

29289

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVEKS KÜMELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf CESUR

MATEMATİK MÜHENDİSİ

İSTANBUL 1993

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

BÖLÜM 1.

1. Konveks Kümelerin Analitik Özellikleri.....1
- 1.23 Teorem: (Caratheodory).....12

BÖLÜM 2.

2. Konveks Kümelerin Soyut İncelenmesi.....21
- 2.1 Bir kümenin konveks ve salt (mutlak) konveks örtüsü.....21
- 2.2 Bir konveks kümenin cebirsel sınırı.....26
- 2.3 Yarı uzaylar.....32
- 2.4 Konveks bodyler ve onlarla birleşmiş Minkovski
fonksiyonelleri.....33
- 2.5 Konveks koniler.....38
- 2.6 Hiper koniler.....41

BÖLÜM 3.

3. Konveks kümelerin ayrılması Hahn-Banach teoremi.....42
- 3.1 Ayırma teoremi.....42
- 3.2 Hahn-Banach teoremi.....46
- 3.3 Hahn-Banach teoreminin analitik ispatı.....48

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında ve yüksek lisans öğrenciliğim esnasında, yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam **Prof. Hamit AVCI** 'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Yetişmemde emeği geçen Yıldız Üniversitesi Matematik ve Matematik Mühendisliği, İ.T.Ü Matematik Mühendisliği bölümleri öğretim üyelerine de içtenlikle teşekkür ederim.

Tezin yazımı İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği bölüm bilgisayarlarında Word Perfect 5.1 kullanılarak tarafımdan gerçekleştirilmiştir. Bu esnada bilgilerinden yararlandığım **Doç.Dr. Aziz BENER** 'e Azerbeycanlı hocam **Prof.Dr. Mahir HASANOV** 'a ve yardımlarını esirgemeyen diğer İ.T.Ü personeline teşekkür ederim.

Yusuf CESUR .

ÖZET

Bu çalışmada birinci bölümde konveks kümelerin elemanter incelenmesi başlığı altında tanım ve teoremlere, Caratheodory teoremine yer verilmiştir.

İkinci bölümde konveks kümelerin genel incelenmesi başlığı altında bir kümenin konveks ve salt (mutlak) konveks örtüsü, bir konveks kümenin cebirsel sınırı, yarı uzaylar, konveks bodiler ve onlarla birleşmiş Minkowski fonksiyonelleri, konveks koniler, hiper konilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise konveks kümelerin ayrılması Hahn-Banach teoremi başlığı altında ayırma teoremi, Hahn-Banach teoremi, Hahn-Banach teoreminin analitik ispatı konularına yer verilmiştir.

SUMMARY

In this study, in the first section convex sets have been researched in elementary form in which definitions, theorems and Caratheodory theorem.

In the second section, the convex sets have been researched in the general title which has the convex and absolutely convex couver of a set. the algebraic boundary of a convex set, half-spaces, convex bodies and the Minkowski fonctionals associated with them, convex cones, hypercones.

In the third section we mentioned the separation of convex sets, the separation theorem, the Hahn-Banach theorem and the analytic proof of the Hahn-Banach theorem.

KONVEKS KÜMELER

BÖLÜM 1.

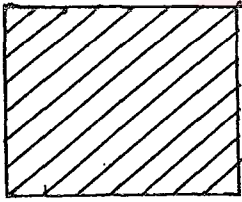
1. Konveks Kümelerin Elemanter İncelenmesi.

1.1 Tanım: Eğer $x, y \in E^n$ (n boyutlu öklit uzayı) ise $\overline{xy}$ doğru parçası tüm $\alpha x + \beta y$ tipindeki noktaların kümesidir. Burada $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ $\alpha + \beta = 1$ dir.

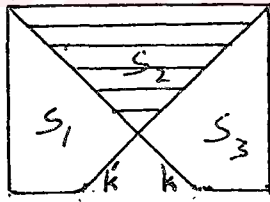
1.2 Tanım: Bir S kümesi bir $x \in S$ noktasına göre yıldızıldır eğer $\forall y \in S$ için $\overline{xy} \subset S$ şartı sağlanıyorsa.

1.3 Tanım: S kümesi eğer $\forall x, y$ nokta çifti için $\overline{xy} \subset S$ şartını sağlıyorsa konvektir denir.

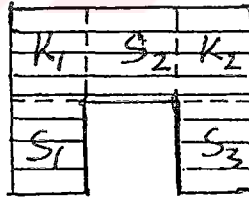
1.4 Tanım: $K = \{x \in S \mid \forall y \in S \text{ için } \overline{xy} \subset S\}$ herhangi bir S kümesinin K çekirdeği $\forall y \in S$ için $\overline{xy} \subset S$ şartını sağlayan tüm $x \in S$ lerin kümesidir.



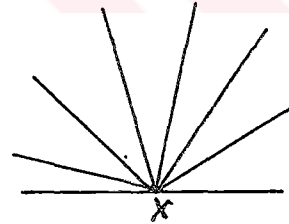
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3



Şekil 4

Bir küme konveks ise çekirdeği ile çakışır, ($S = K$) şekil.1. Şekil.2'de $K = S_2$ çekirdek S_2 dir. S_1 deki hangi noktayı seçersek seçelim k ile ve S_3 deki hangi noktayı seçersek seçelim k' ile birleştirdiğimizde kümenin içinde değildir. Şekil.3'te ise $Ker(S_1 \cup S_2) = K_1$, $Ker(S_2 \cup S_3) = K_2$ $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ olduğundan çekirdeği yoktur.

Şekil.4 $\text{Ker} S = \{x\}$ bu kümenin çekirdeği konvektir. Çekirdek aynı zamanda konveks olmayan bir kümenin konveks bir alt kümesidir. Bu örnekte küme konveks değil fakat çekirdeği konvektir.

1.5 Lemma: x, y, z üç farklı nokta $u \in \overline{xy}$ $u \neq x, u \neq y$ eğer $v \in \overline{zu}$ ise $v \in \overline{xw}$ olacak şekilde $w \in \overline{zy}$ vardır.

ispat: $u = \alpha x + \lambda y$ ($\alpha \geq 0, \lambda \geq 0, \alpha + \lambda = 1$) $x = 0$ için $u = \lambda y$ $0 < \lambda < 1$ burada doğru parçasının iç noktalarını elde ediyoruz. Şekil.5'e bakınız. $v = \alpha^* w$, $0 < \alpha^* < 1$ yazabiliriz. ($x = 0$ dan dolayı)

$v = \alpha z + (1 - \alpha)u$ $0 \leq \alpha \leq 1$ λ, α vardır.

$$v = \alpha z + (1 - \alpha)\lambda y, \quad \lambda \geq 0, \alpha \geq 0, (1 - \alpha)\lambda \geq 0$$

$$(*) \quad \alpha + (1 - \alpha)\lambda \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + (1 - \alpha)\lambda} + \frac{(1 - \alpha)\lambda}{\alpha + (1 - \alpha)\lambda} = 1, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

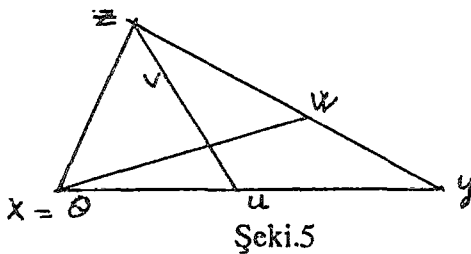
$$w = \mu_1 z + \mu_2 y \in \overline{zy}$$

Buradan

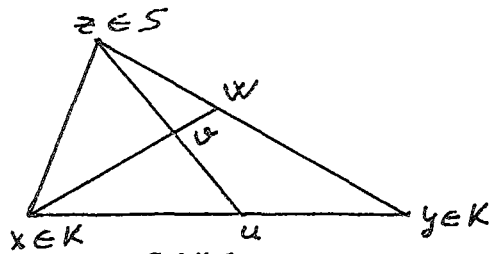
$$w = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)\lambda} [\alpha z + \lambda(1 - \alpha)y],$$

$$v = [\alpha + \lambda(1 - \alpha)]w, \quad (\alpha^* = \alpha + \lambda(1 - \alpha)), \quad v = \alpha^* w$$

olur. Şekil.5.



Şeki.5



Şekil.6

1.6 Teorem: Herhangi bir S kümesinin K çekirdeği konveks bir kümedir.

ispat: Şekil.6 $x \in K, y \in K, x \neq y$ olsun. $0 < \alpha < 1$ için $u = \alpha x + (1 - \alpha)y, u \in K$ x, y, z S in keyfi noktaları olsun. Eğer $z = x$ veya $z = y$ ise

$\overline{uz} \subset S$ dir. (u yıldızıldır.) Eğer $z \neq y$ ve $z \neq x$ ise $v \in \overline{uz}$ Lemma'dan dolayı $v \in \overline{xw}$ olacak şekilde $w \in \overline{zy}$ vardır. $y \in K$ $z \in S$, $w \in S$ den $\overline{zy} \subset S \Rightarrow w \in S$, $x \in K$, $v \in S$ dir. $x \in K$, $w \in S$, $\overline{xw} \subset S \Rightarrow v \in S$ dir. $\overline{uz} \subset S \Rightarrow u \in K \Rightarrow K$ konvektir. E^n de $x_1, x_2, \dots, x_m$ elemanlarından oluşan sonlu bir küme ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ reel sayıların elemanı olsun. Şayet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ in hepsi birden sıfır olmadan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = \theta$ gerçekleşiyor ise $x_1, x_2, \dots, x_m$ e lineer bağımlıdır denir. Şayet bu bağıntı λ_i lerden hepsi birden 0 olduğunda gerçekleşiyorsa $x_1, x_2, \dots, x_m$ elemanları lineer bağımsızdır denir. E^n nin bir alt vektör uzayı L nin lineer bağımsız maximum elemanlarının teşkil ettiği B nokta kümesi L alt vektör uzayı için bir baz 'dır. Her L alt vektör uzayının bir bazı vardır. L nin her bazı aynı sayıda nokta ihtiva eder. Genel olarak bu elemanların sayısına L nin boyutu denir. E^n nin aşikar doğal bazı

$$\epsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \epsilon_n = (0, 0, \dots, 1)$$

noktalarından ibarettir. Böylece E^n nin boyutunun n olduğu söylenir.

1.7 Tanım: E^n nin lineer bir alt uzayının bir ötelemesi bir manifold olarak adlandırılır.

İki manifold eğer biri diğerinin bir ötelemesi ise paraleldir. Bir manifoldun boyutu buna karşı gelen paralel alt uzayın boyutudur. S kümesinin boyutu S i içeren en küçük manifoldun boyutuna eşittir ve $\dim S$ ile gösterilir. Bir boyutlu manifolda doğru denir. (n-1) boyutlu manifolda hiperdüzlem adı verilir.

E^3 te θ nın has alt vektör uzayı, θ dan geçen tüm doğrular ve tüm düzlemlerin oluşturduğu kümedir. Böylece E^3 te has manifoldlar, noktalar (sıfır-boyut), doğrular (bir-boyut) ve düzlemler (iki-boyut) dir. Bunlar orijinden geçer veya geçmeyebilirler.

1.8 Notasyonlar: Bir S kümesinin içi onu içeren minimal manifolda göre relatif içi $\text{relint} S$ ile gösterilir. S yalnızca bir x noktasından ibaret ise $\text{relint} S = \text{relint}\{x\} = x$. S yalnızca bir x noktasından ibaret ise $\overline{\text{relint} xy}$ doğrunun içidir. Özel olarak

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ ve } \alpha + \beta = 1$$

olmak üzere $\overline{relintxy} = \{ \alpha x + \beta y \mid \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1 \}$ dir.

1.9 Teorem: C konveks küme olsun. Eğer $x \in int C$ ve $y \in C \Rightarrow \overline{relintxy} \subset int C$ dir.

İspat: $y \in C$ ve $y = \theta$ alalım Şekil.7. Buradan $x \in int C \Rightarrow B(x, \delta) \subset C$
 $u \in \overline{relintxy}$, $u = \lambda x$, ($0 < \lambda < 1$) bir λ vardır. (Uç noktalar dahil değildir.) $B(\lambda x, \lambda \delta) = \lambda B(x, \delta)$ ve $y = \theta \in C$, C nin konveksliğinden

$$\lambda B(x, \delta) \subset C$$

dir. Böylece

$$B(u, \lambda \delta) \subset C \text{ ve } u \in int C$$

dir. ($0 < \lambda < 1$ için $\lambda B(x, \delta) \subset B(x, \delta)$) (?) . Bunu göstermek için en basit konveks küme olarak doğru parçasını alalım. Burada

$$B(\lambda x, \lambda \delta) = \lambda B(x, \delta) \quad (?)$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

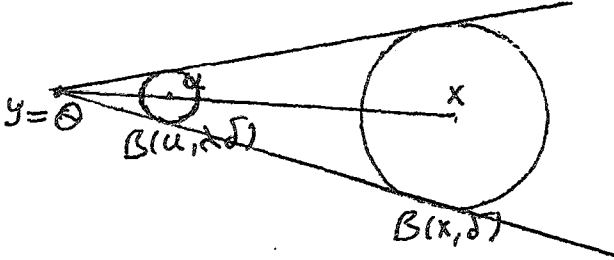
$$B(\lambda x, \lambda \delta) = \{ t \mid \lambda^2 x^2 + t^2 < \lambda^2 \delta^2 \} = \{ t \mid \lambda^2 (x^2 + (\frac{t}{\lambda})^2) < \lambda^2 \delta^2 \}$$

$$= \{ t \mid x^2 + (\frac{t}{\lambda})^2 < \delta^2 \}$$

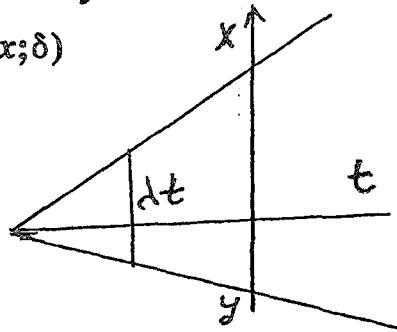
$$= \{ \lambda y \mid x^2 + y^2 < \delta^2 \}$$

$$= \lambda \{ y \mid x^2 + y^2 < \delta^2 \}$$

$$= \lambda B(x; \delta)$$



Şekil.7



Şekil.8

1.10 Sonuç: C konveks ise $\text{int}C$ de konvektir.

$$\forall x, y \in \text{int}C \Rightarrow \overline{xy} \subset \text{int}C \quad (?)$$

teoremden

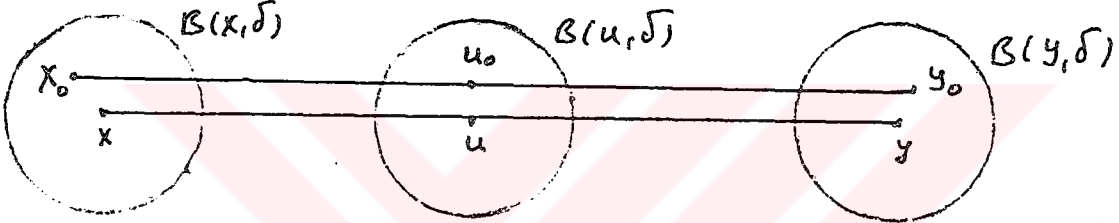
$$\text{relint} \overline{xy} \subset \text{int}C, \quad \overline{xy} = \text{relint} \overline{xy} \cup \{x, y\} \subset \text{int}C$$

dir.

