

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

84931

BULANIK LİNEER PROGRAMLAMA

Murat Hüseyin ATIN

Yrd.-Doç. Dr. Nuran GÜZEL

F.B.E. Matematik Ana Bilim Dalı
Matematik Programında
Hazırlanan

Murat

Doç. Dr. Cahnel Ağarın

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Dr. Mustafa Şahin

Prof. Dr. Mustafa Şahin

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İSTANBUL, 1999

84931

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Bu Çalışmanın Amacı.....	1
1.2 Bulanık Matematik Programlama Problemleri.....	1
2. BULANIK KÜME TEORİSİ.....	4
2.1 Bulanık Kümeler.....	4
1. Örnek	5
2. Örnek	7
2.2 Bulanık Küme Teorisi.....	9
2.2.1 Temel terminoloji ve tanım.....	9
2.2.1.1 Bulanık kümelerin tanımı.....	9
2.2.1.2 Destek.....	10
2.2.1.3 α -seviye kümesi.....	10
2.2.1.4 Normallik.....	11
2.2.1.5 Konvekslik ve konkavlık.....	11
2.2.1.6 Uzanım prensibi.....	12
2.2.1.7 α -kesenler ile uzanım prensibinin uygunluğu.....	13
2.2.1.8 Bağntı.....	13
2.2.1.9 Ayrışımılık.....	13
2.2.1.10 Ayrışım teoremi.....	13

2.2.1.11	Bulanık olayların olasılığı.....	14
3.	Örnek	14
2.2.1.12	Koşullu bulanık kümeler.....	15
2.2.2	Temel işlemler.....	16
2.2.2.1	Kapsama.....	16
2.2.2.2	Eşitlik.....	16
2.2.2.3	Tümleyen.....	16
2.2.2.4	Kesişim.....	17
4.	Örnek	17
2.2.2.5	Birleşim.....	17
2.2.2.6	Cebirsel çarpım.....	17
2.2.2.7	Cebirsel toplam.....	18
2.2.2.8	Fark.....	18
2.3	Üyelik Fonksiyonları.....	19
2.3.1	Fonksiyonel formların incelenmesi.....	19
2.4	Bulanık Karar ve Operatörler.....	22
2.4.1	Bulanık karar.....	22
5.	Örnek	22
6.	Örnek	23
7.	Örnek	24
2.4.2	Tanım.....	25
8.	Örnek	26
2.4.3	Tanım.....	27
2.4.4	Yedeği olmayan operatörler.....	27

2.4.4.1	Min operatörü.....	27
2.4.5	Yedekli operatörler.....	27
2.4.6	Operatörler için sayısal örnekler.....	28
2.5	Bulanık Aritmetik.....	31
2.5.1	Bulanık sayıların toplamı.....	31
	9. Örnek	32
	10. Örnek	33
2.5.2	Bulanık sayıların farkı.....	34
	Örnek.....	34
	Örnek.....	35
2.5.3	Bulanık sayıların çarpımı.....	36
	Örnek.....	36
	Örnek.....	37
2.5.4	Bulanık sayıların bölümü.....	38
	Örnek.....	38
2.5.5	Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar.....	39
3.	BULANIK MATEMATİK PROGRAMLAMA.....	42
3.1	Bulanık Lineer Programlama Modelleri.....	44
3.1.1	Bulanık kaynaklar ile lineer programlama problemi.....	44
3.1.1.1	Verdegay'ın yaklaşımı-non simetrik bir model.....	48
3.1.1.1a	Örnek 1: Knox ürün-karışım seçimi problemi.....	49
3.1.1.1b	Örnek 2: Bir taşıma problemi.....	54
3.1.1.2	Werner'in yaklaşımı- Non-simetrik bir model.....	57

3.1.1.2a	Örnek 1: Knox ürün karışım seçimi problemi.....	58
3.1.1.2b	Örnek 2: Bir hava kirliliğinin düzenlenmesi problemi.....	59
3.1.2	Bulanık kaynaklar ve amaç ile lineer programlama problemi.....	64
3.1.2.1	Zimmermann'ın yaklaşımı- Simetrik bir model.....	64
3.1.2.1a	Örnek 1: Knox ürün-karışım seçimi problemi.....	66
3.1.2.1b	Örnek 2: Bir bölgesel kaynak tahsis etme problemi.....	67
3.1.2.1c	Örnek 3: Bulanık bir kaynak ayırma problemi.....	70
3.1.2.2	Chanas'ın yaklaşımı- Non-simetrik bir model.....	73
3.1.2.2a	Örnek 1: Optimâl bir sistem plan problemi.....	76
3.1.2.2b	Örnek 2: Bir bütün üretim planlama problemi.....	79
3.1.3	Amaç fonksiyonu bulanık parametrelili lineer programlama problemi.....	89
3.1.4	Tüm katsayıları bulanık lineer programlama.....	91
3.1.4.1	Örnek: Bir üretimin planlanması problemi.....	93
KAYNAKLAR		99
ÖZGEÇMİŞ		100

ÖZET

Bu çalışmada bulanık küme teorisi uygulamaları ile bulanık lineer programlama ele alınmıştır.

Öncelikle, bazı temel kavramlar ve terimler tanımlanmıştır. Bunlardan hareketle, bulanık kaynaklar ile lineer programlama problemi, bulanık kaynaklar ve amaç ile lineer programlama problemi, amaç fonksiyonu bulanık parametrelili lineer programlama problemi, tüm katsayıları bulanık lineer programlama yaklaşımları ve çözülmüş gerçek dünya problemleri verilmiştir. Bu gerçek dünya karar problemlerinde giriş verileri veya parametrelerin eksik veya bulunamaz bilgiler olması nedeniyle sık sık bulanık/kesin olmayandır.

Elde edilen sonuç bulanık lineer programlama verimliliği artıracaktır.



ABSTRACT

This article is a report on the applications of fuzzy set theory toward fuzzy linear programming.

At first in this study the some of the base notions and terms are defined. In this respect linear programming problem with fuzzy resources, linear programming problem with fuzzy resources and objective, linear programming problem with fuzzy parameters in the objective function , and linear programming with all fuzzy coefficient approaches and the solved real world problems are given. In these real world problems, the input data or parameters are often fuzzy/imprecise because of incomplete or non-obtainable information.

It is the authors belief that using fuzzy linear programming increases productivity.

1. GİRİŞ

Yüzyılın başlarında, fen ve mühendislikte karmaşık-gerçek dünya sistemleri, kesin matematik modeller içine indirgenerek çözüldü. Bu yüzyılın ortasında, yöneylem araştırması gerçek dünya karar verme problemlerine uygulanmaya başlandı ve böylece yöneylem araştırması fen ve mühendislikte en önemli alanlardan biri oldu. Maalesef, gerçek dünya durumları o kadar kararlı değildir. Bu yüzden kesin matematiksel modeller bütün uygulamalı problemlerle uğraşmak için yeterli değildir.

Kesin olmama/kararsız olmayla uğraşırken, genellikle olasılık teorisi kavramı ve teknikleri kullanılır. 1960'larda, olasılık teorisinin yorumları, uygulamalı problemleri modellemede, özellikle yapay zekâ alanında yeniden incelendi ve eksikleri bulundu. Fizik ve matematikte, non-lineer dinamik sistemlerde kullanılan kaos teorisinin ortaya çıkmasıyla aynı zamanlarda bulanık küme teorisi 1965'de Azerbaycan Türklerinden Lütü A. Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Bundan sonra, bulanık küme teorisi, yöneylem araştırması, yönetim bilimi, yapay zekâ/uzman sistemler, kontrol teorisi, istatistik ve daha bir çok alana uygulanır olmuştur.

Yöneylem araştırmasında; bulanık küme teorisi, lineer ve non-lineer programlama, dinamik programlama, kuyruk teorisi, çok amaçlı karar verme, grup karar verme, v.s., tekniklerine uygulanmaktadır. Burada bulanık lineer programlama problemleri, yöntemleri ve uygulamaları ele alınacaktır.

1.1 Bu Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada bulanık küme teorisi uygulamaları ile bulanık lineer programlama ele alınmıştır. Öncelikle bazı temel kavramları ve terimleri tanımlayacağız. Bütün kavram ve teknikler gerçek dünya problemlerini çözmek için ortaya atılmıştır. Sonra bu kavramlardan hareketle bulanık lineer programlama yaklaşımları verilecektir. Uygulamalı problemler, üretim/imalât, taşıma, tayin etme, oyun, çevresel yöneticilik, banka/finans ve tarım ekonomisi ile ilgilidir.

1.2 Bulanık Matematik Programlama Problemleri

Bir Sovyet matematikçisi ve ekonomisti olan L.V. Kantorovich, 1939'da üretimin organizasyonu ve planlanması ile ilgili olan lineer programlamayı formüle edip çözerken; Amerika Birleşik Devletleri Hava Kuvvetlerinden G. B. Dantzig, M. Wood ve arkadaşları, A. W. Tucker olarak isimlendirilen lineer programlamanın genel problemini geliştirdiler.

Matematiksel ve ilgili teknikleri, askerî programlama ve plânlama problemlerine uygulamak için Dantzig, “ lineer bir amaç fonksiyonunu minimize ederek saptanan optimizasyon programı ve bir lineer programlama modeli olarak düşünülen geniş bir organizasyonun aktiviteleri arasında karşılıklı ilişkiler ” olduğunu önerdi. Bazı kavramlar, Leotief’in giriş-çıkış modelinden meydana çıktı.

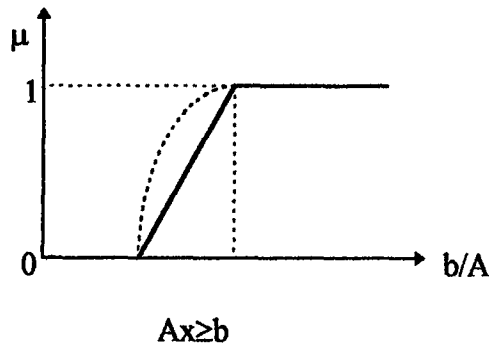
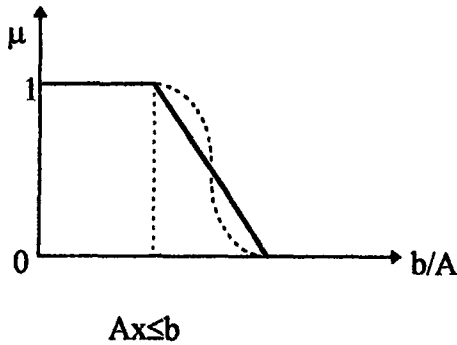
Lineer programlama, maksimum kâr ve minimum fiyat olarak istenen bir hedefle karşılaşma amacıyla aktivitelerde sınırlı kaynakların etkili kullanımıyla ilgilenir. Sembol olarak, genel lineer programlama problemi şu şekilde yazılabilir:

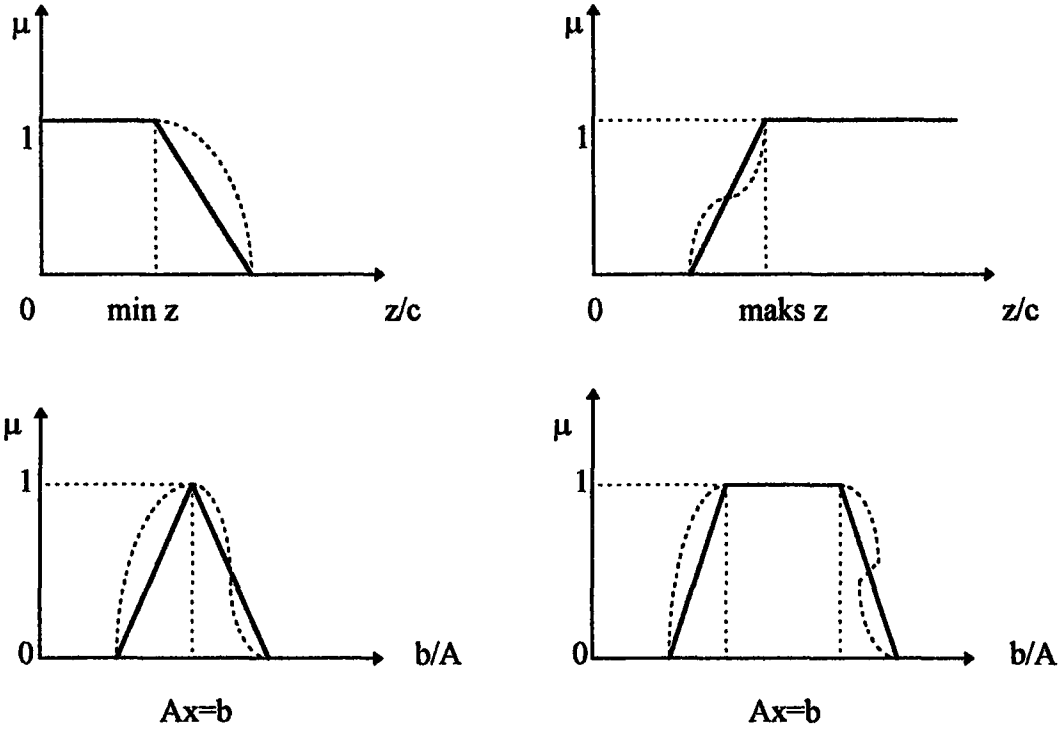
$$\text{Maks } z=f(c,x)=cx$$

$$\text{Kısıtlar } g(A,x)=Ax \leq b \text{ ve } x \geq 0 \quad (1.1)$$

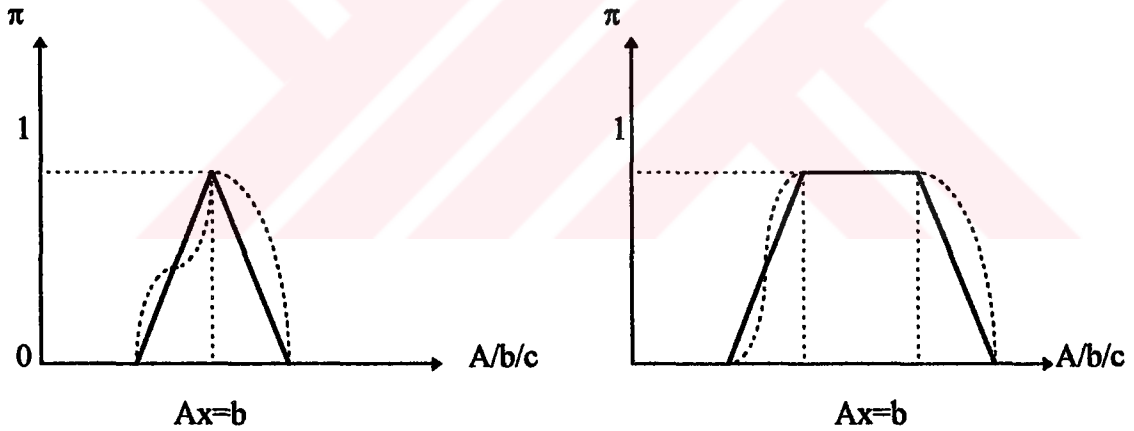
Burada c , amaç fonksiyonunun kâr katsayılarının vektörü; b , mevcut toplam kaynakların vektörüdür. x , karar değişkenlerinin vektörü ve A , teknik katsayıların matrisidir. Bu giriş verileri (c , b ve A nın) eksik veya tam bulunamaz bilgiler olduğundan genellikle bulanık/kesin olmayandır. Örneğin, mevcut iş saati ve mevcut malzeme (b), sırasıyla “ 1220 saat civarında ” ve “ yaklaşık 1550 birim ” olabilir. Benzer olarak, yeni ürünlerin birim kârı (c), her ünite “ yaklaşık 2.3 TL ” beklenebilir ve teknolojik katsayıları (A) nın, her bir iş saatinde üniteler için “ 3 civarında ” olabilir.

Bu bulanık/kesin olmayan sayıların formülasyonunda, üyelik fonksiyonları veya olasılık dağılımları (özel problemlere bağlı olma) kullanabiliriz. Üyelik fonksiyonları ve olasılık dağılımlarının fonksiyonel formları sırasıyla şekil 1.1 ve 1.2’de gösterilmiştir. Bu bulanık/olasılık (lineer) programlama olarak adlandırılır. Bu çalışmada; bir üyelik fonksiyonunun mertebesi, verilen toleranslar içinde memnuniyetin bir öznel derecesini gösterir. Diğer taraftan, olabilirliğin mertebesi bir olayın meydana çıkmasının öznel veya nesnel derecesidir. Matematik programlama problemlerinde bulanıklığı/kesin olmamayı modellerken bu farkı anlamak önemlidir.





Şekil 1.1 bulanık b, bulanık A, bulanık c veya bulanık z nin üyelik fonksiyonları.



Şekil 1.2 kesin olmayan A, kesin olmayan b veya kesin olmayan c nin olasılık dağılımları.

Şekil 1.1 de, bulanık kaynakların üyelik fonksiyonlarının dört durumu çizilmiştir. Kısıtlar $Ax \leq \tilde{b}$ olduğunda, rasyonel üyelik fonksiyonlarının artan olmadığı kabul edilir. Benzer olarak, artan fonksiyonlar $Ax \geq \tilde{b}$ için kabul edilebilir. Eşitlik kısıtları için üçgensel veya yamuk fonksiyonlar uygun olabilir. Maksimizasyon (veya minimizasyon) problemi için, $\tilde{c}$ nin üyelik fonksiyonları $Ax \geq \tilde{b}$ de, $\tilde{b}$ olarak azalan olmayan kabul edilebilir (veya $Ax \leq \tilde{b}$ de $\tilde{b}$ olarak artan olmayan). $\tilde{A}$ nın üyelik fonksiyonları olarak, ya $\tilde{A} x \leq b$

için artmayan ya da $\tilde{A} x \geq b$ için azalmayan olabilir. Bulanık lineer programlama için, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ ve/veya $\tilde{c}$ nin olasılık dağılımları sık sık, şekil 1.2 de gösterildiği gibi üçgensel veya yamuk fonksiyonları olarak kabul edilebilir.

2. BULANIK KÜME TEORİSİ

“ Bulanık ” terimi 1962’de Zadeh tarafından devre teorisinden sistem teorisine adlı makalesinde ortaya atılmıştır. 1965’de, Zadeh, “ Bulanık Kümeler ” adlı makalesini yayınlamıştır. Bulanık küme teorisi, basitleştirilmiş modeli faydalı hale getirmek için geliştirilir; bu yüzden, insani durumları içeren gerçek dünya sistemlerinin çözümü sırasında daha fazla sağlam ve esnek model geliştirilebilir. Üstelik, karar verici sadece verilen kısıtlar altında varolan seçenekleri gözönüne almaz (verilen bir sistemin optimizasyonu). Ayrıca yeni seçeneklerin geliştirilmesine de yardımcı olur (bir sistemin dizaynı).

Bulanık küme teorisi, yöneylem araştırması, yönetim bilimi, kontrol teorisi, yapay zekâ/uzman sistemler, insan davranışı, v.s. gibi bir çok alanda uygulanmaktadır. Bulanık küme teorisi ve bulanık matematiğin gerekli bilgileri verildikten sonra, bulanık lineer programlamaya geçilecektir.

2.1 Bulanık Kümeler

Bilginin eksik olması veya tam olmaması nedeniyle; kesin matematik, bir karmaşık sistemi modellemede yeterli değildir. Geleneksel olarak, bu eksikliğin/belirsizliğin işlenmesinde; olasılık teorisi, üstün gelen yaklaşımdır. Olasılık teorisinin esaslarından biri $p(A \cup A^c) = 1$ ve $p(A \cap A^c) = 0$ kanunudur. Örneğin; bir meyva ya elmadır ya da değildir, bir hayvan ya erkek ya da dişidir. Bu durum için; olasılık sınırları, açıkça tanımlı olan bazı bilgileri göstermek için kesinlikle iyi bir yaklaşımdır. Havaya atılan paranın yazı yada tura geleceğini tahmin edebilirsiniz. Atılan bir tavla zarında sonuçlar 6,5,4,3,2 veya 1 olacak; fakat, asla 4.5 veya 2.1 olmayacaktır. Pek tabii, bu kanunları sağlayan bir çok problem vardır. Fakat diğer problemlerde bu doğru değildir. Örneğin; bir adam, şık, biraz şık veya şık olmayan olabilir. Bir renk, kırmızı, kırmızımsı veya kırmızı olmayan olabilir. Bu yüzden; kesin/keskin sınırlar ile, şık adam ve kırmızı renk kümelerini tanımlamak hatalıdır. Aynı şekilde; “ güzel arabalar ”, “ iyi tat ”, “ makul fiyat ”, “ iyi şahsiyet ”, v.s. yi nasıl tanımlar ve sınıflandırırız? İşte, bulanık küme teorisi kesin sınırları olmayan böyle problemleri tanımlar ve çözer. Yani, bulanık küme teorisi kısmi ilişkiyi/üyeliği gözönüne

alır. Klâsik (kesin) kümelerden, bulanık kümelerin daha açık olarak ayırtedilmesi için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

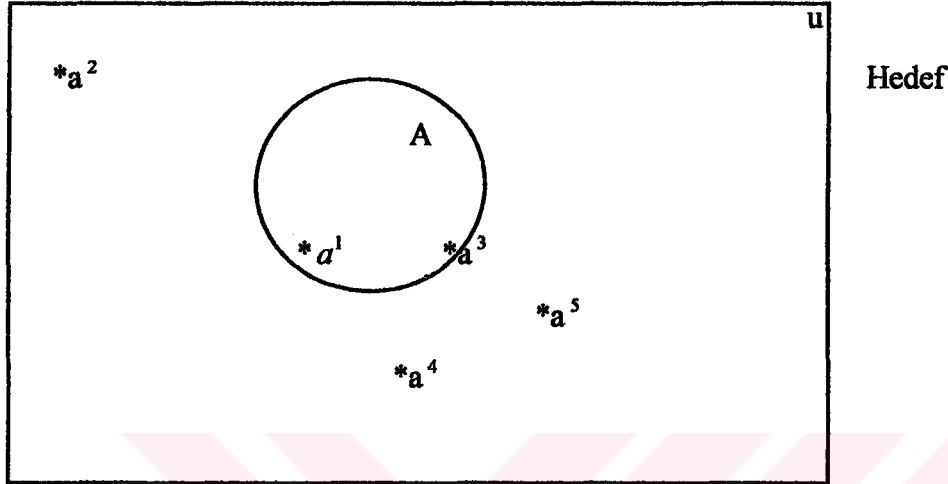
1. Örnek

Klâsik küme teorisinde, verilen bir eleman ya A kümesine ait ya da değildir. Örneğin; oldukça geniş bir hedef ve atıcıların her zaman hedefin içini vurduğunu varsayalım (bak şekil 2.1). Bir daire hedefin merkezine koyulsun. Eğer bir atıcı dairenin içini, yani, A bölgesini vurursa; “ iyi bir atıcı ” olarak, diğer hallerde ise, “ kötü bir atıcı ” olarak adlandırılsın. a^1 atıcısı, A bölgesinin içine atıyor; öyleyse, o iyi bir atıcıdır. Diğer yandan, a^2 atıcısı, A bölgesinin çok uzağına atıyor; öyleyse, kötü bir atıcıdır. İkili bağıntılarla klâsik küme teorisi bazı problemleri gösterir. Örneğin; eğer a^3 , a^4 ve a^5 gibi üç atıcı varsa ki; bunlar biri diğerinin yakın bölgesi içinde hedefe isabet ettiriyor; sadece a^3 hedefin içinde ise, o zaman a^3 iyi bir atıcı, a^4 ve a^5 kötü atıcıdırlar. Bu oldukça mantıksızdır.

Gerçekte, bu üç kişi bazı benzer ünvanlar elde edebilirler. Bu yüzden; atıcının “ iyi atıcılar ” kümesine ait olma derecesinin bir ölçüsü nasıl iyi atıcı olduğunun ayırt edilmesini, sıra ile geliştirebilir. İyi atıcıları meydana getiren küme gerçekten bulanıktır; çünkü kesin sınır yoktur. a^1 atıcısı, “ iyi atıcılar ” kümesine ait olduğunda, dereceyi göstermek için bir ölçü olarak, A bölgesinin sınırlarından uzaklığın gözönüne alınması mantıklıdır. Şekil 2.1’de, a^1 ve a^3 tamamen iyi atıcılardır. Diğer taraftan, a^4 ve a^5 tamamen iyi veya tamamen kötü atıcılar değildirler. Bazı derecelerle iyi atıcıdırlar. A bölgesinden her bir atıcının d uzaklığı, doğrusal olduğu varsayılan sayısal bir ölçünün verilmesiyle; a^4 ün iyi atıcılar kümesindeki üyelik derecesi 0.8, a^5 in ki ise, 0.2 dir. $\mu(a^4)=0.8$ ve $\mu(a^5)=0.2$ dir. Pek tabiiki, μ nün sayısal ölçüsü [0,1] aralığında değişen bir sayı olacaktır. Yukarıdaki örnekte, her bir atıcı için sayısal ölçülerin tayin edilmesi “ bir atıcının iyi atıcılar kümesine ait olma ”sının derecesini gösterirken, tercih kavramı ifade edilir. Derece değerleri, gerçekten tercih değerleridir. Şekil 2.1’de gösterildiği gibi, bu derecelerle meydana getirilmiş μ fonksiyonu (bulanık küme teorisinde üyelik fonksiyonu olarak adlandırılır), tercihi bir fonksiyondur. Benzer olarak, uygulamada; karar verici, “ 8,000,000,000 TL civarında kârın kabul edilebilir ”, “ bütçenin 360,000,000 TL civarında olacağını ”, “ kâr hisselerinin %6’dan yüksek olmayacağını ”, “ fazla mesainin normal iş saatinin %5 ‘inden az olacağını ”, v.s. yi hisseder. Açıkça, bu tür cümleler olasılıkla

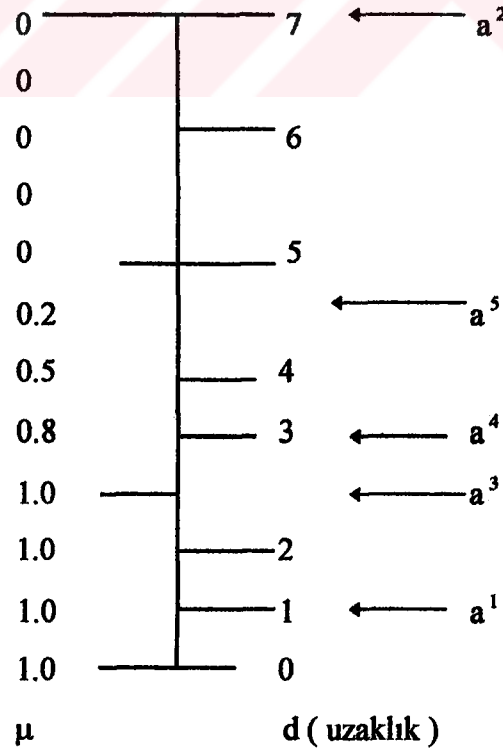
açıklanamaz. Diğer bir yoldan; bulanık küme teorisi, böyle cümlelerdeki durumları kullanma yolunu verir. Aynı anlamda, tercih kavramı, sık sık yukarıdaki gibi beyanların üyelik fonksiyonlarının oluşturulmasında varsayılır.

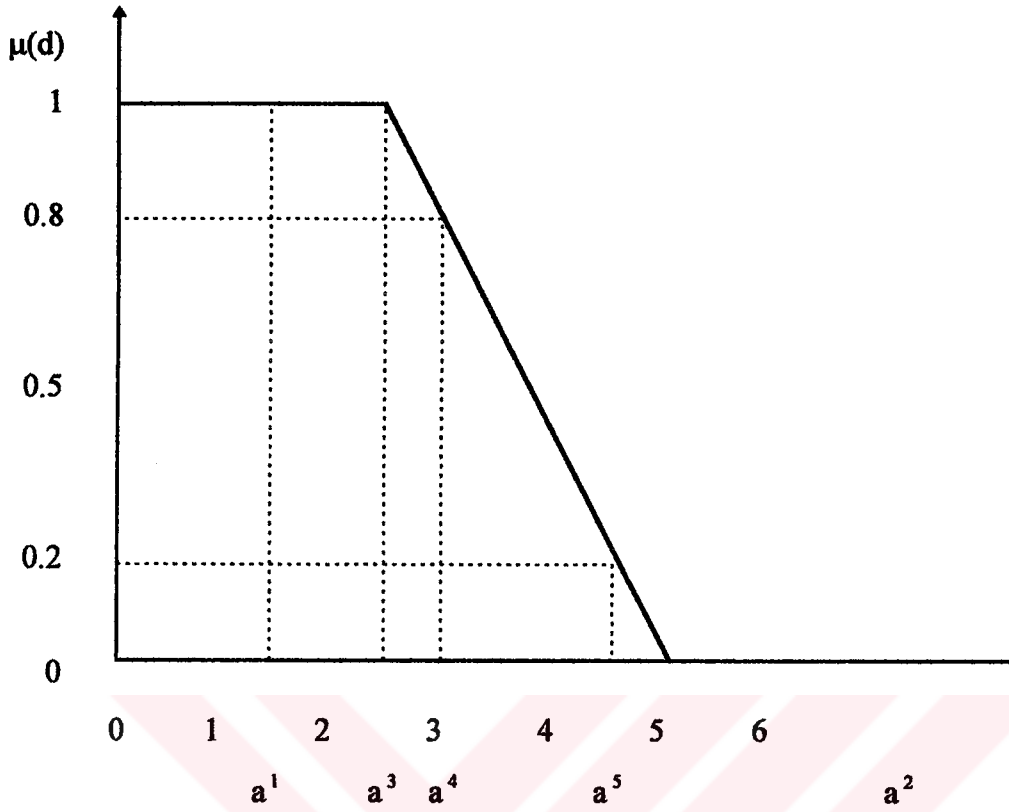
Bulanık küme kavramının daha açık olarak anlaşılması için bir örneği daha gözönüne alalım.



Nasıl iyi atıcı olduğunu
gösteren tayin edilmiş
dereceler

Hedefin merkezinden
varsayılan uzaklıklar





Şekil 2.1. iyi atıcı bulanık kümesi için grafik açıklama.

2. Örnek

Aynı boydaki 4 erkek öğrenci Hasan, Kemal, Ali ve Cem'den oluşan bir evreni gözönüne alalım. $U = \{ \text{Hasan, Kemal, Ali, Cem} \}$ dir. Bu öğrencilerin ağırlıkları aşağıdaki gibidir:

Hasan: 74 kg Kemal: 86 kg

Ali : 81 kg Cem : 72 kg

Şimdi, “ şişman erkek öğrenciler ” ifadesini gözönüne alalım. Bu ifadeyi tanımlayan küme bulanık bir A kümesidir. $\text{Hasan} \in A$, $\text{Kemal} \in A$, $\text{Ali} \in A$ veya $\text{Cem} \in A$ mıdır?

Relatif farkları göstermek için, reel bir doğrudaki biri işaretlenir (bak şekil 2.2). Ortak düşünceye göre; 85 kilodan fazla olanları şişman olarak gözönüne alalım. Diğer bir yoldan, 72 kg dan daha az ağırlıklı öğrenci mutlak olarak şişman değildir. Bu yüzden Kemal kesin olarak şişman ve Cem kesin olarak şişman olmadığı açıktır. Hasan ve Ali hakkında ne diyebiliriz? Gerçekten, Hasan ağırlık yönüyle Cem'e ve de Ali de Kemal'e yaklaşıyor.

