır. σ_i, σ_ρ ve σ_∞ sırasıyla Γ altında i , ρ ve $i\infty$ a eşdeğer olan ve Γ_1 altında eşdeğer olmayan noktaların maksimum sayılarını gösterebiliriz ve indis $\mu=(\Gamma:\Gamma_1)$ ise o zaman

$$\sigma_i = \frac{\mu}{n_i}, \quad \sigma_\rho = \frac{\mu}{n_\rho} \quad \text{ve} \quad \sigma_\infty = \frac{\mu}{n_\infty} \quad (3.11)$$

olur.

Sonuçta $\Gamma[N]$ esas kongrüans alt grubu için dallanma şeması çizilir. Açık olarak $n_\infty=N$ ve $N \geq 2$ için ne $T(i)=i$ olan $\pm T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve ne de $R(\rho)=\rho$ olan $\pm R = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ özdeş N modülüne kongrüant değildir. Böylece $n_i=2$ ve $n_p=3$ tür. Dolayısıyla $\Gamma[N]$, $N \geq 2$ nin dallanma şeması $(n_i, n_p, n_\infty)=(2,3,n)$ formuna sahiptir.

Γ_1 için dallanma şeması $(1,1,1)$ dir.

3.5. Özel Alt Gruplar İçin Esas Bölge

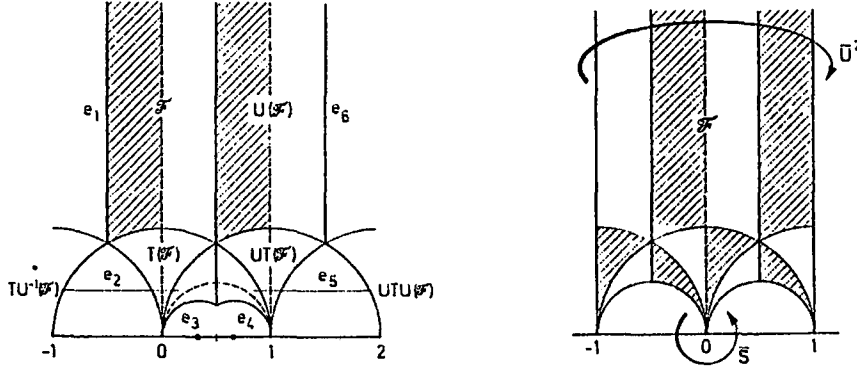
3.5.1 $\Gamma[2]$ Esas Kongrüans Grubu İçin Esas Bölge

Teorem 3.8 ile $n_p=3$ olduğu sonucuna vardık. Bunun için Γ altında ρ ya eşdeğer bir noktada bitişik olan yarı üçgenlerin hepsi $\Gamma[2]$ altında eşdeğer değildir. $\mu=6$ ya göre $-\bar{\rho}$ da bitişik altı modüler üçgeni esas bölge gibi seçebiliriz. Sınır eşlemeleri U^2 , TU^2T ve $(UT)U^2(UT)^{-1}$ ile verilir. (Şekil 3.1)

$$e_6=U^2(e_1) , e_3=TU^2T(e_2) , e_5=UTU^2TU^{-1}e_4$$

tür.

Eğer esas bölgeyi 3.2 şekildeki gibi değiştirirsek sınır süstitüsyonlarından $\bar{\Gamma}(2)$ için daha basit üreteçler buluruz.



Şekil 3.1 ve Şekil 3.2

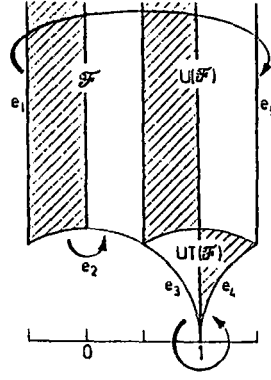
Bu yeni bölgeye karşılık gelen sadece iki farklı sınır süstitüsyonun olduğunu görürüz. Şöyle ki

$$\bar{U}^2 : \tau \rightarrow \tau + 2 \quad \text{ve} \quad \bar{S} : \tau \rightarrow \frac{\tau}{2\tau + 1}$$

ve de bunlar $\bar{\Gamma}[2]$ nin üreticidir. $\bar{\Gamma}[2]$ nin $\bar{U}^2$ ve $\bar{S}^2$ üzerinde serbest grup olduğu ispatsız ifade edilir.

3.5.3 $\Gamma_1 := \Gamma[2] \cup \Gamma[2]T$ Theta grubu esas bölgesi

$T^2 = -I$ dan dolayı $\Gamma[2]$, Γ_1 deki $(\Gamma_1 : \Gamma[2]) = 2$ indisli bir alt gruptur ve dolayısıyla $(\Gamma : \Gamma_1)$ indisi 3'tür. U^2 ve T Γ_1 de olduğuna göre esas bölge 3.3 şekildeki gibi verilir. Bu şekil Γ nın sabit noktalarındaki durumu nedeniyle Γ_1 'in Γ da normal olmadığını doğrular.



Şekil 3.3

Sınır eşlemeleri olarak

$$e_5 = U^2(e_1) \quad , \quad e_2 = T(e_2) \quad , \quad e_4 = (UT)U^{-1}(UT)^{-1}(e_3)$$

elde ederiz.

3.4 şekildeki ikinci esas bölge, Γ_1 için üreteçlerin daha basit sistemine geçişi gösterir yani $\bar{U}^2$ ve $\bar{T}$ dir. Bundan dolayı Theta fonksiyonunun dönüşüm formülüyle bağlantısı

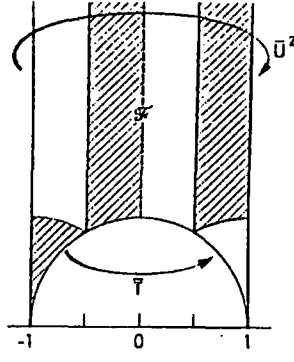
$$\theta_{(\tau)} := \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i m^2 \tau}$$

aynı zamanda Γ_1 theta grubu olarak adlandırılır.

$\Gamma_1 = \Gamma_\theta$ theta grubuna eşlenik gruplar

$$\Gamma^0(2) = U^{-1} \Gamma_\theta U$$

olur.



Şekil 3.4

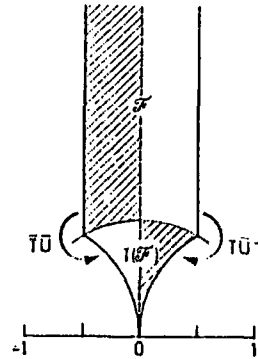
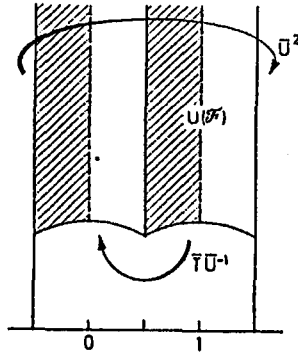
$U^{-1}(\mathcal{F})U\mathcal{F}UT(\mathcal{F})$ esas bölgesiyle

ve U^2 , $U^{-1}TU$, UTU sınır eşlemeleri

ve $\Gamma_0(2)=(UT)^{-1}\Gamma_0UT$ grubudur.

3.5.4 $\Gamma_1:=\Gamma[2]U\Gamma[2]UTU\Gamma[2](UT)^2$ Grubunun esas bölgesi

Ayrıca theta grubu ve onun iki eşleniğinin yanı sıra $\Gamma[2]$ yi içeren yalnız bir başka grup vardır, şöyle ki $\bar{\Gamma}_1$ yukarıda tanımlandığı gibidir. Γ da iki indise sahip ve böylece Γ da normaldir. $U \notin \Gamma_1$ ve $T \notin \Gamma_1$ olduğundan 3.5 veya 3.6 şekillerde verilenlerden birini esas bölge olarak seçebiliriz. Sınır bağıntıları yukarıdaki gibi gerçekleştirilebilir.