1.11 Teorem: C konveks ise $\text{int}C$ de konvektir.

$$\text{ispat: } x, y \in \overline{C} \Rightarrow u = \alpha x + \beta y \in \overline{C} \quad (?) \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1$$

$$\overline{xy} \subset \overline{C}, \quad u \in \overline{xy} \Rightarrow u \in \overline{C} \quad \text{Şekil.9 'a bakınız.}$$



Şekil.9

$$x \in \overline{C} \Rightarrow x_0 \in B(x, \delta) \cap C \neq \emptyset \quad x \neq x_0,$$

$$y \in \overline{C} \Rightarrow y_0 \in B(y, \delta) \cap C \neq \emptyset \quad y \neq y_0$$

burada

$$u_0 = \alpha x_0 + \beta y_0 \in B(u, \delta)$$

olduğundan

$$d(u, u_0) = d(\alpha x + \beta y, \alpha x_0 + \beta y_0) < d(\alpha x + \beta y, \alpha x_0 + \beta y) + d(\alpha x_0 + \beta y, \alpha x_0 + \beta y_0)$$

$$= \alpha d(x, x_0) + \beta d(y, y_0) < \alpha \delta + \beta \delta = (\alpha + \beta) \delta = \delta$$

ifadesinden

$$d(u, u_0) < \delta$$

sonucu çıkar. C konveks ise

$$x_0, y_0 \in C, \quad \overline{x_0 y_0} \subset C, \quad u_0 \in \overline{x_0 y_0} \subset C \Rightarrow u_0 \in C, \quad u_0 \in B(u, \delta), \quad d(u, u_0) < \delta$$

dan $u_0 \in B(u, \delta) \cap C \Rightarrow u \in \overline{C}$ dir.

Konveks küme tanımından hatırlanacağı gibi $\forall x, y \in C$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ olması gerekiyordu. Şimdi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sayıları için $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$ gerçekleşirse bu kümeye **afin küme** denir.

1.12 Tanım: Bir S kümesi $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$ koşulunu sağlıyorsa bu S kümesine **afin küme** denir.

1.13 Teorem: Bir S kümesinin afin küme olması için gerek ve yeter koşul bir manifold olmasıdır.

ispat: (Gereklilik) S afin bir küme olsun ve x , S in sabit bir noktası olsun. $S = x + U$ olacak şekilde $U = -x + S$ 'i tanımlayalım. U , E^n in alt uzayıdır. Gerçekten; $u_1, u_2 \in U$ olsun. Bu halde $u_1 = -x + s_1$, $u_2 = -x + s_2$ olacak şekilde $s_1, s_2 \in S$ dir. Her λ için

$$u_1 + \lambda u_2 = (-x + s_1) + \lambda(-x + s_2) = -x + \lambda[2(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2) - x] + (1-\lambda)s_1$$

yazabiliriz. S afin olduğundan $y = \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \in S$ dir. Fakat $2y + (-1)x \in S$ ve

$\lambda(2y - x) + (1-\lambda)s_1 \in S$ olduğundan $u_1 + \lambda u_2 \in -x + S = U$ dur. Böylece

U , E^n nin alt uzayıdır ve $S = x + U$ bir manifold 'dur.

(Yeterlilik) Tersine bazı $x \in E^n$ ve bazı U altuzayı için $S = x + U$ gerçekleşsin. Bu halde $s_1 = x + u_1$, $s_2 = x + u_2$ olacak şekilde $\exists u_1, u_2 \in U$ dir. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2 = \lambda(x + u_1) + (1-\lambda)(x + u_2) = x + \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$$

yazabiliriz. U altuzay olduğundan

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \in U \text{ ve } \lambda s_1 + (1-\lambda)s_2 \in x + U = S.$$

Böylece S afindir.

1.14 Tanım: $i=1,2,\dots,k$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ olsun ve $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ şartı sağlansın.

Bu halde ;

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$$

denklemine $x_1, x_2, \dots, x_k$ noktalarının afin kombinasyonu denir. Şayet burada yukarıdaki koşullara $\forall i$ için $\lambda_i \geq 0$ koşulu da konursa y ye $x_1, x_2, \dots, x_k$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Bir kümenin konveks (afin) olması için g.y.k elemanlarının ikili kombinasyonları altında kapalı olmasıdır. Gerçekten bir sonraki teoremde bunun keyfi sayıda eleman için doğru olduğunu göstereceğiz.

1.15 Teorem: S kümesinin konveks olması için g.y.k S nin noktalarının her konveks kombinasyonlarının S içinde kalmasıdır.

ispat: (yeterlilik)

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in S, \sum_{i=1}^n \lambda_i, \lambda_i \geq 0 \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in S \Rightarrow S$$

konvekstir (tanımdan), ispatı matematik induksiyon metodu ile yapalım.

$m=1$ için

$$x_1 \in S, \lambda_1 x_1 = x_1 \in S$$

$m=2$ için

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \text{ için } x_1, x_2 \in S$$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in S$$

$m=k$ için

doğru olsun.

$m=k+1$ için

doğruluğunu gösterelim.

$$x_1, x_2, \dots, x_k \in S \text{ için } \lambda_i \geq 0 \text{ olmak üzere } \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$$

olsun.

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in S \quad (?)$$

$$x = \lambda^* y + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in S \quad (?) , \lambda^* + \lambda_{k+1} = 1$$

olduğunu görelim. $\lambda_{k+1}=1$ ise S nin elemanı olan $x=x_{k+1}$ dir ve S ye aittir. $\lambda_{k+1}<1$ olsun. Bu halde

$$\lambda_1+\dots+\lambda_k+\lambda_{k+1}=1 \Rightarrow \lambda_1+\dots+\lambda_k=1-\lambda_{k+1}$$

ve

$$x=(\lambda_1+\dots+\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\dots+\lambda_k}x_1+\dots+\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\dots+\lambda_k}x_k\right)+\lambda_{k+1}x_{k+1}$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\dots+\lambda_k}x_1+\dots+\frac{\lambda_k}{\lambda_1+\dots+\lambda_k}x_k\right)=y \in S$$

indiksiyondan. Böylece

$$x=(1-\lambda_{k+1})y+\lambda_{k+1}x_{k+1}$$

S nin iki noktasının konveks kombinasyonudur ve $x \in S$ dir.

1.16 Teorem: Bir S kümesinin afin olması için g.y.k S nin noktalarının her afin kombinasyonunun S içinde kalmasıdır.

ispat: Bir önceki teoremdaki gibidir.

1.17 Tanım: $x_1, x_2, \dots, x_m$ lerin oluşturduğu sonlu nokta kümesini göz önüne alalım. Eğer $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m=0$ ve $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_mx_m=\theta$ gerçekleşecek şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ reel sayıları varsa bu kümeye **afin bağımlı** denir. Aksi halde afin bağımsızdır.

Afin bağımlılığın bu tanımından $\sum_{i=1}^m \lambda_i=0$ elde ederiz.

$$x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_kx_k, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i=1$$

için g.y.k

$$x_1-\lambda_1x_1-\dots-\lambda_kx_k=\theta$$

nın sol tarafındaki tüm katsayıların sıfır olmasıdır. Bu hal ise tanım 1.14 ile çıkarılır.

Gerekliklik: $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ olsun. $1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) = 1 - 1 = 0$ dir.

Yeterlilik: $x - \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_k x_k = \theta$ nin solundaki katsayıların toplamı 0 olsun
 $1 - (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) = 0 \Rightarrow 1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ olur.

Böylece afin ve lineer bağımlılık kavramları benzerdir ve bu benzerlik aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

1.18 Teorem: E^n nin enaz $(n+1)$ farklı noktadan oluşan altkümesi lineer bağımlıdır. E^n nin enaz $(n+2)$ farklı noktasından oluşan herhangi bir altkümesi afin bağımlıdır.

ispat: E^n nin boyutu n olduğundan lineer bağımsız noktaların maximum sayısı n dir. Böylece enaz $(n+1)$ farklı noktadan oluşan alt küme lineer bağımlıdır. Şimdi teoremin ikinci kısmını inşa edelim. $m \geq n+2$ olmak üzere $x_1, x_2, \dots, x_m$ ler E^n de farklı noktalar olsunlar. Bundan dolayı

$$x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$$

$(m-1)$ vektör lineer bağımlıdır. Buradan :

$$\alpha_2(x_2 - x_1) + \alpha_3(x_3 - x_1) + \dots + \alpha_m(x_m - x_1) = \theta$$

gerçeklenecek şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ skalerleri vardır. Yani

$$-(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m)x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta$$

veya

$$\alpha_1 = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m)$$

olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = \theta$$

dır. Böylece

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0 \quad \text{ve} \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

noktaları afin bağımlıdır.

Burada E^n deki noktaların kombinasyonlarını alırken üç yol kullanmış oluyoruz. Bunlar sırasıyla lineer, afin, konveks 'lik kavramlarıdır.

Bir küme bütün lineer kombinasyonları altında kapalı ise bu bir alt uzaydır. Eğer afin fonksiyon altında kapalı ise bir manifold 'dur. Şayet konveks kombinasyon altında kapalı ise konveks kümedir.

Öte yandan lineer cebirden, altuzayların herhangi bir topluluğunun arakesitide bir alt uzaydır. Benzer sonuç afin kümeler ve konveks kümeler için söylenebilir.

1.19 Teorem : $\{S_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{A}$ konveks kümelerin herhangi bir topluluğu ise $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ da konvektir. Şayet $\{T_\beta\}, \beta \in \mathcal{B}$ afin kümelerin herhangi bir topluluğu ise $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta$ de afindir.

ispat: $x, y \in \bigcap S_\alpha \Rightarrow \forall \alpha$ için $x, y \in S_\alpha$. $\forall \alpha$ için S_α konveks olduğundan $\forall \alpha$ için $\overline{xy} \subset S_\alpha$ dır. Afin olma halinde de ispat benzerdir.

$x, y \in \bigcap T_\beta \Rightarrow \forall \beta$ için $x, y \in T_\beta$ dır. $\forall \beta$ için T_β lar afin olduğundan $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $x, y \in T_\beta$ dır. $\lambda x + (1-\lambda)y \in T_\beta \Rightarrow \forall \beta$ için doğru olduğundan $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta \Rightarrow \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta$ da afindir.

1.20 Tanım: Bir S kümesinin afin zarfı S i içeren tüm konveks kümelerin arakesitidir ve $\text{conv}S$ ile gösterilir.

1.21 Tanım: Bir S kümesinin afin zarfı S i içeren tüm afin kümelerin arakesitidir ve $\text{aff}S$ ile gösterilir.

S in konveks olması için g.y.k $S = \text{conv}S$ ve S in afin olması için g.y.k $S = \text{aff}S$ olduğu açıktır.

Gereklilik: S konveks olsun

$$S = \text{conv}S = \bigcap_{S \subset K_\alpha} K_\alpha$$

$$x \in S \subset K_\alpha \Rightarrow x \in K_\alpha \Rightarrow (\forall \alpha \text{ için}) \quad x \in \bigcap_{S \subset K_\alpha} K_\alpha \Rightarrow S \subset \bigcap_{S \subset K_\alpha} K_\alpha$$

Yeterlilik: $S = \bigcap S_\alpha = \text{conv}S$ olsun. $\forall \alpha$ için S_α konveks olduğundan (1.19 Teoreminden) S konvektir.

Doğal olarak $\text{conv}S$ S i içeren en küçük konveks kümedir ve $\text{aff}S$ de S i içeren en küçük afin kümedir. Afin kümeler ve manifoldların eşdeğerliliğinin görüşü altında S nin boyutunu $\text{aff}S$ in boyutu olarak tanımlarız.

1.22 Teorem: Herhangi bir S kümesi için S in konveks (afin) zarfı tam olarak S in elmanlarının bütün konveks (afin) kombinasyonlarından oluşur.

ispat: Teoremi konveks zarflar için ispatlayacağız. Afin zarf için benzer ispat yapılabilir. T , S in elemanlarının tüm konveks toplamalarını gösterebilir. $\text{conv}S$ in konveks ve $S \subset \text{conv}S$ olduğundan (Teorem 1.15) den $T \subset \text{conv}S$ dir.

$$\text{Tersine; } x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r \quad \text{ve} \quad y = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_s y_s$$

T nin herhangi iki elemanı olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \alpha_1 x_1 + \dots + \lambda \alpha_r x_r + (1 - \lambda)\beta_1 y_1 + \dots + (1 - \lambda)\beta_s y_s$$

her bir tamsayı 0 ile 1 arasında olduğundan ve

$$\sum_{i=1}^r \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^s (1 - \lambda) \beta_j = \lambda \sum_{i=1}^r \alpha_i + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^s \beta_j = \lambda(1) + (1 - \lambda)(1) = 1$$

olduğundan T nin bir elemanıdır. Böylece T , S i içeren konveks kümedir ve $\text{conv}S \subset T$ dir. Bundan dolayı $\text{conv}S = T$ dir.

Aşağıdaki teorem konveks küme çalışmalarının en temel teoremidir. Bu teoremden S nin konveks zarfı içindeki bir x noktası S nin noktalarının (sonlu birçok) bir konveks kombinasyonudur, fakat bu kombinasyon yapımında arzulanan S nin noktalarının sayısı üzerinde bir kısıtlama getirmez. Caratheodory teoremi şöyle der ; n boyutlu bir uzayda konveks kombinasyonda S nin noktaları sayısı asla $(n+1)$ den fazla olmak zorunda değildir.

1.23 Teorem: (Caratheodory): S , E^n nin boştan farklı bir altkümesi ise $\forall x \in \text{conv}S$ $(n+1)$ veya en az S nin elemanlarının konveks kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

ispat:

$$x \in \text{conv} S$$

olsun. Bu halde Teorem 1.22 den

$$\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \text{ ve } \forall i \in (1, \dots, k)$$

için $x_i \in S$ olmak üzere

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$$

yazılabilir. Bizim amacımız böyle bir x in $k \leq n+1$ için varlığını göstermektir. Eğer $k > n+1$ ise $x_1, x_2, \dots, x_k$ afin bağımlıdır. Böylece (Teorem 1.18) den

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

gerçeklenecek şekilde hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalerleri vardır. Bundan

dolayı $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = x$ alabiliriz ve $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ dır. İkinci denklemin

uygun bir katını birinciden çıkartarak x_i lerden birini elimine ederek ve S nin k dan

daha az elemanlarının x 'e eşit olan bir konveks kombinasyonunu elde ederiz. α_i 'lerin

hepsi birden sıfır olmadığından $\alpha_k > 0$ ve $\alpha_i > 0$ şartını sağlayan $\forall i$ için

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \text{ farz edebiliriz. } 1 \leq i \leq k \text{ için } \beta_i = \lambda_i - \left(\frac{\lambda_k}{\alpha_k}\right) \alpha_i \text{ alalım. Bu takdirde}$$

$$\beta_k = 0 \text{ ve}$$

$$\sum_{i=1}^k \beta_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - 0 = 1$$

elde edilir. Bunlardan başka her bir $\beta_i \geq 0$ dır. Gerçekten ; şayet $\alpha_i \leq 0$ ise

$$\beta_i \geq \lambda_i \geq 0 \text{ . } \alpha_i > 0 \text{ ise}$$

$$\beta_i = \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right) \geq 0$$

dır. Böylece

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i$$

$$= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x$$

Böylece biz x 'i $x_1, \dots, x_k$ noktalarının $(k-1)$ konveks kombinasyonu olarak göstermiş oluyoruz. Bu da x 'i S nin noktalarının en fazla $(n+1)$ konveks kombinasyonu olarak gösterilinceye kadar tekrar edilebileceğini ortaya çıkarır.