Ağırlığı fazla olan öğrencinin, bulanık A kümesine ait olma derecesinin daha büyük olması doğrudur. Bir sonuç olarak, aşağıdaki üyelik dereceleri mümkündür:

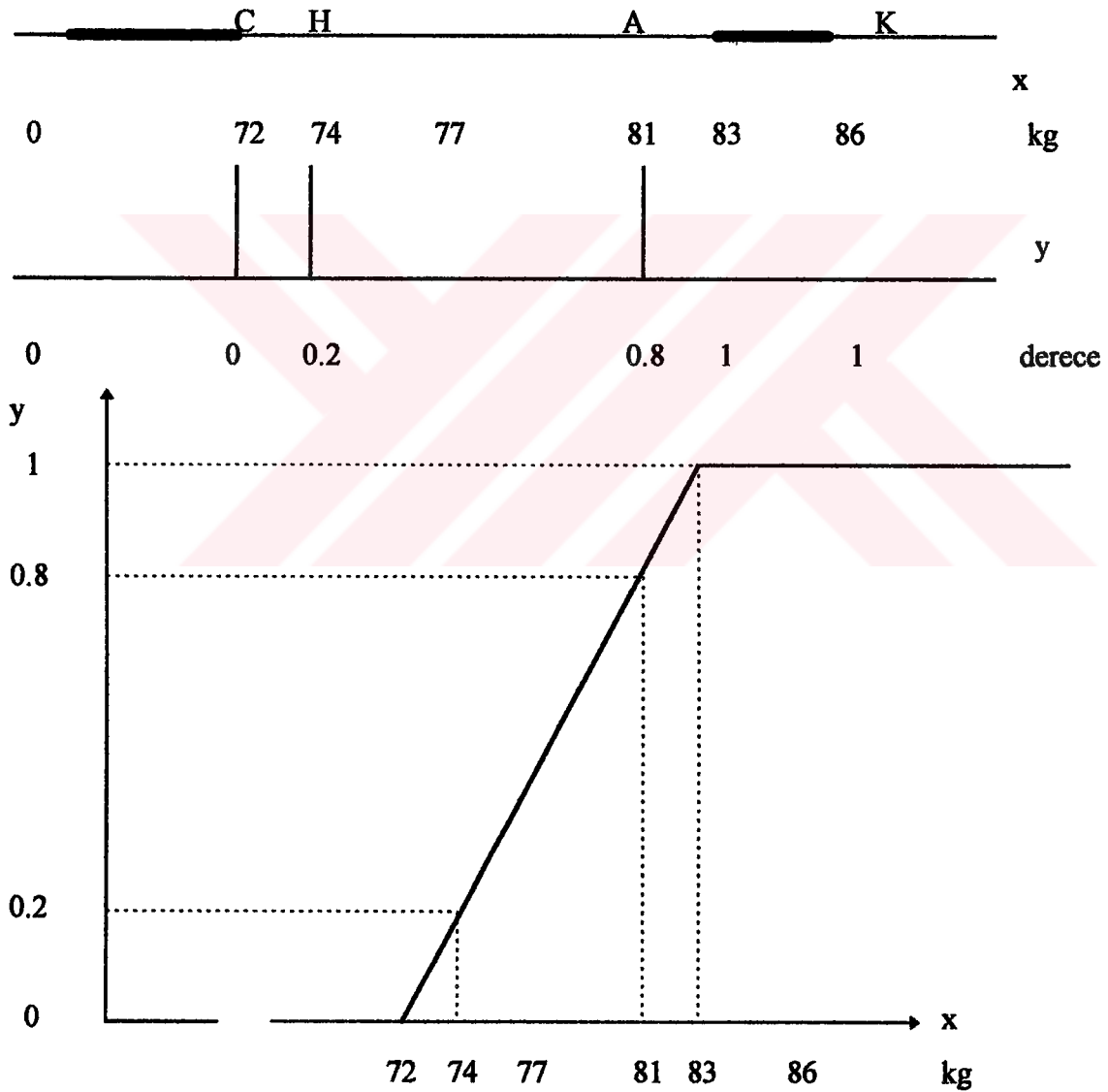
$$\text{derece (Hasan } \in A) = \mu(x=H)=0.2$$

$$\text{derece (Kemal } \in A) = \mu(x=K)=1$$

$$\text{derece (Ali } \in A) = \mu(x=A)=0.8$$

$$\text{derece (Cem } \in A) = \mu(x=C)=0$$

Burada $\mu(\cdot)$, X kümesinin A bulanık alt kümesinin üyelik fonksiyonudur. Önceki örneğe benzer olarak; tercih kavramı, $\mu(\cdot)$ üyelik fonksiyonunu sağlamada kullanılır.



Şekil 2.2 bulanık A kümesi için üyeliğin türetilmiş dereceleri

2.2 Bulanık Küme Teorisi

Kesin bir $A = \{ x \mid x=2y, y \text{ doğal sayı (} N \text{) dir } \}$ kümesi gözönüne alınsın. A bütün çift doğal sayıların bir kümesidir. Böylece, bir $y \in N$ doğal sayısı çift ise, A ya aittir; tek ise, A ya ait değildir. O zaman kesin A kümesi şöyle gösterilebilir:

$$A = \{(1,0), (2,1), (3,0), (4,1), \dots\}$$

Burada, sıralanmış çiftlerin ikinci sayısı; 0 veya 1, üyeliğin ölçüsüdür. 0, sıralanmış çiftlerin birinci numarasının çift olmadığını ve 1 de çift olduğunu gösterir. Bu notasyonu kullanarak, örnek 2'ye uyguladığımızda aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$A = \{(\text{Hasan}, 0.2), (\text{Kemal}, 1), (\text{Ali}, 0.8), (\text{Cem}, 0)\}$$

Burada ikinci numara $[0,1]$ aralığındadır. Bu, bulanık kümeleri kesin kümelere ayıran temel özelliktir. Şimdi, aşağıda terminolojileri ve terimleri vermenin zamanıdır.

2.2.1 Temel terminoloji ve tanımlar

2.2.1.1 Bulanık kümelerin tanımı

X, genel elemanları x ile tanımlı, evrensel olarak adlandırılan, nesnelerin klâsik bir kümesi olsun. X in bir kesin alt kümesinde üyelik sık sık X den $\{0,1\}$ e, μ_A karakteristik fonksiyonu olarak gösterilir, yani:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 1 \text{ ancak ve ancak } x \in A \text{ ise,} \\ &= 0 \text{ diğer hallerde.} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Burada, $\{0,1\}$ bir değer kümesi olarak adlandırılır.

Eğer değer kümesi $[0,1]$ reel aralığı kabul ediliyorsa; A, Zadeh tarafından önerilmiş olan bulanık bir küme olarak adlandırılır. $\mu_A(x)$, A da x in üyeliğinin derecesidir. $\mu_A(x)$ in değerinin 1 e yakın olması, x in daha fazla A ya ait olması demektir. Bundan dolayı; A, aşağıdaki sıralanmış çiftlerin kümesi ile tam olarak karakterize edilir:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (2.2)$$

Karakteristik fonksiyon ya örnek 2 de gösterildiği gibi, bir üyelik fonksiyonu ya da örnek 1 de gösterildiği gibi bir olasılık dağılımı olabilir. Bu çalışmada, eğer üyelik fonksiyonu tercih edilirse, karakteristik fonksiyon $\mu(x)$ olarak tanımlanacaktır. Eğer olasılık dağılımı tercih edilmişse, karakteristik fonksiyon $\pi(x)$ olarak tayin edilecektir.

Denklem (2.2) ifadesinin yanı sıra, Zadeh aşağıdaki notasyonları da teklif etti. X, sonlu bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi olduğunda; bulanık bir A kümesi:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_i \mu_A(x_i)/x_i \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

2. Örnek :

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(\text{Hasan})/\text{Hasan} + \mu_A(\text{Kemal})/\text{Kemal} + \mu_A(\text{Ali})/\text{Ali} + \mu_A(\text{Cem})/\text{Cem} \\ &= 0.2/\text{Hasan} + 1/\text{Kemal} + 0.8/\text{Ali} + 0/\text{Cem} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

X sonlu bir küme değilse; A, o zaman:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir.

Bazen, sadece bulanık kümelerin nesnelere ihtiyaç duyabiliriz (karakteristik fonksiyonuna değil), bu bir kesin küme içine bir bulanık kümeyi transfer etmektir.

Böylece; iki kavrama, yani destek ve α -seviye kümesine ihtiyacımız vardır.

2.2.1.2 Destek

Bulanık bir A kümesinin desteği, X in kesin alt kümesidir ve

$$\text{supp } A = \{x \mid \mu_A(x) > 0 \text{ ve } x \in X\} \quad (2.5)$$

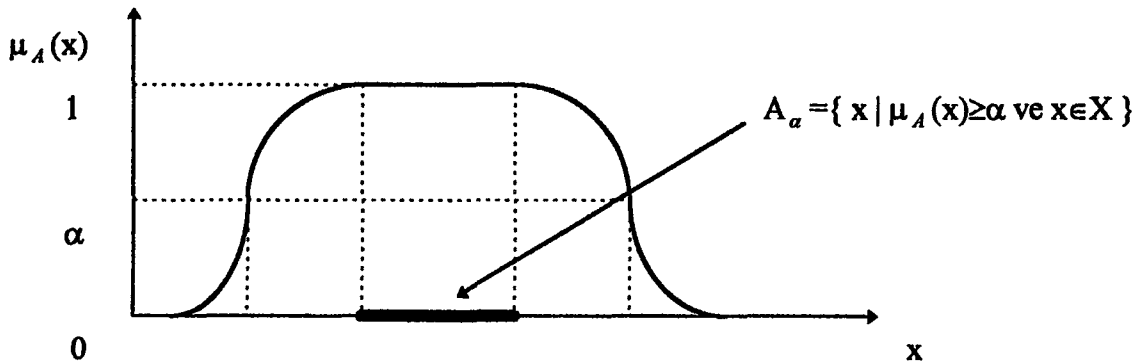
olarak gösterilir. Örnek 2 için, $\text{supp } A = \{\text{Hasan}, \text{Kemal}, \text{Ali}\}$ dir. Burada $\mu(\text{Cem}) > 0$ olmaması nedeniyle $\text{supp } A$ ya ait değildir.

2.2.1.3 α -seviye kümesi (α -keseni)

Bulanık bir A kümesinin α -seviye kümesi (α -keseni), X in kesin bir alt kümesidir ve

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha \text{ ve } x \in X\} \quad (2.6)$$

ile tanımlanır (şekil 2.3 sürekli bir durumu gösterir). Örnek 2 için, $A_{0.2} = \{\text{Hasan}, \text{Kemal}, \text{Ali}\}$ ve $A_{0.7} = \{\text{Ali}, \text{Kemal}\}$ dir.



Şekil 2.3 bir α -seviye kümesi.

Karakteristik fonksiyonun bir sayı ile tayin edilmesinde, 0 ve 1 arasında normalize olmuş bir değer her zaman tercih edilir. Böylece, aşağıda normallliği tanımlayalım.

2.2.1.4 Normallik

Bulanık bir A kümesi ancak ve ancak normal ise $\sup_x \mu_A(x)=1$ dir; bu, X üzerinde $\mu_A(x)$ in en yüksek derecesinin tek olması demektir (bak şekil 2.3). Bulanık bir A kümesi normal değilse; alt normaldir. Boş olmayan bir alt normal bulanık küme, $\sup_x \mu_A(x)$ faktörü ile, her bir $\mu_A(x)$ in bölünmesiyle normalize edilir (bulanık bir A kümesi $\forall x \in X$ için ancak ve ancak $\mu_A(x)=0$ ise, boştur).

Bu çalışma boyunca karakteristik bir fonksiyon her zaman bir normalize olmuş fonksiyondur.

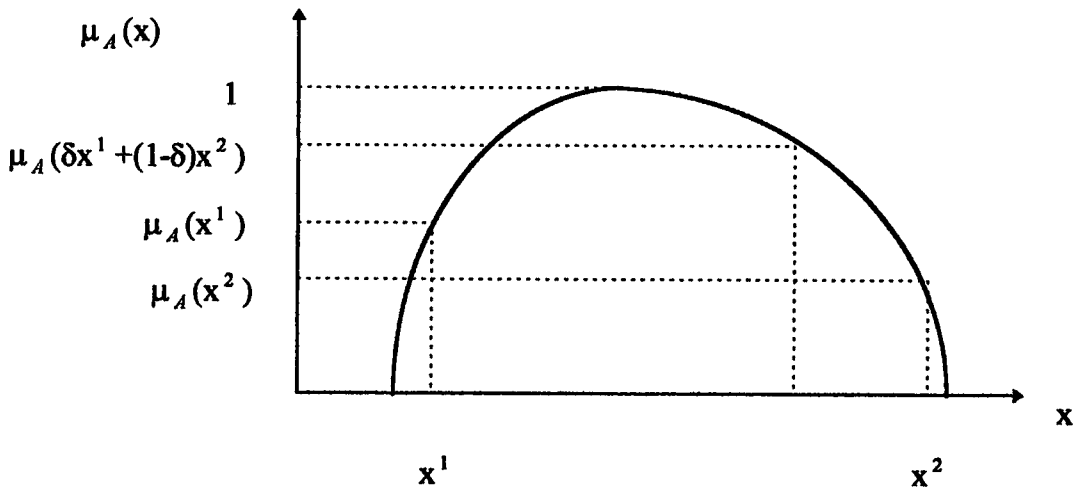
2.2.1.5 Konvekslik ve konkavlık

X de bulanık bir A kümesi, X de herbir x^1 ve x^2 nokta çiftleri için ancak ve ancak A nın üyelik fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlıyorsa, konvektir:

$$\mu_A(\delta x^1 + (1-\delta)x^2) \geq \min(\mu_A(x^1), \mu_A(x^2)) \quad (2.7)$$

Burada, $\delta \in [0,1]$ dir (bak şekil 2.4). Alternatif olarak, bulanık bir küme eğer tüm α -seviye kümeleri konveks ise konvektir.

Dual olarak; A, A^c tümleyenini konveks ise, konkavdır. Eğer A ve B konveks ise, böylece $A \cap B$ nin konveks olduğunu göstermek kolaydır. Dual olarak, eğer A ve B konkav ise $A \cup B$ de konkavdır.



Şekil 2.4 konveks bulanık bir küme

2.2.1.6 Uzanım prensibi

$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, evrenin bir kartezyen çarpımı ve $A_1, A_2, \dots, A_n$ sırasıyla, $X_1, X_2, \dots, X_n$ in n bulanık alt kümesi olsun. $A_1, A_2, \dots, A_n$ nin kartezyen çarpımı:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \int_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} \min[\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)] / (x_1, \dots, x_n) \quad (2.8)$$

olarak tanımlansın.

$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ den Y evrenine bir tasvir: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun. Burada $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ dir. Uzanım prensibi (Zadeh), n bulanık A_i kümesinden, f içine y de bulanık bir B alt kümesinin tümevarımına izin verir, şöyle ki:

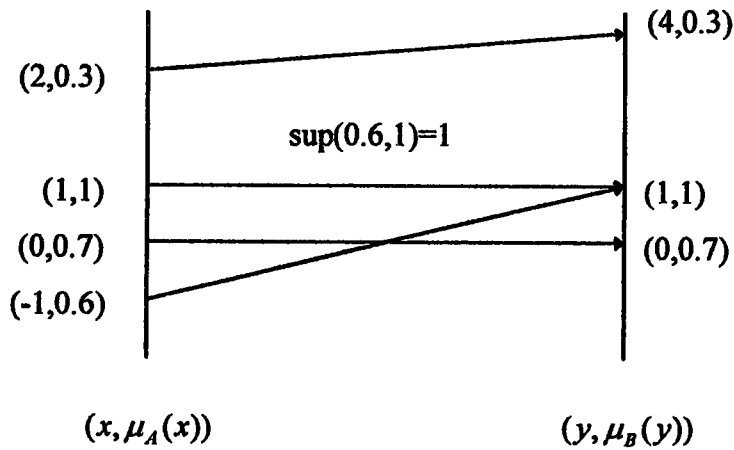
$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \\ &= 0, \quad f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Burada, $f^{-1}(y)$, y nin evren görüntüsüdür. $\mu_B(y)$, n-li $(x_1, \dots, x_n)$ in kullanımıyla, y nin gerçekleşmesinin $\mu_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n)$ üyelik değeri arasında, en büyüğüdür.

Örneğin, $A = \sum \mu_A(x) / x = \frac{0.6}{-1} + \frac{0.7}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.3}{2}$ ve $f(x) = x^2$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \mu_B(y) &= \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ &= 0, \text{ diğer hallerde} \end{aligned}$$

elde ederiz. Uzanım prensibinin uygulanmasıyla; şekil 2.5 de gösterildiği gibi, $B = \frac{0.7}{0} + \frac{1}{1} + \frac{0.3}{4}$ dür.



Şekil 2.5 uzanım prensibi

2.2.1.7 α -kesenler ile uzanım prensibinin uygunluğu

$B = f(A_1, \dots, A_n)$ ile $A_1, \dots, A_n$ nin görüntüsünün gösterilmesiyle, aşağıdaki ifade edilir:

$$\{f(A_1, \dots, A_n)\}_\alpha = f(A_{1\alpha}, \dots, A_{n\alpha}) \quad (2.11)$$

Burada, $\forall y \in Y$ için $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ ve $\mu_B(y) = \mu_{A_1 A_2 \dots A_n}(x_1^*, \dots, x_n^*)$ mevcut olur (denklemler (2.9) daki alt sınır elde edilir).

2.2.1.8 Bağlılık

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ çarpım uzayında, bir bulanık R bağıntısı, R de $\mu_R(x, y)$ üyeliğinin bir derecesi, her bir sıralı (x, y) çifti ile ilişkili olan bir μ_R üyelik fonksiyonu ile gösterilmiş, $X \times Y$ de bulanık bir kümedir. Daha genel olarak, bir $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ çarpım uzayında, n-li bulanık bir bağıntı n-li bir $\mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$ üyelik fonksiyonu ile gösterilen X de bulanık bir kümedir.

Örneğin, $X = Y = R^1$ olsun. Burada $R^1, (-\infty, \infty)$ da tanımlı reel doğrusudur. O zaman $x > y, R^2$ bir bulanık bağıntıdır. Bu durumda, μ_R için bir öznel ifade şu olabilir:

$$\begin{aligned} \mu_R(x, y) &= 0, & x \leq y \\ &= (1 + (x - y)^{-2})^{-1}, & x > y \end{aligned}$$

2.2.1.9 Ayırışıklık

$X = \{x\}, Y = \{y\}$ olsun ve C, $\mu_C(x, y)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlı $Z = X \times Y$ çarpım uzayında bulanık bir alt küme olsun. O zaman, ancak ve ancak C, $C = A \cap B$ gösterimine imkân veriyorsa (A, X de ve B, Y de birer alt kümedir); C, X ve Y nin yanısıra ayrışabilir, bu:

$$\mu_C(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad (2.12)$$

dir. Burada $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(y)$, A ve B nin üyelik fonksiyonlarıdır. Bir sonlu sayı uzayındaki bulanık bir alt küme için aynısı ile elde edilir.

2.2.1.10 Ayırışım teoremi

Bulanık bir A alt kümesi aşağıdaki formda ayrıştırılabilir:

$$A = \text{maks}(\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, \dots, \alpha_n A_{\alpha_n}) = \text{maks}_{\alpha_i} \alpha_i A_{\alpha_i} \quad (2.13)$$

Burada, $\alpha_i \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n$ dir. Örneğin, $A = ((x_1, 0.2), (x_2, 0.7), (x_3, 1), (x_4, 0))$ dir. Açık olarak, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.2, \alpha_3 = 0.7$ ve $\alpha_4 = 1$ dir. O zaman, aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

x	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄
$\mu_A(x)$	0.2	0.7	1.0	0.0
$A_{0.0}$	1.0	1.0	1.0	1.0
$A_{0.2}$	1.0	1.0	1.0	0.0
$A_{0.7}$	0.0	1.0	1.0	0.0
$A_{1.0}$	0.0	0.0	1.0	0.0
$0.0 (A_{0.0})$	0.0	0.0	0.0	0.0
$0.1 (A_{0.2})$	0.2	0.2	0.2	0.0
$0.2 (A_{0.7})$	0.0	0.7	0.7	0.0
$1.0 (A_{1.0})$	0.0	0.0	1.0	0.0
$\max_{\alpha_i} \alpha_i A_{\alpha_i}$	0.2	0.7	1.0	0.0

2.2.1.11 Bulanık olayların olasılığı

P , Ω da bir olasılık ölçüsü olsun. Ω da bulanık bir A olayı, μ_A üyelik fonksiyonu ölçülebilir olan Ω nın bulanık bir A alt kümesi olarak tanımlanır. O zaman A nın olasılığı Lebesgue-Stieltjes integrali ile tanımlanır:

$$P(A) = \int_{\Omega} \mu_A(x) dP \quad (2.14)$$

Denk olarak, $P(A) = E(\mu_A)$ dır. Burada $E(.)$ beklenen değer operatörünü gösterir. Bir normal kesin küme durumunda, yukarıdaki denklem kesin bir olayın olasılığının geleneksel tanımına indirgenir.

3. Örnek

Nüfus başına gelir $A = "$ \$a civarında " bulanık alt kümesi ile tanımlansın ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \exp\{-(x-a)^2\}, x \in \mathfrak{R}$$

olarak tanımlanır. Nüfus başına gelirin olasılık dağılımının aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonu ile gösterilen normal dağılım olduğunu varsayalım:

$$P(x) = \frac{\exp\{-1/2[(x-m)\sigma]^2\}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

burada m ve σ , sırasıyla ortalama değer ve standart sapmayı gösterir ve $\pi=0.341416....$ dir. O zaman bulanık A olayının olasılığı:

$$P(A) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(x-a)^2\} \exp\{-1/2[(x-m)/\sigma]^2\} dx}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

dir. Burada $P(A)$, üyelik fonksiyonunun beklenileni olarak tanımlanır.

Kesikli bir durum için, X , $P(x_i)$ olasılıkları ile $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olaylarının bir kümesi olsun. Burada $P(x_i) \in [0,1]$ ve $\sum_i P(x_i) = 1$ dir. Bulanık bir A olayı üyelik fonksiyonu $\mu_A(x_i)$ olan X de bulanık bir alt kümedir. O zaman, bulanık A olayının olasılığı:

$$P(A) = \sum_i \mu_A(x_i) P(x_i) \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç olarak, $P(A)$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

- a) $0 \leq P(A) \leq 1$
- b) $P(\emptyset) = 0$ ve $P(\Omega) = 1$
- c) Eğer $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ dir.
- d) $P(A^c) = 1 - P(A)$
- e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- f) Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir.

2.2.1.12 Koşullu bulanık kümeler

$Y = \{y\}$ de bulanık bir B kümesi eğer üyelik fonksiyonu bir parametre olarak x e bağlı ise, x de şart koşulur. Bu bağımlılık $\mu_B(y|x)$ ile ifade edilir. Bir X uzayı üzerinde x parametresinin aralıklar olduğunu varsayalım; öyle ki, X deki her bir x , Y deki bulanık bir $B(x)$ kümesine karşılık gelir. Böylece, X den Y deki bulanık kümeler uzayına, $\mu_B(y|x)$ ile gösterilen bir tasviri elde ederiz. Bu tasvir boyunca, X de verilen bulanık bir A kümesi aşağıdaki ile tanımlı olan Y deki bulanık bir B kümesine indirgenir:

$$\begin{aligned}\mu_B(y) &= \sup_x \min(\mu_A(x), \mu_B(y|x)) \\ &= \vee_x (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y|x))\end{aligned}\quad (2.16)$$

Burada, $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$, A ve B nin üyelik fonksiyonlarıdır. Bu denklem, bir koşullu dağılımına benzer bir rol oynayan $\mu_B(y|x)$ ile, iki rastgele değişkenin ortak dağılımlarının marjinal olasılık dağılımına benzerdir, fakat denk değildir.

2.2.2 Temel işlemler

Bu alt bölümde bulanık matematik programlamada kullanılan bazı temel kuramsal küme işlemlerini özetleyeceğiz. Bu işlemler, Bellman ve Zadeh'in tanımlarına dayanmaktadır.

2.2.2.1 Kapsama

A ve B, X in iki bulanık alt kümesi olsun. O zaman A, ancak ve ancak:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X \text{ için} \quad (2.17)$$

ise; B, A yı kapsar ve $A \subset B$ ile gösterilir. Örneğin; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = 0.1/x_1 + 0.5/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$ ve $B = 0.1/x_1 + 0.6/x_2 + 0.3/x_3 + 1/x_4$ olduğunu varsayalım. Denklem (2.17.) ye göre; $0.1 \leq 0.1, 0.5 \leq 0.6, 0 \leq 0.3$ ve $1 \leq 1$ den dolayı A, B tarafından kapsanır (veya $A \subset B$).

2.2.2.2 Eşitlik

A ve B, ancak ve ancak:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X \text{ için} \quad (2.18)$$

ise, eşit olduğu söylenir. Bu $A=B$ ile gösterilir. Örneğin; $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = 0.1/x_1 + 0.5/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$ ve $B = 0.1/x_1 + 0.5/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4$ olduğunu varsayalım. Denklem (2.18.)'e göre; $0.1=0.1, 0.5=0.5, 0=0$ ve $1=1$ den dolayı A, B ye eşittir (veya $A=B$).

2.2.2.3 Tümlen

A ve B ancak ve ancak:

$$\mu_A(x) = 1 - \mu_B(x), \forall x \in X \text{ için} \quad (2.19)$$

ise, birbirinin tümlenidirler. Bu $B=A^C$ ve $A=B^C$ ile gösterilir. Burada A^C ve B^C sırasıyla A ve B nin tümlenileridir. Örneğin; eğer $B = 0.1/x_1 + 0.6/x_2 + 0.3/x_3$ ise o zaman $A = 0.9/x_1 + 0.4/x_2 + 0.7/x_3 = B^C$ dir.

2.2.2.4 Kesişim

A ve B nin kesişimi her iki bulanık A ve B alt kümesinide içiren en geniş bulanık alt kümesi olan $A \cap B$ ile gösterilebilir. Min operatörü (toplayıcı), mantıksal “ ve ” bağlacının gösterimi olarak kullanıldığında, karşılık gelen üyelik fonksiyonu o zaman

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B} &= \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X \text{ için} \\ &= \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)\end{aligned}\quad (2.20)$$

ile gösterilir. Burada $\wedge$, “ ve ” bağlacıdır.

4. Örnek

$X = \{\text{Hasan, Kemal, Ali, Cem}\}$ gözönüne alınsın. A, “ yakışıklı öğrencilerin ” alt kümesi ve B, “ zeki öğrencilerin ” alt kümesi olduğunu varsayalım. Aşağıdakiler de verilmiş olsun:

$$A = 0.3/\text{Hasan} + 0.4/\text{Kemal} + 0.7/\text{Ali} + 0.8/\text{Cem}$$

$$B = 0.7/\text{Hasan} + 0.4/\text{Kemal} + 0.1/\text{Ali} + 0.3/\text{Cem}$$

O zaman A ve B nin kesişimi (eğer min operatörü kabul ediliyorsa), $A \cap B = 0.3/\text{Hasan} + 0.4/\text{Kemal} + 0.1/\text{Ali} + 0.3/\text{Cem}$ olan “ yakışıklı ve zeki öğrencilerin ” alt kümesidir. Ayrıca $\wedge$, kuvvetli bir “ ve ” olarak gözönüne alınmıştır.

2.2.2.5 Birleşim

A ve B nin birleşimi ($A \cup B$), kesişimin notasyonuna dualdır. Böylece, A ve B nin birleşimi A ve B yi kapsayan en küçük bulanık küme olarak tanımlanır. $A \cup B$ nin üyelik fonksiyonu:

$$\begin{aligned}\mu_{A \cup B}(x) &= \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in X \text{ için} \\ &= \mu_A(x) \vee \mu_B(x)\end{aligned}\quad (2.21)$$

ile verilir. Burada, $\vee$ kuvvetli bir “ veya ” dır. 4. Örnek için, $A \cup B = 0.7/\text{Hasan} + 0.4/\text{Kemal} + 0.7/\text{Ali} + 0.8/\text{Cem}$ olan “ yakışıklı veya zeki öğrencilerin ” bulanık alt kümesidir (bak tablo 2.1’e de), Ayrıca, $\vee$ bir kuvvetli “ veya ” olarak gözönüne alınır.

2.2.2.6 Cebirsel çarpım

A ve B nin AB cebirsel çarpımı aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile gösterilir:

$$\mu_{AB}(x) = \mu_A(x) \mu_B(x), \forall x \in X \text{ için} \quad (2.22)$$

Bu cebirsel çarpım zayıf bir “ ve ” ile gözönüne alınır. 4. Örnek için, $AB=0.21/\text{Hasan}+0.16/\text{Kemal}+0.07/\text{Ali}+0.24/\text{Cem}$, “ yakışıklı ve zeki öğrencilerin ” bulanık alt kümesidir (bak tablo 2.1 e de).

2.2.2.7 Cebirsel toplam

A ve B nin $A \oplus B$ cebirsel toplamı aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile gösterilir:

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x) \quad (2.23)$$

Cebirsel toplam bir zayıf “ veya ” ile gözönüne alınır. 4. Örnek için, $A \oplus B=0.79/\text{Hasan}+0.64/\text{Kemal}+0.73/\text{Ali}+0.73/\text{Cem}$, “ yakışıklı veya zeki öğrencilerin ” bulanık alt kümesidir (bak tablo 2.1).

2.2.2.8 Fark

A ve B nin, A-B farkı şu şekilde gösterilir:

$$\mu_{A \cap B^c}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{B^c}(x)) \quad (2.24)$$

Burada $B^c, \mu_{B^c}(x) = 1 - \mu_B(x)$ ile B nin tümleyenidir. Örnek 4 için aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi A-B yi elde ederiz:

x	Hasan	Kemal	Ali	Cem
$\mu_A(x)$	0.3	0.4	0.7	0.8
$\mu_B(x)$	0.7	0.4	0.1	0.3
$\mu_{B^c}(x)$	0.3	0.6	0.9	0.7
$\mu_{A \cap B^c}(x)$	0.3	0.4	0.7	0.7

Tablo 2.1 4.örneğin çözümleri

x	Hasan	Kemal	Ali	Cem
$\mu_A(x)$	0.3	0.4	0.7	0.8
$\mu_B(x)$	0.7	0.4	0.1	0.3
$\mu_{A \cap B}(x)$	0.3	0.4	0.1	0.3
$\mu_{A \cup B}(x)$	0.7	0.4	0.7	0.8
$\mu_{AB}(x)$	0.21	0.16	0.07	0.24
$\mu_{A \oplus B}(x)$	0.79	0.64	0.73	0.86

2.3 Üyelik Fonksiyonları

Klâsik (kesin) matematik karakterde ikili iken bulanık küme teorisi algılamaların, öznelliklerin, tutumların, hedeflerin ve kavramların müphemliği ile insan faktörünü içeren durumları dikkate alır. Bulanık küme teorisi, klâsik küme teorisinden daha kuvvetli ve esnektir.

Bulanık küme teorisinin iki temel özelliği vardır (Zimmermann):

- (I) Bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları ve operatörler bulanık küme teorisinde çok önemli bir röl oynar.
- (II) Bulanık küme teorisi özellikle çok genel, esnek, yapısal teoridir. Eğer gerçek bir probleme uygulanıyorsa, dikkatle uyarlanabilmeli ve uyarlanmalıdır. Ne üyelik kavramı ne de operatörler bir tek anlamsal yoruma sahip değildir. Şartlar ve çevreye bağlı anlamsal yorum, farklı matematiksel tanımlara ve uygun operatörlere götürebilir.

Böylece üyelik fonksiyonları ve operatörler gerçekten, bulanık küme teorisinin temel taşlarıdır.

2.3.1 Fonksiyonel formların incelenmesi

Dombi'ye dayanan (değişiklikler ile), aşağıdaki dört sınıf içinde mevcut olan tüm üyelik fonksiyonlarını sınıflandırırız:

I. Keşifle belirlemeye dayanan üyelik fonksiyonları

a) Zadeh'in tek tip fonksiyonları:

$$\mu_{genç}(x) = \begin{cases} 1/\{1+[(x-25)/5]^2\}, x > 25 \\ 1, x \leq 25 \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\mu_{yaşlı}(x) = \begin{cases} 1/\{1+[(x-50)/5]^2\}, x \geq 50 \\ 0, x < 50 \end{cases} \quad (2.26)$$

b) Dimitru ve Luban'ın kuvvet fonksiyonları:

$$\mu(x) = x^2 / a^2 + 1, x \in [0, a] \quad (2.27)$$

$$\mu(x) = -x^2 / a^2 - 2x / a + 1, x \in [0, a] \quad (2.28)$$

c) Svarowski'nin sinüs fonksiyonu:

$$\mu(x) = 1/2 + (1/2)[\sin\{\pi/(b-a)[x - (a+b)/2]\}], x \in [a, b] \quad (2.29)$$

II. Özel problemlerle ilişkili olan güvenirliliğe dayanan üyelik fonksiyonları

a) Zimmermann'ın lineer fonksiyonu:

$$\mu(x) = 1 - x/a, x \in [0, a] \quad (2.30)$$

b) Tanaka, Uejima ve Asai'nin simetrik üçgensel fonksiyonu:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - |b - x| / a, b - a \leq x \leq b + a \\ 0, \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad (2.31)$$

c) Hannan'ın parçalı lineer fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \sum_j \alpha_j |x - a_j| + \beta x + r, j = 1, 2, \dots, N \\ \alpha_j &= (t_{j+1} - t_j) / 2 \\ \beta_j &= (t_{N+1} + t_1) / 2 \\ r &= (s_{N+1} + s_1) / 2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Burada her bir $\forall i$, i parçası için $a_{i-1} \leq x \leq a_i$, $\mu(x) = t_i x + s_i$ dir. Burada a_{i-1} de başlamış ve a_i de bitmiş eğri kesiti için t_i , eğim ve s_i , y-ekseninin kestiği noktadır.

d) Leberling'in hiperbolik fonksiyonu:

$$\mu(x) = 1/2 + (1/2)\tanh(a(x-b)), -\infty \leq x \leq \infty \quad (2.33)$$

şeklindedir. Burada a bir parametredir.

e) Sakawa ve Yumine'nin üstel ve hiperbolik invers fonksiyonları, sırasıyla:

$$\mu(x) = c(1 - e^{(b-x)/(b-a)}), x \in [a, b] \quad (2.34)$$

$$\mu(x) = 1/2 + c \tanh^{-1}(d(x-b)) \quad (2.35)$$

Burada c ve d parametredir.

f) Dimitru ve Luban'ın fonksiyonu:

$$\mu(x)=1/(1+x/a) \quad (2.36)$$

Burada a bir parametredir.

g) Dubois ve Prade'in L-R bulanık sayısı:

$$\begin{aligned} L((a-x)/\alpha), x < a \\ R((x-b)/\beta), x > b \\ 1, a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (2.37)$$

Burada L(.) ve R(.) tercih fonksiyonudur.

III. Daha fazla teorik talebe dayanan üyelik fonksiyonları

a) Civanlar ve Trussel'in fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \mu(x) = \begin{cases} ap(x), & ap(x) \leq 1 \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Burada, $a \in [0,1]$ bir parametre ve $P(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) Svarovski'nin fonksiyonu:

$$\begin{aligned} 0, x < a \\ K(x-a)^2, a \leq x \leq b \\ K_2 x^2 + K_1 x + K_0, b \leq x \leq c \\ 1, x > c \end{aligned} \quad (2.39)$$

Burada K, K_0, K_1 ve K_2 parametredir.

