

Behi 67711

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

02/11/97

STİFF (KATI) DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Çiğdem GENÇ

F.B.E. Matematik Anabilim dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Behiç ÇAĞAL

İSTANBUL, 1997

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

ÖZET	i
----------------	---

SUMMARY	ii
-------------------	----

BÖLÜM I

1.1. DİFERANSİYEL DENKLEMİN TANIMI, İFADESİ KURULMASI	1
1.1.1. Lipschitz Şartı	2
1.2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ . .	3
1.2.1. Başlangıç Değer Problemleri	4
1.2.2. Sınır Değer Problemleri	5
1.3. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ OLARAK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ	5
1.3.1. Seri Yöntemi (Taylor Serisi İle)	6
1.3.2. Euler Yöntemi	8
1.3.3. Runge Kutta Yöntemi	10

BÖLÜM II

2.1. GİRİŞ	14
2.2. HANGİ PROBLEMLER ÇÖZÜMSÜZ (STİFF) NİTELİKTEDİR?	14
2.3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ	27
2.4. ÇÖZÜMSÜZ (STİFF) PROBLEMLER İÇİN YÖNTEMLER . .	30
2.5. BİR DİFERANSİYEL EŞİTLİĞİN ÇÖZÜLMESİ	39

BÖLÜM III

3.1. EULER METODU	42
3.2. DEĞİŞTİRİLMİŞ EULER METODU	44
3.3. İKİNCİ DERECE TÜREV METODU	45

SONUÇ

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

T E Ő E K K Ü R

Bütün öğrencilik hayatımda ve çalışmalarım esnasında gereken ilgiyi ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım *Sayın Prof.Dr. Behiç ÇAĞAL* a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gerek çalışmalarımda gerekse tezin hazırlanması sırasında desteklerini esirgemeyen *Sevgili Aileme* , gösterdiği özverileri ile Oyak Sigorta A.Ő. Bilgi iş-lem Müdürü *Sayın Engin AIKKAN* a , yardımlarından dolayı sevgili ablam *Arş.Gör. Işım GENÇ DEMİRİZ* e ve değerli arkadaşım *Erol ÖZTÜRKOĞLU* na teşekkür ederim.

Çiğdem GENÇ

Eylül 1997

Ö Z E T

Bu tezin amacı stiff adi diferansiyel denklemleri çözmek isteyenlere yardım amacını taşımaktadır.

İlk önce bazı temel sorulara yanıt vererek, problemin kapsamını ve bu alanda karşılaşılan temel güçlüklerin neler olduğu ortaya koyacağız. Neden *çözüm-süz (stiff)* olarak tanımlanan problemler ile ilgili bir ayırım yapılmasına gerek duyulmuştur? *Çözümsüz (stiff)* olarak tanımlanan problemler neye benzer? Bunlar nasıl ayırt edilebilir?

İkinci olarak, stiff diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin ortak özellikleri konusunda bazı saptamalar yapılmasının gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu özelliklerin bilinmesi, sıradan sorunların çözümünde kolaylık etkinlik sağlanması açısından önemli ipuçları sağlayacaktır.

Son olarak, bir diferansiyel denklemin sayısal olarak çözümünün ne anlama geldiğini ve stiff diferansiyel denklemler denince ne anlaşılması gerektiği konusu üzerinde durulacaktır.

S U M M A R Y

This thesis aims to assist the person who needs to solve stiff ordinary differential equations.

First we identify the problem area and the basic difficulty by responding to some fundamental questions. Why is it worthwhile to distinguish a special class of problems termed *stiff*? How can we recognize them?

Second we describe the characteristics shared by methods for the numerical solution of stiff problems. These characteristics have important implications as to the convenience and efficiency of solution of even routine problems.

Third we shall briefly discuss what is meant by solving a differential equation numerically and what might be reasonably expected in the case of stiff problems.

BÖLÜM I

1.1.DİFERANSİYEL DENKLEMİN TANIMI,İFADESİ,KURULMASI

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu, x serbest değişkeni, y bağımlı değişkeni ve bunun sonlu herhangi bir mertebeye kadar olan türevleri arasında kurulmuş bağıntıya **Diferansiyel Denklem** denir.

Bu tanıma göre, bir diferansiyel denklemin genel ifadesi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

ve tamamen benzer şekilde,

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde dir.

Yukarıda verilen tanım, dar anlamda ancak bütün diferansiyel denklem türlerini kapsayacak şekilde yapılmıştır. Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması, değişik yaklaşımlarla çeşitli şekillerde yapılmaktadır. Yukarıda verilen tanımda tek değişkenli bir fonksiyondan türeyen diferansiyel denklemlere **Adi Diferansiyel Denklem** denir.

Eğer serbest değişken sayısı iki veya daha fazla ise, bu diferansiyel denklemlere **Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem** yada kısaca **Kısmi Diferansiyel Denklem** denir. $z = f(x, y)$ gibi iki değişkenli bir fonksiyon için,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z$$

veya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

gibi diferansiyel denklemler yazmak mümkündür.

Diferansiyel denklemlerin bir sınıflandırması da

a) Sabit katsayılı

b) Değişken katsayılı

oluşuna göre yapılmaktadır.

Diferansiyel denklemler bir de mertebelerine göre sınıflandırılır. Sadece 1. türevlerin bulunduğu diferansiyel denklemlere **Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklem** denir. Diferansiyel denklemin mertebesi 2 veya daha büyük ise **Yüksek Mertebeden Diferansiyel Denklem** denir.

Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartlarına uyan çözümü bulma işlemi **Sınır Değer Problemi** yada **Başlangıç Değer Problemi** olarak adlandırılır.

Herhangi türden bir diferansiyel denklem, matematiğin çeşitli konularında türeyebileceği gibi temel ve teknik konuların ve hatta diğer birçok bilim dalının problemlerinden de türeyebilir.

En basit anlamda ve yukarıda kullandığımız tanımdan hareket ederek, $y = f(x)$ fonksiyonunu türeterek $f'(x) = \phi(x)$ demek suretiyle

$$y'(x) = \phi(x)$$

diferansiyel denklemini elde etmek kolayca mümkündür. Bu elde ettiğimiz birinci mertebeden bir diferansiyel denklem olup benzer şekilde daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemler üretilebilir. Türev alma işlemine devam ederek ve $\phi'(x) = \varphi(x)$ demek suretiyle

$$y''(x) = \varphi(x)$$

$\varphi'(x) = \Omega(x)$ demek suretiyle

$$y'''(x) = \Omega(x)$$

belirli bir türev mertebesine kadar diferansiyel denklem yazmak mümkündür.

1.1.1. Lipschitz Şartı

Düzgün bir bölgede, apsileri x , ordinatları y_1 ve y_2 olan iki keyfi nokta seçelim. Aynı D bölgesinde sürekli bir $f(x, y) = 0$ fonksiyonu alalım. Keyfi seçilen her nokta çifti için,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \ell |y_2 - y_1| \quad (1.1)$$

eşitliği gerçekleşecek şekilde bir ℓ pozitif sayısı bulunabilir ise, fonksiyonun D bölgesinde y ye göre **Lipschitz Şartını** sağladığı söylenir.

$0 < \theta < 1$ olmak üzere ortalama değer teoremi

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf_y(a+\theta h, b+\theta k)$$

dır. Bu bağıntıdan, (1.1) ifadesini elde etmek üzere uygun seçimler yapalım.

$a = x, b = y_1, h = 0, k = y_2 - y_1$ denirse,

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1)f_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)) \quad (1.2)$$

bulunur. Bu eşitliğin sol tarafı (1.1) deki ile aynıdır. Öyleyse lipschitz şartı, ortalama değer teoreminin bir sonucu olarak ortaya çıkar. (1.1) ie (1.2) karşılaştırıldığında $f(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevleri de sürekli olduğundan aşağıdaki ifade yazılabilir;

$$f_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)) < \ell$$

olacağından, ℓ sabiti f_y nin üst sınır olarak belirlenir. Bu ise,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq \ell$$

demektir. Öyleyse,

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| dy \leq \ell |y_2 - y_1|$$

yazılabilecektir.

1.2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemler bir kısmi analitik çözümlere sahiptirler. Ancak, uygulamalı bilimlerde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin büyük bir çoğunluğu analitik olarak kapalı çözümler vermezler. Bu diferansiyel denklemlerin çözümleri için sayısal yöntemlerin hemen hemen hepsi belli noktalarda belli sayısal sonuçlar verir, fakat problem bir çözüme sahip değilse bunların hiçbir anlamı yoktur.

n . mertebeden adi diferansiyel denklem eğer $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ konumuna getirilebiliyorsa ve daha önceki bölümde ifade edilen Lipschitz koşullarını sağlıyorsa bu domende böyle bir diferansiyel denklemin $G(X, Y, c_1, \dots, c_n) = 0$ şeklindeki genel çözümünü n tane keyfi sabit içeren bir eğri ailesidir.

Eğer diferansiyel denklem $F(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots) = 0$ şeklinde Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem ise bu diferansiyel denklemin genel çözümü keyfi fonksiyon içeren yüzey ailesidir.

Diferansiyel denklem hangi türden olursa olsun, belli koşullarda çözüm eğrisi veya yüzeyi üzerindeki noktaların sayısal olarak belirlenmesine **Sayısal Çözüm** olarak ifade edilir. Her çözümde esas, diferansiyel denklemi 1. mertebeden bir adi diferansiyel denkleme yada adi diferansiyel denklem sistemine indirgemektir. Yani diferansiyel denklemin sayısal çözümlerde, $f(x, y, y') = 0$ şeklinde 1.mertebeden adi diferansiyel denklemin sayısal çözümlerinden hareket edilir.

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde çözüm eğrisi yada çözüm yüzeyini bulmak için bazı koşulların verilmesi gerekir. Verilen bu ön koşullara göre diferansiyel denklemler gruplara ayrılır.

1.2.1. Başlangıç Değer Problemleri

$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ şeklinde n . mertebeden adi diferansiyel denklemin $x = a$ (başlangıç noktasında) $y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)$ gibi n tane değerleri veriyorsa, **Başlangıç Değer Problemi** adını alır. Burada hedef, bu noktanın sağına yada soluna doğru hareket ederek diğer noktalardaki çözümlerin bulunmasıdır.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği aşağıdaki teoremlerle gösterilebilir.

Teorem 1. (VARLIK TEOREMİ) Eğer $f(x, y)$ fonksiyonu

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$$

şeklinde tanımlanmış bir R dikdörtgen bölgesinde sürekli ise başlangıç değer problemi $|x - x_0| \leq \min(\alpha, \beta/M)$ için $y(x)$ şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada M , R dikdörtgen bölgesinde $f(x, y)$ nin maksimum değeridir.

Teorem 2. (TEKLİK TEOREMİ) Eğer $f(x, y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$$

şeklinde tanımlanmış bir dikdörtgen bölgede sürekli iseler, başlangıç değer problemi

$|x - x_0| \min(\alpha, \beta/M)$ aralığında tek bir çözüme sahiptir.

1.2.2. Sınır Değer Problemleri $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ şeklindeki n . mertebeden adi diferansiyel denklem tanımlı olduğu aralıkta 2 veya daha fazla noktada toplam olarak n tane değeri biliniyorsa **Sınır Değer Problemi** denir.

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \quad x'(a) = \beta \end{cases}$$

şeklindeki başlangıç değer problemi $x_1 = x$ ve $x_2 = x'$ denerek aşağıdaki şekilde 1. derece bir denklem sistemine dönüştürülebilir.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(t, x, x') \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(a) = \alpha \\ x_2(a) = \beta \end{cases}$$

Bu şekildeki problem kolayca çözülebilir.

Ancak,

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x') \\ x(a) = \alpha \quad x(b) = \beta \end{cases}$$

şeklindeki problem için başlangıç değer problem yöntemleri uygun olmayacaktır. Bu problem tipik bir Sınır Değer problemidir.

1.3. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ OLARAK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Diferansiyel denklemlerden hareket halindeki veya zamana bağlı değişen bir olayın modelini kurmamıza yardımcı olur. Basit bir örnek verecek olursak, yüksek bir yerden bırakılan topun zamana bağlı değişen yüksekliği diferansiyel denklem olma özelliğini sağlar.

$$\frac{d}{dt}h(t) = -gt$$

Burada g , yerçekimi, t ise zamandır. t değişkeni topun düştükten sonra geçen zamanı temsil eder. Bu denklemi integre edersek;

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{dt}h(t)dt &= - \int_0^t gtdt \\ h(t)\Big|_0^t &= -g\frac{t^2}{2}\Big|_0^t \\ h(t) - h(0) &= -\frac{1}{2}gt^2 \\ h(t) &= h(0) - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Burada dikkat edilmesi gereken bazı noktalar vardır. İlk önce, çözüm topun atıldığı yüksekliğe bağlıdır ($h(0)$). Böylece problem tek bir diferansiyel denklemle ifade edilemez. İkincisi, çözüm bir sabit değer yada sayı değildir, bir fonksiyondur.

1.3.1. Seri Yöntemi (Taylor Serisi İle)

Başlangıç değer problemi olarak verilmiş bir diferansiyel denklemin özel çözümü kuvvet serileri yardımıyla yapılabilir.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

şeklinde başlangıç değer probleminin eğer $x = x_0$ da

$$y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)$$

türevleri mevcut ise kuvvet serileri yardımıyla çözülebilir.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1.3)$$

şeklinde verilen taylor serisinin türev değerlerini bulalım,

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y) \\ y'' &= f'(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y).y' \\ y''' &= f''(x, y) = \left[f_x(x, y) + f_y(x, y).y' \right]' \\ &= f_{xx}(x, y) + f_{xy}(x, y)y' + f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \\ &= f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y''\end{aligned}$$

Bu türev değerlerinde $x = x_0 + h$ değerlerini yerlerine koyup bu türev değerlerini Taylor serisinde yerlerine koyarsak, Taylor seri açılımının bu başlangıç koşulu ve $x = x_0 + h$ değeri için özel çözümünü bulmuş oluruz. Baştan sonlu sayıda terimi toplama katmak suretiyle,

$$y(x_0 + h) \cong y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3$$

Adi diferansiyel deklemin başlangıç değer problemi olarak çözümünü bulmuş oluruz.