Bir S kümesinin konveks zarfı S nin noktalarının bütün konveks kombinasyonlarının kümesi olduğundan Caratheodory teoremini şöyle ifade edebiliriz: x 'in S nin konveks zarfında olması için g.y.k x 'in $(n+1)$ yada daha az noktalarının konveks zarfında olmasıdır. Genelde bu sonucu daha iyi şekle sokamayız. Gerçekten

E^2 de verilen doğrusal olmayan üç noktadan oluşan üçgenin merkezi noktaların üçünde konveks zarfındadır.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$x_0 \in \text{conv} S$$

fakat herhangi ikisinin konveks zarfında değildir.

Eğer S , E^n de en fazla n -tane bağlı bileşenlerden oluşuyorsa o zaman S nin konveks zarfında her nokta S nin n yada daha fazla noktaların konveks kombinasyonudur. [$(S_1, S_2, \dots, S_k)$ ikişer ikişer ayrık $\bigcup_{i=1}^k S_i$ bileşen tanımı.]

Şimdi bir polytop'un genel kavramını ve simplex 'i tanımlayacağız. Burada şunu söylemeliyiz ki boştan farklı herhangi bir konveks küme boştan farklı relintint 'e sahiptir.

1.24 Tanım: Sonlu nokta kümelerinin zarfına **polytop** adı verilir.

$S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ ve $\dim S = k$ ise $\text{Conv} S$ k -boyutlu simpleks olarak adlandırılır.

$x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ 'ler köşeler olarak adlandırılırlar.

S nin boyutunun $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ k 'ya eşit olması $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ vektörlerinin afin bağımsızlığı ile eşdeğerdir. Yani $(x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1)$ vektörleri lineer bağımsız olmak zorundadır. Sıfır boyutlu bir simplex bir noktadır. Bir boyutlu bir simplex doğru parçasıdır. İki boyutlu bir simplex üçgendir. Üç boyutlu bir simplex dörtyüzlü 'dür.

(Teorem 1.22) den biliyoruz ki $S = \{Conv\{x_1, \dots, x_{k+1}\}\}$ simplex'indeki x noktası, köşelerin konveks kombinasyonu olarak ifade edilebilir ve bu yazılış tektir.

Diyelim ki x 'in iki gösterilimi $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i$$

olsun. Buradan, eşitlik olduğundan

$$\sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0$$

yazabiliriz. $\alpha_i - \beta_i = \lambda_i$ diyelim.

$$(*) \quad x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = 0$$

olacaktır.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k+1} (\alpha_i - \beta_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1 - 1 = 0$$

olur. Böylece

$$\lambda_1 = -(\lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1})$$

dir. (*) dan yazarsak

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0$$

$$-(\lambda_2 + \dots + \lambda_{k+1}) x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 (x_2 - x_1) + \lambda_3 (x_3 - x_1) + \dots + \lambda_{k+1} (x_{k+1} - x_1) = 0$$

elde ederiz.

Diğer taraftan S nin boyutu k olduğundan bu eşitlik ancak λ_i 'lerin sıfır olması ile mümkündür. $(2 \leq i \leq k+1) \Rightarrow \lambda_i = 0$ dır. O halde $\alpha_i = \beta_i$ dir. Bu halde gösteriliş tektir. Böylece biz aşağıdaki teoremi ispat etmiş oluruz.

1.25 Teorem: $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\} \subset E^n$ 'nin k -boyutlu altkümesi olsun. S nin (konveks zarfının) simpleksindeki her nokta köşelerinin bir konveks kombinasyonu olarak tek türlü yazılabilir.

1.26 Tanım: Farz edelim ki $\text{Conv}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ bir x noktasını içeren k -boyutlu simpleks olsun. x 'in köşelerinin konveks kombinasyonu olarak bir tek gösterilişi

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1}$$

ile verildiğinde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ sayılarına x noktasının **horizontrik** koordinatları denir.

$$x_0 = \frac{1}{k+1} (x_1 + \dots + x_{k+1})$$

noktasına simpleksin merkezi denir. Merkezden yararlanarak boştan farklı her konveks kümenin reletif içe sahip olduğunu ispatlayacağız. İlk ispat simpleksler içindir.

1.27 Teorem: $S = \{\text{Conv}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}\}$ k -boyutlu simpleks olsun. S nin reletif içi boştan farklıdır. $\text{relint} S \neq \emptyset$ dır.

ispat: S nin reletif içinin boştan farklı olduğunu göstermek, S kümesinin onu ihtiva eden minimal manifolda göre içinin boştan farklı olduğunu göstermeliyiz. Daha önceki teoremden ise biliyoruz ki bir S kümesinin manifold olması için g.y.k onun afin olmasıydı. O halde minimal manifold olması $\text{aff} S$ 'nin arakesiti olan afin zarf $\text{aff} S$ 'ye denktir. Böylece bizim S nin, S yi içeren afin zarfa $\text{aff} S$ 'ye göre içinin boştan farklı olmasını göstermemiz yeterlidir. (Yani $\text{aff} S$ 'te bir nokta konveks kombinasyon olarak yazılabilmektedir.)

Simpleks k -boyutlu olduğundan $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ noktaları afin bağımsızdır. Böylece S nin afin zarfındaki her nokta bu noktalar cinsinden tek türlü yazılışa sahiptir. $\text{aff} S$ bir manifold olduğundan E^{n+1} 'e

$$f: \text{aff} S \rightarrow E^{k+1}$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$$

fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu fonksiyon bileşenlerce tanımlanmış (1-1), üzerine ve süreklidir. S nin merkezi x_0 olsun. O zaman;

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}\right)$$

dir. x_0 , noktasında f fonksiyonu sürekli ve her koordinat fonksiyonu pozitif olduğundan, x_0 etrafında bir B açık civarı bulabiliriz öyle ki $B \cap \text{aff}S$ deki her x noktası için koordinat fonksiyonları pozitifdir. Böylece $B \cap \text{aff}S$ deki her x noktası $x_1, \dots, x_{k+1}$ noktalarının bir konveks kombinasyonudur. Teorem 1.22 den

$$B \cap \text{aff}S \subset \text{Conv}S$$

olur ve

$$x_0 \in \text{relint}S$$

dir.

$$x_0 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \xrightarrow{f} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

1.28 Sonuç: S , E^n nin k -boyutlu konveks altkümesi olsun. S 'nin reletif içi boştan farklıdır.

ispat: S k -boyutlu olduğundan S de $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ noktaları afin bağımsızdır. Bu noktaların konveks zarfı k -boyutlu simplekstir bunu T ile gösterelim. Bir önceki teoremden

$$\text{relint}T \neq \emptyset$$

dir.

$$\text{relint}T \subset \text{relint}S$$

oldüğundan

$$\text{relint}S \neq \emptyset$$

dir.

Bazen bu teorem Caratheodory teoremini simpleksler için şu şekilde aktarmakta yardımcı olabilir.

" x 'in S nin konveks zarfında olması için g.y.k x 'in köşeleri S deki noktalar olan Δ simpleksinin içinde olmasıdır."

Bu teorem bize kümenin içi hakkında bir şey söyleyemez. $H \subset f$ te biz x 'i konveks zarfının iç noktası olduğunu bilsek x , Δ nin iç noktasıdır sonucuna

varamayız. Gerçekten; S bir karenin dört köşesinden ibaret olsun. O zaman karenin merkezi S nin konveks zarfındadır fakat S nin köşelerinden oluşan herhangi bir üçgenin iç noktası değildir. Bir kümenin konveks zarfındaki x noktası daima kümenin köşelerinden oluşan minimal boyutlu simpleksinin reletif içindedir. Konveks zarfların topolojik özellikleri tanımlı iki teorem ile bu bahsi kapatıyoruz.

1.29 Teorem: Eğer S açık küme ise S nin konveks zarfıda açıktır.

ispat: $\text{Conv}S = \text{intConv}S$ olduğunu gösterelim.

i) $\text{intConv}S \subset \text{Conv}S$
her zaman vardır.

ii) $\text{Conv}S \subset \text{intConv}S$ (?)
 S açık olduğundan

$$S \cap \text{bdConv}S = \emptyset$$

dir. Gerçekten

$$\text{bd}S = \overline{S} \setminus \text{int}S = \overline{S} \cap (\text{int}S)^c$$

$$\text{bdConv}S = \overline{\text{Conv}S} \setminus \text{intConv}S$$

$$S \subset \text{Conv}S \Rightarrow \text{int}S \subset \text{intConv}S$$

$$= \overline{\text{Conv}S} \setminus \text{intConv}S \subset \overline{\text{Conv}S} \setminus \text{int}S$$

(S açık $\text{int}S = S$)

$$= \overline{\text{Conv}S} \setminus \text{intConv}S \subset \overline{\text{Conv}S} \setminus S$$

$$S \cap \text{bdConv}S = S \cap (\overline{\text{Conv}S} \cap S^c)$$

$$= S \cap S^c \cap \overline{\text{Conv}S} = \emptyset$$

Daima $S \subset \text{Conv}S$ dir. O halde $S = \text{int}S \subset \text{intConv}S$ olmalıdır. $\text{Conv}S = \text{Konveks k\u00fcmelerin arakesitidir, konvekstir. Konveks k\u00fcmelerin i\u00e7ide konvekstir. \u00d6yleyse 1.10 dan: intConv}S (=konveks) S$ 'yi \u00f6rten herhangi bir konveks k\u00fcmeye olduğundan konveks zarf tanım\u0131 gereğince

$$\text{Conv}S \subset \text{intConv}S$$

dir. B\u00f6ylece

$$\text{Conv}S = \text{intConv}S$$

dir. Konveks k\u00fcmelerin konveks zarf\u0131 kapalı olmayabilir. E^2 de bir \u00f6rnek verelim.

$$S = \{(x,y) \mid x^2 y^2 = 1 \text{ ve } y > 0\}$$

S kapalıdır fakat konveks zarfı

$$\text{Conv}S = \{(x,y) \mid y > 0\}$$

üst yarı düzlem kapalı değildir. Eğer biz S kapalı ve sınırlı olsun dersek o zaman $\text{Conv}S$ de kapalı ve sınırlıdır.

1.30 Teorem: Eğer S tıktır ise $\text{Conv}S$ 'de tıktır.

ispat: B , E^{n+1} 'in tıktır bir altkümesidir.

$$B = \{(x,y) \mid x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$x+y=1 \Rightarrow y=1-x$$

$$B \subset \delta(\theta, 1)$$

sınırlıdır.

$$\theta = (0,0) \quad B \subset E^3$$

olsa

$$B = \{(x,y,z) \mid x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Bir kümenin sınırlı olması bir yuvarın (topun) içine alınabilmesidir.

$$B \subset \delta(\theta, 1) \quad \theta = (0,0,0)$$

(R^n 'de bir A altkümesinin tıktır olması için g.y.k kapalı ve sınırlı olmasıdır.)
Genelleştirirsek

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$$

Sınırlılık;

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_{n+1}^2 = 1$$

$$x \in \delta(\theta, 1), \quad \theta = (0, \dots, 0)$$

Kapalılık ; $\{x_n^*\} \subset E^2$ bir dizi seçilsin ve $\forall n \in N$ için

$$x_n^* \in B \subset E^2, \quad x_n^* \rightarrow x^*$$

Eğer kapalı ise $x^* \in B$ olmalıdır.

$$x_n^* = (x_n, y_n) \Rightarrow x_n + y_n = 1, \quad x_n \geq 0, y_n \geq 0$$

$x^*=(x,y)$, R^n deki bir $\{y_n\} \rightarrow y$ yakınsıyorsa

$$y_n = \{y_{n,1}, \dots, y_{n,n}\} \rightarrow y = \{y_1, \dots, y_n\}$$

g.y.k $y_{n,j} \rightarrow y_j$ olmasıdır.

$$y_1 = (y_{1,1}, \dots, y_{1,n})$$

$$y_2 = (y_{2,1}, \dots, y_{2,n})$$

.....

.....

$$y_{n,j} \rightarrow y_j$$

.....

$$y_n = (y_{n,1}, \dots, y_{n,n})$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

Bizim problemimizde $x_n \rightarrow x$, $\forall \epsilon < \epsilon$ için $\exists n_\epsilon \in N$, $\forall n \geq n_\epsilon$ için

$$y_n \rightarrow y \text{ , } |x_n - x| < \epsilon \text{ , } x \geq 0 \text{ , } |y_n - y| < \epsilon \text{ , } y \geq 0$$

$$x_n + y_n = 1 \Rightarrow y_n = 1 - x_n$$

$x_n \rightarrow x \Rightarrow y_n \rightarrow 1 - x = y \Rightarrow x + y = 1$, $\forall n \in N$ için

$$x_n^* \in B \subset E^{n+1} ; x_n^* \rightarrow x^*$$

$x_n^* = (x_{n,1}, \dots, x_{n,n+1})$ $\forall j \in [1, \dots, n+1]$ için $x_{n,j} \geq 0$ alırsak ;

$$x_n^* \rightarrow x^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \quad x^* \in B \quad (?) \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{n,j} = 1 \quad j \in [1, \dots, n+1]$$

için

$$0 \leq x_{n,j} \leq 1 \text{ , } x_{n,j} \rightarrow x_j$$

biliyoruz.

$$x_{n,1} = 1 - (x_{n,2} + x_{n,3} + \dots + x_{n,n+1})$$

$$x_{n,1} \rightarrow x_1 = 1 - (x_2 + x_3 + \dots + x_{n+1})$$

$$\Rightarrow 0 \leq x_2 + \dots + x_{n+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x_1 \leq 1$$

B kümesi tıkdır. İspata devam edelim. E^2 de

$$f: E^2 \times E \times E \rightarrow E$$

ye süreklı bir fonksiyon olsun.

$$f: B \times S \times S \rightarrow C \subset E$$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, x_{1,1}, x_{2,1}) = \alpha_1 x_{1,1} + \alpha_2 x_{2,1} \quad \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

konveks kombinasyon

$$S \subset E^n, \text{Conv} S \subset E^n$$

$$f: (\text{TıkızKüme}) K \xrightarrow{\text{fsüreklı}} f(K)$$

tıkız.

$$f: \underbrace{B \times S}_{E^{n+1}} \times \underbrace{\dots \times S}_{(n+1)\text{ tane } E^n} \rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

$x_1 \in S \subset E^n$ fakat

$$x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$x_{n+1} = (x_{n+1,1}, x_{n+1,2}, \dots, x_{n+1,n})$$

S ye ait n tane noktanın konveks kombinasyonu olacaktır. Konveks kombinasyonda (n+1) tane sabit gereklidir.

$$f: E^{(n+1)^2} \rightarrow E^n$$

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n}, \dots, x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,n}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$$

bu ise gerçekte S ye ait $(n+1)$ tane noktanın konveks kombinasyonudur.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \in \text{Conv} S$$

$$\Rightarrow f(x) \subset \text{Conv} S$$

$$\Rightarrow f(B \times S \times \dots \times S) = \text{Conv} S$$

f sürekli olduğundan $\text{Conv} S$ de kompakttır.