IV. İnsan kavramları için bir model olarak üyelik fonksiyonları

a) Hersh ve Caramazza'nın fonksiyonu (öyle kısa, çok kısa, kışanın kısı, v.s. gibi doğal dil terimlerinin bir kümesinin yorumu hakkında sonuca varıran şartlar ve çevrenin doğasını belirlemek için deneysel olarak şekillendirilmiştir):

$$\mu(x)=1/2+d(r/10) \quad (2.40)$$

Burada, “ evet ” cevapları için $d(x)=1$ ve “ hayır ” cevapları için $d(x)=-1$ ve r, bir güven değeridir.

b) Zimmermann ve Zysno'nun fonksiyonu:

$$\mu(x) = 1/2 + (1/d)[1/(1 + e^{-a(x-b)}) - c] \quad (2.41)$$

c) Dombi'nin fonksiyonu:

$$\mu(x) = (1-s)x^2 / [(1-s)x^2 + s(1-x)^2] \quad (2.42)$$

Burada s (eğimin karakteristik değeri), $y=\mu(x)$ ve $y=x$ in kesişim değeridir.

2.4 Bulanık Karar ve Operatörler

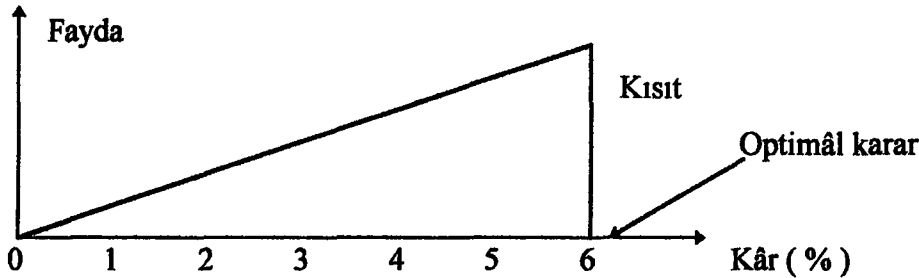
2.4.1 Bulanık karar

Karar terimi, bir hakim, bir işadamı, bir general, bir psikolog ve bir istatistikçi için farklı anlamlara sahiptir. Diğer bir durumda da, matematik modelde işleyiş hareketi veya bir işlemenin özel bir çeşidi de olabilir. “ Karar ”ın bazı notasyonları bir genel karaktere sahip iken, gerçekte diğerleri karar vermeyi tarife çalışırlar.

Klâsik (düzgülü, istatistiksel) karar teorisinde bir karar, karar seçeneklerinin (karar uzayı) bir kümesi; doğal durumların (durum uzayı) bir kümesi; bir karar ve bir sonuç durum çiftinin herbiriyle tayin edilen bir bağıntı ve son olarak, onların istediğine uygun olarak sonuçları düzenleyen fayda fonksiyonu ile tanımlanabilir. Kesinlik altında karar vermede, karar verici beklenen durumları bilir ve verilmiş üstün gelen doğal durum, en yüksek fayda ile karar seçeneğini seçer. Risk altında karar vermede, durumun ne olacağını bilemez, sadece durumların bir olasılık fonksiyonunu bilir. O zaman, karar verme çok zor olur. Kesinlik altında karar vermeyle dikkatimizi kısıtlayabiliriz. Aşağıdaki örnekte karar verme modeli non-simetriktir: karar uzayı ya sayma ile ya da kısıtların bir sayısı ile tanımlanır. Fayda fonksiyonu karar seçeneklerine dair sonuçları birebir bir bağıntısı yolu ile düzenler. Bundan dolayı, sıranın sağlanmasıyla, sadece bir fayda fonksiyonuna sahip olabiliriz, fakat karar uzayını tanımlayan bir kısıta sahip olabiliriz.

5. Örnek

Yönetim kurulunun optimâl kârı hesaplamak istediğini varsayalım. Amaç fonksiyonu (fayda fonksiyonu) kârı maksimize edendir. Karar uzayında tanımlanan kısıt kârın sıfır ve %6 arasında olmasıdır. Bundan dolayı optimâl kâr “ 0 ve %6 arasında ” ve “ maksimum ” dur (kısıt karar uzayında bir sıraya konulmamıştır !). Optimâl kâr açıkça %6 olacaktır. Bir lineer fayda fonksiyonunun tayini ile şekil 2.6 bu bağıntıyı gösterir.



Şekil 2.6 kesinlik altında klâsik bir kâr

1970’de, Bellmann ve Zadeh bir kararın bu klâsik modelini gözönüne aldılar ve “ bulanık ” karar teorisiyle uğraşanların pek çoğu için bir hareket olarak işe yarayan, bulanık bir alanda karar verme için bir model önerdiler. Kısıt(lar)ın bulanık olduğu, iyi bir amaç fonksiyonunda kesinlik altında karar vermenin bir durumunu gözönüne aldılar. Çalışma şu şekildedir: bulanık amaç fonksiyonu, üyelik fonksiyonu ile ve böylelikle kısıtları da üyelik fonksiyonları ile tanımlanmıştır. Kısıtlar kadar iyi olacak şekilde amaç fonksiyonunu sağlamak (optimize etmek) istediğimizden, bulanık bir alanda bir karar aynı anda amaç fonksiyonu (fonksiyonları) ve kısıtları sağlayan çalışmaların seçimi olarak bulanık olmayan alanların karşılaştırılmasıyla tanımlanır. Tanıma uygun olarak ve kısıtların “ birbirini etkilemeyen ” olduğunun varsayımıyla, mantıksal “ ve ” kesişime karşılık gelir. Bulanık bir çevrede “ karar ”, bu nedenle bulanık kısıtların ve bulanık amaç(lar)ın kesişimi olarak düşünülür. Bulanık bir alanda kısıtlar ve amaç fonksiyonları arasındaki bağıntı, bu yüzden tam simetriktir; bu ilk ve sonuncu arasındaki bir farkın en uzun olmadığı demektir.

Bu kavram aşağıdaki örnekle gösterilmiştir [Bellmann ve Zadeh, 1970]:

ÖRNEK 6

“ Esasında x , 10’den büyük olacak “ amaç fonksiyonu aşağıdaki üyelik fonksiyonu ile gösteriliyor:

$$\mu_o(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, & x > 10 \end{cases}$$

“ x , 11’in civarında olacak “ kısıtı şu şekilde gösterilir:

$$\mu_c(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

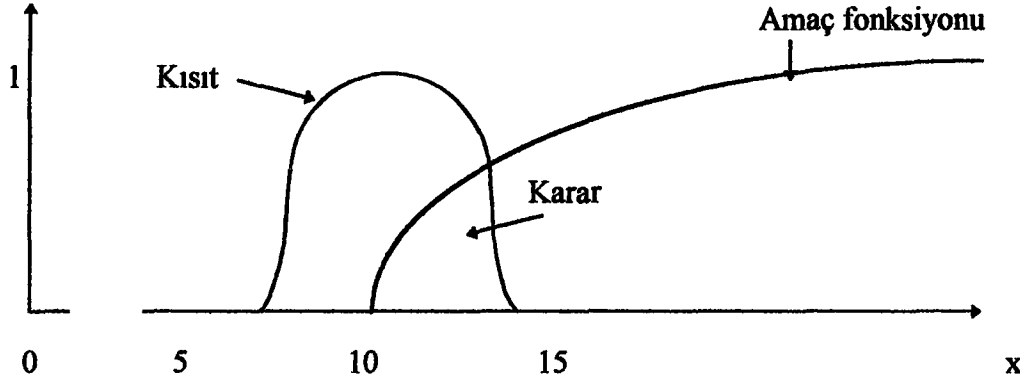
O zaman kararın $\mu_D(x)$ üyelik fonksiyonu:

$$\mu_D(x) = \mu_o(x) \wedge \mu_c(x) \quad (2.43)$$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} \min\{(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}\}, & x > 10 \\ 0, & x \leq 10 \end{cases}$$

$$\mu_D(x) = \begin{cases} (1 + (x - 11)^4)^{-1}, & x > 11.75 \\ 0, & 10 < x \leq 11.75 \vee x \leq 10 \end{cases}$$

Bağıntı, şekil 2.7 de gösterilmiştir. Şimdi uygun olarak örnek 5’i değiştirelim.



Şekil 2.7 bulanık bir karar

7. ÖRNEK

Yönetim kurulu hissedarlara ödenecek “ optimâl ” kârı bulmaya çalışıyor. Mali nedenler için cazip ve ciro edip, satış ücretlerinin nedenleri için gösterişsiz olmalıdır.

Örnek için “ cazip kâr ” amaç fonksiyonunun bulanık kümesi:

$$\mu_o(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 5.8 \\ \frac{1}{2100}[-29x^3 - 366x^2 - 877x + 540], & 1 < x < 5.8 \\ 0, & x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

“ Gösterişsiz kâr ” bulanık kümesi (kısıt) aşağıdaki ile gösterilebilir:

$$\mu_c(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1.2 \\ \frac{1}{2100}[-29x^3 - 243x^2 + 16x + 2388], & 1.2 \leq x < 6 \\ 0, & x \geq 6 \end{cases}$$

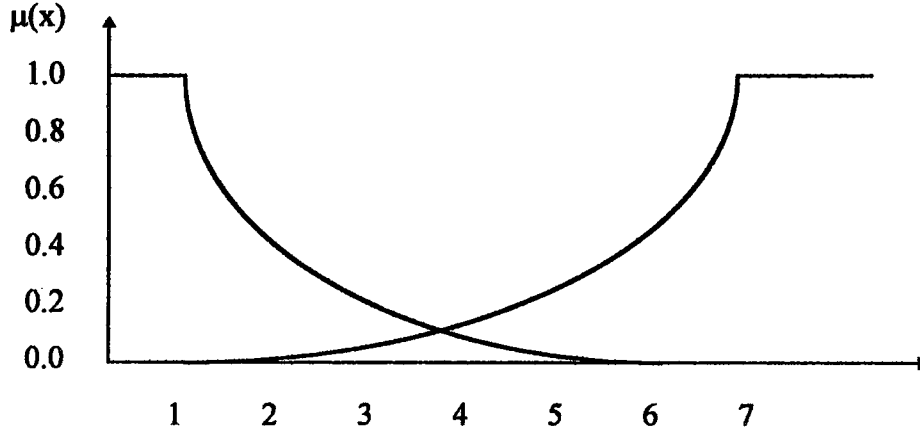
O zaman bulanık “ karar ” kümesi;

$$\mu_D(x) = \min\{\mu_o(x), \mu_c(x)\}$$

üyelik fonksiyonu ile gösterilir. Eğer karar veren “ kesin ” bir karar önerisine sahip olmak istiyorsa, bulanık “ karar ” kümesinde en yüksek üyelik değeri ile önerilen kâr uygun görülür. Bu aşağıdaki ifade ile tanımlı “ maksimize olan karar ” olarak adlandırılır:

$$x_{maks} = \arg(\max_x \min\{\mu_o(x), \mu_c(x)\})$$

Şekil 2.8 bu durumu kabaca gösterir.



Şekil 2.8 maksimize olan karar olarak optimâl kâr

2.4.2 Tanım [Bellmann ve Zadeh, 1970]

X seçeneklerinin bir uzayında bulanık bir G hedefi ve bulanık bir C kısıtını verdiğimiz varsayalım. O zaman G ve C nin kesişiminde elde edilen bir bulanık küme olan bir D karar formunu G ve C meydana getirir. Sembollerle $D=G \cap C$ ve karşılık olarak;

$$\mu_D = \min\{\mu_G, \mu_C\}$$

dir. Daha fazla genelleştirerek, $G_1, \dots, G_n$; n hedefe ve $C_1, \dots, C_m$; m kısıta sahip olduğumuzu varsayalım. O zaman ; sonuç kararı, verilen $G_1, \dots, G_n$ hedefleri ve $C_1, \dots, C_m$ kısıtlarının kesişimidir. Bu

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$$

dir ve karşılık olarak

$$\begin{aligned} \mu_D &= \min\{\mu_{G_1}, \mu_{G_2}, \dots, \mu_{G_n}, \mu_{C_1}, \mu_{C_2}, \dots, \mu_{C_m}\} \\ &= \min\{\mu_{G_i}, \mu_{C_j}\} = \min\{\mu_i\} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Tanım şunları ifade eder:

- 1- Modelde hedefler ve kısıtlar ile bağlantılı “ ve ”, “ mantıksal ve ”ye karşılık gelmektedir.
- 2- Mantıksal “ ve ”, kuramsal kesişim kümesine karşılık gelmektedir.
- 3- Bulanık kümelerin kesişimi min operatörü ile olasılık anlamında tanımlanabilir.

Bellmann ve Zadeh, 1970'deki yazılarında kesişimin min anlamının içinde bulunduğu şartlara bağlı olarak değişeceğini gösterdiler. Kısaca, karar kavramının genel bir tanımı: karar = hedeflerin ve kısıtların kavşağı olarak konumlanabilir [Bellman ve Zadeh, 1970].

ÖRNEK 8

Bir üniversite öğretmeni öğretmen sınav kâğıtlarına nasıl not vereceğine karar vermelidir. Sınavda bir lineer programlama problemi sorulduğunu ve öğrencinin soruyu çözümünde grafik veya simpleks yöntemi kullanmada serbest olduğunu varsayalım. Öğrenci her ikisini de yapmış olsun. Öğrencinin başarısı: (G), “ uygun grafik çözüm ” ve (S), “ uygun simpleks çözüm ” bulanık kümelerinde üyeliklerin meydana getirilmiş derecesi olarak ifade edilir.

$$\mu_G = 0.9 \text{ ve } \mu_S = 0.7$$

aldığını varsayalım. Eğer öğretmen “ lineer programlama problemlerinin uygun çözümleri ” bulanık kümesinin üyelik derecelerinin arasındaki ilişkiye bakarak not veriyorsa;

$$\mu_{LP} = \max\{\mu_G, \mu_S\} = \max\{0.9, 0.7\} = 0.9$$

ile hesaplanabilen μ_{LP} notu en akla uygundur.

Bulanık kümelerin kesişimi veya birleşimi olarak kararların iki tanımı esasen şudur: Eğer ya minimum ya da çarpım bir operatör olarak kullanılıyorsa, soruda bulanık kümelerin üyelik dereceleri arasındaki takası ifade eder. Onların herbiri tüm kesişen bulanık kümelerin üyeliklerinin en düşük derecesi üstünde veya aşağısında olan, sonuçlanan bulanık küme (karar) nin üyeliğinin bir derecesini verir (bak örnek 6).

Maks operatörü kullanımıyla, bulanık kümelerin birleşimi olarak bir kararın anlamı, amaçları ve kısıtları temsil eden bulanık kümelerin birbiriyle meydana getirmiş olduğu üyeliğin maksimum derecesini verir. Bu, üyeliğin maksimum derecesi ile üyeliğin düşük derecelerinin tam bir takasına varır (bak örnek 7).

İdari kararlara dikkatle bakılmasıyla, kararların faaliyet alanını sınırlayan kurallar vasıtasıyla; ya dereceleri ya da hedef başarısının farklı dereceleri arasında takas olmaması ile, güçlükle bir kararın varolduğu bulunabilir. Bununla birlikte; takas, nadiren asla, maks operatörünün kullanımının varsayılabilirliği gibi, “ tam ” gözükmebilir. Deneyisel araştırmalarda bazı klâsik operatörlerin (min, çarpım, maks) başarısızlığından sorumlu olan insana ait kümede telafi etmeye yarayan eğilimler olduğu ispat edilebilir.

2.4.3 Tanım

Karar uzayını tanımlayan kısıtların üyelik fonksiyonları $\mu_{C_i}(x), i = 1, \dots, m, x \in X$ ve amaç (fayda) fonksiyonları veya hedeflerin üyelik fonksiyonları $\mu_{G_j}(x), j = 1, \dots, n, x \in X$ olsun. O zaman bir karar üyelik fonksiyonları :

$$\mu_D(x) = \otimes_i \mu_{C_i} * \otimes_j \mu_{G_j}(x); i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $*$, $\otimes_i, \otimes_j$, uygun mümkün olan operatörleri gösterir.

2.4.4 Yedeği olmayan operatörler

Sadece min operatörü yedeği olmayan operatördür. Aşağıda bunu kısaca göstereceğiz.

2.4.4.1 Min operatörü

A ve B bulanık kümeleri için min operatörü, $\{x, \mu_{A \cap B}\}$ kümesini tanımlar, burada $\mu_{A \cap B}$:

$$\mu_{A \cap B} = \min[\mu_A, \mu_B], \forall x \in X$$

veya kısaca,

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \wedge \mu_B$$

olarak tanımlanır.

2.4.5 Yedekli operatörler

Bunlar tablo halinde aşağıda verilmiştir:

YEDEKLİ MİN OPERATÖRLERİ:

1. Cebirsel Çarpım: $\mu_D(x) = \mu_G(x)\mu_C(x)$
2. Sınırlı Çarpım: $\mu_D(x) = \max(0, \mu_G(x) + \mu_C(x) - 1)$
3. Hamacher'in Min Operatörü (Γ operatörü):

$\Gamma \in [0,1]$ için,

$$\mu_D(x) = \frac{\mu_G(x)\mu_C(x)}{[\Gamma + (1 - \Gamma)(\mu_G(x) + \mu_C(x) - \mu_G(x)\mu_C(x))]}$$

4. Yager'in Min Operatörü: $q \geq 0$ için,

$$\mu_D(x) = 1 - \min\{1, [(1 - \mu_G(x))^q + (1 - \mu_C(x))^q]^{1/q}\}$$

5. Dubois ve Prade 'in Min Operatörü: $r \in [0,1]$ için,

$$\mu_D(x) = \frac{\mu_G(x)\mu_C(x)}{[\max(\mu_G(x), \mu_C(x), r)]}$$

6. Werner'in " Bulanık ve " Operatörü: $r \in [0,1]$ için,

$$\mu_D(x) = r \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) + (1-r)(\mu_G(x) + \mu_C(x))/2$$

dır.

YEDEKLİ MAKS OPERATÖRLERİ

1. Cebirsel Toplam: $\mu_D(x) = \mu_G(x) + \mu_C(x) - \mu_G(x)\mu_C(x)$

2. Sınırlı Toplam: $\mu_D(x) = \min[1, \mu_G(x) + \mu_C(x)]$

3. Hamacher'in Maks operatörü: $\Gamma \in [0,1]$ için,

$$\mu_D(x) = \frac{[(1-\Gamma)\mu_G(x)\mu_C(x) + \Gamma(\mu_G(x) + \mu_C(x))]}{[\Gamma + \mu_G(x)\mu_C(x)]}$$

4. Yager'in Maks Operatörü: $q \geq 1$ için

$$\mu_D(x) = \min\{1, [(\mu_G(x))^q + (\mu_C(x))^q]^{1/q}\}$$

5. Dubois ve Prade'in Maks Operatörü: $r \in [0,1]$ için

$$\mu_D(x) = \frac{\{\mu_G(x) + \mu_C(x) - \mu_G(x)\mu_C(x) - \min[1-r, \mu_G(x), \mu_C(x)]\}}{\{\max[r, 1-\mu_G(x), 1-\mu_C(x)]\}}$$

6. Werner'in "Bulanık veya " Operatörü: $r \in [0,1]$ için

$$\mu_D(x) = r \max((\mu_G(x), \mu_C(x)) + (1-r)(\mu_G(x) + \mu_C(x))/2$$

dır.

2.4.6 Operatörler için sayısal örnekler

A ve B gibi iki küme aşağıdaki gibi verilsin:

$$A = \{(4,0), (5,0.2), (6,0.4), (7,0.6), (8,0.8), (9,1.0), (10,0)\}$$

$$B = \{(3,0), (4,0.5), (5,0.7), (6,1.0), (7,0.7), (8,0.5), (9,0)\}$$

$\Gamma=q=r=0.5$ alınarak, çeşitli min operatörlerinin kullanımıyla, A ve B nin kesişiminin sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir:

X	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0
$\mu_B(x)$	0	0.5	0.7	1.0	0.7	0.5	0	0
Min Operatörü	0	0	0.2	0.4	0.6	0.5	0	0

YEDEKLİ MİN OPERATÖRLERİ:

Cebirsel Çarpım	0	0	0.14	0.4	0.42	0.4	0	0
Sınırlı Çarpım	0	0	0	0.4	0.3	0.3	0	0
Γ -operatörü	0	0	0.16	0.4	0.45	0.42	0	0
Yager'in Min Operatörü	0	0	0	0.4	0	0	0	0
Dubois ve Prade'in Min Operatörü	0	0	0.2	0.4	0.6	0.5	0	0
Werner'in " Bulanık ve " si	0	0.13	0.33	0.55	0.63	0.58	0.25	0

Örneğin, $x=7$ de şunları elde ederiz:

Min Operatörü: $\mu_D(x=7) = \min[\mu_A(x=7), \mu_B(x=7)] = \min[0.6, 0.7] = 0.6$

Yedekli Min Operatörleri:

1. Cebirsel Çarpım: $\mu_D(7) = \mu_A(7)\mu_B(7) = (0.6)(0.7) = 0.42$
2. Sınırlı Çarpım: $\mu_D(7) = \max[0, \mu_A(7) + \mu_B(7) - 1] = \max(0, 0.3) = 0.3$
3. Γ -operatörü: $\mu_D(7) = \mu_A(7)\mu_B(7) / \{0.5 + 0.5[\mu_A(7) + \mu_B(7) - \mu_A(7)\mu_B(7)]\}$
 $= 0.42 / 0.94 = 0.45$
4. Yager'in Min Operatörü: $\mu_D(7) = 1 - \min\{1, [(1 - \mu_A(7))^{0.5} + (1 - \mu_B(7))^{0.5}]^{1/0.5}\}$
 $= 1 - \min(1, 1.39) = 0$
5. Dubois ve Prade'in Min Operatörü:
 $\mu_D(7) = \mu_A(7)\mu_B(7) / \{\max[\mu_A(7)\mu_B(7), 0.5]\} = 0.42 / \{\max[0.6, 0.7, 0.5]\} = 0.6$
6. Werner'in " Bulanık ve " si:
 $\mu_D(7) = 0.5 \min(0.6, 0.7) + 0.5(0.6 + 0.7) / 2 = 0.625$

$\Gamma=q=r=0.5$ alınarak, çeşitli maks operatörlerinin kullanımıyla, A ve B nin birleşiminin sonuçları aşağıda özetlenmiştir:

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	0
$\mu_B(x)$	0	0.5	0.7	1.0	0.7	0.5	0	0
maks operatörü	0	0.5	0.7	1.0	0.7	0.8	1.0	0

YEDEKLİ MAKS OPERATÖRLERİ

Cebirsel Toplam	0	0.5	0.76	1.0	0.88	0.9	1.0	0
Sınırlı Toplam	0	0.5	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	0
Hamacher'in Maks Operatörü	0	0.5	0.96	1.0	0.93	0.94	1.0	0
Yager'in Maks Operatörü	0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0
Dubois ve Prade'in Maks Operatörü	0	0.5	0.7	1.0	0.76	0.8	1.0	0
Werner'in "Bulanık veya "sı	0	0.38	0.58	0.85	0.68	0.73	0.75	0
Zimmermann ve Zysno'nun r-operatörü	0	0	0.33	0.63	0.61	0.6	0	0

Örneğin; $x=7$ de şunları elde ederiz:

Maks Operatörü: $\mu_D(x=7) = \mu_A(x=7) + \mu_B(x=7) = \max[0.6, 0.7] = 0.7$

Yedekli Maks Operatörleri:

1. Cebirsel Toplam:

$$\mu_D(7) = \mu_A(7) + \mu_B(7) - \mu_A(7)\mu_B(7) = 0.6 + 0.7 - (0.6)(0.7) = 0.88$$

2. Sınırlı Toplam:

$$\mu_D(7) = \min[1, \mu_A(7) + \mu_B(7)] = \min(1, 1.3) = 1.0$$

3. Hamacher'in Maks Operatörü:

$$\begin{aligned}\mu_D(7) &= \{(0.5\mu_A(7)\mu_B(7) + 0.5[\mu_A(7) + \mu_B(7)]) / [0.5 + \mu_A(7)\mu_B(7)]\} \\ &= 0.86 / 0.92 = 0.93\end{aligned}$$

4. Yager'in Maks Operatörü:

$$\mu_D(7) = \min\{1, [(\mu_A(7))^{0.5} + (\mu_B(7))^{0.5}]^{1/0.5}\} = \min(1, 2.60) = 1.0$$

5. Dubois ve Prade'in Maks Operatörü:

$$\begin{aligned}\mu_D(7) &= \frac{\{\mu_A(7) + \mu_B(7) - \mu_A(7)\mu_B(7) - \min[1 - 0.5, 0.6, 0.7]\}}{\{maks[0.5, 1\mu_A(7), 1 - \mu_B(7)]\}} \\ &= 0.38 / 0.5 = 0.76\end{aligned}$$

6. Werner'in " Bulanık veya "sı:

$$\mu_D(7) = 0.5maks(0.6, 0.7) + 0.5(0.6 + 0.7) / 2 = 0.675$$

$\mu_D(x) = \mu_{G \cap C}(x)^{1-r} \mu_{G \cup C}(x)^r$, Zimmermann ve Zysno'nun operatörü olarak, $r=0.5$, $\mu_{G \cap C}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$ ve $\mu_{G \cup C}(x) = \{1 - [1 - \mu_A(x)][1 - \mu_B(x)]\}$ olduğunu varsayalım. O zaman $x=7$ de, aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$\mu_D(7) = [\mu_A(7)\mu_B(7)]^{0.5} \{1 - [1 - \mu_A(7)][1 - \mu_B(7)]\}^{0.5} = (0.65)(0.94) = 0.61$$

2.5 Bulanık Aritmetik

Önceki bölümde, bulanık kümeleri uygulama ve kararların elde edilmesi için bazı büyük operatörleri gösterdik. Bununla birlikte, bu operatörler bütün durumları hesaplamak için yeterli değildir. Örneğin, her zaman toplama, çıkarma, çarpma ve bölmeden ibaret olan bulanık sayıları içeren bir denklemi çözemezler. Bulanık sayıları içeren denklemler, matematik programlama problemleri ve diğer bir çok alanda çok önemli unsurlardır. Böylece, bu bölümde bulanık sayıların toplama, çıkarma, çarpma ve bölme operatörlerini göstereceğiz.

2.5.1 Bulanık sayıların toplamı

A ve B bulanık iki sayı olsun. X ve Y nin toplamı, α -seviye kümesi ve maks-min konvolüsyonunun kullanımıyla sağlanır.

I. α -seviye keseni, güven aralıkları kavramının kullanılmasıyla, X ve Y nin α -seviye kümeleri $X_\alpha = [x_\alpha^L, x_\alpha^U]$ ve $Y_\alpha = [y_\alpha^L, y_\alpha^U]$ dur. Burada $x_\alpha^L, x_\alpha^U, y_\alpha^L$ ve $y_\alpha^U \in \mathfrak{R}$ dir. O zaman, bulanık X ve Y sayılarının toplamının Z sonucu α -seviye kümeleri ile tanımlanabilir. Bu, her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$Z_\alpha = X_\alpha (+) Y_\alpha = [x_\alpha^L + y_\alpha^L, x_\alpha^U + y_\alpha^U] \quad (2.46)$$

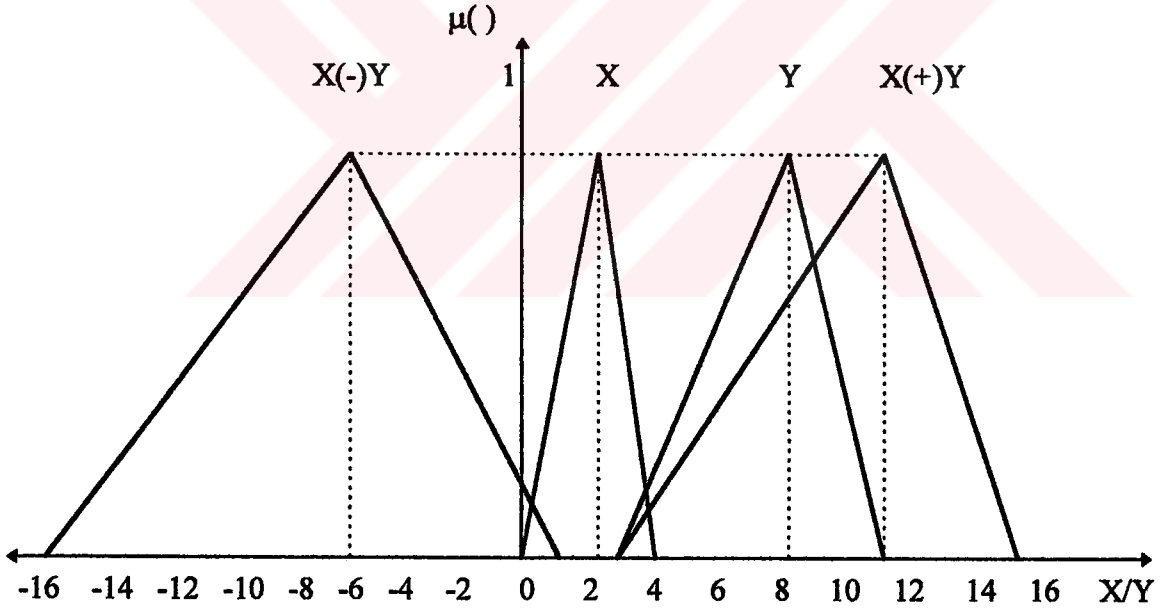
dir. Denklem (2.46) açıkça sonuçlanan bulanık Z kümesinin alt sınırının, bulanık X ve Y sayılarının alt sınırlarının toplamı ve sonuçlanan bulanık Z sayısının üst sınırı, bulanık X ve Y sayılarının üst sınırlarının toplamıdır.

9. Örnek

Bulanık X ve Y sayılarının üyelik fonksiyonları şu şekilde verilsin (bak şekil 2.9):

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \text{ veya } x > 4 \\ x/2, 0 < x \leq 2 \\ (4-x)/2, 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$\mu_Y(y) = \begin{cases} 0, y \leq 3 \text{ veya } y > 11 \\ (y-3)/5, 3 < y < 8 \\ (11-y)/3, 8 < y \leq 11 \end{cases}$$



Şekil 2.9. X(+)Y ve X(-)Y nin bulanık sayıları

Sonra, α -seviye kesenlerinin kullanımıyla, $\alpha \in [0,1]$ için $\mu_X(x) \geq \alpha$ ve $\mu_Y(y)$ yi elde edilir. Bu,

$$x/2 \geq \alpha \text{ ve } (4-x)/2 \geq \alpha \Rightarrow 2\alpha \leq x \leq 4-2\alpha$$

dır. Bundan dolayı, $X_\alpha = [x_\alpha^L, x_\alpha^U] = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ elde edilir. Benzer olarak, $Y_\alpha = [y_\alpha^L, y_\alpha^U] = [3 + 5\alpha, 11 - 3\alpha]$ elde edilir. O zaman

$$Z_\alpha = X_\alpha (+) Y_\alpha = [2\alpha + (3 + 5\alpha), (4 - 2\alpha) + (11 - 3\alpha)] = [7\alpha + 3, 15 - 5\alpha]$$

dır. Şimdi, $Z_\alpha = [z_\alpha^L, z_\alpha^U] = [7\alpha + 3, 15 - 5\alpha]$ olur ve $z_\alpha^L = 7\alpha + 3$ ve $z_\alpha^U = 15 - 5\alpha$ veya $(z_\alpha^L - 3)/7 = \alpha$ ve $(15 - z_\alpha^U)/5 = \alpha$ elde edilir. Burada, $\alpha \in [0, 1]$ dir. Sonuç olarak, bulanık Z sayısının üyelik fonksiyonu:

$$\mu_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 3 \text{ veya } z > 15 \\ (z - 3)/7, & 3 < z \leq 10 \\ (15 - z)/5, & 10 < z \leq 15 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

II. Maks-min konvülosyonu. Uzanım prensibinin kullanımıyla, bulanık X ve Y sayılarının toplamının Z sonucu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_Z(z) = \max_{z=x+y} \{ \min[\mu_X(x), \mu_Y(y)] \} \quad (2.47)$$

Burada x, y ve $z \in \mathfrak{R}$ dir.