Örnek:

$$\begin{cases} y' + y = 3x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Başlangıç değer problemini $x = 0.2$ deki değerini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y' + y &= 3x & \Rightarrow y' &= 3x - y \\ y(0) &= 1 & \Rightarrow x &= 0 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad h = 2 \end{aligned}$$

değerlerini kullanarak

$$y(0.2) \cong y(0) + \frac{y'(0)}{1!}h + \frac{y''(0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(0)}{3!}h^3$$

yaklaşımın sağ tarafındaki değerleri bulalım.

$$y'(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$y'' = 3 - y'$$

$$y''(0) = 3 - (-1) = 4$$

$$y''' = -y''$$

$$y'''(0) = -4$$

$$y(0.2) \cong 1 + \frac{-1}{1}0.2 + \frac{4}{2!}(0.2)^2 + \frac{-4}{3!}(0.2)^3$$

$$\cong 1 - 0.2 + 0.08 - 0.0053$$

$$\cong 0.874$$

1.3.2. Euler Yöntemi

Bu yöntemde bir x_i noktasındaki bağımlı değişkenin değeri bir önceki değerin bir doğru boyunca extrapolasyonu ile bulunur.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer formülünde (1.3) de ele aldığımız Taylor serisinin ilk iki terimi kullanılarak $y(x_0 + h)$ için yaklaşık değer hesaplanabilir.

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hy'(x_0)$$

$$y(x_0 + h) \cong y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$x_1 = x_0 + h$ alırsak,

$$y(x_1) = y(x_0 + h) + hf(x_0, y_0)$$

$x_2 = x_0 + 2h$ alırsak,

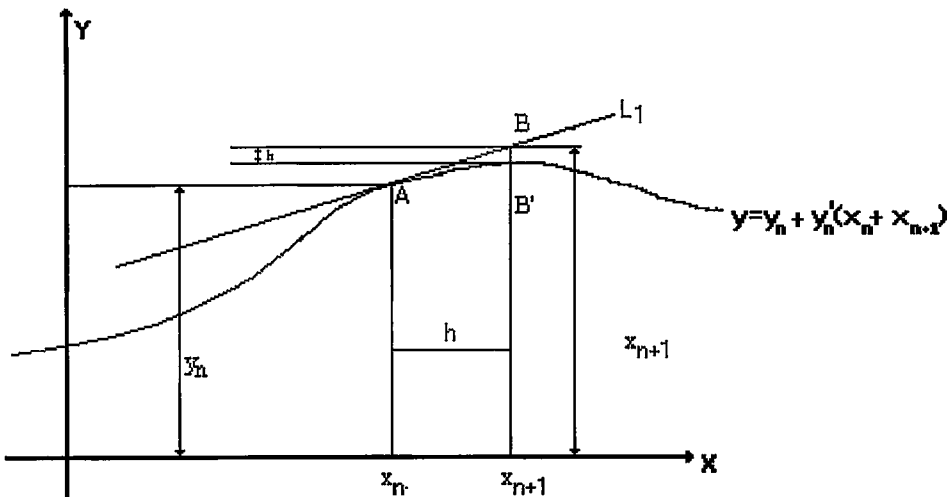
$$y(x_2) = y(x_0 + 2h) + hf(x_0, y_0)$$

şeklinde devam edersek;

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0(1)n - 1$$

Bu denkleme **Euler Denklemi** denir.

Geometrik yol



şekilde görüldüğü gibi x_n noktasındaki çözüm olan A noktası verilmiş olsun.

$A(x_n, y_n)$ noktasından geçen teğetin denklemi

$$y - y_n = y'(x_n) \cdot (x - x_n) \quad (1.4)$$

B noktası A noktasından çizilen teğetin üstündedir. Burada B' gerçek noktası yerine B yaklaşım noktası elde edilir.

$$y' = f(x, y) \quad y'(x_n) = f(x_n, y_n) \quad x - x_n = h$$

eşitliklerini (1.3) denkleminde yerine yazarsak,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

elde edilir. Bu ise Taylor açılımındaki ilk iki terimdir.

Euler metodundaki hata oranı ise;

$$R = \frac{h^2}{2!} y''(\mu) \quad x_n < \mu < x_{n+1}$$

Örnek: $y' + y = 3x$ $y(0) = 1$ $h = 0.2$ için $[0, 1]$ aralığındaki değerleri hesaplayınız.

Çözüm:

$$y' = 3x - y \quad f(x, y) = 3x - y$$

$$f(0.2) = y(0) + 0.2f(0, 1) = 1 + 0.2(3 \times 0 - 1) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$f(0.4) = y(0.2) + 0.2f(0.2, 0.8) = 0.8 + 0.2(3 \times 0.2 - 0.8) = 0.76$$

$$f(0.6) = y(0.4) + 0.2f(0.4, 0.76) = 0.76 + 0.2(3 \times 0.4 - 0.76) = 0.848$$

$$f(0.8) = y(0.6) + 0.2f(0.6, 0.848) = 0.848 + 0.2(3 \times 0.6 - 0.848) = 1.0384$$

$$f(1) = y(0.8) + 0.2f(0.8, 1.0384) = 1.0384 + 0.2(3 \times 0.8 - 1.0384) = 1.31072$$

1.3.3. Runge Kutta Yöntemi

a) II.Mertebe Runge-kutta

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_i) = y_i \end{cases}$$

verilmiş olsun. $h = x_{i+1} - x_i$ olmak üzere, x_{i+1} noktasındaki $y(x_{i+1}) \cong y_{i+1}$ çözümü

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1)$$

olmak üzere

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 \quad (1.5)$$

şeklinde bulunur. Burada a, b ve m sabittirler. $y(x)$ fonksiyonunu 2.mertebeden türevli terimlere kadar taylor serisine açarsak,

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2h^2}y''(x) \\ y(x+h) - y(x) &= hy'(x) + \frac{1}{2h^2}y''(x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Aşağıdaki eşitlikler

$$y'(x) = f(x, y)$$

ve

$$y''(x) = f_x + f_y \cdot f = F$$

(1.6) denkleminde yazılırsa;

$$y(x+h) - y(x) = hf + \frac{1}{2h^2}F$$

elde edilir.

$$f(x + mh, y + mk_1) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot mh + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot mk_1$$

olacağından

$$k_2 = h[f + f_xmh + f_y mk_1] = h[f + f_xmh + f_y mh f]$$

$$k_2 = h[f + mh f]$$

$k_1 = hf$ ve $k_2 = h[f + mhf]$ eşitliklerini (1.5) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x) &= ahf + bh[f + mF] \\ &= (a+b)hf + bmh^2F \end{aligned}$$

elde edilir.

$$hf + \frac{1}{2h^2}F = (a+b)hf + bmh^2F$$

olmalıdır.

Buradan $a+b=1$ ve $bm=1/2$ denklemleri çıkar. İki denklem ve üç bilinmeyen olduğundan bir sabit keyfi olarak seçilir.

$m=1$ alınırsa, $a=1/2$, $b=1/2$ olur.

Bu durumda,

$$k_1 = hf(x, y) \quad k_2 = hf(x + h_1, y + k_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

olarak bulunur.

b) IV. Mertebe Runge-Kutta

Taylor serisine 4.mertebeden türevleri de eklersek

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + mh, y_i + mk_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + nh, y_i + nk_2)$$

$$k_4 = hf(x_i + rh, y_i + rk_3)$$

olmak üzere

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

şeklinde bulunur.

a, b, c, d, m, n ve r değerlerini hesaplamak istersek 7 bilinmeyenli 7 den az denklem ile lineer yada lineer olmayan denklem sistemi ortaya çıkar.

O halde

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}, r = 1, a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{6}$$

olarak seçersek,

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_i, y_i) \\k_2 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\k_3 &= hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3)\end{aligned}$$

ve

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \left(k_1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 + k_4 \right)$$

olarak elde edilir.

Örnek: $y' + y = 3x$ $y(0) = 1$ $x = 0.2$ deki çözümü 2. ve 4. mertebeden Runge-Kutta için çözünüz.

Çözüm:

II. Runge – Kutta;

$$y' = 3x - y \quad f(x, y) = 3x - y \quad x = 0.2$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i) \Rightarrow k_1 = 0.2(3 \times 0 - 1) = 0.2(-1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1) \Rightarrow k_2 = 0.2(3 \times 0.2 - 0.8) = -0.04$$

$$\begin{aligned}y(0.2) &= y(0) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\&= 1 + \frac{1}{2}[-0.2 - 0.04] \\&= 0.88\end{aligned}$$

IV. Runge – Kutta;

$$f(x, y) = 3x - y \quad h = 0.2 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.2(3 \times 0 - 1) = -0.2$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = 0.2(3 \times 0.1 - 0.8) = -0.1$$

$$k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0.2(3 \times 0.1 - 0.95) = -0.13$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_2) = 0.2(3 \times 0.2 - 0.87) = -0.054$$

$$\begin{aligned}y(0.2) &= y(0) + \frac{1}{6} [-0.2 + 2(-0.1) + 2(-0.13) - 0.054] \\&= 1 + \frac{1}{6} [-0.2 - 0.2 - 0.26 - 0.054] \\&= 0.881\end{aligned}$$



BÖLÜM II

2.1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü oldukça eski bir konudur ve yüzyılın başında bulunan yöntemler hala daha bu konudaki çözümlerde etkin ve yaygın olarak kullanılan tekniklerin temelini oluşturmaktadır. Her ne kadar, o günden bu yana çok önemli gelişmeler kaydedilmişse de, bütün bunlardan elde edilen en önemli gelişme, güvenilirlik, rahatlık ve sorun ile ilgili teşhis yapabilme konularında olmuştur. Bu tekniklerden en özel sorunlar bile rahat ve ucuz bir biçimde çözümlenebilmektedir. Yine de, klasik yöntemler kullanılarak çözümlenmesi güç problemler vardır. Bu güçlükte çözülebilen diferansiyel denklemler göz ardı edilemeyecek kadar önemlidir ve bunların çözümlenmesi oldukça zordur. Bu tipteki problemler çok önemlidirler, çünkü bu tür problemler, önemli fiziksel olaylardan ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çözümü, aynı zamanda çok pahalıdır, çünkü bu problemlerin büyüklüğü ve günümüzde ne denli bilgisayar kapasiteleri artmış olsa bile klasik yöntemlerle baş edilemeyecek kadar zorlu özellikte olmalarıdır.

Klasik çözüm yöntemleri, bir çok yuvarlatma hataları içeren aşamalardan oluşmakta, bu da çözümün güvenilirliğini azaltmaktadır. Bu konuda bir başka güçlükte bu tür problemlerin çözümlerinin kolay olduğu hissini ve görüntüsünü uyandıran nitelikte olmalarıdır.

2.2. HANGİ PROBLEMLER ÇÖZÜMSÜZ (STİFF) NİTELİKTEDİR?

Bir denklem sisteminin çözümünde,

$$y' = f(x, y), \quad y(0) \quad (2.1)$$

bulmaya amaçladığımız çözüme yakın olacak çözümün davranış biçiminin ne olacağı konusunda bir değerlendirmede bulunmamız gerekir. Çünkü, $y_n = y(x_n)$ denkleminde y_{n+1} e h adım uzunluğu ile yaklaştığımızda elde edilmek istenen integral eğrisinden bir diğerine geçişte kaçınılmaz kabul edilen hatalar oluşur. Bu hatalar bizi istenilen eğriden biraz uzaklaştırır. Buna ek olarak başta hata yapmazsak, elde edilen yeni eğriyi izleyerek bundan doğan hatanın söz konusu iki eğrinin davranışlarına bağlı olduğunu biliriz. Şimdi bu konuda aşağıdaki eşitliğe

bakalım.

$$y' = A(y - p(x)) + p'(x), \quad y(0) = v \quad (2.2)$$

Burada A , sabit bir sayıdır. Bu eşitliğin analitik çözümü;

$$y(x) = (v - p(0))e^{(Ax)} + p(x) \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Eğer A , çok büyük ve pozitif ise çeşitli v değerleri için çözüm eğrileri yarım ay şeklinde dışa doğru yayılır. Ve bu durumda problemin *kararsız* olduğu ortaya çıkar. Bu tür bir problemin, adım adım çözüm yöntemi içeren tüm farklı nümerik yöntemlerle çözümünün zor olduğu açıkça görülür. A nın mutlak değeri küçük olduğundan, eğriler hemen hemen birbirine paraleldir ve bu tür *doğal kararlı* problemler bilinen eski yöntemlerle kolayca çözülebilir. A , büyük ve eksi değerde ise, çözüm eğrileri çok çabuk sonuca ulaşır. Gerçekte, $y(0)$ ne olursa olsun çözüm eğrileri, başlangıçtaki geçici durum olarak adlandırılan kısa mesafe sonrasında $p(x)$ özel çözümü ile temelde benzeşir. Bu çok kararlı durum, diferansiyel denklemlerin içindeki hataların ard arda çoğalmasına karşı, çok ideal bir durumu ifade eder. Ama bu sefer de sayısal hatalar çoğalır. Bu tür problemlerde, **Çözümsüz** olarak adlandırılır.