BÖLÜM 2

2 Konveks Kümelerin Genel İncelenmesi.

2.1 Bir kümenin konveks ve salt (mutlak) konveks örtüsü.

Keyfi reel yada konveks vektör uzaylarındaki konveks kümeler esas olarak n -boyutlu haldekinden daha karmaşık olan özellikler taşırlar. Eksiksizlik için herhangi bir çaba göstermeden bu kümeler teorisine kısa bir giriş vereceğiz.

p -konveks ve p -saltkonveks küme tanımı: $0 < p \leq 1$ olmak üzere K cismi üzerinde bir E vektör uzayının bir M altkümesi eğer x ve y noktalarını içerdiğinde $\tau x + \sigma y$ toplamında içeriyorsa bu M kümesine p -konvektir denir. Burada $\tau \geq 0$, $\sigma \geq 0$ ve $\tau^p + \sigma^p = 1$ dir. M kümesi eğer x ve y yi içerdiğinde $|\tau|^p + |\sigma|^p \leq 1$ olmak koşuluyla her $\tau x + \sigma y$ toplamını içeriyorsa M kümesi salt p -konveks adını alır. Burada τ ve σ , E nin reel yada konveks bir vektör uzayı olmasına bağlı olarak reel yada kompleks sayılardır. Eğer $p=1$ ise sırasıyla konveks ve salt konveks kümeleri ele alacağız. Bir M kümesinin $\Gamma_p(M)$ salt p -konveks örtüsü M yi içeren tüm salt konveks kümelerin kesişimi

$$\Gamma_p(M) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \leq 1 \right\}$$

şeklindeki tüm terimlerden oluşur. $0 < p < 1$ koşuluyla p için ispat tamamen

$$|\alpha + \beta|^p \leq |\alpha|^p + |\beta|^p$$

eşitsizliği kullanılarak 1.(1) de vereceğimiz $p=1$ için yapılacak ispata benzerdir. Salt konveks küme kavramı reel yada kompleks uzaylar için farklı olduğu halde, konveks küme kavramı hem reel ve hemde kompleks uzaylar için aynıdır. Bundan dolayı, zaman zaman reel yada kompleks salt konveks kümelerden sözedeceğiz. Her kompleks E vektör uzayı reel bir vektör uzayı olarak da yorumlanabilir. Eğer $\{x_\alpha\}$, E nin kompleks bir cebirsel tabanı ise, o zaman x_α ve ix_α vektörleri birlikte E nin reel bir cebirsel tabanını oluşturur. Keyfi olarak birçok konveks (karşılık olarak salt konveks) altkümünün kesisiminin yine konveks (salt konveks) olduğu tanımdan doğrudan çıkar. Keyfi bir M kümesinin $C(M)$ konveks örtüsü, onu içeren (kapsayan) E nin tüm konveks altkümelerinin kesişimidir. $C(C(M))=C(M)$ dir.

Eğer $M = \bigcup_{\alpha} M_{\alpha}$ ise, yine $C(M)$ için $C_{\alpha} M_{\alpha}$ yazacağız. $\Gamma(M)$ yada $\Gamma_{\alpha} M_{\alpha}$ salt konveks örtüsü (reel yada kompleks) benzer şekilde tanımlanır.

$$2.1.1 \quad C(M), \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad x_i \in M$$

şeklindeki tüm elemanlardan oluşur. Aynı şekilde

$$\Gamma(M), \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i, \quad p_i \in K, \quad \sum_{i=1}^n |p_i| \leq 1, \quad x_i \in M$$

şeklindeki tüm elemanlardan oluşur.

ispat: Verilen elemanların M yi kapsayan konveks (karşılığı salt konveks) bir küme oluşturdukları derhal sağlanabilir. Karşıt olarak bu elemanların M yi içeren her konveks (salt konveks) kümenin elemanı olduklarını göstereceğiz. Bunu $C(M)$ için ispatlayacağız. $\Gamma(M)$ için ispat benzerdir. $n-1$ için yukardaki şekilde her

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$

elemanının $C(M)$ de yer aldığının gösterildiğini varsayalım.

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i \quad \text{verildiğinde} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i = \alpha$$

alalım . Tüme varım hipotezinden $y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha'_i}{\alpha} x_i$ $C(M)$ de yer alır. Bu nedenle $0 < \alpha \leq 1$ olduğundan

$$\alpha y + (1-\alpha)x_n = \sum_{i=1}^n \alpha'_i x_i$$

olur.

2.1.2 Bir M kümesinin salt konveks örtüsü M in dengeli örtüsünün konveks örtüsüdür. Bir küme ancak ve ancak konveks ve dengeli ise salt konvekstir. Bir M kümesinin konveks örtüsünün dengeli örtüsünün konveks olması gerekmez.

sonuç: Eğer M_α kümeleri dengeli ise

$$\Gamma M_\alpha = C M_\alpha$$

dir.

ispat: a) Her salt konveks küme dengeli olduğundan, dengeli bir M kümesinin konveks örtüsünün salt konveks olduğunu göstermek yeter. (2.1.1) den

$C(M)$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ koşuluyla tüm $\sum_{i=1}^n p_i x_i$ lerden oluşur ve dolayısı ile (2.1.1)

den $C(M) \subset \Gamma(M)$ olduğu sonucu çıkar. Karşıt olarak $\sum_{i=1}^n |\beta_i| \leq 1$ koşulu ile K da

$\beta_i \neq 0$ verildiğinde, eğer

$$\alpha_i = \beta_i \frac{\sum |\beta_k|}{|\beta_i|} \quad \text{ve} \quad p_i = \frac{|\beta_i|}{\sum |\beta_k|}$$

alınırsa x , $C(M)$ in elemanı olacak şekilde

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad |\alpha_i| \leq 1, \quad \alpha_i x_i \in M$$

koşuluyla her

$$x = \sum \beta_i x_i \in \Gamma(M)$$

elemanının

$\sum p_i \alpha_i x_i$ şeklinde yazılabileceği görülür. O halde aynı zamanda

$$\Gamma(M) \subset C(M)$$

elde edilir.

b) (0,0),(1,0) ve (1,1) noktalarının konveks örtüsünün ne Γ^2 deki kompleks dengeli örtüsü nede P^2 deki reel dengeli örtüsü konvektir.

c) Sonuç: Eğer M_α lar dengeli ise $\bigcup M_\alpha$ nin dengeli olduğu gerçeğinden çıkar ve dolayısıyla (2.1.2) den

$$CM_\alpha = C(\bigcup M_\alpha) = \Gamma(\bigcup M_\alpha) = \Gamma M_\alpha$$

elde edilir.

2.1.3 Eğer $C_1, \dots, C_n$ konveks (salt konveks) ve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ K nin keyfi elemanları ise, o zaman $\alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n$ konvektir (salt konvektir).

C konveks yada salt konveks olduğundan $C_1 + C_2$ için iddiayı kurmak yeterlidir. Konveks C_1 ve C_2 için iddia

$$x, x' \in C_1, y, y' \in C_2, 0 \leq \tau \leq 1$$

ise

$$\tau(x+y) + (1-\tau)(x'+y') = [\tau x + (1-\tau)x'] + [\tau y + (1-\tau)y']$$

bağıntısının sonucu olarak çıkar. Salt konveks halide benzer şekilde ispatlanır.

Eğer C konveks ise, $x_0 + C$ açıkça konvektir. Bununla birlikte bu sonuç 0 noktasının özel bir rol oynadığı salt konvekslik için geçerli değildir. Eğer C salt konveks ise, $x_0 + C$ ye x_0 civarında salt konvektir diyeceğiz.

2.1.4 Bir konveks yada salt konveks kümenin lineer görüntüsü ve lineer ters görüntüsü sırasıyla yine konveks yada salt konvektir.

A, E vektör uzayından, F vektör uzayı içine bir lineer tasvir olsun.

$$A(\tau x + (1-\tau)y) = \tau Ax + (1-\tau)Ay$$

olduğundan, eğer C konveks ise A(C) de konvektir. Ax ve Ay, M nin elemanları ise,

o zaman $A^{(-1)}(M)$ konveks olacak şekilde $A(\tau x + (1-\tau)y) \in M$ dir. Salt konveks kümeler için ispat benzer şekilde yapılır. Burada E nin bir $E[Z]$ topolojik vektör uzayı olduğunu varsayıyoruz.

2.1.5 $E[Z]$ de konveks yada salt konveks bir C kümesinin $\overline{C}$ kaplamı, sırasıyla yine konveks yada salt konvektir. Bunu salt konveks kümeler için ispatlayacağız. Konveks kümeler için ispat benzer tarzda yapılır.

Eğer x_0 ve y_0 , $\overline{C}$ nin H_x lemanları ise, o zaman eğer $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ ise, $\alpha x_0 + \beta y_0$, $\overline{C}$ içinde yer alır. 0 in bir U komşuluğu verildiğinde, $V+V \subset U$ koşuluyla V 0 in dengeli bir komşuluğu olsun. x_0 ve y_0 , $\overline{C}$ için $x_0 - x \in V$, $y_0 - y \in V$ koşuluyla C de x ve y elemanları karşılık gelir. Oysa bu takdirde

$$\alpha x_0 + \beta y_0 \in \overline{C}$$

olacak şekilde

$$(\alpha x_0 + \beta y_0) - (\alpha x + \beta y) = \alpha(x_0 - x) + \beta(y_0 - y) \in V + V \subset U$$

dir.

Eğer M , $E(Z)$ nin bir altkümesi ise M yi kapsayan kapalı konveks tüm kümelerin kesişimi M nin kapalı konveks örtüsü adını alır. Kapalı salt konveks örtü benzer bir tarzda tanımlanır.

2.1.6 M in kapalı konveks örtüsü M in konveks örtüsünün $\overline{C(M)}$ kaplamına eşittir. $\overline{C(M)}$ de $\overline{C(\overline{M})}$ ye eşittir.

Kapalı salt konveks örtü $\overline{\Gamma(M)} = \overline{\Gamma(\overline{M})}$ ye eşittir. Bunu yine salt konveks kümeler için ispatlayacağız. (2.1.5) ten dolayı

$\overline{\Gamma(M)}$ kapalı ve salt konvektir ve bu küme M in kapalı salt konveks örtüsü olacak şekilde M yi kapsayan tüm kapalı salt konveks kümeler tarafından kapsanır. Son iddia M yi kapsayan her kapalı salt konveks kümenin $\overline{\Gamma(M)}$ yide kapsamı gerektiği gerçeğinin sonucu olarak çıkar.

2.1.7 Eğer M açık ise, o zaman $C(M)$ ve $\Gamma(M)$ kümeleride açıktır.

$\Gamma(M)$ nin bir elemanı

$$\sum_1^n \alpha_i x_i, \sum_1^n |\alpha_i| = \alpha \leq 1, \alpha_i \neq 0$$

şeklindedir. Tüm $x_i + V$ kümelerinin M tarafından kapsandığı 0 in dengeli bir V komşuluğu vardır. Oysa bu takdirde her

$$\sum_1^n \alpha_i x_i + \alpha z, z \in V$$

elemanı, $\Gamma(M)$ içinde yer alır. Çünkü bu elemanlar

$$\sum_1^n \alpha_i \left(x_i + \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i} z \right), z \in V$$

şeklindedir.

Eğer M kapalı ise, $C(M)$ ve $\Gamma(M)$ in kapalı olması gerekmez. Bunun bir örneği $(-1,0)$, $(1,0)$ noktaları ve y ekseninden oluşan düzlemde kapalı M kümesinin reel salt konveks örtüsüyle verilir.

2.2 Bir Konveks Kümenin Cebirsel Sınırı.

C , E vektör uzayının konveks bir alt kümesi olsun.

2.2.1 $C-C$ kümesi reel salt konvekstir. (2.1.3) den dolayı $C-C$ kesin olarak konvekstir. Eğer $0 < \tau < 1$ ve $z_1, z_2 \in C$ ise, o zaman

$$\tau(z_1 - z_2) = z_1 - (\tau z_2 + (1 - \tau)z_1)$$

$C-C$ içinde yer alır. Çünkü C konvekstir. $C-C = -(C-C)$ olduğundan, bundan $C-C$ nin reel dengeli olduğu sonucu çıkar. Burada iddia (2.1.2) nin sonucu olarak çıkar.

Eğer C , E nin keyfi bir alt kümesi ise, $C-C$ nin tüm elemanlarıyla gerilmiş E nin

reel lineer alt uzayı ile reel lineer $L(C)$ uzayı C ile birleşir.

2.2.2 Eğer C konveks ise $L(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$ ve eğer C salt konveks ise

$$L(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$$

dir.

Yukarıdaki (2.2.1) den $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$ nin reel salt konveks olduğu sonucu çıkar. Bundan başka (ayrıca) eğer $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$ ise her $\alpha x, \alpha \in p$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$ içinde yer aldığından, $\bigcup_{n=1}^{\infty} n(C-C)$ bir reel vektör uzayıdır. Salt konveks kümeler hakkındaki iddia benzer bir tarzda ispatlanır.

2.2.3 C, E nin keyfi bir alt kümesi olsun. C yi kapsayan enküçük reel lineer $M(C)$ manifoldu

$$C + L(C) = x_0 + L(C)$$

ye eşittir. Burada x_0 , C nin herhangi bir noktasıdır.

Eğer bir $z+H$ lineer manifoldu C kümesini kapsarsa, o zaman ona paralel H lineer uzayı C nin elemanlarının tüm $x_1 - x_2$ farklarını kapsar ve dolayısıyla $C-C$ yi kapsar. Ohalde $H \supset L(C)$ dir. Öte yandan eğer $x_0 \in C$ ise, o zaman açıkça $x_0 + L(C) \supset C$ dir. Sonuçta keyfi $x \in C$ için

$$x = x_0 + (x - x_0) \text{ dan } x + L(C) = x_0 + L(C)$$

olduğu sonucu çıkar. Bir $C \subset E$ kümesinin bir x_0 noktası, eğer $C, M(C)$ de x_0 civarında soğurgan ise, yani $M(C)$ içinde yer alan x_0 dan geçen her doğru bir iç nokta olarak x_0 ı içerirse C nin bir içil noktası adını alır.

$M(C)=E$ olduğunda, C nin bir içil noktası C nin bir cebirsel iç noktası adını alır. Tüm cebirsel iç noktaların topluluğu C nin C^i cebirsel çekirdeği adını alır.

C nin C^a cebirsel zarfı (kabuğu), $[x,y] \subset C$ olacak şekilde bir $x \in C$ nin var olduğu tüm bu $y \in E$ noktalarından oluşur. (Burada $[x,y]$, x in dahil olduğu

ve y nin dahil olmadığı x ve y yi birleştiren reel doğru parçasını gösteriyor.)

C nin cebirsel bir iç noktası olmayan C^a nın bir noktası, C nin cebirsel bir sınır noktası adını alır. C nin tüm cebirsel sınır noktalarının topluluğu C nin bir cebirsel sınırı adını alır. Bir C kümesi eğer $C = C^a$ ise, cebirsel kapalıdır ve eğer $C = C^i$ ise cebirsel açıktır denir.

Topolojik bir vektör uzayının bir alt kümesinin bir cebirsel sınır noktası daima bir topolojik sınır noktası olduğunu belirtelim. Aşağıdaki örnek 2, küme konveks olsa bile tersinin doğru olmadığını gösterir.

P^n de, her konveks C kümesi içil bir nokta içerir. Gerçekten eğer $M(C) = P^m$ ise C m -boyutlu bir simplex (basit, yalınca) kapsar ve bunun ağırlık merkezi (centroid) C nin bir içil noktasıdır. Bu sonuç sonsuz boyutlu uzaylar için her zaman geçerli olmaz.

