

46936



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLERDE KULLANILAN BAZI SAYISAL YÖNTEMLER

Mat. Müh. Rukiye Handan ANLI

F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Yavuz AKSOY

Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

İSTANBUL, 1995

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
BÖLÜM I. INTEGRAL DENKLEMLERE GİRİŞ.....	1
1.1. TANIM.....	1
1.2. ÇÖZÜM KAVRAMI	2
1.3. İNTEGRAL DENKLEMLER İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ	2
1.3.1. İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi	2
1.3.2. Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi	5
1.4. ABEL İNTEGRAL DENKLEMİ	7
1.4.1. Tanım	7
1.4.2. Abel İntegral Denkleminin Çözümü.....	8
BÖLÜM II. SAYISAL YÖNTEMLERE BİR BAKIŞ	11
2.1. GİRİŞ	11
2.2. LAGRANGE İNTERPOLASYON FORMÜLÜ	11
2.3. SAYISAL İNTEGRAL	13
3.3.1. Trapez (Yamuk) Yöntemi	13
3.3.2. Simpson Yöntemi.....	15
2.4. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	16
2.4.1. İkinci Derece Runge-Kutta Formülü	16
2.4.2. Dördüncü Derece Runge-Kutta Yöntemi.....	18
2.4.3. R-derece Runge-Kutta Yöntemi	22
BÖLÜM III. İNTEGRAL DENKLEMLERE SAYISAL YAKLAŞIM	23
3.1. GİRİŞ	23
3.2. CEBİRSEL DENKLEM KÜMELERİYLE FREDHOLM DENKLEMLERİNE YAKLAŞIM (SONLU FARKLAR YÖNTEMİ).....	23
3.3. BELİRSİZ KATSAYILAR YÖNTEMLERİ	28
3.3.1. Sıralama (Collocation) Yöntemi	29
3.3.2. Ağırlıklı Fonksiyonlar Yöntemi (Galerkin Yöntemi)	32
3.3.3. En Küçük Kareler Yöntemi	35

3.4. GAUSS YÖNTEMİ.....	41
3.5. ARDIŞIK YAKLAŞIM.....	45
3.6. MONTE-CARLO YÖNTEMİ	51
3.7. İKİNCİ TİP VOLTERRA DENKLEMİNİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	53
SONUÇ.....	60
KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	



Tüm araştırma ve çalışmalarım esnasında destek ve yardımını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Yavuz AKSOY'a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZET

İntegral denklemler, ilk olarak XIX. yüzyılın ilk yarısında ABEL tarafından bir mekanik problemin çözümü esnasında ortaya çıkmış ve daha sonra en ünlüleri Louiville, Volterra, Fredholm olmak üzere bir çok matematikçinin de katkılarıyla literatürde bugünkü yerini almıştır. Bu tezin ilk bölümünde ABEL'in karşılaştığı integral denklem ile diğer denklem tipleri hakkında genel bir bilgi yer almaktadır.

İntegral denklemlerin çözümünde genel olarak iki yaklaşım kullanılmaktadır. Analitik ve Sayısal yaklaşım. Analitik yaklaşımlar tezin konusunun dışındadır. Sayısal yaklaşımlara ön hazırlık olması amacıyla üçüncü bölümde kullanılan yöntemlerin bilinen uygulamalarına ikinci bölümde yer verilmiştir.

Son olarak üçüncü bölümde integral denklemlere sayısal yöntemlerle yaklaşım ve bu yöntemlerin kullanılabilirliği incelenmiştir. Son bölümde de görüleceği gibi sayısal yöntemler analitik yöntemlerle çözülemeyen problemlerin çözümüne önemli katkılarda bulunmaktadır. Buna rağmen çok az sayıda sayısal yöntem bulunmaktadır.

ABSTRACT

The Integral Equations initially was found in the first half of the 19th century by ABEL during the solution of a mechanic problem and afterwards it has reached its current value in literature by the involvement of many mathematicians, among which the most popular ones are Louiville, Volterra, Fredholm. In the first section of this study there exist general view about the integral equation that ABEL came across and other types of equations.

In the solution of integral equations generally two approaches are used. Analytic and Numerical approach. The analytic approaches are subjects out of this study. In order to be an initial preparation to the numerical approaches, the known applications of the methods used in the third section exist in the second section.

Finally in the third section the numerical approaches to the integral equations and their utility is examined. As it is clearly seen in the last section the numerical methods highly contribute to the solutions of the problems that cannot be solved by analytic solutions. However only a few numerical methods exist.

BÖLÜM I

İNTEGRAL DENKLEMLERE GİRİŞ

1.1. TANIM

Bilinmeyen fonksiyonun, $y(x)$ gibi, integral işareti altında bulunduğu denklemlere İntegral denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral işareti altında mevcutsa denklem 1. tipten, integralin dışında da mevcutsa denklem 2. tiptendir. Yine bu fonksiyonun lineer olup olmamasına bağlı olarak denklem lineer ya da lineer olmayan denklem adını alır. Ayrıca integral denklemde integralin sınırları sabitse denklem bir Fredholm tipi integral denklem; sınırlardan biri, genellikle üst sınır, bağımsız değişken ya da bağımsız değişkenin bir fonksiyonuysa denklem Volterra tipi bir integral denklemidir.

Başlıca denklem tipleri :

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad \text{homojen olmayan 1. tip Fredholm denklemi,}$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad \text{homojen olmayan 2. tip Fredholm denklemi,}$$

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad \text{homojen 2. tip Fredholm denklemi,}$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad \text{homojen olmayan 2. tip Volterra denklemi,}$$

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad \text{homojen olmayan 1. tip Volterra denklemi.}$$

Bu denklemlerin tümünde çekirdek fonksiyon olarak adlandırılan $K(x,t)$ ve $f(x)$ fonksiyonları ile λ parametresi bilinmektedir. Yukarıda da görüldüğü gibi $f(x) \neq 0$ ise denklem homojen olmayan integral denklem adını almaktadır. Bu nedenle $f(x)$ 'e homojenliği bozucu fonksiyon da denilmektedir.

Bir integral denklemin, sınırlarından biri sonsuz olursa, $K(x,y)$ veya $f(x)$ fonksiyonlarında tekillik varsa ya da bu yapıların bazı kombinasyonları bulunuyorsa; böyle integral denklemlere tekil (singüler) integral denklem denir.

1.2. ÇÖZÜM KAVRAMI

Bir integral denklemi özdeş olarak sağlayacak bir $y(x)$ fonksiyonunun bulunması sürecine denklemi çözmek denir. Denklemin çözümü olarak bulunan $y(x)$ fonksiyonu integral işareti içindeki yerine konulup işlemler ilerletildiğinde, sonuçta eşitliğin diğer yanındaki fonksiyon bulunur ki bu da çözümün sağlamasıdır.

Bugüne kadar integral denklemlerin çözümünde iki genel yaklaşım kullanılmıştır. Bunlardan ilki analitik yaklaşımdır ve serileri, transformları, özel fonksiyonları v.b. kapsar. Diğerisi sayısal yaklaşımdır ve analitik yaklaşıma göre daha geneldir. Buna rağmen sayısal yaklaşımlar tam olarak geliştirilmemiştir. Bunlardan birkaç pratik yöntem (Bölüm III)'te incelenmiştir.

1.3. İNTEGRAL DENKLEMLER İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

Başlangıç koşullarıyla verilmiş bir lineer diferansiyel denklem, bir sınır problemi olarak bir integral denkleme karşılık gelebilir. Benzer şekilde bir integral denklem belirli koşullar altında bir diferansiyel denkleme dönüştürülerek incelenebilir. Bu dönüşümlerin her zaman kolaylıkla gerçekleşebilen uygulamaları olmamakla birlikte bazı durumlarda konuyla ilgili önemli katkıları bulunabilir.

1.3.1. İntegral Denklemlerin Diferansiyel Denklemlere Dönüştürülmesi

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

gibi homojen olmayan 2. tip Fredholm denkleminde Leibnitz formülü uygulanarak integral denklem bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

Hatırlatma: Leibnitz formülü;

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt + [f(x, b(x))] \frac{db(x)}{dx} - [f(x, a(x))] \frac{da(x)}{dx}$$

Leibnitz formülünün 2. tip Fredholm denklemine uyarlanması ise,

$$a(x) = a, \quad b(x) = b \quad \Rightarrow \quad \frac{da(x)}{dx} = \frac{db(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^b K(x, t) y(t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [K(x, t) y(t)] dt \quad (1.1)$$

şeklinde olacaktır. Denklem Volterra tipinde olursa

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) y(t) dt$$

$$a(x) = a, \quad b(x) = x \quad \Rightarrow \quad \frac{da(x)}{dx} = 0, \quad \frac{db(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x K(x, t) y(t) dt = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [K(x, t) y(t)] dt + K(x, x) y(x) \quad (1.2)$$

şeklinde olur.

Elde edilen (1.1) ve (1.2) denklemlerinde integral işaretinden kurtuluncaya kadar sürdürülecek ardışık türev işlemleri ile integral denklemler diferansiyel denklemlere dönüştürülmüş olacaktır. Ulaşılan bu sonuç her zaman verimli olmayabilir. Elde edilen diferansiyel denklemin bilinen bir çözümü varsa yani çözülebiliyorsa integral denklemin çözümüne yardım edebilir. Diferansiyel denklemin çözümü genel çözüm formunda olacağından integral denklem için bir çözüm oluşturmaz. Ancak diferansiyel denklemin genel çözümünün içerdiği keyfi sabit sayısına bağlı olarak, bu da diferansiyel denklemin derecesiyle ilişkilidir, integral denklemden elde edilen başlangıç koşullarıyla yeniden düzenlenen çözüm aynı zamanda integral denklemin de çözümü olacaktır.

Örnek 1.1.

$$y(x) = 2x + \int_0^x 4(x-t)y(t) dt$$

integral denklemini diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Terim terim türeterek, Leibnitz formülü uygulanırsa,

$$y(x) = 2x + \int_0^x 4(x-t)y(t) dt$$

$$y'(x) = 2 + \frac{d}{dx} \int_0^x 4(x-t)y(t) dt$$

$$y'(x) = 2 + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} [4(x-t)y(t)] dt + 4(x-x)y(x)$$

$$y'(x) = 2 + \int_0^x 4y(t) dt$$

$$y''(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} (4y(t)) dt + 4y(x)$$

$$y''(x) = 4y(x)$$

Buradan,

$y'' - 4y = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklemin çözümü;

$$r^2 - 4 = 0 \rightarrow r^2 = 4 \rightarrow r = \pm 2$$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ formunda olacaktır.

Bu sonucun integral denkleme ait olabilmesi için c_1 , c_2 keyfi sabitlerinin integral denklemden elde edilecek başlangıç koşullarıyla belirlenmesi gerekir.

$$y(0) = 0 + \int_0^0 4(0-t)y(t) dt, \quad y(0) = 0$$

$$y'(0) = 2 + \int_0^0 4y(t) dt \quad y'(0) = 2$$

Bu başlangıç koşullarıyla,

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}, \quad 0 = c_1 e^0 + c_2 e^0, \quad 0 = c_1 + c_2, \quad c_1 = -c_2$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} + 2c_2 e^{2x}, \quad 2 = -2c_1 e^0 + 2c_2 e^0, \quad 2 = -2c_1 + 2c_2 \text{ olur.}$$

Elde edilen iki denklemden,

$$-2c_1 + 2(-c_1) = 2$$

$$-4c_1 = 2$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2} \text{ oluşturulur.}$$

Buradan,

$$y = -\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \text{ elde edilir.}$$

1.3.2. Diferansiyel Denklemlerin İntegral Denklemlere Dönüştürülmesi

Konunun kolay anlaşılabilmesi için ikinci derece lineer diferansiyel denklemden oluşan bir başlangıç değer problemi alırsak,

$$y'' + A(x)y' + B(x)y = f(x) \quad (1.3)$$

ve başlangıç koşulları da,

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y'_0 \quad (1.4)$$

şeklinde olacaktır.

Denklem (1.3) y'' için çözülür ve (a, x) aralığında integre edilirse,

$$\int_a^x y''(t) dt = - \int_a^x A(t)y'(t) dt - \int_a^x B(t)y(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

denklem (1.4) kullanılarak,

$$y'(x) - y'_0 = - \int_a^x A(t)y'(t) dt - \int_a^x B(t)y(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

elde edilir. Sağdaki ilk terime kısmi integrasyon uygulanır ve denklem düzenlenirse,

$$y'(x) = -A(x)y(x) - \int_a^x [B(t) - A'(t)]y(t) dt + \int_a^x f(t) dt + A(a)y_0 + y'_0$$

elde edilir. Tüm ifade bir kez daha integre edilirse,

$$\begin{aligned} y(x) - y_0 &= - \int_a^x A(t)y(t) dt - \int_a^x \int_a^{x_2} [B(t) - A'(t)]y(t) dt dt_2 + \int_a^x \int_a^{x_2} f(t) dt dt_2 \\ &\quad + \int_a^x [A(a)y_0 + y'_0] dt \end{aligned}$$

Aşağıdaki bağıntı kullanılarak,

$$\int_a^x \int_a^{x_2} \dots \int_a^{x_n} f(t) dt dt_2 \dots dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

buradan,

$$y(x) = -\int_a^x A(t)y(t)dt - \int_a^x (x-t)[B(t) - A'(t)]y(t)dt + \int_a^x (x-t)f(t)dt \\ + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0$$

Bu ifade düzenlenirse,

$$y(x) = -\int_a^x [A(t) + (x-t)[B(t) - A'(t)]]y(t)dt + \int_a^x (x-t)f(t)dt \\ + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0 \quad (1.5)$$

$$K(x,t) = (t-x)[B(t) - A'(t)] - A(t) \text{ ve}$$

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0$$

olarak alırsak, denk. (1.5);

$$y(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt + F(x) \text{ şeklini alır.}$$

Bu şekilde bir lineer diferansiyel denklem bir integral denkleme dönüştürülmüş olur. Dikkat edilecek olursa, elde edilen integral denklem 2. tip Volterra integral denklemi görünümündedir.