Şekil 3.5

Şekil 3.6

3.5.5 $\Gamma[N]$ Esas kongrüans alt grubu için eşdeğer olmayan kaspların sistemi

Eşdeğer Olmayan Kaspların Sayısı:

(3.11) dan $\frac{\mu}{n_\infty}$ dur, burada $n_\infty=N$ ve $\mu=|\Gamma_N|$ (3.6) da verilendir. Şimdi $\frac{r}{s}$ ve $\frac{r_1}{s_1}$

indirgenmiş formdaki iki rasyonel sayı olsun. Buna dayanarak Γ da

$$L(i\infty)=\frac{r}{s} \text{ ve } L_1(i\infty)=\frac{r_1}{s_1} \text{ olan}$$

$$L:=\begin{pmatrix} r & b \\ s & d \end{pmatrix}, L_1:=\begin{pmatrix} r_1 & b_1 \\ s_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

iki matrisi vardır.

$$V:=L_1 U^k L^{-1}, k \in \mathbb{Z}$$

dönüşümleri

$$V\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{r_1}{s_1}$$

olan modüler dönüşümlerdir. Bu V dönüşümleri arasında $\Gamma[N]$ de bulunan biri ancak ve ancak

$$k \in \mathbb{Z} \text{ için } L_1^{-1} L \equiv \mp U^k \pmod{N}$$

olan matris kongrüansını sağlayabilir. Bu aşağıdaki kongrüansa eşdeğerdir:

$$d_1 r - b_1 s \equiv \pm 1 \pmod{N}, \quad (1')$$

$$-s_1 r + r_1 s \equiv 0 \pmod{N}, \quad (2')$$

$$-s_1 b + r_1 d \equiv \pm 1 \pmod{N}, \quad (3')$$

(1') ve (2') den

$$r \equiv \mp r_1 \text{ ve } s \equiv \mp s_1 \pmod{N} \quad (3.13)$$

çıkar ve sonuç olarak (3') de sağ taraftaki aynı işaretler kullanıldığında sağlanır.

Karşıt olarak eğer (3.13) kongrüansı geçerliyse, o zaman (3.12) deki matrislerin elemanları A yı sağlar.

3.2.1 de gösterildiği üzere $(r,s,N)=1$, $N>2$ olan iki $r,s \in \mathbb{Z}$ tamsayısına karşılık $(r_1,s_1)=1$ olan N modüllü $r_1 \equiv r$ ve $s_1 \equiv s$ herhangi iki tamsayısı vardır ve (3.13) den dolayı sadece bir işaret kullanılır.

Teorem 3.9: Eğer $N>2$ ise $\Gamma[N]$ için eşdeğer olmayan rasyonel kaspların $\sigma_\infty(N)$ sayısı $(a,b,N)=1$ olan mod N 'ye eşdeğer olmayan (a,b) çiftinin yarı sayılarına eşittir. Eğer $N=2$ ise $\sigma_\infty(N)$ bu çiftlerin sayısına eşittir.

$\Gamma[N]$ için bir esas bölge rasyonel sayılara eşdeğer olmayan $\Gamma[N]$ nin bir maksimum sisteminin her bir noktasında N genişliğinde bir yelpaze gibi çizilebilir.

$N=5$ durumunda eşdeğer olmayan rasyonel kaspların bir sistemi için bir örnek veriyoruz.

3.5.6 q bir asal sayı olmak üzere $\Gamma^0(q)$ grubunun esas bölgesi

Burada $-I \in \Gamma(q)$ dur. $q > 2$ için Γ' nin

$$|v| \leq \frac{q-1}{2} \text{ ve } S_{\frac{q+1}{2}} = T \text{ için } S_v = U^v \text{ olan}$$

$$\Gamma = \bigcup \Gamma^0(q) S_v$$

koset ayrışımına sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $\Gamma^0(q)$ için bir esas bölge

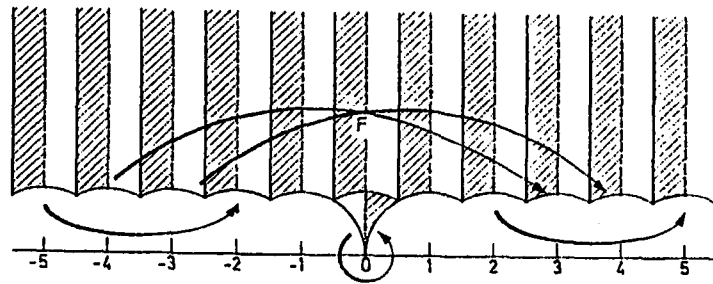
$$\mathcal{F}_1 := \bigcup S_v(\mathcal{F})$$

dir. $0 < |v| \leq \frac{q-1}{2}$ olan v tam sayısına göre sınır eşlemelerini çalışmak için v merkezli 1

yarıçaplı çember yayını $\mathcal{E}_v$ ile gösterelim. $\mathcal{E}_v$ 'yi $\mathcal{E}_{v'}$ ne dönüştüren iki tane dönüşüm vardır, şöyle ki $U^{v'-v}$ ve $U^{v'}TU^{-v}$ dir. Bununla birlikte $v \neq v'$ için $U^{v'-v} \notin \Gamma^0(q)$ olduğundan yalnız

$$U^{v'}TU^{-v} = \begin{pmatrix} v' & -1-vv' \\ 1 & -v \end{pmatrix}$$

dönüşümü elde edilir. Eğer $vv'+1 \equiv 0 \pmod{q}$ ise o zaman bu $\Gamma^0(q)$ nun bir elemanıdır.



Şekil 3.7

Böylece buluruz ki: ε_v ve $\varepsilon_{v'}$ çember yayları ancak ve ancak

$$vv'+1 \equiv 0 \pmod{q}$$

$q > 2$ olan $\Gamma^0(q)$ altında eşdeğerdirler.

Yukarıdaki teoremin ışığı altında aşağıdaki eşdeğer taraf çiftlerine sahip olan $q=11$ örneğini gözden geçirelim.

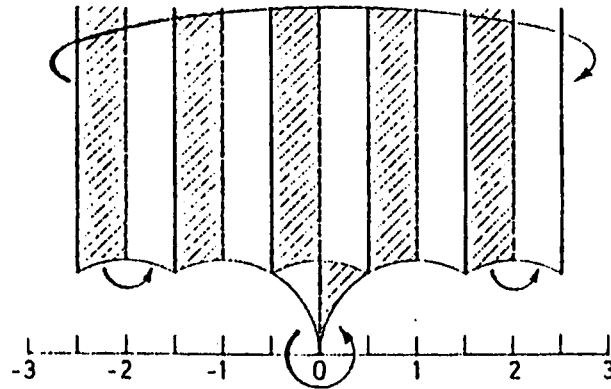
$$\varepsilon_{-5} \leftrightarrow \varepsilon_{-2}, \varepsilon_5 \leftrightarrow \varepsilon_2, \varepsilon_{-4} \leftrightarrow \varepsilon_3, \varepsilon_4 \leftrightarrow \varepsilon_{-3}, \varepsilon_{-1} \leftrightarrow \varepsilon_1$$

dir. Buna karşılık $q=5$ için

$$\varepsilon_{-2} \leftrightarrow \varepsilon_{-2}, \varepsilon_2 \leftrightarrow \varepsilon_2, \varepsilon_{-1} \leftrightarrow \varepsilon_1$$

elde edilir.

$\Gamma^0(q)$ grubu 3.5.3 de ele alındı.



Şekil 3.8

3.6 $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Bölüm Uzayı

Bu bölümde Γ_1 tekrar Γ daki sonlu indisli bir alt grup ve $I \in \Gamma_1$ olsun.

3.6.1 $\mathcal{H}^*$ ve $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Topolojik Uzayları

$$\langle \tau \rangle := \{M\tau \mid M \in \Gamma_1\}$$

elemanlarından meydana gelen

$$\mathfrak{R} = \mathcal{H}^*/\Gamma_1$$

Bölüm uzayını oluşturalım.

$$\sigma : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{R}, \tau \rightarrow \langle \tau \rangle \quad (3.14)$$

kanonik dönüşümünü σ ile gösterelim.

Eğer Γ_1 için bir esas bölgenin $\mathcal{F}$ kapanışının Γ_1 eşdeğer noktalarını tanımlarsak $\mathfrak{R}$ nin bir temsilini buluruz.