örnek 1: $x_\beta, \beta \in B$ sonsuz boyutlu E vektör uzayının bir cebirsel tabanı ve C , 0 ve tüm x_β ların konveks örtüsü olsun. $M(C) = E$. Burada C nin yalnız cebirsel sınır noktalarından oluşacak şekilde, hiçbir cebirsel iç noktaya sahip olmadığını göstereceğiz. (2.1.1) den dolayı C nin her z elemanı

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{\beta_i}, \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$$

şeklindedir. Eğer $\beta \neq \beta_i, i=1,2,\dots,n$ ise o zaman z , C nin bir iç noktası olmayacak şekilde, x_β ve z den geçen $z + \sigma(x_\beta - z)$ doğrusu $[x_\beta, z]$ parçasında C ye rastlar.

2.2.4 Eğer C konveks ise C^a cebirsel zarfı (kabuğu) ve C^i cebirsel çekirdeği yine konvekstir (Boş küme konveks olarak alınmıştır).

ispat: a) Eğer y_1 ve y_2 C^a nın iki noktası ve eğer x_1 ve x_2 , $[x_1, y_1] \subset C$ ve $[x_2, y_2] \subset C$ koşuluyla C nin iki noktası ise, o zaman x_1, x_2, y_1, y_2 iç noktalarının tümü C nin elemanı olan bir dörtyüzlünün dört köşesidir.

Oysa bu takdirde sınır noktaları C^a nin elemanıdır ve dolayısıyla $[y_1, y_2] \subset C^a$ olur.

b) x_1 ve x_2 nin C^i de yer aldığını, x in x_1 ve x_2 arasında herhangi bir nokta olduğunu ve g nin, x den geçen herhangi bir doğru olduğunu varsayalım. Buna göre g ye paralel x_1 den geçen (karşılık olarak x_2 den geçen) doğru üzerinde C içinde yer alan bir $[y_1, z_1]$ aralığı (karşılığı $[y_2, z_2]$ aralığı) vardır. g nin y_1, z_1, z_2, y_2 dörtgeni ile kesişimi C tarafından kapsanır. Bu kesişim bir iç nokta olarak x i içeren g de bir aralıktır. Böylece x , C^i nin elemanıdır.

(2.2.4) de $(C^i)^i = C^i$ olduğunu göstereceğiz. Burada $(C^a)^a = C^a$ nin her zaman geçerli olmadığını göstermek için bir aykırı örnek vereceğiz.

örnek 2: E reel ve sonsuz-boyutlu ve $x_\alpha, \alpha \in A$, E nin bir cebirsel tabanı olsun. Tüm sıfır olmayan

$$x = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} x_{\alpha}$$

lerin kümesini C ile gösterelim. Buradaki katsayılar negatif değildir ve

$$\sum \xi_{\alpha} \geq \frac{1}{n(x)}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca burada $n(x), \xi_{\alpha} \neq 0$ koşuluyla α nın sayısıdır. C konvektir. Çünkü eğer x ve $y \in C$ olmak üzere

$$z = \sum \xi_{\alpha} x_{\alpha} = \tau x + (1-\tau)y, \quad y = \sum \eta_{\alpha} x_{\alpha}$$

ise, o zaman

$$n(z) \geq \max(n(x), n(y)) > 0$$

olup, sonuç olarak

$$\sum \xi_{\alpha} = \tau \sum \xi_{\alpha} + (1-\tau) \sum \eta_{\alpha} \geq \frac{1}{n(x)} + \frac{1-\tau}{n(y)} \geq \frac{1}{n(z)}$$

olur. Buda $z \in C$ olduğunu gösterir. C^a belirlenmiş olsun. C^a nın, $\xi_{\alpha} \geq 0$ ve $n(x) > 0$ koşuluyla tüm

$$x = \sum \xi_{\alpha} x_{\alpha}$$

lerin kümesine eşit olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $\xi_{\alpha} \geq 0$ koşuluyla $x = \sum \xi_{\alpha} x_{\alpha}$ sıfır olmayan herhangi bir eleman ise , o zaman

$$\sum \xi_{\alpha} \geq \frac{1}{m}$$

eşitsizliğin sağlandığı pozitif bir m tamsayısı var olacak şekilde $\sum \xi_{\alpha} > 0$ dır. Bu takdirde

$$z = \frac{x_{\alpha_1} + \dots + x_{\alpha_m}}{m}$$

C içinde yer alır . Eğer α_i leri, x in ξ_{α} katsayılarının sıfırdan farklı oldukları tüm bu α damgalarından farklı olarak seçilirse , o zaman $0 \leq \tau < 1$ koşuluyla herbir

$$\tau x + (1-\tau)z \in C$$

dir. Bu nedenle x , $[z,x)$ parçasının uç noktası olarak C^a nın elemanıdır. Ayrıca eğer y , C nin herhangi bir elemanı ise $[y,0)$ parçasının tümü C içinde yer almaz fakat 0 , C^a nın elemanı olmayacak şekilde yalnız

$$[y, \frac{1}{n(y)\sum \eta_{\alpha}} y]$$

içinde yer alır. Sonuçta $C^a \neq C^{aa}$ olacak şekilde $0 \in C^{aa}$ olur.

Biraz önce görüldüğü gibi , C^a nın cebirsel kapalı olması gerekmez. Bununla birlikte sınırsız olarak (sonlu ötesi) cebirsel zarfı (kabuğu) oluşturmanın işlemi

tekrarlanabilir. $C^\alpha = C^1$ alalım. Bir $\gamma+1$ sıral sayısı için $C^{\gamma+1} = (C^\gamma)^\alpha$ alalım ve bir β limit sıral sayısı için

$$C^\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} C^\gamma$$

alalım. Eğer C konveks ise (2.2.4) den dolayı tüm $C^{\gamma+1}$ kümeleri konvektir ve dolayısıyla C^β kümeleridir. Yeter derecede büyük bir μ sıral sayısı için $C^{\mu+1} = C^\mu$ elde edilir. Böylece C^μ , C yi kapsayan en küçük cebirsel kapalı konveks kümedir.

(2.2.5) Her C konveks kümesi, yine konveks olan cebirsel kapalı bir C^α zarfına sahiptir. Aşağıdaki sonuç, sonsuz boyutlu uzaylarda konveks kümelerin doğal karmaşıklığının başka bir örneğini verir.

(2.2.6) Her sonsuz boyutlu E vektör uzayında $C^\alpha = E$ koşuluyla konveks bir C özalt kümesi vardır. Yine x_α , $\alpha \in A$, E nin bir reel cebirsel tabanı ve damga kümesi son elemanı olmayacak bir tarzda sıralanmış olsun. C sıfır olmayan son katsayısı pozitif olan tüm

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x_{\alpha_i} \neq 0, \quad n=1,2,\dots$$

lerin kümesi olsun. C açıkça E nin konveks bir özalt kümesidir. Eğer

$$z = \sum \xi_i x_{\alpha_i}$$

E nin keyfi bir noktası ve eğer $i=1,\dots,n$ için $\alpha > \alpha_i$ ise, o zaman z , C içinde yer alan, $[x_\alpha, z)$ parçasının uç noktalarıdır.

2.3

Yarı Uzaylar

Şimdilik E reel bir vektör uzayı olsun. E deki bir hiperdüzlem ya 1-eşboyutlu lineer bir H alt uzayıdır yada bir $x_0 + H$ kümesidir. H a karşılık gelen, sıfır uzayı

tamamen H olan E^* cebirsel dual uzayında daima reel bir u fonksiyoneli vardır. Bu durumda $x_0 + H$ hiperdüzlemi

$$u(x) = u(x_0) = \gamma$$

olduğu tüm $x \in E$ elemanlarının kümesidir. $x_0 + H$ hiperdüzlemi, sırasıyla $u(x) < \gamma$ ve $u(x) > \gamma$ ile tanımlı iki cebirsel açık yarı uzay belirler. Benzer şekilde aynı hiper düzlem $u(x) \leq \gamma$ ve $u(x) \geq \gamma$ ile tanımlı iki cebirsel kapalı yarı uzay belirler. u nun lineerliğinin basit bir sonucu olarak tüm bu yarı uzaylar konvektir, sırasıyla cebirsel açık yada cebirsel kapalıdır ve $u(x) \leq \gamma$, $u(x) < \gamma$ nin cebirsel kabuğudur. $x_0 + H$ hiper düzlemi dört yarı uzayın herbirinin cebir sınırıdır.

Bir başka sonuç da şudur; Bir $E[z]$ topolojik vektör uzayında, eğer u sürekli ise $u(x) \leq \gamma$ yarı uzayı kapalıdır. Eğer durum böyle ise $u(x) < \gamma$ yarı uzayı açıktır. Eğer u sürekli değilse her dört yarı uzay $E[z]$ de yoğundur. Eğer E kompleks bir vektör uzayı ise E^* , E üzerindeki kompleks lineer fonksiyonellerden oluşur ve kompleks lineer fonksiyonel vasıtasıyla bir reel hiperdüzlemin yarı uzaylarını nasıl karakterize edileceği sorusu ortaya çıkar.

(2.3.1) Eğer E kompleks vektör uzayı bir reel vektör uzayı olarak göz önüne alınmış ise ve eğer u onun üzerinde reel bir lineer fonksiyonel ise, o zaman vektör uzayı $u(x) = R(vx)$ olduğu kompleks E vektör uzayı üzerinde belirlenmiş bir tek kompleks lineer v fonksiyoneli vardır.

Eğer u kompleks bir $E[z]$ topolojik vektör uzayı üzerinde sürekli ise, o zaman v de sürekli'dir. Karşıt olarak, kompleks lineer v fonksiyonelinin sürekliliğinden reel lineer

$$u(x) = R(vx) \text{ fonksiyonelinin sürekli olduğu sonucu çıkar.}$$

ispat: Eğer ux , vx in reel kısmına eşit ise, o takdirde Jvx imajiner kısmı $J(vx) = R(-ivx) = -R(v(ix)) = -u(ix)$ sağlanır. v ye mümkün olan yegane genişleme bu nedenle

$$(2.3.2) \quad vx = ux - iu(ix)$$

dir. E reel bir uzay olarak göz önüne alındığında, (2.3.2) ifadesi kesin olarak E üzerinde kompleks değerli lineer bir fonksiyondur. Bununla birlikte v de kompleks lineerdir. Çünkü

$$v(ix) = u(ix) - iu(-x) = i[ux - iu(ix)] = ivx$$

dir. Eğer $E[z]$ de 0 ın kompleks dengeli bir U komşuluğunun elemanı olan her x için $|ux| \leq \epsilon$ ise, o zaman eğer u sürekli ise v sürekli olacak şekilde (2.3.2) den dolayı U üzerinde $|vx| \leq 2\epsilon$ olur. Karşıt olarak $|vx| \leq \epsilon$ dan $|R(vx)| \leq \epsilon$ sonucu çıkar.

Kompleks bir E uzayındaki yarı uzaylar ve $x_0 + H$ reel hiper düzleminin analitik karakterizasyonu (2.3.1) in sonucu olarak çıkar : $x_0 + H$ ın noktalarının

$R(vx) = R(vx_0) = \gamma$ denklemi ile karakterize edildiği $x_0 + H$ a karşılık gelen kompleks lineer bir $V \in E^*$ fonksiyoneli vardır. Cebirsel yarı açık uzaylar

$R(vx) = \gamma$ ifadesiyle verilir. Bu yarı uzaylar ancak ve ancak v sürekli ise topolojik olarak açıktır. 0 dan geçen her reel H hiper düzlemi, tam kompleks bir hiper düzlem olan $H \cap iH$ yi kapsar. Eğer H , $ux=0$ ile verilmişse $H \cap iH$, $vx=0$ ile verilir.

Burada v (2.3.2) ile $R(vx) \leq \gamma$ tanımlanmıştır.

2.4 Konveks Bodiler ve Onlarla Birleşmiş Minkovski Fonksiyonelleri.

Konveks kümelerin özellikle önemli bir sınıfı en az bir cebirsel iç noktası olan kümelerle oluşur. Bunlara konveks cebirsel bodiler yada **konveks α -bodiler** denir. (2.3.2) nin paradoksal olanakları görüleceği gibi böyle konveks kümeler için ortaya çıkmaz. Her soğurgan salt konveks küme 0 cebirsel bir iç nokta olduğundan bir konveks **α -bodi** dir. Eğer göz önüne alınan uzay (underlying) bir $E[z]$ topolojik vektör uzayı ise bir C kümesine eğer C kümesi z topolojisi anlamında bir x_0 iç noktasına sahipse ve dolayısıyla eğer C x_0 ın bir konveks z komşuluğu ise bir konveks z -bodi 'dir denir. Her konveks z -bodi bir konveks **α -bodi** 'dir. Fakat tersi

doğru değildir. Eğer $C \subset E$ cebirsel bir iç nokta olarak 0 ile bir konveks α -*bodi* ise aşağıdaki (2.4.1) denklemi ile $q(x)$ Minkovski fonksiyoneli tanımlanır.

$$(2.4.1) \quad q(x) = \inf_{x \in \rho C} \rho \quad (\rho \geq 0)$$

(2.4.2) Cebirsel bir iç nokta olarak 0 ile bir konveks α -*bodi* C nin Minkovski fonksiyoneli E üzerinde negatif olmayan, pozitif homojen, alt toplamsal bir fonksiyondur. Yani bu fonksiyonel $x, y \in E$ için aşağıdaki koşulları sağlar:

$$(\alpha) \quad q(x) \geq 0$$

$$(\beta) \quad q(\sigma x) = \sigma q(x), \quad \sigma \geq 0 \text{ için,}$$

$$(\gamma) \quad q(x+y) \leq q(x) + q(y).$$

ispat: C soğurgan olduğundan dolayı, $\forall x \in E$ için $q(x)$ tanımlıdır ve (α) ve (β) koşulları açıkça sağlanır. (γ) koşulu aşağıdaki gibi ispatlanır. $q(x) = \rho_0$, $q(y) = \sigma_0$ olsun. Bu takdirde eğer $\rho > \rho_0$ ve $\sigma > \sigma_0$ ise $\frac{x}{\rho}$ ve $\frac{y}{\sigma}$ elemanları C içinde yer alır ve C konveks olduğundan dolayı

$$\frac{\rho}{\rho + \sigma} \frac{x}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho + \sigma} \frac{y}{\sigma} = \frac{x+y}{\rho + \sigma}$$

olur. O halde

$$q(x+y) \leq \rho_0 + \sigma_0$$

olacak şekilde

$$x+y \in (\rho + \sigma)C$$

dir. (β) ve (γ) dan $q(x)$ 'in E üzerinde bir konveks fonksiyon olduğu sonucu çıkar. Yani $\forall x, y \in E$ için,

$$(2.4.3) \quad q(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau q(x) + (1-\tau)q(y), \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{dir.}$$

$$(2.4.4) \quad \text{Eğer } q(x) \text{ cebirsel bir iç nokta olarak } 0 \text{ ile } \alpha\text{-bodi } C \text{ nin}$$

Minkovski fonksiyoneli ise, o zaman C^i , $q(x) < 1$ koşuluyla tüm x lerden oluşur ve C^a , C nin cebirsel sınırı $q(x)=1$ ile verilecek şekilde $q(x) \leq 1$ koşuluyla tüm x lerden oluşur. Ayrıca C^i bir cebirsel açık konveks α -*bodi* 'dir ve C^a cebirsel kapalıdır.

ispat: Eğer $x \in C$ ise (2.4.1) den dolayı $q(x) \leq 1$ dir. Eğer $q(x) < 1$ ise , o zaman karşıt olarak $x \notin C$ dir. Burada böyle bir x elemanının da C^i içinde yer aldığını göstereceğiz.

$$q(x) = \tau < 1 \quad \text{ve} \quad 0 < \sigma < 1 - \tau$$

olsun. $x + \sigma C$ konveks α -*bodi* cebirsel bir iç nokta olarak x 'i içerir $q(x) < 1$ koşuluyla her x noktası C^i içinde yer alacak şekilde $z \in C$ için

$$q(x + \sigma z) \leq q(x) + \sigma q(z) \leq \tau + \sigma < 1$$

den $x + \sigma C \subset C$ sonucu çıkar. Gerçekten böyle her nokta $(C^i)^i$ içinde yer alır, çünkü $x \in C^i$ nin cebirsel bir iç noktası olacak şekilde $q(x + \sigma z) < 1$ den dolayı $x + \sigma C \subset C^i$ sonucu çıkar. Buradan C^i aynı zamanda bir konveks α -*bodi* 'dir.