Örnek 1.2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

denklemini integral denkleme dönüştürelim.

$$y'' = -2y' - 3y$$

$$\int_0^x y''(t)dt = -\int_0^x 2y'(t)dt - \int_0^x 3y(t)dt$$

$$y'(x) - y'(0) = -2[y(x) - y(0)] - 3\int_0^x y(t)dt$$

$$y'(x)-1=-2y(x)+2-3\int_0^x y(t)dt$$

Tekrar integrale edersek,

$$\int_0^x y'(t)dt = -2\int_0^x y(t)dt + \int_0^x 3dt - 3\int_0^x \int_0^t y(t)dt dt_2$$

$$y(x)-1 = -2\int_0^x y(t)dt + 3x - 3\int_0^x (x-t)y(t)dt$$

$$y(x) = 3x + 1 - \int_0^x [3(x-t) + 2]y(t)dt \text{ bulunur.}$$

1.4. ABEL İNTEGRAL DENKLEMİ

1.4.1. Tanım

Abel, 1823'de bir mekanik problemi incelerken, aşağıdaki sonuçla karşılaşmış ve böylelikle integral denklem kavramı ortaya çıkmıştır.

Abel'in incelediği mekanik problem:

Düşey düzlemde verilmiş bir eğri üzerindeki herhangi bir $A(x,y)$ noktasından, ilk hızı olmayan bir cisim serbest olarak bırakılıyor. Bu cisim,

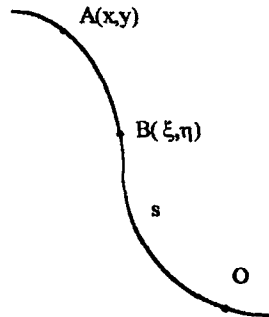
$$\vec{F} = m\vec{g}$$

kuvvetinin etkisiyle hareket edecektir. Koordinat sisteminin başlangıç noktası olan O noktasına gelmesi için geçecek olan süre T olsun. O ve A noktaları arasındaki bir $B(\xi,\eta)$ noktası alalım. OA yayı s ile gösterilirse, B noktasında cismin hızı,

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(x-\xi)}$$

olur. İntegre edersek,

$$t = -\int_A^B \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}$$



Bütün süreyi hesaplamak için;

$$T = -\int_A^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}} = \int_0^A \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}} \text{ yazılabilir.}$$

Eğer eğrinin denklemi verilmişse, s yayı ξ cinsinden ifade edilebilir. Dolayısıyla ds'de;

$$ds = u(\xi) d\xi$$

şeklinde $d\xi$ cinsinden ifade edilebilir. Bu yukarıdaki ifade de yerine konursa,

$$T = -\int_0^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}}$$

bulunur. Diğer yandan eğrinin tamamı için T süresi x'in bir fonksiyonudur. Bunu $f(x)$ ile gösterirsek,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2g(x-\xi)}} u(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

şeklinde Volterra tipi bir integral denklem elde edilir. Bu denkleme Abel integral denklemi denir.

1.4.2. Abel Integral Denkleminin Çözümü

Denklem (1.6)'da ,

$$\sqrt{2g}f(x) = F(x)$$

olarak gösterilirse,

$$F(x) = \int_0^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} d\xi \text{ elde edilir.}$$

Burada çekirdek fonksiyonun

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{x-\xi}}$$

$x=\xi$ için tekil bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Bu da Abel integral denkleminin bir tekil (singüler) denklem olduğunu gösterir. Bu denklemi çözmek için, eşitliğin her iki yanı $1/\sqrt{u-x}$ ile çarpılır ve x 'e göre, 0 ile u arasında integre edilirse,

$$\int_0^u \frac{F(x)}{\sqrt{u-x}} dx = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}} \int_0^x \frac{u(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \quad \text{elde edilir.}$$

İntegrasyon sırasını değiştirmek amacıyla şu durum gözönüne alınabilir: x , 0 ile u arasında değişmektedir. x 'in her değeri için de ξ , 0 ile x arasında bir değer almaktadır. Yani her ξ değeri için x , ξ 'den u 'ya kadar değişirken, ξ de 0 ile u arasında değişecektir. Böylelikle,

$$\int_0^u \frac{F(x)dx}{\sqrt{u-x}} = \int_0^u u(\xi)d\xi \int_x^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}\sqrt{x-\xi}}$$

yazılabilir. Burada,

$$\int_x^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}\sqrt{x-\xi}}$$

integralinde, $x = \xi + (u-\xi)t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_x^u \frac{dx}{\sqrt{u-x}\sqrt{x-\xi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}\sqrt{t}}$$

olur. $t=\sin^2\alpha$ dönüşümü ile bu integralin değeri π olarak bulunur. Buradan,

$$\int_0^\xi \frac{F(x)}{\sqrt{\xi-x}} dx = \pi \int_0^\xi u(\xi)d\xi$$

veya

$$\int_0^\xi u(\xi)d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\xi \frac{F(x)}{\sqrt{\xi-x}} dx$$

bunu da ξ 'ye göre türetirsek,

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{F(x)}{\sqrt{\xi-x}} dx$$

elde edilir. Eğer $F(x)$ sabitse,

$$F(x) = \sqrt{2g} f(x) = \text{sabit} = c$$

demektir. Bu durumda düşme zamanı yükseklikten bağımsızdır.

$$\frac{ds}{d\xi} = u(\xi)$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \frac{F(x)}{\sqrt{\xi - x}} dx$$

olur. Buradan,

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^\xi \frac{F(x)}{\sqrt{\xi - x}} dx \text{ yazılabilir.}$$

Yukarıdaki şart uygulanırsa,

$$s = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^\xi \frac{f(x)}{\sqrt{\xi - x}} dx = \frac{c}{\pi} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\xi - x}}$$

olur ki, böylece işlemler ilerletildiğinde,

$$s = \frac{2c}{\pi} \sqrt{\xi}$$

elde edilir. Burada s , verilen eğri yayının uzunluğudur.

BÖLÜM II

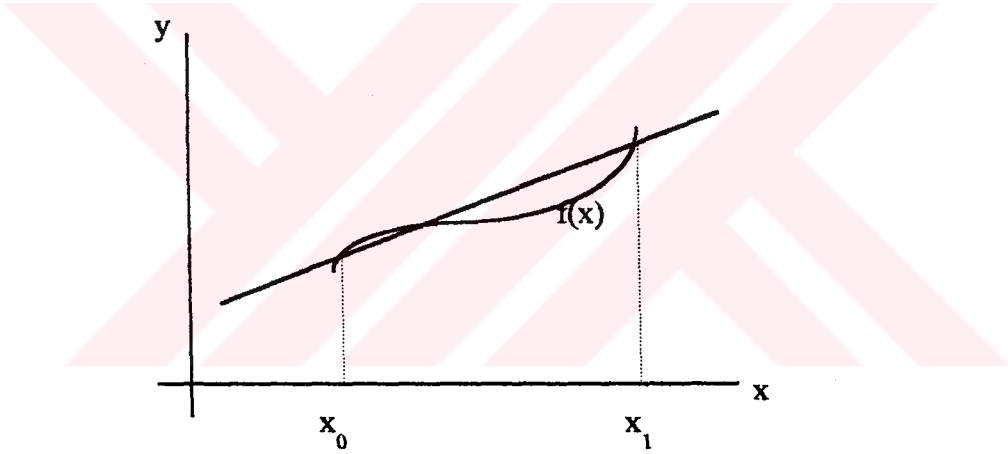
SAYISAL YÖNTEMLERE BİR BAKIŞ

2.1. GİRİŞ

Bu bölümde bulunan birkaç sayısal yöntem (Bölüm III)'de kullanılan yöntemlerin temel halleridir. Bölüm III'de bu yöntemlerin integral denklemlere uygulamaları söz konusudur ve konunun daha iyi anlaşılabilmesi açısından burada incelenecektir.

2.2. LAGRANGE İNTERPOLASYON FORMÜLÜ

En basit şekliyle eğrinin iki noktasından geçen doğruyla, eğriye yaklaşımdır.



Doğrunun denklemi,

$$y = ax + b \text{ dir.}$$

dir. x_0 ve x_1 noktaları için

$$y_0 = ax_0 + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

Bu denklemlerden,

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0) \tag{2.1}$$

elde edilir. Buradan,

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ elde edilir.}$$

$$x_1 / \quad y_0 = ax_0 + b$$

$$x_0 / \quad y_1 = ax_1 + b$$

$$x_1 y_0 = ax_0 x_1 + bx_1$$

$$- x_0 y_1 = ax_0 x_1 + bx_0$$

$$x_1 y_0 - x_0 y_1 = b(x_1 - x_0)$$

Buradan da,

$$b = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \text{ elde edilir.}$$

Bulunan a ve b değerlerini denklem (2.1)'de yerine koyarsak,

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

$$y = y_0 \frac{(x_1 - x)}{x_1 - x_0} + y_1 \frac{(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.2)$$

$$y = P_1(x), \quad L_{1,0} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} \quad \text{ve} \quad L_{1,1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

alırsak denklem (2.2),

$$P_1(x) = y_0 L_{1,0} + y_1 L_{1,1} \text{ olur.}$$

Nokta sayısını 3'e çıkartırsak,

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

elde edilir. Bu aynı zamanda,

$$P_2(x) = y_0 L_{2,0} + y_1 L_{2,1} + y_2 L_{2,2}$$

şeklinde de ifade edilebilir. n+1 nokta için n. polinom ise,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{n,i}(x) \quad \text{Lagrange polinomu} \quad (2.3)$$

$$L_{n,i}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{Lagrange çarpanı} \quad (2.4)$$

Örnek 2.1.

x	0	1	2
y	1	2	4

Lagrange interpolasyon formülü ile $f(x)=P(x)$ 'i bulun.

3 nokta verilmiş. O halde,

$P_2(x) = y_0 L_{2,0} + y_1 L_{2,1} + y_2 L_{2,2}$ 'yi kullanacağız.

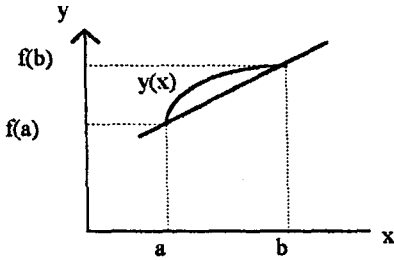
$$L_{2,0} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{2}$$

$$L_{2,1} = \frac{x(x - 2)}{-1} \quad L_{2,2} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

Buradan, $P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ bulunur.

2.3. SAYISAL İNTEGRAL

3.3.1. Trapez (Yamuk) Yöntemi



Bu yöntem en basit anlamda $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğru yardımıyla $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımı esas alır. Yani şekilde de görüldüğü gibi $f(x)$ 'in oluşturduğu alana, yamuğun alanıyla yaklaşılmaktadır.

$$I = \left(\frac{b-a}{2} \right) [f(a) + f(b)]$$

$f(x)$ 'e en iyi yaklaşım (a,b) aralığının mümkün olduğunca küçük olmasıyla gerçekleşecektir. Bu amaçla böyle bir integrali geniş aralıkta hesaplayabilmenin en iyi yolu; integral aralığını n küçük parçaya bölerek oluşturulan bölgelere yöntemin uygulanmasıdır. Böylelikle integralin yerine geçecek bir toplam elde edilir. Hesaplamanın kolay olması için n küçük aralığı eşit olarak alırsak,

$$n \geq 1 \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a+ih \quad (i=0,1,\dots,n)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

$$\cong \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \right\}$$

$f(x_i) = f_i$ olmak üzere,

$$I_n = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \quad n \geq 1 \quad (2.5)$$

olur. d_i ağırlık katsayıları olmak üzere,

$$I_n = \sum_{i=1}^n d_i f_i$$

$$d_i = [d_1, d_2, \dots, d_n] = h[1/2, 1, 1, \dots, 1, 1/2] \quad (2.6)$$

Örnek 2.2.

$\int_1^3 3x^2 dx$ integralini $n=4$ için Trapez yöntemi ile hesaplayalım.

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0,5; \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1,5, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 2,5 \quad \text{ve} \quad x_4 = 3 \quad \text{olur.}$$

$$f(x) = 3x^2$$

Denklem (2.5)'den, $I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$

$$f(x_0) = f_0 = 3.1^2 = 3, \quad f_1 = 3.(1,5)^2 = 6,75, \quad f_2 = 3.(2)^2 = 12$$

$$f_3 = 3.(2,5)^2 = 18,75, \quad f_4 = 3.(3)^2 = 27$$

$$I = \frac{0,5}{2}[3 + 2.(6,75) + 2.12 + 2.(18,75) + 27]$$

$$I = 26,25$$

İntegralin gerçek değeri ise,

$$\int_1^3 3x^2 dx = 3x^2 \Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26 \text{ ' dir.}$$

n büyüdükçe trapez yöntemiyle bulunan değer gerçek değeri daha iyi yansıtacaktır.

3.3.2. Simpson Yöntemi

(2.2)'de verilen Lagrange interpolasyon polinomları ile $[a,b]$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna ikinci dereceden bir polinomla yaklaşalım.