Yukarıda (2.2) eşitliği, özel anlamın ötesinde bir genel çözüme de sahiptir. (2.1) eşitliğinin özel $g(x)$ çözümünün davranışı, Taylor Serisi açılımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} y' &= J(x, g(x))(y - g(x)) + f(x, g(x)) \\ &= J(x, g(x))(y - g(x)) + g'(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada J **Jakobien Matrisinin**, her bir (i, j) elemanı f nin i . elemanının y in j . elemanına göre kısmi türevlerinden oluşur. Bu kabul sınırlı sayıda uygulama alanları için uygun görülebilir. Bununda ötesinde $J(x, g(x))$ Jakobien matrisinin, x değişkeni çok yavaş değişirken sabit bir matrise dönüştüğünü kabul edelim. Temel eksen dönüşümünden sonra, bu denklemler, yukarıda (2.2) ile gösterilen biçimde bir dizi denkleme dönüştürülmüş olacaktır. Burada A , Jakobien matrisinin özdeğerleridir. Bu özdeğerler kompleks sayı da olabilir. Bu nedenle yapılan

kabuller çerçevesinde (2.2) de ifade edilen denklemler ve A kompleks sayıları (2.1) denkleminin tipik durumu olarak ortaya çıkar.

Çözumsuz (Stiff) problemlerden kastımız çözümü oluşturan bileşenlerden hiçbirinin kararlı olmayışı yani özdeğerlerin hiçbirinin belirli büyüklükte ve pozitif olan gerçek kısmının olmamasıdır ve bu arada bazı bileşenlerinin gereğinden fazla kararlı yani en azından bir özdeğerinin gerçel kısmı negatif ve oldukça büyük değerli olması kastedilmektedir. Çözumsuz problemlerin, eksi değeri en büyük olan özdeğere bağlı olarak değişme eğilimi gösteren çözümlerinin olması zorunludur. (Burada kastedilen çözümün türevi, buna karşılık gelen e^{Ax} türevlerine kıyasla küçük olmasıdır). Sonuç olarak, bir problem bağımsız değişkenin belirli aralıklar için aldığı değerler bazında çözümü, çözumsuz olabilir, aynı değişkenin belirli aralıklardaki değerlerine göre bu özelliğini kaybedebilir.

A negatif bir değere sahip ve $p(x)$ in değişimi yavaş ise, (2.3) denklemi, e^{Ax} geçici koşullarının ortadan kalmasından sonra, bir başka deyişle e^{Ax} in değeri, kabul edilebilir hata sınırları içinde kaldığı sürece çözumsuz olarak düşünülebilir. Ama yine de, bu geçici bölge içinde problem çözumsuz nitelikte değildir. Eğer (2.2) denklemi sabit bir J Jakobien değerinde doğrusal nitelikteyse, geçici seçilen dönemin başlarında problem çözumsuz değildir, ama daha sonra bu hızlı geçici dönemin sona ermesiyle artık çözumsuz problem olma niteliğini yeniden kazanır.

Her ne kadar yukarıda verilen örneklerde çok hızlı değişen bir aralıkta değerlendirilmişse de genel nitelikli problemlerde bunun gibi bir çok safhalar bulunur. İlk göze çarpan hususlardan birisi, (2.4) denkleminde yapılan kabulün ancak sınırlı bir ölçüde geçerliliğe sahip olmasıdır. Bu durum, bazen denklemlere bakılarak da anlaşılabilir. Bu tür açıklığın olmadığı örneklerden biri uygulamalı mekanikte ünlü Van der Pol osilasyon denklemleridir. Bu tür problemler çözümüzdür, çünkü tüm integral eğrileri sınır eğrilerine çok hızlı yaklaşmakta ve integrasyonun bazı bölgelerde çok büyük negatif özdeğerlere sahip olmasına karşılık diğer bazı bölgelerde bunun böyle olmadığını göstermektedir. Sınır çözümlerinde süreksizliğe ulaşacak düzeyde periyodik farklılıklar bulunmaktadır. (Bizim yaptığımız tanımlara göre, bu denklem, bu tür bölgelerde çözumsuz problem niteliğinde değildir). Klasik uy-

gulamalı mekanik yöntemleri, yani tekil pertürbasyon kuramı, bu tür denklemlerle oldukça iyi kullanılmaktadır.

Bu konuda ileri sürülebilecek ikinci neden, (2.2) denklemindeki $p(x)$ teriminin (sürükleyici terim) aniden değişebilir nitelikte olmasıdır. Buna bir örnek, fiziksel nedenlerle oluşabilecek geçici hale örnek olan foto-parçalanma olgusunu içeren kimyasal kinetik düzeyi denklemleri, örneğin hava kirleticilerin davranışlarını ifade eden denklemlerdir. Güneş doğar yada batarken, bir tam gün periyodu bazında olağan üstü hızlı reaksiyonların varlığı sözkonusudur. A.Hindmarsh, oldukça değerli bir problem olan, çok normal davranış biçimi sergileyen bir oksijen molekülü için diferansiyel denklemlerden yararlanmıştır.

$$y'(t) = d - by + aE(t)$$

Burada

$$a = 10^{-18}, \quad b = 10^8, \quad c = 4, \quad d = 10^{-19}$$

$$E(t) = \left(1 + \frac{cw^2}{b} \frac{\cos wt}{\sin^2 wt}\right) e(t),$$

$$e(t) = \begin{cases} e^{(-cw/\sin wt)} & \sin wt > 0, \\ 0 & \text{diğer haller} \end{cases}$$

ve

$$w = \Pi/43200$$

görüldüğü gibi burada Jakobien matrisi yalnızca bir sayı, $-b$ dir ki, bu da eşitliğin oldukça kararlı olduğunu göstermektedir. Zaman, saniye biriminden verilmekte ve her 12 saatte denklemin çözümü (analitik olarak elde edilebilmektedir) bir günlük zaman süresi bazında oldukça süreksiz bir değişimi sergilemektedir.

Ek olarak belirtmemiz gereken bir husus da şudur ki, (2.1) eşitliği için geliştirilen kabul, sonuçta tek bir sınır çözüme ulaşmaya neden olmaktadır. Oysa ki pratikte birden çok çözüm söz konusu olabilir. Bunun nedeni, üzerinde durulan çözüm açısından yapılan kabulün oldukça yerel nitelikte olmasıdır. Doğrusal olmayan mekanik alan birden çok limit eğrilerinin olabileceğine ilişkin sayısız örneklerle doludur.

Çözumsuz problemlerin çözümündeki güçlükleri yansıtmak amacıyla A nın büyük negatif değerli bir sayı ve $p(x)$ inde çok yavaş değiştiği koşullarını ele alalım. (2.2) denklemini Euler metoduyla integre edelim. Bu şema içinden y_n için yapılacak

$$x_n + h_n = x_{n+1}$$

kabulüyle

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) = y_n + h_n y_n'$$

olacaktır.

Bunlar x_n üzerinden Taylor serisinin açılımın doğrusal terimleri olduğundan, bu kabul sonucunda oluşacak kesme hatası

$$h^2 y''(x_n)/2 + \mathcal{O}(h^3)$$

olacaktır. Burada herbir adımda h a bağlı olarak elde edilecek ε yaklaşık hata

$$\varepsilon = \left| h^2 y''(x_n)/2 \right|$$

olacaktır.

Nümerik yöntemler ile bulunan çözüm, gerçek çözüme yakın ise h davranışlarından çıkartılabilecek sonuç;

$$y'' = (v - p(0)) A^2 e^{(Ax)} + p''(x)$$

dır. Açıkça görüleceği gibi x küçük olduğunda,

$$h_n = \left(\frac{2\varepsilon}{|y''(x_n)|} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\varepsilon}{|v - p(0))A^2|} \right)^{1/2}$$

x değeri büyük olduğunda üstel terim kaybolacağından

$$h_n = \left(\frac{2\varepsilon}{|p''(x)|} \right)^{1/2}$$

elde edilecektir.

Daha önceden yaptığımız kabulde, A nın mutlak değeri büyük ve $p(x)$ in ikinci türevinin mutlak değeri küçük olduğundan, bu çözümde seçilecek h adım uzunluğunun büyüklüğü, çözüm için yeterli hassasiyetin elde edilmesi amacıyla, geçici dönemin çok hızlı değişimine uygun olarak başlangıçta küçük olmalıdır, ancak daha sonra büyük olabilir ve A dan bağımsız duruma gelebilir.

Bütün bu olanlar, gerçek tabloyu açıklıkla ortaya koymaya yeterli değildir. Seçilecek h adım uzunluğunun büyüklüğünü belirleyen iki önemli faktör daha bulunmaktadır ki, bunlar da hassasiyet ve kararlılıktır. Hassasiyet ile yerel hataların boyutu, yani herbir aşamada sözkonusu olan hatanın büyüklüğü kastedilmektedir. Kararlılık ile herbir aşamadaki hataların bir sonraki aşamalarda büyümeme eğilimi anlatılır. Bu örnekte görüldüğü gibi, gerçekte hassasiyet sorununun üstesinden gelmek kolaydır. Öyleyse, ikinci faktöre kararlılık konusuna bakalım. Söz konusu olan doğrusal bir diferansiyel denklem ve buna uygun doğrusal nümerik analiz söz konusu olduğuna göre herhangi bir noktadaki nümerik çözümler ile gerçek çözüm arasındaki fark demek olan global hata için çözüm yapmak gerçekte kolay olacaktır:

$$\delta_n = y_n - y(x_n)$$

Buradan da

$$\delta_{n+1} = (1 + h_n A) \delta_n + \left[y(x_n) + h_n y'(x_n) - y(x_{n+1}) \right]$$

Bu demektir ki n . aşama sonrasındaki global hata önceki x_n noktasından ve buna ek olarak n . aşamadaki yuvarlatma hatasından başlayarak genişlemektedir. Bu hata $-2 \leq h_n A \leq 0$ koşulu gerçekleşmez ise büyüme eğilimine girer. Açıkça anlaşılmaktadır ki bir kez geçiş bölgesinin dışına çıktığında, bu koşul çözüm sırasında seçilmesi gereken aşamaların büyüklüğünü belirleyici nitelik taşımaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken husus da, $|h_n A|$ çarpımının geçiş bölgesinde yuvarlatma hatasını denetleme amacıyla küçük seçilmesinden dolayı geçiş bölgesinde bu problemin çözümsüz nitelikte olmamasıdır.

Burada işin aslı, hassasiyet konusundaki zorunluluk nedeniyle, bazı hallerde de kararlılık bölgesi olarak tanınlanan ve $|h_n A|$ değerinin öngörülen diferansiyel

denklemin kararlı olabilmesi için yer alması gereken bir bölgenin varlığı söz konusudur. Euler yönteminde bu bölge $(-1, 0)$ merkezli ve yarıçapı 1 olan bir disk. Her ne kadar yapılan kabuller çok kaba da olsa, bu tür bir analiz, farklı şemaların yerel davranışlarının anlaşılmasında yeterli derecede sağlıklı niteliksel yaklaşım sağlamaz. Kararlılık ile ilgili sınırlamalar, $|h_n A|$ değerinin çok büyük olmamasını gerektirmektedir. Pratikte, A nın mutlak değeri çok büyük değilse, hiç de önemli bir sınırlama anlamını taşımaz ve hassasiyet ile ilgili gereklilikler kolaylıkla yerine getirilebilir.

Akla gelebilecek bir endişeyi de hemen gidermek gerekmektedir. Uygun bir biçimde ele alındığında, çözümsüz problemlerin Euler yöntemi gibi klasik yöntemlerle çözülmesinde kararlılık sorunu için seçilen aşamaların uygun büyüklükte olması koşuluyla bir sorunla karşılaşılmaz. Çözümlü problemler için uygun yöntemler sunabilen bilgisayar programlarının bu tür çözümsüz problemler karşısında çaresiz kalışları değil, yetersiz kalışları söz konusudur. Bunun nedenini Euler yöntemi gibi yöntemlere yakından bakarak anlamak mümkündür. Euler hesaplama yönteminde, sözgelimi, ikinci türev konusunda bir tahminde bulunmak için çözümün ikinci derecedeki farkını oluşturabiliriz. İkinci fark iki kısımdan oluşacaktır: gerçek çözümün ikinci farkı ve global hatanın ikinci farkı. (2.2) denklemi için sabit bir h aşama değeri için yapılacak basit bir hesaplama, global hata ikinci farkı için

$$(hA)^2 \delta_{n-1} - h^3 \left(Ay''(x_{n-1}) + y'''(x_{n-1}) \right)$$

artı bazı daha yüksek terimlerden oluşacaktır. Eğer A büyük olursa, o zaman bu terim belirleyici olacak, böylece aşama kontrol mekanizması, salt aşamaların büyüklüğü olgusuna indirgenmiş olacaktır.

Büyük ölçekli aşamalı çözümlerde kararsızlık sorunu, çözümsüz problemler için geçerli tüm yöntemlere has bir olgudur. Tüm bu tür yöntemlerde, aşağıdaki biçimde verilen bir global hata denklemi vardır.

$$\delta_{n+1} = S_n \delta_n + \varepsilon_n$$

Burada ε_n , yerel yuvarlatma hatası ve S_n büyüklüğü diferansiyel denklemleri Jakobien ile bağlantılı hata yükseltme matrisi ve çok aşamalı yöntemler söz konusu

olduğunda δ_n bir sonraki aşamada yapılan hesaplamalarda kullanılan tüm eski değerlerdeki sayısal büyüklükler içinde yer alan global hataları içeren bir vektörü gösterir. Yerel yuvarlatma hatası ε_n terimini elden geldiğince küçük tutabilmesi için bir çok çözümü olan problemler için geçerli yöntemler kullanılmaktadır. Çözumsuz problemlerin çözülmesi istenildiğinde de, kararlılık konusunda iyileşme sağlamak amacıyla, bu sefer hassasiyet konusunda belirli ödünler verilmek durumunda kalınmaktadır. Çözumsuz problemlere en uygun yöntemler, büyük özdeğerleri olan Jakobienler için S_n değeri küçük çıkanlardır. Bu doğrultuda, geriye doğru Euler yöntemi

$$y_{n+1} = y_n + hy'_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

bu konuda bilgi vericidir. Çünkü bunun çözülmesi kolay olduğu kadar aynı zamanda bir çok çözumsuz problemler için de oldukça tipiktir. (2.2) denkleminde uygulandığında global hata olarak aşağıdaki biçimde bir eşitlik elde edilir.

$$\delta_{n+1} = \delta_n + h_n A \delta_{n+1} + [y(x_n) - y_{n+1} + h_n y'(x_{n+1})]$$

yada

$$\delta_{n+1} = (1 - h_n A)^{-1} \delta_n + (1 - h_n A)^{-1} h^2 y''(x_n)/2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Hataların yayılarak büyümesi, $|1/(1 - h_n A)| \leq 1$ olması koşuluyla engellenebilmektedir, ki bu da tüm kalan yarım düzlemi içermektedir. Bu çok önemli bir gelişmedir. Çünkü kararlılık zorunlulukları nedeniyle çözüm üzerinde çok az belirgin bir şema değişikliğine gidilmiştir. Öte yandan, geriye doğru Euler yöntemi bir anlamda açık değildir ki bu da y_{n+1} i belirlemek için her seferinde doğrusal olmayan denklemlerin çözülmesini gerektirmektedir. Bu kararlılık özellikleri çok iyi olan yöntemlere has bir tipik durumdur. Ve İleriye doğru Euler yönteminde kararlılık sorunu, hassasiyet gerekliliklerinde çok daha ağır basar; öte yandan geriye doğru Euler yönteminin her ne kadar her bir aşamasının daha çok karışık olmasına rağmen, çözumsuz problemlerin çözümünde etkinlik, çok belirgin iyileştirme elde edilebilmektedir.