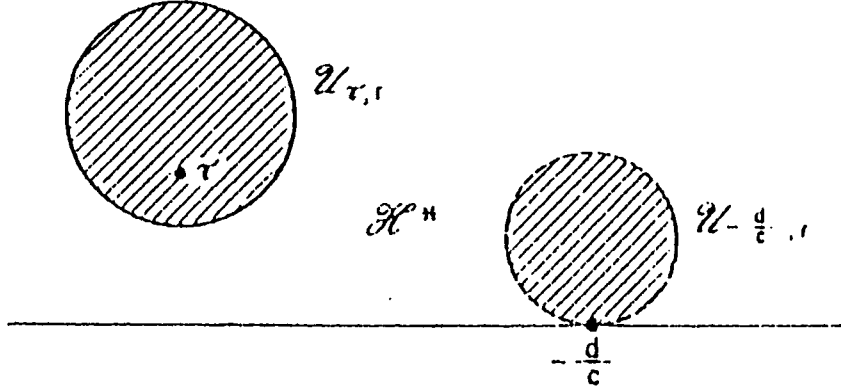
$\mathfrak{R}$ için bir topolojik yapıyı ele almadan önce $\mathcal{H}^*$ üzerindeki bir topolojiyi tanımlayalım.

Böyle yaparak aşağıdaki yöntemle göre her bir $\tau \in \mathcal{H}^*$ için B_τ kümelerinin bir ailesini aşağıdaki gibi seçeriz:

1-) Bir $\tau \in \mathcal{H}$ için noktası için B_τ , $0 < r < 1$ olan

$$\mathcal{U}_{\tau,r} := \left\{ v \in \mathcal{H} : \left| \frac{v - \tau}{v - \bar{\tau}} \right| < r \right\} \quad (3.15)$$

kümelerinin bir ailesi olsun.



Şekil 3.9

2-) Eğer $\tau = \frac{-d}{c}$, $(c,d)=1$ ise o zaman Γ altında $i\infty$ a eşdeğer olan bir noktadır. B_τ yu ,

$0 < r < 1$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ nin keyfi bir seçimi olan

$$\mathcal{U}_{\tau, r} := \left\{ v \in \mathcal{H} : \operatorname{Im} \frac{av+b}{cv+d} > \frac{1}{r} \right\} \cup \{\tau\} \quad (3.16)$$

kümelerinin bir ailesi olarak tanımlarız. $\mathcal{H}^*$ ın $\mathcal{M}$ kümesi açıktır denir ancak ve ancak

$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{U}_{\tau, r}$ dir.

Böylece $\mathcal{H}^*$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}_{\tau, r} \in \mathcal{B}_r$ bir komşuluk tabanı oluşturur. Bundan sonra $\mathcal{H}^*$, bir nokta kümesinden daha çok bir topolojik uzay olarak inceleyeceğiz.

Teorem 3.10 : $\mathcal{H}^*$ bir bağlantılı Hausdorff uzayıdır. $\mathcal{H}^*$ lokal kompakttır.

İspat: Bir iddiamız hemen görülür. İkincinin ispatı için rasyonel noktaların kompakt komşuluklara sahip olmadığını göstereceğiz. Eğer $\mathcal{U}_{\tau, r}$ $\tau \in \theta$ nın bir kompakt komşuluğu olsaydı o zaman $\mathcal{U}_{\tau, r}$ bir kapalı kümeyi ve bundan dolayı $\mathcal{U}_{\tau, r}$ kompakt diskini içerirdi.

Şimdi $\{\tau_v\}$ nin Öklid topolojisindeki τ 'ya yakınsayan $\mathcal{U}_{\tau,r}$ nin sınırındaki bir dizi olduğunu varsayalım. O zaman (3.16) deki her bir komşuluk, τ_v lerin hemen hemen hepsini içerir. Bu bununla birlikte, $r' \leq r$ olan $\mathcal{U}_{\tau,r'}$ için mümkün değildir.

Bölüm topolojisi $\mathfrak{R}$ den bahsetmeden önce G, X topolojik uzayı üzerinde bir grup olmak üzere G/X bölüm uzayının bir Hausdorff Uzayı olması için gereken şartları verelim.

Lemma 3.1: X 'in x, y gibi herhangi iki noktası için $gx \neq y$ olan her $g \in G$ için $gU \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde x 'in U ve y 'nin V komşuluklarının var olduğunu kabul edelim. O zaman G/X bir Hausdorff uzayıdır.

İspat: π, X in G/X üzerine bir kanonik dönüşümü olsun. Bölüm topolojisinin tanımından $\pi(U)$ ve $\pi(V)$ sırasıyla $\pi(x)$ ve $\pi(y)$ nin komşuluklarıdır. Yalnız ve ancak $gU \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $g \in G$ varsa $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ olduğu görülür. Varsayımdan dolayı son söylenilen $gx = y$ olacak şekilde $g \in G$ nin varlığını söylemeye eşdeğerdir yani $\pi(x) = \pi(y)$ dir. Bu G/X in bir Hausdorff uzayı olmasını gerektirir.

Lemma 3.2 : Eğer Γ grubu, bir X Hausdorff uzayı üzerinde süreksiz ise o zaman Γ/X bir Hausdorff uzayıdır.

İspat: X 'in her hangi iki noktası x, y olsun. Varsayımdan dolayı $\#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U_0 \cap V_0 \neq \emptyset\} < \infty$ olacak şekilde x 'in U_0 ve y 'nin V_0 komşulukları vardır. $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U_0 \cap V_0 \neq \emptyset\} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ diyelim. İndislerin yeni bir numaralamayla

$$\gamma_k x = y \quad (1 \leq k \leq \ell), \quad \gamma_k x \neq y \quad (\ell + 1 \leq k \leq m)$$

olduğunu varsayabiliriz. $W_k \cap V_k = \emptyset$ olacak şekilde $k > \ell$ için $\gamma_k x$ 'in W_k ve y 'nin V_k komşuluklarını alabiliriz.

$$U = U_0 \cap \bigcap_{k=\ell+1}^m \gamma_k^{-1} W_k, V = V_0 \cap \bigcap_{k=\ell+1}^m V_k$$

olur.

O zaman U ve V sırasıyla x ve y 'nin komşuluklarıdır ve

$$\gamma U \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma \in \{\gamma_1, \dots, \gamma_\ell\} \Leftrightarrow \gamma x = y$$

olduğunu görürüz.

Buradan Lemma 3.1 Γ/X in bir Hausdorff uzayı olmasını gerektirir.

Şimdi bölüm topolojisi $\mathfrak{R}$ den bahsedelim. Ancak ve ancak $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$ ters görüntüsü $\mathcal{H}^*$ da açık olduğu zaman $\mathfrak{R}$ deki $\mathcal{U}$ kümesi açıktır. O zaman aşağıdaki teorem 3.11 i elde ederiz.

Teorem 3.11 : σ kanonik dönüşümü hem sürekli hem de açıktır. $\mathfrak{R}$ bir bağlantılı kompakt Hausdorff uzayıdır.

İspat: Bölüm topolojisinin tanımından σ sürekli dir. Eğer $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}^*$ da bir açık küme ise, o zaman

$$\sigma^{-1}\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{M \in \Gamma_1} M(\mathcal{A})$$

Açıktır ve böylece σ bir açık dönüşümdür.

$\mathcal{H}^*$, Γ_1 altında eşdeğer sınıfların kesişimi olan bir bağlantılı kompakt kümeyi içerir. Yani F_1 'in kapanışıdır. $\mathfrak{R} = \mathcal{H}^*/\Gamma_1$ in bağlantılı ve kompakt olduğu çıkar. Ayırma aksiyomlarını $\mathfrak{R}$ de sağladığından bu ispatı tamamlar.

3.6.2 $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ Yüzeyi

Aşağıdaki tanımı yeniden hatırlayalım. Öklid düzlemindeki açık kümelerle homeomorf olan açık kümelerin bir örtüsüyle beraber bir bağlantılı Hausdorff uzayına bir yüzey denir. Homeomorfizm eşlemesiyle beraber bu örtünün bir elemanına bir harita denir; haritaların birleşimine bir atlas denir.