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b \text{ olmak üzere}$$

$$I_2 = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Simpson yöntemi $[a,b]$ aralığı için,

$$I_2 = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Simpson yöntemi, trapez yönteminden daha yakın sonuç verir. Ancak bu yöntemde de $[a,b]$ aralığı geniş bir aralık ise, bu aralığı $n \geq 2$ olacak şekilde çift n tane alt aralığa bölerek daha iyi bir yaklaşımda bulunuruz. Böylelikle genel formül;

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a+ih \quad (i=0,1,\dots,n) \text{ olmak üzere}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3} [f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}]$$

şeklinde yazılır ki bu da,

$$I_n = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. Ağırlık katsayıları ile gösterirsek;

$$I_n = \sum_{i=1}^n d_i f_i$$

$$d_i = [d_1, d_2, \dots, d_n] = h/3 [1, 4, 2, 4, \dots, 2, 4, 1] \quad (2.8)$$

Örnek 2.3.

Örnek 2.2'deki integrale bu sefer Simpson yöntemini uygulayalım.

$$n = 4 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0,5$$

Denklem (2.7)'den,

$$I = h/3 (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$$

$$I = 0,5/3 [3 + 4(6,75) + 2.12 + 4.(18,75) + 27]$$

$$I = 26$$

Görüldüğü gibi bulunan değer gerçek değere eşittir ve Simpson yöntemi trapez yönteminden daha iyi sonuç vermiştir.

2.4. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

2.4.1. İkinci Derece Runge-Kutta Formülü

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.9)$$

başlangıç değer problemi verilsin ve $h = x_i - x_{i-1}$ adım uzunluğu olsun.

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf(x+mh, y + mk_1) \quad (2.10)$$

olmak üzere,

$$y(x+h) - y(x) = ak_1 + bk_2 \quad (2.11)$$

olduğunu düşünelim. a, b, m sabitler olmak üzere 2. dereceden türevli terimlere kadar Taylor seri açılımı yapalım.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2} h^2 y''(x) \quad (2.12)$$

veya,

$$y'(x) = f(x, y) = f, \quad y''(x) = f_x + f_y f = F_1 \text{ olmak üzere,}$$

$$y(x+h) - y(x) = hf + \frac{1}{2} h^2 F_1 \quad (2.13)$$

olur. Benzer hesaplama işlemleri ile k_1 ve k_2 ;

$$k_1 = hf \quad k_2 = h[f + mhF_1]$$

olur. Bunları denklem (2.11)'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x) &= ahf + bh[f + mhF_1] \\ &= (a+b)hf + mh^2F_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

bulunur. Denklem (2.13) ile denklem (2.14)'ün ikinci tarafları da eşitlenirse,

$$hf + \frac{1}{2} h^2 F_1 = (a + b)hf + bmh^2 F_1 \text{ 'den}$$

$a+b = 1$ ve $bm = \frac{1}{2}$ bulunur. m 'i 1 veya $\frac{1}{2}$ almak kural haline gelmiştir. Örneğin $m=1$

alınırsa, $a = \frac{1}{2}$ $b = \frac{1}{2}$ bulunur. O zaman 2. dereceden Runge-Kutta formülü, genelde $m=1$ için;

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \quad (2.15)$$

olmak üzere,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (2.16)$$

bulunur.

Örnek 2.4.

$y' = 2x - y$, $y(0) = -1$ başlangıç değer problemine 2. dereceden Runge-Kutta yöntemini uygulayalım.

$h=0,1$ olsun. $x_0=0$, $x_1=0,1$ 'deki değeri denklem (2.15) ile,

$$k_1 = h(2x_0 - y_0), \quad k_1 = 0,1 (2 \cdot 0 - (-1)) = 0,1$$

$$k_2 = h(2(x_0 + h) - (y_0 + k_1)), \quad k_2 = 0,1(2(0 + 0,1) - (-1 + 0,1)) = 0,11$$

Denklem (2.16)'dan

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$y_1 = -1 + \frac{1}{2}(0,1 + 0,11) = -1 + \frac{1}{2}(0,21) = -1 + 0,105$$

$$y_1 = -0,895 \text{ bulunur.}$$

$y = e^{-x} + 2x - 2$ problemin gerçek çözümüdür. Bu noktadaki gerçek değer ise,

$$y(0,1) = e^{-0,1} + 2(0,1) - 2 = -0,8952 \text{ 'dir.}$$

2.4.2. Dördüncü Derece Runge-Kutta Yöntemi

$$k_1 = hf(x, y)$$

$$k_2 = hf(x + mh, y + mk_1)$$

$$k_3 = hf(x + nh, y + nk_2) \quad (2.17)$$

$$k_4 = hf(x + ph, y + pk_3)$$

olmak üzere,

$$y(x+h) = y(x) + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (2.18)$$

olsun. a, b, c, d, m, n, p sabitler olduğunda 4. dereceden türevelere kadar Taylor seri açılımı ile,

$$y' = f(x, y) = f$$

$$y'' = f_x + f_y f = F_1$$

$$y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)$$

$$F_2 = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} \text{ alınarak, } y''' = F_2 + f_y F_1 \quad (2.19)$$

ve

$$y^{(IV)} = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy} + f_y(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}) + 3(f_x + f_y f)(f_{xy} + ff_{yy}) + f^2_y(f_x + f_y f)$$

$$F_3 = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy} \text{ alınarak}$$

$$y^{(IV)} = F_3 + f_y F_2 + 3F_1(f_{xy} + ff_{yy}) + f^2_y F_1$$

alındığında, Taylor açılımı,

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2}h^2 y''(x) + \frac{1}{6}h^3 y'''(x) + \frac{1}{24}h^4 y^{(IV)}(x) \text{ den}$$

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{1}{2}h^2 F_1 + \frac{1}{6}h^3 (F_2 + f_y F_1)$$

$$+ \frac{1}{24}h^4 [F_3 + f_y F_2 + 3F_1(f_{xy} + ff_{yy}) + F_1 f^2_y] + \dots \quad (2.20)$$

haline gelir. Denklem (2.17)'deki, k_2 , k_3 , ve k_4 ifadelerini yine Taylor seri açılımı yardımıyla, örneğin,

$$y'(x+mh) = y'(x) + mhy''(x) + \frac{m^2 h^2}{2!} y'''(x) + \frac{m^3 h^3}{3!} y^{(IV)}(x) + \dots$$

olduğundan, denklem (2.19)'daki kısaltmaları kullanarak,

$$k_1 = hf$$

$$k_2 = h[f + mhF_1 + \frac{1}{2}m^2 h^2 F_2 + \frac{1}{6}m^3 h^3 F_3 + \dots] \quad (2.21)$$

$$k_3 = h \left[f + nhF_1 + \frac{1}{2}h^2 (n^2 F_2 + 2mnf_y F_1) + \frac{1}{6}h^3 [n^3 F_3 + 3m^2 nf_y F_2 + 6mn^2 (f_{xy} + ff_{yy}) F_1] + \dots \right]$$

$$k_4 = h \left[f + phF_1 + \frac{1}{2}h^2 (p^2 F_2 + 2npF_1 f_y) + \frac{1}{6}h^3 [p^3 F_3 + 3n^2 pf_y F_2 + 6np^2 (f_{xy} + ff_{yy}) F_1 + 6mnpf^2_y F_1] + \dots \right]$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem (2.21)'de bulunan bu değerler denklem (2.18)'de yerine konup, denklem (2.20) ve denklem (2.18) ile elde edilecek bağıntının sağ tarafları eşitlenirse, yani

$$\begin{aligned}
 y(x+h) = & y(x) + (a+b+c+d)hf + (bm+cn+dp)h^2F_1 + \frac{1}{2}(bm^2+cn^2+dp^2)h^3F_2 \\
 & + \frac{1}{6}(bm^3+cn^3+dp^3)h^4F_3 + (cmn+dn^2p)h^3f_yF_1 + \frac{1}{2}(cm^2n+dn^2p)h^4f_yF_2 \\
 & + (cmn^2+dn^2p^2)h^4(f_{xy}+ff_{yy})F_1 + dmnph^4f_yF_1 + \dots
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

ile denklem (2.20) eşitlenirse,

$$a + b + c + d = 1$$

$$bm + cn + dp = \frac{1}{2}$$

$$bm^2 + cn^2 + dp^2 = \frac{1}{3}$$

$$bm^3 + cn^3 + dp^3 = \frac{1}{4}$$

$$cmn + dn^2p = \frac{1}{6}$$

$$cmn^2 + dn^2p^2 = \frac{1}{8}$$

$$cm^2n + dn^2p = \frac{1}{12}$$

$$dmnp = \frac{1}{24}$$

şeklinde sekiz denklem bulunur. Genellikle keyfi bilinmeyenler $m=n=\frac{1}{2}$ seçilir. Buna göre çözüm yapılırsa,

$$p = 1, \quad a = d = \frac{1}{6}, \quad b = c = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

O zaman 4. derece Runge-Kutta formülleri,

$$k_1 = hf(x, y), \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \quad (2.23)$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = hf(x + h, y + k_3)$$

olmak üzere,

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 2.5.

$y' = 2y - x^2$, $y(0) = \frac{1}{4}$ olan başlangıç değer problemine 4. derece Runge-Kutta yöntemini uygulayarak $y(0,1) = ?$

Gerçek çözüm: $y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$ 'dir.

$$h = 0,1, \quad f(x, y) = 2y - x^2$$

Denklemler (2.23) ile,

$$k_1 = 0,1(2 \cdot \frac{1}{4} - 0^2) = 0,05$$

$$k_2 = 0,1(2(\frac{1}{4} + \frac{0,05}{2}) - (0 + \frac{0,1}{2})^2) = 0,05475$$

$$k_3 = 0,1(2(\frac{1}{4} + \frac{0,05475}{2}) - (0 + \frac{0,1}{2})^2) = 0,055225$$

$$k_4 = 0,1(2(\frac{1}{4} + 0,055225) - (0 + 0,1)^2) = 0,060045$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ 'den}$$

$$y(0,1) = 0,25 + \frac{1}{6}(0,05 + 2 \cdot (0,05475) + 2 \cdot (0,055225) + 0,060045)$$

$$= 0,304999166$$

yuvarlatılmış $y(0,1) \cong 0,305$ olur.

Gerçek çözümden

$$y(0,1) = \frac{1}{4}(2.(0,1)^2 + 2.(0,1) + 1)$$

$$y(0,1) = 0,305$$

4. derece Runge-Kutta yöntemi çok çok küçük bir hata ile sonuca yaklaşmıştır.

Runge - Kutta yöntemi bu şekilde R-derece'ye kadar yazılabilir. Ancak uygulamalarda genellikle, işlem sayısının azlığı ve sonuçlarının yeterince yakın olması yüzünden, 4. derece Runge-Kutta yöntemi kullanılmaktadır.

2.4.3. R-derece Runge-Kutta Yöntemi

Genel olarak R-derece Runge Kutta yöntemi

$$y_{n+1} - y_n = h\phi(x_n, y_n, h)$$

$$\phi(x, y, h) = \sum_{r=1}^R c_r k_r$$

$$k_1 = f(x, y) \quad (2.24)$$

$$k_r = f(x + ha_r, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s) \quad r = 2, 3, \dots, R$$

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}, \quad r=2, 3, \dots, R$$

formülleriyle hesaplanır. Burada c_r , a_r , b_{rs} sabitlerdir.

BÖLÜM III

İNTEGRAL DENKLEMLERE SAYISAL YAKLAŞIM

3.1. GİRİŞ

İntegral denklemlerin çözümü için (Bölüm 1)'de de bahsedildiği gibi iki yaklaşım bulunmaktadır. (Analitik ve sayısal yaklaşımlar) Bunlardan biri olan sayısal yaklaşımlar integral denklemlerin çözülmesi için daha iyi yöntemler olmakla birlikte fazla geliştirilmemişlerdir. Bu bölümde bazı sayısal yöntemler incelenmiştir.

3.2. CEBİRSEL DENKLEM KÜMELERİYLE FREDHOLM DENKLEMLERİNE YAKLAŞIM (SONLU FARKLAR YÖNTEMİ)

Fredholm integral denklemi, $n \rightarrow \infty$ iken n tane cebirsel denklemin toplamının limiti olarak göz önüne alınırsa, bu yolla elde edilen çözüm Fredholm denklemi için bir yaklaşık çözüme denk gelebilir.

Bu amaçla ,

$$I = \int_a^b f(t) dt \quad (3.1)$$

şeklinde bir belirli integral,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)(\Delta x)_k \quad (3.2)$$

olarak tanımlanmıştır.

Görüldüğü gibi (a,b) aralığı $(\Delta x)_1, \dots, (\Delta x)_n$ boyutlarında n alt aralığa bölünmüştür. Ve x_k k . alt aralığın bir noktasıdır. I 'yi (a,b) 'de $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$ şeklindeki n tane noktada $f(x_k)$ ordinatlarının ağırlıklı toplamı olarak ifade edersek,

$$I \approx \sum_{k=1}^n d_k f(x_k) \quad (3.3)$$

olur. Burada d_k , x_k noktasına bağlı bir ağırlık katsayısıdır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktaları eşit aralıkta ise trapez (yamuk) ya da Simpson kuralı ile daha iyi yaklaşımlarda bulunulabilir. x_1 ve x_n sırasıyla $x=a$ ve $x=b$ uç noktalarıyla tanımlanır ve sabit aralık h olarak seçilirse, yani,

$$(n-1)h = b - a \quad (3.4)$$

ağırlık katsayıları da denklem (2.6) ve denklem (2.8)'deki gibi seçilir.