Çözumsuzluk sorununun temelinde, çok yavaş değişen çözümler elde etmek ve bu çözümler içine girip onu bozabilecek unsurları hemen yok edecek yöntemler geliştirmektir. Birçok yaygın fiziksel sistemler kararlı niteliktedir; öte yandan, çok hızlı değişen özellikte olanlar ise genellikle çözumsuz nitelikte olurlar. Bu nedenle, farklı zaman sabitleri olan fiziksel bileşenler içeren durumlar konusunda çok dikkatli olunması gerekir. Bu gibi durumlarda, örneğin, kararlılık konusunda denetim mekanizmasının geliştirilmesi gerekir. Arzu edilen yavaş gelişme temposu içinde oluşan bir sapmayı anında düzeltmek için getirilecek diferansiyel denklemlerin özü itibariyle çözumsuz olması söz konusudur.

Açıkça anlaşılmasında yarar olan bir husus, problemlerin çözumsuzluğunun, gerçek çözüme yakın olan çözümlerin davranışları ile yakından ilişkili olması bir başka deyişle, çözümün kendisinin niteliğinde değil ama söz konusu diferansiyel denklemin niteliğinde olmasıdır. Örneğin,

$$y' = (v - P(0))Ae^{(Ax)} + p'(x), \quad y(0)$$

verildiğinde denkleminin başlangıç değeri v nin aynı olması koşuluyla, birbirinin tamamen aynı çözümleri vardır. Ama yinede kesinlikle çözumsuz değildir. Bu tür ikinci derecede problemlerde, integral eğrileri birbirine paraleldir ve problem özünde kararlı niteliktedir. Gerçektende problemin içinde bazı bileşenlerin diğerlerine göre çok hızlı değişmesi zorunlu olarak çözumsuzluk ile ilgili bir gösterge olduğu anlamını taşımaz. Yine de, genel olarak fiziksel sistemler kararlı niteliktedirler ve bu nedenledir ki bu tür değişimlerin tanımlanması güç ve sonuç olarak kurulan eşitsizlikler de o ölçüde çözümüzdür. Örnek olarak, tepkime hızları yüksek kimyasal reaksiyonlarla birbirinden farklı yarı ömürleri olan çeşitli bileşenleri bulunan nükleer tepkimeler, çözumsuz denklemlere birer örnektir. Elektrik devre sistemlerinde, yüksek hızlı transistör modelleri içeren hızlı elemanlar sonuçta çözumsuz problemlere yol açarlar. Şimdi aşağıdaki ısı denklemini çözmeyi düşünelim.

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

$$y(0, t) \equiv 0, \quad y(1, t) \equiv 0 \quad y(x, 0)$$

Burada

$$\Delta x = 1/N \quad \text{ve} \quad x_i = i\Delta x \quad i = 1, \dots, N$$

verilsin. $y_i(t)$ nin $y(x_i, t)$ e yaklaştığını kabul edelim ve $y_i(t)$ ısı denkleminin içindeki üç boyutlu türevin ortalama fark ile değiştirilmesi elde edilmiş olsun;

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (y_{i+1}(t) - 2y_i(t) + y_{i-1}(t)) \quad i = 1, \dots, N-1,$$

ve herbir i için,

$$y_0(t) \equiv 0, \quad y_N(t) \equiv 0, \quad y_i(0) = y(x_i, 0)$$

dir.

Burada sabit Jakobienler ve buna ait özdeğerler rahatlıkla bulunabilir;

$$A_{N-n} = - \left[\frac{\sin(n\pi\Delta x/2)}{\Delta x/2} \right]^2$$

buradan da anlaşılacağı gibi,

$$A_1 = \frac{-4}{(\Delta x)^2}, \quad A_{N-1} = -\Pi^2$$

dir. Euler metoduyla aşama büyüklüğü Δt olan bir dizi normal diferansiyel denklemin çözümü sonucunda

$$|hA_1| \leq 2$$

yada

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

olduğu ortaya çıkar.

Burada sorunun ne kadar çözümsüz olduğu hususu başlangıçta seçilen uzay dokusunun ne kadar hassas seçilmesi ile yakından ilgidir. Eğer N küçük ise çözümlü problem ile ilgili yöntem seçilebilir, ama N büyükse, uygun bir yöntem bulunamaz. Eğer bu biçimde devam ederse o zaman bu ısı problemini çözmek için ileriye doğru fark yöntemini seçmiş oluruz ki, bilindiği gibi burada, kararlılık nedeniyle Δt ile ilgili sınırlama söz konusu olmaz. Bu tür problemlerin çözümlerinde daha pahalı

aşamalar içeren, ama daha kararlı olan yöntemleri kullanmak çok daha ucuz bir yöntemdir. Normal diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan genel amaçlı teknikler ile ilgili tecrübeler de bu yargıyı doğrular nitelikte ve ayrıca aşama büyüklüklerinin ve formüllerin değiştirilmesi yönteminin de çözümlerin etkinliği ve güvenilirliğine katkıda bulunmaktadır.

Şunu görebilmek gerekir ki bu örnekte elde edilen özdeğerler yalnızca uzay boyutu seçiminde kullanılan yaklaşım ile ilgili değildir. Diferansiyel denklemin ilk halinde ki özdeğerler

$$-(k\Pi)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

dir. Ele alınan sisteme ait ilk özdeğerler yani sistemin kararlılığını belirleyecek özdeğerler, yaklaşık olarak diferansiyel operatörün ilk özdeğerleridir ve diğerleri de daha büyük özdeğerler için yapılan kabullerdir. Bu da göstermektedir ki çözümsüzlük bu problemin bir bölümünde değil, özünde yatmaktadır. Problemin ya fiziksel durumu ile ilgili model değiştirilmeli, yada problemin çözümü aşamasında çözümsüzlük baştan kabul edilmelidir.

Birçok alanda özellikle de kimya kinetiğinde, problemi ele alanlar çözümsüzlük sorununu, modelde yaptıkları düzenlemelerle giderilmektedir. Burada yatan ana fikir sorunu oluşturan bazı parçalarda zamana göre değişimin diğerlerine kıyasla daha fazla olabileceği fiziksel yaklaşımının yapılabilme anlayışının yatmasıdır. Örneğin hareket eden bir ortamda ki kimyasal tepkime sırasında, statik yada sanal durağan durum kabulleri bazı fiziksel olguların belirli bir zaman süresi içinde ya ihmal edilecek düzeyde yavaş değişiklikleri, yada çok çabuk değişme gösterdikleri için geçici dönemlerini çok atlatıp kısa süre içinde durağan duruma geçtikleri esasına dayanmaktadır. Bu tür kabuller, bir dizi (tahminen çözümsüz olmayan) denklem ile ilişkilendirmekte ve basit diferansiyel eşitlikler oluşturulmaktadır. Bazı tür durumlarda bu tür kabuller oldukça iyi sonuç vermektedir. Ancak çoğu zaman bu tür revizyon görmüş modellerin orjinal duruma adapte edilmelerinde güçlükler yaşanmaktadır. Hali hazırda çözümsüz problemlerin ele alınmasında kullanılan yöntemler, oldukça iyi sonuçlar vermektedir ve sırf maliyetleri gerekçeleri ile birçok durumlarda bu tür model değişikliklerinin yapılmasına artık gerek kalmadığı

gibi, modelin değiştirilmemesinin daha sağlıklı ve tutarlı davranış olacağına ilişkin birçok gerekçe ve kurumsal temel bulunmaktadır. Kuşkusuz bazı istisnalar söz konusudur, çünkü sonuçta bizler genel amaçlı kullanılan tekniklerden söz etmekteyiz. Bazı özel durumlarda daha kolay çözüm için denklem grubunun dağıtılması hiç olmazsa analitik olarak gerekli olabilir ve böylelikle genel amaçlı tekniklerle karşılaşılacak güçlükler aşılabılır. Diğer taraftan tam olarak anlamadan bu tür işlemlere girişmek büyük problemler yaratabilir. Bu konuda kimya mühendisliği alanında tartışma konusu bir olay da, bilim adamları burada anlatılan türde belirli kabuller yapmışlar ve sonunda yanlış bir durağan durum çözümüne varmışlardır.

Kısmi diferansiyel denklemlerle ilgili örnek bir çok büyük sistemler ile karşılaşabileceğimizi göstermektedir. (Örneğin birçok uzay değişkenleri olan bir durumun ele alınması gibi). Isı problemleri Van der Pol's denklemleri ve durağan durum ile ilgili yapılan bir çok kabuller göstermektedir ki çözümsüzlük durumu hiç de öyle ayrıksı bir olgu değildir ama sık sık karşılaşılan ve üzerinde çalışmalar yapılan bir durumdur. Burada ele alınan örnek geniş bir sistem içinde belirli ilişkiler geliştirilmesinin güçlüğüne göstermektedir. Burada olduğu gibi her biri denklemde üç yada daha az bilinmeyen bulunmaktadır ve bilinmeyenlerin sayısı, sistem içinde kurulabilen denklem sayısı ile pek de uygun değildir.

Şimdiye kadar çözümsüz problemlerin ne olduğu konusunun anlaşılması için belirli hususlara değinmiş olduk. Şimdi çözüm üzerinde tartışmalara geçmeden önce kısa bir tekrar yapmakta yarar var. Çoğu zaman fiziksel temelde (2.1) denkleminin çözümü üzerinde niteliksel değerlendirme yapılabilmektedir. Sistemin kararlı olduğu biliniyorsa o zaman problem de genellikle çözümsüz olmaktadır. Eğer, bazı değişkenlerin zamana göre diğerlerinden farklı bir değişim içinde oldukları biliniyorsa ve fiziksel sistem ile ilgili açıklık söz konusuysa, o zaman bu gibi durumları açıklayan denklemler çözümsüz niteliktedir. Benzer model, problemlerin analizi ve bu konudaki deneyimler oldukça yararlı olabilmektedir. Çözümsüzlük ile ilgili genel bir gösterge, çözülmüş problemlerin çözümünde kullanılan tekniklerin, hiç bir belirgin neden olmaksızın açık bir biçimde bu tür problemlerin çözümünde etkisiz kalmalarıdır (Denklemlerde çok düzensiz bir görünüm olması yada çok anlaşılabilir

durumların ortaya çıkması gibi). Ancak yinede de, çözümsüzlük sorununa etkin bir teşhis koyabilen çözümlü problemlere has teknikler de bulunmaktadır.

Geçici dönem ile ilgili integrasyon, kararlılık için olmasından çok hassasiyet açısından belirlenmiş aşama değerlerine sahiptir ve problemin bu kısmı çözümsüz değildir.

Bu farklılık, ilginç bir hikaye ile anlatılabilir. Bir grup yetkili laser modelleme üzerine çıkan çözümsüz diferansiyel denklemlerin tartışıldığı bir konferansa katılırlar. Konuşmacılardan biri, bir hayli bilgisayar zamanı gerektiren 250 adet enerji düzeyini içeren bir fiziksel model üzerinde önerilerde bulunmaktadır. Her ne kadar çözümsüz olan bir problemin basit de olsa bu kadar da karmaşık bir bir model ile çözümlenmeye kalkışılması (gerçekte orjinal çözümsüz problemin çözümsüz yöntemler kullanılarak çözümlenmesi daha kolay olurdu) hiç de çözümsüz bir problemin etkin bir biçimde çözülmesine yönelik bir uygulama sayılmayacaktır. Açıkça onun getirdiği öneri, çözümsüz problemleri çözmeye yönelikti. Her bir çözüm bileşeni, aynı niteliksel davranışı gösteriyordu. Ancak belli bir süre sonra seçilen düzey çok kalabalıklaşıyor ve bu kalabalıklaşma, belli bir süre sonra çok yavaş değişme göstermeye başlıyordu. Buradaki güçlük, buna benzer ve sayıları bir hayli çok diğer düzeylerin de aynı biçimde kalabalıklaşmaya başlamasıydı. Teknikler söz konusu olduğunda, bunlar sürekli olarak belirli enerji düzeylerinde geçici nitelikteydiler. Sonuç olarak, tüm sistemin durağan duruma indirgenmesi söz konusu olabilecekti ve kısa zaman sonra çözümsüz yöntemler sonuç verecekti. Ama bu tür yöntemin pahası bilim adamlarını bu denli uzun dönemli bir davranışla ilgilenmeyecek olmalarıydı. Çözümlü problemlere has olan yöntemler, geçiş dönemiyle ilgili problemlerin çözümüne daha uygundur. Çünkü bu tür çözüm yöntemleri gerçekte geçici dönem ile ilgili olarak tasarlanmıştır. Geçici dönemle ilgili olarak yukarıda verilen örnek aynı zamanda diferansiyel denklemler alanındaki her türlü bilimsel problemleri çözebilecek bazı teknikler ve hatta yöntemlerin var olduğunu göstermektedir.