Eğer $q(x)=1$ ise o zaman (β) dan dolayı $q(x) \leq 1$ koşuluyla tüm bu noktalar C^a içinde yer alacak şekilde $[0,x)$ aralığı C içinde yer alır. Karşıt olarak $x \notin C^a$ olsun. Bu takdirde bir $[z,x) \subset C$ aralığı vardır. Bu durumda her $0 \leq \tau < 1$ için

$$z + \tau(x - z) \in C$$

olduğundan

$$x = z + \tau(x - z) + (1 - \tau)(x - z)$$

den

$$q(x) \leq q(z + \tau(x - z)) + (1 - \tau)q(x - z) \leq 1 + (1 - \tau)q(x - z)$$

dir. $\tau \rightarrow 1$ için $q(x) \leq 1$ dir. Bu nedenle C^a , $q(x) \leq 1$ ile karakterize edilir.

Eğer $q(x)=1$ ise $x \notin C^i$ dir. Aksi halde $[0, \sigma x]$, $\sigma > 1$ parçası C içinde yer alırdı. Oysa (2.4.2(β)) dan bu mümkün değildir. Sonuç olarak $(C^i)^i$ ve C^i kümeleri sadece $q(x)<1$ eşitsizliğinin sağladığı noktaları içerir. Dolayısıyla bu kümeler böyle noktaların topluluğundan oluşur. Bu nedenle C^i cebirsel olarak açıktır. Sonuçta bir önceki paragrafta C için verilen yaklaşım C^a ya uygulanırsa (C^a) cebirsel kapalı olacak şekilde $(C^a)^a = C^a$ elde edilir. Aynı zamanda (2.4.4) den dolayı $(C^i)^a = C^a$ sonucu çıkar. $y \in C^a$ olduğunda $[0, y] \subset C$ olduğu için C nin her cebirsel sınır noktasına C deki bir doğru vasıtasıyla her cebirsel iç noktadan erişilebilir. (2.4.4) ün karşıtını verelim.

2.4.5 Eğer $q(x)$ E üzerinde (α) , (β) ve (γ) koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise $q(x)<1$ (yada $q(x) \leq 1$) kümesi Minkowski fonksiyoneli $q(x)$ olan bir iç nokta olarak 0 ile cebirsel açık (yada kapalı) bir α -*bodi* tanımlar.

ispat: $q(x) \leq 1$ olacak şekilde tüm x lerin oluşturduğu C kümesi açıkça soğurgandır ve 0 C nin cebirsel bir iç noktasıdır. (2.4.3) den dolayı C nin konveks olduğu doğrudan elde edilir. C nin Minkowski fonksiyoneli $q(x)$ dir ve daha sonra (2.4.4) ün sonucu olarak teoremden iddia edilen diğer iddialar elde edilir.

Sıfırdan farklı bir x için $q(x)=0$ ise, bunun anlamı sıfırdan x boyunca geçen yarı doğru C içinde yer alması demektir. Özellikle E nin kendisi (bir vektör uzayıdır) $q(x)=0$ fonksiyoneli vasıtasıyla tanımlanır. Bir konveks C dodi ile başlayarak ve onun Minkowski fonksiyonelinide oluşturarak C^i ve C^a kesin olarak elde edilir. Oysa C kümesi $C^i \subset C \subset C^a$ yi sağlayan herhangi bir keyfi konveks küme olabildiği halde C nin kendisi tekrar elde edilemez.

Eğer C kümesi reel (yada kompleks) E vektör uzayının salt konveks bir alt kümesi olacak şekilde C üzerinde yeni bir ek hipotez konursa o zaman (β) nın yerine keyfi reel (yada kompleks) α için $q(\alpha x) = |\alpha|q(x)$ bağıntısı elde edilir. Bundan dolayı bu durumda $q(x)$ reel (yada kompleks) bir yarı normdur. Sonuç olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

(2.4.6) Soğurgan salt konveks bir kümenin Minkowski fonksiyoneli bir yarı normdur ve terside doğrudur. Bir $E[z]$ topolojik vektör uzayında bir konveks α -*bodi* ne zaman bir z -*bodi* olur sorusunun yanıtı aşağıdaki şekilde verilir.

(2.4.7) Sıfır cebirsel iç noktalı $E[z]$ uzayında bir konveks C α -*bodi* ancak ve ancak bu kümenin Minkowski fonksiyoneli sürekli ise bir z -*bodi* dir. Eğer durum böyle ise C^i , C nin içidir ve C^a da C nin kaplamıdır. Bu nedenle C nin cebirsel ve topolojik sınırları aynıdır.

ispat: a) 0 in C nin bir iç noktası olduğunu varsayalım o zaman 0 in εC komşuluğunda her x için $q(x) \leq \varepsilon$ dır. Yani q fonksiyoneli 0 da sürekli dir. Bununla birlikte $q(x)$ in 0 daki sürekliliğinden dolayı $q(x)$ in keyfi bir $y \in E$ noktasında sürekli olduğu ve gerçekten $q(x)$ in düzgün sürekli olduğu sonucu çıkar. Eğer $z \in \varepsilon V$ ise o zaman

$$q(y+z) \leq q(y) + \varepsilon$$

dır. Benzer şekilde $-z \in \varepsilon V$ olduğundan

$$q(y) = q((y+z) - z) \leq q(y+z) + q(-z)$$

eşitsizliğinin sonucu olarak

$$q(y) - \varepsilon \leq q(y+z)$$

bulunur. Böylece $z \in \varepsilon V$ için

$$|q(y+z) - q(y)| \leq \varepsilon$$

bulunur.

b) Karşıt olarak eğer $q(x)$ sürekli ise $q(x) < 1$ koşuluyla tüm x lerin oluşturduğu küme yani C^i kümesi açıktır ve sıfır noktasını içerir ve $q(x) \leq 1$ kümesi yani C^a kümesi kapalıdır. Öyle ki burada C^i , C nin içi ve C^a da C nin kaplamı olsun. 0 ı bir iç nokta olarak alan konveks badilerin geometrik özellikleri doğal olarak bir iç nokta olarak genel bir x_0 noktası ile konveks badiler için yine geçerlidir. Eğer x_0 noktası C nin cebirsel bir iç noktası ve eğer $q(x)$ $C - x_0$ in Minkowski

Fonksiyoneli ise o zaman

$$C^a, q(x-x_0) \leq 1$$

ile verilir.

Burada bu düşüncelerin en genel konveks kümelerine nasıl uygulanabileceğini belirten bir açıklama vereceğiz. Eğer C kümesi C^i nin boş olduğu bir konveks küme ise o zaman (2.4.4) den aşağıdaki genel sonuç elde edilecek şekilde $(C^i)^i$ kümeside boştur.

(2.4.8) Eğer C keyfi bir konveks küme ise $(C^i)^i = C^i$ dir.

Eğer C kümesi karşılık gelen $M(C)$ lineer manifoldu ile keyfi bir konveks küme ise ve eğer C nin en az bir iç noktası varsa C kümesi $M(C)$ de bir konveks α -*badi* dir. Yine (2.4.4) den dolayı içil noktalar kümesinin $M(C)$ de cebirsel açık olduğu ve $(C^a)^a = C^a$ olduğu elde edilir. Özellikle bu sonuç n -boyutlu bir uzayın konveks alt kümelerinin tümüne uygulanabilir. Çünkü bu alt kümeler (2.4.2) den dolayı içil noktalara sahiptir. Eğer bir konveks kümenin en az bir içil noktası varsa ve eğer $C^a = M(C)$ ise yine (2.4.4) den dolayı $C = M(C)$ olmalıdır ve (2.2.6) örneğinin uygun olmayan davranışı bu nedenle uygun olan hiçbir uzunlukta değildir.

2.5

Konveks Koniler.

Bir E vektör uzayının bir $K(x_0)$ alt kümesi eğer bu altküme x 'i içerdiğinde

$$\text{her } x_0 + q(x - x_0), \quad q > 0$$

noktalarını da içerirse x_0 tepeli bir koni adını alır. Bu nedenle 0 tepeli bir koni x 'i içerdiğinde $qx, \quad q > 0$ da içerir. $K(x_0)$ konisi 0 tepeli bir $K(0)$ konisinin bir $x_0 + K(0)$ ötelemesi olarak daima elde edilir. Bir $K(0)$ konisi eğer x ve y noktalarını içerdiği zaman daima $x+y$ toplamını da içeriyorsa konvekstir denir. Karşıt olarak eğer bir $K(0)$ konveks konisi x ve y noktalarını içeriyorsa keyfi λ ve μ pozitif sayıları için $\lambda x + \mu y$ toplamını içerir. Eğer $K(0)$ bir koni ise benzer şekilde

– $K(0)$ da yine bir konidir. En genel halde $x_0 - K(0)$ ifadesine $K(x_0) = x_0 + K(0)$ 'a karşılık çapsal koni adı verilir ve $K^*(x_0)$ ile gösterilir.

Bir $K(x_0) = x_0 + K(0)$ konveks konisine karşılık gelen $L(K(x_0))$ reel vektör uzayı (2.2.2) den dolayı $K(0) - K(0)$ a eşittir. Bu koni eğer tepesinden geçen hiçbir reel doğru içermiyorsa buna öz koni adı verilir. Bir koni eğer tepesini içermezse kesik koni 'dir ve eğer tepesini içeriyorsa noktalı koni adını alır. Bir kesik koni daima bir öz konidir. Eğer orijinal koni olursa konvekstir. Karşıt olarak eğer tepesi bir kesik koniye eklenirse o zaman bir öz noktalı konveks koni elde edilir. Bir $K(0)$ konisi ancak ve ancak ya

$$K(0) \cap K^*(0) = 0$$

veya

$$K(0) \cap K(0) = \emptyset$$

ise öz konidir. Her lineer manifold bir konveks konidir. Bir cebirsel açık yarı uzay bir kesik konveks konidir ve sınırlı hiperdüzlemin herhangi bir noktası koninin bir tepesi olarak seçilebilir. (2.2.6) nın C konveks kümesi hiçbir cebirsel iç noktası olmayan 0 tepe noktalı bir kesik konidir. Eğer $K(0)$ bir koni ise $(K(0))^a$ da konidir. Bu örnek eğer $K(0)$ bir öz koni ise $(K(0))^a$ nin öz olması gerektiğini gösterir. 0 tepeli bir koninin lineer görüntüsü ve lineer ters görüntüsü yine 0 tepeli konilerdir. Aynı tepeli tüm konilerin kesişimi yine aynı tepeli bir konidir ve bu özellik birleşim için de geçerlidir.

(2.5.1) Konveks konilerin bir $K_\alpha(0)$ topluluğu verildiğinde tüm $K_\alpha(0)$ konilerini içeren en küçük konveks koni $\sum_\alpha K_\alpha(0)$ a eşittir. $\sum_\alpha K_\alpha(0)$ konveks koni olduğu için $\sum_\alpha K_\alpha(0)$ daki iki elemanın toplamı yine aynı toplamın elemanı olduğundan ve dolayısı ile en küçük konveks koni tüm $K_\alpha(0)$ konilerini içerdiğide sonuçtan çıkar. Öte yandan bir M kümesi tarafından üretilmiş x_0 tepeli koni M nin tüm elemanlarını içeren x_0 tepeli en küçük konidir.

(2.5.2) Eğer M konveks ise M tarafından üretilmiş 0 tepeli koni konvekstir

ve $\bigcup_{\varrho>0} \varrho M$ e eşittir. Eğer $0 \notin M$ ise M tarafından üretilmiş koni kesiktir ve bundan dolayı öz 'dür. $\bigcup_{\varrho>0} \varrho M$ bir konidir ve

$$x, y \in \bigcup_{\varrho>0} \varrho M \quad \lambda > 0, \mu > 0$$

iken

$$\lambda x + \mu y$$

yi içerir.

Eğer $0 \notin M$ ise 0 tepesi $\bigcup_{\varrho>0} \varrho M$ içinde kalmaz. Topolojik vektör uzayında aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

(2.5.3) Eğer K , $E[z]$ topolojik vektör uzayında bir konveks koni ise $\overline{K}$ kaplamı da bir konveks konidir. Eğer K^i bir içil nokta kapsıyorsa K^i , K nın içidir ve K^i yine bir konveks konidir.

ispat: Tepe noktası 0 olsun. (2.1.5) den dolayı $\overline{K}$ konvektir.

Eğer z , $x \in K$ noktalarının bir kaplama noktası ise ϱz , $\varrho > 0$, $\overline{K}$ koni olmak kaydıyla aynı zamanda K içinde yer alan ϱx noktalarının bir kaplama noktasıdır. Eğer $K^i = \emptyset$ ise o takdirde 2. iddia doğrudur. Eğer $K^i \neq \emptyset$ ise o takdirde K sırasıyla ya bir konveks cebirsel bodi yada bir konveks z -bodi dir ve K^i yine bir koni olduğundan ikinci iddianın doğruluğu (2.4.4) ve (2.4.7) den sonuç olarak elde edilir.

2.6 Hiper Koniler.

x_0 tepeli E deki bir normal konveks kesik koni x_0 noktasında bir hiper koni adını alır. Aşağıda önemli varlık teoremini verelim.

(2.6.1) Eğer M konveks ise ve eğer $x_0 \notin M$ ise o takdirde M yi içeren x de bir hiper koni vardır.

ispat: (2.5.2) den dolayı M yi içeren x_0 tepeli bir kesik konveks koni vardır. Böyle konilerin bir tümel sıralı topluluğunun birleşimi (kapsama ile sınırlı) yine kesik ve konveks olduğundan Zorn yardımcı teoreminden böyle bir maksimal koninin var olduğu sonucu çıkar. Eğer $K(x_0)$ bir hiper koni ise karşılık çapsal $K^*(x_0)$ konisi de bir hiper konidir.

(2.6.2) Eğer $K(x_0)$ bir hiperkoni ise o takdirde

$$K(x_0) \cup K^*(x_0) = E - \{x_0\} \text{ ve } K(x_0) \cap K^*(x_0) = \emptyset$$

dir. Bu nedenle $K(x_0)$ hiperkonisinin tümleyeni $K^*(x_0) \cup \{x_0\}$ konveks konisidir. Bir hiperkoni konveks, kesik ve dolayısı ile öz olduğundan

$$K(x_0) \cap K^*(x_0) = \emptyset$$

olacağı açıktır. Birinci iddia maksimalliğin gereği olarak elde edilir; $x_0 = 0$ olduğu varsayılabilir eğer $K \cup (-K)$, $E - \{0\}$ eşit olmasaydı, $K \cup (-K)$ birleşimi içinde yer almayan reel bir λx doğrusu bulunurdu. Oysa bu takdirde $y \in K$, $q \geq 0$ olmak koşuluyla $qx + y$ noktaları ile birlikte ve q f olmak üzere qx noktalarının topluluğu bir kesik konveks koni oluştururdu ($qx + y \neq 0$ olduğundan) ve bu bir özaltküme olarak K yi içerirdi ki buda olanaksızdır.