Aynı yol ile,

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (3.5)$$

integral denklemine aşağıdaki şekilde yaklaşılabilir.

$$y(x) \cong F(x) + \lambda \sum_{k=1}^n d_k K(x, x_k) y(x_k) \quad (3.6)$$

burada x_k 'lar (a, b) 'de seçilmiş noktalardır. d_k sabitleri ise ağırlık katsayılarına karşılık gelmektedir. Denklem (3.6)'nın her iki yanının n noktada eşit olduğunu kabul edersek,

$$y(x_i) = F(x_i) + \lambda \sum_{k=1}^n d_k K(x_i, x_k) y(x_k) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

n lineer denklem ve n tane bilinmeyen $y(x_1), \dots, y(x_n)$ elde edilir. $y(x_i)$ 'ler bilinmeyen $y(x)$ fonksiyonunun n noktadaki yaklaşık değerleridir.

$$y_i = y(x_i), \quad F_i = F(x_i) \quad \text{ve} \quad k_{ij} = K(x_i, x_j) \quad (3.8)$$

kısaltmalarını kullanırsak.

$$y_i = F_i + \lambda \sum_{k=1}^n d_k K_{ik} y_k \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

olur. (Burada K_{ij} $x=x_i$ ve $t=x_j$ olduğunda $K(x, t)$ 'nin değeridir). Denklem (3.9)'u matris formunda yazarsak,

$$Y = F + \lambda K D Y \quad (3.10)$$

Burada,

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad K = K_{ij} \quad (3.11)$$

ve

$$D = \begin{cases} d_{ij} = d_i & i = j \\ d_{ij} = 0 & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde diagonal bir matristir. Dolayısıyla istenen denklem sistemi,

$$[I - \lambda KD] Y = F \quad (3.12)$$

I , n . dereceden birim matristir.

Örnek 3.1.

$$y(x) = x + \int_0^1 K(x, t) y(t) dt$$

integral denkleminde sonlu farklarla yaklaşalım,

$K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu,

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & x < t \\ t(1-x) & x > t \end{cases} \quad \text{şeklindedir.}$$

Bu integral denklem, $y(0)=0$, $y(1)=1$ sınır koşullarıyla birlikte $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$ diferansiyel

denkleminde karşılık gelmektedir. Kesin sonuç buna göre, $y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$ şeklindedir. $n=5$ alırsak, eşit aralıklı noktalarımız,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1/4, \quad x_3 = 1/2, \quad x_4 = 3/4 \quad \text{ve} \quad x_5 = 1$$

olur. K matrisi ise,

$$K_{i1} = K(x_i, x_1) = 0(1-x_i) = 0$$

$$K_{i5} = x_i (1-1) = 0$$

$$K_{ij} = 0(1-x_j) = 0$$

$$K_{sj} = x_j (1-1) = 0 \quad (i, j=1, 2, \dots, 5)$$

$$\text{ve örneğin } K_{23} = K(x_2, x_3) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

böylelikle K matrisi

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 1/8 & 1/16 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1/8 & 3/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. $h=1/4$ alındığında, denklem (2.3)'den yamuk kuralının ağırlık katsayıları,

$$[d_1, d_2, d_3, d_4, d_5] = h[1/2, 1, 1, 1, 1/2]$$

$$d_1 = 1/8, d_2 = 1/4, d_3 = 1/4, d_4 = 1/4 \text{ ve } d_5 = 1/8$$

D matrisi ise, köşegeni ağırlık katsayılarından oluşan diagonal matristir. Buradan KD

çarpımı, K'nın özel durumundan dolayı $\frac{1}{4}K$ 'ya eşittir.

$$Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5]^T \quad F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5]^T$$

$f(x) = x$ olduğundan; $f_1=x, f_2=x_2, \dots, f_5=x_5$ 'tir.

$$[I - \lambda KD]Y = F \text{ ten, } \lambda=1$$

$$\left[I - \frac{1}{4}K \right] Y = F \text{ sistemimizin ifadesidir.}$$

$$y_1 = 0$$

$$\frac{61}{64}y_2 - \frac{1}{32}y_3 - \frac{1}{64}y_4 = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{32}y_2 + \frac{15}{16}y_3 - \frac{1}{32}y_4 = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{64}y_2 - \frac{1}{32}y_3 + \frac{61}{64}y_4 = \frac{3}{4}$$

$$y_5 = 1$$

denklem sistemi oluşur.

Bu denklem sisteminin sonucu,

$$y_1 = 0, \ y_2 = 0,2943, \ y_3 = 0,5702, \ y_4 = 0,8104, \ y_5 = 1 \text{ 'dir.}$$

$x = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ noktalarında $y(x)$ 'in sonuçlarına ait bu yaklaşık değerleri,

$y(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$ den elde edilen gerçek yuvarlatılmış değerlerle karşılaştırsak,

$y_1=0, y_2=0,2940, y_3=0,5697, y_4 = 0,8100, y_5=1$ sonuçların uygunluğu görülecektir.

Örnek 3.2.

Aynı örneği $n=4$ için incelersek, eşit aralıklı noktalarımız $x_1 = 0, x_2 = 1/3, x_3 = 2/3,$

$x_4 = 1$ olur.

K matrisi ise,

$$K_{i1} = K_{i4} = K_{1j} = K_{4j} = 0 \quad (i,j=1,2,3,4)$$

ve örneğin $K_{22} = 1/3(1-1/3) = 2/9$

buradan K matrisi,

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur}$$

$h=1/3$ alındığında, ağırlık katsayıları,

$$[d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4] = h[1/2, \ 1, \ 1, \ 1/2]$$

$d_1 = 1/6, d_2 = 1/3, d_3 = 1/3$ ve $d_4 = 1/6$

D köşegen ağırlık katsayıları olan (4x4) diagonal matris

$$KD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/9 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}) & (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}) & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}) & (\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

görüldüğü gibi, $KD = 1/3 \ K$

$$Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T \quad F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]^T$$

$$f(x) = x \rightarrow f_1 = x_1, \ f_2 = x_2, \ f_3 = x_3, \ f_4 = x_4 \text{ ve } \lambda = 1$$

$$[I - \lambda KD] Y = F \rightarrow [I - \frac{1}{3}K] Y = F$$

Buradan,

$$y_1 = 0$$

$$\frac{25}{27}y_2 - \frac{1}{27}y_3 = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{27}y_2 + \frac{25}{27}y_3 = \frac{2}{3}$$

$$y_4 = 1$$

denklem sistemi oluşur.

Bunun sonucu, $y_1=0$, $y_2=0.3890$, $y_3=0.7360$, $y_4=1$ dir. $x=0, 1/3, 2/3, 1$ için $y(x)=\frac{\sin x}{\sin 1}$

'den elde edilen sonuçlar, $y_1=0$, $y_2=0.3334$, $y_3=0.6667$, $y_4=1$

Görüldüğü gibi $n=5$, $n=4$ 'e göre daha iyi sonuç vermiştir. Yalnız buradan anlaşılmamalıdır ki n büyüdükçe sonuçlar daha iyi olacaktır. Aksine n 'in fazla büyük alınması daha fazla işlemi de beraberinde getireceğinden kullanışsız olacaktır. n 'i istenen hassaslığa göre (hata mertebesine göre) yeterince büyük almak en elverişlisidir.

3.3. BELİRSİZ KATSAYILAR YÖNTEMLERİ

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (3.13)$$

denkleminin sonucu, özel olarak aşağıdaki gibi n adet uygun seçilmiş $q_1, q_2, \dots, q_n$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu ile yaklaşılabılır.

$$y(x) \approx \sum_{i=1}^n c_i q_i(x) \quad (3.14)$$

Burada n tane $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri öyle seçilmelidir ki denklem (3.13), (a,b) aralığında, denklem (3.14) tarafından mümkün olduğunca iyi sağlansın. Denklem (3.14)'ün denklem (3.13) 'ü sağlaması beklentisi aşağıda eşitliği getirir:

$$\sum_{i=1}^n c_i q_i(x) \cong F(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b K(x,t) q_i(t) dt \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.15)$$

Aşağıdaki kısaltmayla

$$\phi_i(x) = \int_a^b K(x,t) q_i(t) dt \quad (3.16)$$

bu koşul,

$$\sum_{i=1}^n c_i [q_i(x) - \lambda \phi_i(x)] \cong F(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.17)$$

şekline dönüşür.

Bundan sonra $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları denklem (3.17)'nin her iki yanını (a,b) aralığı üzerinde bir denkleme indirgemeye yönelik n koşullu sistem yardımıyla tanımlanabilir.

3.3.1. Sıralama (Collocation) Yöntemi

Aşağıdaki kısaltmayı yaparsak,

$$S_i(x) = q_i(x) - \lambda \phi_i(x) = q_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) q_i(t) dt \quad (3.18)$$

denklem (3.17),

$$\sum_{i=1}^n c_i s_i(x) \cong F(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (3.19)$$

şeklini alır. $c_1, c_2, \dots, c_n$ şeklindeki n katsayının belirlenmesine yarayan n koşullu denklem sistemi denklem (3.19)'un (a,b) aralığında n bağımsız noktada bir eşitlik olması koşuluyla elde edilebilir. Bu noktaları $x_j (j=1,2,\dots,n)$ olarak alırsak, oluşan koşullar;

$$\sum_{i=1}^n c_i s_i(x_j) = F(x_j) \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.20)$$

şeklinde olacaktır. Matris formunda yazarsak,

$$S.C = F \quad (3.21)$$

Burada,

$$S = [s_{ij}] = [s_i(x_j)], C=[c_i], F=[F_i]=[F(x_i)]$$

şeklindedir.

Örnek 3.3.

Örnek 3.1'deki integral denklemi gözönüne alalım. Daha kolay anlaşılması için $y(x)$ 'in 3 terimli bir polinom olduğunu varsayalım.

$$y(x) \cong c_1 + c_2x + c_3x^2$$

böylece; $q_1=1$, $q_2=x$, $q_3=x^2$ olur.

Denklem (3.16)'dan

$$\phi_1 = \frac{1}{2}x(1-x), \phi_2 = \frac{1}{6}x(1-x^2), \phi_3 = \frac{1}{12}x(1-x^3)$$

şeklinde belirlenir. Buradan,

$$s_1 = q_1 - \lambda\phi_1 = 1 - 1 \cdot \left[\frac{x}{2}(1-x)\right] = 1 - \frac{x}{2}(1-x)$$

aynı şekilde,

$$s_2 = x - \frac{x}{6}(1-x^2), s_3 = x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \text{ bulunur.}$$

Denklem (3.19)'dan,

$$c_1 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] + c_2 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] + c_3 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] \approx x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.22)$$

oluşturulur. Bu ilişkinin $x=0$, $x=1/2$ ve $x=1$ noktalarında bir eşitlik olmasını istersek,

$$c_1 = 0$$

$$\frac{7}{8}c_1 + \frac{7}{16}c_2 + \frac{41}{192}c_3 = \frac{1}{2}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

koşullarını elde ederiz. Bu sistemin yuvarlatılmış sonuçları,

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1.2791, \quad c_3 = -0.2791$$

ve böylece istenen yaklaşık çözüm,

$$y(x) = 1.2791x - 0.2791x^2$$

şeklindedir.

Örnek 3.4.

Aynı örneği, $y(x)$ 4 terimli bir polinomken çözersek,

$$y(x) \cong c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

$$q_1 = 1, \quad q_2 = x, \quad q_3 = x^2, \quad q_4 = x^3$$

Denklem (3.16)'dan

$$\phi_1 = \frac{1}{2}x(1-x), \quad \phi_2 = \frac{1}{6}x(1-x^2), \quad \phi_3 = \frac{1}{12}x(1-x^3), \quad \phi_4 = \frac{1}{20}x(1-x^4)$$

Buradan,

$$s_1 = q_1 - \lambda\phi_1 = 1 - \frac{x}{2}(1-x) \quad s_2 = x - \frac{x}{6}(1-x^2)$$

$$s_3 = x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \quad s_4 = x^3 - \frac{x}{20}(1-x^4)$$

Denklem (3.19)'dan

$$c_1 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] + c_2 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] + c_3 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] + c_4 \left[x^3 - \frac{x}{20}(1-x^4) \right] \approx x$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (3.23)$$

oluşturulur. $x=0$, $x=1/3$, $x=2/3$ ve $x=1$ noktaları için birer eşitlik oluşturulmasını istersek,

$$c_1 = 0$$

$$\frac{8}{9}c_1 + \frac{23}{81}c_2 + \frac{41}{486}c_3 + \frac{5}{243}c_4 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{9}c_1 + \frac{49}{81}c_2 + \frac{197}{486}c_3 + \frac{131}{486}c_4 = \frac{2}{3}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin sonucu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1.1958, \quad c_3 = -0.021, \quad c_4 = -0.1748$$

böylece istenen yaklaşık çözüm

$$y(x) = 1.1958x - 0.021x^2 - 0.1748x^3 \text{ olur.}$$

x	3 terimli polinom ile bulunan yaklaşık y(x)	4 terimli polinom ile bulunan yaklaşık y(x)	Gerçek y(x)
0	0	0	0
0.1	0.1251	0.1192	0.1186
0.2	0.2446	0.2369	0.2361
0.3	0.3586	0.3521	0.3512
0.4	0.4670	0.4637	0.4628
0.5	0.5698	0.5708	0.5697
0.6	0.6670	0.6721	0.6710
0.7	0.7586	0.7668	0.7656
0.8	0.8446	0.8537	0.8526
0.9	0.9251	0.9317	0.9309
1.0	1.0000	1.000	1.000

Tablo 1

Tablo 1'de görüldüğü gibi $x=0.5$ noktası hariç tüm noktalarda 4 terimli polinomla hesaplanan yaklaşık çözüm diğerine göre daha yakındır. Ancak her zamanki gibi polinomun terim sayısı artıkcı işlem adedi fazlalaşacak ve böylelikle yöntemin kullanışlılığı ortadan kalkacaktır.