2.3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Çözümsüz diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tüm genel amaçlı tekniklerde yer alan yöntemlerin tümü belli ihtiyaç sonucu ortaya çıkmıştır. Bunun anlamı, her aşamada diferansiyel denklem belli bir sayısal yaklaşım elde etmeye yönelik olarak çözülmektedir. Örneğin, geriye doğru Euler yönteminde

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

denklemi y_{n+1} için çözülmelidir. Problem doğrusal (lineer) ise o zaman doğrusal denklem çözülmeli, ama problem doğrusal değil ise o zaman da doğrusal olmayan denklem çözülmelidir. Bu tür çözümsüz denklemlerin çözümünde teknik olarak basit fonksiyonel iterasyon yöntemi kullanılır.

$$y_{n+1}^{(m+1)} = y_n + h_n f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m)})$$

Yukarıda verilen (2.2) model problemi için iterasyon hatasının, aşağıdaki eşitliği sağladığını kolaylıkla bulabiliriz.

$$y_{n+1}^{(m+1)} - y_{n+1} = h_n A(y_{n+1}^{(m)} - y_{n+1})$$

Burada bir kez daha çözümsüzlük etkisiyle karşılaşmış bulunuyoruz. Bu basit iterasyon çözümsüz bir problem söz konusu olduğunda (yani $|h_n A| > 1$ olduğunda) çözümü yoktur. Çözümsüz problemler için her zaman kullanılan yöntem, Newton yönteminin bir varyantıdır. Burada J Jakobien kabulü ile ard arda doğrusallaştırmış sistem ile çözüme ulaşır.

$$y_{n+1}^{(m+1)} = y_n + h_n f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m)}) + h_n J(x_{n+1}^{(m+1)} - y_{n+1}^{(m)})$$

Yukarıdaki, (2.2) model problemin iterasyon hatası aşağıda verildiği gibi olacaktır.

$$y_{n+1}^{(m+1)} - y_{n+1} = (1 - h_n J)^{-1}(h_n A - h_n J)(y_{n+1}^{(m)} - y_{n+1}) \quad (2.5)$$

J ve A için yapılacak herhangi bir makul kabul, problemin çözülmesine yetecektir. Problem çözümsüz değil ve dolayısıyla $h_n A$ küçük ise bu durumda gerekli olan

tek şey, $h_n \cdot J$ çarpımının küçük olmasıdır. Eğer problem çözümsüz ve $h_n \cdot A$ büyük ve negatif ise bütün gerekli olan $h_n \cdot J$ çarpımının $h_n \cdot A$ nın en çok yarısına eşit olmasıdır. Bu örnek için ve buna benzer diğer doğrusal problemler için, iterasyon J tam tamına A ya eşit olduğunda çözülebilir.

Bu çözümleme iterasyonun her bir iterasyonunda doğrusal denklem çözümünün söz konusu olduğu bütün sistemleri içine alır. Problem doğrusal nitelikte ise $J = A$ olduğu sürece bir iterasyon yeterlidir. Gerçekte bir çok teknikte $J = A$ kabulü yapılmamıştır. Böylece iterasyon doğrusal nitelikteki durumlarda da kullanılmaktadır. İterasyon kullanıldığında Doğrusal olmayan problemlerde olduğu gibi başlangıç kabulü çok önemlidir. Çünkü bu kabul problemin çözümüne ulaşabilmesinde çok önemlidir. Ve dahası yalnızca bir kaç iterasyon gerektiriyor olmalıdır. Ancak durum bu kadar kötü değildir ve başlangıç kabulünü yapmak için belli bir integrasyon formülü vardır ve çözümsüz problemlere uygun bir kabul yapmak için bu formülle çok fazla uğraşmak gerekmez. Çünkü bu formül gerçekte çözüm ile ilgili elde var olan bilgileri kullanarak hazırlanan çok terimli ekstrapolasyondur. Örnek olarak, çözümsüz denklemlerin çözümünde tahmin aracı olarak geriye doğru Euler yöntemi kullanıldığında ileriye doğru Euler formülü de bu kabulün yapılmasında kullanılabilir. İleriye doğru Euler denkleminde ilk iterasyon $y_{n+1}(0)$ ile y_{n+1} değerinin bulunmasının son aşamasında y_n fonksiyon değeri ve y'_n değerleri yer alır. Burada tahmin hassasiyeti oldukça iyidir, en azından çözümsüz problemler için gerçek integratör (düzeltici) ile bulunandan daha iyidir. Bu düzelticinin amacı kararlılığı sağlamaktır. Bu ve buna benzer problemlerin çabucak çözüme ulaşabilirliğini kontrol etmek için kullanılan tekniklerin (2.5) gibi tipik çözümsüz problemlerin her bir aşamasında ortalama olarak 2 den az sayıda iterasyon yapılması yetmektedir. (Tahmin amacı kullanmanın bir çok avantajları vardır. Özellikle, bu biçimde bulunan değer ile düzeltici ile bulunan değer arasındaki fark, yerel yuvarlatma hatalarının tutarlı bir biçimde tahmin edilebilmesi için bir araç işlevini göstermektedir).

Çözümsüz problemlerin en son geliştirilen teknikler kullanılarak yapılan çözümlerde geçen sürenin kısaltılması açısından problemin doğrusal nitelikte olmasının

belirgin bir etkisi yoktur. Bu durum, doğrusal denklemlerin çözümü için daha sağlıklı yöntemlerin geliştirilmesi gereğini göstermektedir, ancak öyle anlaşıyor ki bu durum aynı zamanda çözümsüz problemlerde doğrusal olmama özelliklerinin şimdiye kadar çok iyi ele alınmış olduğu anlamını da taşımaktadır.

Durağan durum gibi görülen koşullar için yapılan kabuller konusuna yeniden dönmek gerekirse, farzedelim ki, bunlarla ilgili aşağıdaki gibi bir eşitlik yazılabilir:

$$y' = f(x, y, z), \quad \varepsilon z' = g(x, y, z) \quad (2.6)$$

Burada çözüm komponentleri y ve z olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Bu tez kapsamında tanımlandığı gibi, geçiş yada sınırdaki dönemler hariç, ε değerinin küçük olması, εz çarpımının ihmal edilebileceğini göstermektedir ve böylelikle cebirsel nitelikte diferansiyel denklem çözümü söz konusu olabilecektir:

$$y' = f(x, y, z), \quad 0 = g(x, y, z) \quad (2.7)$$

Birçok fiziksel uygulamalarda ilgili bu tür kabul oldukça kolay (yani çözümsüz değildir) bir dizi diferansiyel denklem ve cebirsel denklem hazırlanmasına imkan verir. Ancak bu çok uygun olan durumda bile ortaya çıkabilecek hataların değerlendirilebileceği açık değildir. Çoğu kez, cebirsel sistemin sayısal yöntemlerle, çözümlenmesi gerekebilir. Çözümsüz problemlere has tekniklerden birinin (2.6) denkleminin doğrudan uygulanmaya kalkıldığında, bu (2.7) denkleminin çözümsüz bölgesindeki denklemlerin etkin bir biçimde çözülecektir. Bu durum εz küçük olduğunda, (2.6) nin ikinci denkleminin geriye doğru Euler yönteminin uygulandığında açıklıkla görülebilecektir:

Bu uygulama sonucunda elde edilecek olan eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\varepsilon}{h_n}(z_{n+1} - z_n) = g(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = 0$$

2.4. ÇÖZÜMSÜZ (STİFF) PROBLEMLER İÇİN YÖNTEMLER

Geriye doğru Euler yöntemi ve benzeri trapezoidal kuralı gibi teknikler, çözümsüz problemler için ilk geliştirilen tutarlı yöntemler olmuşlar, daha sonra da bunların kullanımı yaygınlaşmıştır. Her ne kadar simülasyon, kimya kinetiği, devre çözümleri, ve benzeri gibi spesifik uygulama alanları için çok sayıda yöntem geliştirilmiş olsa da, bunların sözkonusu bu alandaki değişiklikleri yansıtmada yavaş kalmış olması nedeniyle, adı geçen bu ilk tekniklerin halen daha kullanılmakta olduğu görülmektedir. Ancak son zamanlarda yapılan araştırmaların sonucunda daha yüksek dereceli denklemler kullanılmasını içeren yeni teknikler geliştirilmiştir. Yüksek dereceli yöntemlerin mükemmel düzeyde kararlı olduğu konusu her ne kadar apaçıkça da, bu konuda daha çok zaman harcamasının gerektiği, geliştirilen her bir teknik ile bu sefer başka güçlüklerin ortaya çıkmasından anlaşılmaktadır. Göreceli olarak çok az sayıda kaliteli ve genel kullanım alanı olabilen bilgisayar programlarının uygulamaya sokulduğu görülmektedir.

Genel ekstrapolasyon fikri uygulanarak geliştirilmiş Schryer [1] metodu, geriye doğru Euler formülünü kullanarak ardı sıra yinelenen iterasyon tekniğini kullanmaktadır. Böylelikle problemin derece gerekliliği karşılanmış olmaktadır. Lindberg [2] tarafından geliştirilen bir teknik de dördüncü dereceden bir yöntem uygulaması için tek zamanda orta nokta kuralı ile ekstrapolasyon yapılmaktadır. Ünlü Runge-Kutta metodunda kesin olmayan yöntemler kullanımı benimsendiğinde çözümsüz problemler için uygun nitelikte bir tekniktir. İntegrasyonlarda sabit formüller kullanımı yöntemi, bunlardan yoğun olanı otomatik olarak belirleyebilmektedir. Yine de, genel amaçlı metodlarda en çok geriye doğru Euler yöntemi kullanılmaktadır. Bu doğrultuda yakın bir zamanda Gear tarafından geliştirilen bir teknik bulunmaktadır. Bu birkaç kez bilgisayara uygulanmış ve belirli ilerlemeler kaydedilmiştir. Bu arada yaygın bulunan ve kullanılan biçimi, Hindmarsh'a

[1] N.L.Schryer, An Extrapolation step size Monitor for Solving Ordinary Differential Equation, The States of Art

[2] B.Lindberg, A Stiff System package based on the Implicit Midpoint Method

aittir. Bunun daha geliştirilmiş versiyonlarının olduğu ve Seet ve Kong [3] tarafından hazırlandığı söylenmektedir. Bu versiyonlar, geriye doğru Euler yöntemi ile Adams formüllerinin J Jakobien büyüklüğüne bağlı olarak belirlenen bir karışımı niteliğindedir ve böylelikle, çözümsüz olmayan problemler için bunlar Adams formüllerine benzemekte, ancak sıra çözümsüz problemlere gelince, sözkonusu karışımada Eulere geriye doğru diferansiyel denklemleri ağırlık kazanmaktadır. Benzer bir versiyon da Hindmarsh ve Byrne [4] tarafından hazırlanmıştır, burada çoklu geçiş bölgelerinin kullanıldığı problemler için uygun olduğu düşünülen ve çeşitli aşama değiştirme formülleri yer almaktadır. Bickart, Tendler ve Picel, kompozit çok aşamalı yöntemin alt gruplarını geliştirmişlerdir. Bu yöntemde bir dizi çok aşamalı formüller devreye girmekte ve bir dizi çözüm noktaları için simültane denklemler oluşturulmaktadır. Burada uygulanan yöntem, geriye doğru Euler diferansiyel formülleri ile tek aşama yönteminin genelleştirilmesi, bir başka biçimiyle, Runge-Kutta yönteminin genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Geriye doğru diferansiyel formüller, çözümsüz problemler için geliştirilen tekniklerin niteliği hakkında önemli bir noktaya işaret etmektedir: Daha önceki örneklerde gösterilen çözüm eğrilerinden de anlaşılabileceği gibi, Jakobien özdeğerleri bir hayali ekseneye yaklaşma eğilimi gösterirlerse, yüksek dereceli formüller kararsız olacaktır. Bu kararsız bölge, denklemlerin derecesinin artması ile birlikte büyür, ancak altıncı dereceden formüllerden sonrakiler, artık tümüyle kararsızdır. Tekniklerin çoğunda bu sınırlama yüzünden altıncı dereceden formüller kullanılmaz, oysa ki, bu derecedeki formüllerin sol yüzeylerinin önemli bir kısmı kararlıdır. Beşinci ve daha düşük dereceden formüller bu tür bir sınırlamadan pek fazla etkelenmezler, ancak bazılarınca zaman zaman bu durum, çok ciddi olabilir. Aynı zamanda geliştirilen tekniğin karakteristiğinin bilinmesi ve eldeki sorunların çözümüne yönelik bir dizi yöntem çeşitine sahip olunması gerekir.

[3] R.D.Skeel and A.K.Kong, Blended Linear Multistep Methods, Dept. of Computer Science, University of Illinois, Urbana

[4] A.C.Hindmarsh and G.D. Bryne, An Experimental package for the Integration of Ordinary Differential Equation, Lawrence Livermore Laboratory

Kesin olmayan formüller içeren Runge-Kutta yöntemi, yüksek dereceden geriye doğru diferansiyel formüllerinden kaçınır, çünkü bunlar tüm bir sol yüzey boyunca kararlı olabilirler. Ancak, bu ek kararlılığın da bir pahası vardır. Çözümlemesi gereken denklem sistemi iki yada daha fazla katı çoktur ve bunun anlamı, bir dizi büyük sistemler için aşırı birikme demektir. Bu teknik, geriye doğru diferansiyel yöntemine dayalı yöntemlere kıyasla daha uzun aşama içerir. Ancak bazı hallerde, uzun bir aşamada düzgün ve çözümsüz bölgeden çok hızlı değişen geçiş bölgesine geriye döndüğünde çözümlerin niteliği değişmeye başlar ki o zamana kadar yapılanlar boşa gitmiş olur. Önleyici etkisi olan faktörler kullanılmasına karşın buna belirli ölçüde kompozit çok aşamalı formüller neden olur. Bu durum, çok uzun bir temel aşama nedeniyle iyice kötüleşen ekstrapolasyon tekniğinde çok daha belirgin duruma gelir.