10. Örnek

Bulanık X ve Y sayıları aşağıdaki gibi verilsin:

X	x	1	2	3	4	5	6	
	$\mu_X(x)$	0.1	0.5	1.0	0.7	0.1	0.0	
Y	y	1	2	3	4	5	6	7
	$\mu_Y(y)$	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0

Denklem (2.47.) nin kullanımıyla,

$$\begin{aligned} \mu_Z(z = 6) &= \max[\min(0.1, 0.8), \min(0.5, 1.0), \min(1.0, 0.7), \min(0.7, 0.1), \min(0.1, 0.0)] \\ &= \max[0.1, 0.5, 0.7, 0.1, 0.0] = 0.7 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3 = 4 + 2 = 5 + 1$ dir. Z nin diğer mümkün değerleri tablo 2.2. de özetlenmiştir. Tablo 2.2. den kolaylıkla ve sistematik olarak sonuçlanan bulanık Z sayısını elde ederiz. Örneğin, $\mu_Z(z = 6)$ nın değeri satır ve sütun değerlerine karşılık

gelenin minimumu olan köşegen olarak bloklanmış maksimumudur. Böylece aşağıdaki çözümü elde ederiz:

Z	z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	$\mu_z(z)$	0.0	0.1	0.1	0.5	0.7	1.0	0.8	0.7	0.5	0.5	0.1	0.0

Tablo 2.2. örnek 9 için X(+)Y nin sonuçları

X	Y	y	1	2	3	4	5	6	7
x	$\mu(x)$	$\mu(y)$	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0
1	0.1	(z=2)	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.5	(3)	0.0	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0
3	1.0	(4)	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0
4	0.7	(5)	0.0	0.1	0.7	0.7	0.7	0.5	0.0
5	0.1	(6)	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
6	0.0	(7)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
			(z=8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	

2.5.2 Bulanık sayıların farkı

Toplama işlemine benzerdir, bulanık sayıların farkıyla ilgili şu iki tanımlı vereceğiz:

- I. α -seviye kümesi. α -seviye kümesinin kullanımıyla, X ve Y bulanık sayıların çıkarmasından sonuçlanan bulanık Z sayısını tanımlayabiliriz: Her $\alpha \in [0,1]$ için,

$$Z_{\alpha} = X_{\alpha}(-)Y_{\alpha} = [x_{\alpha}^L - y_{\alpha}^U, x_{\alpha}^U - y_{\alpha}^L] \quad (2.48)$$

Hesaplama tamamen toplama işlemine benzerdir.

Örnek

9. Örneği gözönüne alalım. Açıkça, $Z_{\alpha} = [5\alpha - 11, 1 - 7\alpha]$ elde ederiz. O zaman bulanık Z sayısının üyelik fonksiyonu;

$$\mu_z(z) = \begin{cases} 0, z \leq -11 \text{ veya } z > 1 \\ (z+11)/5, -11 < z \leq -6 \\ (1-z)/7, -6 < z \leq 1 \end{cases}$$

dir (bak şekil 2.9).

II. Maks-min konvolüsyonu. Uzanım prensibini kullanarak, aşağıdaki gibi çıkarma işlemini tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \mu_z(z) &= \max_{z=x-y} \{[\mu_x(x), \mu_y(y)]\} \\ &= \max_{z=x+y} \{ \min[\mu_x(x), \mu_y(-y)] \} \\ &= \max_{z=x+y} \{ \min[\mu_x(x), \mu_y(y)] \} \end{aligned}$$

Örnek

10. Örneği gözönüne alalım. Şimdi $Z=X(-)Y$ olsun. Hesaplama, toplama işlemine benzer olacaktır. Böylece tablo 2.3'ü direkt olarak hesaplayabiliriz.

Tablo 2.3. örnek 10 için $X(-)Y$ nin sonuçları

			(z=0)	(-1)	(-2)	(-3)	(-4)	(-5)	(-6)
X	Y	y	1	2	3	4	5	6	7
x	$\mu(x)$	$\mu(y)$	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0
1	0.1		0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.5	(z=1)	0.0	0.1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.0
3	1.0	(2)	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0
4	0.7	(3)	0.0	0.1	0.7	0.7	0.7	0.5	0.0
5	0.1	(4)	0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
6	0.0	(5)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Yukarıdaki tablodan, kolaylıkla ve sistematik olarak sonuçlanan Z bulanık sayısını elde edebiliriz. Örneğin, $\mu_z(z=0) = 0.7$ nin değeri satır ve sütun değerine karşılık gelenin minimum değeri olan köşegen olarak bloke edilmiş sayıların maksimumudur. Böylece aşağıdaki çözümü elde ederiz:

Z	z	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
	$\mu_Z(z)$	0.1	0.1	0.5	0.8	0.7	1.0	0.7	0.7	0.1	0.1	0.0	0.0

2.5.3 Bulanık sayıların çarpımı

Potansiyel işaret sonucu için, ilk olarak $x < 0$ için $\mu_X(x) = 0$ ve $y < 0$ için $\mu_Y(y) = 0$ olduğunu varsayalım. Sonra öncelikle gösterildiği gibi bulanık sayıların çarpımının iki tanımını verelim:

I. α -seviye kümesi. α -seviye keseninin kullanımıyla, bulanık X ve Y sayılarının çarpımlarının sonucu olan bulanık Z sayısı, her $\alpha \in [0,1]$ için tanımlayabiliriz:

$$Z_\alpha = X_\alpha(.)Y_\alpha = [x_\alpha^L y_\alpha^L, x_\alpha^U y_\alpha^U] \quad (2.49)$$

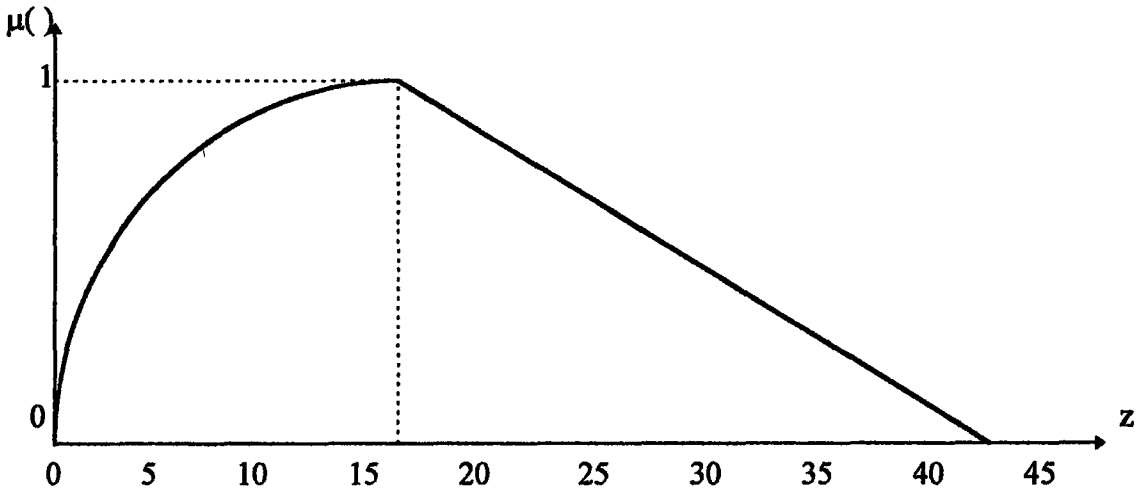
Örnek

9. Örneği gözönüne alalım. $X_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ ve $Y_\alpha = [3 + 5\alpha, 11 - 3\alpha]$ dır. Denklem (2.49)'un kullanımıyla şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= [(2\alpha)(3 + 5\alpha), (4 - 2\alpha)(11 - 3\alpha)] \\ &= [10\alpha^2 + 6\alpha, 6\alpha^2 - 34\alpha + 44] \end{aligned}$$

Bu, basit bir üçgensel bulanık sayı değildir. O zaman, Z bulanık sayısının üyelik fonksiyonu (bak şekil 2.10):

$$\mu_Z(z) = \begin{cases} 0, z \leq 0 \text{ veya } z > 44 \\ -6 + (36 + 40z)^{1/2} / 20, 0 < z \leq 16 \\ 34 - (100 + 24z)^{1/2} / 12, 16 < z \leq 44 \end{cases}$$



Şekil 2.10 bulanık $Z=X(.)Y$ sayısı

II. Maks-min konvolüsyonu. Uzanım prensibinin kullanımıyla çarpma işlemi daha karmaşık hale gelir. Bu yüzden Kaufmann ve Gupta aşağıdaki yöntemi önerdiler:

1. İlk olarak öyle $\mu_Z(z^1) = 1$ olan z^1 i bul (bulanık Z sayısının tepesidir). Sonra sol ve sağ kenarları hesapla.

2. $\mu_Z(z)$ nin sol kenarı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_Z(z) = \max_{xy \leq z} \{ \min[\mu_X(x), \mu_Y(y)] \} \quad (2.50)$$

3. $\mu_Z(z)$ nin sağ kenarı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_Z(z) = \max_{xy \geq z} \{ \min[\mu_X(x), \mu_Y(y)] \} \quad (2.51)$$

Örnek

10. Örneği gözönüne alalım. Tablo 2.4'den doğrudan hesaplayabiliriz. Tablo 2.4 den $x=3$ ve $y=4$ de tepeyi elde ederiz. Bu $\mu_Z(12) = 1$ dir. Denklem (2.50) ve (2.51)'in kullanımıyla bulanık Z sayısının sol ve sağ kenarlarını bulabiliriz. Sonuçlar:

Z	z	1	2		5	6		8	9		11	12	13	14
	$\mu_Z(z)$	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	0.7	0.7	0.1	0.8	0.8			
	z	15	16		20	21		24	25		35	36		42
	$\mu_Z(z)$	0.8	0.7	0.7	0.5	0.5	0.1	0.1	0.0	0.0				

Tablo 2.4. örnek 10 için X(.)Y nin sonuçları

X	Y	y	1	2	3	4	5	6	7
x	$\mu(x)$	$\mu(y)$	0.0	0.1	0.7	1.0	0.8	0.5	0.0
1	0.1		0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.5		0.0	0.1	0.5	0.5	0.5	0.1	0.0
3	1.0		0.0	0.1	0.7	<u>1.0</u>	0.8	0.5	0.0
4	0.7		0.0	0.1	0.7	0.7	0.7	0.5	0.0
5	0.1		0.0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
6	0.0		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Not: $z=6$ olduğunda, çarpan sayıların arasından maksimumu seçeriz.

2.5.4 Bulanık sayıların bölümü

Toplama ve çıkarma arasındaki ilişkiye benzer olarak, bölme işlemi aslında çarpma işleminin bir uzantısıdır. Böylece, aşağıdaki gibi bulanık sayılarda bölme işlemini tanımlayabiliriz:

I. α -seviye kümesi. İlk olarak, α -seviye kümesinin kullanımıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz: her $\alpha \in [0,1]$ için,

$$Z_\alpha = X_\alpha(:)Y_\alpha = [x_\alpha^L / y_\alpha^U, x_\alpha^U / y_\alpha^L] \quad (2.52)$$

Örnek

9. Örneği gözönüne alalım. $X_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ ve $Y_\alpha = [3 + 5\alpha, 11 - 3\alpha]$,
 $Z_\alpha = [2\alpha / (11 - 3\alpha), (4 - 2\alpha) / (3 + 5\alpha)]$ veya

$$\mu_Z(z) = \begin{cases} 0, z \leq 0 \text{ veya } z > 4/3 \\ 11z / (3z + 2), 0 < z \leq 1/4 \\ (4 - 3z) / (2 + 5z), 1/4 < z \leq 4/3 \end{cases}$$

dür.

II. Maks-min konvolüsyonu: önceki bölümde gösterildiği gibi; ilk olarak, maks-min konvolüsyonu kullanıldığı zaman $Z = X(:)Y$ bulanık sayısının tepesi bulunur. Sonra sol kenar şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mu_Z(z) &= \max_{x/y \leq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_Y(y)]\} \\ &= \max_{xy \leq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_Y(1/y)]\} \\ &= \max_{xy \leq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_{1/Y}(y)]\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$\mu_Z(z)$ nin sağ kenarı da şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mu_Z(z) &= \max_{x/y \geq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_Y(y)]\} \\ &= \max_{xy \geq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_Y(1/y)]\} \\ &= \max_{xy \geq z} \{\min[\mu_X(x), \mu_{1/Y}(y)]\} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Yukarıdaki denklemlerden; çarpma işleminin kullanılmasıyla, bölme işleminin tamamlanabileceğini görebiliriz.

2.5.5 Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar

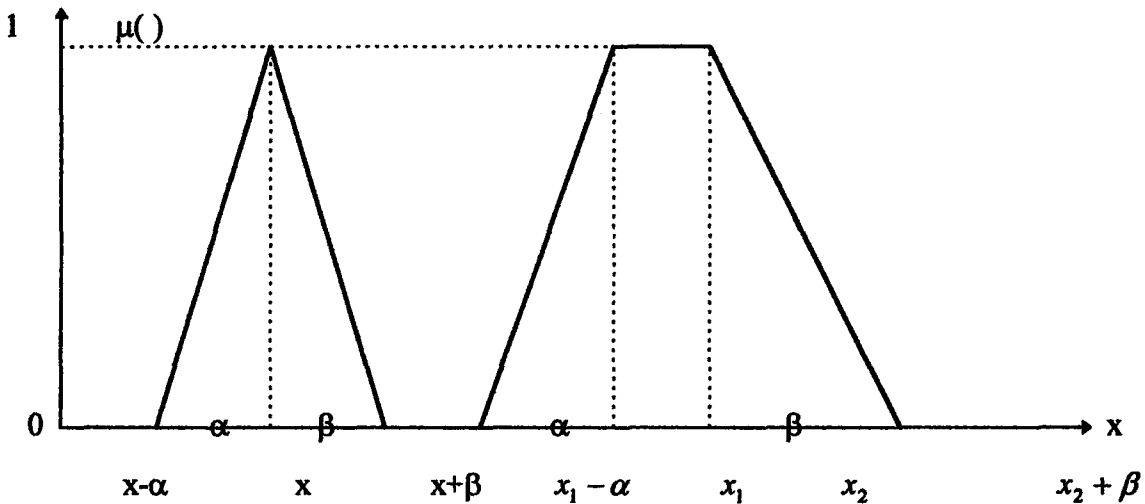
Bulanık sayıların çeşitli tipleri arasında, üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar çok önemli bir yer tutar. Özellikle olasılık matematik programlama problemlerinin çözümünde kullanılır. Böylece, bu kısımda üçgensel ve yamuksal sayılarda uygulamalı bulanık aritmetik sonuçlarını bazı tablolarla göstereceğiz.

İlk olarak, $X=(x,\alpha,\beta)$ ve $Y=(y,r,\delta)$ olarak üçgensel bulanık sayıları gösterebiliriz. Burada, x ve y , merkezi değerler ($\mu_X(x)=1$ ve $\mu_Y(y)=1$); α ve r , sol sahalardan ve β ve δ , sağ sahalardır (bak şekil 2.11). Sonra, bulanık X ve Y sayılarıyla uygulamalı bulanık aritmetik sonuçları tablo 2.5 de gösterilmiştir.

Benzer olarak, şekil 2.11 de gösterildiği gibi $X=(x_1,x_2,\alpha,\beta)$ ve $Y=(y_1,y_2,r,\delta)$ olarak yamuksal bulanık sayıları gösterebiliriz. Tablo 2.6 da bulanık X ve Y sayılarında uygulamalı bulanık aritmetik sonuçları gösterilmiştir.

Diğer bir yolda, üçgensel bulanık sayılar $X=(x^m,x^p,x^o)$ ve $Y=(y^m,y^p,y^o)$ olarak da gösterilebilir. Burada, $x^m=x(y^m=y)$, $x^p=x-\alpha(y^p=y-r)$ ve $x^o=x+\beta(y^o=y+\delta)$ dır. O zaman, bulanık X ve Y sayılarında uygulamalı bulanık aritmetik sonuçları tablo 2.7. de gösterilmiştir.

Benzer olarak, yamuksal bulanık sayılar da $X=(x_1^m,x_2^m,x^p,x^o)$ ve $Y=(y_1^m,y_2^m,y^p,y^o)$ olarak gösterilebilir. Burada $x_1^m=x_1(y_1^m=y_1)$, $x_2^m=x_2(y_2^m=y_2)$, $x^p=x_1-\alpha(y^p=y_1-r)$ ve $x^o=x_2+\beta(y^o=y_2+\delta)$ dır. O zaman, bulanık X ve Y sayılarında uygulamalı bulanık aritmetik tablo 2.8 de gösterilmiştir.



Şekil 2.11 üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar

Tablo 2.5 $X=(x,\alpha,\beta)$ ve $Y=(y,r,\delta)$ üçgensel bulanık sayılarında bulanık aritmetik

Y nin görüntüsü: $-Y=(-y,\delta,r)$

Y nin inversi: $Y^{-1}=(y^{-1},\delta y^{-2},ry^{-1})$

Toplama: $X(+)Y=(x+y,\alpha+r,\beta+\delta)$

Çıkarma: $X(-)Y=X(+)-Y=(x-y,\alpha+\delta,\beta+r)$

Çarpma:

$X>0, Y>0$: $X(.)Y=(xy,xr+y\alpha,x\delta+y\beta)$

$X<0, Y>0$: $X(.)Y=(xy, y\alpha-x\delta, y\beta-xr)$

$X<0, Y<0$: $X(.)Y=(xy, -x\delta-y\beta, -xr-y\alpha)$

Skaler Çarpma:

$a>0, a\in\mathfrak{R}$: $a(.)X=(ax,a\alpha,a\beta)$

$a<0, a\in\mathfrak{R}$: $a(.)X=(ax,-a\beta,-a\alpha)$

Bölme:

$X>0, Y>0$: $X(:)Y=(x/y, (x\delta+y\alpha)/y^2, (xr+y\beta)/y^2)$

$X<0, Y>0$: $X(:)Y=(x/y, (y\alpha-xr)/y^2, (y\beta-x\delta)/y^2)$

$X<0, Y<0$: $X(:)Y=(x/y, (-xr-y\beta)/y^2, (-x\delta-y\alpha)/y^2)$

Tablo 2.6 $X=(x_1,x_2,\alpha,\beta)$ ve $Y=(y_1,y_2,r,\delta)$ bulanık yamuksal sayılarda bulanık aritmetik

Y nin görüntüsü: $-Y=(-y_1,-y_2,\delta,r)$

Y nin inversi: $Y^{-1}=(y_2^{-1},y_1^{-1},\delta/[y_2(y_2+\delta)],r/[y_1(y_1-r)])$

Toplama: $X(+)Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\alpha+r,\beta+\delta)$

Çıkarma: $X(-)Y=(x_1-y_2,x_2-y_1,\alpha+\delta,\beta+r)$

Çarpma:

$X>0, Y>0$: $X(.)Y=(x_1y_1,x_2y_2,x_1r+y_1\alpha-\alpha r,x_2\delta+y_2\beta-\beta\delta)$

$X<0, Y>0$: $X(.)Y=(x_1y_2,x_2y_1,y_2\alpha-x_1\delta+\alpha\delta,y_1\beta-x_2r-\beta r)$

$X<0, Y<0$: $X(.)Y=(x_2y_2,x_1y_1,-x_2\delta-y_2\beta-\beta\delta,-x_1r-y_1\alpha+\alpha r)$

Skaler Çarpma:

$$a > 0, a \in \mathfrak{R}: a(.)X = (ax_1, ax_2, a\alpha, a\beta)$$

$$a < 0, a \in \mathfrak{R}: a(.)X = (ax_1, ax_2 - a\beta, -a\alpha)$$

Bölme:

$$X > 0, Y > 0: X(:)Y = (x_1 / y_1, x_2 / y_1, (x_1\delta + y_2\alpha) / [y_2(y_2 + \delta)], (x_2r + y_1\beta) / [y_1(y_1 - r)])$$

$$X < 0, Y > 0: X(:)Y = (x_1 / y_1, x_2 / y_2, (y_1\alpha - x_1r) / [y_1(y_1 - r)], [y_2\beta - x_2\delta] / [y_2(y_2 + \delta)])$$

$$X < 0, Y < 0: X(:)Y = (x_2 / y_1, x_1 / y_2, (-x_2r - y_1\beta) / [y_1(y_1 - r)], (-x_1\delta - y_2\alpha) / [y_2(y_2 + \delta)])$$

Tablo 2.7 $X = (x^m, x^p, x^o) \vee Y = (y^m, y^p, y^o)$ üçgensel bulanık sayılarında bulanık aritmetik

Y nin Görüntüsü: $-Y = (-y^m, -y^o, -y^p)$

Y nin İnvresi: $Y^{-1} = (1/y^m, 1/y^o, 1/y^p)$

Toplama: $X(+)Y = (x^m + y^m, x^p + y^p, x^o + y^o)$

Çıkarma: $X(-)Y = X(+) - Y = (x^m - y^m, x^p - y^o, x^o - y^p)$

Çarpma:

$$X > 0, Y > 0: X(.)Y = (x^m y^m, x^p y^p, x^o y^o)$$

$$X < 0, Y > 0: X(.)Y = (x^m y^m, x^p y^o, x^o y^p)$$

$$X < 0, Y < 0: X(.)Y = (x^m y^m, x^o y^o, x^p y^p)$$

Skaler Çarpma:

$$a > 0, a \in \mathfrak{R}: a(.)X = (ax^m, ax^p, ax^o)$$

$$a < 0, a \in \mathfrak{R}: a(.)X = (ax^m, ax^o, ax^p)$$

Bölme:

$$X > 0, Y > 0: X(:)Y = (x^m / y^m, x^p / y^o, x^o / y^p)$$

$$X < 0, Y > 0: X(:)Y = (x^m / y^m, x^o / y^o, x^p / y^p)$$

$$X < 0, Y < 0: X(:)Y = (x^m / y^m, x^o / y^p, x^p / y^o)$$

Tablo 2.8 $X = (x_1^m, x_2^m, x^p, x^o)$ ve $Y = (y_1^m, y_2^m, y^p, y^o)$ yamuksal bulanık sayılarında bulanık aritmetik

Y nin Görüntüsü: $-Y = (-y_1^m, -y_1^m, -y^o, -y^p)$

Y nin İnvresi: $Y^{-1} = (1/y_2^m, 1/y_1^m, 1/y^o, 1/y^p)$

Toplama: $X(+)Y = (x_1^m + y_1^m, x_2^m + y_2^m, x^p + y^p, x^o + y^o)$

Çıkarma: $X(-)Y = (x_1^m - y_2^m, x_2^m - y_1^m, x^p - y^o, x^o - y^p)$

Çarpma:

$X > 0, Y > 0$: $X(.)Y = (x_1^m y_1^m, x_2^m y_2^m, x^p y^p, x^o y^o)$

$X < 0, Y > 0$: $X(.)Y = (x_2^m y_1^m, x_1^m y_2^m, x^p y^o, x^o y^p)$

$X < 0, Y < 0$: $X(.)Y = (x_2^m y_2^m, x_1^m y_1^m, x^o y^o, x^p y^p)$

Skaler Çarpma:

$a > 0, a \in \mathbb{R}$: $a(.)X = (ax_1^m, ax_2^m, ax^p, ax^o)$

$a < 0, a \in \mathbb{R}$: $a(.)X = (ax_2^m, ax_1^m, ax^o, ax^p)$

Bölme:

$X > 0, Y > 0$: $X(:)Y = (x_1^m / y_2^m, x_2^m / y_1^m, x^p / y^o, x^o / y^p)$

$X < 0, Y > 0$: $X(:)Y = (x_2^m / y_2^m, x_1^m / y_1^m, x^o / y^o, x^p / y^p)$

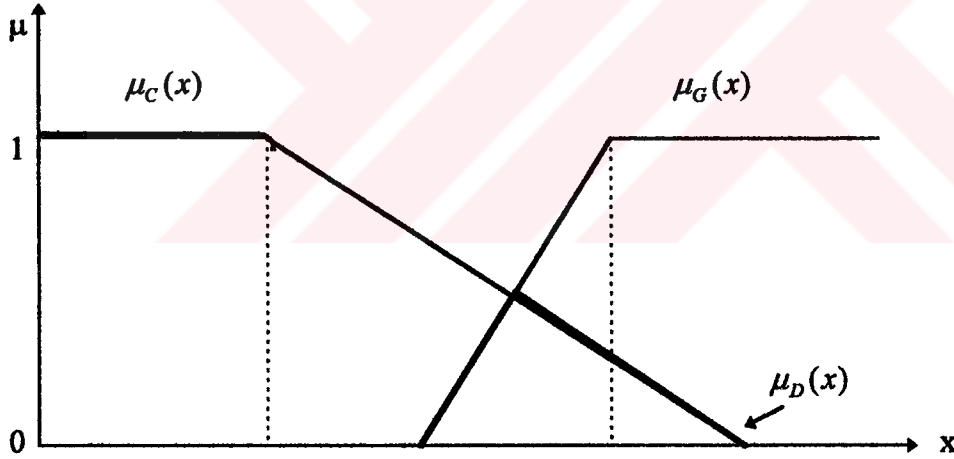
$X < 0, Y < 0$: $X(:)Y = (x_2^m / y_1^m, x_1^m / y_2^m, x^o / y^p, x^p / y^o)$

3. BULANIK MATEMATİK PROGRAMLAMA

Karar verme problemlerinin çözümünde öncü çalışmalar şunlardır: R.E. Bellman ve L.A. Zadeh, Bulanık bir çevrede karar verme, Management Science 17, 1970; H. Tanaka, T. Okuda ve K. Asai, Bulanık matematik programlama üzerine, Journal of Cybernetics 3, 1974, Bulanık karar problemlerinin bir formülü ve bir yatırım problemine uygulanması, Kybernetes 5, 1976; C.V. Negoita ve M. Sularia, Planlamada bulanık matematik programlama ve toleranslar üzerine, Economic Computer and Economic Cybernetic Studies and Research 1, 1976, C.V. Negoita ve D.A. Ralescu, Bulanık optimizasyon üzerine, Kybernetes 6, 1977, C.V. Negoita, Bulanık optimizasyondaki kârlar, Fuzzy Sets and Systems 6, 1981; H.J. Zimmermann, Bulanık sistemin tarifi ve optimizasyonu,

International Journal of General System 2, 1976, Birçok amaç fonksiyonu ile bulanık programlama ve lineer programlama, Fuzzy Sets and Systems 1, 1978; S.A. Orlovsky, Bulanık kısıt kümeleri ile programlama üzerine, Kybernetes 6, 1977; R.R. Yager, Bulanık kısıtlar ile matematik programlama ve amaç üzerine bir tercih, Kybernetes 8, 1979; A.N.S. Freeling, Bulanık kümeler ve karar analizi, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 10, 1980.

Bu çalışmada bazı önemli bulanık lineer programlama problemleri ve yöntemleri gösterilmiştir. Başlıca iki model tanıtıldı: simetrik ve non-simetrik. Simetrik modeller Bellman ve Zadeh tarafından önerilmiş, bulanık karar tanımında temellendirilmiştir. Kesin olmayan bir durumda amaç(lar)ın ve kısıtların bulanık kümelerle gösterilebileceğini önerdiler. Bir karar, o zaman; bulanık amaç(lar) ve kısıtlarla birlikte ifade edilebilir ve maks-min operatörü ile tanımlanabilir. Bu alternatif X lerin bir uzayında bir G bulanık amaç kümesi ve bir C bulanık kısıt kümesini verdiğimiz varsayalım. O zaman G ve C, bunların kesişiminden elde edilen bir bulanık küme olan bir D karar formuyla birleşir ve $\mu_D = \mu_G \cap \mu_C$ ile gösterilir. Bu G, C ve D arasındaki bağıntı şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 C, G ve D bulanık kümelerinin bağıntısı

Non-simetrik modeller aşağıdaki iki yaklaşıma dayanır:

- (1) Bulanık küme kararının saptanması.
- (2) Kısıtlar ile uygun dönüştürmelerden sonra amaç fonksiyonunun bir araya getirilmesiyle bir kesin maksimum kararın saptanması.

3.1 Bulanık Lineer Programlama Modelleri

Bu bölümde beş temel bulanık lineer programlama problemi tanıtılacaktır. Herbir problem için yöntem önceki varsayımlar altında lineer üyelik fonksiyon formları ve maks-min operatörleri ile gösterilecektir. Diğer üyelik fonksiyon formları ve operatörleri de, karar vericinin hükmüne ve karar yöntemine de bağlıdır.

3.1.1 Bulanık kaynaklar ile lineer programlama problemi

Bulanıklığın, mevcut bulanık kaynaklar ile lineer programlama problemlerinde nasıl ve nerede uygulandığını mümkün olduğu kadar açık anlatmak için, basitleştirilmiş lineer programlama hali gösterilecektir.

Bir oyuncak fabrikası iki çeşit bebek yapıyor. A bebeği, herbirinden \$0.40 kâr ile yüksek kaliteli ve B de, herbirinden \$0.30 kâr ile düşük kaliteli oyuncaklardır. B bebeğinin iki katı çalışma saati A bebeği için gerekmekte ve toplam mevcut iş saati günde 500 saatir. Mevcut malzeme günde sadece 400 bebek için yeterlidir(A ve B nin herikisinden birden). Fabrikanın bütün bebekleri sattığını varsayalım. Bu durumda müdür, üretimin programlamasında toplam kârı maksimum yapmak istiyor ve aşağıdaki gibi, üretimin programlaması problemini formüle ediyor:

$$\text{maks } z = 0.4x_1 + 0.3x_2 \quad (\text{kâr})$$

$$\text{Kısıtlar } g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 400 \quad (\text{malzeme})$$

$$g_2(x) = 2x_1 + x_2 \leq 500 \quad (\text{iş saati})$$

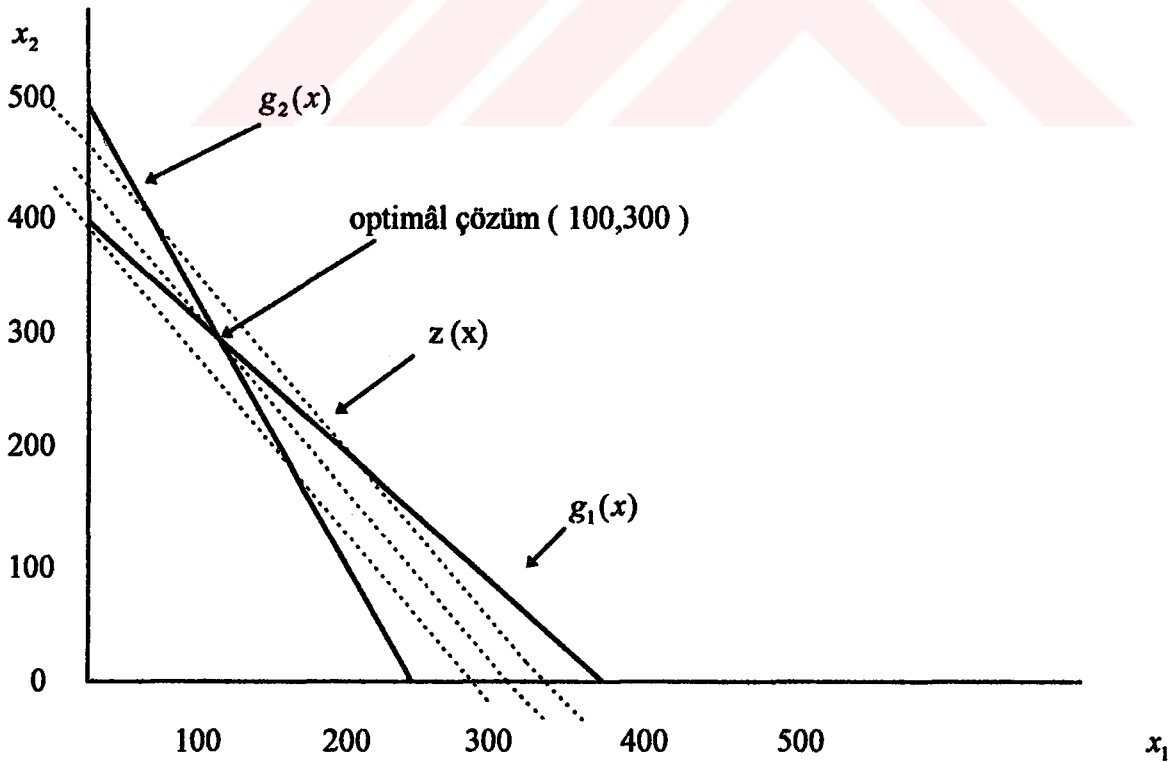
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Burada x_1 , üretilen A bebeğinin; x_2 üretilen B bebeğinin miktarıdır. Grafik yöntemin kullanılmasıyla, L.P. probleminin çözülmesinden sonra; müdür optimal çözüm için: A bebeğinden 100 ünite ve B bebeğinden 300 ünite üretilirse ve \$130 kâr elde edeceğini elde eder. Daha sonra müdür, bazı alanlarda elde bulunan malzemenin değişebileceğini çünkü stoklardan ek malzeme elde edebileceğini ve mevcut zamanın da değişebileceğini, çünkü işçilerden fazla mesai yapmasını isteyebileceğini düşünüyor. Bundan dolayı, bulanık küme teorisini üretimin planlanması problemine uygulayarak, artan kaynaklardan dolayı kârın aslında \$130 dan fazla olabileceğine karar verir.

Malzeme ve zamanın üyelik fonksiyonları, müdür tarafından hazırlanan tablo 3.1. ve şekil 3.3 de gösterilmiştir. g_1 (malzeme) ve g_2 (iş saati) kısıtlarındaki üyelik

fonksiyonlarının değerleri memnuniyetin (tercihinin) demektir. Örneğin; kullanılan malzemenin toplam tutarı 400'e eşit veya 400'den küçük olduğunda, " $g_1(x) \leq 400$ " kısıtı tamamen tamamlanır. Kullanılan malzemenin toplam tutarı 500'e eşit veya 500'den küçük olduğunda " $g_1(x) \leq 400$ " kısıtı tamamen bozulur, böylece memnuniyeti 0'a eşit olur. 400 ve 500 arasında, üyelik fonksiyonunun derecesi monoton lineer azalandır. Geçerli zamanın üyelik fonksiyonu aynı yolla açıklanabilir. Böylece müdür aynı zamanda malzeme, iş saatleri ve kârın üyelik fonksiyonlarını sağlayan sadece mümkün çözümleri gözönüne alır. O zaman memnuniyetin maksimum derecesi ile mümkün alternatifler, planlama probleminin optimâl çözümü olarak seçilebilir.