3.3.2. Ağırlıklı Fonksiyonlar Yöntemi (Galerkin Yöntemi)

Katsayıların belirlenmesi için n tane koşulun elde edilmesinin ikinci bir yöntemi, Galerkin yöntemi olarak da adlandırılır, denklem (3.19)'un her iki yanı arasındaki farkın (a,b) aralığında n lineer bağımsız $\psi_i(x)$ ($i=1,2,...,n$) fonksiyonlarına ortogonal olmasını istemektedir.

Bu yolla elde edilecek koşullar,

$$\sum_{k=1}^n c_k \int_a^b \psi_i s_k dx = \int_a^b \psi_i f_i dx \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.24)$$

formunda olacaktır. Matris ile ifade edersek;

$$M \cdot C = B \quad (3.25)$$

burada,

$$M = [m_{ij}] = \int_a^b \psi_i s_j dx \quad \text{ve} \quad B = [b_i] = \int_a^b \psi_i F dx$$

n tane ağırlıklı fonksiyonun tamamen özel, uygun bir çözümü $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ dizisidir.

Örnek 3.5.

Örnek 3.1'deki integral denklemi gözönüne alalım ve bu prosedürü $1, x, x^2$ için uygulayalım.

Denklem (3.22)'nin her iki yanını $1, x, x^2$ ile ard arda çarpar ve $(0,1)$ aralığında integre edersek,

$$c_1 \int_0^1 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] dx + c_2 \int_0^1 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] dx + c_3 \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] dx = \int_0^1 x dx$$

$$c_1 \int_0^1 x \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] dx + c_2 \int_0^1 x \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] dx + c_3 \int_0^1 x \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] dx = \int_0^1 x^2 dx$$

$$c_1 \int_0^1 x^2 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] dx + c_2 \int_0^1 x^2 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] dx + c_3 \int_0^1 x^2 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] dx = \int_0^1 x^3 dx$$

buradan,

$$\frac{11}{12}c_1 + \frac{11}{24}c_2 + \frac{37}{120}c_3 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{11}{24}c_1 + \frac{14}{45}c_2 + \frac{17}{72}c_3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{37}{120}c_1 + \frac{17}{72}c_2 + \frac{321}{1680}c_3 = \frac{1}{4}$$

koşullarını elde ederiz. Bu sistemin çözümü;

$$c_1 = -0,0088, \quad c_2 = 1,2968, \quad c_3 = -0,2798$$

ve buna bağlı olarak da yaklaşık çözüm;

$$y(x) \cong -0,0088 + 1,2968x - 0,2798x^2 \text{ olur.}$$

Örnek 3.6.

Aynı örnekte bu prosedürü bu sefer $1, x, x^2, x^3$ için uygulayalım.

Denklem (3.23)'ü bu sefer $1, x, x^2, x^3$ ile ard arda çarpar ve $(0,1)$ aralığında integre edersek,

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^1 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] dx + c_2 \int_0^1 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] dx + c_3 \int_0^1 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] dx \\ + c_4 \int_0^1 \left[x^3 - \frac{x}{10}(1-x^4) \right] dx = \int_0^1 x dx \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} c_1 \int_0^1 x^3 \left[1 - \frac{x}{2}(1-x) \right] dx + c_2 \int_0^1 x^3 \left[x - \frac{x}{6}(1-x^2) \right] dx + c_3 \int_0^1 x^3 \left[x^2 - \frac{x}{12}(1-x^3) \right] dx \\ + c_4 \int_0^1 x^3 \left[x^3 - \frac{x}{20}(1-x^4) \right] dx = \int_0^1 x^4 dx \end{aligned}$$

Buradan,

$$\frac{11}{12}c_1 + \frac{11}{24}c_2 + \frac{37}{120}c_3 + \frac{7}{30}c_4 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{11}{24}c_1 + \frac{14}{45}c_2 + \frac{17}{72}c_3 + \frac{4}{21}c_4 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{37}{120}c_1 + \frac{17}{72}c_2 + \frac{321}{1680}c_3 + \frac{77}{480}c_4 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{30}c_1 + \frac{4}{21}c_2 + \frac{77}{480}c_3 + \frac{218}{1575}c_4 = \frac{1}{5}$$

koşullarını elde ederiz. Bu sistemin çözümü,

$$c_1 = 0,8107, \quad c_2 = 1,0909, \quad c_3 = 2,7922, \quad c_4 = -3,1366$$

ve buna bağlı olarak da yaklaşık çözüm;

$$y(x) \cong 0,8107 + 1,0909x + 2,7922x^2 - 3,1366x^3 \text{ olur.}$$

x	1,x,x ² dizisi ile bulunan yaklaşık y(x)	1,x,x ² ,x ³ dizisi ile bulunan yaklaşık y(x)	gerçek y(x)
0	-0.0088	0.8107	0
0.1	0.1181	0.9446	0.1186
0.2	0.2394	1.1155	0.2361
0.3	0.3550	1.3046	0.3512
0.4	0.4651	1.4931	0.4628
0.5	0.5696	1.6621	0.5697
0.6	0.6685	1.7929	0.6710
0.7	0.7618	1.8666	0.7656
0.8	0.8495	1.8645	0.8526
0.9	0.9316	1.7676	0.9309
1.0	1.0081	1.5572	1.0000

Tablo 2

Tablo 2'de de görüldüğü gibi 1,x,x²,x³ dizisi kullanılarak elde edilen yaklaşık değerler gerçek değerleri hiçbir şekilde yansıtmamaktadır. O halde dizinin sadece 3 terimi yaklaşıklık açısından yeterlidir. Fazlası sonucu saptırmaktadır ve kullanışsızdır.

3.3.3. En Küçük Kareler Yöntemi

Bundan önceki iki yöntemle elde edilen doğruluk sıralama (collocation) ya da ağırlıklı fonksiyonların yaklaşık noktalarının seçimine bağlıdır.

Belirsiz koşulların sayısı, nokta sayısına eşit olduğunda integral denklemin sağlanmasını istemek yerine, (a,b) aralığında denklem (3.19)'un her iki yanı arasındaki farkın karesinin integralinin mümkün olduğunca küçük olması istenebilir. Böylece temel koşul;

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n c_k s_k(x) - F(x) \right]^2 dx = \text{minimum} \quad (3.26)$$

Denklem (3.26)'nın sağlanması için sol tarafın her c_i parametresine karşı gelen türevi yok edilmelidir ki

$$\int_a^b s_i(x) \left[\sum_{k=1}^n c_k s_k(x) - F(x) \right] dx = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.27)$$

eşitliğine sahip olunabilsin. Bu koşullar;

$$\sum_{k=1}^n c_k \int_a^b s_i s_k dx = \int_a^b s_i F dx \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.28)$$

formunu alır. Görüldüğü gibi elde edilen denklem, (3.24)'deki şarta denktir. Burada yalnızca ψ_i ağırlıklı fonksiyonun yerinde s_i fonksiyonu bulunmaktadır. Böylece şu sonuca varılır; integral denklemin (a,b) üzerinde (en küçük kare anlamında) sağlanması gerekiyorsa, ağırlıklı fonksiyonlar $s_i(x)$ fonksiyonları ile belirlenmelidir.

s_i fonksiyonlarının yapısından dolayı denklem (3.28)'deki integrasyonlar her zaman uygulanamazlar. Bu yüzden bu metod hesaplamada küçük miktarda artma ile tekrar formüle edilmiştir.

(3.26) ve (3.27)'deki integraller N tane uygun olarak seçilmiş noktadaki ilgili ordinatların ağırlıklı toplamlarıyla yaklaşılmış ise denklem (3.27),

$$\sum_{r=1}^N D_r s_i(x_r) \left[\sum_{k=1}^n c_k s_k(x_r) - F(x_r) \right] = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.29)$$

formunu alır. Burada D_r ($r=1,2,\dots,N$) sayıları yaklaşık integrasyonlardaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ noktalarına ait uygun ağırlıklı katsayılarıdır. (3.29) şartları,

$$\sum_{k=1}^n c_k \left[\sum_{r=1}^N D_r s_i(x_r) s_k(x_r) \right] = \sum_{r=1}^N D_r s_i(x_r) F(x_r) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.30)$$

formunda da ifade edilebilir.

$$p_r = \sum_{i=1}^n D_r s_{ri} s_{rk} \quad (3.31a)$$

ve

$$q_i = \sum_{r=1}^N D_r s_{ri} F_r \quad (3.31b)$$

kısaltmalarını kullanarak, denklem (3.30);

$$\sum_{k=1}^n c_k p_{ik} = q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.32)$$

formunda yazılabilir.

$$s_{ij} = s_j(x_i) \quad (3.33)$$

olmak üzere, (3.31a) denklemi indislerde değişiklik yapılarak,

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^N s_{ki} D_k s_{kj} \quad (i,j=1,2,\dots,n) \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir. Matris formunda ifade edersek,

$$P = S^T \cdot D \cdot S \quad (3.35)$$

Burada,

$$P = [p_{ij}], \quad S = [s_{ij}] = [S_j(x_i)] \quad \text{ve} \quad D = [D_i \delta_{ij}] \quad \text{'dir.}$$

Aynı şekilde,

$$q = S^T D \cdot f \quad (3.36)$$

elde edilir. Burada $q = \{q_i\}$ ve $f = \{F_i\}$ dir. D diagonal matris olduğundan,

$$S^T D = (DS)^T$$

olur. Böylece denklem (3.35) ve denklem (3.36)

$$P = (DS)^T \cdot S, \quad q = (DS)^T f \quad (3.37)$$

şeklini alır. Böylece matris formunda toplam prosedür,

$$P \cdot C = q \quad (3.38)$$

olur.

En küçük kareler yönteminin algoritması;

1. (a,b) aralığında $x_1, x_2, \dots, x_N$ şeklinde N nokta seçilir ve N adet denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum_{k=1}^n c_k s_k(x_i) = F(x_i) \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (3.39)$$

2. Bu denklem sisteminin $N \times n$ katsayılar matrisi S ile gösterilir ve ilgili ağırlık matrisi, S'nin i. sırasını N noktayı içeren yaklaşık bir integrasyon şemasında x_i noktaları ile ilgili ağırlık katsayısı D_i ($i=1,2,\dots,n$)'leri çarpmak yoluyla oluşturulur.

$$S^* = D.S$$

3. Denklem (3.39)'un arttırılmış matrisi ağırlık matrisi S^* 'nin transpozesi ile çarpılır. Sonuç matris $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerini tanımlayan n adet lineer denklemin beklenen kümesinin arttırılmış matrisidir.

Örnek 3.7.

Önceki bölümdeki örneği ele alalım. $N=5$ ve $x=0,1/4,1/2,3/4,1$ seçelim. $n=3$ alalım. (3.39)'a karşılık gelen 5 denklem, denklem (3.22)'nin her iki yanına x 'in 5 değeri eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$c_1 = 0$$

$$\frac{29}{32}c_1 + \frac{27}{128}c_2 + \frac{43}{1024}c_3 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{8}c_1 + \frac{7}{16}c_2 + \frac{41}{192}c_3 = \frac{1}{2}$$

$$2932c_1 + \frac{83}{128}c_2 + \frac{539}{1024}c_3 = \frac{3}{4}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

Simpson kuralının ağırlık katsayılarını kullanarak, ağırlık matrisi;

$$S^* = D.S,$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 29/32 & 27/128 & 43/1024 \\ 7/8 & 7/16 & 41/192 \\ 29/32 & 89/128 & 539/1024 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = (S^*)^T.S,$$

$$P = (S^*)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 29/32 & 27/128 & 43/1024 & 1/4 \\ 7/8 & 7/16 & 41/192 & 1/2 \\ 29/32 & 89/128 & 539/1024 & 3/4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve 3 ondalıklı yuvarlatılmış değerlerle,

$$P = \begin{bmatrix} 5.051 & 2.525 & 1.717 & 2.750 \\ 2.525 & 1.747 & 1.343 & 1.867 \\ 1.717 & 1.343 & 1.103 & 1.417 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$$Q = (S^*)^T \cdot F \text{ den}$$

$$Q^T = [2.75 \quad 1.867 \quad 1.417] \text{ olarak elde edilmiştir.}$$

$$P \cdot C = Q \text{ dan}$$

$$5.051c_1 + 2.525c_2 + 1.717c_3 = 2.75$$

$$2.525c_1 + 1.747c_2 + 1.343c_3 = 1.867$$

$$1.717c_1 + 1.343c_2 + 1.103c_3 = 1.417$$

bu denklem sisteminin sonucu

$$c_1 = -0.0079, \quad c_2 = 1.2939, \quad c_3 = -0.2783$$

ve

$$y(x) \cong -0.0079 + 1.2939x - 0.2783x^2$$

elde edilir.

Örnek 3.8.

Aynı örnekte $N=6$, $n=3$ ve $x=0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1$ seçelim. $q_1 = 1$, $q_2 = x$ ve $q_3 = x^2$ olur.