2.6.3 Karşıt olarak eğer $K(x_0)$

$$K(x_0) \cup K^*(x_0) = E - \{x_0\}$$

ve

$$K(x_0) \cap K^*(x_0) = \emptyset$$

koşulları ile bir konveks koni ise o zaman $K(x_0)$ bir hiperkonidir. Konveks kümelerin incelenmesinde hiperkonilerin önemi aşağıdaki teoremle kendini gösterir.

2.6.4 E nin her öz konveks C altkümesi onu içeren hiperkonilerin kesişimidir.

Çünkü, eğer $x_0 \notin C$ ise (2.6.1) den dolayı C yi içeren ve x_0 nı içermeyen x_0 noktasında bir hiperkoni vardır. Yukardaki (2.6.3) den dolayı aşağıdaki teorem ifade

edilebilir.

2.6.5 E nin bir lineer H altuzayı ile bir $K(0)$ hiperkonisinin kesişimi yine H ta bir hiperkonidir.

örnek Cebirsel zarfı E ye eşit olan bir hiperkoninin örneğini oluşturur. Eğer (3.1) deki (3.1.2) teoremi uygulanırsa o zaman özellikle (2.6.2) den bir hiperkoninin cebirsel kapalı zarfının ya E olduğu yada onu sınırlayan hiperdüzlemin, hiperkoninin cebirsel sınırı olduğu ifadesinden cebirsel kapalı yarı uzay olacağı sonucu çıkar. Bu son halde hiperkoni bir konveks α -body dir. Birinci halde ise hiperkoni hiçbir cebirsel iç noktaya sahip değildir. P^n de bir $K(0)$ hiperkonisi cebirsel sınır olarak bir hiperdüzleme sahip olacak şekilde bir konveks α -body dir. Bu uzay içinde yer alan $K(0)$ ın noktaları yine bir hiperkoni oluştururlar v.b. Bunun kolay bir sonucu P^n de bir hiperkoninin daima aşağıdaki şekilde olduğudur. $K(0)$ sıfır olmayan son koordinatının pozitif olduğu tüm

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \neq 0$$

noktalarından oluşacak şekilde P^n in bir $x_1, \dots, x_n$ tabanı vardır.

BÖLÜM 3

3 Konveks Kümelerin Ayrılması Hahn-Banah Teoremi.

3.1 Ayırma teoremi.

K reel yada kompleks cisim olmak üzere E, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

3.1.1 A_1 ve A_2 , E nin iki ayrık konveks özaltkümesi ise

$$C_1 \supset A_1 \text{ ve } C_2 \supset A_2$$

olacak şekilde E nin C_1 ve C_2 gibi iki tümler konveks altkümesi vardır. Bu önemli teoremin iki ayrı ispatını vereceğiz.

a) (2.1.3) ten dolayı $A_1 - A_2$ farkı E nin bir konveks altkümesidir ve 0 noktasını içermez yine (2.6.3) ten dolayı

$$K \supset A_1 - A_2$$

olduğu 0 tepeli bir K hiperkonisi vardır.

$$C_1 = \bigcap_{x_1 \in A_1} (x_1 + K)$$

olsun $A_1 \subset x_2 + K$ olacak şekilde $A_1 - x_2 \subset K$ olduğundan $A_1 \subset C_1$ sonucu çıkar. (2.6.2) den dolayı C_1 in tümleyeni tümleyenlerin

$$C_2 = A_2 + (K^* \cup \{0\})$$

birleşimine eşit olacak şekilde bir $x_2 + K$ kümesinin tümleyeni

$$x_2 + (K^* \cup \{0\})$$

toplamına eşittir. Yine (2.1.3) ten dolayı da C_2 konvekstir ve $C_2 \supset A_2$ dir.

b) Aşağıdaki ispat hiperkoniler teorisinden bağımsızdır.

$$B_1 \supset A_1 \text{ ve } B_2 \supset A_2$$

olmak üzere ayrık konveks kümelerin (B_1, B_2) ikililer topluluğunu göz önüne alalım.

$$B_1 \subset B_1' \text{ ve } B_2 \subset B_2'$$

olduğunda eğer

$$(B_1, B_2) \leq (B_1', B_2')$$

alınırsa bu ikililer topluluğu kısmi sıralıdır.

$$B_1 \cup B_2 \neq E$$

olduğunu varsayalım.

$$(B_1, B_2) < (B_1', B_2')$$

olacak şekilde başka bir (B_1', B_2') ikilisinin var olduğunu göstereceğiz.

$x_0 \notin B_1 \cup B_2$ olduğunu varsayalım. Bu durumda ya x_0 ve B_1 in konveks örtüsünün B_2 ile boş bir kesişime sahip olduğu yada x_0 ve B_2 nin konveks örtüsünün B_1 ile boş kesişime sahip olduğunu iddia ediyoruz. Eğer durum böyle olmasaydı o zaman bir $y_1 \in B_1$ için $[x_0, y_1]$ parçasında bir $z_2 \in B_2$ noktası yer alırdı ve bir $y_2 \in B_2$ için $[x_0, y_2]$ parçasında bir $z_1 \in B_1$ noktası var olurdu. Oysa bu takdirde $[y_1, z_1]$ ve $[y_2, z_2]$ parçalarının

kesişim noktası bir çelişki vererek B_1 ve B_2 nin her ikisinde de yer alırdı. Zorn yardımcı teoreminin (B_1, B_2) ikililer topluluğuna uygulanmasıyla aranan sonuç elde edilir.

3.1.2 Eğer C_1 ve C_2 , E nin öztümlemler konveks altkümeleri ise o takdirde $C_1^a \cap C_2^a$ ya E ye yada reel bir hiperdüzleme eşittir. İkinci halde yani eğer C_1^i ve C_2^i nin her ikisinde boş değilse C_1^i ve C_2^i nin herbiri bu hiperdüzlemle tanımlı iki cebirsel açık yarı uzaydan biriyle çıkarılır.

ispat: $C_1^a \cap C_2^a = H$ olsun. $C_1 \cup C_2 = E$ olduğundan

$$E - H = C_1^i \cup C_2^i$$

olup C_1 (yada C_2) nin herbir sınır noktası C_2 (yada C_1) nin de bir sınır noktasıdır ve dolayısı ile H içinde yer alır. Aynı nedenlerle H boş değildir. (2.2.4) den dolayı $C_1^a \cap C_2^a$ kesişimi konvektir. Ayrıca eğer H , z_1 ve z_2 gibi iki nokta içerirse bu noktalardan geçen doğrunun tümünde içerir. Bunun böyle olmadığını ve z tin H in elemanı olmayan $[z_1, z_2]$ parçası dışında yer alan doğrunun bir noktası olduğunu varsayalım. z_2 nin z ve z_1 arasında yer aldığını varsayalım. O zaman z noktası ya C_1^i içinde yada C_2^i içinde yer alırdı. $z \in C_1^i$ olduğunu varsayalım bu takdirde (2.4.5) de verilen uyarı gereğince $(z_1, z]$ parçasının her noktasının C_1^i içinde yer aldığı sonucu çıkar. Dolayısıyla z_2 de C_1^i içinde yer alır. Oysa bu olanaksızdır. Böylece H in bir lineer manifold olduğu gösterilmiş olur.

Bu kezde $H \neq E$ olduğunu varsayalım. H bir lineer alt uzay olacak şekilde $0 \in H$ olduğu varsayılabilir. $x_0 \notin H$ ve örneğin $x_0 \in C_1^i$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $-x_0$ H in elemanı olmaz yada $-x_0 \in C_1^i \cup C_2^i$ olur. Oysa $-x_0$ C_1^i nin elemanında olamaz, aksi takdirde 0 noktası $[x_0, -x_0]$ parçasının bir noktası olarak C_1^i konveks olduğundan (2.4.4) den C_1^i içinde yer alırdı. Böylece $-x_0$ noktası C_2^i nin elemanı olur. $[x_0]$, x_0 in tüm reel skaler katlarının uzayı olmak üzere

$$H \oplus [x_0] = E$$

olduğunu iddia ediyoruz.

Eğer $x \in C_1$ ise

$$C_1 \subset H \oplus [x_0]$$

olacak şekilde $[x, -x_0]$ parçası H in bir noktasını içerir. Eğer $y \in C_2$ ise

$$C_2 \subset H \oplus [x_0]$$

olacak şekilde $[y, x_0]$ parçası H ın bir noktasını içerir. Dolayısı ile sonuç olarak

$$H \oplus [x_0] = E$$

dir.

$$E \sim H = C_1^i \cup C_2^i$$

olduğundan cebirselaçık yarı-uzaylardan biri C_1^i ile ve diğeri C_2^i ile çakışır. M ve N gibi iki küme eğer H tarafından tanımlı, farklı cebirsel kapalı yarı uzaylar tarafından kapsanırsa bir reel H hiperdüzlemi ile ayrılmıştır diyeceğiz. Ayrıca bu kümeler H ın karşılıklı kenarları üzerinde yer alır diyeceğiz. M ve N birlikte H ın noktalarında sahip olabilirler. Eğer M ve N kümeleri H tarafından tanımlı, farklı cebirselaçık yarı-uzaylar tarafından kapsanıyorsa bu kümeler H tarafından kesin olarak ayrılmıştır diyeceğiz. (3.1.1) ve (3.1.2) den ayırma teoreminin cebirsel şekli elde edilir.

3.1.3 Eğer A_1 bir konveks α -body ve A_2 , A_1 in hiçbir cebirsel iç noktasını içermeyen konveks bir küme ise o takdirde A_1 ve A_2 yi ayıran bir H reel hiperdüzlemi vardır ve bu A_1 in hiçbir cebirsel iç noktasını içermez.

Eğer A_1 ve A_2 ayrık cebirsel açık konveks α -body ler ise o takdirde kesin olarak ayıran bir reel hiperdüzlem vardır.

ispat: Hipotez gereği A_1^i boş değildir ve $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ tur. (3.1.1) den dolayı

$$C_1 \supset A_1^i, \quad C_2 \supset A_2$$

tümlemleri vardır. C_1^i boş olmadığından (3.1.2) den dolayı bir H hiperdüzlemi vardır ve bu nedenle A_1^i cebirsel açık yarıuzaylardan biri içinde ve A_2 tümlemler cebirsel kapalı yarı uzay içinde yer alır. Böylece teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Eğer $A_1 = A_1^i$ ve $A_2 = A_2^i$ ise o zaman

$$A_2^i \subset C_2^i$$

olduğundan A_2^i diğer açık yarı uzay tarafından kapsanır. Bu durumda bu nedenle ayırma kesindir. Bir $E[Z]$ topolojik vektör uzayında ayırma teoremi aşağıdaki geometrik şekli alır.

3.1.4 Eğer A_1 , $E[Z]$ de bir konveks z -body ise ve eğer A_2 , A_1 in hiçbir iç noktasını içermeyen bir konveks küme ise o takdirde A_1 in hiçbir iç noktasını içermeyen A_1 ve A_2 yi ayıran kapalı bir reel H hiperdüzlemi vardır.

Eğer A_1 ve A_2 ayrık konveks açık z -body ler ise o takdirde onları kesin olarak

ayıran bir kapalı reel hiperdüzlem vardır.

ispat: Yoğunluk kavramından dolayı H hiperdüzlemi ya E de yoğundur yada kapalıdır. Öte yandan (2.4.7) den dolayı A_1^i kümesi açık ve H tan ayrık olduğundan dolayı H hiperdüzlemi kapalı olacaktır.

A_1 ve A_2 gibi iki ayrık cebirsel kapalı konveks α -body leri kesin olarak ayırmak her zaman mümkün değildir. Düzlemde A_1 i $\xi \leq 0$ yarı düzlemi olarak alalım ve A_2 yi de $\xi \eta \geq 1$, $\xi , \eta > 0$ koşuluyla tüm (ξ, η) ikililerinin kümesi olarak alalım.

3.2

Hahn-Banach Teoremi.

Ayırma teoreminin cebirsel şeklinin özel bir hali gözönüne alınarak elde edilir.

3.2.1 Eğer C bir E vektör uzayında bir konveks α -body ise ve eğer M C nin hiçbir cebirsel iç noktasını içermeyen bir lineer manifold ise o takdirde yine C nin hiçbir cebirsel iç noktasını içermeyen M yi içeren bir H hiperdüzlemi vardır. C ve M yi ayıran hiperdüzlem M nin bir noktasından geçen paralel bir hiperdüzlemle yer değiştirirse reel E için (3.2.1) ifadesi (3.1.3) ün özel bir hali olarak elde edilir. Bu yeni hiperdüzlem M nin tümünü içermelidir. Eğer E kompleks ise yine (3.1.3) den dolayı gerekli özellikler ile bir reel H hiperdüzlemi vardır. Burada M nin 0 dan geçmesi halini gözönüne almak yeter. Ancak o zaman (2.3) den $H \cap iH$ yine M yi içeren bir kompleks hiperdüzlemdir. Çünkü $M \cap iM = M$ dir ve daha sonra C nin hiçbir iç noktasını içermez. Ayırma teoreminin geometrik şeklinden Mozar tarafından kurulmuş aşağıdaki teorem elde edilmiştir. Ancak bu teoreme Burbaki tarafından Hahn-Banach teoreminin geometrik şekli adı verilmiştir.

3.2.2 Eğer C bir $E[Z]$ topolojik vektör uzayında bir konveks z -body ise ve eğer M , C nin hiçbir iç noktasını içermeyen bir lineer manifold ise o takdirde M yi kapsayan ve C nin hiçbir iç noktasını içermeyen kapalı bir H hiperdüzlemi vardır. Eğer önceki kısımda kurulmuş olan konveks bodylerin ve yarıuzayların analitik tanımları uygulanırsa (3.2.1) ve (3.2.2) teoremleri analitik olarak ifade edilebilir. Burada reel ve kompleks hal arasındaki farkı ele alacağız.

3.2.3 Negatif olmayan pozitif homogen alttoplamsal bir $q(x)$ fonksiyonunun bir

E reel vektör uzayı üzerinde verildiğini varsayalım.

Eğer bir lineer F altuzayı üzerinde tanımlı lineer bir $l(z)$ fonksiyoneli $z \in F$ için

$$3.2.4 \quad l(z) \leq q(z)$$

eşitsizliğini sağlarsa o takdirde $l(z)$ $x \in E$ için

$$3.2.5 \quad ux \leq q(x)$$

eşitsizliğini sağlayan E nin tümü üzerinde tanımlı lineer bir u fonksiyoneline genişletilebilir.