Şekil 3.4 den sırasıyla mevcut malzeme ve iş saatleri 400 ve 500 dür, b noktası olan $x_1=100$ ve $x_2=300$ de memnuniyetin düzeyi=1 ile optimâl çözüm $z=130$ dur. b' noktası ile gösterilmiş olarak $x_1=100$ ve $x_2=350$ de memnuniyetin düzeyi=0.5 ile $g_1(x)=450$ ve $g_2(x)=550$ için optimâl çözüm $z'=140$ dur. Benzer şekilde b'' noktası ile gösterilmiş olarak $x_1=100$ ve $x_2=400$ de memnuniyetin düzeyi=0 ile $g_1(x)=500$ ve $g_2(x)=600$ için optimâl çözüm $z''=160$ dır. Açıkça, optimâl çözümler bulanıktır ve onların üyelik değerleri kısıtların üyelik değerleri (örneğin; 0, 0.5, 1) ile saptanır.

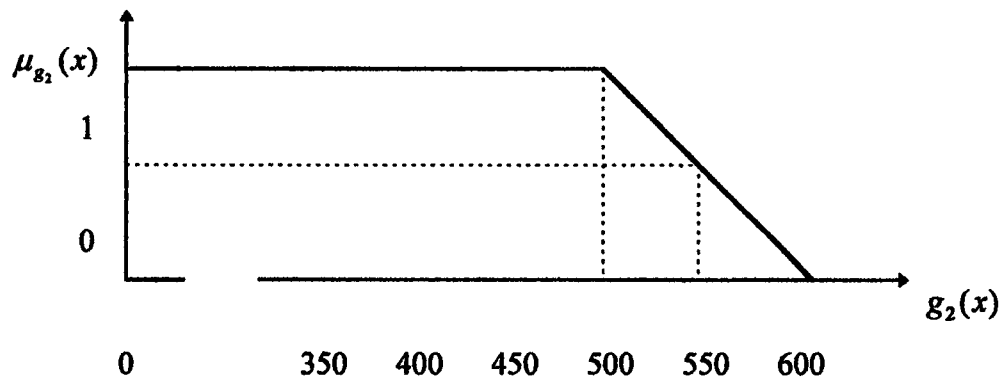
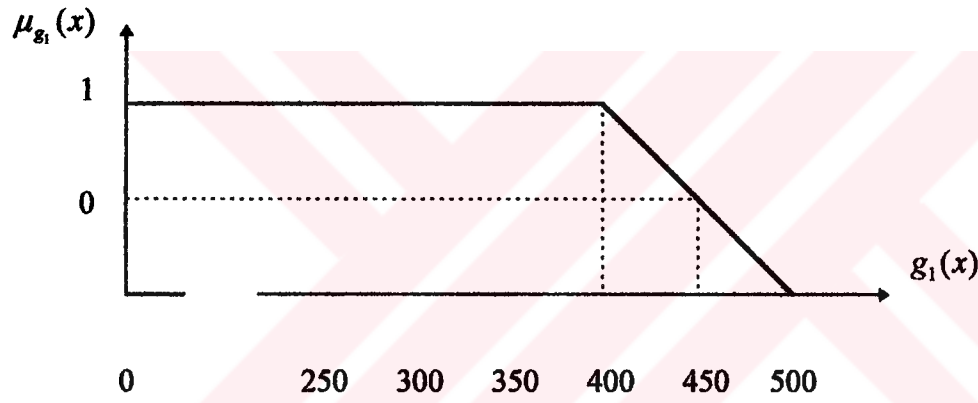


Şekil 3.2 bir lineer programlama problemi için grafik yaklaşım

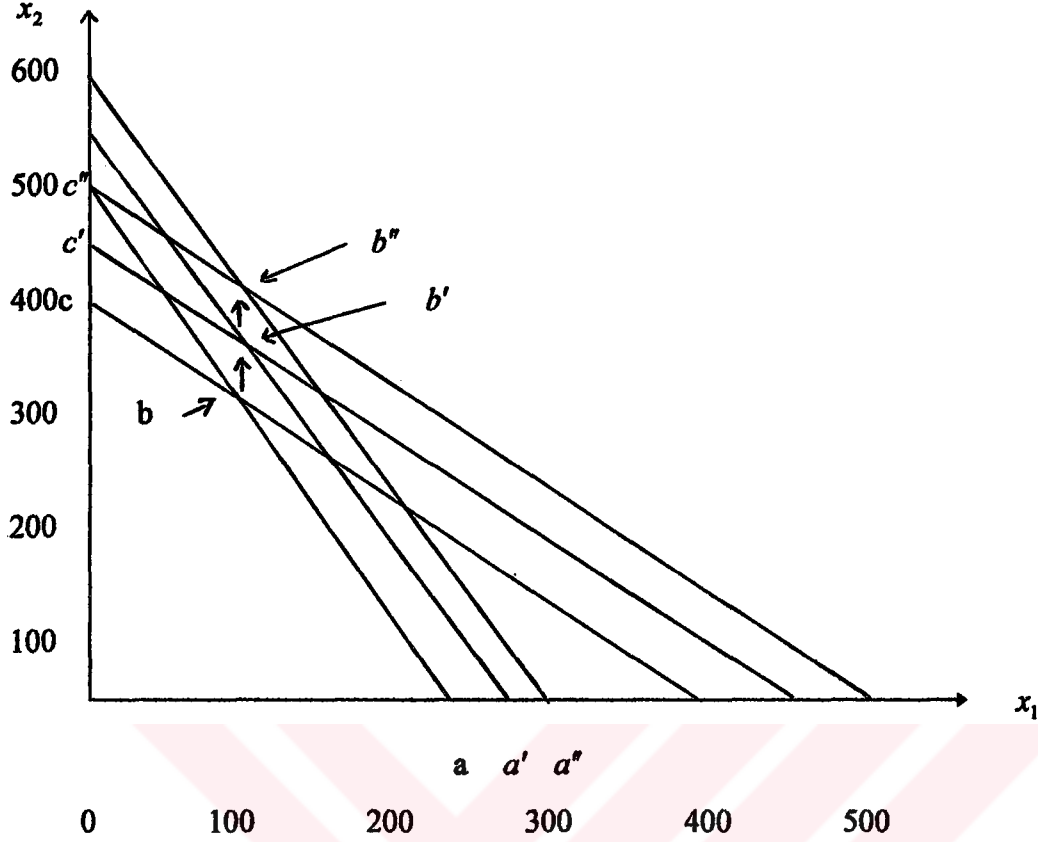
Tablo 3.1 malzeme ve iş saatlerinin üyelik fonksiyonları

mevcut	$g_1(x)$	150	200	250	300	350	400	450	500
malzeme	$\mu_{g_1}(x)$	1	1	1	1	1	1	0.5	0

mevcut	$g_2(x)$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
zaman	$\mu_{g_2}(x)$	1	1	1	1	1	1	1	0.5	0



Şekil 3.3 malzemelerin ve iş saatlerinin üyelik fonksiyonları



Şekil 3.4 bulanık lineer programlama probleminin grafik çözümleri

Örnekte; bulanık lineer programlamada, mevcut kaynakların bulanıklığı tolerans aralığı (belirsiz aralık) üzerinde üyelik fonksiyonları ile tanımlandığını görebiliriz. Optimâl çözümlerin üyelik fonksiyonu kısıtların üyelik fonksiyonlarının konvolüsyonu ile oluşturulabilir.

Mevcut bulanık kaynaklar ile bu lineer programlamanın genel modeli:

$$\text{maks } z=cx$$

$$\begin{aligned} \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.a)$$

şeklinde formüle edilebilir. Burada $\forall i$ için $\tilde{b}_i$ verilen p_i ile $[b_i, b_i + p_i]$ aralığındadır.

Aşağıdaki bulanık eşitsizlik kısıtlarını da gözönüne alabiliriz:

$$\text{maks } z=cx$$

$$\begin{aligned} \text{kısıtlar } (Ax)_i &\lesssim b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.b)$$

Burada $\lesseqgtr$ bulanık küçük veya eşit olarak adlandırılır. Her bir bulanık kısıt için p_i toleransının bilindiğini varsayalım. O zaman $(Ax)_i \leq \tilde{b}_i$, $\forall i$ için $(Ax)_i \leq (b_i + \theta p_i)$ ye denk olacaktır. Burada θ , $[0,1]$ aralığındadır. Eğer her iki durumun üyelik fonksiyonları aynı ise, o zaman (3.1.a) ve (3.1.b) denklemleri aynı problem olacaktır. Böylece, bu çalışmada denk olarak her iki problemi gözönüne alacağız.

Verdegay, (3.1) denkleminin probleminin kesin parametrik programlama problemine denk olduğunu ilk olarak ispatladı. Böylece ilk bulanık lineer programlama problemimizin çözümünde parametrik programlama yöntemlerini kullanacağız. Werners, diğer yoldan; bulanık kısıtlardan dolayı amacın bulanık olabileceğini gözönüne aldı. Her iki yaklaşımı aşağıda vereceğiz.

3.1.1.1 Verdegay'ın yaklaşımı - non-simetrik bir model

(3.1) denklemini için; Verdegay, eğer bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, (Ax)_i < b_i \\ 1 - [(Ax)_i - b_i] / p_i, b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0, (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases} \quad (3.2)$$

sürekli ve monoton fonksiyonlar ve bu kısıtlar arasında değiş tokuş ederek elden çıkarmaya izin veriyorsa, o zaman denklem (3.1) aşağıdaki ifadeye denk olacaktır:

maks cx

kısıtlar $x \in X_\alpha$ (3.3)

Burada her bir $\alpha \in [0,1]$ için $X_\alpha = \{x \mid \forall i, \mu_i(x) \geq \alpha, x \geq 0\}$ dir. α -seviye kesen kavramı Tanaka ve arkadaşları ve Orlovski'nin önceki çalışmalarına dayanır.

Üyelik fonksiyonları dolaylı olarak şöyle belirtilmelidir: (1) Eğer $(Ax)_i \leq b_i$ ise i. Kısıt tamamen sağlanır, $\mu_i(x) = 1$; (2) Eğer $(Ax)_i \geq b_i + p_i$ ise, burada p_i, b_i ve sistematik veya non-sistematik yoldan karar verici tarafından saptanan maksimum toleranstır, o zaman, i. kısıt tamamen bozulur, $\mu_i(x) = 0$; (3) Eğer $(Ax)_i \in (b_i, b_i + p_i)$ ise üyelik fonksiyonları monoton azalandır. Bu daha çok kaynağın tüketildiği, karar vericinin en az memnuniyet duyduğu durumdur.

O zaman (3.3) denklemini içine (3.2) denkleminin üyelik fonksiyonlarını koyarak aşağıdaki problemi elde ederiz:

maks cx

kısıtlar $(Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)p_i, \forall i$ için

$$x \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \quad (3.4)$$

(3.4) denklemi, $\alpha=1-\theta$ iken, bir parametrik programlamaya denktir. Böylece, (3.1) denklemi ile verilen bulanık lineer programlama problemi, bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları bazı basit formları kabul edildiğinde bir kesin parametrik lineer programlama problemine denktir. Bu yaklaşımı iki örnekle gözönüne alalım.

3.1.1.1a Örnek 1: Knox ürün-karışım seçim problemi

Bir ürün-karışım seçim problemini gözönüne alacağız. Knox Mix fabrikasının üretim yöntemlerinin dört farklı tipinin bir veya daha fazlasını kullanması tercihine sahip olduğunu varsayalım. Birinci ve ikinci yöntem, A ürününün parçalarını verir ve üçüncü ve dördüncü yöntem ise B ürününün parçalarını verir. Her iki yöntem için; girişler, haftalık iş gücü, Y malzemesinin kiloları ve Z malzemesinin kutularında çalışma ölçülüdür. Onun giriş gereklerinde her bir yöntemin değişmesinden farklı olan yöntemlerin kazançlılıkları, aynı parçaları üreten yöntemler için düzenlidir. Bir haftanın üretim listesinde fabrikatörün kararı iş gücü ve iki çeşit hammalzemenin mevcut tutarları ile olasılıkların aralığı ile sınırlıdır. Tam teknoloji ve giriş kısıtlamaları tablo 3.2 de verilmiştir.

Tablo 3.2 Knox ürün-karışım seçim problemi için giriş verisi

Parça	Haftalık İşgücü	Y malzemesi(kg)	Z malzemesi	Birim Kâr
A ürününün bir parçası				
Yöntem 1	1	7	3	4
Yöntem 2	1	5	5	5
B ürününün bir parçası				
Yöntem 3	1	3	10	9
Yöntem 4	1	2	15	11
Mevcut toplam	≤15	≤120	≤10	Maks

1, 2, 3 ve 4 yöntemlerinde üretim seviyelerinin sırasıyla x_1 , x_2 , x_3 ve x_4 olduğuna varsayalım. O zaman problem aşağıdaki lineer programlama problemi olarak formüle edilebilir:

$$\text{maks } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \text{ (kâr)}$$

$$\text{kısıtlar } g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \text{ (haftalık iş gücü)}$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \text{ (Y malzemesi)}$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 \text{ (Z malzemesi)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Bu lineer programlama problemini simpleks yöntemi kullanarak çözelim.

$$\text{maks } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\text{kısıtlar } g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 120$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 = 100$$

1. Tablo :

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
			4	5	9	11	0	0	0	
(j)	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	oran
(5)	0	15	1 *	1	1	1	1	0	0	15/1=15 ←
(6)	0	120	7	5	3	2	0	1	0	120/7=17.14
(7)	0	100	3	5	10	15	0	0	1	100/3=33.33
$z_k - c_k$		$z_0 = 0$	-4 ↑	-5	-9	-11	0	0	0	

2. Tablo :

B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	oran
			4	5	9	11	0	0	0	
(j)	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
(1)	4	15	1	1	1	1	1	0	0	15/1=15
(6)	0	15	0	-2	-4	-5	-7	1	0	/
(7)	0	55	0	2	7*	12	-3	0	1	55/7=7.86
$z_k - c_k$		$z_1 = 60$	0	-1	-5 ↑	-7	4	0	0	

Sonuç tablosu:

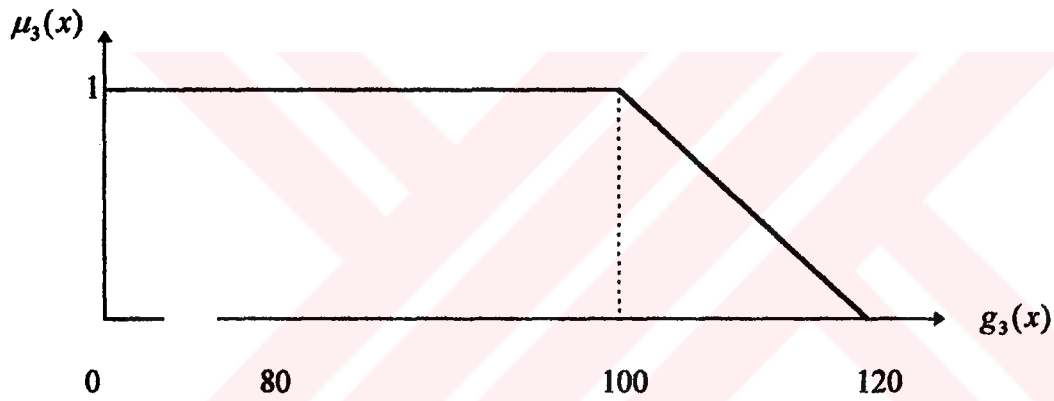
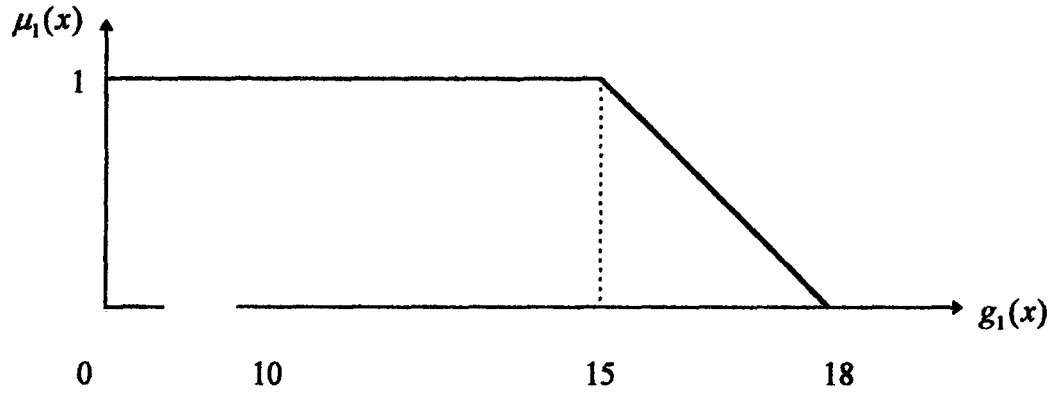
B		C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	
			4	5	9	11	0	0	0	
(j)	c_j	V_0	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
(1)	4	50/7	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	
(6)	0	325/7	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	
(3)	9	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	
$z_k - c_k$		z_2	0	3/7	0	11/7	13/7	0	5/7	

Optimâl çözüm: $x^* = (50/7, 0, 55/7, 0) = (7.14, 0, 7.86, 0)$ ve $z^* = \$695/7 = \99.29 dur. Kullanılan kaynaklar sırasıyla haftalık iş gücü, Y malzemesi ve Z malzemesi için 15, 73.57 ve 100 birimdir.

Haftalık iş gücü ve Z malzemesinin mevcut toplamının kesin olmadığını ve sırasıyla maksimum toleranslarının 3 ve 20 birim olduğunu varsayalım. O zaman bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları (şekil 3.5 de görüldüğü gibi):

$$\mu_1 = \begin{cases} 1, & g_1(x) < 15 \\ \frac{1 - [g_1(x) - 15]}{3}, & 15 \leq g_1(x) \leq 18 \\ 0, & g_1(x) > 18 \end{cases}$$

$$\mu_3 = \begin{cases} 1, & g_3(x) < 100 \\ \frac{1 - [g_3(x) - 100]}{20}, & 100 \leq g_3(x) \leq 120 \\ 0, & g_3(x) > 120 \end{cases}$$



Şekil 3.5 haftalık iş gücü ve Y malzemesinin kısıtlarının üyelik fonksiyonları

O zaman şu problemi elde ederiz:

$$\text{maks } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\mu_1(x) \geq \alpha$$

$$\text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$\mu_3(x) \geq \alpha$$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

veya

$$\text{maks } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\begin{aligned}
& g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 3(1 - \alpha) \\
& \text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \\
& g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 20(1 - \alpha) \\
& \alpha \in [0,1] \text{ ve } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

$\theta = 1 - \alpha$ alalım. Şu parametrik programlama problemini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \text{maks } 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \\
& g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 3\theta \\
& \text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \\
& g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 20\theta \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Burada $\theta \in [0,1]$ bir parametredir. Parametrik tekniğin ve tablo 3.3 de gösterilen simpleks yöntemin sonuç tablosunun kullanımıyla, aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
(10/7, 0, -1/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} &= 10\theta/7 \\
(-61/7, 1, 4/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} &= -103\theta/7 \\
(-3/7, 0, 1/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} &= 11\theta/7
\end{aligned}$$

Sonuç simpleks tablo, tablo 3.4. de gösterilmiştir. $\theta \in [0,1]$ için değerler $50/7 + 10\theta/7$, $325/7 - 103\theta/7$ ve $55/7 + 11\theta/7$ her zaman sıfırdan büyüktür, o zaman optimâl çözüm: $x^* = (7.14 + 1.43\theta, 0, 7.86 + 1.57\theta, 0)$ ve $z^* = \$ (99.29 + 19.86\theta)$ dır. Karar verici için bu sonuçların açıkça gösterilmesiyle tablo 3.5 elde edilir.

Tablo 3.5 parametrik programlama probleminin çözümleri

θ	z^*	gerçekten kullanılan kaynaklar		
		haftalık iş gücü	Y malzemesi	Z malzemesi
0.0	99.29	15.00	73.57	100.00
0.1	101.28	15.30	75.04	102.00
0.2	103.27	15.60	76.51	104.00
0.3	105.26	15.90	77.98	106.00
0.4	107.25	16.20	79.45	108.00
0.5	109.24	16.50	80.92	110.00
0.6	111.23	16.80	82.39	112.00
0.7	113.22	17.10	83.86	114.00
0.8	115.21	17.40	85.33	116.00
0.9	117.20	17.70	86.80	118.00
1.0	119.19	18.00	88.27	120.00

3.1.1.1b Örnek 2: Bir taşıma problemi

Bulanık istek ile bir taşıma problemi gözönüne alınsın:

min cx

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j, j \in J = \{1, 2, \dots, n-1\}$$

kısıtlar $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq a_i, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j$$

$\mu_j(), j \in J$ ve $\mu_i(), i \in I$, bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları sırasıyla sürekli ve kesin

monoton olduğu varsayılır. O zaman

$$\sum_{i \in I} \mu_i^{-1}(\alpha) \geq \sum_{j \in J} \mu_j^{-1}(\alpha), \alpha \in [0, 1]$$

olduğu ispatlanabilir. Bundan dolayı, bulanık taşıma problemi vasıtasıyla çözülebilir. Bu:

min cx

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \mu_j^{-1}(\alpha), j \in J$$

kısıtlar $\sum_{j \in J} x_{ij} \leq \mu_i^{-1}(\alpha), i \in I$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j, \alpha \in [0,1]$$

dir. $\sum_i \mu_i^{-1}(\alpha) = \sum_j \mu_j^{-1}(\alpha)$ eldesi sırasında, bir n. duyarsız amaç tanıtılır. Böylece, aşağıdaki parametrik lineer programlama problemi elde edilir:

min cx

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = \mu_j^{-1}(\alpha), j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$$

kısıtlar $\sum_{j \in J} x_{ij} = \mu_i^{-1}(\alpha), i \in I$

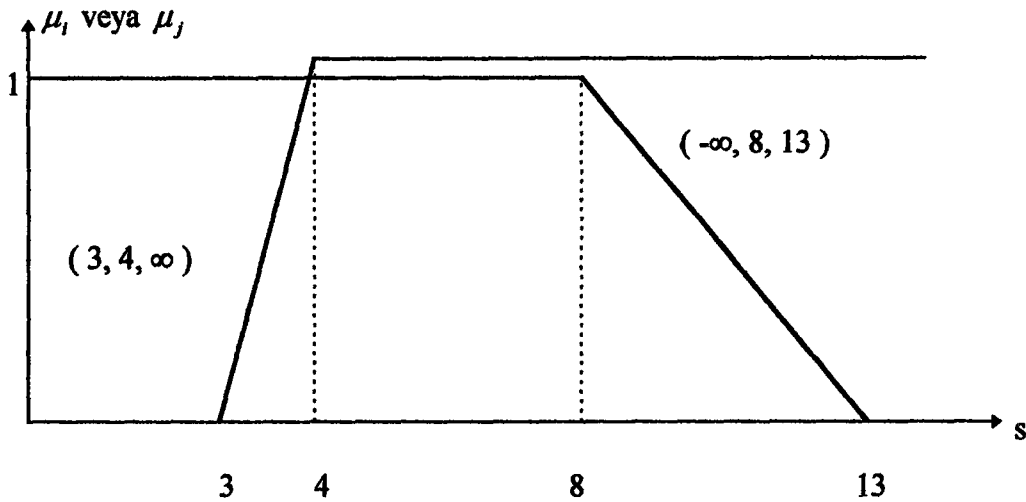
$$x_{ij} \geq 0, \forall i, \forall j, \alpha \in [0,1]$$

Şimdi, aşağıdaki bulanık taşıma probleminin sayısal örneğini gözönüne alalım:

4	5	2	1	$(-\infty, 8, 13)$
6	2	4	3	$(-\infty, 6, 9)$
3	1	1	1	$(-\infty, 5, 6)$

$(3, 4, \infty)$ $(3, 5, \infty)$ $(3, 6, \infty)$ $(1, 4, \infty)$

Burada (s_1, s_2, s_3) ün üçgensel şekilli notasyonu basitlik için kullanılır (aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi).



onun $(-\infty, 0, 18)$ üyelik fonksiyonu ile 5. duyarsız amacın tanımıyla şunu elde ederiz:

4	5	2	1	0	13-5 α
6	2	4	3	0	9-3 α
3	1	1	1	0	6- α
3+ α	3+2 α	3+3 α	1+3 α	18-18 α	

Bulanık taşıma ile bulanık bir çözümü sağlayan optimâl çözüm aşağıdadır:

$\alpha \in [0, 3/5]$ için:

3+ α		6 α	1+3 α	9-15 α
				9-3 α
	3+2 α	3-3 α		

$\alpha \in [3/5, 12/13]$ için:

3+ α		9-9 α	1+3 α	
	-9+15 α			18-18 α
	12-13 α	-6+12 α		

$\alpha \in [12/13, 1]$ için:

3+ α		-3+4 α	13-10 α	
	3+2 α		-12+13 α	18-18 α
		6- α		

Taşıma problemleri için, OhEigertaigh bulanık isteklerin üyelik fonksiyonlarının üçgensel formda olduğu durumu gözönüne aldı. Bazen karar verici isteğin bazı özel miktarına sahip olmayı tercih edebilir. Üçgensel üyelik fonksiyonları rasyoneldir. Chanas ve Kulej'de bulanık kaynakların üçgensel üyelik fonksiyonları ile bulanık bir lineer programlama problemini çözmeyle bir yaklaşım sağladılar.

3.1.1.2 Werner'in yakalaşımı- Non-simetrik bir model

Werner, bulanık toplam kaynaklar veya bulanık eşitsizlik kısıtlarından dolayı (3.1.) denkleminin amaç fonksiyonunun bulanık olabileceğini önerdi. Önceki kısma benzer olarak, bulanık kaynaklar için p_i toleranslarının mümkün ve verildiğini varsayalım. O zaman (3.1) dekleminin çözümü için, Werner z^0 ve z^1 yi :

$$\begin{aligned} z^0 &= \text{maks } cx \\ \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq b_i, \forall i, \text{ vex} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} z^1 &= \text{maks } cx \\ \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq b_i + p_i, \forall i, \text{ vex} \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece z^0 ve z^1 in kullanımıyla amaç için sürekli bir azalmayan lineer üyelik fonksiyonunu kurabiliriz. Optimâl çözümün memnuniyeti onun değerleri yükseldiğinde artacaktır. Amacın μ_0 üyelik fonksiyonu (şekil 3.6 da görülür):

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & cx > z^1 \\ 1 - (z^1 - cx)/(z^1 - z^0), & z^0 \leq cx \leq z^1 \\ 0, & cx < z^0 \end{cases} \quad (3.6)$$

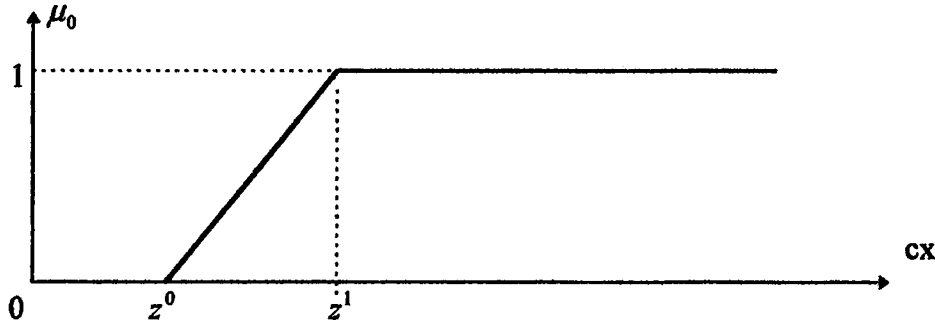
şeklindedir.

Üyelik fonksiyonu ile, optimâl karar için maks-min operatörünü kullanabiliriz. O zaman (3.1) denklemi " $\text{maks}_{x \geq 0} \alpha, \alpha = \min[\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]$ " in çözümü ile çözülebilir.

Şöyle ki:

$$\begin{aligned} &\text{maks } \alpha \\ &\mu_0(x) \geq \alpha \\ \text{kısıtlar } &\mu_i(x) \geq \alpha, \forall i \\ &\alpha \in [0,1], x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aslında denklem (3.7) Zimmermann tarafından önerilen modele benzer olan bir simetrik modeldir (bakınız kısım 3.1.2.1). Fark amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonudur.



Şekil 3.6 amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu

3.1.1.2a Örnek 1: Knox ürün-karışım seçimi problemi

Önceki örneği gözönüne alalım. Kesin lineer programlama probleminin çözümünden daha çok boş kaynağa sahip olacak Y malzemesi için 120 birim olduğunu görebiliriz. Şimdi Y malzemesinin sınırının 80 olacağını varsayalım ve haftalık işgücü ve Y ve Z malzemesi için toleransları sırasıyla 5, 40, 30 dur. O zaman problemimiz aşağıdaki gibi olur:

$$\text{maks } z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$\text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Burada i. bulanık kısıtlar için $\forall i, \mu_i(x)$ üyelik fonksiyonları:

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1, & g_1(x) < 15 \\ 1 - [g_1(x) - 15] / 5, & 15 \leq g_1(x) \leq 20 \\ 0, & g_1(x) > 20 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & g_2(x) < 80 \\ 1 - [g_2(x) - 80] / 40, & 80 \leq g_2(x) \leq 120 \\ 0, & g_2(x) > 120 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1, & g_3(x) < 100 \\ 1 - [g_3(x) - 100] / 30, & 100 \leq g_3(x) \leq 130 \\ 0, & g_3(x) > 130 \end{cases}$$

şeklindedir.

O zaman, denklem (3.5) in çözümüyle,

$$z^0 = z^*(\theta = 0) = 99.29$$

$$z^1 = z^*(\theta = 1) = 130$$

elde ederiz.

Burada θ yeni parametrik programlama probleminde parametredir. O zaman simetrik lineer programlama problemi aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

maks α

$$\mu_0 \geq \alpha$$

kısıtlar $\mu_i \geq \alpha, i = 1, 2, 3$

$$\alpha \in [0, 1]$$

Burada bulanık amacın μ_0 üyelik fonksiyonu:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & z > 130 \\ 1 - (130 - z)/(130 - 99.29), & 99.29 \leq z \leq 130 \\ 0, & z < 99.29 \end{cases}$$

olarak tanımlıdır. Bu problem gerçekten aşağıdaki ifadeye denktir:

min θ

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 130 - 30.71\theta$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5\theta$$

$$\text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40\theta$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30\theta$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \theta \in [0, 1]$$

Burada $\theta=1-\alpha$ dir. Çözüm: Haftalık işgücü, Y ve Z malzemesi için gerçekten kullanılan kaynaklar sırasıyla 17.5, 86.78 ve 115.01 iken $\theta=0.5$ de $x^*=(8.57, 0, 8.93, 0)$ ve $z^*=\$114.65$ dir.

3.1.1.2b Örnek 2: Bir hava kirliliğinin düzenlenmesi problemi

Bir hava kirliliğinin düzenlenmesi problemi gözönüne alınsın. Bir kartezyen kordinat sisteminin (x_1, x_2) kordinatlarıyla, herbir noktası belirtilen verilen bir alanda havanın temizliği ile gösterilen yaşam kalitesini düzeltmek tasarlanır. Kirliliğin yoğunluğu şöyle nitelenmiştir: (a) verilen hava kalitesi, standartda tamamiyle uygundur, (b) uyarlanan standartlardan daha iyi yoğunlaşma oranına rağmen, insanların istekleri gözönünde

bulundurulur ve (c) tahvilat çıkışının azalması fabrika üretiminin çok büyük bir azalmasını gerektirmez (d) azalma değerinin minimizasyonu ile.

Bu gerçekten dolayı, bulanık optimizasyon tekniği hava kirliliğinin düzenlenmesi problemini çözmek için gereklidir.

İlk olarak aşağıdakileri kabul edeceğiz:

(1) Kontrol alanında birkaç kaynaktan bırakılan kirlilik yapan kimyasal maddenin bir tek çeşidi gözönüne alınsın.

(2) Verilen hava kalite standartları kontrol alanında böyle reseptör olarak adlandırılan yayılmış noktalarda uyulsun.

(3) Hava ve iklim şartlarında değişme yoktur. Bu, rüzgâr hızı ve yönü, basınç değişimi, nem, sıcaklık, v.s., ye benzer çoklukları ifade eden parametrelere ihtiyacımız yok demektir. Bu daha çok ayrıntılı bir şekilde hazırlanan modelde gözönüne alınabilir. Bilinen bir s_j “ transfer fonksiyonu ”, (x_1, x_2) kordinatları ile yer seviyesinde kimyasal maddenin yoğunlaşmasını gösteren her bir j , $j=1,2,\dots,J$ kaynağı için vardır. Bu fonksiyon genelleştirilmiş Gauss tipinde olabilir:

$$s_j(x_1, x_2) = \alpha_j \exp(\beta_j)$$

Burada kaynağın α_j ve β_j özel parametreleri, x_1, x_2 nin bilinen fonksiyonlarıdır. j kaynağı ile neden olan i ($i=1,2,\dots,I$) reseptör noktasında yoğunlaşma oranı:

$$s_{ji} = s_j(x_1^i, x_2^i)$$

dir. Burada (x_1^i, x_2^i) , i . reseptör noktasının kordinatlarıdır. s_{ji} , verilerden birisidir ve gerçek yoğunlaşma oranını ifade eder.