Şimdi bir yüzeyin $\mathfrak{R}$ yapısını vermek istiyoruz. $\mathfrak{R}$ nin $\langle \tau \rangle$ noktasının belirli komşuluklarını

$$\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle} := \sigma(\mathcal{U}_{\tau, r}) \quad (3.17)$$

olarak buluruz. Bunun için r 'yi öyle küçük seçelim ki ya $\mathcal{U}_{\tau, r}$ bir modüler üçgeni tamamen kapsasın yada τ da bitişik yarı üçgenlerin birleşimini kapsasın. Her $\tau \in \langle \tau \rangle$ için aynı r 'yi kullanalım. O zaman $\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle}$ iyi tanımlanmış bir komşuluk sınıfıdır. σ açık ve örten olduğundan bütün $\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle}$ ların ailesi $\mathfrak{R}$ için bir açık örtüdür. r sabit olduğundan $\mathcal{U}_{\tau, r}$ nin yerine kısaca $\mathcal{U}_{\tau}$ yazarız.

Şimdi bir $\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle}$ komşuluğunu Eucklid düzleminin bir açık $\mathcal{E}_{\langle \tau \rangle}$ kümesi üzerine dönüştüren bir $\phi_{\langle \tau \rangle}$ homomorfizmini oluşturalım. Eğer σ_{τ} , σ nın $\mathcal{U}_{\tau}$ ya kısıtlamasını belirtirse o zaman $\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle}$ nun önceki görüntüsü $\mathcal{V}_{\tau} = \sigma_{\tau}^{-1}(\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle})$ olur. Eucklid düzlemi içine sürekli öyle bir

$$\phi_{\langle \tau \rangle}: \mathcal{U}_{\tau} \rightarrow \mathcal{E}_{\tau} \quad (3.18)$$

dönüşümüne ihtiyaç duyarız ki

$$\phi_{\langle \tau \rangle} := \phi_{\tau} \circ \sigma_{\tau}^{-1}: \mathcal{U}_{\langle \tau \rangle} \rightarrow \mathcal{E}_{\langle \tau \rangle}$$

bijektivdir. Burada σ_τ^{-1} eşlemesinin mutlaka bir dönüşüm olması gerekmez. ϕ_τ nun uygun seçimi için, ε_τ kümesinin τ temsiline bağlı olmadığını ve $\phi_{\langle\tau\rangle}$ homeomorfizminin bir iyi tanımlı fonksiyon sınıfı olduğunu ispatlayacağımızdan $\varepsilon_{\langle\tau\rangle}$ ve $\phi_{\langle\tau\rangle}$ yazmaya devam edelim. İki durumu ayıralım.

1-) τ, Γ_1 in bir parabolik sabit noktası değildir:

Bir $\tau_0 \in \langle\tau\rangle$ temsiliini sabit olarak alalım. O zaman her bir $\tau \in \langle\tau\rangle$, bazı $S \in \Gamma_1$ ler için

$\tau = S(\tau_0)$ görüntüsüdür. Eğer $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise

$$\phi_\tau(v) := \left(\frac{v - \tau}{v - \bar{\tau}} \cdot \frac{c_{\tau_0} + d}{c_{\tau_0} + d} \right)^k, v \in \mathcal{U}_\tau \quad (3.19)$$

yu tanımlarız. Eğer τ bir sabit nokta değilse yukarıdaki denklemde $k=1$ varsayınız ve $k=2$

ve $k=3$ durumunda τ bir eliptik sabit noktadır. o zaman $\left(\frac{c_{\tau_0} + d}{c_{\tau_0} + d} \right)^k$ çarpanı τ_0 ve τ ile tek türlü belirlenir. $k=2$ veya $k=3$ durumunda 1 değerine sahiptir.

σ_τ^{-1} , $\mathcal{U}_{\langle\tau\rangle}$ nun her bir elemanına $\mathcal{U}_\tau$ nun tam olarak k tane değerini eşler. Bunlar $\varepsilon_{\langle\tau\rangle} := \phi_\tau(\mathcal{U}_\tau)$ daki bir tek görüntüye dönüşür. $\phi_\tau \circ \sigma_\tau^{-1}$ çarpımı bunun için açık, sürekli ve bijektivdir. ϕ_τ bir holomorf fonksiyon olarak sürekli ve açıktır. Aksi halde önceki teoremden σ_τ açık ve süreklidir. Dolayısıyla $\phi_{\langle\tau\rangle} = \phi_\tau \circ \sigma_\tau^{-1}$ sürekli, açık ve bijektivdir.

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ için

$$\frac{v - \tau}{v - \bar{\tau}} = \frac{v_0 - \tau_0}{v_0 - \bar{\tau}_0} \cdot \frac{c_{\tau_0} + d}{c_{\tau_0} + d}, v = S(v_0) \quad (3.19')$$

$\varepsilon_{\langle \tau \rangle}$ ve $\phi_{\langle \tau \rangle}$ iyi tanımlıdır.

2-) τ, Γ_1 in bir parabolik sabit noktası :

Bu durumda $(d,c)=1$ olan $\tau = \frac{-d}{c}$ ve

$$\phi_\tau(v) := e^{\frac{2\pi i}{K} A(v)}, v \in \mathcal{U}_\tau \quad (3.20)$$

seçeriz ki burada K , yelpazenin genişliği ve $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ dır. Yukarıda anlatıldığı gibi $\phi_\tau \circ \sigma_\tau^{-1}$

1 nin bir homeomorfizma olduğunu bulmuştuk. τ kaspı, $e^{2\pi i/K}$ nin bir çarpımına bağlı ϕ_τ yu belirler. ϕ_τ , A nın seçimine göre sabittir. Eğer τ ve v 'yi $S \in \Gamma_1$ süstitüsyonuna bağlarsak o zaman $A_1 := AS^{-1}$ olan

$$e^{\frac{2\pi i}{K} A_1(S(v))} = e^{\frac{2\pi i}{K} A(v)} \quad (3.20')$$

denklemini elde ederiz. A_1 in seçimi $A_1(S_\tau) = i\infty$ a göre yapılır. Bunun için $\varepsilon_{\langle \tau \rangle}$, $\phi_{\langle \tau \rangle}$ ile beraber temsilin seçiminden bağımsızdır. Sonuçta teorem 3.12' yi elde ederiz.

Teorem 3.12: $\mathfrak{R}$ bir yüzeydir. $\mathfrak{R}$ için bir atlas

$$A := \{ (\mathcal{U}_{\langle \tau \rangle}, \phi_{\langle \tau \rangle}) : \langle \tau \rangle \in \mathfrak{R} \}$$

Sistemidir.

3.6.3 H^*/Γ_1 Riemann Yüzeyi

Genellikle tanımladığımız gibi, eğer bir yüzeyin haritaları holomorf bileşenleri ise yani örtünün iki elemanının kesişiminin Öklid düzleminde görüntüleri bir holomorf fonksiyonla bağlantılı ise bu yüzeye Riemann yüzeyi denir.

A atlaslı R yüzeyinin bir Riemann yüzeyi olduğunu göstereceğiz. $D, \langle \tau_1 \rangle \neq \langle \tau_2 \rangle$ olan $\mathcal{U}_{\langle \tau_1 \rangle}, \mathcal{U}_{\langle \tau_2 \rangle}$ nin belirtilen kesişimi ve $\mathcal{F}_1 := \phi_{\langle \tau_1 \rangle}(D), \mathcal{F}_2 := \phi_{\langle \tau_2 \rangle}(D)$ Öklid düzlemindeki D'nin görüntüsü olsun. O zaman

$$\phi_{\langle \tau_1 \rangle} \circ \phi_{\langle \tau_2 \rangle}^{-1} = \phi_{\tau_2} \circ \sigma_{\tau_1} \circ \phi_{\tau_1}^{-1}$$

$\mathcal{F}_1$ 'e kısıtlanan $\mathcal{F}_1$ den $\mathcal{F}_2$ ye bir dönüşüm olur. $\mathcal{F}_1, i, \rho$ ve $i\infty$ a Γ_1 altında eşdeğer noktaların görüntülerini içermediği için $\sigma_{\tau_2}^{-1} \circ \sigma_{\tau_1}$ in $\phi_{\tau_1}^{-1}(\mathcal{F}_1)$ e kısıtlaması Γ_1 in bir elemanının kısıtlaması olduğundan dolayı bu dönüşüm holomorftur. Böylece teorem 3.12'yi elde ederiz.