Eğer E bir topolojik vektör uzayı ve $q(x)$ sürekli ise o takdirde ux de sürekli dir.

ispat: (2.4.5) den dolayı $q(x) < 1$ eşitsizliği $0 \in C$ bir cebirsel açık konveks α -body tanımlar. $l(z)$ nin F nin tümü üzerinde değersiz olmadığını kabul edelim. (Aksi halde özdeş olarak değersiz olan lineer fonksiyonel yukardaki (3.2.5) eşitsizliği için bir çözüm olur.) $l_1 F_1$ üzerinde özdeş olarak değersiz olmak üzere $l(z)=1$ ve

$$F = [z_0] \oplus F_1$$

olmak koşulu ile $z_0 \in F$ vardır. Bu nedenle $l, z_0 + F_1$ lineer manifoldu üzerinde özdeş olarak tektir. (3.2.1) den dolayı C nin hiçbir noktasını içermeyen $F_1 \subset H$ koşulu ile bir $z_0 + H$ hiperdüzlemi vardır. E nin herbir x noktası $x = \alpha z_0 + y$, $y \in H$ olacak şekilde z_0, H içinde yer almaz. $ux = u(\alpha z_0 + y) = \alpha$ ifadesi ile u yu tanımlayalım. u, l nin bir genişlemesidir ve yine $u, z_0 + H$ ın tümü üzerinde 1 değerini alır. C body si 0 ı eleman alan $ux < 1$ yarı uzayı içinde yer alır. Burada (3.2.5) eşitsizliğinin geçerli olduğu görülüyor. q pozitif homogen olduğundan 0 dan geçen her bir ışının bir noktası için (3.2.5) ı ispatlamak yeterlidir. Eğer bir ışın bir x noktasında $z_0 + H$ ı keserse o takdirde x en çok C nin bir sınır noktası olabilir. Yani

$$q(x) \geq 1 = ux$$

dir. $z_0 + H$ ı kesmeyen bir ışın (3.2.5) ifadesi sağlanacak şekilde $ux \leq 0$ olduğu noktaları içerir çünkü $q(x) \geq 0$ dir. Son olarak eğer $q(x)$ sürekli ise C kümesi bir konveks z -body dir ve dolayısıyla H ı tanımlayan lineer u fonksiyoneli sürekli dir. Kompleks vektör uzayları için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

3.2.6 Negatif olmayan pozitif homogen alttoplamsal bir $q(x)$ fonksiyonunun bir

E kompleks vektör uzayı üzerinde verildiğini varsayalım. Eğer bir kompleks lineer F alt uzayı üzerinde tanımlı bir $l(z)$ fonksiyoneli (3.2.7) eşitsizliğini sağlarsa

$$3.2.7 \quad \Re l(z) \leq q(z) \quad z \in F$$

den o zaman $l(z)$ $x \in E$ için

$$3.2.8 \quad \Re vx \leq q(x)$$

eşitsizliğini sağlayan E nin tümü üzerinde tanımlı kompleks lineer v fonksiyoneli tanımlanabilir.

Eğer E topolojik bir vektör uzayı ve $q(x)$ sürekli ise v de sürekli dir. Bu iddia (3.2.3) ün sonucu olarak elde edilir çünkü $\Re l(z)$ bir reel vektör uzayı olarak göz önüne alınmış F vektör uzayı üzerinde (2.3.1) den dolayı bir kompleks lineer $v(x)$ fonksiyonelinin reel kısmı olarak tek şekilde yazılabilen bir lineer fonksiyonele genişletilebilir v nin sürekliliği benzer şekilde $\Re v$ nin sürekliliğinin bir sonucu olarak elde edilir.

3.3 Hahn–Banach Teoreminin Analitik İspatı.

Hahn–Banach teoreminin konveks kümelerin özelliklerinin sonucu olarak ortaya çıkan başlıca iki geometrik ispatını vereceğiz. (cf. Helly [1],[2]. Hahn [2]. Banach [2]) yayınlarında yer verilen klasik ispat analitik davranışlı olup konvekslik kullanılmaz. (3.2.3) den birazdaha genel bir sonuç $q(x) \geq 0$ hipotezinin ihmal edilebilir olmasıyla elde edilir.

3.3.1 (Hahn–Banach Teoremi): $q(x)$ in reel bir E vektör uzayı üzerinde pozitif homogen alttoplamsal bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Eğer bir F lineer alt uzayı üzerinde tanımlı bir $l(z)$ lineer fonksiyoneli $z \in F$ için

$$3.3.2 \quad l(z) \leq q(z)$$

eşitsizliğini sağlarsa o takdirde $l(z)$, $x \in E$ için

$$3.3.3 \quad ux \leq q(x)$$

eşitsizliğini sağlayan E nin tümü üzerinde tanımlı lineer bir u fonksiyoneline genişletilebilir.

Eğer E bir topolojik vektör uzayı ve $q(x)$ 0 da sürekli ise o takdirde u da sürekli dir.

ispat: $l(x)$ in $F_1 \supset F$ için tanımlı olduğunu ve (3.3.2) nin F_1 üzerinde sağlandığını varsayalım. Eğer $x_0 \notin F_1$ ise $l(x)$ lineer fonksiyonelinin (3.3.3) sağlanacak şekilde

$$[x_0] \oplus F_1$$

e genişletilebildiğini göstereceğiz. Eğer z ve $z' \in F_1$ in keyfi elemanları ise o takdirde (3.3.2) ve $q(x)$ in özelliklerinden dolayı

$$-q(-z-x_0)-l(z) \leq q(z'+x_0)-l(z)$$

olacak şekilde

$$l(z')-l(z) = l(z'-z) \leq q[(z'+x_0)+(-z-x_0)] \leq q(z'+x_0)+q(-z-x_0)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve eşitsizlikler her bir $z, z' \in F_1$ için geçerli olduğundan

$$\sup_{z \in F_1} [-q(-z-x_0)-l(z)] \leq \inf_{z' \in F_1} [q(z'+x_0)-l(z')]$$

elde edilir. γ bu iki değer arasında yer alan bir sayı olsun yani $\forall z \in F_1$ için

$$3.3.4 \quad [-q(-z-x_0)-l(z)] \leq \gamma \leq q(z+x_0)-l(z)$$

olsun. Burada $\forall z \in F_1$ için

$$l(\alpha x_0 + z) = \alpha \gamma + l(z)$$

alalım. Bu tarzda $l, [x_0] \oplus F_1$ e göre genişletilebilir. Bu kezde (3.3.2) nin sağlandığını gösterelim. Önce $\alpha > 0$ olduğunu varsayalım (3.3.4) ün sağ tarafından

$$\gamma \leq q\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - l\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

olduğu ve dolayısı ile

$$\alpha \gamma \leq \alpha q\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - \alpha l\left(\frac{z}{\alpha}\right) = q(z + \alpha x_0)$$

yani

$$l(z + \alpha x_0) = \alpha \gamma + l(z) \leq q(z + \alpha x_0)$$

olduğu sonucu çıkar. Öte yandan $\alpha = -q$, $q > 0$ olduğunu varsayalım. Bukezde (3.3.4) ün sol tarafından

$$-q\left(\frac{z}{q} - x_0\right) + l\left(\frac{z}{q}\right) \leq \gamma$$

sonucu çıkar. Her iki taraf q ile çarpılarak

$$-q(z + \alpha x_0) + l(z) \leq q\gamma$$

bulunur ve dolayısıyla

$$l(z + \alpha x_0) = \alpha\gamma + l(z) \leq q(z + \alpha x_0)$$

olur. u nun varlığı ya tümevarım kullanılarak yada Zorn yardımcı teoremi kullanılarak işlemlerin tekrarlanması ile elde edilir. Eğer $q(x) \neq 0$ da sürekli ise o takdirde 0 ın dengeli bir U komşuluğundaki her x için $q(x) \leq \epsilon$ olur. $ux \leq q(x) \leq \epsilon$ ve $-ux = u(-x) \leq q(-x) \leq \epsilon$ eşitsizliklerinden $x \in U$ için $|ux| \leq \epsilon$ olduğu sonucu çıkar ve bu U nun sürekli olduğunu gösterir. Bir önceki numarada olduğu gibi kompleks hal bunun sonucu olarak elde edilir. Bu kompleks hal $q(x) \geq 0$ hipotezinin ihmal edilmesi dışında (2.2.6) ile özdeşir.

Karşıt olarak, Hahn-Banach teoreminin (2.2.2) geometrik şekli (3.3.1) analitik 8 formu veya (2.2.3) den de elde edilebilir. $q(x)$ bir cebirsel içnokta olan 0 ile bir C konveks α -body nin Minkowski fonksiyoneli olsun. C^1 , $q(x) < 1$ ile veriliyor. M , $x_0 + F$ şeklindedir burada F bir reel vektör uzayıdır. Tüm $x_0 + y \in x_0 + F$ ler için $q(x_0 + y) \geq 1$ dir. $[x_0] + F$ üzerinde $l(\alpha x_0 + y) = \alpha$ alalım. Eğer $\alpha > 0$ ise

$$l(\alpha x_0 + y) = \alpha l\left(x_0 + \frac{y}{\alpha}\right) = \alpha 1 \leq \alpha q\left(x_0 + \frac{y}{\alpha}\right) = q(\alpha x_0 + y)$$

dir. Eğer $\alpha < 0$ ise, E üzerinde $q(x) \geq 0$ olduğundan

$$l(\alpha x_0 + y) < q(\alpha x_0 + y)$$

olacak şekilde

$$l(\alpha x_0 + y) < 0$$

dır. O halde (3.3.1) deki hipotezler sağlanır ve dolayısı ile $y \in F$ için

$ux \leq q(x)$, $u(x_0)=1$ ve $uy=0$ olmak üzere l nin bir u genişlemesi vardır.

Sonuç olarak C^1 , $ux < 1$ yarı-uzayı tarafından kapsanır ve $x_0 + F$ $ux=1$ hiper düzlemi tarafından kapsanır. Bu yine reel halde (3.2.1) i ispatlar. Kompleks halde (3.2.2), (3.3.2) deki gibi çıkar.

Hahn-Banach teoremi daha ziyade onun (3.3.1) genel şekliyle uygulanmaz fakat reel ve kompleks vektör uzayları için aynı olan daha özel bir şekilde uygulanır.

3.3.5 $p(x)$ bir E vektör uzayı üzerinde bir yarı norm olsun. Eğer $l(z)$, $z \in F$ için

$$|l(z)| \leq p(z)$$

eşitsizliğini sağlayan bir lineer F altuzayı üzerinde bir lineer fonksiyonel ise, o takdirde $l(z)$, $z \in E$ için

$$|ux| \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan E nin tümü üzerinde tanımlı bir lineer u fonksiyoneline genişletilebilir. Eğer E topolojik vektör uzay ve $p(x)$ sürekli ise o takdirde u da süreklidir.

ispat: Reel halde F üzerinde $|l(z)| \leq p(z)$ nin sonucu olarak E nin tümü üzerinde $ux \leq p(x)$ koşuluyla bir u genişlemesinin var olduğu çıkar. Oysa bu takdirde

$$-ux = u(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

de elde edilir, yani (3.3.7) ifadesi E nin tümü üzerinde geçerlidir. Kompleks halde ise

$$l_1(z) = \Re(z)$$

alalım. Bu takdirde F üzerinde

$$|l_1(z)| \leq p(z)$$

dir. Biraz evvel gösterildiği gibi. E nin tümü üzerinde $|u_1 x| \leq p(x)$ olmak üzere

l_1 in reel bir u_1 lineer genişlemesi vardır. (2.3) den dolayı

$$ux = u_1 x - i u_1(ix)$$

ifadesi E nin tümü üzerinde kompleks lineer bir genişlemesidir. Keyfi bir $x \in E$ için $ux = re^{i\theta}$ olsun. Bu takdirde (3.3.7) sağlanacak şekilde

$$|ux| = e^{-i\theta} ux = u(e^{-i\theta} x) = u_1(e^{-i\theta} x) \leq p(e^{-i\theta} x) = p(x)$$

dir. Aşağıdaki sonuç sıkça kullanılan (3.3.5) in özel bir halidir.

3.3.8 Eğer $p(x)$, $E[Z]$ üzerinde sürekli bir yarı norm ve x_0 , E nin keyfi sabit bir noktası ise o takdirde

$$|ux| \leq p(x) \quad \text{ve} \quad ux_0 = p(x_0)$$

olmak üzere E üzerinde sürekli lineer bir u fonksiyoneli vardır. Çünkü

$$l(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$$

E nin tek boyutlu $[x_0]$ altuzayı üzerinde bir lineer fonksiyonel tanımlar ve (3.3.5) ifadesi buna uygulanabilir. (3.3.1) e karşılık gelen aşağıdaki teoremi ifade edelim.

3.3.9 Eğer $q(x)$ bir reel (yada kompleks) E vektör uzayı üzerinde pozitif, tek türlü alttoplamsal bir fonksiyon ise ve eğer $x_0 \in E$ ise o zaman E üzerinde

$$ux \leq q(x)$$

koşuluyla

$$ux_0 = q(x_0)$$

olacak şekilde (yada $\Re(ux) \leq q(x)$ ve $\Re(ux_0) = q(x_0)$) E üzerinde bir reel (yada kompleks) lineer u fonksiyoneli vardır.

Eğer $q(x)$, 0 da sürekli ise ve eğer E bir topolojik vektör uzayı ise u süreklidir.

ispat: Reel halde $[x_0]$ üzerinde bir lineer fonksiyonel

$$l(\alpha x_0) = \alpha q(x_0)$$

İçin Eğer $\alpha \geq 0$, $l(\alpha x_0) = q(x_0)$ ise $q > 0$ için $q(0) = 0$ dan $q(0) = 0$

olduğu çıkar. $0 = q(0) \leq q(x_0) + q(-x_0)$, $-q(x_0) \leq q(-x_0)$ olduğundan ve eğer $\alpha < 0$ olarak alınırsa

$$l(\alpha x_0) = \alpha q(x_0) \leq -\alpha q(-x_0) = q(\alpha x_0)$$

elde edilir. Bu nedenle $[x_0]$ üzerinde tanımlı lineer l fonksiyoneli (3.3.1) in hipotezlerini sağlar. Reel durumdan kompleks hali elde etmek kolaydır. Eğer kompleks değerli bir lineer fonksiyonel yalnız reel lineer bir altuzay üzerinde tanımlı ise (3.3.5) deki durumun geçerli olmadığını açıklayabiliriz



KAYNAKLAR

- 1-) H. G. EGGLESTON. Convexity, Cumbridge University. Press, Cambridge. London. New York. Melbourne.
- 2-) Gottfried. KÖTHE. Topological Vektor Spaces, Springer-Verlag. New York Inc. 1969
- 3-) François TREVES. Topological Vektor Spaces, Distributions and Kernels. Academic Press. New York, San Francisco. London 1967.
- 4-) Steven. R. LAY. Convex set and their applications. John Wiley and sons, Wiley Interscience Publications. 1982.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf Cesur, 27.3.1965 yılında Razgrad 'ta doğmuştur. İlk öğrenimini Bulgaristan 'ın Razgrad şehrinin İğnebekçi ilçesindeki Elin Pelin ilk okulunda 1973–1978 yılları arasında başarıyla tamamlamıştır. Orta öğrenimine İstanbul Bakırköy ilçesine bağlı Güneşli Orta Okulunda başlamış ve Avcılar İnsa Lisesinde 1978–1981 yılları arasında bitirmiştir. Lise Öğrenimini de 1981–1984 yılları arasında İstanbul Avcılar İnsa Lisesinde tamamlamıştır. 1984 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Matematik mühendisliği programında yüksek öğrenimine başlamış ve buradan dördüncülükle mezun olduktan sonra, 1988 yılı Eylül ayında mezun olduğu Matematik mühendisliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlamış olup, halen bu görevini sürdürmektedir.