$E_j \in [0,1]$ karar değişkenleri, j kaynağında, kirleten kimyasal maddenin azaltılması için bir gösterge olarak işe yarar, şöyle ki:

E_j azaltma oranı ve

$(1 - E_j)s_{ji}$ azaltmadan sonraki yoğunlaşma oranıdır.

Sonunda, bir reseptör noktada toplam yoğunlaşma tüm kaynaklardan bırakılan kimyasal maddelerin yoğunlukları toplamı olduğunun kabuluyla şunu saptarız: Reseptör noktanın toplam yoğunluğu olarak (azaltmadan sonra, eğer j öyleki $E_j > 0$ varsa):

$$\sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ji}$$

dir.

Şimdi, bulanık kısıtlamanın birinci tipi, “ her bir i reseptör noktası için; $\sum_j (1 - E_j) s_{ji}$, d standartını aşmayan fakat i reseptör noktasında arzu edilen e_i altında gitmeye çalışır. Bu:

$$\mu_i = 1 - \{[\sum_j (1 - E_j) s_{ji}] - e_i\} / (d - e_i), \forall i$$

dir. Üyelik fonksiyonları ile;

$$\sum_{j=1}^J (1 - E_j) s_{ji} \leq e_i; d, \forall i$$

olarak yazılabilir. Bulanık kısıtlamanın ikinci tipi “ her bir j kaynağı için yoğunlaşma oranı E_j^u yi aşamaz ve w_j altında dahi gitmeye çalışır! ”. Bu:

$$\mu_j = 1 - (E_j - w_j) / (E_j^u - w_j), \forall j$$

üyelik fonksiyonları ile;

$$E_j \leq w_j; E_j^u, \forall j$$

dir. Burada $\forall j$ için w_j ve $E_j^u \in [0,1]$ dir. Amaç fonksiyonu $\sum_j c_j E_j$ yi minimize eder, burada j kaynağında c_j toplam azaltma fiyatıdır, $[0, E_j^u]$ da fiyat fonksiyonunun lineer olmasının kabul edilmesiyle (veya yaklaşık hesaplananın elde ile). Böylece aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\min \sum_j c_j E_j$$

$$\sum_j (1 - E_j) s_{ji} \leq e_i + \theta(d - e_i), \forall i$$

$$\text{kısıtlar } E_j \leq w_j + \theta(E_j^u - w_j), \forall j$$

$$E_j \geq 0, \forall j$$

dır. Burada, $s_{ji}, e_i, d, w_j, E_j^u, c_j$ verilen verilerdir.

Şimdi aşağıdaki sayısal örneği gözönüne alalım. Transfer fonksiyonlarının üç kaynak için:

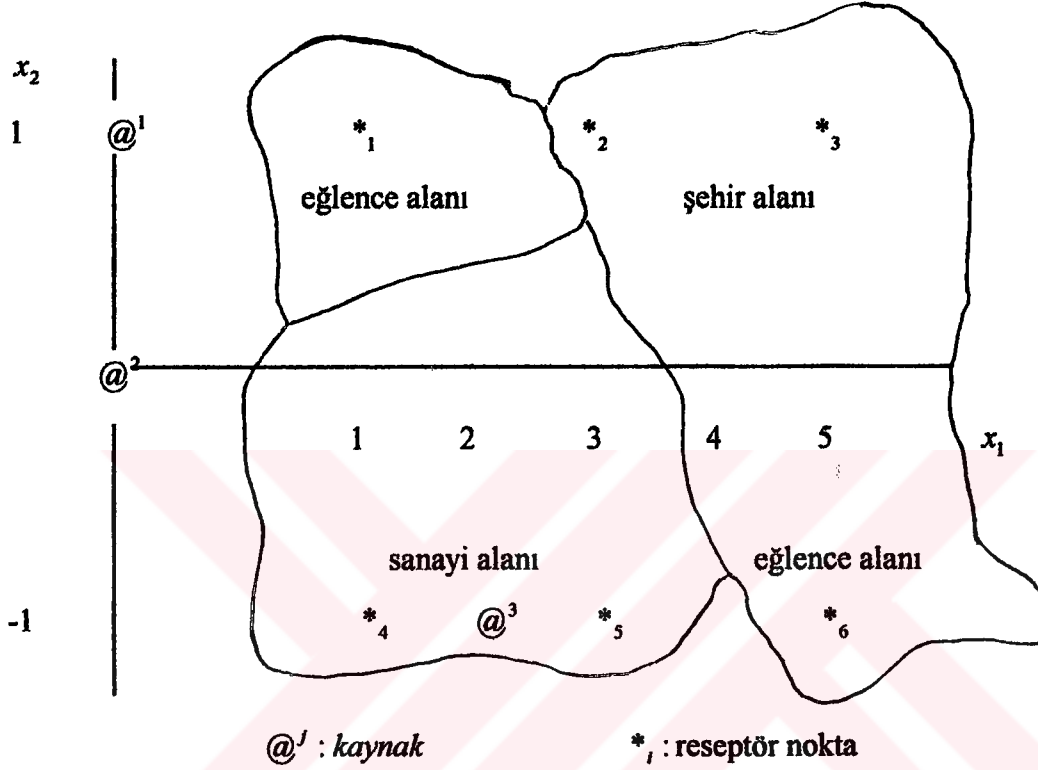
$$s_1(x_1, x_2) = \exp\{-[1 + (x_2 - 1)^2] / x_1\} / x_1, x_1 > 0$$

$$s_2(x_1, x_2) = \exp\{-[2 + x_2^2 / 4] / x_1\} / x_1, x_1 > 0$$

$$s_3(x_1, x_2) = \exp\{-[1 + (x_2 + 1)^2] / (x_1 - 2)\} / (x_1 - x_2), x_1 > 2$$

olduğunu varsayalım. Bunun dışında, şekil 3.7 de çizildiği gibi sadece dağılmış altı reseptör noktanın varolduğunu kabul edeceğiz.

Kontrol alanı üç farklı kısım içine bölünür, öyleki arzu edilen e_i yoğunlaşma oranı yere bağlıdır, fakat maksimum d yoğunlaşması bütün kontrol alanı üzerinde bir sabittir.



Şekil 3.7 hava kirliliğini düzenleme probleminin kontrol bölgesi

alan	e_i	d
eğlence	0.42	0.5
şehir	0.44	0.5
sanayi	0.49	0.5

2., 3. ve 4. reseptör noktaları hesaba katılmaz, çünkü henüz arzu edilen oranlardan daha küçük fabrikanın yoğunlaşma oranlarının bir toplamına sahiptir. Kaynakların varsayılan maksimum izin verilen E_j azalma oranının verisi, arzulan oran w_j ve azalma fiyatı c_j :

j	c_j	E_j	w_j
1	2	0.2	0.04
2	4	0.35	0.15
3	1	0.55	0.3

dir. Diğer veriler şöyle gösterilmiştir:

reseptör noktalar ve kordinatları			gerçek yoğunlaşmalar (azaltmadan önce)				arzulanan yoğunlaşma
i	x_1^i	x_2^i	s_{1i}	s_{2i}	s_{3i}	$\sum_j s_{ji}$	e_i
1	1	1	.3679	.1054	-	.4733	.42
2	3	1	.2388	.1757	.0067	.4030	.44
3	5	1	.1638	.1275	.0630	.3543	.44
4	1	-1	.0067	.1054	-	.1121	.49
5	3	-1	.0630	.1575	.3679	.5884	.49
6	5	-1	.0736	.1275	.2388	.4399	.42

Problem aşağıdaki gibi olur:

$$\min z = \sum_j c_j E_j$$

$$.3679E_1 + .1054E_2 \geq .0533 - .08\theta$$

$$.0630E_1 + .1575E_2 + .3679E_3 \geq .0984 - .01\theta$$

$$.0736E_1 + .1275E_2 + .2388E_3 \geq .0199 - .08\theta$$

$$\text{kısıtlar } E_1 \leq .04 + .16\theta$$

$$E_2 \leq .15 + .2\theta$$

$$E_3 \leq .3 + .25\theta$$

$$E_j \geq 0, \forall j$$

İlk olarak $z^0 = .2403$ ve $z^1 = .87643$ ü elde ederiz. O zaman amaç fonksiyonu için Werner'in üyelik fonksiyonlarını kullanabiliriz ve bulanık lineer programlama problemini çözeriz. Optimâl karar: $E_1^* = .04, E_2^* = .00$ ve $E_3^* = .26$ dır.

3.1.2 Bulanık kaynaklar ve amaç ile lineer programlama problemi

Önceki kısımda ifade edilen aynı sebepten dolayı aşağıdaki iki denklem birbirine denktir:

$$\text{maks } z=cx$$

$$\begin{aligned} \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.8a)$$

ve

$$\text{maks } z=cx$$

$$\begin{aligned} \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.8b)$$

Denklem (3.8) çözmek için Zimmermann ve Chanas tarafından önerilen yöntemler bu kısımda gösterilecektir.

3.1.2.1 Zimmermann'ın yaklaşımı-Simetrik bir model

Bu yaklaşımda, b_0 hedefi ve ona karşılık gelen bulanık amacın p_0 toleransı başlangıçta verilir ve bulanık kaynaklar için de: $\forall i, b_i$ ve karşılık gelen p_i toleranslarıdır. Bulanık amaç ve bulanık kısıtlar, o zaman farksız gözönüne alınır ve onlara karşılık gelen bölgeler $\forall i, [b_i, b_i + p_i]$ aralığında tanımlanır. Denklem (3.8) aşağıdaki gibi gözönüne alınabilir:

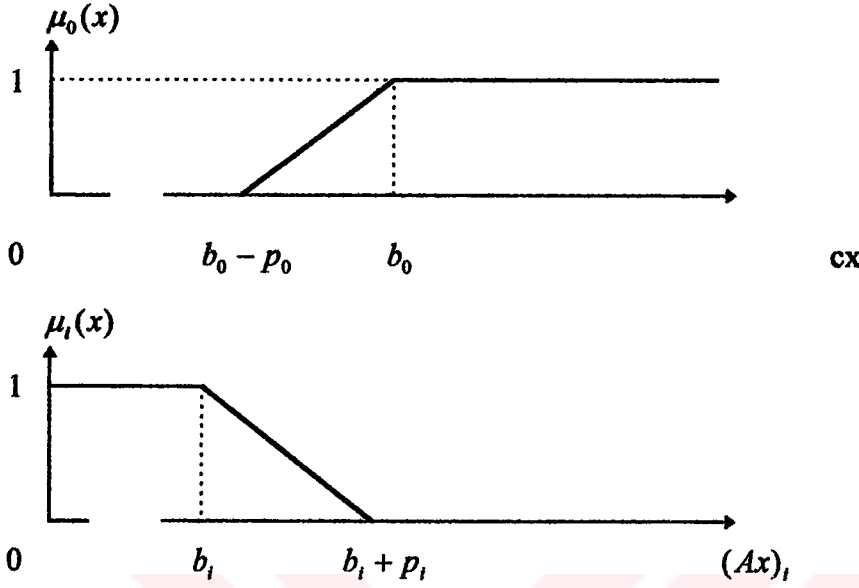
bul x

$$\begin{aligned} cx &\geq b_0 \\ \text{öyle ki; } (Ax)_i &\leq b_i, \forall i \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bulanık küme teorisinde, bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlar, onlara karşılık gelen üyelik fonksiyonları ile tanımlanır. Kolaylık olması için; bulanık amacın μ_0 üyelik fonksiyonu, azalmayan sürekli lineer bir fonksiyon ve bulanık kısıtların $\forall i, \mu_i$ üyelik fonksiyonları azalmayan sürekli lineer fonksiyonları aşağıdaki gibidir (bak şekil 3.8):

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & cx > b_0 \\ 1 - (b_0 - cx) / p_0, & b_0 - p_0 \leq cx \leq b_0 \\ 0, & cx < b_0 - p_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & (Ax)_i < b_i \\ 1 - [(Ax)_i - b_i] / p_i, & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0, & (Ax)_i > b_i + p_i; \forall i \end{cases} \quad (3.11)$$



Şekil 3.8 bulanık amaç kısıtı $cx \geq \tilde{b}_0$ ve i. bulanık $(Ax)_i \leq \tilde{b}_i$ kısıtı için üyelik fonksiyonları

Zimmermann, o zaman Bellmann ve Zadeh'in maks-min operatörlerini denklem (3.9) u çözmek için kullandı. Böylece optimâl çözüm;

$$\text{maks } \mu_D = \text{maks}\{\min[\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)]\} \quad (3.12)$$

ile elde edilir. Burada μ_D , D karar uzayının üyelik fonksiyonu ve $\mu_D = \min(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ dir. Eğer $\alpha = \mu_D$ ise; denklem (3.9), denklem (3.12) yoluyla aşağıdakine denk olacaktır:

maks α

$$\mu_0(x) = 1 - (b_0 - cx) / p_0 \geq \alpha$$

$$\text{kısıtlar } \mu_i(x) = 1 - [(Ax)_i - b_i] \geq \alpha, i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

$$\mu_i(x), \forall i, \alpha \in [0, 1]$$

veya

maks α

$$\begin{aligned} cx &\geq b_0 - (1 - \alpha)p_0 \\ \text{kısıtlar } (Ax)_i &\leq b_i + (1 + \alpha)p_i, \forall i \\ x &\geq 0, \alpha \in [0,1] \end{aligned} \quad (3.14)$$

dır. Burada $\forall i, c, A, b_0, p_0, b_i, p_i$ başlangıçta verilir.

Açıkça, (3.14) kesin bir lineer programlama tekniğidir. Tek optimâl çözüm elde edilebilir. Bu yaklaşımın, bulanık kaynaklar ve amaç ile bir lineer programlama problemini çözen ilk pratik yöntem olarak gözönüne alınmasına dikkat edilmelidir.

3.1.2.1a Örnek 1: Knox ürün-karışım seçimi problemi

Ürün-karışım seçim problemini gözönüne alalım ve $b_0 = 111.57, p_0 = 10$ kabul edelim.

Problemimiz:

bul x

$$g_0(x) = z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 111.57$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$\text{öyle ki } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Burada bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları önceki alt kısımlarda belirtildi ve bulanık kararın μ_0 üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & g_0(x) > 111.57 \\ 1 - [111.57 - g_0(x)]/10, & 101.57 \leq g_0(x) \leq 111.57 \\ 0, & g_0(x) < 101.57 \end{cases}$$

O zaman problemimiz aşağıdakine denk olur:

maks α

$$g_0(x) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 111.57 - 10(1 - \alpha)$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5(1 - \alpha)$$

$$\text{kısıtlar } g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40(1 - \alpha)$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30(1 - \alpha)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \alpha \in [0,1]$$

Çözüm: sırasıyla haftalık işgücü, Y ve Z malzemesi için kaynaklar sırasıyla, 16.51, 81.57 ve 109.03 olurken; $x^* = (8.01, 0, 8.50, 0)$ ve $z^* = \$108.54, \alpha = 0.70$ dir.

3.1.2.1b Örnek 2: Bir bölgesel kaynak tahsis etme problemi

Toplumsal çiftlik toplumunu içeren basitleştirilmiş bir bölgesel kaynak tahsis etme problemi gözönüne alınsın (kollektif çiftlikler sistemi, İsrail). Genel teknik servisleri paylaştıran ve ürünlerini koordine eden; bir konfederasyon olarak birleşmek kollektif çiftlik grupları için yaygındır. Konfederasyon dahilinde; ayrıntılı planlama, koordine bir teknik ofisle başanlır. Ofisin fonksiyonu gelecek yıl için konfederasyonun tarımsal üretimini planlamaktır.

Tahsis etme problemi, üç kollektif çiftliğin bir konfederasyonu ile ilgilidir. Herbir kollektif çiftliğin tarımsal verimi, mevcut sulanabilir toprağın miktarı ve ulusal bir hükümet memuru olan su memuru tarafından sulama için tahsis edilen suyun miktarı (ancak kesin olmayarak belirlenebilir) ile sınırlıdır (tablo 3.6 ya bakın).

Tablo 3.6 sulanabilir toprak ve su hacmi

Kollektif çiftlik	Bulanık aralık	
	Sulanabilir toprak (H)	Su hacmi (H^3)
1	[400,440]*	[600,660]
2	[600,630]	[800,840]
3	[300,320]	[375,450]

* Bulanık aralık için bulanık şartlar “ 400 den küçük olacağı veya 400’den daha büyük olmayacağı ”nı karşılık gelir ve üyelik fonksiyon formu denklem (3.11) gibi tanımlıdır.

Tetkik edilmekte olan ürünler; şeker pancarı, pamuk ve süpürge darısıdır. Bu ürünlerin net hasılatları ve su tüketimleri de farklıdır. Ürünlerin herbirine tahsis edilebilen toprağın kesin olmayan kapasitesi de aşağıdaki gibi tarım bakanlığı tarafından belirlenir:

Tablo 3.7 kollektif çiftlik konfederasyonu için ürün bilgileri

Ürün	Net hasılat (\$/hektar)	(hektometreküp) /(hektar)	Maksimum kapasite (hektar) (Bulanık aralık)
Şeker pancarı	400	3	[600,650]*
Pamuk	300	2	[500,540]
Süpürge darısı	100	1	[325,350]

*Bulanık aralık için bulanık şartlar “ 600 den küçük olacağı veya 600 den daha büyük olmayacağı ”na karşılık gelir ve üyelik fonksiyon formu denklem (3.11) gibi tanımlanır.

Konfederasyonun üç kollektif şirketi, herbir kollektif çiftliğin mevcut sulanabilir toprağının önceki belirlenmiş oranı kullanabileceğine razı olur. Bununla beraber, ürünlerin herhangi bir kombinasyonu çiftliklerin herhangi birinde yetiştirilebilir.

Gelecek yıl için, koordine teknik ofisi ayrı ayrı kollektif çiftliklerde herbir ürünü tahsis eden toprağın miktarını saptamaya sahiptir öyle ki; verilen kısıtlar üzerinde sağlanabilir. Bir amaç olarak, konfederasyonun toplam net hasılatının maksimum alınması yerine, kullanılabilir bir \$350,000 hedef değerine karar verilir ve toplam net hasılat hedef değeri aşmak için gerekmektedir. Hedef değerin oldukça iyimser olduğu durumda, toplam net hasılatın ondan aşağı düşmesine izin verilir, alt çizgi \$250,000 dır. Böylece:

“ Toplam net hasılat \$350,000 dan büyük olmalı ve \$350,000 dan küçük olmamalıdır ” ve ilişki kurulan bulanık [250,000-350,000] aralığı ile denklem (3.10.) un üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Bilgi üzerinde temellenen, konfederasyonun kaynak tahsis etme problemi aşağıdaki gibi bulanık bir lineer programlama problemi olarak formüle edilebilir:

Amaç (bulanık):

$$z = 400(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 300(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 100(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \geq 350,000; 250,000$$

Kısıtlar:

Su tüketimi (bulanık):

$$g_{11}(x) = 3x_{11} + 2x_{21} + x_{31} \leq 600,660$$

$$g_{12}(x) = 3x_{12} + 2x_{22} + x_{32} \leq 800,840$$

$$g_{13}(x) = 3x_{13} + 2x_{23} + x_{33} \leq 375,450$$

Ürün-toprak (bulanık):

$$g_{21}(x) = x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 600,650(\text{şeker - pancarı})$$

$$g_{22}(x) = x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 500,540(\text{pamuk})$$

$$g_{23}(x) = x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 325,350(\text{süpürge - darısı})$$

Sulanabilir toprak (bulanık):

$$g_{31}(x) = x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 400,440$$

$$g_{32}(x) = x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 600,630$$

$$g_{33}(x) = x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 300,320$$

Toprak tahsisi (kesin):

$$g_{41}(x) = (x_{11} + x_{21} + x_{31}) / 400 = (x_{12} + x_{22} + x_{32}) / 600$$

$$g_{42}(x) = (x_{12} + x_{22} + x_{32}) / 600 = (x_{13} + x_{23} + x_{33}) / 300$$

$$g_{43}(x) = (x_{13} + x_{23} + x_{33}) / 300 = (x_{11} + x_{21} + x_{31}) / 400$$

Negatif olmama:

$$x_{ij} \geq 0; i, j = 1, 2, 3$$

Tablo üzerinde, x_{ij} = i ürününü ekmeğe tahsis edilen j kollektif çiftliğinde toprağın hektar sayısıdır. i=1 (şeker pancarı), 2 (pamuk), 3 (süpürge darısı) dır.

Bulanık amaç ve kısıtların üyelik fonksiyonları sırasıyla (3.10) ve (3.11) denklemleri olarak tanımlı olmasından, aşağıdaki modeli elde ederiz:

maks α

$$\begin{aligned}
& 1 - (350000 - z)/100000 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{11}(x) - 600]/60 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{12}(x) - 800]/40 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{13}(x) - 375]/75 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{21}(x) - 600]/50 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{22}(x) - 500]/40 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{23}(x) - 325]/25 \geq \alpha \\
& \text{kısıtlar } 1 - [g_{31}(x) - 400]/40 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{32}(x) - 600]/30 \geq \alpha \\
& 1 - [g_{33}(x) - 300]/20 \geq \alpha \\
& 3(x_{11} + x_{21} + x_{31}) - 2(x_{12} + x_{22} + x_{32}) = 0 \\
& (x_{12} + x_{22} + x_{32}) - 2(x_{13} + x_{23} + x_{33}) = 0 \\
& 4(x_{13} + x_{23} + x_{33}) - 3(x_{11} + x_{21} + x_{31}) = 0 \\
& \alpha \in [0,1], x_{ij} \geq 0, \forall i, j
\end{aligned}$$

Optimâl çözüm: $\alpha^*=0.213$ ile
 $x_{11}^* = 152.78, x_{12}^* = 48.61, x_{13}^* = 128.47, x_{21}^* = 104.94, x_{22}^* = 337.96, x_{23}^* = x_{31}^* = x_{32}^* = 0, x_{33}^* = 64.82$
 dir.

3.1.2.1c Örnek 3: Bulanık bir kaynak ayırma problemi

Bulanık bir kaynak ayırma problemi gözönüne alınsın. Problem, $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ ile indisli I işlerinin yerlerini ayıran eden, $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ ile indisli J kaynaklarının varolduğudur. $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ ile indisli herbir iş, bir veya daha fazla faaliyetin sona ermesine yardım eder. i işini yerine getiren j kaynaklarının miktarı; tüm i ve j ler için x_{ji} ile tanımlıdır. Burada x_{ji} negatif olmayan reel bir sayı ve $x = (x_{ji})$, $J \times I$ boyutlu ayırma matrisidir. j kaynaklarının toplam y_j tüketimleri;

$$y_j = \sum_i x_{ji}$$

ile verilir ve y_j , j kaynağının mevcut h_j çokluğundan daha geniş olmamalıdır. Burada tüm j ler için $h_j > 0$ dır. Bundan dolayı, herbir $j \in \{1, \dots, J\}$ için “ j kaynağının tüketimi olabildiğince küçük ve h_j ye eşit veya büyük olmamalıdır ” sezgisel gereğini tanımlıyan bulanık bir A_j kümesini tanıtır. Matematiksel olarak; $A_j, A_j = \{y_j, \mu_j(y_j)\}$ ile tanımlıdır. Burada tüm j ler için $y_j \in [0, \infty)$ dur. μ_j nin sürekli ve

eğer $y_j^1 < y_j^2$ ve $y_j^1, y_j^2 \in [0, h_j)$ ise $\mu_j(y_j^1) > \mu_j(y_j^2)$

$$\mu_j(0) > 0$$

eğer $y_j \geq h_j$ ise $\mu_j(y_j) = 0$

olduğu varsayılır. Verilen bir k faaliyeti için,

$$x_k = \sum_j \sum_i \Gamma_{jk} x_{ji}$$

ile verilen tüm ayırma faaliyetlerinde toplam etki olarak kabul edilir. Burada herbir (j,i,k) için $\Gamma_{jk} \geq 0$, herbir $x_{ji} = 1$ için bir ayırmanın etkisini tanımlayan bir reel sayıdır.

Bulanık bir küme; tüm k lar için $[0, \infty)$ olduğu gereğini tanımlayan sırada herbir k faaliyeti için tanımlanır. Burada r_k sürekli ve

$$r_k(0) \geq 0 \quad \text{dır.}$$

eğer $x_k^1 < x_k^2$ ve $x_k^1, x_k^2 \geq 0$ ise $r_k(x_k^1) < r_k(x_k^2)$

$$\min_k r_k(0) < \min_j \mu_j(0)$$

ise, r_k, B_k nın üyelik fonksiyonudur. Maks-min operatörünün kullanımıyla; bir $x = (x_{ji})$ ayırma matrisi, $D = \{x, z(x)\}$ ve $x = (x_{ji}) \geq 0$ ile tanımlı bulanık bir D kümesine dayanır (şekil 3.1'de de görülür). Burada $z(x) = \min\{\min_j \mu_j(y_j), \min_k r_k(x_k)\}$ dır. $z(x)$ üyelik fonksiyonunun en yüksek z^* değeri ile bir x^* kararı o zaman $z(x)$ i maksimize eden çözüm ile verilir. Burada $x = (x_{ji}) \geq 0$ dır. Bu aşağıdaki problemi çözmek demektir:

maks α

$$\forall j, \mu_j(\sum_i x_{ji}) \geq \alpha$$

$$\text{kısıtlar } \forall k, r_k(\sum_j \sum_i \Gamma_{jk} x_{ji}) \geq \alpha$$

$$x = (x_{ji}) \geq 0$$

Yukarıdaki problemin çözümü ile, r_k, δ_k nın tam olarak artan bir fonksiyonu olduğunun gösterimiyle, $\delta_k \in [-1, 0]$ için $r_k(\delta_k) = r_k(0)(\delta_k + 1)$ olarak r_k nın tanımını genişletelim.

Aşağıdaki gerekler ile tanımlanan invers fonksiyonlarının varlığını gerektiren μ_j ve r_k fonksiyonlarında süreklilik ve tam monotonluk varsayımlarına dikkat edilir:

$$\mu_j(y_j) = \alpha \Leftrightarrow \mu_j^{-1}(\alpha) = y_j; y_j \in [0, h_j), \alpha \in (0, \mu_j(0)]$$

$$r_k(\delta_k) = \alpha \Leftrightarrow r_k^{-1}(\alpha) = \delta_k; \delta_k \in [-1, 0], \alpha \in [0, r_k(\infty)]$$

$\mu_j(y_j)=0$ ve $y_j \geq h_j$ iken $\mu_j^{-1}(0)$ nın eşit derecede tanımlı olmadığına dikkat edilmelidir.

Bunu μ_j^{-1} ve r_k^{-1} nın sırasıyla tam olarak azalan ve tam olarak artan fonksiyonlar olduğu takip eder. $\alpha \in [0, \min_j \mu_j(0)] (z^* \leq \min_j \mu_j(0))$ için, problemimiz:

maks δ

$$\forall j, a_j \delta - \sum_i x_{ji} \geq a_j \alpha - \mu_j^{-1}(\alpha)$$

$$\text{kısıtlar } \forall k, b_k \delta - \sum_j \sum_i \Gamma_{jki} x_{ji} \leq b_k \alpha - r_k^{-1}(\alpha)$$

$$x = (x_{ji}) \geq 0$$

olur. Burada $\forall j$ için $a_j < 0$ ve $\forall k$ için $b_k > 0$ verilen (seçilmiş) reel sayılardır. Böylece, bulanık kaynak ayırma problemimizin optimal çözümü aşağıdaki yöntemle hesaplanır:

1. Adım: $n=1$ ile başla ve yukarıdaki problemi α nın seçilmiş bir α_1 değeri çöz. Eğer $\delta^*(\alpha_1) = \alpha_1$ ise yöntemi sonlandır; diğer hallerde 2.adıma geç.
2. Adım: Eğer $\delta^*(\alpha_n) > \alpha_n$ ise $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ yi seç ve eğer $\delta^*(\alpha_n) < \alpha_n$ ise $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ yi seç ve problemi çöz. Eğer $\delta^*(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}$ ise veya $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ olduğunda eğer $z^* \in (\alpha_n, \alpha_{n+1})$ ise veya $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ olduğunda eğer $z^* \in (\alpha_{n+1}, \alpha_n)$ ise yöntemi sonlandır ve $|\alpha_{n+1} - \alpha_n|$ farkı yeteri derecede küçüktür. Diğer hallerde $(n+1)$ ile n in yerini değiştir ve 2. adıma geri dön.

Şimdi, aşağıdaki verilerin verildiğini varsayalım ($J=I=K=2$):

$$(\Gamma_{j1}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\Gamma_{j2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1(y_1) = \begin{cases} 3 - y_1, y_1 \in [0,1] \\ 7/2 - (3/2)y_1, y_1 \in (1,2) \\ 0, y_1 \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$\mu_2(y_2) = \begin{cases} 2 - y_2, y_2 \in [0,2) \\ 0, y_2 \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$r_1(x_1) = \begin{cases} 3x_1, x_1 \in [0,1) \\ 2 + x_1, x_1 \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$r_2(x_2) = \begin{cases} x_2, x_2 \in [0,1) \\ -1 + 2x_2, x_2 \in [1, \infty) \end{cases}$$

ve $a_1 = a_2 = -1$ ve $b_1 = b_2 = 1$ olsun. Bu problem o zaman aşağıdaki lineer programlama problemi olarak formüle edilebilir:

maks δ

$$-\delta - x_{11} - x_{12} - s_1 = -\alpha - \mu_1^{-1}(\alpha)$$

$$-\delta - x_{21} - x_{22} - s_2 = -\alpha - \mu_2^{-1}(\alpha)$$

$$\text{kısıtlar } \delta - 2x_{11} - x_{12} - s_3 = \alpha - r_1^{-1}(\alpha)$$

$$\delta - x_{22} - s_4 = \alpha - r_2^{-1}(\alpha)$$

$$\forall j, i, x_{ji} \geq 0$$

Algoritmanın 1. Adımında $\alpha_1 = 0$ seçilir ve bu problemin çözümü 1,1,1,1 değerleri ile δ , s_1, x_{12}, x_{22} temel değişkenlerini ve $\delta^*(0) (=1) > \alpha_1 (=0)$ 'ı verir. Böylece, $\alpha_2 = 2$ olsun. O zaman çözüm: $\delta^* = 1/2, x_{11} = 1/2, x_{12} = 2/3, x_{22} = 3/2$ dir. Şimdi, $\delta^*(2) = 1/2 > 2$ ve $\alpha_3 < 2$ istenir. $\alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ nin seçimi, $(\delta^*, x_{11}, x_{12}, x_{22}) = (1,1,1,1)$ çözümünü verir. $\delta^*(1) = 1, z^* = 1$ ve $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})^* = (1,2,0,1)$ ile verilen bir optimâl çözümü gösterir.

3.1.2.2 Chanas'ın yaklaşımı- Non-simetrik bir model

Denklem (3.8) için; Chanas, b_0 hedefini ve bulanık yapılabilir bölge hakkındaki bilginin eksikliğinden dolayı başlangıçta tayin edilemeyen p_0 toleransını gözönüne aldı. Bundan dolayı, sırasıyla karar vericiye b_0 ve p_0 ı tayin etmesine yardımcı olmadı, Chanas ilk olarak aşağıdaki problemi çözmüş ve sonra karar vericinin saptayacağı b_0 ve p_0 sonuçlarını göstermiştir:

maks cx

$$\text{kısıtlar } \begin{aligned} \forall i, (Ax)_i &\leq \tilde{b}_i \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Burada her bir b_i için p_i toleransları verilir ve bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları denklem (3.11) gibi kabul edilir. O zaman $\forall i, (Ax)_i \leq b_i + (1-\alpha)p_i$ ye denk olan $\forall i, \mu_i \geq 1 - [(Ax)_i - b_i]/p_i$ yi elde ederiz. Eğer $\theta = 1-\alpha$ ise, $(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i$ yi elde edeceğiz. Açıkça, denklem (3.15) aşağıdaki parametrik programlamaya denktir.

maks cx

$$\text{kısıtlar } \begin{aligned} \forall i, (Ax)_i &\leq b_i + \theta p_i \\ x &\geq 0, \theta \in [0,1] \end{aligned}$$

Burada $\forall i; c, A, b_i$ ve p_i verilir ve θ bir parametredir. Sabit bir θ parametresi ile her kabul olunabilir $x^*(\theta)$ çözümü için kural:

$$\forall i, \mu_i(Ax^*(\theta)) \geq 1 - \theta$$

kolayca görülebilir. Diğer bir yol, her sıfır olmayan temel çözümü için (eğer $p_i > 0$ ise), orada öyle $\mu_i(Ax^*(\theta)) \geq 1 - \theta$ (veya $(Ax)_i = b_i + \theta p_i$) olan en küçük aktif bir i kısıtı vardır ve sonuç olarak kısıtların memnuniyetinin ortak derecesi:

$$\mu_c(Ax^*(\theta)) = \bigwedge_i \mu_i((Ax^*(\theta)) = 1 - \theta$$

dır. Bu yüzden; herbir θ için, $1 - \theta$ derecesi ile birlikte kısıtları sağlayan bir çözüm (eğer biri varsa) elde ederiz.