İyi bir teknik, ilk önce kullanacağı aşamanın büyüklüğünü, dolayısı ile x_n i belirler. Kullanıcı, yalnızca bu x_n noktasındaki sonuçlara razı gelirse, bunun integrasyon etkinliği üzerinde bir etkisi olmaz. Ancak kullanıcı, diğer noktalardaki çözümleri de hesap etme durumundadır, bu ise mümkün olmayabilir. Yeterli sayıda integrasyon noktaları varsa, işin çok kapsamlı oluşu bir engeli oluşturur. Gerekli hassasiyetin enterpolasyon ile elde edilebileceği yeterli sayıda integrasyon noktası söz konusuysa, işin maliyeti düşük ve bunun kullanıcı üzerindeki etkisi az olur. Gerçekte, geriye doğru diferansiyel formüllerine kurulu her teknikte türevler ve bölünmüş fark enterpolasyon maliyetinin en az olacağı biçimde seçilmiştir. İyi teknikler, kullanıcı için enterpolasyon alt teknikler hazırlarlar. Öte yandan, tekniklerden ara noktalarda entgrasyon yapılması gerekirse, özellikle uzun aşamaların ve kesin formüllerin söz konusu olduğu Runge-Kutta ve ekstrapolasyon gibi tekniklerde bunun maliyeti yüksek olur.

Çözümsüz problemlerin bir Jakobiene dayalı doğrusal sistemlere dayandırılmış aşamalar biçiminde ele alındığında çözümlerinin oldukça kolay olduğunu görmüş bulunuyoruz. f fonksiyonunun N bileşeni vardır, ancak Jakobiende ise N^2 bileşeni vardır. Orta büyüklükte bile olsa, genel bir problemde, analitik olarak bir Jakobi-en bulmak programcı için bir hayli zordur ve kısmi türevlerin doğru bir biçimde

elde edilebileceğini söylemek zordur. Bu nedenlerle, genel amaçlı teknikler için, Jakobienin sayısal diferansiyel yöntemlerle belirlenmesi kaçınılmazdır.

Bir Jakobienin değerlendirilmesi, çözüm işleminin en zor kısmıdır ve bu, her ne kadar, iyi tekniklerde, her seferinde yapılmaya çalışılıyor olsa da yine her seferinde başarısızlıkla sonuçlanmaktadır. Bu konudaki maliyeti azaltmanın tek yolu, her bir problemin özel yapısını ele alıp değerlendirmektir. Normal olarak, orta-büyük çaptaki problemler yelpazesi içinde çok zayıf birleşmeler vardır ve bu nedenle de kısmi türevler sıfırdır, denklemlerde kısmi türevler veren doğrusal terimler genellikle bulunmakta ve fonksiyonlar, özellikle çok büyük sistemlerde genellikle basit olmaktadır. Bu olanaklardan yararlanarak sayısal diferansiyel yerine analitik diferansiyel kullanmak ve her ne kadar ilkinde ilk başlarda belirli güçlükler yaşanmış olsa da, sonunda işin çok daha kolay olacağını bilmekte büyük yarar vardır. Uygulama paketleri ile ilgili olanların özellikle bu olanağı iyi değerlendirmeleri gerekir, çünkü bu alanda belirli bir denklem grubu için bir dizi sınırlamalar söz konusudur. Bunu örnek olarak, bir kimyacı için çok rahat ve doğal gelen bir yöntem ile tanımlanmış bir kimya kinetiği problemi gösterilebilir. Bu problemde, analitik olarak belirlenmiş Jakobienlere dayalı bir dizi kolay diferansiyel denklemler geliştirilecektir. Sembollerin kullanımı ile geliştirilmiş yazılım dilleri, Jakobienlar üretilmesi için çok yararlı araçlar olabilir. Kullanılan yazılım programının etkinliğine bağlı olarak geliştirilen analitik türevler, bir diferansiyel çözüme kıyasla daha kolay yada daha zor olabilecektir.

Analitik yöntem kullanılarak Jakobienlerin belirlenmesinin tercih edilmesinin nedenlerinden biri, diferansiyel sırasında ölçek konusunda sorun çıkması ve bunun sonucunda yetersiz düzeyde Jakobienler elde edilmiş olmasıdır. Bununla ilgili iyi diferansiyel algoritmalar geliştirilerek bu tür sorunların üstesinden gelmeye çalışmaktadır. Her ne kadar, yazılımlar, kötü belirlenmiş Jakobienlerle da çalışacak olsa da, ölçek sorununun net etkisi, analitik Jakobienlere kıyasla ölçek probleminin maliyeti arttırması ve diferansiyel güvenirliliğini azaltmasıdır.

Bu konuda, kullanıcı için bir ara çözüm, problemin yapısı ile ilgili bilgilere ulaşılması ve yazılım programının, buna uygun diferansiyel hesaplamalarında kul-

lanılacak Jakobienleri oluşturmaktadır. Curtis, Powell ve Reid tarafından geliştirilen bir kestirme yol, niteliği bilinen problemlerin diferansiyel maliyetlerinin düşürülmesinde yardımcı olabilir. Bununda ilgili basit ve oldukça genel olan bir örnek bağlı sistemlerdir. Bu teknik ile sistem, yarı bant genişliği m olan bir bantla bağlanmakta, j . denklemin her bir i . elemanı $|i - j|$ değerinin m den büyük olduğu sürece y_1 değişkenleri bulundurmamaktadır. Bu tür bir sistem için Jakobienler, bu bant içindeki ana diyagonal boyunca sıfırdan farklı değerlere sahip olmaktadır. Buradan da, m yarı bantı içinde yer alan bir Jakobien, sistem ne kadar büyük olursa olsun, f , $2m+1$ ekstra değerlendirmeleri için diferansiyel denklemlerin oluşturulması yetmektedir. Açıktır ki, bu m özellikle N ile kıyaslandığında çok küçük değilse, bilgisayar zamanında çok büyük tasarrufa yol açmaktadır. Büyük çözümsüz problemlerle ilgili olarak birikme en büyük sorunlardan biri olarak ortaya çıkmaktadır, çünkü her biri için doğrusal denklem sistemi çözümü gerektiren Jakobien veya bununla yakın ilişkili matrisin saklanması gerekmektedir. Kesin olmayan formüller içeren Runge-Kutta yönteminin en önde gelen dezavantajlarından birisi, her bir aşamada çözülmesi gereken doğrusal olmayan denklemlerin sayısının, denklem sayısının belli bir çarpanı ile ifade edilecek kadar çok sayıda olmasıdır ve bu çarpan da sistemin derecesine bağlı olarak büyük olmaktadır, çünkü Jakobienlerin sayısı, bilinmeyen değişken sayısının karesi ile artmaktadır. Orta büyüklükte bir sistem içi Colode tarafından geliştirilen bir teknik ile yapılan çözümlemede, programı bilgisayarın hafızasında tutmak mümkün olmadığı için kesintiye uğramıştır. Çözümsüz olmayan problemlerle çalışırken, denklemlerin değerlendirilmesine yönelik olanların dışında kalan tüm maliyetler göz ardı edilmektedir. Bu durum, çözümsüz olanlarda böyle değildir, çünkü ard arda gelen doğrusal sistemlerin çözülmesi, çoğu zaman toplam maliyetin önemli bir kısmını oluşturabilmektedir. Sistemlerin etkili olarak çözümü üzerinde duracağız, ancak, ilk önce çözülmesi gereken sistemlerin sayısına göre yöntemlerin etkinliğinin değişmekte olduğuna değinmek gerekir. Bu problemin kaynaklandığı yer, iterasyon matrisi ile aşama büyüklüğü arasındaki ilişkinin niteliği kesin değildir bu nedenle de aşama büyüklüğünün değiştirilmesi gerektiğinde herşeyin yeniden ele alınması gerekmektedir. Bu nedenle

doğrusal sistemlerin çözümü için gereken olağanüstü çabalar nedeniyle belirli algoritmaların kullanılması gerekir. Örneğin bir ekstrapolasyon yönteminde kabul edilen Jakobien tüm aşama için kullanılacak olsun, bu durumda örneğin geriye doğru Euler yöntemi gibi bir yöntem kullanılacak ve burada her seferinde daha küçük bir aşama büyüklüğü ile hesaplamalar yapılacak, her bir aşamada elde edilen sonuçlar, bir sonraki aşamada değerlendirilecektir. Buradaki yapılan her bir tarama, alt aşamasında sürekli olarak yeniden çözümlenmesi gerekecek farklı bir doğrusal sistem anlamını taşıyacaktır. Benzer nedenlerle doğrusal çözümlemelerin yoğun olduğu başka örneklerde de aynı kompozit çok aşamalı Runge-Kutta yöntemleri gibi çeşitli kesin çözümler arasında bir ortalama esasına dayanan ve yerel tahmin hatalarının yaratılmasına yönelik yöntemler kullanacaklardır.

Küçük-orta büyüklükteki sistemler için, matris faktör eliminasyonu kullanılabilir ve sonra da bu faktörleri gerekli iterasyonları etkin bir biçimde kullanabilir. Orta-büyük boy problemlerin çözümü için yeniden problemin yapısal niteliğine başvurmak durumundayız. Bant yapısı en kolay çözümlenebilecek olandır. Bunun nedeni, bir matris bandı faktörleri, aynı zamanda bir bant biçiminde oldukları için bunları hesaplayıp saklamak sıfır olma olasılıkları olanlar dışında çok kolaydır. Bant genişliği göreceli olarak küçükse, yani $m \ll N$ ise, biriktirme gerekliliği çok azalır ve bu da doğrusal sistemlerin çözümünü bant şekli kavramını değerlendirerek büyük ölçüde kolaylaştırır. Daha büyük bir genelleme kapsamında, bir elemanlarının çoğu sıfır olan bir matris **dağınık** olarak adlandırılır. Bu durum, birçok büyük çözümsüz problemler için tipiktir. Dağınık matrislerin sıfır değerlikli olanların dışındakileri saklayacak yöntemler vardır ve bu tür bir eliminasyon ile sadece bazı sıfır olmayan elemanların seçimi mümkün olabilmektedir. Bu tür tekniklerin hafızaya alınması için belli bir kapasite ile bu eliminasyonu yapmak için zaman gerektirmektedir, böyle olduğunda da matris içindeki elemanların ancak çok az bir kısmı sıfırdan farklı olmadıkça hafıza ve zaman olarak bir avantajları kalmaz. Genellikle görülen durum budur. Bazen ele alınan problemler o denli büyük olabilmektedir ki, eliminasyon yöntemi kullanma yerine zorunlu olarak doğrusal sistemler için iterasyon yöntemleri kullanılmak durumunda kalınmakta-

dır. Bu konu, halen üzerinde yoğun araştırma yapılan alanlardan birisidir ve yakın bir zamanda daha genel problemlerle ilgili iterasyon yöntemlerinin geliştirilmiş olduğuna tanık olunabilecektir. Problemlerin yapısal özelliklerine yer verildiği birkaç tekniğe rastlanmaktadır, ancak bunlar da tezin başında bahsedilenler kadar kolay bulunan ve çözümü rahat olan yöntemler gibi görünmemektedir. Buna istisna olanlardan biri, Hindmarsh tarafından geliştirilen ve daha önce anlatılan bantlı sistemlere özgü bir diferansiyel yöntemi kullanılan tekniktir. Bu tür tekniklerin daha önceki biçimleri dağınık tablo yaklaşımıdır. Bu da Hachtel ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır ve anlaşıldığı kadarıyla, elektronik devre tasarımı paketi içinde IBM şirketinin kendi özel ürünü niteliğindedir.

Çoğu zaman olduğu gibi, büyük problemler için bir fonksiyonun ve hatta bir Jakobienin değerlendirilmesi çok da pahalı değildir, asıl masraflı olan, geniş doğrusal cebir hesaplamaları ile bilgi transferidir. FORTRAN programı bilgi transferlerinin ve hesaplamalarının birbirlerine olan girişimleri özelliğinden pek yararlanamamakta, bunun yanında ana iş merkezine bağlı yardımcı makineler ve vektör makineleri olanaklarını tam anlamıyla değerlendirememektedir. Bununla birlikte, FORTRAN tarafından çalıştırılabilen assembly dili ile hazırlanmış modüller giderek yaygınlaşmakta ve bu biçimde temel görevlerin yapılabilme olanakları giderek daha fazla yaygınlık kazanmaktadır. Bu konuda yapılan bir değerlendirmede, CDC 7600 sistemi ile doğrusal bir sistemin çözümlenmesinde bir matrisin ileri ve geriye doğru yerine koyma yöntemi ile dağıtılması işlemine yönelik olarak hazırlanan yeni bir yazılım programının karşılaştırmalı değerlendirilmesine yer verilmektedir. Yalnızca üç denklem için FORTRAN programları doğrusal cebir modüllerindeki aşırı yük nedeniyle biraz daha avantajlı olmakta, ancak daha özel olarak hazırlanmış çevrimler, hemen öne geçmekte ve 200 denklem için en az üç katı avantajlı olmaktadır. (Buradaki çözümlerde kullanılan çevrimler, yukarıda bahsedilen ayrıştırma (decomposition) tekniğinin daha ötesinde etkili olmaktadır).

Problemlerin çoğunda, aşağıdaki şekilde bir dizi kesin diferansiyel denklemlere ulaşılır;

$$My' = Ky + p(x) \quad (2.8)$$

burada M ve K matrisleri y , x ve hatta y' ile bağımlı olabilirler. Bu tür denklemleri düzeltmek için Newton metoduna benzer iterasyonlar kullanıldığında

$$y' = M^{-1}[Ky + p(x)], \quad (2.9)$$

şeklini alır. Açık bir biçime sokmak ne gerekli ne de istenebilir bir durumdur. Ancak İntegratör için geriye doğru Euler yöntemi kullanıldığında;

$$F(y, y', x) = 0 \quad (2.10)$$

tipinde bir denklem elde edilir. y'_{n+1} terimini elemine etmek için $x = x_{n+1}$ konduğunda,

$$F\left(y_{n+1}, \frac{y_{n+1} - y_n}{h}, x_{n+1}\right) = 0$$

elde edilir ki bu da y_{n+1} için çözümlenecektir.