Teorem 3.13: $\mathfrak{R}, A$ atlaslı bir Riemann yüzeyidir.

3.7 Esas Bölgenin Tipi

3.7.1 Çok yüzlü üzerindeki Euler Teoremi

Son bölümde oluşturulan Riemann yüzeyi kompakttır ve açık olarak döndürülebilirdir. Her Riemann yüzeyinin olduğu gibi kompakt döndürülebilir $\mathfrak{S}$ yüzeyini tanımlayalım.

$\mathfrak{S}$ deki bir reel kapalı birim aralığın homeomorf görüntüsüne $\mathfrak{S}$ üzerindeki basit yay denir. $\mathfrak{S}$ üzerindeki bir eğri basit yayların bir sonlu dizisidir ki burada bir yayın uç noktası diğerinin başlangıç noktasıyla çakışır. Eğer bir eğrinin son noktası ilk noktasıyla çakışırsa buna bir kapalı eğri denir. Öklid düzleminde kapalı bir diskin $\mathfrak{S}$ deki homeomorf görüntüsü $\mathfrak{S}$ üzerinde bir çokgen olarak adlandırılır. Kesişimin sonlu çoklukta noktalarıyla

sonlu çoklukta eğrilerin bir φ sisteminin $\mathfrak{S}$ üzerinde verildiğini varsayalım. Ayrıca bir taraftan φ nin tümleyeninin bağlantılı bileşenlerinin kapanışının çokgenler olduğu ve bir diğer taraftan da ara kesitlerinin ya bir tek nokta, ya bir tek kenar yada boş kümeden meydana geldiğini varsayalım.

Eğrilerin böyle bir sistemi $\mathfrak{S}$ üzerinde bir çokgensel ayrışma olarak adlandırılır.

Bir çokgensel ayrışmanın köşesi, kenarı ve yüzeyinin anlamı o zaman açıktır. Bunların sayılarını sırasıyla v, e, f ile belirtelim. Bu notasyonlar ile şimdi formüle edelim.

Çok yüzlü üzerindeki Euler Teoremi: Her bir çokgensel ayrışma $v-e+f$ sayısı bazı değerlere sahiptir. Bunun ispatına burada yer vermeyeceğiz.

$g := 1 - \frac{v-e+f}{2}$ sayısı kesişmeyen kapalı eğrilerin en büyük sayısıdır ki $\mathfrak{S}$ i ayrıştırmaz.

Bu önemli topolojik invariant $\mathfrak{S}$ in tipi olarak adlandırılır.

3.7.2 Modüler grubun alt gruplarına çokyüzlü üzerindeki teoremin uygulamaları

Şimdi Γ modüler grubundaki sonlu indisli bir Γ_1 alt grubunun $\mathfrak{R}$ Riemann yüzeyine geri dönelim. σ kanonik dönüşümü altında yarı üçgenlerin görüntülerinin kenarları denklem (3.14) açık olarak $\mathfrak{R}$ nin bir çokgensel ayrışım formundadır. Bu ayrışım için $f=2\mu$ dür. Eğer köşeleri $V_1, V_2, \dots, V_v$ ve V_v de bitişik yarı üçgenlerin sayısını $2\kappa_0$ ile gösterirsek, o zaman

$$e = \sum_{v=1}^v \kappa_v, \quad v = \sum_{v=1}^v 1$$

dir. Böylece,

$$g = 1 - \mu + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\mu} (K_v - 1) \quad (3.21)$$

tip formülünün ilk formunu buluruz aynı zamanda g' ye Γ_1 grubu için esas bölgenin tipi denir.

Eğer Γ_1, Γ da normal ise o zaman sırası ile ρ, i ve $i\infty$ a eşdeğer Γ noktalarının σ altındaki görüntüleri olan $\mathfrak{R}$ nin V_v köşelerinin her birinde bitişik olan bir çok yarı üçgenlerinin olduğunu teorem 3.7 den biliyoruz. $2n_i, 2n_p$ ve $2n_\infty$ ile bu sayıları belirtmiştik. Bu notasyonlarda sırası ile ρ, i ve $i\infty$ a karşılık $\mathfrak{R}$ nin köşelerinin sayısı için $\frac{\mu}{n_i}, \frac{\mu}{n_p}$ ve $\frac{\mu}{n_\infty}$

bulduk. Buradan,

Eğer Γ_1, Γ da normal ise, o zaman

$$g = 1 - \mu + \frac{\mu}{n_i} \cdot \frac{n_i - 1}{2} + \frac{\mu}{n_p} \cdot \frac{n_p - 1}{2} + \frac{\mu}{n_\infty} \cdot \frac{n_\infty - 1}{2} \quad (3.22)$$

dır.

$\Gamma[N], N \geq 2$ esas eşdeğer alt grubu $(2,3,N)$ dallanma şemasına sahiptir. Böylece esas bölge

$$N > 2 \text{ için } \mu = \frac{\mu(N)}{2} \text{ olan } g = 1 + \frac{\mu}{N} \cdot \frac{N-6}{12} \text{ ve } N=2 \text{ için } \mu = \mu(2) \quad (3.23)$$

tipine sahiptir. Bu denklem (3.3) de verilen $\mu(N)$ için bir formüldür. Özellikle

$N=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g=0$	0	0	0	1	3	5	10	13	26	25

için.

3.7.3 Dallanma şeması ve normal alt grup eşlemesi

Bir normal alt grubun dallanma şeması yalnız $(1,1,n)$, $(2,1,n)$, $(1,3,n)$ veya $(2,3,n)$ formunda olabilir. Bu durumları görelim:

Denklem (3.22) den tip negatif olmayan bir tam sayı olduğundan

$$(n_i, n_p, n_\infty) = (1, 1, n)$$

$$g = 1 - \mu + \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n-1}{2} = 1 - \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = 0$$

a götürür. $\frac{\mu}{n} \in \mathbb{N}$ olduğundan öyleyse aynı zamanda $\frac{2}{n+1}$ dir ve böylece $n=1$ ve $\mu=1$ dir.

Dallanma şeması $(1,1,1)$ olan bir ve yalnız bir alt grup vardır, yani tam modüler gruptur.

Yukarıdaki gibi

$$(n_i, n_p, n_\infty) = (2, 1, n)$$

$$g = 1 - \mu + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n-1}{2} = 1 - \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n+2}{4} = 0$$

a götürür ve $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ olduğundan $n=\mu=2$ olduğu çıkar. Böylece en fazla $(2,1,2)$ şeması

oluşabilir. Bununla birlikte 3.5.4 de, bu şemaya karşılık gelen bir grup buluruz, yani

$$\Gamma_1 = \bigcup_{v=1}^2 \Gamma[2](UT)^v$$

dir.

Sınır eşlemeleri ile beraber verilen esas bölge dallanma şeması ile daha önceden hesaplandığına göre, Γ_1 dallanma şeması bu olan tek gruptur. Γ daki Γ_1 indisi iki olduğundan Γ_1 normal bir alt gruptur.

$$(n_i, n_\rho, n_\infty) = (1, 3, n)$$

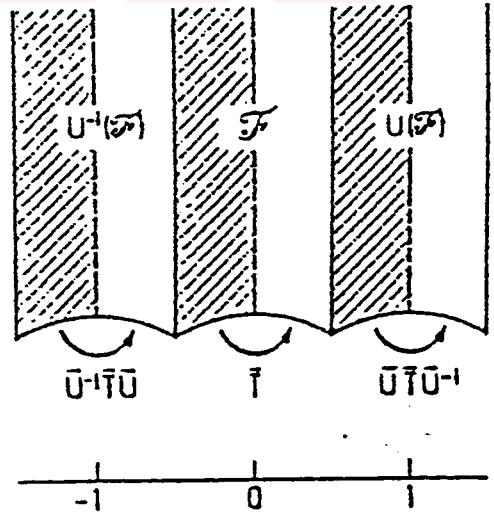
durumu

$$g = 1 - \mu + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n-1}{2} = 1 - \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n+3}{6} = 0$$

ı gerektirir ve böylece $n=\mu=3$ olur. Eğer dallanması böyle olan bir grup varsa, esas bölge şekil (3.10) de gösterildiği gibi olmak zorundadır. Sonuç olarak

$$S_1 := U^3, \quad S_2 := T, \quad S_3 := UTU^{-1}, \quad S_4 := U^{-1}TU$$

sınır sübstitüsyonlarıdır.



Şekil 3.10

Şimdi, kolaylıkla ispat edildiği gibi

$$\Gamma_1 = \bigcup_{v=1}^4 \Gamma[3]s_v$$

bir gruptur ve Γ da normaldir. $(\Gamma:\Gamma_1)=3$ e göre I , U ve U^1 ve Γ_1 modüllü çift yönlü kongrüant olmadığından, şekil Γ_1 için bir esas bölgeyi gösterir. Dolayısıyla $(1,3,3)$ dallanma şemasına sahiptir. Onunla oluşturulma tek olarak belirlenir ve

$$(n_i, n_p, n_\infty) = (2, 3, n)$$

durumu elde edilir. Bu dallanma şeması her $n \geq 2$ için $\Gamma[n]$ esas kongrüans alt grubundan gerçekleştirilir.

Bu şema için $g=0$ ve $g=1$ tipinin normal alt gruplarını düşünelim. Denklem (3.22) den

$$g = 1 + \frac{\mu}{n} \cdot \frac{n-6}{12}$$

dır. $g=0$ dan $\frac{-12}{n-6} \in \mathbb{N}$ olduğu çıkar. Buradan n ve μ eşlemesi için aşağıdakini bulmak mümkündür.

n	2	3	4	5
μ	6	12	24	60

Ayrıca $\Gamma[N]$, $N \in \{2, 3, 4, 5\}$ esas kongrüans gruplarının aynı dallanma şemasına sahip olan bu dört durumda başka hiç bir grup yoktur.

Eğer $g=1$ ise $n=6$ dır ve μ hesaplanamaz. $\mu=72$ olan $\Gamma[6]$ esas eşdeğer grubunun yanında bu dallanmaya sahip olan daha başka gruplar da vardır. Bir örnek verelim. Bir matris grubu

olarak Γ' yı ve komütatör alt grup olarak Γ' nü göz önüne alalım. Daha önceki bilgilerimizden $-I \notin \Gamma'$ ve $(\Gamma:\Gamma')=12$ olduğu çıkar.

$$\Gamma^+ := \Gamma' \cup (-I)\Gamma'$$

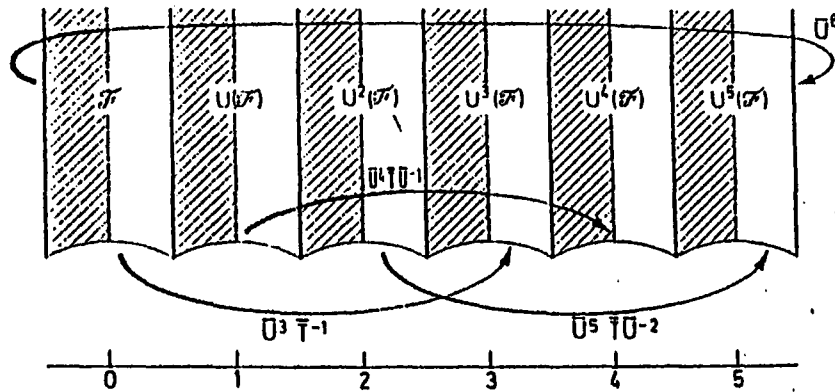
olsun. O zaman Γ^+, Γ da normaldir ve $\mu = (\Gamma:\Gamma^+) = 6$ dır. Γ modüler grubunun R ve T üreteçlerinin terimlerinde

$$\bar{I}, \bar{T}, \bar{R}, \bar{R}\bar{T}, \bar{R}^2, \bar{R}^2\bar{T}$$

lerin $\bar{\Gamma}$ deki $\bar{\Gamma}^+$ nın temsilleri olduklarını görürüz. $\bar{R} = \bar{T} \bar{U}$ ve $\bar{R}^3 = \bar{I}$ yı kullanırsak

$$\bar{I}, \bar{U}, \bar{U}^2, \bar{U}^3, \bar{U}^4, \bar{U}^5$$

temsillerinin bir eşdeğer sistemini buluruz. Böylece $n_\infty=6$ olduğu çıkar. $\bar{T} \notin \bar{\Gamma}^+$ olduğunda $n_i=2$ ve $\bar{R} \in \bar{\Gamma}^+$ olduğundan $n_p=3$ olduğu çıkar. Böylece $\bar{\Gamma}^+$ için bir esas bölge örneklendiği gibi sınır süstitüsyonları eşlemesi bulunur. (2,3,6) dallanma şemasından doğrudan doğruya g tipinin 1 olduğunu görürüz. $\bar{\Gamma}^+$ nın bir eşdeğer grup ve doğal olarak $F=6$ kondüktörü olduğunu kolayca saptayabiliriz.



Şekil 3.11

3.7.4 Tip formülünün incelenmesi

$$g = 1 - \mu + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^v (\kappa_v - 1)$$

genel tip formülünü belirli durumlardaki tipi hesaplamaya yarayan bir forma dönüştürürüz.

Γ' nın Γ_1 alt grubunun $-I$ matrisini kapsadığını ve

$$\Gamma = \bigcup_{v=1}^{\mu} \Gamma_1 S_v \quad (3.24)$$

olduğunu varsayalım. Burada S_v , Γ_1 modüllü eşdeğer olmayan matrislerin bir sistemi içinde bulunmaktadır. (3.7.2) deki gibi $V_1, V_2, \dots, V_n$ $\mathcal{R} = \mathcal{H}^* / \Gamma_1$ in çokgensel ayrışımının köşeleri olsun. Eğer $V_v, \langle \rho \rangle \bmod \Gamma$ sınıfının bir noktasının σ altındaki görüntüsü ise o zaman, Γ_1 in bir sabit noktasının görüntüsü V_v ise $\kappa_v=1$ ve bunun dışındaki bütün durumlarda $\kappa_v=3$ tür.

Eğer $V_v, \langle i \rangle \bmod \Gamma$ sınıfının bir noktasının görüntüsü ise o zaman, V_v, Γ_1 in bir sabit noktasının görüntüsü ise $\kappa_v=1$ ve bunun dışındaki bütün durumlarda $\kappa_v=2$ dir.

$\kappa_v=1$ olan $\langle \rho \rangle \bmod \Gamma$ ya eşlenen V_v lerin sayısını ε_p ile ve $\kappa_v=3$ olanların sayısını α_p ile gösterelim $\langle i \rangle$ sınıfına ait olan V_v nin eşlenenlerinin sayısını ε_i ve α_i ile gösterelim

$$\sum_{v=1}^v (\kappa_v - 1)$$

toplamına karşılık Γ altında $\langle i \infty \rangle$ sınıfındaki önceki görüntüsü ile V_v köşeleri σ_∞ un dağılımı $\mu - \sigma_\infty$ dur. Buradan

$$g = 1 - \mu + \alpha_p + \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\sigma_\infty$$

u elde ederiz.

$$2\varepsilon_p + 6\alpha_p = 2\varepsilon_i + 4\alpha_i = 2\mu$$

den, tip için istenen formülü buluruz:

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\varepsilon_p}{3} - \frac{\varepsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2} \quad (3.25)$$

yukardaki formülde ε_p ,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{v=1}^{\mu} S_v(\mathcal{F})$$

formundaki Γ_1 için $\mathcal{F}_1$ esas bölgesindeki $\langle \rho \rangle$ nun Γ_1 – eşdeğer olmayan sabit noktalarının sayısıdır ve ε_1 ve σ_∞ , $\langle \rho \rangle$ ve $\langle i\infty \rangle$ için eşlenen sayılardır.

ε_p sayılarını biraz daha inceleyelim. Bir $S(\rho)$, $S \in \Gamma$ noktası, Γ_1 için bir sabit noktadır ancak ve ancak

$$LS(\rho) = S(\rho), \text{ yani } S^{-1}LS(\rho) = \rho$$

olan bir $\Gamma \in \Gamma_1$, $L \neq \pm I$ vardır, böylece

$$S^{-1}LS = \pm R^\alpha \text{ veya } SR^\alpha S^{-1} \in \Gamma_1, \alpha=1 \text{ veya } 2 \text{ dir.}$$

Bu son sonuç $-I \in \Gamma_1$ iken elde edilir. Bununla birlikte, $SRS^{-1} \in \Gamma_1$, $SR^2S^{-1} \in \Gamma_1$ ile eşdeğer olduğundan yalnız ve ancak $SRS^{-1} \in \Gamma_1$ ise $S(\rho)$ nun Γ_1 için bir sabit nokta olduğu çıkar.

Eğer $S(\rho)$, Γ_1 için bir sabit nokta ve $g_1 \in \Gamma_1$ olan $S_1 = g_1 S$ ise o zaman $S(\rho)$ da Γ_1 için bir sabit noktadır ve

$$SRS^{-1} \in \Gamma_1 \text{ ve } S_1RS^{-1} \in \Gamma_1$$

yı elde ederiz.

$$S_1RS^{-1} = (S_1S^{-1})(SRS^{-1}) \in \Gamma_1$$

olduğu çıkar ve böylece

$S_1S \in \Gamma_1$, yada S_1 , Γ_1 modüllü S' e eşdeğerdir. Eğer ek olarak $\langle i \rangle$ deki benzer durumu kabul eder ve $\langle i\infty \rangle$ daki bilinen durumu kullanırsak aşağıdaki teoremi buluruz.

Teorem 3.14 $\langle \rho \rangle$ sınıfında, Γ_1 altında kongürant olmayan sabit noktaları ε_ρ sayısı

$$SRS^{-1} \in \Gamma_1 \tag{3.26}$$

in Γ_1 modüllü kongürant olmayan S çözümlerinin sayısına eşittir.

σ_∞ sayısı

$$SU^FS^{-1} \in \Gamma_1 \tag{3.27}$$

in Γ_1 modüllü kongürant olmayan S çözümlerinin sayısına eşittir, burada F , Γ_1 in kondüktörüdür.

Bundan başka

$$\sigma_{\infty} = \sum_{v=1}^{\mu} \frac{1}{K_v} \quad (3.28)$$

dir. Burda K_v , $S_v(i\infty)$ kaspındaki yelpaze genişliği, en küçük k doğal sayılı

$$S_v U^k S_v^{-1} \in \Gamma_1$$

dir.

3.8 $\Gamma_0(N)$ nin Esas Bölgesinin Tipi

(3.25) formülünden bu tipi bulalım. (3.3.2) de, Γ da indisi

$$\mu_0 = N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

olan

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

grubunu görmüştük. $-I \in \Gamma_0(N)$ dir deriz.

3.8.1 Mod $\Gamma_0(N)$ kongrüansı

Eğer AA_1^{-1} , $\Gamma_0(N)$ nin bir elemanı ise yani

$$cd' - c'd \equiv 0 \pmod{N} \quad (3.29)$$

ise, Γ nin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $A_1 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ iki matrisi $\Gamma_0(N)$ modülüne kongrüanttırlar.

Diğer taraftan denklem (3.29) i sağlayan $(c,d,N)=(c',d',N)=1$ olan (c,d) , (c',d') iki sayı çifti mümkün bir değişiklikten sonra mod N genellikle $\Gamma_0(N)$ modülüne kongürant, Γ' nın matrislerine tamamlanabilir. Denklem (3.29) deki durum

$$c \equiv \delta c' \pmod{N} \quad \text{ve} \quad d \equiv \delta d' \pmod{N} \quad (3.30)$$

ı sağlayan bir $\delta \in \mathbb{Z}$ nin varlığına eşdeğerdir. Gerçekten, $(c,d,N)=(c',d',N)=1$ den dolayı

$$c_1 \equiv c, d_1 \equiv d, c'_1 \equiv c', d'_1 \equiv d' \pmod{N} \text{ olan } \Gamma \text{ da } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ iki matris vardır.}$$

Eğer $cd' - c'd \equiv 0 \pmod{N}$ ise o zaman belirli $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Z}$ için

$$AA_1^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \pmod{N}$$

dir.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \pmod{N}$$

den (3.30) kongrüansını buluruz. Karşıt olarak denklem (3.30) un denklem (3.29) i gerektirdiğini görürüz. Eğer denklem (3.30) sağlanırsa, (c,d) ve (c',d') iki sayı çiftine mod N orantılıdır diyeceğiz.

Bunu biraz önce yukarıda ispatladık, eğer (c,d) sayı çiftini

1) $(c,d,N)=1$

2) (c,d) sayı çifti Γ nın matrislerine mod N' e göre orantılı değildir.

Olacak şekilde, $\Gamma_0(N)$ modüllü Γ nın eşdeğer olmayan matrislerinin her bir sınıfının bir temsilini buluruz.

Bunları belirttikten sonra $\Gamma_0(N)$ için ε_p , ε_i ve σ_∞ değerlerini buluruz. Burada bir kuadratik cisimdeki rasyonel asal sayılar hakkındaki teoremi kullanırız.

3.8.2 ε_p ve ε_i nin bulunması

(3.7) de ε_p nun $ARA^{-1} \in \Gamma_0(N)$ olan $\Gamma_0(N)$ modüllü kongürant olmayan, $A \in \Gamma$ nın

maksimum sayısı olduğunu kabul ettik. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ için bu yukarıdaki 1), 2) ye eşdeğerdir

ve

$$3) c^2 - cd + d^2 \equiv 0 \pmod{N}$$

dir. Eğer (c,d) sayı çiftine $Q(p)$ kuadratik sayı cismindeki $w=c-dp$ tam sayısını birleştirirsek bu üç durum basit bir anlama sahip olur. O zaman 1), 2) ve 3) den

1') (ω, N) , $X \setminus \{\pm 1\}$ de bölönlere sahip değildir.

2') $\omega' \neq w\omega$, bir $g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için $\omega' \not\equiv g\omega \pmod{N}$ i gerektirir ve

3') $\mathcal{N}(\omega) \equiv 0 \pmod{N}$, burada $\mathcal{N}(\omega)$ ω' nin normunu belirtir. N nin negatif olmayan a ve positif m_v olan

$$N = 3^a \prod_{v=1}^r p_v^{m_v}$$

asal çarpımına sahip olduğunu varsayalım. Eğer P_v arasında $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ olan Legendre

Sembolü için bir p asal sayısı varsa, o zaman $\mathcal{N}(\omega) \equiv \omega \cdot \bar{\omega} \equiv 0 \pmod{p}$, p böler (ω, N)

olmasını gerektirir. Bu 1') ile çelişir. Eğer $\alpha \geq 2$ ise o zaman $\mathcal{N}(\omega) = \omega \cdot \bar{\omega} \equiv 0 \pmod{g}$,

$3/(\omega, N)$ den elde edilen $\omega \equiv 0 \pmod 3$ olmasını gerektirir. Böylece bu durumların her ikisinde $\varepsilon_p = 0$ dır. Kalan durumlarda $a=0$ veya $a=1$ dir ve her v için $\left(\frac{-3}{p_v}\right) = 1$ dir. Böylece her bir N bölünli $p_v \neq 3$ rasyonel asal sayısı, eşdeğer olmayan π_v ve $\bar{\pi}_v$ asal sayıları ile $Q(\rho)$ nin $\mathbf{Z}(\rho)$ tamsayılarının halkasında bir $p_v = \pi_v \cdot \bar{\pi}_v$ çarpımına sahiptir. w sayısının 1') ve 3') şartlarını sağladığını varsayalım. Eğer $\omega \equiv 0 \pmod{\pi_v \cdot \bar{\pi}_v}$ ise o zaman $p_v = \pi_v \cdot \bar{\pi}_v$, 1') ile çelişen N ile beraber w' yi böler. Böylece bir π_v ve $\bar{\pi}_v$ öyle seçilebilirki,

$$\lambda \in \mathbf{Z}(\rho) \quad \text{için} \quad \omega = \lambda \delta \quad \text{ve} \quad (\lambda, \bar{\delta}) = 1 \quad (3.31)$$

dır. Burada

$$\gamma = \sqrt{-3}^a \pi_1^{m_1}, \dots, \pi_r^{m_r}$$

dir. (3.31) formundaki bütün ω sayıları 1') ve 3') şartlarını sağlar. Diğer taraftan 2'), λ çarpanının 1'), 2') ve 3') nün birlikte verilen çözümlerinin sayısı üzerinde bir etkiye sahip olmadığını gösterir.