Denklem (3.22)'den

$$c_1 = 0$$

$$\frac{23}{25}c_1 + \frac{21}{125}c_2 + \frac{44}{1875}c_3 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{22}{25}c_1 + \frac{18}{125}c_2 + \frac{161}{1250}c_3 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{22}{25}c_1 + \frac{67}{125}c_2 + \frac{401}{1250}c_3 = \frac{3}{5}$$

$$\frac{23}{25}c_1 + \frac{94}{125}c_2 + \frac{1139}{1875}c_3 = \frac{4}{5}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1$$

Yamuk kuralının ağırlık katsayılarıyla ağırlık matrisi;

$$S^* = D.S,$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23/25 & 21/125 & 44/1875 \\ 22/25 & 18/125 & 161/1250 \\ 22/25 & 67/125 & 401/1250 \\ 23/25 & 94/125 & 1139/1875 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = (S^*)^T.S,$$

$$P = (S^*)^T \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 23/25 & 21/125 & 44/1875 & 1/5 \\ 22/25 & 18/125 & 161/1250 & 2/5 \\ 22/25 & 67/125 & 401/1250 & 3/5 \\ 23/25 & 94/125 & 1139/1875 & 4/5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = (S^*)^T.F$$

$$Q^T = [2.3 \quad 1.5144 \quad 1.2347]$$

$$P.C = Q'dan$$

$$4.2416c_1 + 1.9448c_2 + 1.476c_3 = 2.3$$

$$1.9448c_1 + 1.4018c_2 + 1.1512c_3 = 1.5144$$

$$1.476c_1 + 1.1512c_2 + 0.9891c_3 = 1.2347$$

bu denklem sisteminin sonucu;

$$c_1 = 0.1442, \quad c_2 = 0.7207, \quad c_3 = 0.1943$$

ve

$$y(x) = 0.1442 + 0.7207x + 0.1943x^2$$

elde edilir.

Tablo 3'de görüldüğü gibi N'i (seçilen nokta sayısını) arttırmak yöntemin daha iyi sonuç vermesini sağlamadığı gibi tutarsız yaklaşıma sebep olmuştur. Bu da N'i yeterince büyük almanın gerekli ve yeterli olduğunu gösterir.

x	N=5 için yaklaşık y(x)	N=6 için yaklaşık y(x)	gerçek y(x)
0	-0.0079	0.1442	0
0.1	0.1187	0.2182	0.1186
0.2	0.2398	0.2961	0.2361
0.3	0.3552	0.3779	0.3512
0.4	0.4652	0.4635	0.4628
0.5	0.5695	0.5531	0.5697
0.6	0.6683	0.6466	0.6710
0.7	0.7615	0.7439	0.7656
0.8	0.8491	0.8451	0.8526
0.9	0.9312	0.9502	0.9306
1.0	1.0077	1.0592	1.000

Tablo 3

x = 0.4 noktası hariç tüm noktalarda bir uzaklaşma gözlenmiştir. x=0.4 noktasının yakınlığı tesadüfidir.

3.4. GAUSS YÖNTEMİ

Yöntemin esası, (a,b) aralığının n adet eşit olmayan aralığa bölünerek, buradan elde edilen noktaların ve bunların fonksiyon değerlerinin bulunması, bulunan bu fonksiyon değerlerinin uygun ağırlık katsayılarıyla çarpılarak bir yaklaşım elde edilmesi işlemine dayanır.

d_i 'ler ağırlık katsayıları olmak üzere, Gauss yaklaşımı;

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)[d_1f(x_1) + d_2f(x_2) + \dots + d_nf(x_n)] \quad (3.40)$$

şeklindedir. d_i ve x_i 'lerin uygun seçilmesi halinde elde edilecek $(2n-1)$. dereceden tam fonksiyon kolayca integre edilebilir. x_i noktalarının oluşturulması, sınır değerlerine ve aralıkların seçimine bağlıdır. Genel olarak x_i 'ler

$$x_i = a + (b-a)\xi_i \quad (3.41)$$

ile hesaplanacaktır. $n=2,3,4$ için Gauss'un ξ_i ve d_i değerleri şunlardır:

$n=2$ için

$$\xi_1 = 0.21 \quad \xi_2 = 0.79$$

$$d_1 = 0.5 \quad d_2 = 0.5$$

$n=3$ için

$$\xi_1 = 0.11 \quad \xi_2 = 0.5 \quad \xi_3 = 0.89$$

$$d_1 = 0.28 \quad d_2 = 0.44 \quad d_3 = 0.28$$

$n=4$ için

$$\xi_1 = 0.07 \quad \xi_2 = 0.33 \quad \xi_3 = 0.67 \quad \xi_4 = 0.93$$

$$d_1 = 0.17 \quad d_2 = 0.33 \quad d_3 = 0.33 \quad d_4 = 0.17$$

Bu sayılar incelendiğinde aşağıdakilere varılır.

1. ξ_i sayılarının toplamı $n/2$ 'ye eşittir.
2. ξ_i sayılarından, baştan ve sondan aynı uzaklıkta olanlarının toplamı 1'e eşittir.
3. d_i sayılarının, her n için, toplamı 1'e eşittir.
4. d_i sayılarının dizilişinde simetri vardır.

Bunları homojen olmayan 2. tip Fredholm denklemine uygularsak, integral denklem;

$$\begin{aligned} y_1(1-\lambda K_{11}d_1)-\lambda K_{12}d_2y_2-...-\lambda K_{1n}d_ny_n &= f_1 \\ -\lambda K_{21}d_1y_1 + (1-\lambda K_{22}d_2)y_2 - ... - \lambda K_{2n}d_ny_n &= f_2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

.....

$$-\lambda K_{n1}d_1y_1 - \lambda K_{n2}d_2y_2 - ... + (1-\lambda K_{nn}d_n)y_n = f_n$$

denklemler sistemi haline gelir. Bu sistemin çözümünden elde edilen y_i ($i=1,2,...,n$) yaklaşık değerleri x_i değerlerine karşılık gelen değerler olacaktır.

Örnek 3.9.

$$y(x) = x^2 + \int_0^1 (x-t)y(t)dt$$

integral denklemini alalım. Denklemin elemanter yöntemlerle elde edilebilecek olan çözümü;

$$y(x) = x^2 + 0.23x - 0.22 \text{ 'dir.}$$

$n=4$ alalım

$$\begin{array}{llll} \xi_1 = 0.07 & \xi_2 = 0.33 & \xi_3 = 0.67 & \xi_4 = 0.983 \\ d_1 = 0.17 & d_2 = 0.33 & d_3 = 0.33 & d_4 = 0.17 \end{array}$$

$f(x) = x^2$, $K(x,t) = x-t$, $\lambda=1$, $a=0$ ve $b=1$ 'dir.

Denklem (3.41)'den

$$x_i = 0 + (1-0)\xi_i = \xi_i \text{ olur. Buna göre,}$$

$$x_1 = 0.07 \quad x_2 = 0.33 \quad x_3 = 0.67 \quad x_4 = 0.93$$

olur.

$x_i = t_i$ dir.

$$f_1 = f(x_1) = f(0.07) = (0.07)^2 = 0.049$$

$$f_2 = f(x_2) = f(0.33) = (0.33)^2 = 0.1089$$

$$f_3 = f(x_3) = f(0.67) = (0.67)^2 = 0.4489$$

$$f_4 = f(x_4) = f(0.93) = (0.93)^2 = 0.8649$$

$$K_{11} = K(x_1, t_1) = x_1 - t_1 = 0.07 - 0.007 = 0$$

$$K_{12} = K(x_1, t_2) = x_1 - t_2 = 0.07 - 0.33 = -0.26$$

$$K_{13} = K(x_1, t_3) = x_1 - t_3 = 0.07 - 0.67 = -0.60$$

$$K_{14} = K(x_1, t_4) = x_1 - t_4 = 0.07 - 0.93 = -0.86$$

Aynı şekilde,

$$K_{21} = 0.26 \quad K_{22} = 0 \quad K_{23} = -0.34 \quad K_{24} = -0.60$$

$$K_{31} = 0.60 \quad K_{32} = 0.34 \quad K_{33} = 0 \quad K_{34} = -0.26$$

$$K_{41} = 0.86 \quad K_{42} = 0.60 \quad K_{43} = 0.26 \quad K_{44} = 0$$

olur. Bu değerler (3.42)'de yerine konursa,

$$y_1 + 0.0858y_2 + 0.1980y_3 + 0.1462y_4 = 0.0049$$

$$-0.0442y_1 + y_2 + 0.1122y_3 + 0.1020y_4 = 0.1089$$

$$-0.1020y_1 - 0.1122y_2 + y_3 + 0.0442y_4 = 0.4489$$

$$-0.146y_1 - 0.1980y_2 - 0.0858y_3 + y_4 = 0.8649$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü;

$$y_1 = -0.1953 \quad y_2 = -0.0312 \quad y_3 = 0.3873 \quad y_4 = 0.8633' \text{ dür.}$$

Lagrange interpolasyon formülü uygulanarak $y(x)$ çözüm fonksiyonu belirlenebilir.

$$y(x) = y_1(x) \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + y_2(x) \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ + y_3(x) \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4(x) \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

$$y(x) = -0.1953 \frac{(x-0.33)(x-0.67)(x-0.93)}{(0.07-0.33)(0.07-0.67)(0.07-0.93)} - 0.0312 \frac{(x-0.07)(x-0.67)(x-0.93)}{(0.33-0.07)(0.33-0.67)(0.33-0.93)} \\ + 0.3873 \frac{(x-0.07)(x-0.33)(x-0.93)}{(0.67-0.07)(0.67-0.33)(0.67-0.93)} + 0.8633 \frac{(x-0.07)(x-0.33)(x-0.67)}{(0.93-0.07)(0.93-0.33)(0.93-0.67)}$$

$$y(x) = -0.0006x^3 + 0.9959x^2 + 0.2363x - 0.2176$$

yuvarlatırsak,

$$y(x) = x^2 + 0.24x - 0.22$$

Elde edilen sonuç gerçek çözümle karşılaştırıldığında sadece x 'li terimin katsayısında 0.01'lik bir fark bulunmaktadır. Bu fark yaklaşıklık için normaldir.

Örnek 3.10.

Aynı örnekte bu sefer $n=3$ alalım.

$$\xi_1 = 0.11 \quad \xi_2 = 0.5 \quad \xi_3 = 0.89$$

$$d_1 = 0.28 \quad d_2 = 0.44 \quad d_3 = 0.28$$

Yine $f(x) = x^2$, $K(x,t) = x-t$, $\lambda=1$, $a=0$, $b=1$, $x_i = \xi_i$, ve $x_i = t_i$

O halde $x_1 = 0.11$ $x_2 = 0.5$ $x_3 = 0.89$

$$f_1 = f(0.11) = (0.11)^2 = 0.0121 \quad f_2 = f(0.5) = (0.5)^2 = 0.25$$

$$f_3 = f(0.89) = (0.89)^2 = 0.7921$$

ve

$$K_{11} = K(x_1, t_1) = 0.11 - 0.11 = 0$$

$$K_{12} = K(x_1, t_2) = 0.11 - 0.5 = -0.39$$

$$K_{13} = K(x_1, t_3) = 0.11 - 0.89 = -0.78$$

Aynı şekilde,

$$K_{21} = 0.39, K_{22} = 0, K_{23} = -0.39, K_{31} = 0.78, K_{32} = 0.39, K_{33} = 0 \text{ olur.}$$

Bu değerler denklem (3.42)'de yerine konursa

$$y_1 + 0.1716y_2 + 0.2184y_3 = 0.0121$$

$$-0.1092y_1 + y_2 + 0.1092y_3 = 0.25$$

$$-0.2184y_1 - 0.1716y_2 + y_3 = 0.7921$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü;

$$y_1 = -0.1825 \quad y_2 = 0.1452 \quad y_3 = 0.7771 \text{ ' dir.}$$

Lagrange interpolasyon formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2(x) \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &\quad + y_3(x) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= -0.1825 \frac{(x-0.5)(x-0.89)}{(0.11-0.5)(0.11-0.89)} + 0.1452 \frac{(x-0.11)(x-0.89)}{(0.5-0.11)(0.5-0.89)} \\ &\quad + 0.7771 \frac{(x-0.11)(x-0.5)}{(0.89-0.11)(0.89-0.5)} \end{aligned}$$

$$y(x) = 1.0001x^2 + 0.23x - 0.2199$$

Yuvarlatılırsa,

$$y(x) = x^2 + 0.23x - 0.22$$

kesin çözümüne ulaşılır. Bu da gösteriyor ki daha hassas hesaplamak için n'i büyöltmek gerekmemektedir. 0.0001'lik bir hata çok iyi bir çözümdür. $n > 4$ almak işlemi zorlaştıracığı gibi gereksizdir, ayrıca hatayı büyöltme olasılığı vardır.

3.5. ARDIŞIK YAKLAŞIM

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \text{ integral denklemini}$$

$\mathfrak{R}$;

$\mathfrak{R}y = \int_a^b K(x, t)y(t)dt$ şeklinde bir operatörle,

$y = f + \lambda \mathfrak{R}y$ yazabiliriz. Buradan,

$$(I - \lambda \mathfrak{R})y = f \quad (3.43)$$

vektörel formuna geçebiliriz. Burada $\mathfrak{R}$ tamamen sürekli, f en azından kare integrallenebilir olsun. Bu da,

$\mathfrak{R}u = v$ için

$$\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}u) = \mathfrak{R}^{-1}v$$

$$(\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{R})u = \mathfrak{R}^{-1}v$$

$$Iu = \mathfrak{R}^{-1}v \rightarrow u = \mathfrak{R}^{-1}v$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$y = (I - \lambda \mathfrak{R})^{-1}f \quad (3.44)$$

olur. $(I - \lambda \mathfrak{R})^{-1}$, $\|\mathfrak{R}\| < 1$ için Neumann serisi ile ifade edilirse,

$$(I - \lambda \mathfrak{R})^{-1} = I + \mathfrak{R} + \mathfrak{R}^2 + \dots$$

bu aynı zamanda $|x| < 1$ için

$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\dots$ binom açılımına benzemektedir. Denklem (3.44),

$$y = (I + \mathfrak{R} + \mathfrak{R}^2 + \dots)f \text{ olur.}$$

Bu denklemden iteratif bir çözüm metodu elde etmek için, $y_0 = f$ olmak üzere ilk yaklaşımı

$$y_1 = f + \lambda \mathfrak{R}y_0 \text{ kabul ederek}$$

$$y_1 = f + \lambda \mathfrak{R}f \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} y_2 = f + \lambda \mathfrak{R}y_1 &\rightarrow y_2 = f + \lambda \mathfrak{R}(f + \lambda \mathfrak{R}f) \\ &= f + \lambda \mathfrak{R}f + \lambda^2 \mathfrak{R}^2 f \end{aligned}$$

...

$$y_n = f + \lambda \mathfrak{R}y_{n-1}$$

$$y_n = f + \sum_{k=1}^n \lambda^k \mathfrak{R}^k f \quad (3.45)$$

olur. Kesin çözüm,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3.46)$$

'dir. $y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathfrak{R}^k f(x)$

Kesin çözüm y ile n . yaklaşımın farkının normu

$$\|y - y_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k \mathfrak{R}^k f \right\| \text{ 'ı verir ki bu aşağıdaki toplama bağlanmıştır.}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \|\mathfrak{R}^k f\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \|\mathfrak{R}^k\| \|f\|$$

$\|f\| < \infty$ iken y_n dizisi y vektörüne ortalama olarak yaklaşır.

Diğer yandan uniform (düzenli) yaklaşım $[a,b]$ 'de $\forall x$ için $y_n(x)$ dizisinin değerlerinin $y(x)$ 'in değerlerine yaklaşmasını gerektirir. Bu $y_n(x) \rightarrow y(x)$ iken $\forall x$ 'in $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ 'ı ima ettiği fakat tam tersine olmadığı hallerde ortalama yaklaşıma göre daha kuvvetli bir durumdur. Uniform yaklaşımın durumunu araştırmak için çekirdek fonksiyonun integral operatörü

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt \quad (3.47)$$

'nin değerinin $\forall x \in [a,b]$ için sonlu olduğunu kabul ederek sınırlandırırız ve c_1^2 ile en küçük üst sınırı oluşturarak gösteririz. Kuvvet operatörü $\mathfrak{R}^2$ 'nin çekirdek fonksiyonu K_2 aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, u) K(u, t) dt$$

Daha yüksek dereceden $\mathfrak{R}^m$ kuvvet operatörlerinin K_m çekirdek fonksiyonları $m=3,4,\dots$ için,

$$K_m(x, t) = \int_a^b K_{m-1}(x, u) K(u, t) dt \text{ 'dir.}$$

Böylece,

$$|K_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(x,u)|^2 du \int_a^b |K(u,t)|^2 dt$$

t ile integrasyon sonrası,

$$\int_a^b |K_m(x,t)|^2 dt \leq \|R\|^2 \int_a^b |K_{m-1}(x,u)|^2 du \quad m=2,3,\dots$$

halini alır. c_m^2 , K_m 'nin integral değerlerinin en küçük üst sınırlarını oluşturabilirse, denklem;

$$c_m^2 \leq \|R\|^2 c_{m-1}^2$$

olur ki bu da,

$$c_m \leq \|R\|^{m-1} c_1 \text{ sonucunu verir.}$$

$\mathcal{R}^m f(x)$ değeri aşağıdakilerle sınırlanmıştır.

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}^m f(x)|^2 &\leq \left| \int_a^b K_m(x,t) f(t) dt \right|^2 \\ &\leq \|f\|^2 \int_a^b |K_m(x,t)|^2 dt \\ &\leq \|f\|^2 c_m^2 \end{aligned}$$

Böylece,

$$|\lambda^m \mathcal{R}^m f(x)| \leq |\lambda|^m \|f\| \cdot c_1 \|R\|^{m-1} \text{ olur.}$$

$|\lambda| \|R\| < 1$ ve çekirdek fonksiyonun (3.47) ile sınırlandırılması şartıyla $y_n(x)$ yaklaşım dizisinin değerleri her yerde $y(x)$ 'e yaklaşır. Ayrıca aşağıdakilerden diziyi n . terimde yok eden hata hakkında bir fikir elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} |y(x) - y_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \|\mathcal{R}^k f(x)\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k \|f\| \|R\|^{k-1} c_1 \end{aligned}$$

Son terim geometrik serinin kalanıdır ve aşağıdaki sonucu verecek şekilde değerlendirilebilir.

$$|y(x) - y_n(x)| = \varepsilon_n \leq \|f\| c_1 \frac{|\lambda|^{n+1} \|\mathfrak{R}\|^n}{1 - |\lambda| \|\mathfrak{R}\|} \quad (3.48)$$

Yukarıdaki hata ortalama yaklaşımda da tamamen aynı formda hesaplanır. Fakat c_1 , $\|\mathfrak{R}\|$ ile değiştirilmiştir ve $\|y - y_n\|$ değerine bir üst sınır verir.

Örnek 3.10.

$y(x) = x + \int_0^1 xty(t)dt$ integral denklemini alalım. Burada, $f(x) = x$, $\lambda=1$, $K(x,t) = xt$ dir.

Böylece, $\|\mathfrak{R}\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |xt|^2 dt dx = \frac{1}{9}$, $\|f\|^2 = \frac{1}{3}$ bulunur.

$\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \rightarrow \int_0^1 |xt|^2 dt = \frac{x^2}{3}$ böylelikle $c_1=1/3$ olur. Buradan da yola çıkarak yaklaşımın $|\lambda|<3$ için üniform olduğu tahmin edilebilir. Direkt hesaplamayla,

$$\mathfrak{R}f(x) = \int_0^1 xt \cdot t dt = \frac{x}{3}$$

$$\mathfrak{R}^2 f(x) = \int_0^1 xt \frac{t}{3} dt = \frac{x}{9}$$

....

$$\mathfrak{R}^n f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^n x$$

Böylece, $y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathfrak{R}^k f(x)$

$$= x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k x = \frac{x}{(1 - \frac{1}{3}\lambda)} \quad (\lambda < 3 \text{ için})$$

Yaklaşım üniform iken max. hata denklem (3.48)'de verilmiştir. Daha direkt olarak, $n=2$ için

$$y_2(x) = x(1 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{9}\lambda^2) \text{ dir.}$$

Eğer $\lambda = 1$ ise,

$$y(x) = \frac{3}{2}x \text{ iken } y_2(x) = \frac{13}{9}x \text{ dir.}$$

Kolaylıkla görülebilir ki,

$|y(x) - y_2(x)| \leq 1/18$ 'dir. Bu denklem (3.48)'de verilen üst sınırdır. Bu örnek az çok yanıltıcıdır. Genelde kuvvet çekirdek fonksiyonu K_m için gerekli integralleri değerlendirmenin güçlüğü, birkaç iterasyondan fazlasını hesaplamada karşılaşılan zorluklar ve kullanılan emeğin fazlalığı oldukça engelleyicidir. Bu yüzden hata tahmini, istenilen derecede kesinlik elde etmede kullanılacak yöntemin ne kadar devam edeceğini belirtmek için son derece önemlidir.

Örnek 3.11.

$y(x) = 2 + \int_0^1 (x-t)^2 y(t) dt \rightarrow \epsilon_n < 0.06$ çözümüne bir y_n yaklaşımı elde etmek istiyoruz.

$$|\lambda| = 1, \quad \|\mathfrak{K}\|^2 = \int_0^1 \int_0^1 (x-t)^4 dt dx = \frac{1}{15}, \quad \|f\| = 2$$

$$c_1 = \max \int_0^1 |x-t|^4 dt = \frac{1}{5}$$

Denklem (3.48)'den $\epsilon_2 = 0.09$ ve $\epsilon_3 = 0.024$ bulunur. Bu durumda y_3 tatmin edici bir yaklaşım olur. Eğer üniform yaklaşım değil de ortalama yaklaşım istenmişse, formül y_2 'nin üst sınırının 0.05 olduğunu gösterir ki y_2 bu durumda yeteri kadar iyi bir yaklaşımdır.

3.6. MONTE-CARLO YÖNTEMİ

$\bar{x} \in (a,b)$ noktasında, $y(x)$ değerinin yaklaşımını,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \text{ Fredholm denkleminin çözümünde alıyoruz.}$$

$|\lambda| \|K\| < 1$ olduğunu ve K 'nin bir gerçel değer olduğunu kabul ediyoruz, böylelikle Neumann dizileri yakınlaşıyor.

$x,t \in [a,b]$ için $P(x,t) \geq 0$ olacak şekilde bir olasılık yoğunluk fonksiyonu P varsayıyoruz. Ayrıca P fonksiyonunun,

$$p(x) = 1 - \int_a^b P(x,t)dt \text{ şeklinde, } [a,b]'de \text{ mutlak pozitif bir } p \text{ fonksiyonu}$$

tanımlıyoruz.

$\gamma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ 'nın $[a,b]$ 'de bir 'random walk' (rastgele yürüyüş) parçası gösterdiğini, bunun $x_0, x_1, \dots, x_k$ noktalarında durakladığını ve x_i 'den x_{i+1} 'e adımın olasılığını $P(x_i, x_{i+1})$ şeklinde gösterdiğini kabul edelim. Böylece $p(x_i)$, x_i noktasında duran bir 'walk' (yürüyüş)'ün olasılığını gösterir

V fonksiyonunu;

$$V(x,t) P(x,t) = K(x,t)$$

olarak tanımlıyoruz ve ağırlığı

$$x_0 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3, \dots, x_{m-1} \rightarrow x_m$$

dizisinin adımlarına bağlıyoruz.

$$V_m(\gamma) = V(x_0, x_1)V(x_1, x_2)\dots V(x_{m-1}, x_m)$$

Bundan sonra $x_0 = \bar{x}$ 'da başlayan ve x_k 'da biten her rastgele yürüyüşe (random walk),

$$X((\gamma/x) = V_k(\gamma)f(x_k)/p(x_k)$$

skorunu bağlıyoruz. $X(\gamma, x)$ beklenen değerinin (γ/x) şeklindeki her yürüyüşte,

$$\sum_{x=0}^{\infty} \mathfrak{R}^n f(\bar{x}) = y(\bar{x}) \text{ 'e eşit olduğu Neumann serileri sonuçlarından gösterilebilir.}$$

Monte-Carlo yönteminin çalışması rastgele bir yürüyüş tanımlamak için bir P seçiminden ve b.s. ya da başka şekilde simülasyondan, her biri x noktasından başlayan

yeterli sayıda sıradan oluşur. Her sıra için $V(y/\bar{x})$ skoru hesaplanır ve bu skorların ortalama değeri $y(\bar{x})$ 'e yaklaşmayı verir. En büyük zorluk P 'nin seçimidir. Basit ancak ideal olup olmadığı tartışılabilir bir seçim,

$$P(x,t) = |\lambda K(x,t)|$$

ve $V(x,t) = \text{sgn}\{\lambda K(x,t)\}$ cebirsel işarettir.

Rastgele yürüyüşü uygulamak için $\xi_0 \in (a,b)$ herhangi sayısını alıyoruz ve

$$\bar{q}(s) = \int_a^b P(\bar{x}, t) dt \text{ 'yi hesaplıyoruz.}$$

Daha sonra, eğer bazı $s \in (a,b)$ için,

$\bar{q}(s) = \xi_0$ ise ilk adımı $\bar{x} \rightarrow s$ yani $x_1 = s$ olarak alıyoruz. Aksi takdirde yürüyüşün bittiğini varsayıyoruz. Bundan sonra ikinci rastgele sayı ξ_1 alıyoruz ve x_2 elde etmenin karşısında

$$q_1(s) = \int_a^b P(x_1, t) dt \text{ değerini test ediyoruz.}$$

Örnek 3.12.

$$y(x) = x + \int_0^1 K(x,t)y(t)dt$$

integral denklemini alalım. Burada,

$$K(x,t) = \begin{cases} t & t < x \\ x & t > x \end{cases}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $\lambda=1$ ve K pozitifdir. Böylece $P=K$ ve $V(x,t)=1$ alabiliriz. Buna göre,

$$P(x) = 1 - \int_a^b P(x,t) dt \text{ 'den}$$

$$P(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2$$

skor;

$$X(\gamma/\bar{x}) = V_k(\gamma) f(x_k) / p(x_k) \text{ ile veriliyor.}$$

$$X(\gamma/\bar{x}) = x_k/p(x_k)$$

$\bar{x} = \frac{1}{2}$ olarak, bir bozuk parayla yazı-tura atarak 50 simülasyon rastgele yürüyüş üretme deneyi yapılmış ve bunlardan 45'inin 0.800 skorunu vererek ilk adımda sona erdiği bulunmuş. Geri kalan 5 skor; 3.765, 0.582, 2.462, 0.582 ve 0.692 olmuş ve ortalama değer; 0.87 tam değer ise: $y(1/2) = 0.887$ 'dir.

Genel olarak %5'den daha iyi bir tahmin bekleyemeyiz. Buna rağmen yöntem yüksek boyutlardaki çekirdek fonksiyonlarda ve komplike şekillerde ayrıca daha klasik yöntemlerle uygulanabilirlik göstermektedir. Bu da Monte-Carlo metodunun kullanılrlığının genişliğini gösterir.

3.7. İKİNCİ TİP VOLTERRA DENKLEMİNİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

İkinci tip Volterra denkleminin genel hali,

$$f(x) = g(x) + \sum_{x_0}^x W(x,s.f(s))ds \quad (3.49)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$f(x_0) = g(x) \text{ ve } x_0 \leq x \leq b \text{ 'dir.}$$

R-derece bir Runge-Kutta metodu denklem (3.49)'daki integrali bazı sabit x'ler için yaklaştırmada kullanılabilir. R-derece Runge-Kutta metodu,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} Z(x,y(x))dx \quad (3.50a)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Z(x,y(x))dx = h \cdot \sum_{r=1}^R c_r k_r \quad (3.50b)$$

ve

$$k_1 = Z(x_n, y_n)$$

$$k_r = Z(x_n + ha_r, y(x_n + ha_r)) \quad r=2,3,\dots,R \quad (3.50c)$$

ve

$$y(x_n + ha_r) = y(x_n) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s \quad (3.50d)$$

a_r katsayıları da,

$$0 = a_1 \leq a_2 \leq a_3, \dots, \leq a_R = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$a_r = \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} \quad r=2,3,\dots,R \quad (3.50e)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.50a) ve (3.50d) arasındaki ilişkiler kullanılarak,

$$\int_{x_n}^{x_n + a_r h} Z(x, y(x)) dx = h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} Z(x_n + ha_s, y(x_n + ha_s)) \quad (3.51)$$

Bu yüzden Volterra denkleminde

$$f(x_0 + a_r h) = g(x_0 + a_r h) + \int_{x_0}^{x_0 + a_r h} W(x_0 + a_r h, s, f(s)) ds$$

denklem (3.51) kullanılarak integral kısım yaklaşılabılır. Bu yaklaşım kullanılarak, denklem (3.49),

$$f(x_0 + a_r h) = g(x_0 + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_0 + a_r h, x_0 + a_s h, f(x_0 + a_s h)) \quad r=2,3,\dots,R \quad (3.52)$$

halini alacaktır.

$f_{js}, f(x_j + a_s)$ 'yi göstermek üzere,

$$f_{0,r} = g(x_0 + a_r) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} G(x_0 + a_r h, x_0 + a_s h, f_{0s})$$

halini alacaktır.

Burada,

$$f_{0,1} = g(x) \quad \text{ve} \quad f(x_0 + h) = f_{0R} \quad (3.53)$$

$p \geq 1$ için $x = x_p + ph$ 'larda $f(x)$ 'in değerini elde etmek için,

$$f(x) = F_p(x) + \int_{x_p}^x W(x, s, f(s)) ds \quad (3.54a)$$

kullanılabilir. Burada,

$$F_p(x) = F_{p-1}(x) + \int_{x_{p-1}}^{x_p} W(x, s, f(s)) ds \quad (3.54b)$$

ve

$$F_0(x) = g(x) \quad (3.54c)$$

denklem (3.54b) şöyle yazılabilir.

$$F_p(x) = g(x) + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} W(x, s, f(s)) ds \quad (3.55)$$

denklem (3.51) kullanılarak integral yaklaşıtlırsa,

$$F_p(x) \cong g(x) + h \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{R-1} b_{Rk} W(x, x_j + a_k h, f_{jk}) \quad (3.56)$$

elde edilir. Son olarak $x = x_p = x_0 + ph$ noktaları için denklem (3.54a)

$$F(x_p + a_r h) = F_p(x_p + a_r h) + \int_{x_p}^{x_p + a_r h} W(x_p + a_r h, s, f(s)) ds \quad (3.57)$$

şeklini alır. İntegrali yaklaşıtlırsak,

$$f(x_p + a_r h) \cong F_p(x_p + a_r h) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_p + a_r h, x_p + a_s h, f_{ps}) \quad (3.58)$$

elde edilir. Burada,

$$f_{p,l} = f_{p-1,R} \quad (p=1,2,\dots,N)$$

(3.50b) sonuçları düzeltmek için kullanılabilir.

$$f(x_0+h) = g(x_0+h) + \int_{x_0}^{x_0+h} W(x_0+h, s, f(s)) ds \text{ gibi bir denklem}$$

$$f(x_0+h) \equiv g(x_0+h) + h \sum_{r=1}^R c_r W(x_0+h, x_0 + ha_r, f_{or})$$

şeklinde yaklaştırılabilir.

Genel olarak düzeltici formül (sağlama) şu şekilde yazılabilir:

$$f(x_p+h) = g(x_p+h) + h \sum_{j=0}^p \sum_{r=1}^R c_r W(x_p+h, x_j + ha_r, f_{jr}) \quad (3.59)$$

Özet olarak ikinci tip Volterra denklemi,

$$f(x) = g(x) + \int_{x_0}^x W(x, s, f(s)) ds$$

şu şekilde çözülebilir:

$$f(x_0+a_1h) = g(x_0)$$

$$f(x_0+a_rh) = g(x_0+a_rh) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_0+a_rh, x_0+a_sh, f(x_0+a_sh)) \quad (r=2,3,\dots,R)$$

Burada,

$$0 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_R = 1$$

$$f(x_1+a_1h) = f(x_0+a_Rh)$$

$x = x_0 + ph$ $p \geq 1$ noktaları için,

$$f(x_p+a_rh) = F_p(x_p+a_rh) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_p+a_rh, x_p+a_sh, f(x_p+a_sh))$$

ve burada,

$$F_p(x_p+a_rh) = g(x_p+a_rh) + h \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=1}^{R-1} b_{rk} W(x_p+a_rh, x_j+a_kh, f(x_j+a_kh))$$

ve $f(x_p+a_1h) = f(x_{p-1} + a_Rh)$ 'dır.

Düzeltilici formül (sağlama);

$$f(x_p+h) = g(x_p+h) + h \sum_{j=0}^p \sum_{r=1}^R c_r W(x_p + h, x_j + ha_r, f(x_j + a_r h))$$

Örnek 3.13.

$f(x) = e^{-x^2} (1+x^2) + x - 1 - \int_0^x x^2 e^{-xs} f(s) ds$ integral denklemini $0 \leq x \leq 2$ için katsayılarıyla beraber

4. dereceden Runge-Kutta yöntemi kullanarak çözelim.

4. dereceden Runge-Kutta yönteminin sabitleri;

$$\begin{array}{cccc} c_1 = \frac{1}{6} & c_2 = \frac{2}{6} & c_3 = \frac{2}{6} & c_4 = \frac{1}{6} \\ a_1 = 0 & a_2 = 1/2 & a_3 = 1/2 & a_4 = 1 \end{array}$$

$$b_{21} = 1/2$$

$$b_{32} = 1/2 \text{ (kalan } b_{ij}=0)$$

$$b_{43} = 1$$

Adım uzunluğu $h=0.1$ alalım. Bu integral denklemin kesin çözümü $f(x)=x$ 'tir.

$$g(x) = e^{-x^2} (1+x^2) + x - 1, \quad x_0 = 0$$

$$f(x_0+a_1h) = g(x_0) \text{ 'dan}$$

$$f(0+0.0,1) = g(0) \rightarrow f(0) = g(0) = e^0(1+0)+0-1 = 0$$

$$f(x_0+a_rh) = g(x_0+a_rh) + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} W(x_0 + a_rh, x_0 + a_sh, f(x_0 + a_sh)) \text{ 'dan}$$

$$f(x_0+a_2h) = g(x_0+a_2h) + h \sum_{s=1}^1 b_{2s} W(x_0 + a_2h, x_0 + a_sh, f(x_0 + a_sh))$$

$$f(x_0+a_2h) = g(x_0+a_2h) + hb_{21}(x_0+a_2h) e^{-(x_0+a_2h)(x_0+a_1h)} \cdot f(x_0+a_1h)$$

$$x_0 + a_2h = 0 + 1/2 \cdot 0,1 = 0,05$$

$$f(0,05) = g(0,05) + 0,1 \cdot 1/2 \cdot (0,05)^2 e^{-(0,05)(0)} \cdot f(0)$$

$$f(0,05) = g(0,05)$$

$$f(0,05) = e^{-(0,05)^2}(1+(0,05)^2)+0,05-1$$

$$f(0,05) = 0,04999688 \cong 0,05$$

Aynı şekilde,

$$f(x_0+a_3h) = f(0+\frac{1}{2}0,1) = f(0,05) = 0,05 \text{ olur.}$$

$$f(x_0 + a_4h) = g(x_0+a_4h)+h \sum_{s=1}^3 b_{4s} W(x_0 + a_4h, x_0 + a_s h, f(x_0, a_s h))$$

$b_{41} = b_{42} = 0$ 'dir. O halde,

$$f(x_0+a_4h) = g(x_0+a_4h)+hb_{43}(x_0+a_4h)^2 e^{-(x_0+a_4h)(x_0+a_3h)} .f(x_0+a_3h)$$

$$x_0 + a_4h = 0+1.0,1 = 0,1$$

$$f(0,1) = g(0,1) + 0,1.1(0,1)^2 e^{-(0,1)(0,05)} .f(0,05)$$

$$f(0,1) = e^{-(0,1)^2} (1+(0,1)^2)+0,1-1+0,0005$$

$$f(0,1) = 0,09995 + 0,00005$$

$$f(0,1) = 0,1 \text{ olur.}$$

$$f(x_1+a_1h) = f(x_0+a_Rh)'dan,$$

$$f(x_1+a_1h) = f(x_0+a_4h) \quad f(0,1+0.0,1) = f(0,1) \rightarrow f(0,1) = 0,1$$

İşlemler bu şekilde ilerletildiğinde tablo 4'deki değerler elde edilir. Tablodan da anlaşılacağı gibi Runge-Kutta yöntemiyle elde edilen değerler, integral denklemin kesin çözümünden elde edilen değerleri oldukça iyi yansıtmaktadır. Ve R=4 yöntemin iyi sonuç vermesi için yeterlidir. R=4 için bile elle hesaplamamanın zorluğu örneğimizden de görülmektedir.

x	gerçek $f(x)$	R-K ile bulunan $f(x)$
0.1	0.10000	0.10000
0.2	0.20000	0.20000
0.3	0.30000	0.30000
0.4	0.40000	0.40000
0.5	0.50000	0.50000
0.6	0.60000	0.60000
0.7	0.70000	0.70001
0.8	0.80000	0.80002
0.9	0.90000	0.90003
1.0	1.00000	1.00005
1.1	1.10000	1.10008
1.2	1.20000	1.20011
1.3	1.30000	1.30014
1.4	1.40000	1.40018
1.5	1.50000	1.50022
1.6	1.60000	1.60025
1.7	1.70000	1.70027
1.8	1.80000	1.80030
1.9	1.90000	1.90031
2.0	2.00000	2.00032

Tablo 4

SONUÇ

İntegral denklemler günümüzde mekanikte oldukça sık karşımıza çıkan problemlerdir. Gelişen teknolojinin ortaya çıkardığı bu tip problemleri analitik yöntemlerle çözmek oldukça sıkıntılı ve zordur. Bugün karşılaştığımız problemlere artık bilgisayarların da yardımıyla sayısal yaklaşımlarda bulunmak zaman, doğru ve yakın sonuç elde etmek açısından çok önemlidir. İntegral denklemler için gördüğümüz bu birkaç yöntem konuyu açıklamak açısından oldukça sınırlı ve yetersizdir. Özellikle Volterra tipi integral denklemler için hem analitik hem de sayısal yöntemler fazlaca geliştirilmemiştir. Bugün artık her tür integral denklemin çözümüne yardımcı olacak sayısal yöntemlere büyük ihtiyaç vardır. Az da olsa bu birkaç sayısal yöntemi sizlere sunmuş olmaktan mutluluk duyuyorum.

Handan Anlı

İstanbul 1995

KAYNAKLAR

- AKSOY, Prof. Dr. Yavuz, İntegral Denklemler, Cilt I, Yıldız Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1983
- AKTAŞ, Prof. Dr. Ziya, Numerical Analysis, Part II, M.E.T.U., Ankara, 1974.
- ÇAĞAL, Prof. Dr. Behiç, Sayısal Analiz, Seç Yayın Dağıtım, İstanbul, 1989.
- FRÖBERG, Carl-Eric, Introduction to Numerical Analysis, Addison-Wesley Pu. Comp., 1974.
- GREEN, Christopher D., Integral Equation Methods, Nelson, London, 1969.
- HILDEBRAND, Francis B., Methods of Applied Mathematics, 2nd Edn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1965.
- KELLY, Louis G., Handbook of Numerical Methods and Applications, Addison-Wesley, 1967.
- KOPAL, Zdenĉ, Numerical Analysis, 2nd Edn, John Wiley, New York, 1961
- LAMBERT, J.D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons Ltd., London, 1973

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TAYYİN VE İZLENİM
BİRİMİ

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : R. Handan ANLI

Doğum Tarihi : 19 Ekim 1972

Doğum Yeri : Ankara

İlk Öğrenimi : 1983 yılında İstanbul Nevzat Ayasbeyoğlu İlkokulu'nda tamamladı

Orta Öğrenimi : 1989 yılında İstanbul Erenköy Kız Lisesi Matematik kolundan mezun oldu.

Yüksek Öğrenimi : Ekim 1989'da girdiği Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-Metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünü Haziran 1993'te bitirdi ve aynı yıl Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına başladı.