Denklem (3.16) nın optimâl $z^*(\theta)$ ve $x^*(\theta)$ çözümlerini o zaman karar vericiye sunar. Şimdi karar verici b_0 ve buna karşılık gelen p_0 'ı seçer. O zaman bu değerlere uygun olarak (3.10) gibi amaç fonksiyonunun μ_0 üyelik fonksiyonlarını kurarız. $x^*(\theta)$ da sonuç optimâl çözüm varolacağından, θ ile ilgili olmasıyla her zaman parçalı lineer fonksiyon olan μ_0 :

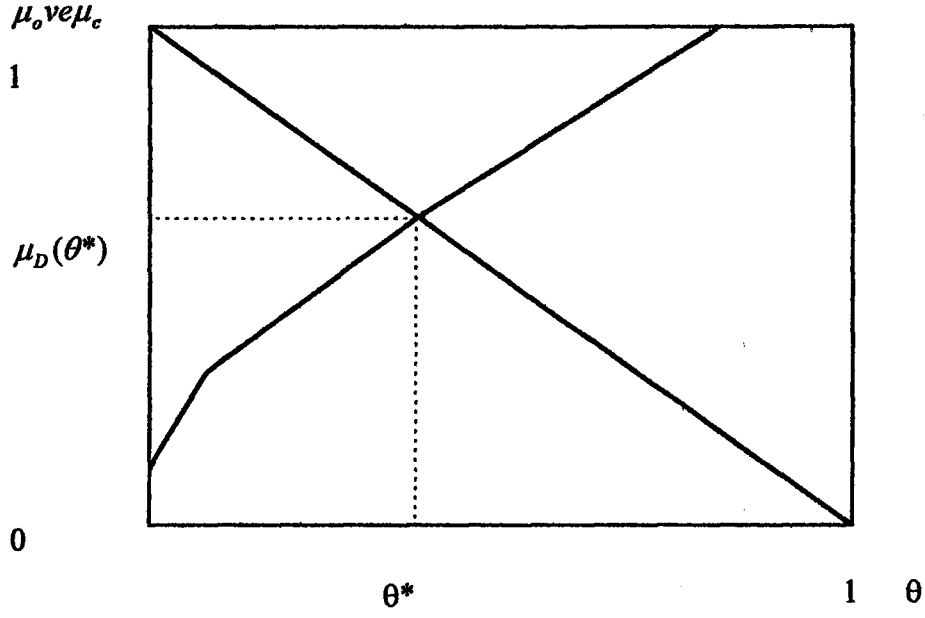
$$\mu_0(x^*(\theta)) = \begin{cases} 1, & cx^*(\theta) > b_0 \\ 1 - [b_0 - cx^*(\theta)] / p_0, & b_0 - p_0 \leq cx^*(\theta) \leq b_0 \\ 0, & cx^*(\theta) < b_0 - p_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

dır.

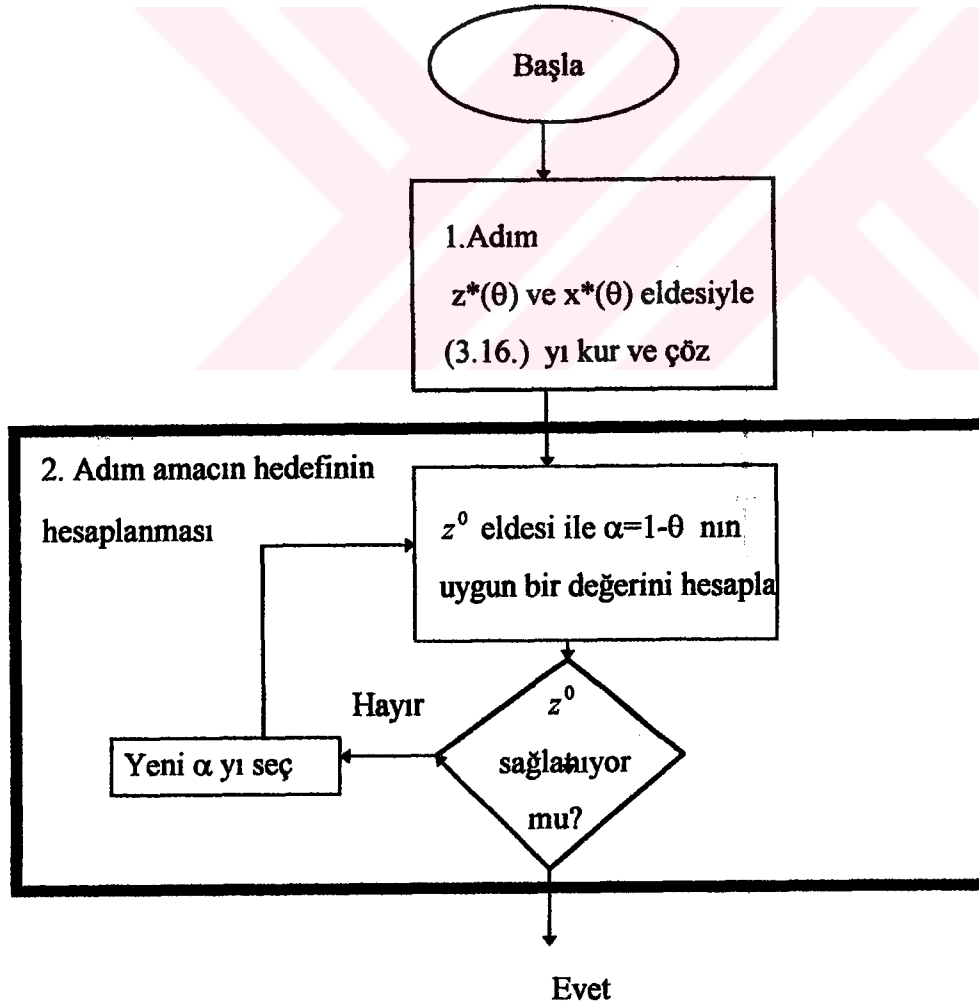
Denklem (3.16) da, bulanık kısıt kümesinin kapsayıcı μ_c üyelik fonksiyonu, min operatörünün kullanımıyla, $1 - \theta$ dır. Bundan dolayı, sonuç optimâl $x^*(\theta^*)$ ve $z^*(\theta^*)$ çözümleri şekil 3.9 de gösterildiği gibi;

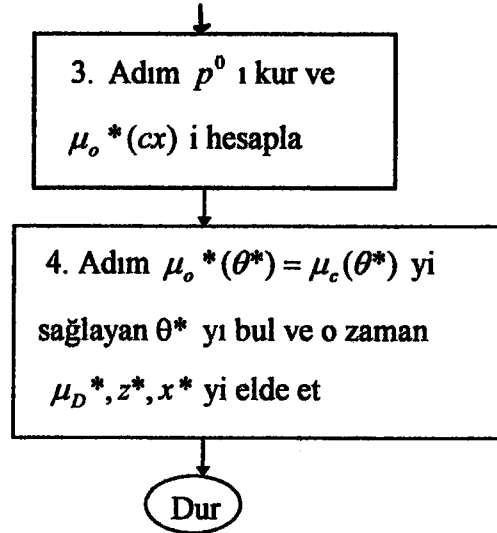
$$maks \mu_D(\theta) = maks\{\min[\mu_0(\theta), \mu_c(\theta)]\} = maks[\mu_0(\theta) \wedge \mu_c(\theta)] \quad (3.19)$$

da varolacaktır. Bu yaklaşımın şekillendirilmesiyle, şekil 3.10 da gösterildiği gibi algoritmayı kurarız.



Şekil 3.9 μ_o ve μ_c nin kesişimi





Şekil 3.10 Chanas yaklaşımının çözüm yöntemi

3.1.2.2a Örnek 1: Optimâl bir sistem plan problemi

Zeleny tarafından teklif edilen optimâl bir sistem planlanması problemi gözönüne alınsın. Bununla birlikte, bunu bulanık bir lineer programlama probleminin bir örneği olarak nitelendereceğiz.

Zeleny, modern üretim sistemlerinin yeni yüksek verimlilik vasıfları: asgari tamponlar, sifıra yakın envanterler, kaynakların tümünün kullanımı, planların esnekliği, kaynak tahvilleri, v.s. ile karakterize edilerek gittikçe artan olduğunu önerdi. Bu yüzden; kesin matematik programlama, kaynakların kullanımı altında matematiksel olarak bunun dahili ile, amacın tek fikirsizliği ve sabitte yerleştirme bir yeterli derecede çok olduğu ve bu yeni ihtiyaçlara uyan esnek araç ortaya çıkmayacaktır.

Burada, bulanık bir alanda optimâl bir plan sistemi gözönüne alınır ve çözülür. Kısıtlar ve amaç fonksiyonu bulanıklaştırılmıştır.

Küçük bir şirket son birkaç yılbaşı dönemi için yüksek bir derecede çok kârlı süslü mallar yapıyor. Bu süslü malların x ve y gibi iki versiyonu yaygındır. Herbiri için beş farklı parçaya ihtiyaç vardır: altın tel, ipek, kadife, gümüş tel ve naylon. x ve y için giriş fiyatları ve teknolojik katkıları tablo 3.8 de veriliyor. Kâr miktarı, x in her ünitesi için \$400 ve y nin her ünitesi için \$300 dır.

Tablo 3.8 girişler ve teknolojik katsayılar

Kaynaklar	Teknolojik Katsayılar		Fiyat/ünite (\$)
	x	y	
altın tel	4	0	30
ipek	2	6	40
kadife	12	4	9.5
gümüş tel	0	3	20
naylon	4	4	10

Bu kâr miktarlarının devam ettirme sırasıyla, şirket parçaların alımında esasen \$2600 den fazla harcanmasına izin vermiyor. Eğer karar verici; altın tel, ipek, kadife, gümüş tel ve naylonun sırasıyla 20,24,60,10.5,26 ünite satın almak için \$2600 harcıyorsa; aşağıdaki lineer programlama problemini çözeceğiz ve verilen durumda optimâl üretim programını elde ederiz:

$$\text{maks } 400x+300y \quad (\text{kârlar})$$

$$\text{kısıtlar } 4x \leq 20 \quad (\text{altın tel})$$

$$2x+6y \leq 24 \quad (\text{ipek})$$

$$12x+4y \leq 60 \quad (\text{kadife})$$

$$3y \leq 10.5 \quad (\text{gümüş tel})$$

$$4x+3y \leq 26 \quad (\text{naylon})$$

Grafik tekniği ile, $x^*=(3.125,2.625)$ çözümü elde edilir ve optimâl kâr=2437.5 dir.

Şimdi izleyen bulanık lineer yüksek-verimlilik-sistem programlama modeli (Lai, Y. J. [1991]) içine yukarıdaki problemi formüle edelim:

$$\text{maks } 400x+300y \quad (\text{kârlar})$$

$$\text{kısıtlar } 4x = b_1 \quad (\text{altın tel})$$

$$2x+6y = b_2 \quad (\text{ipek})$$

$$12x+4y = b_3 \quad (\text{kadife})$$

$$3y = b_4 \quad (\text{gümüş tel})$$

$$4x+3y = b_5 \quad (\text{naylon})$$

$$30b_1 + 40b_2 + 9.5b_3 + 20b_4 + 10b_5 \leq 2600 \quad (\text{bütçe})$$

$$x, y, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \geq 0$$

Burada $b_i, i=1, \dots, 5$, sıfıra yakın envanter ile yüksek-verimlilik sistemlerine ulaşan optimâl kaynak seviyeleridir. Çözüm yöntemi aşağıdaki gibi gösterilir:

1. Adım: Bütçe kısıtı için maksimal toleransın \$200 olduğunu varsayalım, o zaman parametrik programlama versiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\text{maks } 400x+300y$$

$$\text{kısıtlar } 30(4x)+40(2x+6y)+9.5(12x+4y)+20(3y)+10(4x+3y)=354x+368y \leq 2600+200\theta$$

$$x, y \geq 0 \text{ ve } \theta \in [0, 1]$$

Optimâl çözüm $x^* = ((2600+200\theta)/354, 0)$ ve $z^*(\theta) = (400/354)(2600+200\theta)35\theta$ dir.

2. Adım: Basitçe, $z_0 = 3100$ ün kâr amacının hedefi olduğunu kabul edelim.

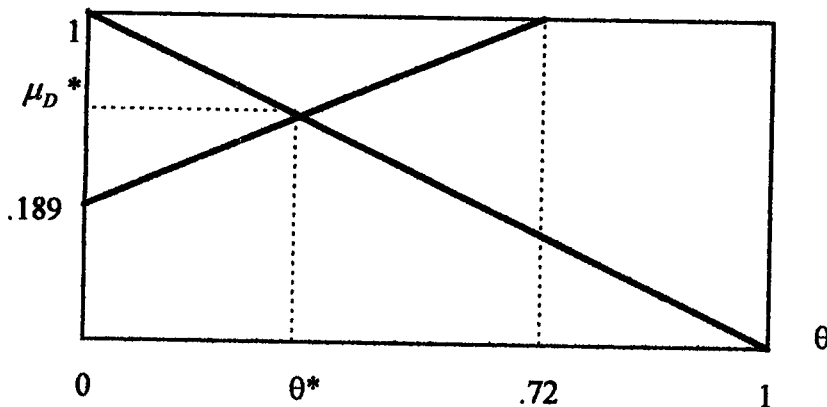
3. Adım: $p_0 = 200$ ve kâr amacının üyelik fonksiyonunu denklem (3.10) gibi lineer olduğunu kabul edelim. Böylece, amacın aşağıdaki üyeliği elde edilecektir:

$$\mu_o^*(\theta) = 1 - \frac{3100 - 400(2600 + 200\theta)/354}{200} = 0.189 + 1.13\theta$$

4. Adım: Şekil 3.11 de gösterildiği gibi $\mu_c = \mu_o$ alalım. $0.189 + 1.13\theta = 1 - \theta$ elde ederiz ve o zaman $\theta^* = 0.38$ dir. Böylece, $\mu_D^* = \mu_o = \mu_c = 1 - 0.38 = 0.62$ dir. O zaman optimâl çözüm: $x^* = [2600 + 200(0.38)]/354 = 7.56$, $y^* = 0$ ve $z^* = \$3023.73$ dir. Gerekli kaynaklar: $b_1^* = 30.24, b_2^* = 15.12, b_3^* = 90.72, b_4^* = 0, b_5^* = 30.24$ dür ve bütçe \$2676.24 dür.

Tablo 3.9 kesin lineer programlama ve bulanık lineer yüksek-verimlilik programlamanın iki çözümü arasındaki farkı gösterir.

$$\mu_o^*, \mu_c$$



Şekil 3.11 bulanık optimâl sistem plan probleminin optimâl çözümü

Kesin standart sistemi	Bulanık yüksek-verimlilik sistemi
$x^*=4.125$ $y^*=2.625$	$x^*=7.56$ $y^*=0$
Kâr $z^*=\$2437.5$	$z^*=3023.73$
Kaynaklar $b_1 = 20$ $b_2 = 24$ $b_3 = 60$ $b_4 = 20.5$ $b_5 = 26$	$b_1^* = 30.24$ $b_2^* = 15.12$ $b_3^* = 90.72$ $b_4^* = 0$ $b_5^* = 30.24$

3.1.2.2b Örnek 2: Bir bütün üretim planlama problemi

Tek amaçlı bir bütün ürün planlama (BÜP) problemi gözönüne alınsın. BÜP, gelecekte yaklaşık 12 aya kadar ortalama zaman aralığı üzerinde önceden tahmin edilen ve değişen müşteri siparişlerinin arz ve talebinin uymasına değinir. “ Bütün ” terimi, planlamanın bütün birkaç bütün ürün kategorileri için yapıldığını ifade eder. Bütün üretim planlamanın kararları; (1) yakın gelecekte değişme veya kararsız taleplerle karşılaşan herbir ürün kategorisi için kapsayıcı üretim seviyelerini kurmak, (2) BÜP, iyi olarak kullanılan uygun kaynakları saptayabilir olduğunu ifade eden kiralama, işçilerin geçici olarak işten çıkarılması, iş saatlerinden fazla çalışma süresi, tekrar sipariş, yan mukavele yapma ve envanter seviyesi konularında kararlar ve politikalar oluşturmaktır.

Bütün üretim planlama modellerinden birisinin kullanımında, sık sık hedeflerin ve model girişlerinin (kaynaklar ve talepler) deterministik/kesin olduğu varsayılır. Uygulamada; talepler, kaynaklar ve fiyatlar genellikle kesin olmayan/bulanıktır. Tutulan

BÜP modeli, amaç fonksiyonu ve parametrelerin tamamen tanımlı olmadığı ve doğru olarak ölçülemeyeceği durumda bulanık bir ortamda bilgiyi gösterir. En iyi uyuşan BÜP, taleplerde düzensiz değişimle karşılaşan düzenleme faaliyet seviyelerinin fiyatlarına karşılık envanteri kurma ve tutma fiyatlarını dengeler. Belirli bir periyotta tahmin edilen talep ya sağlanacak ya da tekrar tekrar sipariş edilebilecektir. Bununla birlikte, tekrar sipariş gelecek periyot içinde yapılmalıdır. BÜP için tek amaçlı lineer programlama modeli şu şekilde formüle edilebilir:

$$\min \sum_{t=1}^T [C_{pt}(P_{nt} + P_{ot}) + C_{nt}W_t + C_{ot}(kP_{ot}) + C_{it}I_t + C_{bt}B_t + C_{ht}H_t + C_{lt}L_t] \quad (D.1)$$

$$\text{kısıtlar } W_t \leq \tilde{W}_{t\max} \quad (D.2)$$

$$W_t = W_{t-1} + H_t - L_t \quad (D.3)$$

$$kP_{nt} \leq \delta W_t \quad (D.4)$$

$$kP_{ot} \leq \beta_t \delta W_t \quad (D.5)$$

$$P_{nt} + P_{ot} + I_{t-1} - B_{t-1} \geq \tilde{F}_{t\min} \quad (D.6)$$

$$I_t - B_t = I_{t-1} - B_{t-1} + P_{nt} + P_{ot} - F_t \quad (D.7)$$

$$\forall t, P_{nt}, P_{ot}, W_t, I_t, B_t, H_t, L_t \geq 0 \quad (D.8)$$

Burada parametreler ve karar değişkenleri aşağıdaki tabloda açıklanmıştır.

Parametreler ve sabitler:

C_{pt} : t periyodunda işçilik ücreti hariç üretim bedeli (\$/ünite)

C_{ot} : t periyodunda fazla mesai bedeli (\$/çalışma saati)

C_{nt} : t periyodunda işçilik bedeli (\$/çalışma saati)

C_{it} : t periyodunda envanter götürme bedeli (\$/ünite-periyot)

C_{ht} : t periyodunda bir işçinin kiralama bedeli (\$/çalışma saati)

C_{lt} : t periyodunda bir işçinin geçici olarak işten çıkarılması bedeli (\$/çalışma saati)

C_{bt} : t periyodunda stok dışında bedeli (\$/ünite-periyot)

k: üretimin her ünitesinin iş saatindeki değişme faktörü

δ : her gün her işçinin düzenli çalışma saatleri

β_t : fazla mesai üretimi için mümkün çalışma saatlerinin küçük parçası

T: periyotların ufuk veya sayılarının planlanması

I_0 : başlangıç envanter seviyesi (üniteler)

W_0 : başlangıç çalışma gücü seviyesi (çalışma günü)

B_0 : başlangıç tekrar sipariş seviyesi (üniteler)

W_{maks} : t periyodunda mümkün maksimum çalışma gücü (çalışma günü)

F_t : t periyodunda tahmin edilen talep (üniteler)

F_{tmin} : t periyodunda minimum talep (üniteler)

Karar değişkenleri:

P_n : t periyodunda düzenli zaman üretimi (üniteler)

P_{ot} : t periyodunda fazla mesai üretimi (üniteler)

W_t : t periyodunda çalışma gücü (çalışma günü)

I_t : t periyodunda envanter seviyesi (üniteler)

B_t : t periyodunda tekrar sipariş seviyesi (üniteler)

H_t : t periyodunda işçi kiralanması (çalışma günü)

L_t : t periyodunda işçinin geçici olarak işten çıkarılması (çalışma günü)

Tek amaçlı BÜP problemi için bulanık lineer programlama modeli bulanık bir hedefe, herbir periyotta izin verilen bulanık çalışma gücüne ve bulanık taleplere sahiptir. Denklem (D.1) minimize toplam fiyatın amacıdır. Denklem (D.2), bir periyotta maksimum mevcut işçi gücünün sınırını oluşturan politikadır. Denklem (D.3), artı yeni kiralamarar eksi işçilerin geçici olarak işten çıkarılmalarıyla t-1 periyodunda çalışma gücüne eşit olan t periyodundaki çalışma gücünün olduğu kısıtları gösterir. (D.4) ve (D.5) denklemleri mevcut saatlerle düzenli ve fazla mesai üretimini sınırlayan kısıtları gösterir. Denklem (D.6), birden fazla periyot için taşınmayan bir periyotta bir tekrar sipariş üretimi olduğu kısıtın yerine geçer. Denklem (D.7) artı düzenli zaman ürünü, fazla mesai ürünü ve eksi tahmini

talep ile t-1 periyodundakine eşit olan t periyodundaki envanter seviyesi veya tekrar sipariş seviyesi olan bir çözümü ister. Denklem (D.8) negatif olmayan bir kısıttır.

Şimdi, aşağıdaki sayısal verileri gözönüne alalım:

- a) Ünitelerin [250,275], [285,330], [430,500], [260,320], [300,350], [270,340] aralıklarının bulanık talepleri ile altı periyot planlama ufku vardır. Burada, 1 ve 2 periyodunda gelecek talebin trendinin iyimser olduğu varsayılır. Karar verici, 1 ve 2 periyotları için sırasıyla; 275 ve 330 talep seviyelerinde en yüksek memnuniyete ve 250 ve 285 talep seviyelerinde en düşük memnuniyete sahiptir. Karar verici, 5 ve 6 periyotlarında kötümser, 3 ve 4 periyotlarında arada bir kararda taleplerin olduğunu hisseder. Minimum talepler sırasıyla 250, 285, 430, 260, 300 ve 270 üniteleridir.
- b) İşçilik bedelinden başka ürün bedeli her ünite için \$20 dır. Üç iş saatine, herbir yapılmış ünite için ihtiyaç duyulur. Düzenli iş gücü bir günde sekiz saat çalışır.
- c) Başlangıç iş gücü 100 işçidir. İzin verilen maksimum işçi sayısı 1 ve 2 periyotları için [90,100] ve [100,115]; 3, 4, 5 ve 6 periyotları için [120,150] dir. Düzenli maaş bodrosu, kiralama ve teşvik etme ile ilişkili bedeller günde herbir işçi için sırasıyla, \$64, \$30 ve \$40 dır.
- d) Fazla mesai ürünü, düzenli zaman ürününün %30 dan fazla olmamak üzere sınırlandırılır. Fazla mesai ücreti saatte her işçi için \$15 da tabanlandırılır.
- e) Başlama envanteri yoktur. Envanter taşıma bedeli her periyotta herbir ünite için \$2 dır. Tekrar sipariş birden fazla periyot üzerinde taşınmaz. Herbir periyotta herbir ünite için tekrar sipariş bedeli \$3 dır.

Bu BÜP modelinin formülü:

$$\min \sum_{t=1}^6 [20(P_{rt} + P_{ot}) + 64W_t + 15(3P_{ot}) + 2I_t + 3B_t + 30H_t + 40L_t]$$

$$\text{kısıtlar } W_1 \leq 90, W_2 \leq 100, W_3 \leq 120$$

$$W_4 \leq 120, W_5 \leq 120, W_6 \leq 120$$

$$W_1 = W_0 + H_1 - L_1, W_2 = W_1 + H_2 - L_2$$

$$W_3 = W_2 + H_3 - L_3, W_4 = W_3 + H_4 - L_4$$

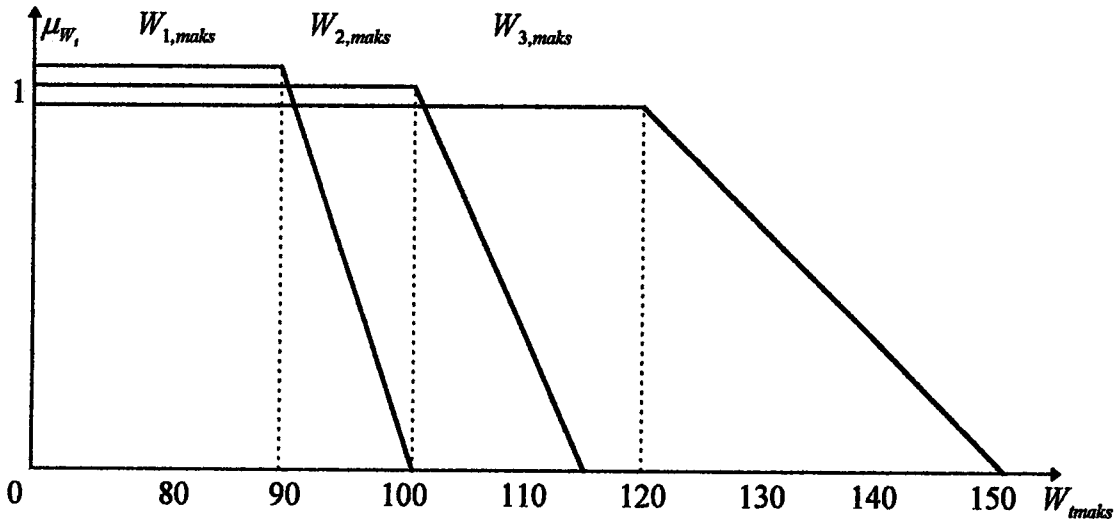
$$W_5 = W_4 + H_5 - L_5, W_6 = W_5 + H_6 - L_6$$

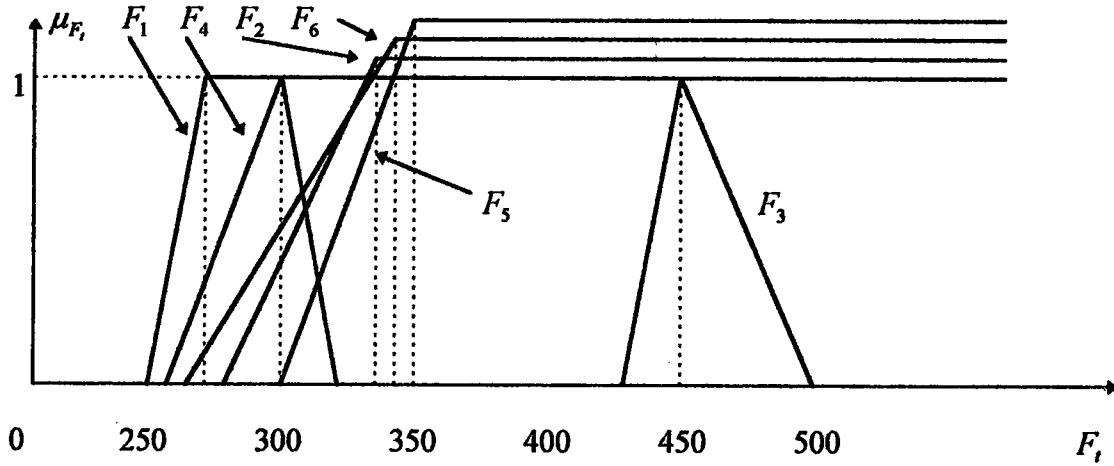
$$3P_{r1} \leq 8W_1, 3P_{r2} \leq 8W_2, 3P_{r3} \leq 8W_3$$

$$\begin{aligned}
3P_{r4} &\leq 8W_4, 3P_{r5} \leq 8W_5, 3P_{r6} \leq 8W_6 \\
3P_{o1} &\leq (0.3)8W_1, 3P_{o2} \leq (0.3)8W_2, 3P_{o3} \leq (0.3)8W_3 \\
3P_{o4} &\leq (0.3)8W_4, 3P_{o5} \leq (0.3)8W_5, 3P_{o6} \leq (0.3)8W_6 \\
P_{r1} + P_{o1} + I_0 - B_0 &\geq 250 \\
P_{r2} + P_{o2} + I_1 - B_1 &\geq 285 \\
P_{r3} + P_{o3} + I_2 - B_2 &\geq 430 \\
P_{r4} + P_{o4} + I_3 - B_3 &\geq 260 \\
P_{r5} + P_{o5} + I_4 - B_4 &\geq 300 \\
P_{r6} + P_{o6} + I_5 - B_5 &\geq 270 \\
I_1 - B_1 &= I_0 - B_0 + P_{r1} + P_{o1} - 275 \\
I_2 - B_2 &= I_1 - B_1 + P_{r2} + P_{o2} - 330 \\
I_3 - B_3 &= I_2 - B_2 + P_{r3} + P_{o3} - 450 \\
I_4 - B_4 &= I_3 - B_3 + P_{r4} + P_{o4} - 300 \\
I_5 - B_5 &= I_4 - B_4 + P_{r5} + P_{o5} - 300 \\
I_6 - B_6 &= I_5 - B_5 + P_{r6} + P_{o6} - 270 \\
P_{rt}, P_{ot}, W_t, I_t, B_t, H_t, L_t &\geq 0, t = 1, \dots, 6
\end{aligned}$$

Burada bulanık taleplerin ve çalışma gücü seviyelerinin üyelik fonksiyonları şekil 3.12 de verilmiştir. 1 periyodundaki çalışma gücü seviyesinin üyelik fonksiyonu örneğin aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mu_{W_{1maks}} = \begin{cases} 1, W_{1maks} < 90 \\ 1 - (W_{1maks} - 90)/10, 90 \leq W_{1maks} \leq 100 \\ 0, 100 < W_{1maks} \end{cases}$$





Şekil 3.12 bulanık çalışma gücü seviyeleri ve bulanık taleplerin üyelik fonksiyonları

Chanas'ın kavramına uygun olarak, ilk $W_1 \leq 90 + 10\theta$ bulanık kaynak kısıtı için aşağıdaki denk kısıtları elde edebiliriz. Çalışma gücü seviyesinin diğer bulanık kaynakları $W_2 \leq 100 + 15\theta$ ve W_3, W_4, W_5 ve $W_6 \leq 120 + 30\theta$ dır. Bulanık taleplerin eşitlik kısıtları için:

$$I_0 + B_1 - I_1 - B_0 + P_{r1} + P_{o1} + x_1 = 275$$

$$x_1 \leq 275 - 275 + (250 + 0)\theta = 250\theta$$

$$I_1 + B_2 - I_2 - B_1 + P_{r2} + P_{o2} + x_2 = 330$$

$$x_2 \leq 450\theta$$

$$I_2 + B_3 - I_3 - B_2 + P_{r3} + P_{o3} + x_3 = 450 + 50\theta$$

$$x_3 \leq 700\theta$$

$$I_3 + B_4 - I_4 - B_3 + P_{r4} + P_{o4} + x_4 = 300 + 20\theta$$

$$x_4 \leq 600\theta$$

$$I_4 + B_5 - I_5 - B_4 + P_{r5} + P_{o5} + x_5 = 300 + 50\theta$$

$$x_5 \leq 500\theta$$

$$I_5 + B_6 - I_6 - B_5 + P_{r6} + P_{o6} + x_6 = 270 + 70\theta$$

$$x_6 \leq 700\theta$$

elde ederiz. Burada $x_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ yardımcı bir değişkendir. Bizim problemimiz:

$$\min z = \sum_{i=1}^6 [20(P_{ri} + P_{oi}) + 64W_i + 15(3P_{oi}) + 2I_i + 3B_i + 30H_i + 40L_i]$$

$$\text{kısıtlar } W_1 \leq 90 + 10\theta, W_2 \leq 100 + 15\theta$$

$$W_i \leq 120 + 30\theta, i = 3, 4, 5, 6$$

$$W_1 = W_0 + H_1 - L_1, W_2 = W_1 + H_2 - L_2$$

$$W_3 = W_2 + H_3 - L_3, W_4 = W_3 + H_4 - L_4$$

$$\begin{aligned}
W_5 &= W_4 + H_5 - L_5, W_6 = W_5 + H_6 - L_6 \\
3P_{r1} &\leq 8W_1, 3P_{r2} \leq 8W_2, 3P_{r3} \leq 8W_3 \\
3P_{r4} &\leq 8W_4, 3P_{r5} \leq 8W_5, 3P_{r6} \leq 8W_6 \\
3P_{o1} &\leq (0.3)8W_1, 3P_{o2} \leq (0.3)8W_2 \\
3P_{o3} &\leq (0.3)8W_3, 3P_{o4} \leq (0.3)8W_4 \\
3P_{o5} &\leq (0.3)8W_5, 3P_{o6} \leq (0.3)8W_6 \\
P_{r1} + P_{o1} + I_0 - B_0 &\geq 250 \\
P_{r2} + P_{o2} + I_1 - B_1 &\geq 285 \\
P_{r3} + P_{o3} + I_2 - B_2 &\geq 430 \\
P_{r4} + P_{o4} + I_3 - B_3 &\geq 260 \\
P_{r5} + P_{o5} + I_4 - B_4 &\geq 300 \\
P_{r6} + P_{o6} + I_5 - B_5 &\geq 270 \\
I_0 + B_1 - I_1 - B_0 + P_{r1} + P_{o1} + x_1 &= 275 \\
I_1 + B_2 - I_2 - B_1 + P_{r2} + P_{o2} + x_2 &= 330 \\
I_2 + B_3 - I_3 - B_2 + P_{r3} + P_{o3} + x_3 &= 450 + 50\theta \\
I_3 + B_4 - I_4 - B_3 + P_{r4} + P_{o4} + x_4 &= 300 + 20\theta \\
I_4 + B_5 - I_5 - B_4 + P_{r5} + P_{o5} + x_5 &= 300 + 50\theta \\
I_5 + B_6 - I_6 - B_5 + P_{r6} + P_{o6} + x_6 &= 270 + 70\theta \\
x_1 &\leq 25\theta, x_2 \leq 45\theta, x_3 \leq 70\theta \\
x_4 &\leq 60\theta, x_5 \leq 50\theta, x_6 \leq 70\theta \\
\forall t, P_{rt}, P_{ot}, W_t, I_t, B_t, H_t, L_t, x_t &\geq 0
\end{aligned}$$

şeklini alır. Şimdi, bu problemi çözmek için Chanas tarafından önerilen parametrik programlama yaklaşımını kullanabiliriz. Bununla birlikte, karar verici için en yararlı olan tablo 3.10 daki gibi 11 mümkün çözümü verdik.