Eğer $(\lambda, \bar{\delta}) = 1$ olan $\lambda' \in \mathbf{Z}(\rho)$ verilirse $\lambda' \equiv g\lambda \pmod{\bar{\gamma}}$, $g \in \mathbf{Z}(\rho)$ için çözülebilir. Mod $\bar{\gamma}$ kalan sınıfları, $z \equiv 0 \pmod{\bar{\gamma}}$ olan her bir $z \in \mathbf{Z}$ için hem de $z \equiv 0 \pmod{N'}$ e sahip olduğumuzdan dolayı rasyonel sayılarla gösterilebilir. Böylece $\mathbf{Z}$ de g seçebiliriz. γ ile çarparak $\lambda' = g\lambda \pmod{\bar{\gamma}}$ den $\omega' = g\omega \pmod{N}$ elde ederiz.

Bununla birlikte $g \in \mathbf{Z}$ için $\omega' \equiv g\omega \pmod{N}$ ve $\omega = \lambda\gamma$ aynı γ ile $\omega' = \lambda'\gamma$ olmasını gerektirmesinden dolayı 1'), 2') ve 3') nün aynı zamanda birlikte verilen farklı çözümlerinin γ için farklı olasılıklar ile bulunduğunu görürüz. Bunların sayısı ε_p için $\pi'_i \in \{\pi_i, \bar{\pi}_i\}$ olan $(\pi'_1, \dots, \pi'_r)$ lerin sayısıdır. Dolayısıyla $\varepsilon_p = 2^r$ dir. Daha önceki sonuçlarımızla beraber

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 9/N \text{ ise,} \\ \prod_{p/N} \left(1 + \left(\frac{-1}{p} \right) \right) & \text{eğer } 9/N \text{ değilse} \end{cases} \quad (3.32)$$

yi elde ederiz.

ε_i ' nin hesaplanması benzer yolla elde edildiğinden dolayı $Q(p)$, $Q(i)$ Gauss sayı cismi ile yer değiştirdiği zaman ve en son olarak

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{eğer } 4/N \text{ ise ve} \\ \prod_{p/N} \left(1 - \left(\frac{-1}{p} \right) \right) & \text{eğer } 4/N \text{ değilse} \end{cases} \quad (3.33)$$

sonucunu ifade ederiz.

3.8.3 σ_∞ un hesaplanması

(3.7) den $\Gamma_0(N)$ eşdeğer olmayan rasyonel kaspaların sayısı

$$\sigma_\infty = \sum_{v=1}^{\mu_0(N)} \frac{1}{K_v}$$

dır. Bu formülde K_v , $A_v U^k A_v^{-1} \in \Gamma_0(N)$ matrisi içindeki en küçük k doğal sayıdır,

burada $A_v = \begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\frac{a_v}{c_v}, \sigma$ altında v . v_v köşesinin önceki görüntüsü olan $\mathcal{H}^*$ ın bir

rasyonel kaspıdır. $A_v U^{K_v} A_v^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \pmod{N}$ den $c_v^2 K_v \equiv 0 \pmod{N}$ buluruz. Böylece

$$K_v = \frac{N}{(c_v^2, N)}$$

dir. Eğer $t:=(c,N)$ ve $t_v:=(c_v,N)$ dersek, o zaman $(c_v^2, N)=t_v\left(t_v, \frac{N}{t_v}\right)$ ve

$$\sigma_\infty = \frac{1}{N} \sum_{v=1}^{\mu_0(N)} t_v \left(t_v, \frac{N}{t_v} \right)$$

dir.

Şimdi bir $c \bmod N$ sabit noktasının c_v ler arasında ne sıklıkla kullanıldığını göz önüne alalım. Her bir $c \bmod N$ e, $d \bmod t$ nin tam olarak $\phi(t)$ değerleri karşılık gelir. Böylece N modüllü d için kongürant olmayan $\frac{N}{t}\phi(t)$ değeri vardır. Daha önceden $\bmod N$ orantılı olan (c,d) çiftlerini dahil ettiğimizden dolayı σ_∞ u bulmak için bu toplamı $\phi(N)$ ile bölmeliyiz. Böylece

$$\sigma_\infty = \frac{1}{\phi(N)} \sum_{t|N} \left(t, \frac{N}{t} \right) \phi(t) \cdot \phi\left(\frac{N}{t} \right)$$

dir.

$$\phi(n_1)\phi(n_2) = \phi(n_1 \cdot n_2) \frac{\phi(n_1, n_2)}{(n_1, n_2)}$$

den

$$\sigma_\infty = \sum_{t|N} \phi\left(\left(t, \frac{N}{t} \right) \right) \quad (3.34)$$

yi elde ederiz.

Bu çözümleri teorem 3.15 de toplarız.

Teorem 3.15 : $\Gamma_0(N)$ kongrüans grubunun esas bölgesinin tipi

$$g = 1 + \frac{\mu_0(N)}{12} - \frac{\varepsilon_p}{3} - \frac{\varepsilon_i}{4} - \frac{\sigma_\infty}{2}$$

ile verilir. Burada $\mu_0(N)$, ε_p , ε_i ve σ_∞ un değerleri (3.9), (3.32), (3.33) ve (3.34) denklemlerinden hesaplanır.

$N \leq 25$ için $\Gamma_0(N)$ gruplarının tipini bu formüllerden buluruz:

$N=1, \dots, 10, 12, 13, 16, 25$ için $g=0$;

$N=11, 14, 15, 17, \dots, 21$ için $g=1$;

$N=22, 23$ için $g=2$;

$N=24$ için $g=3$

tür.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada modüler grupların alt grupları başlığı altında homojen ve inhomojen dönüşümler, modüler grup ve üreteçleri ve esas bölge incelendi. Modüler grubun tanımı için gerekli olan homojen ve inhomojen dönüşümler ele alındı ve sabit noktalara göre sınıflama yapıldı. Modüler grup altında esas bölgenin görüntüleri ile üst yarı düzlem, eğrisel üçgenlerle örtülecek şekilde bölümlere ayrıldı. Modüler grupların alt grupları üzerinde ayrıntılı olarak çalışılıp, özel alt gruplar ve bunlara ait esas bölgeler gösterildi. $\mathcal{H}^*/\Gamma_1$ bölüm uzayı verildikten sonra esas bölgenin tipi incelendi. Son olarak da $\Gamma_0(N)$ nin esas bölgesinin tipi üzerinde duruldu.

KAYNAKLAR

Apostol, T.M., (1976), Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Spinner-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.

Klein, F. ve Fricke, R., (1966), 1. Vorlesungen über die Theorie der Eliptischen Modulfunktionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Robert Fricke. 2 vol. Leipzig:Teubner 1890 and 1892. reprint 1966

Miyake, T., (1989), Modular Forms, Spinner-Verlag., Berlin, Heidelberg.

Schoeneberg, B., (1974), Elliptic Modular Function on Introduction. Translated from the German by J.R Smart and E.A Schwandt, Spinner-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Kadriye ŞİMŞEK
Doğum Tarihi : 06.09.1969
Doğum Yeri : Şefaatli

Lise : 1984-1987 Kayseri Sümer Lisesi
Yüksek Öğrenim : 1987-1993 Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fak. Matematik
Öğretmenliği (Almanca) Bölümü

Çalıştığı Kurumlar : 1994-1998 Milli Eğitim Bakanlığı
1998- Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü



**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**