(2.10) eşitliğini kullanmakla doğrudan doğruya büyük dağınık problemlerle ilgili olarak çok kapsamlı aritmetik işlemler ve hafıza tasarrufu sağlanmış olabilir. M ve K değerleri sabit olduğunda, bu durum (2.8) ve (2.9) eşitliklerinden açıkça anlaşılacaktır. (2.8) eşitliğinin Jakobieni $K - M/h$ olacaktır ki bu dağınık bir matristir. (2.9) nin Jakobieni $M^{-1}K - I/h$ olacaktır ki normal olarak bu yoğun bir terimdir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde çok önemli bir yeri olan problemin özünde çözümlü yada çözümsüz oluşu sorunu, aşama büyüklüğünün ve kullanılacak teknikteki derecenin belirlenmesinde otomatik olarak devreye girer. Gerçi temel strateji çok açıktır: her ikisi de, tüm integrasyon limitleri arasında yapılacak çalışmanın miktarını azaltmaya yönelik olarak belirlenmiş olmaları gerekirse de, pratikte bu durum hiç de böyle olmamaktadır. Burada bütün problem, henüz daha bu parametrelerin seçiminde bize yol gösterecek tutarlı bir kuramın geliştirilememiş olmasıdır, o zaman da, bu konuda var olan teoriler, karşılaşılan problemlere uydurulmaya çalışılmaktadır, ama eldeki tekniklerin karşılaşılan sorunun niteliğine göre ne kadar uyumlaştırılmaya yada yeniden düzenlenmeye çalışılırsa çalışılsın, her seferinde de genellikle tam bir uyumluluk sağlamak mümkün olmamaktadır.

Bu nedenledir ki, herhangi bir teknik içine birkaç formülasyon ekleyip bir başka teknik ile aynı biçimde gelinebilecek yere gelmek mümkündür. Bütün bunlardan çıkartılabilecek bir ders var, o da, mümkün olduğu ölçüde eldeki teknikleri çok iyi değerlendirilip üzerinde enine boyuna çalışılmış teknikler kullanılmalı ve mümkün olduğu ölçüde de bu tür teknikler üzerinde bir değişiklik yapılmamalıdır.

Değişken değerli tekniklerin sözkonusu olan problemlerin çözümünün olası özelliklerini göz önüne alarak belirli formülasyonlar adapte ettikleri ve bunda da genel kullanım amacıyla oldukça etkili sonuçlar alındığına tanık olunmaktadır. Bu tür tekniklerin hesaplamaların başlangıcında göreceli olarak verimsiz oldukları, ancak problemin ilişkilendirilmesi açısından gerekli derecelenmeyi yaptıkları anlaşılmaktadır. Genel olarak bu, toplam yapılması gereken çabanın önemsiz bir kısmını oluşturmaktaysa da, bu konuda bazı istisnaların da olduğu görülmektedir. Alev kimyası ile ilgili olarak ele alınan bir problemde, bir tarafta gaz akımını anlatmak için kısmi diferansiyel denklemler yer almakta, öte yandan da akış içindeki reaksiyonlar sıradan diferansiyel denklemlerle anlatılmaya çalışılmaktadır. Bir durağan duruma benzer bir kabul ile gaz parametrelerinin, belirli bir zaman aralığı için sabit olduğu kabul edilmekte, bu süre içinde ise sıradan diferansiyel denklem çözümü yapılmaktadır. Bu biçimde elde edilen değerler ile, belli bir zaman aralığı yada bir sonraki zaman bölgesi içinde kısmi diferansiyel denklem çözümleri yapılmaktadır; bu ve bundan sonraki ayrıntılar gerçekte konumuzla da ilgili değildir. Burada verilmek istenen, her bir zaman ögesi sonucunda, sıradan diferansiyel denklemlerin değişiyor olmasıdır. Geriye doğru diferansiyel yöntemine dayanan tekniğin bu gibi durumlarda çok kullanışsız olduğu görülmektedir, çünkü bunlar, her bir zon için yeniden başlatılmak durumundadır. Oysa ki, bir zondan diğerine değişen pek bir şey yoktur (aksi taktirde bunların kısaltılması mümkün olabilecektir). Bu nedenledir ki, belli bir zon için elde edilen bir sonucun bir sonraki zon için bir önem taşıması için, her iki zonda da aynı formülün kullanılması zorunludur. Sabit derece yönteminin bu gibi durumlar için çok yararlı olduğu anlaşılmaktadır ve sınırlı da olsa, şimdiye kadar bu konudaki deneyimler de bunu doğrulamaktadır. Belli bir dereceye kadar, yüksek derecelere olanak tanıyan ekstrapolasyon yöntemlerinin

de faydalı olması kuvvetle muhtemeldir, çünkü bir aşamanın derecesi ve uzunluğu, sözkonusu zaman zonunun uzunluğu yanında ikinci planda kalacaktır. Düşük derece ve küçük aşama boyutu, basit bir dereceye sahip olan bir teknik ile daha kolay elde edilebilecektir.

Otomatik aşama ve derece denetiminin istenmediği bir durum vardır: o da bir problemin kararlı bir sonuç için sürekli olarak, örneğin kararlı bir parametre elde edilmesi için integrasyon yapılması durumudur. Burada, her bir integrasyonda aynı aşamalar ve formüllerinin kullanılması tercih edilmektedir. Bu yapıldığında da, sayısal çözümler, parametre değerlerine giderek daha fazla dayanır duruma gelmektedir. Ancak, bu durumda bile, ilk integrasyon için bir aşama ve formül otomatik olarak seçilmesinden sonra, ya diğer integresyonların bu doğrultuda (ve büyük olasılıkla da aynı Jakobien ve çözümlerler kulmanılarak) ya da bu aşama sonuçlarını bir sonraki integrasyonlar için kullanmak üzere saklanması arzu edilmektedir.

2.5. BİR DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜLMESİ

Bir diferansiyel denklemin Sayısal olarak çözülmesinin birçok anlamı vardır. Bazen, tek bir nokta için uygun bir çözüm aranır. Çoğu zaman birden çok nokta için bir dizi çözüm aranmakta ve bir çözüm tablosu oluşturmak istenmektedir. Bazı durumlarda ya sürekli bir kabullere dayalı çözümler eğrisi yada gerçek çözüme eşdeğer olabilecek nitelikte bir tablo aranmaktadır. Ancak şu kadarını söylemek gerekir ki, çözümün nerede ve ne denli sık aranmasının çözüm maliyeti üzerinde etkisi çok büyüktür. Burada, en etkili yöntemlerden biri, kullanılacak tekniğin seçilmesidir, bunun içinde de, arzu edilen ortalama bir çözüm için seçilen teknik içinde, göreceli olarak söylenmek gerekirse, ne dereceye kadar aşama seçilmiş olması önem taşır. Örneğin, yüksek dereceli açık olmayan bir Runge-Kutta yöntemi ve ekstrapolasyon tekniği, geriye doğru diferansiyel yöntemi ile elde edilebilecek olandan çok daha ötedeki aşamalara ulaşabilir. Bunlardan ikincisinde, aşama yöntemi ile belirli bir noktada kesin sonuç elde etmektedir. Seçilen tekniğe uygun doğal aşama büyüklüğünün ötesinde daha sıklıkla bir çözüm aranmaya gidilmesi duru-

munda, seçilen yöntemin etkinliği birçok nedenler yüzünden azalacaktır. Sadece birkaç noktada çözüm aranıyorsa, ve özellikle doğal olarak çıkan noktalar uygun mütalaa ediliyorsa, sonuca varmak bir sorun teşkil etmeyecektir. Geriye doğru diferansiyel formülleri gibi bazı yöntemler, çok rahatlıkla çözümlenebilecek sürekli çok terimli çözümler sağlamaktadır. Ancak, bu her teknik ile mümkün olmaz. Bu nedenledir ki, istenilen sonuç ile ilgili beklentilerin ne olduğunun açıklıkla belirlenmesi, buradan kalkılarak hangi yöntem ve tekniğin kullanılmasının yararlı olacağı konusunda bilgili olmak önem taşır.

Kullanıcının, hassasiyet olarak neyi anladığı da sonuçlar üzerinde çok etkili olur. Bu konuda, genellikle karşılaşılan bir durum, integrasyon sonucundan elde edilen en yüksek (mutlak) değere kıyasla yapılan kabullerin sonucu çıkan hatayı karşılaştırmaktır. Bir başka değerlendirme ise, mutlak hata ile çözümün büyüklüğüne kıyasla ortaya çıkan hataların bir araya getirilmesidir. Çözümün her bir bileşeni için olan hata toleranslarının ne olduğunun belirlenebilmesi oldukça önemlidir çünkü çözümsüz problemler için bu tür bileşenlerin ölçeklerinin belirlenmesi birbirinden çok farklı olabilmektedir. Çözümsüz problemlerin hemen hemen tümünde, çözümlerin çok farklı özellikler gösterdiği geçici nitelikte olan kısımları vardır. Yapılan bir araştırma, kullanıcıların yaklaşık yarısının, bu hızlı değişen bölge içinde, yavaş değişen bölge için olduğu gibi çok hassas sonuçlar peşine olduğunu göstermiştir. Bunun yapılabilmesi için, uygun hata kontrol tekniklerinin uygulamaya sokulabilmesi gerekir ve açıkça anlaşılacağı gibi, geçici bölge içinde, aşama büyüklüklerinin belirlenmesinde kararlılık faktöründen çok hassasiyet etkili olmaktadır. Bunun doğal sonucu olarak da, problemlerin geçici dönemleri ile ilgili çözümler, birçok teknikler için tüm integrasyon maliyetlerinin önemli bir kesitini oluştururlar. Ağırlıklı olarak uzun vadeli dönem ile ilgilenilmiş olsa bile, geçici dönem ile ilgili çözüm yine de uzun vadeli kısma ulaşıldığına ilişkin bilgilerin elde edilebilmesi ve elde edilecek çözümlerin güvenilirliği için gerekli olur. Burada, tüm hataların giderilmiş olduğu (geçici dönemin bittiği) ve denge koşullarına ulaşıldığı konusunda yeterli bilgi edinilebilmiş olsa, geçici dönem ile ilgili hesaplamaların da çok ekonomik olacak biçimde kabaca yapılabilirdi.

Tekniklerin çok yanlış kullanımlarına bir örnek de ilk aşamalara ilişkin çözümlerin kısa sürede ortadan yok olup sıfırlanmasına karşılık çok hassas çözüm aranmak istenmesidir. Bu tür girişimler, beklenenin çok ötesinde hatalı ve bir o kadar da anlamsızdır. Bu gibi durumlarda, çözüm aranılan bir değer, mantıklı bir seviyenin altına düştüğünde kullanıcının artık onunla ilgilenmemesi ve onun üzerinde boşuna zaman kaybetmemesidir. Uygun bir hata kriteri seçimi, bu gibi durumların önüne geçebilir. Kuşkusuz, bazı durumlarda, fiziksel olmayan büyüklüklerin sıfırın da altında, eksi değerliklerde yoğunlaşması söz konusu olabilir. Genel olarak bu gibi durumların pek de üzerinde durulmaması gerekir, ama burada, bu tür değerler üretildiğinde, diferansiyel denklemlerin kararsız nitelik kazanmaya başladıklarını da görmek gerekir. Buna ilişkin olarak kitle hareketi kinetiği üzerine yapılan bir değerlendirmeye bakılabilir.



BÖLÜM III

3.1. EULER METODU

Bir stiff diferansiyel denkleminin nümerik çözümünün zorlukları, Euler yöntemi kullanılarak basit bir örnek üzerinde gösterilebilir. Euler metodu Taylor açılımının ilk iki terimi ile aynıdır ve başlangıç değer problemi

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Bu ifade aşağıdaki denklem kullanılarak geliştirilir.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad (n \geq 0) \quad (3.2)$$

Euler metodunu şu basit örnek ile ele alalım;

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Euler metodu ile problem aşağıdaki nümerik çözüme ulaşır.

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_n = (1 + h\lambda)x_n \quad x_0 = 1 \quad (3.4)$$

Bu denklem n.adımda

$$x_n = (1 + h\lambda)^n \quad (3.5)$$

şeklini alır. Diğer yandan (3.3) denkleminin gerçek çözümü

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (3.6)$$

dir.

Eğer $\lambda < 0$ ise (3.6) denklemini olarak eksponansiyel olarak ıraksar. t sonsuza giderken 0 a yaklaşır. (3.5) denklemini nümerik çözümü ancak ve ancak $|1 + h\lambda| < 1$ iken 0 a yaklaşır. $1 + h\lambda > -1$ ve $\lambda < 0$ olduğunda $h > 0$ ve $h < -2/\lambda$ seçmek zorunda kalırız.

Örneğin; eğer $\lambda = -20$ ise $h < 0.1$ almak zorunda kalırız. Başlangıç değerden hemen sonra çözümün sifıra yakınsamasına rağmen $t = 0$ iken $x = 1$ olur.

$t \geq 1$ iken

$$x(t) = e^{-20t} \leq 2.1 \times 10^{-9}$$

olur.

Nümerik çözümün bir bölge içerisinde küçük adımlar ile ilerlemesi gerekirken çözümün yapısı büyük adımlar ile ilerlemeyi gerektirebilir. Bu durum Stiff olma şartının en önemli göstergesidir.

e^{-20t} şeklindeki geçici fonksiyon hemen sıfıra ıraksar. Bu geçici fonksiyonun nümerik çözümünün, geçici etkileri ihmal edilebilir oluncaya kadar küçük adım aralıkları ile çözülebilir olduğunu kabul edeceğiz.

Örnek: $y' = -10(t-1)y$ $y(0) = e^{-5}$ $h = 0.1$ için $[0, 2]$ aralığındaki değerleri Euler yöntemi ile hesaplayınız.

Çözüm:

İntegral aralığını $h=0.1$ için 21 eşit parçaya ayırırsak

$$t_0 = 0, t_1 = 0.1, \dots, t_{20} = 2.0$$

şekline olur.

$$y_0 = e^{-5}$$

$$y_1 = y_0 + hy' = y_0 + (.1)[-10(t_0 - 1)y_0]$$

$$y_2 = y_1 + (.1)[-10(t_1 - 1)y_1]$$

bu şekilde hesaplamaya devam edersek gerçek çözüm

$$y(t) = e^{(-5(t-1)^2)}$$

şeklinde olur.

Aşağıdaki tablo ile y_k ve t_k değerlerini gösterebiliriz.

t_n	y_n	Hata
0.1	0.0134	0.004
0.2	0.0256	0.015
0.3	0.0461	0.040
0.4	0.0784	0.087
0.5	0.1254	0.161
0.6	0.1880	0.261
0.7	0.263	0.374
0.8	0.342	0.477
0.9	0.411	0.541
1.0	0.452	0.548
1.1	0.452	0.499
1.2	0.406	0.412
1.3	0.325	0.312
1.4	0.223	0.222
1.5	0.137	0.150
1.6	0.068	0.097
1.7	0.003	0.059
1.8	0.0082	0.033
1.9	0.0016	0.016
2.0	0.0002	0.007

Tablo 1.

3.2. DEĞİŞTİRİLMİŞ EULER METODU

Değiştirilmiş Euler metodu aşağıdaki denklem ile ifade edilebilir.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad (n \geq 0) \quad (3.7)$$

Bu metod (3.1) ile ifade edilen örnek denkleme uygulandığında

$$x_{n+1} = x_n + h\lambda x_{n+1} \quad x_0 = 1 \quad (3.8)$$

ifadesini elde ederiz. Bu da bize

$$x_{n+1} = (1 + h\lambda)^{-1} x_n \quad (3.9)$$

ifadesini verir. n . adımda

$$x_n = (1 + h\lambda)^{-n} \quad (3.10)$$

elde ederiz. $\lambda < 0$ iken nümerik çözüm gerçek çözüme benzeyerek

$$|1 - h\lambda|^{-1} < 1 \quad (3.11)$$

şeklini alır. Bu bütün pozitif h değerleri için doğrudur.

3.3. İKİNCİ DERECE TÜREV METODU

$$y'(t) = f(y(t)) \quad y(0) = y_0 \quad 0 \leq t \leq b$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Adams formülleri ile çözmeye çalışırsak,

$$y(t_n) = y(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt$$

$t = t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_0 = 0$ için y_{n-j} den $y(t_{n-j})$ gerçek çözümünü ve $f_{n-j} = f(y_{n-j})$ den $f(y(t_{n-j}))$ yayını elde ederiz. h_n adım uzunluğu için t_{n-1} den t_n e kadar çözümü geliştirirsek, integral $P(t)$ Hermite polinomu ile çözüldüğünde en küçük dereceli değer tek şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} P(t_{n-j}) &= f_{n-j} \\ P(t_n) &= f(y_n) \\ P'(t_n) &= f'(y_n) \end{aligned} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

Bu da bizi 2. derece çok adım yöntemine götürür.

$$y_n = y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} P(t)dt \quad (3.12)$$

Bu formül daha çok şu şekilde yazılır.

$$y_n = y_{n-1} + h_n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_{n,j} f_{n-j} + h_n \beta_{n,0} f(y_n) + h_n^2 \gamma_{n,0} f'(y_n) \quad (3.13)$$

Burada $\beta_{n,j}$ $j = 0, 1, \dots, k-1$ ve $\gamma_{n,0}$ katsayıları, h_{n-j} $j = 0, 1, \dots, k-1$ adım uzunluklarında, homojen fonksiyonun sıfıncı katsayılarıdır. Bu tam lineer diferansiyel denklem herhangi bir iterasyon metoduyla çözülebilir. $y_{n,0}$ başlangıç değeri için aşağıdaki formülle çözülebilir.

$$y_{n,0} = y_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} P_0(t)dt \quad (3.14)$$

Burada $P_0(t)$ bilinen noktalarda interpolate olan Hermite polinomunun en küçük dereceli katsayısıdır.

$$P_0(t_{n-j}) = f_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$P_0'(t_{n-1}) = f'_{n-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{t=t_{n-1}} f_{n-1}$$

(3.12) deki denklem y_n den y_{n-1} e kadar çözmektense, $y_{n,0}$ daki değerinin bulunması dahja kolaydır.

$$f_{n,0} = P_0(t_n), \quad f'_{n,0} = P_0'(t_n) \quad (3.15)$$

(3.12) ve (3.13) den

$$y_n = y_{n,0} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (P(t) - P_0(t)) dt \quad (3.16)$$

elde ederiz. Şimdi $P_0(t)$ yi $f_{n-1}, f'_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k}$ ifade ettiğimiz gibi $f_{n,0}, f'_{n,0}, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k+1}$ ifade ederiz. Böylece $P(t)$ ve $P_0(t)$ eşit olduklarından aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} P(t) - P_0(t) &= \frac{q_{k-1}(t)}{q_{k-1}(t_n)} (f_n - f_{n,0}) \\ &+ \frac{(t - t_n)q_{k-1}(t)}{q_{k-1}(t_n)} \left[(f'_n - f'_{n,0}) - \frac{q'_{k-1}(t_n)}{q_{k-1}(t_n)} (f_n - f_{n,0}) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Burada

$$q_j(t) = \prod_{i=1}^j (t - t_{n-i}) \quad j \geq 1,$$

$$q_0(t) = 1$$

$$g_i(j) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t - t_n)^{j-1} q_i(t) dt$$

$$d = \frac{q'_{k-1}(t_n)}{q_{k-1}(t_n)} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{t_n - f_{n-j}}$$

(3.16) ve (3.17) dan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$y_n = y_{n,0} + h_n \beta_{n,0} (f_n - f_{n,0}) + h_n^2 \gamma_{n,0} (f'_n - f'_{n,0}) \quad (3.18)$$

Burada

$$h_n \beta_{n,0} = \frac{1}{q_{k-1}(t_n)} [q_{k-1}(1) - d \cdot q_{k-1}(2)]$$

ve

$$h_n^2 \gamma_{n,0} = \frac{q_{k-1}(2)}{q_{k-1}(t_n)}$$

dir.

Herbir t_n noktasında (3.18) eşitliği herhangi bir iterasyon metoduyla y_n için çözülürse, çözümler t_{n-1} den t_n e kadar geliştirilebilir. $h_n \beta_{n,0}$ ve $h_n^2 \gamma_{n,0}$ katsayıları uygun bir şekilde çözülebilir. $g_i(j)$ terimi üçgen matris yardımıyla çözülebilir.

$$g_0(j) = -(-h_n)^{i/j} \quad j = 1, 2, \dots, k+2$$

başlangıç şartlarıyla başlayan ve herbir satırı bir önceki satırdan elde edilen ilişki

$$g_i(j) = (t_n - t_{n-i})g_{i-1}(j) + g_{i-1}(j+1)$$

şeklindedir.

Herbir satır bir öncekinden daha az eleman içerdiğinden katsayıları bulabilmek için sadece ilk iki satıra ihtiyaç vardır. (3.18) eşitliğinden $y_{n,0}, f_{n,0}$ ve $f'_{n,0}$ terimleri çeşitli interpolasyon polimomlarıyla çözülebilir.

Hermite polinomu 2. derece türev formülleri için kullanıldığından, sıradan bölünmüş fark formülleri yeterlidir ve peş peşe kullanılabilir.

Bölünmüş farklar

$$f[t_i] = f(t_i);$$

$$f[t_0; t_1; \dots; t_j] = \frac{f[t_0; t_1; \dots; t_{j-1}] - f[t_1; t_2; \dots; t_j]}{t_0 - t_j},$$

$$f[\underbrace{t_0; t_0; \dots; t_0}_{a+1}; \underbrace{t_1; t_1; \dots; t_1}_{b+1}; \dots; \underbrace{t_j; t_j; \dots; t_j}_{c+1}]$$

$$= \lim_{t'_i \rightarrow t_i} f[t_0, t_0^1, \dots, t_0^a, t_1, t_1^1, \dots, t_1^b, \dots, t_j, t_j^1, \dots, t_j^c]$$

Yaklaşık çözüm ile tam çözüm arasındaki $f(y_{n-j})$ açısını belirlemek için $f[t_0; t_0; \dots; t_1; \dots; t_j]$ notasyonunu kullanmamız gerekir.

Örneğin;

$$\begin{aligned}[f_n; f_n] &= f'_n \\ [f_n; f_n; f_{n-1}] &= \frac{1}{h_n} \left(f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n} \right)\end{aligned}$$

Bu notasyonu kullanarak

$$\begin{aligned}P_0(t) &= f_{n-1} + (t - t_{n-1})[f_{n-1}; f_{n-1}] + (t - t_{n-1})^2[f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2}] + \dots \\ &\quad + (t - t_{n-1})^2(t - t_{n-2})\dots(t - t_{n-k+1})[f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2}; \dots; f_{n-k}] \\ &= f_{n-1} + (t - t_{n-1} + h_n)[f_{n-1}; f_{n-1}] + (t - t_{n-1} + h_n)q_1(t)[f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2}] \\ &\quad + \dots + (t - t_n + h_n)q_{k-1}(t)[f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2}; \dots; f_{n-k}]\end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. (3.14) ve (3.15) den

$$\begin{aligned}y_{n,0} &= y_{n-1} + h_n f_{n-1} + \sum_{i=1}^{k-1} (g_i(2) + h_n g_i(1)) [f_{n-1}; f_{n-1}; \dots; f_{n-i-1}] \\ f_{n,0} &= f_{n-1} + h_n \sum_{i=1}^{k-1} g_i(t_n) [f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2} \dots; f_{n-i-1}]\end{aligned}$$

ve

$$f'_{n,0} = [f_{n-1}; f_{n-1}] + \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \left(h_n q'_i(t_n) + q_i(t_n) \right) [f_{n-1}; f_{n-1}; f_{n-2}; \dots; f_{n-i-1}] \right\}$$

elde ederiz.

S O N U Ç

Stiff diferansiyel denklemlerin üstesinden gelinmesi, genellikle pahalı bir uğraştır ve bu konuda karşılaşılabilecek zorluklar, seçilen yöntem ve teknikle ilgili olmaktan çok, çözüm sırasında öngörülen tolerans düzeyidir. Stiff diferansiyel denklemlerin kaynaklandıkları fiziksel olaylar, çoğu zaman çok hassas bir yaklaşımı gerektirmeyecek türdedirler çünkü daha başından temel değişkenler hakkında çok hassas bilgilere sahip olunamamaktadır. Bir araştırmada, bir yada iki basamaklı yuvarlatmaların oldukça genel kabul gören düzeyler olduğunu ortaya koymaktadır. Beş basamağa kadar hassasiyetin zorunlu olduğu ifade edilmektedir. Burada bahsedilen teknikler ve makinelerle yapılan genel çözümlerin içerdiği hataların kabul edilebilir olduğunu söylemek mümkündür. Bu noktada hemen belirtmek gerekir ki, halihazırdaki teknikler, yerel yuvarlatma hatalarını değerlendirebilmekte, ancak global hatalar için bir şey yapamamaktadır. Bu tez kapsamında bahsedilen güçlükler, birden çok nedenden kaynaklanmaktadır. Bunların başında, aşama kontrolü çevrimi gelmekte, bazı hallerde çözümün etkin olduğu alanı kaçırarak yada tümüyle göz ardı edecek kadar büyük aşamalar seçilebilmekte, kararlı nitelikte olan bir formül oldukça kararsız bir nitelik kazanarak çözümün etkisini giderek arttıran bir bileşenini göz ardı edebilmektedir. Stiff diferansiyel denklemlerin etkin bir biçimde çözülebilmesinde tutucu bir tolerans öngörüsü, hata değerlendirmesindeki ölçek konusunda özel dikkat gösredilmesi ve Jakobienlerin diferansiyeli, deneysellik ve sayısal sonuçların derinlemesine çözümlenmesi kaçınılmaz gereklilikler olarak ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak bahsedilen yöntemler Stiff diferansiyel denklemlere cevap verecek niteliktedir.

K A Y N A K L A R

- 1-) AKSOY Yavuz, Diferansiyel Denklemler Cilt 1, 1990
- 2-) ÇAĞAL Behiç, Nümerik Analiz, 1992
- 3-) ÇAĞAL Behiç, Yüksek Lisans Ders Notları, 1994
- 4-) SHAMPINA L.F. and GEAR G.W., A User's View of Solving Stiff ODE's
Siam Review 21, 1-17, 1979
- 5-) DAVIS R.S., Solution of Stiff ODE's by a Second Derivative Methods
Siam Journal Numerical Analysis 14, 1097-1100, 1977
- 6-) KINCAID D. and CHENY W., Numerical Analysis, International Student
Edition
- 7-) KAHANER D., MOLER C. and NASH S., Numerical Analysis and
Mathematical Software, Prentice Hall, 1989

Ö Z G E Ç M İ Ş

Doğum Tarihi.....: *20 Temmuz 1970*

Doğum Yeri.....: *İSTANBUL*

İlk Öğrenim.....: *İstanbul Bekir Eser İlkokulu, 1981*

Orta Öğrenimi.....: *İstanbul Erenköy Kız Lisesi, 1987*

Yüksek Öğrenimi..: *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü, 1993*

Yüksek Lisans.....: *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimler Enst. (1993-)*

Meslek Hayatı.....: *Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü*

Araştırma Görevliliği (1995-1996)

Oyak Sigorta A.Ş. Bilgi İşlem Departmanı Bilgisayar Programcısı (1996-)