Üretim planları ile ilişkili toplam fiyatlar \$81.915 ve \$91.213 arasındadır. $\alpha=1-\theta=1$ için; karar verici, yararlanılan bulanık kaynaklarda en yüksek memnuniyet seviyesine sahiptir. Sonuçlar, karar vericinin düşüncesindeki maksimum memnuniyet seviyesi bulanık herbir parametre ile meydana getirilmiş olduğunu gösterir. Üretim planı, fazla mesai ürünü, daha az insan kiralama ve daha az bir envanter seviyesinin kurulmasının kullanılmasıyla daha fazlasını verecektir. Diğer bir yol; karar verici, düzenli zaman üretimi ve en düşük bir (α) seviyesi gösterildiği zaman iyimser periyotlar boyunca envanterin geliştirilmesi vasıtasıyla daha fazla üreten daha fazla insan kiralayacaktır. Tablo 3.10 da gösterildiği gibi; toplam fiyat [\$81,000,\$88,000] de olacaktır. Hedef, \$7,000 tolerans ile \$81,000 dır. O zaman amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu (z =toplam fiyat):

$$\mu_z(z^*(\theta)) = \begin{cases} 1, & z^*(\theta) < 81000 \\ 1 - [z^*(\theta) - 81000] / 7000, & 81000 \leq z^*(\theta) \leq 88000 \\ 0, & z^*(\theta) > 88000 \end{cases}$$

dır. Bundan dolayı;

$$z^*(\theta) \leq 81000 + 7000\theta$$

bağıntısı elde edilir.

Tablo 3.10 bulanık BÜP probleminin bulanık çözümleri

θ	$z^*(\theta)$	θ	$z^*(\theta)$	θ	$z^*(\theta)$	θ	$z^*(\theta)$
1.0	81915	0.7	84625	0.4	87419	0.1	90262
0.9	82809	0.6	85545	0.3	88360	0.0	91213
0.8	83717	0.5	86482	0.2	89311		

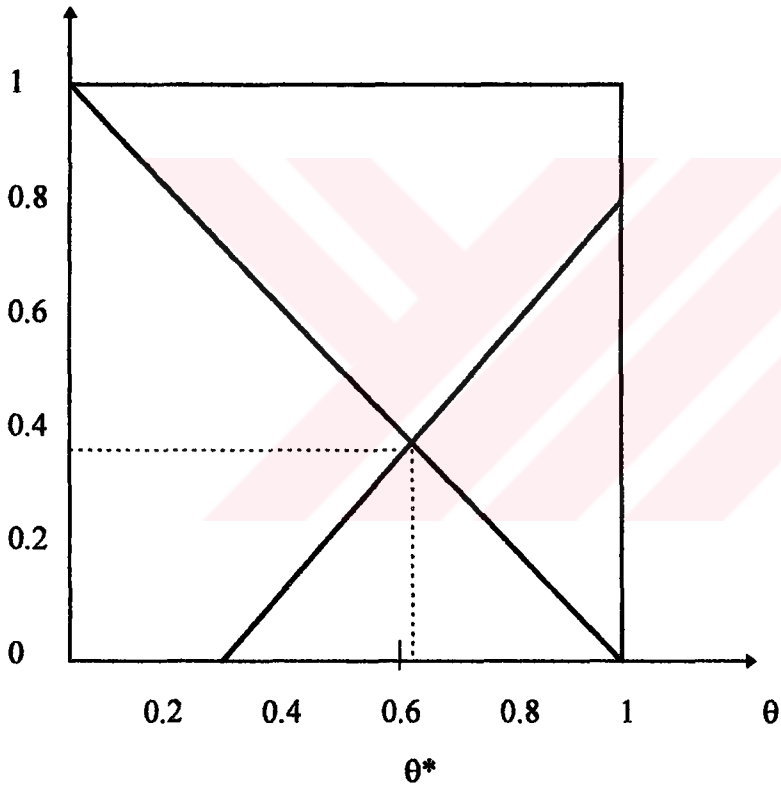
Bütün üretim planı:

θ	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0
P_{r1}	267	264	261	259	256	253	251	248	245	243	240
P_{r2}	307	303	299	295	291	287	283	279	275	271	267
P_{r3}	307	303	299	295	292	295	298	302	308	314	320
P_{r4}	280	283	286	289	292	295	298	302	308	314	320
P_{r5}	280	283	286	389	292	295	298	300	300	300	300
P_{r6}	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270	270
P_{o1}	0	0	0	0	4	9	14	20	25	30	35
P_{o2}	0	12	31	50	63	67	72	75	76	77	77
P_{o3}	85	91	90	88	88	89	89	91	92	94	96
P_{o4}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{o5}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{o6}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_1	17	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0

L_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L_4	10	8	5	3	0	0	0	0	0	0	0
L_5	0	0	0	0	0	0	0	0	3	5	8
L_6	4	5	6	7	9	10	11	12	12	12	11

Chanas'ın yaklaşımının kullanımıyla, çözüm tablo 3.11 ve şekil 3.13 de gösterildi.

μ_z ve μ_c



Şekil 3.13 μ_o ve μ_c nin kesişimi

Tablo 3.11 Chanas'ın BÜP probleminin optimâl çözümü

$\theta=0.62$ $(\alpha=0.38)$		$z^*(0.62)=85348$			
Üretim Seviyesi		Envanter Seviyesi		Çalışma Gücü Seviyesi	
P_{r1}	257	I_1	0	W_1	96
P_{r2}	292	I_2	51	W_2	109
P_{r3}	292	I_3	0	W_3	109
P_{r4}	291	I_4	9	W_4	109
P_{r5}	291	I_5	0	W_5	109
P_{r6}	270	I_6	0	W_6	101
P_{o1}	3	B_1	0	H_1	0
P_{o2}	62	B_2	0	H_2	13
P_{o3}	87	B_3	8	H_3	0
P_{o4}	0	B_4	0	H_4	0
P_{o5}	0	B_5	0	H_5	0
P_{o6}	0	B_6	0	H_6	0

3.1.3 Amaç fonksiyonu bulanık parametrelili lineer programlama problemi

Her zaman birim kâr veya fiyat kesin bir şekilde hesaplanamayabilir. Bu yüzden, amaç fonksiyonunda kesin olmayan katsayılar ile lineer programlamayı gözönüne almak çok gerekir. Bu problem:

$$\text{maks } \tilde{c}x$$

$$\text{kısıtlar } \forall i, (Ax)_i \leq b_i$$

$$x \geq 0 \quad (3.20)$$

şeklinde formüle edilir.

Denklem (3.20) için, Verdegay aşağıdaki denk parametrik lineer programlamayı önerdi:

maks cx

kısıtlar $\mu(o) \geq 1-\alpha$

$$\forall i, (Ax)_i \leq b_i$$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \quad (3.21)$$

Burada $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\mu(c) = \inf_j \mu_j(c_j)$ ve $\mu(c), c_j$ nin üyelik fonksiyonlarıdır.

Denklem (3.21) ile verilen problem denktir:

maks cx

$$\forall j, \mu_j(c_j) \geq 1-\alpha$$

kısıtlar $\forall i, (Ax)_i \leq b_i$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0$$

denktir:

$$\text{maks } \sum_j c_j x_j$$

$$\forall j, c_j \geq \mu_j^{-1}(1-\alpha)$$

kısıtlar $\forall i, (Ax)_i \leq b_i$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0$$

veya:

$$\text{maks } \sum_j \mu_j^{-1}(1-\alpha) x_j$$

kısıtlar $\forall i, (Ax)_i \leq b_i$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \quad (3.22)$$

dir. Açıkça, denklem (3.22) parametrik bir programlamadır, böylece denklem (3.22) nin çözümüyle denklem (3.20) nin çözümünü elde edebiliriz. Çözüm, bulanık ve bulanık amaç kümesinin her bir $(1-\alpha)$ -seviye keseni için, çözüm tercihin bir α derecesine sahiptir.

Diğer bir yolda, verilen bulanık bir lineer programlama (3.20) veya (3.1) denklemini için dual ve bulanık bazı çözümlere sahip bir diğerinin varolacağını önerdi. Bu yüzden, kısım 3.1.1 de gösterilen yaklaşımların kullanımıyla denklem (3.20) nin dual problemini çözebiliriz.

Denklem (3.4) ün dual problemi:

$$\min [b+p(1-\alpha)]u$$

$$\text{kısıtlar } uA^T \geq c, u \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \quad (3.23)$$

denktir:

min au

kısıtlar $a=b+p(1-\alpha)$

$$uA^T \geq c, u \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1]$$

$\beta=1-\alpha$ olsun. Problem:

min au

kısıtlar $a \leq b + p\beta (\Leftrightarrow \forall i, 1 - [b_i - a_i] / p_i)$
 $uA^T \geq c, u \geq 0 \text{ ve } \beta \in [0,1]$

veya

min au

kısıtlar $\forall i, \mu_i(a_i) \geq 1 - \beta$
 $uA^T \geq c, u \geq 0 \text{ ve } \beta \in [0,1]$

olur. Sonuç olarak:

min au

kısıtlar $uA^T \geq c, u \geq 0$ (3.24)

elde ederiz. Son söz olarak; amaç fonksiyonunda bulanık parametrelerle lineer programlama, kısım 3.1.1 de gösterilen yaklaşımlarla çözülebilir.

3.1.4 Tüm katsayıları bulanık lineer programlama

Bazen, lineer bir programlamanın bütün katsayıları kesin olmayabilir. Bu problem:

maks $\tilde{c}x$

kısıtlar $(\tilde{A}x)_i \leq \tilde{b}_i, \forall i$
 $x \geq 0$ (3.25)

şeklinde gösterilir. Denklem (3.25) için, Carlsson ve Korhonen, tam bir değiş-tokuş ederek elden çıkarma yaklaşımını önerdiler. Chanas'ın yaklaşımının kısıt ihlâlinin dereceleri arasında sürekli bir değiş tokuşun gözönüne alınmadığını ispatladılar. Örneğin, eğer $\mu_1 = 1 - \theta_1$ ve $\mu_i > 1 - \theta_1, i = 2, \dots, m$ ise, o zaman $\mu_c = 1 - \theta_1$ dir. Böylece, mümkün daha iyi çözüm, $\mu_i \geq 1 - \theta_2, i = 2, \dots, m$ ile $1 - \theta_1$ in değiş-tokuşuyla, $1 - \theta_1$ den daha büyük olan μ_i yi serbest bırakmayla ortaya çıkacaktır. θ_2 nin θ_1 den küçük olacağı açıktır. Bu yüzden, memnuniyetin daha yüksek bir derecesi ile daha iyi çözüm $\mu_D = \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 1 - \theta_2$ ile elde edilebilir.

Yönteme girmeden önce, denklem (3.25) in bulanık olmayan versiyonunun $z^*=z^*(c,-A,b)$ çözümünün gereği ihtiyaç duyulan c , $-A$ ve b parametrelerinin artan bir fonksiyonudur. Aynı zamanda, kullanılan parametrelerin mümkün değerleri için $[c^0, c^1], [A^0, A^1]$ ve $[b^0, b^1]$ aralıklarını belirtebileceği varsayılır. Alt sınır, bir çözümün çok daha kesinlikle tamamlanabilir olacağı anlamında “ serbest risk ” değerlerini gösterir. Üst sınır, tamamlanabilir olmayan bu değerlerin kullanımıyla elde edilen çözümü ve çok kesinlikle gerçekçi olmayan ve imkânsız olan parametre değerlerini gösterir. “ Serbest risk ” den “ imkânsız ” parametre değerlerine doğru hareket ettiğimizde, eminden iyimser çözümlere tamamlamada bir yüksek dereceli çözümlerden bir düşük dereceli bir diğerine hareket ederiz. O zaman, işimiz parametrede kesin olmayan derecelerin bir fonksiyonu olarak bir “ arasında ” optimâl uyuşmayı bulmaktır.

Carlsson ve Korhonen, denklem (3.25) de bir çözüm arasında bir ilişki önerdi ve parametreleri: denklem (3.25) in $z^*=z^*(c, -A, b)$ çözümü c , $-A$ ve b parametrelerinin artan bir fonksiyonudur. Böylece, üyelik fonksiyonlarının c , $-A$, b parametrelerinin monoton azalan fonksiyonları olduğunu makul suretle varsayabiliriz. Monoton azalan fonksiyonlar lineer, parçalı lineer, hiperbolik üstel, v.s. dir. Tanımlanan non-lineer üyelik fonksiyonlarının kararı için, Carlsson ve Korhonen tarafından önerilen üstel fonksiyonları vereceğiz. Bu (bak şekil 3.14):

$$\mu_c = a_c [1 - \exp\{-b_c(c - c^1)/(c^0 - c^1)\}] \quad (3.26)$$

dır. Burada, $b_c > 0$ veya $b_c < 0$ ve $a_c = 1/[1 - \exp(-b_c)]$ ve $c \in [c^0, c^1]$ dir. $c \leq c^0$ olduğunda $\mu_c = 1$; $c > c^1$ olduğunda $\mu_c = 0$ dir. b_c , karar verici tarafından tayin edilir. Aynı usulde, A ve B nin üyelik fonksiyonları elde edilebilir. Bir maksimizasyon problemi için, tercih anlamında amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonları artmayan olacaktır. Bununla birlikte, Carlsson ve Korhonen’in orjinalitesini burada koruyalım.

C , $-A$, b arasındaki tam değiş-tokuş ederek elden çıkarmadan sonra, çözüm:

$$\mu = \mu_c = \mu_A = \mu_b \quad (3.27)$$

ifadesinde her zaman varolacaktır. Bu yüzden,

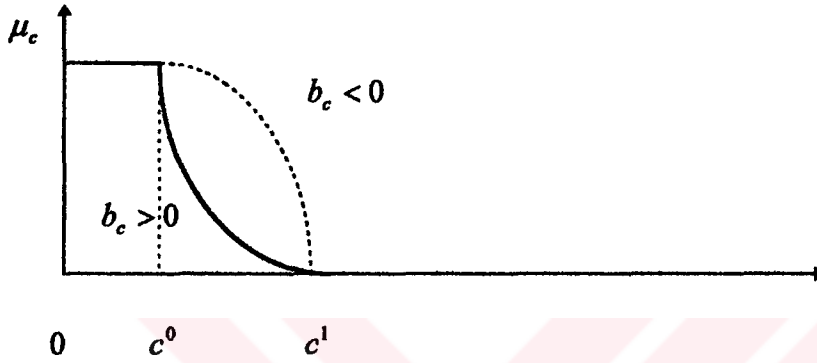
$$c = g_c(\mu), A = G_A(\mu) \text{ ve } b = g_b(\mu) \quad (3.28)$$

denklemini elde edebiliriz. Burada, $\mu \in [0,1]$ ve g_c, G_A ve $g_b; \mu_c, \mu_A$ ve μ_b nin ters fonksiyonlarıdır. O zaman denklem (3.25):

$$\text{maks } [g_c(\mu)]x$$

$$\text{kısıtlar } [G_A(\mu)]x \leq g_b(\mu) \text{ ve } x \geq 0 \quad (3.29)$$

şeklini alır. Açıkça, denklem (3.29), bir non-lineer programlama problemidir. Bununla birlikte, eğer μ verilmişse, bir lineer programlama tekniği ile çözülebilir. Böylece, μ lerin bir kümesiyle ilişkili çözümlerin bir kümesini elde ederiz ve o zaman bu (z^*, μ) çözüm çiftleri planlanır. Bu ilişki verildikten sonra; karar verici, yerine getirme için tercih ettiği çözümü seçebilir.



Şekil 3.14 bulanık c kümesinin üyelik fonksiyonu

3.1.4.1 ÖRNEK: BİR ÜRETİMİN PLANLANMASI PROBLEMİ

BİR üretimin planlanması problemi gözönüne alınsın. Bir deri eşya fabrikası dört çalışma merkezinden geçerek oluşan 3 tip el çantası imâl ediyor ve herbirinin çalışma saati: yarık ve çatlakları doldurma [18,22), kabuğunu soyma [10,40), dikme [96,110] ve cilalama [96,110) dur. Giriş verileri, bulanık parametreler olarak tanımlanır, çünkü onlar tahminidirler ve doğada kesinlikle saptanamayabilir. Üç ürünün ünite kârları ve teknik katsayılar aşağıdaki bulanık lineer programlama modelinde verilmiştir:

$$\text{maks } [1,1.5)x_1 + [1,3)x_2 + [2,2.2)x_3$$

$$[3,2)x_1 + [2,0)x_2 + [3,1.5)x_3 \leq [18,22)$$

$$[1,0.5)x_1 + [2,1)x_2 + [1,0)x_3 \leq [10,40)$$

$$\text{kısıtlar } [9,6)x_1 + [20,18)x_2 + [7,3)x_3 \leq [96,110)$$

$$[7,6.5)x_1 + [20,15)x_2 + [9,8)x_3 \leq [96,110)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Burada sayısal veriler Carlsson ve Korhonen'de temellenderilir. c, A ve b nin üyelik fonksiyonlarının:

$$\mu_{aj} = (a_j - a_j^1) / (a_j^0 - a_j^1)$$

$$\mu_{bi} = \{1 - \exp[-0.8(b_i - b_i^1) / (b_i^0 - b_i^1)]\} / [1 - \exp(-0.8)]$$

$$\mu_{ci} = \{1 - \exp[3(c_i - c_i^1) / (c_i^0 - c_i^1)]\} / [1 - \exp(3)]$$

Burada (-0.8) ve (3) sabitleri; bir pozitif sayı, konveks üstel fonksiyonu ve bir negatif sayı, konkav üstel fonksiyonları belirtme olduğunu gösteren karar verici tarafından saptanır.

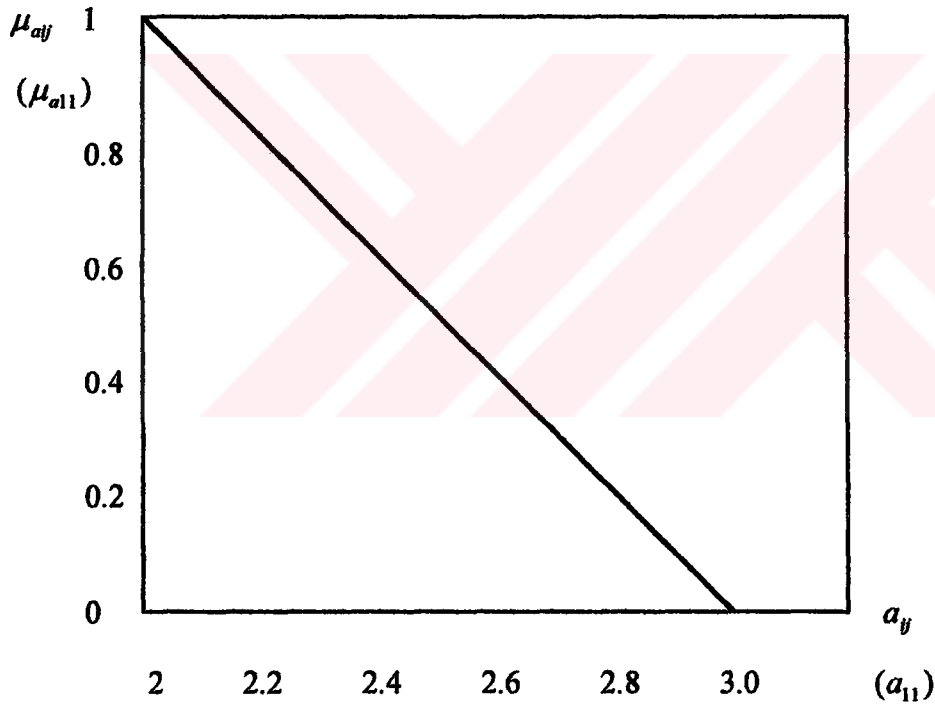
Sonra, $\forall i, j; a_j, b_i, c_j$ nin bulanık sayıları arasında mutlak değiş-tokuş ederek elden çıkarma varsayımı ile uygun dönüşümler vasıtasıyla:

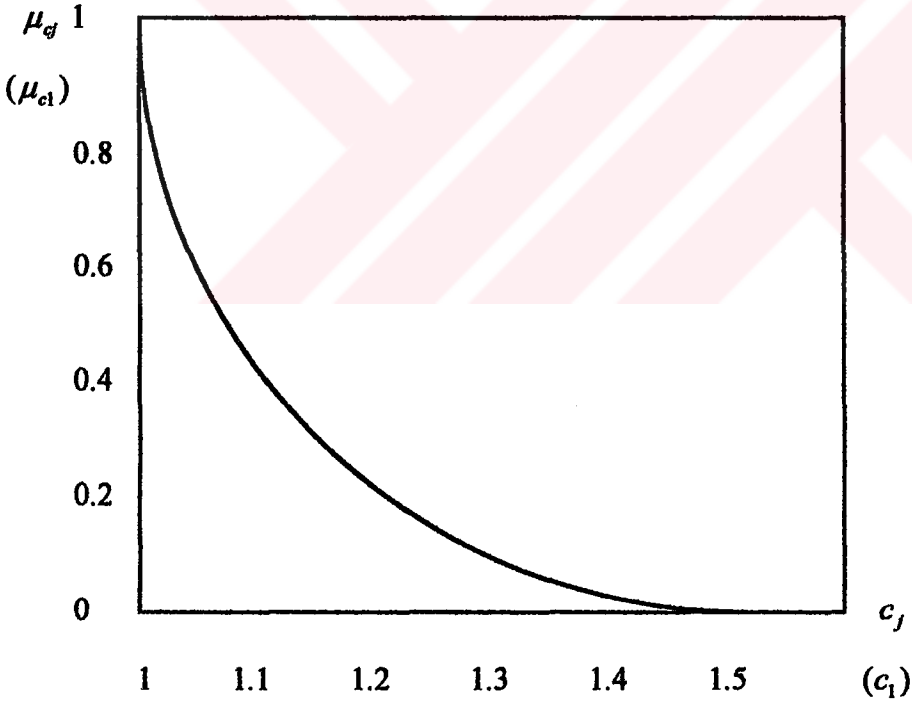
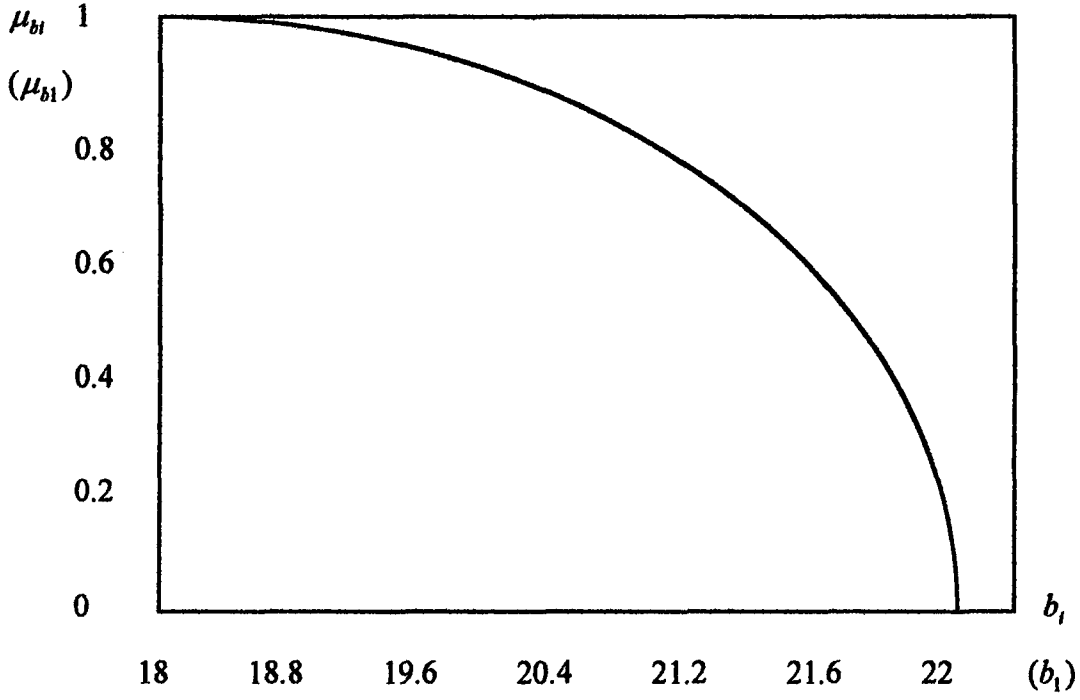
$$a_j = a_j^1 + \mu(a_j^0 - a_j^1)$$

$$b_i = b_i - (1/0.8) \ln\{1 - \mu_{bi}[1 - \exp(-0.8)]\}(b_i^0 - b_i^1)$$

$$c_j = c_j + (1/3) \ln\{1 - \mu_{cj}[1 - \exp(3.0)]\}(c_j^0 - c_j^1)$$

elde ederiz.





Şekil 3.15 bulanık katsayıların üyelik fonksiyonları

Böylece, mutlak değiş-tokuş ederek elden çıkarma ile orjinal bulanık lineer programlama o zaman;

$$\text{maks}[1.5 - 0.167 \ln(1 + 19.1\mu)]x_1 + [3 - 0.667 \ln(1 + 19.1\mu)]x_2 + [2.2 - 0.067 \ln(1 + 19.1\mu)]x_3$$

$$(2 + \mu)x_1 + (2\mu)x_2 + (1.5 + 1.5\mu)x_3 \leq 22 + 5 \ln(1 - 0.55\mu)$$

$$(0.5 + 0.5\mu)x_1 + (1 + \mu)x_2 + (\mu)x_3 \leq 40 + 37.5 \ln(1 - 0.55\mu)$$

$$\text{kısıtlar } (6 + 3\mu)x_1 + (18 + 2\mu)x_2 + (3 + 4\mu)x_3 \leq 110 + 17.5 \ln(1 - 0.55\mu)$$

$$(6.5 + 0.5\mu)x_1 + (15 + 5\mu)x_2 + (8 + \mu)x_3 \leq 110 + 17.5 \ln(1 - 0.55\mu)$$

$$\mu \in [0,1]; x_i \geq 0, i = 1,2,3.$$

Açıkça, yukarıdaki non-lineer programlama standart bir lineer programlama tekniği ile çözülemez. Bununla birlikte, eğer μ önceden saptanmış ise; çözülebilir. Bu μ nün herbir belirli değeri için, orjinal çözüm için bir optimâl çözümü elde edebilir olmasıdır. Bu yüzden, n optimâl çözümün elde edilmesi sırasında n sayıda deneme (n, μ değerinden farklı) seçilebilir ve sonra karar vericiye bu optimâl çözümler gösterilir.

Çözüm yöntemi aşağıdaki gibi açıklanmıştır:

1. Adım: $\mu=0$ da ve $n=10$ deneme alarak ve $\delta=0.1$ koyarak başla.

2. Adım: Aşağıdaki lineer programlamayı çöz:

$$\text{maks } 1.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3$$

$$2x_1 + 1.5x_3 \leq 22$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 40$$

$$\text{kısıtlar } 6x_1 + 18x_2 + 3x_3 \leq 110$$

$$6.5x_1 + 15x_2 + 8x_3 \leq 110$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Optimâl çözüm: $x^*=(0,0,13.75)$ ve $z^*=\$30.25$ dür.

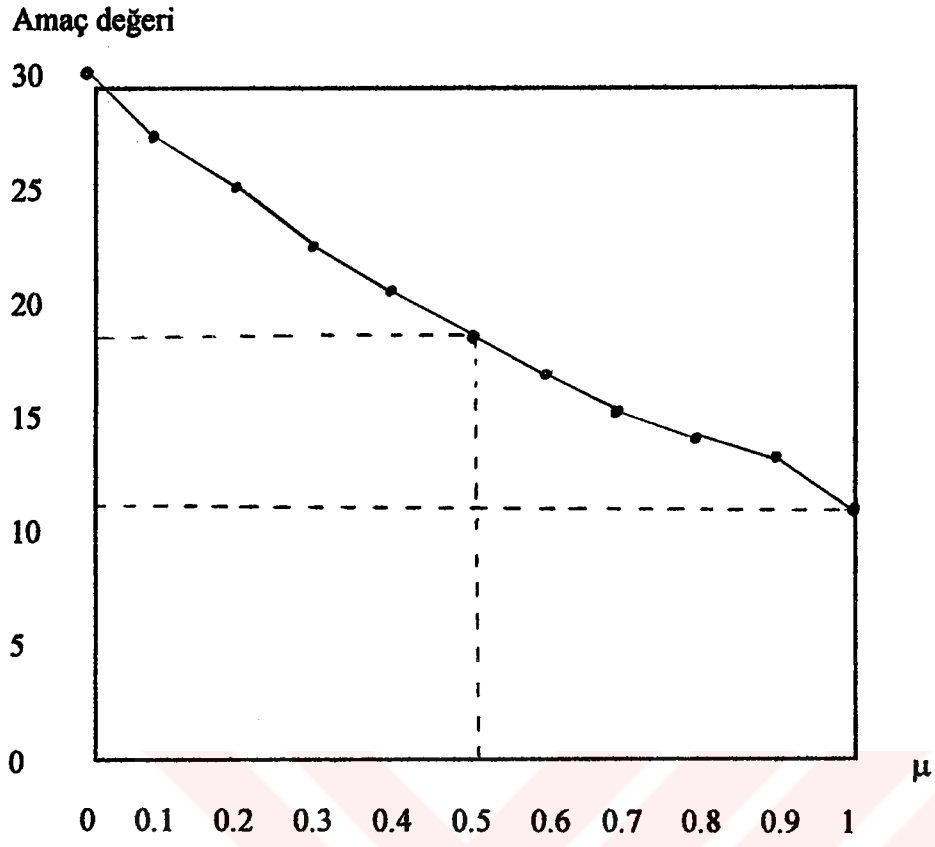
3. Adım: Şekil 3.16 da $(\mu, z^*)=(0,30.25)$ yi işaretle. Daha sonra $\mu=\mu+0.1$ al. Eğer $\mu>1$ ise,

4. Adıma git. Diğer hallerde, 2. Adıma git ve $\mu=\mu+0.1$ ile lineer programlamayı çöz.

4. Adım: Şekil 3.16 ve tablo 3.12 optimâl kârlar ve karşılık gelen üyelik derecelerini gösterir. Bu bağıntıya uygun olarak, karar verici o zaman bir önceden saptanmış kesin olmayan hesaba katılabilirlik altında optimâl çözümünü elde eder. Örneğin, karar verici kabul edilebilir 0.3 dereceli kesin olmamayı gözönüne aldığına, optimâl çözüm: $z^*=15.8$ ve $x^*=(0,2.53,6.28)$ dir.

Tablo 3.12 bulanık bir lineer programlamanın mutlak değiş-tokuş modeli için optimâl çözüm.

μ	Kâr z^*	Karar x^*	Kullanılan Kaynaklar			
			b_1	b_2	b_3	b_4
0	30.25	(0,0,13.75)	19.9	0.0	39.8	110.0
0.1	28.35	(0,0.17,13.14)	21.7	1.5	47.7	109.1
0.2	26.02	(0,0.73,11.74)	21.4	3.1	58.0	108.0
0.3	23.76	(0,1.22,10.44)	21.1	4.7	66.5	106.8
0.4	21.60	(0,1.64,9.26)	20.8	6.0	73.4	105.7
0.5	19.55	(0,1.99,8.18)	20.4	7.1	78.7	104.4
0.6	17.62	(0,2.29,7.19)	20.0	8.0	82.8	103.1
0.7	15.80	(0,2.53,6.28)	19.6	8.7	85.5	101.4
0.8	14.24	(0,0,7.07)	19.1	5.7	43.8	62.2
0.9	13.08	(0,0,6.52)	18.8	5.9	43.0	58.0
1.0	12.00	(0,0,6)	18.0	6.0	42.0	54.0



Şekil 3.16 optimâl değerler ve onlara karşılık gelen üyelik dereceleri arasındaki bağıntı

KAYNAKLAR

Lai, Y. -J. ve Hwang, C, -L., (1992), Fuzzy Mathematical Programming, Springer Verlag, Berlin.

Ross, T. J., (1995), Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw Hill, Inc., New York.

Jones, A., Kaufmann, A. ve Zimmermann, H. -J., (1985), Fuzzy Sets Theory and Applications, Nato Asi Series.

Zimmeermann, H. -J., (1990), Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluver Academic Publishers, Boston.

Llena J., (1985), “ On fuzzy linear programming ”, European Journal of Operational Research 22: 216-223.

Kuruüzüm A. ve Güzel N, (1995), “ Bulanık kümelerde üyelik fonksiyonlarının tahmin edilmesi ”, Yıldız Teknik Üniversitesi Dergisi 1:95-105.

Kuruüzüm A. ve Güzel N., (1997), “ Linear programming with fuzzy resources and its appplication ”, Journal of Kocaeli University 4:50-56.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 06.09.1967

Doğum yeri İstanbul

Lise 1984-1987 Pertevniyal Lisesi

Lisans 1989-1995 Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Lisans

Yüksek Lisans 1996-1999 Yıldız Teknik Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı



