

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KÜTÜPHANE

DEĞİŞMELİ HALKALARDA TEK TÜRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLME

Ali ŞAHİN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç.Dr.A.Göksel AĞARGÜN

Doç.Dr. G. Ağargün
G. Ağargün

Prof.Dr. E. Adıgözeloğlu
E. Adıgözeloğlu

Prof. T. Sişman
T. Sişman

29209

İSTANBUL,1998

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii

BÖLÜM I

I. TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN BÖLGELER.....	1
1. Giriş	1
2. Temel tanımlar ve teoremler	1
3. Eşdeğer Sonuçlar	14

BÖLÜM II

II. TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN HALKALAR	18
1. Giriş	18
2. TÇH'nin Tanımı	19
3. Esas ideal Hakları	24
4. Pseudo Bölgeleri.....	26
5. Yapı teoremi	30
6. Temel Sonuçlar.....	38

BÖLÜM III

III. KESİR HALKALARI, LOKALİZASYON VE TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLME	45
1. Giriş	45
2. Temel tanımlar ve teoremler	45
3. Temel Sonuçlar.....	47
4. Kesir Halkaları için TÇB kavramı.....	62

KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ	67

Büyük İnsan, Gerçek Arkadaş, Rahmetli Dostum ENVER

BAŞARDI'nın Aziz hatırasına İthaf olunur.

“Seni Asla Unutmayacağım”

ALİ ŞAHİN

İSTANBUL, 1998



TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca hiç bir yardımını esirgemeyen ve beni her konuda destekleyen Değerli hocam Sayın Doç. Dr . A.Göksel Ağargün ve sevgili arkadaşım M.Serkan Kıvılcım 'a teşekkür ederim.

ALİ ŞAHİN

İstanbul ,1998



ÖZET

Bu çalışmadaki amacımız bir tamlık bölgesinde ve birimli ,değişmeli olan bir halkada tek türlü çarpanlara ayrılabilme kavramını araştırmaktır

Bölüm 1 de temel tanımlar ve tamlık bölgeleri için tek türlü çarpanlara ayrılabilmenin temel sonuçları verilmiştir.1966'da Fletcher tarafından öz sıfır böleni de içerebilen birimli ve değişmeli halkalar için tek türlü çarpanlara ayrılabilen bir halkanın (TÇH) tanımı verilmiştir.Bu tanımı kullanarak Fletcher ,halkalar için bazı teoremleri genelleştirmiştir.Bölüm 2 Fletcher'ın tanımları ve sonuçları ile ilgilidir.Bu bölümde ayrıca sonlu sayıdaki TÇH'ların direct toplamlarının yine bir TÇH olduğu gösterilmiştir ve buradan bir esas ideal halkasının bir TÇH olduğu ispatlanmıştır.Ayrıca TÇH'lerin yapısı araştırılmış ve her TÇH'nin tek türlü çarpanlara ayrılabilen tamlık bölgelerinin ve özel TÇH'lerin sonlu bir direct toplamı olduğu gösterilmiştir.Aynı zamanda bölüm 2'de R'nin bir TÇH olması için gerek ve yeter koşulun her indirgenemezin asal olduğu sonucu elde edilmiştir.

Bölüm 3 ise kesir halkaları ve kesir halkalarının ideal yapılarını incelemeye ayrılmıştır.Bu bölümde kesir halkarı ile ilgili temel tanım ve teoremler irdelenmiştir.Bu bölümün son kısımları kesir halkalarının ideal yapılarını işlemekte ve asal idealde lokalizasyonu getirmektedir.Bu bölümün en sonunda kesir halkalarında tek türlü çarpanlara ayrılabilme incelenmiştir.

ABSTRACT

In this work our main aim was to investigate the concepts of unique factorization in an integral domains and in a commutative ring with identity.

In chapter I, we give the basic definition and the main results of unique factorization for integral domains.

In 1966 Fletcher gave the definition of a unique factorization ring (UFR) for the commutative rings with identity possibly containing proper zero divisors. Using this definition he generalized some theorems for rings. Chapter II concerns his definitions and results. We show that the direct sum of a finite number of UFR is a UFR and therefore a principal ideal ring becomes a UFR. We investigate the structure of UFR's and prove that every UFR is a finite direct sum of unique factorization domains and special UFR's we show that R is a UFR if and only if every irreducible element is prime.

Chapter III concerns the rings of fraction and the structure of its ideals. In this chapter we investigate the basic definitions and theorems. Here, we also study the unique factorization property for rings of fraction.

BÖLÜM -1-

TEK TüRLÜ ÇARPANLARA AYRILABİLEN BÖLGELER

1.Giriş: Bu bölümde Z tamsayılar halkasının, bölünebilme, çarpanlara ayırma, en büyük ortak bölen gibi özelliklerini tamlık bölgelerine genişleteceğiz. Önce bazı başlangıç tanımları vereceğiz ve bu tanımları kullanarak temel bazı sonuçları ispatlayacağız.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 1.1.: R değişmeli bir halka ve $\forall a, b \in R$ için $a=bc$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa b, a 'yı bölüyor veya a, b ile tam bölünüyor denir. Eğer $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ilgilidir denir.

$\forall a \in R$ için $a \cdot 0 = 0$ olduğundan $a|0$ dır.

Diğer taraftan R birimli bir halka ve $u \in R$ birimsel bir eleman ise u, R nin her elemanını böler.

$a \in R$ için $a=u(u^{-1}a)$ dır. eğer R bir cisim ise

$R^*=R/\{0\}$ ın herhangi iki elemanı birbirine böler. Böylece cisimde sıfırdan farklı tüm elemanlar ilgili olurlar.

R nin tüm birimsel elemanlarının kümesi U_R ile gösterelim.

Tanım 1.2.: R bir tamlık bölgesi olmak üzere $\forall a, b \in R$ için eğer $b=ua$ olacak şekilde bir $u \in U_R$ varsa a ile b ilgilidir denir ve $a \approx b$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.3.: R birimli ve değişmeli bir halka ve $a, b \in R$ olsun

i) $a \approx b$ bağıntısı R üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

ii) $b|a$ dır $\Leftrightarrow (a) \subset (b)$

iii) a ile b ilgilidir $\Leftrightarrow (a) = (b)$

iv) $a=ub$ olacak şekilde bir u birimsel elemanı varsa a ile b ilgilidir. R bir tamlık bölgesi ise bunun terside doğrudur.

v) $u \in R$ nin birimsel olması için gerek ve yeter koşul $(u)=R$ olmasıdır.

İspat: i) Aşağıdaki özelliklerin sağlandığını görmek kolaydır.

1-) Yansıma: $\forall a \in R$ için, $a \approx a$ dır.

2-) Simetri: $a, b \in R$ için $a \approx b$ ise $b \approx a$ dır.

3-) Geçişme: $a, b, c \in R$ için, $a \approx b$ ve $b \approx c$ ise $a \approx c$ dir.

ii) $b|a \Leftrightarrow a=bc, \exists c \in R$ vardır $\Leftrightarrow a \in (b) \Leftrightarrow (a) \subset (b)$

iii) ilk olarak $a \approx b$ olsun. O zaman $a=bu$ olacak şekilde bir $u \in U_R$ vardır.

$a=bu$ ifadesinden $a \in (b)$ ve $(a) \subset (b)$ olduğu görülür. Ayrıca $u \in U_R$ olduğundan $u^{-1} \in R$ vardır.

$a=bu$ ifadesinin her iki tarafını sağdan u^{-1} ile çarparsak $au^{-1}=b$ olur ve $b \in (a)$ dır. Buradan $(b) \subset (a)$ yazılır. Sonuçta $(a)=(b)$ dir.

Tersine $(a)=(b)$ olsun. $a \in (b)$ alalım.

$a=br$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $b|a$ bulunur.

$b \in (a)$ alalım. $b=ar'$ olacak şekilde $r' \in R$ vardır buradan $a|b$ olduğu görülür.

Sonuçta $a \approx b$ dir.

iv) Bölünebilme açısından, bir elemanın bir birimsel elemanla çarpılması sonucu değiştirmeyeceğinden.

$a = ub$ olacak şekilde bir u birimsel elemanı varsa a ile b ilgilidir ifadesi doğru olur.

Tersine R bir tamlık bölgesi ve a ile b ilgili olsunlar a ile b ilgili olduğundan $a|b$ ve $b|a$ yazılır. O zaman

$a|b \Rightarrow b = ak$ olacak şekilde $k \in R$ vardır.

$b|a \Rightarrow a = bl$ olacak şekilde $l \in R$ vardır. Buradan

$a = akl$ yazılır ve $1_R = kl$ bulunur ki bu k ve l 'nin birimsel olduğunu gösterir.

v) $u \in R$ birimsel ise $(u) = R$ olduğunu gösterelim.

$u \in U_R$ olsun. o zaman $u^{-1} \in R$ dir.

$u \cdot u^{-1} = 1_R \in (u)$ olur $(u) = R$ dir.

Tersine $(u) = R$ ise $r \in R$ için $r \in (u)$ ve $r = uk$ olacak şekilde $k \in R$ vardır.

Özel olarak $r = 1_R$ seçilirse

$1_R = uk$ olur ve u , birimseldir.

Tanım 1.4.: R değişmeli ve birimli bir halka ve $c \in R$ olsun.

Eğer i) $c \neq 0$ ve c birimsel değil ise

ii) $c = ab$ olduğunda a veya b birimsel ise c 'ye R nin bir indirgenemez elemanı denir.

Tanım 1.5.: R değişmeli ve birimli bir halka ve $p \in R$ olsun.

i) $p \neq 0$ ve p birimsel değil ise

ii) $p|ab$ olduğunda $p|a$ veya $p|b$ ise p elemanına R nin bir asal elemanı denir.

Önerme 1.6.: R bir tamlık bölgesi ve $p \in R \setminus \{0\} = R^*$ olsun.

- i) p nin asal olması için gerek ve yeter koşul (p) nin asal ideal olmasıdır.
- ii) c indirgenemezdir $\Leftrightarrow (c)$ R nin öz esas idealleri kümesinin bir maksimal elemanıdır.
- iii) R nin her asal elemanı indirgenemezdir.
- iv) R bir esas ideal bölgesi ise R nin bir elemanının asal olması için gerek ve yeter koşul bu elemanın indirgenemez olmasıdır.
- v) R nin bir indirgenemez (asal) elemanının her ilgilisi de indirgenemez (asal) dır.
- vi) R nin bir indirgenemez elemanının bölenleri bu elemanın ilgilileri ve birimsel elemanlardan ibarettir.

İspat: i) p asal olsun. p , birimsel olmadığından $(p) \neq R$ dir. $a, b \in R$ için $a, b \in (p)$ olsun. $p|ab$ olacağından ve p asal olduğu için $p|a$ veya $p|b$ dir. o zaman (p) asal idealdir.

Tersine (p) asal ideal olsun. o zaman $(p) \neq R$ ve p birimsel değildir.

Hipotezden dolayı $p \neq 0$ dır.

$p|ab$ ise $a, b \in (p)$ ve (p) asal ideal olduğundan

$a \in (p)$ veya $b \in (p)$ dir. Buradan ise $p|a$ veya $p|b$ sonucu çıkar.

ii) c indirgenemez olsun. O zaman c birimsel değildir ve $c \neq 0$ dır. Aynı zamanda $(c) \neq R$ dir.

R nin öz esas ideallerinin kümesi S olsun. $(c) \neq R$ olduğundan $(c) \in S$ dir.

$y \in R$ için $(c) \subset (y) \neq R$ olsun. O zaman $\forall r \in R$ için $c \in (y)$ olduğundan $c = yr$ şeklinde yazılabilir. Buradan y veya r nin birimsel olması gerekir. $(y) \neq R$ olduğundan $y \notin U_R$ dir. O zaman $r \in U_R$ olur. ve $(c) = (y)$ olur.

Tersine (c) , S 'in bir maksimal elemanı olsun. O zaman $(c) \neq R$ olacağından c , birimsel değildir ve hipotezden dolayı $c \neq 0$ dır. Kabul edelim ki $c = ab$ olacak şekilde $a, b \in R$ olsun. ve a birimsel olmasın. $(c) \subset (a) \neq R$ olduğundan ve (c) , S in maksimal elemanı olduğundan $(c) = (a)$ dır. ve bundan dolayı $a=cr$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. Buradan $c = crb$ ve $c(1_R - rb) = 0$ olur. R bir tamlık bölgesi olduğundan sıfır bölen içermez. Bundan dolayı $c = 0$ veya $1_R - rb = 0$ olmalıdır. Fakat $c \neq 0$ olduğundan $1_R - rb = 0$ olur. $1_R = rb$ ve buradan b nin birimsel olduğu ortaya çıkar. Benzer şekilde eğer b birimsel değilse a nın birimsel olduğu görülür. Bundan dolayı c indirgenemezdir.

iii) p , R nin asal elemanı olsun. O zaman $p \neq 0$ ve p birimsel değildir.

$(p) \neq R$ dir. $a, b \in R$ için

$p = ab$ olsun. a ve b birimsel olmasın.

$p \in (a) \Rightarrow (p) \subset (a)$ dır. p asal ise Önerme 1.6 (i) den (p) asal idealdir.

$ab \in (p)$ ve (p) asal ideal olduğundan $a \in (p)$ veya $b \in (p)$ dir. $b \in (p)$

olsun. $b = pr$ olacak şekilde $r \in R$ vardır.

$p = ab$ de $b = pr$ yazılırsa $p = apr$ ve

$p - apr = 0$ buradan $p(1 - ar) = 0$ ve R bir tamlık bölgesi olduğundan $p = 0$ veya

$1_R - ar = 0$ dir. $p \neq 0$ kabul edildiğinden $1_R - ar = 0$ olur. ve $ar = 1_R$ dir ve a

birimseldir.

Bu bir çelişkidir. O halde a veya b birimseldir.

Yani p indirgenemezdir.

iv) R bir esas ideal bölgesi olsun. $a \in R$ olsun. Eğer $a \in R$ asal ise iii) den a indirgenemezdir. Tersine eğer a indirgenemez ise ii) den (a) , R 'nin bir maksimal ideali ve böylece R nin bir asal ideali olur. O halde i) dan dolayı a asaldır.

v) $c \in R$ indirgenemez ve $r \in R$, c nin bir ilgilisi olsun. O zaman $c = ru$ olacak şekilde bir $u \in U_R$ vardır. Buradan $(c) \subset (r)$ elde edilir. Aynı zamanda $r = cu^{-1}$ olduğundan $(r) \subset (c)$ dir. Böylece $(r) = (c)$ bulunur. Aynı zamanda c indirgenemez olduğundan (c) ve böylece (r) , R nin öz esas idealleri kümesinin maksimal elemanıdır. O halde ii) den dolayı r indirgenemezdir.

vi) Bunun ispatı tanım 1.4 önerme 1.3 (iv) ve (v) in bir sonucudur.

Tanım 1.7: Aşağıdaki iki özellik gerçekleşirse R tamlık bölgesine tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge (TÇB) denir.

TÇB1- R nin sıfırdan farklı ve birimsel olmayan her r elemanı

$p_1, p_2, \dots, p_k$ indirgenemezler olmak üzere

$r = p_1 p_2 \dots p_k$ şeklinde indirgenemez elemanların çarpımı olarak yazılır.

TÇB2-Eğer $r = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m$ $r \in R$ nin iki indirgenemez ayrışımı ise $m=n$ ve $i=1, 2, \dots, n$ için q ların uygun bir şekilde indexlenmesinden sonra p_i ler ve q_i ler ilgilidir.

Örnek: Z nin $0, -1, 1$ den farklı her elemanı asal (indirgenemez) elemanlarının bir çarpımı olarak yazılabilir ve bu çarpım çarpanların yer değiştirmesi

farkıyla tektir. Böylece Z bir TÇB dir. F bir cisim ise sıfırdan farklı her elemanı birimsel olduğundan aşikar olarak F bir TÇB dir.

Şimdi her Tamlık bölgesinin bir TÇB olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek: $R = \{ a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$ kümesi C nin işlemlerine göre bir tamlık bölgesi fakat bir TÇB değildir.

R gerçekten C nin işlemlerine göre bir tamlık bölgesidir. R üzerinde mutlak değer fonksiyonunu φ ile gösterelim. Böylece her $a + b\sqrt{-5} \in R$ için

$$\varphi(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2 \text{ dir.}$$

Bundan yararlanarak R nin birimsel elemanlarını belirleyelim. Eğer $a + b\sqrt{-5} \in R$ birimsel ise $c + d\sqrt{-5} \in R$ olmak üzere $(a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) = 1$ olacaktır. Her iki tarafa φ 'yi uygularsak $(a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = 1$ yazılır. $a, b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $a^2 + 5b^2 \geq 0$ dir ve 1'i böler. Buradan $a^2 + 5b^2 = 1$ elde edilir. Bunun doğru olması için $b=0$ ve $a = \pm 1$ olmalıdır. Böylece R nin birimsel elemanları -1 ve 1 den ibarettir. Şimdi 6 sayısı iki farklı şekilde $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$ olarak yazılabilir. Aynı zamanda $2, 3, 1 - \sqrt{-5}, 1 + \sqrt{-5}$ elemanlarından herbiri indirgenemezdir.

Kabul edelim ki $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \text{ olsun. Her iki tarafa } \varphi \text{ yi uygulayalım. O zaman}$$

$$4 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) \text{ elde edilir.}$$

Kabul edelim ki $a + b\sqrt{-5}$ birimsel olmasın. O zaman yukarıda görüldüğü gibi $a^2 + 5b^2 \neq 1$ dir ve böylece $a^2 + 5b^2 = 2$ veya $a^2 + 5b^2 = 4$ dür. Birinci eşitliğin olmayacağı açıktır. İkinci eşitlik doğru ise $c^2 + 5d^2 = 1$ olduğundan $c + d\sqrt{-5}$

birimseldir. Böylece iki çarpandan birisi birimsel olmak zorundadır. Bundan dolayı 2 indirgenemezdir. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir. Bundan dolayı R bir TÇB değildir.

Önerme 1.8: Her esas ideal bölgesi (EİB) bir tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgedir.

İspat: Önce, Eğer R bir esas ideal bölgesi ise, O zaman R nin idealler için artan zincir kuralını sağladığını gösterelim. R de ideallerin bir zinciri olarak $a_1 R \subset a_2 R \subset \dots$ alalım.

$A = \bigcup a_i R$ ve $a, b \in A, r \in R$ olsun. O zaman i, j ler için $a \in a_i R; b \in a_j R$ dir. ya $a_i R \subset a_j R$ ya da $a_j R \subset a_i R$ olduğundan a ve b nin her ikisi $a_i R, a_j R$ ideallerinin birisinde bulunur. Örneğin $a_i R$ de bulunsun. O zaman $a-b \in a_i R \subset A$ dır. Aynı zamanda $ar \in a_i R \subset A$ dır.

Böylece A, R nin bir idealidir. R bir esas ideal halkası olduğundan bir $a \in R$ için $A = aR$ dir. Şimdi $a \in A$ dan bir k için $a \in a_k R$ yazılır.

Ayrıca $A = aR \subset a_k R \subset A$ ifadesinden $A = aR = a_k R$ elde edilir. Böylece $a_k R = a_{k+1} R = \dots$ dır. ve iddiamız ispatlanmış olur.

Dolayısıyla b indirgenemez elemanların çarpımı olarak alınmasın ve $b=xy$ olsun. Öyleki burada örneğin x indirgenemez elemanların bir çarpımı değildir. Eğer a indirgenemezlerin sonlu bir çarpımı değil ise $(a) \subset (b) \subset (c) \subset \dots$ şeklinde ideallerin artan zinciri sonlu olmayacaktır. Fakat, R idealler

için artan zincir koşulunu sağladığından a indirgenemez elemanların sunlu bir çarpımı olmalıdır sonucu elde edilir.

İspatı tamamlamak için $p \in R$ indirgenemez ve $a, b \in R$ için $p|ab$ ise $p|a$ veya $p|b$ olduğunu gösterelim.

$pR + aR = cR$ olmak üzere $c \in R$ vardır. O zaman $p \in cR$ olduğundan $d \in R$ için $p = cd$ dir. p indirgenemez olduğundan c veya d örneğin d birimsel olsun. O zaman $pR = cR$ dir. dolayısıyla $pR + aR = pR$ dir. Bu $a \in pR$ olduğunu gösterir ki $p|a$ kabulü ile çelişir. Böylece c bir birimseldir. O halde $cR = R$ dir.

Dolayısıyla $pR + aR = R$ olur. O zaman $px + ay = 1$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır.

Bu $pbx + aby = b$ olduğunu gösterir $p|ab$ olduğundan $p|b$ elde edilir $p|ab$ dir.

Tanım 1.9: R değişmeli bir halka ve $\varphi: R^* \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i) $\forall a, b \in R$ ve $ab \neq 0$ için $\varphi(a) \leq \varphi(ab)$ ise

ii) $\forall a, b \in R$ ve $b \neq 0$ için $a = qb + r$ $r = 0$

veya $\varphi(r) < \varphi(b)$ olacak şekilde $q, r \in R$ varsa R halkasına bir Euclid

Halkası (EH) denir.

Eğer R bir (EH) ve bir tamlık bölgesi (TB) ise R ye bir Euclid Bölgesi (EB) denir.

Örnek: Z halkası $\varphi: Z \rightarrow Z^+ \cup \{0\}$ şeklinde tanımlı mutlak değer

fonksiyonuna göre bir Euclid Bölgesidir.

Örnek: F bir cisim olsun. $F[x]$ polinom halkası her $0 \neq f \in F[x]$ için $\varphi(f) = \deg(f)$ şeklinde tanımlı φ fonksiyonuna göre bir EB dir,

Örnek: $Z[i] = \{a+bi: a, b \in Z\}$ kümesi kompleks sayıların toplama ve çarpma işlemlerine göre bir (TB) dir.

$\varphi: \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu $\forall a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ olmak üzere

$\varphi(a+bi) = a^2+b^2$ şeklinde tanımlanırsa o zaman $\mathbb{Z}[i]$ bir (EB) dir. $\mathbb{Z}[i]$

tamlık bölgesine Gauss Sayıları Halkası denir.

Önerme: 1.10: Her Euclid bölgesi (EB) bir esas ideal bölgesidir.

İspat: R bir Euclid bölgesi ve I da herhangi bir ideali olsun.

$I = (0)$ ise temel ideal olacağından $I \neq (0)$ alalım.

I idealinde sıfırdan farklı $\varphi(a)$ en küçük pozitif tam sayı olacak şekilde bir $a \in I$ alalım.

$a \in I$ ise $(a) \subset I$ dır.

R Euclid bölgesi olduğundan $\forall x \in I$ $x=aq+r$ $0 \leq \varphi(r) \leq \varphi(a)$ olacak şekilde bir $q, r \in R$ vardır. $r \neq 0$ ise

$r = x-aq \in I$ olduğundan $\varphi(r) > \varphi(a)$ olur. Bu a nın seçimi ile çelişir öyleyse $r = 0$ olmalıdır.

$r=0$ ise $x=aq \in (a)$ olur ve $I \subset (a)$ olur ve $I = (a)$ bulunur.

Tanım 1.11 : R değişmeli bir halka ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ olsun.

Eğer bir $d \in R$

i) $\forall i$ için $d|a_i$

ii) $d^1 \in R$ ve $\forall i$ için $d^1|a_i$ iken $d^1|d$ ise d ye

$a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarının bir en büyük ortak böleni

(ebob) denir.

Eğer R birimli ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ in ebob'i 1 ise Bu durumda $a_1, a_2, \dots, a_n$ 'e aralarında asaldır denir.

Önerme 1-12: R birimli ve değişmeli bir halka ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ olsun.

i) $a_1, a_2, \dots, a_n$ ler birimli ve değişmeli R halkasının elemanları olsunlar

$d \in R$ $d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$ ($r_i \in R$) eşitliğini sağlayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ in bir ebob olması için gerek ve yeter koşul $(d) = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n)$ olmasıdır.

ii) R bir esas ideal bölgesi ise $a_1, \dots, a_n$ in ebob'ü vardır ve her ebob $r_i \in R$ olmak üzere

$r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ şeklindedir.

iii) R bir TÇB ise $a_1, a_2, \dots, a_n$ nin ebob'ü vardır.

İspat: i) $d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n$ olsun ve $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. $d = \sum_{i=1}^n r_i a_i$ ise

$$d \in \sum_{i=1}^n (a_i)$$

$$(d) \subset \{(a_1) + (a_2) + \dots + (a_n)\} \quad 1$$

Diğer taraftan $s_i \in R$ ($i=1, 2, \dots, n$) olmak üzere

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n \in (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n) \text{ olsun.}$$

$$d = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ ise } \forall i \text{ için } d|a_i \text{ ise } d|s_i a_i \text{ dir ve } d|s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n \Rightarrow$$

$$s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n \in (d) \text{ ve buradan } (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n) \subset (d) \quad 2$$

1 ve 2 ifadelerinden $(d) = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n)$ yazılır.

Diğer taraftan $(d) = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n)$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $r_i \in R$

$$d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

d nin $a_1, a_2, \dots, a_n$ in ebob'ü olduğunu gösterelim.

$$(d) = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n) \text{ olduğundan } d|a_1, d|a_2, \dots, d|a_n \text{ bir } d^1 \in R \text{ için } d^1|a_1,$$

$$d^1|a_2, \dots, d^1|a_n \text{ olsun.}$$

$$(a_1) \subset (d^1), (a_2) \subset (d^1), \dots, (a_n) \subset (d^1)$$

$$(d) = (a_1) + (a_2) + \dots + (a_n) \subset (d^1) \text{ olduğundan}$$

$$d^1 | d \text{ olur ve } d = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ dir.}$$

ii) R den sıfırdan farklı a, b elemanlarını alalım.

R de a, b elemanlarının ürettiği ideal I olsun.

$I = (\{a, b\})$, R esas ideal bölgesi olduğundan $\exists c \in R$ vardır ki

$I = (c)$ olur. $I \neq 0 \neq (c)$ olduğundan $c \neq 0$ dır. $c = (a, b)$ olduğunu gösterelim.

$a, b \in I = (c) \Rightarrow a = cx \quad b = cy$ olacak şekilde $\exists x, y \in R$ vardır. $a = cx \Rightarrow c | a$

ve $b = cy \Rightarrow c | b$ dir.

c, a ve b nin bir ortak bölenidir.

a ve b nin bir ortak böleni d olsun.

$I = \{xa + yb : x, y \in R\} = (c)$ olduğundan, $c = xa + yb$ olacak şekilde $\exists x, y \in R$ bulunabilir.

$d | a \Rightarrow d | ax$ ve $d | b \Rightarrow d | by$ olacağından buradan $d | xa + yb$ yani $d | c$ yazabiliriz.

Sonuç olarak $c = (a, b)$ olduğu ortaya çıkar. Bu sonucu $r=1, 2, \dots, n$ için

$c = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 'e genişletebiliriz.

iii) $a, b \in R$ ve $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_m^{e_m}$, $b = p_1^{f_1} \dots p_m^{f_m}$ olsun. ($i=1, 2, \dots, m$) için p_i ler

indirgenemezlerdir. e_i, f_i negatif olmayan tam sayılar ve p_i^0 birimseldir.

$$q_i = \min(e_i, f_i) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad d = p_1^{q_1} \dots p_m^{q_m} \text{ 'dir.}$$

O zaman bellidir ki $d | a$, $d | b$ dir. $c | a$ ve $c | b$ olacak şekilde bir $c \in R$ alalım.

$c | a$ ise $c = p_1^{\lambda_1} \dots p_m^{\lambda_m}$ ve $\lambda_i \geq 0 \quad \lambda_i \leq e_i \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}$ ancak o zaman $c | a$ ve $c | b$ belirtir

$i=1, 2, \dots, m$ için $\lambda_i \leq e_i$ ve $\lambda_i \leq f_i$ böylece $\lambda_i \leq \min(e_i, f_i) = q_i$ dir. Bu istenen

$c|d$ yi ispatlar. Şimdi d ve d' , a ve b nin iki ebob'ı olsun. O zaman $d|d'$ ve $d'|d$ dir. ve böylece d ve d' ilgilidir. Çünkü R bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1-13: Sıfırdan farklı a, b tam sayılarının ortak katlarının en küçüğü, a ve b tarafından tam bölünen en küçük pozitif tamsayıdır. Bu $[a,b]$ ile gösterilir.

Önerme 1-14: i) $a, b \in R^*$ olmak üzere $(a) \cap (b) = (c)$ olması için gerek ve yeter koşul $c = [a,b]$ olmasıdır.

ii) $a, b \in R^*$ olmak üzere eğer $(a) + (b) = (d)$ ise O zaman $d = (a,b)$ olur.

iii) $[a,b]$ varsa o zaman (a,b) de vardır.

İspat: (i) ve (ii) tanımdan kolaylıkla elde edilir.

iii) $[a,b] = c$ olsun $d = ab \mid c \in R^*$ alalım.

O zaman $d|a$ ve $d|b$ vardır. $d'|a$ ve $d'|b$ olacak şekilde $d' \in R^*$ vardır.

O zaman $a = d'k$ ve $b = d'l$ olacak şekilde $k, l \in R$ vardır.

O halde $t \in R$ için $al = bk = ct$ olur .O zaman

$d = ad'l|c$ ve $d'ct|c = d't$ olur ve bu $d = (a, b)$ olduğunu gösterir.

3.Eşdeğer Sonuçlar

Önerme 1.15: Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) R bir TÇB dir.

ii) R , TÇB 1'i gerçekler ve herhangi iki esas idealin arakesiti esas idealdir.

(Yani R^* in herhangi iki elemanı bir en küçük ortak kata sahiptir.)

iii) R , TÇB 1'i gerçekler ve R^* ın herhangi iki elemanı bir en büyük ortak bölene sahiptir.

iv) R, TÇB 1'i gerçekler ve her indirgenemez eleman asaldır.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) R bir TÇB olsun.

$a, b \in R$ için $(a) \cap (b) = I$ olsun. $a=0 \Rightarrow I = (0)$ olacağından $a, b \neq 0$ olsun.

$\exists x \in I, x \neq 0$ için $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_n^{\alpha_n}$ indirgenemez elemanlar olmak üzere x

$= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ in bir indirgenemez ayrışımı olsun. $x \in I$ ise $k, l \in R$ için

$ak = x = bl$ olmalıdır.

$q_1, q_2, \dots, q_m$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $a = q_1 q_2 \dots q_m$ ve $r_1, r_2, \dots, r_s$

indirgenemez elemanlar olmak üzere $b = r_1 r_2 \dots r_s$ olsun.

$q_1 q_2 \dots q_m k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} = r_1 \dots r_s l$ dır.

R TCB 2'yi sağladığından $u, v \in U_R$ olmak üzere

$0 \leq \gamma_i, \beta_i \leq \alpha_i$ için

$$q_1 q_2 \dots q_m = u p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n}$$

$$r_1 r_2 \dots r_s = v p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} \text{ ve } \sigma_i = \max \{ \gamma_i, \beta_i \} \leq \alpha_i$$

için $c = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_n^{\sigma_n}$ yazılırsa $c|x$ dir öyleyse $x \in (c)$ ve $I \subset (c)$ dir.

Diğer taraftan $c \in (a), c \in (b) \Rightarrow c \in (I) \Rightarrow (c) \subset I$ Buradan da $I = (c)$

bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Önerme 1.14 (iii) dan kolayca görülebilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) p, R de indirgenemez ve $p|ab$ olsun. Yani $ab \in (p)$ olsun. $a = 0$

olduğunda $a \in (p)$ olacağından $a \neq 0, b \neq 0$ kabul edebiliriz. O halde (ap, ab)

vardır ve $d = (ap, ab)$ olsun .O zaman

$d|ap \Rightarrow ap = dk$ ve $d|ab \Rightarrow ab = dl$

olacak şekilde $k, l \in Z$ vardır.

$p \mid ab$, $p \mid ab$ den $p \mid (ap, ab) = d$ ve buradan $p \mid d \Rightarrow d = pr$ olacak şekilde $r \in \mathbb{Z}$ vardır.

$a \mid ap$ ve $a \mid ab \Rightarrow a \mid (ap, ab) = d$ olduğundan $a \mid d$ dir.

O zaman $d = as$ olacak şekilde $\exists s \in \mathbb{Z}$ bulunabilir.

$ap = dk = ask \Rightarrow p = sk$ dir.

Eğer s birimsel ise o zaman $a = prs^{-1} \in (p)$ dir. Eğer k birimsel ise o zaman $ab = apk^{-1}$ ve $b \in (p)$ olur. O halde p asaldır.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Ayrışımın uzunluğu için indüksiyon metodu ile tek türlülüğü

ispatlarız. 1 uzunluklu indirgenemez ayrışım için (sadece bir

indirgenemezden oluşan ayrışım) tek türlülük açıktır. $n-1$ için doğru

olduğunu kabul edelim.

$m \geq n$ olacak şekilde r nin indirgenemez iki ayrışımı $r = p_1 \dots p_n = q_1 \dots q_n$ olarak

alalım. $p_1 \mid q_1 \dots q_n$ olduğundan ve p_1 asal olduğundan $i=1, \dots, m$ için $p_1 \mid q_i$

olur.

$p_1 \mid q_1$ kabul edelim. O zaman p_1 ve q_1 , ilgilidir. p_1 ile q_1 kısaltılarak istenilen elde edilir.

Önerme 1.16: Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i) R bir TÇB dir.

ii) R^* ın her bir birimsel olmayan elemanı asalların bir çarpımı olarak ifade edilebilir.

iii) Sıfırdan farklı her bir asal ideal sıfırdan farklı bir esas ideal içerir.

İspat: İspatı (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) olarak yapalım.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Önerme 1-15 (iv) den görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) R nin sıfırdan farklı bir asal ideali olarak $(p) \neq R$ alalım. O

zaman p_i asal olan $a = p_1 \dots p_n$ gibi $a \in (p)$ vardır.

O halde $i=1,2,\dots,n$ $p_i \in (p)$ ve böylece $(p_i) \subset (p)$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Asallar ve birimsellerin tüm sonlu çarpanlarının kümesi S olsun.

O zaman S çarpımsal kapalı bir alt kümedir. ve $a.b \in S$ için $a \in S$ ve $b \in S$ koşulu sağlanır.

$ab = p_1 \dots p_n$ asal bir ayrışım olsun.

O zaman $p_1 | a$ alınsın ve $a = p_1 k$ yazılsın .O halde $kb = p_2 \dots p_n$ ve tümevarım ile

sonuca varılır. $S = R^*$ olduğunu göstermeliyiz. $S \neq R^*$ olsun. O zaman $0 \neq a \in S$

vardır. $ab \in S$ için $a \in S$ ve $b \in S$ olduğundan $(a) \cap S = \emptyset$ dır. S ile arakesiti $\emptyset$

olan bütün ideallerin kümesi ideallerin artan zincir koşulunu sağlar. Zincir

birleşimini düşünelim. Zorn Lemma'sı vasıtasıyla bu özelliğe göre bir

maksimal I ideali vardır. I, R de asaldır. $x, y \in I$ kabul edelim Bu $(I, x) \cap S$

$\neq \emptyset$ ve $s_1 \in S, i \in I$ için $s_1 = i_1 + x r_1$ yazılır.

Benzer şekilde $s_2 = i_2 + y r_2$ yazılır. O halde $s_1 s_2 = i_1 s_2 + x r_1 i_2 + x r_1 y r_2$ dir.

Ve böylece $xy \notin I$ olur. Hipotezle $(p) \subseteq I$ olmak üzere bir p asalı vardır. O

zaman $p \notin S$ olduğundan bu bir çelişkidir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) TÇB 1 gerçekleşir. R de herhangi bir indirgenemez olarak q

alınsın. O zaman p_i bir asal olmak üzere hipotez ile $q = p_1 \dots p_n$ olur. O halde q

ve p_i ilgilidir . ve $p_2, \dots, p_n$ ler birimseldir. Bu $n=1$ ve $q = p_1$ olduğunu belirtir

ve böylece önerme. 1-15 den R bir TÇB dir.

BÖLÜM -2-

Bu bölümde bir halka denilince, başka türlü ifade edilmediği sürece birimli, değişmeli bir halka anlaşılabacaktır.

1.Giriş: Birinci bölümde bir tamlik bölgesinde tek türlü çarpanlara ayırabilme özelliği ile ilgilendik. Bu bölümde ise değişmeli ve birimli bir halka için tek türlü çarpanlara ayrılabilme konusunda çalışmaya devam edeceğiz.

1966'da Fletcher [5], tek türlü çarpanlara ayrılabilen halkanın (TÇH) bir tanımını vermiştir. Bu tanımları kullanarak halkalar için bazı temel teoremleri [5], [6] genelleştirmiştir. Bu çalışmamızda Fletcher'ın tanımını ve sonuçlarını araştırdık. Tamlik bölgesi olma durumunda tek türlü çarpanlara ayırabilen halka (TÇH) kavramı tek türlü çarpanlara ayırabilen bölgeye (TÇB) denktir. Sonlu sayıda TÇH'nin direct toplamının yine bir TÇH olduğu gösterildi, ve bir esas ideal halkasının (EİH) bir TÇH olduğu ispatlandı. Ayrıca pseudo bölgesinin tanımı ve belli başlı sonuçları incelendi. Her TÇH'nin sonlu sayıdaki TÇB'lerin ve özel EİH'lerinin bir direkt toplamı olduğu gösterildi. O halde bu yapısal sonuç ve EİH'lerinin yapısı arasında bir ilişki vardır. Yine bu bölümde birimsel olmayan elemanları bir U-ayrışımına sahip olan bir halkanın bir TÇH olması için gerek ve yeter koşulun her indirgenemez elemanın asal olduğu ispatlandı. Son olarak bir TÇH için bazı eşdeğer sonuçlar verildi.

2.TÇH'nin Tanımı

Fletcher [5]'in 1966'da verdiği tanımları aşağıda verelim.

Tanım 2.1: Birimsel olmayan $q \in R$, $q = a_1 \dots a_n$ şeklinde yazıldığında en az bir $r = 1, 2, \dots, n$ ve $r \in R$ için $a_i = qr$ oluyorsa q 'ya indirgenemezdir denir.

Tanım 2.1'e göre R bir tamlık bölgesi olarak alınırsa bu tanım 1.4'e eş olur.

Fakat burada sıfır elemanı indirgenemezdir. Tersine, eğer sıfır elemanı indirgenemez ise o zaman, R bir tamlık bölgesidir.

Tanım 2.2: Bir $r \in R$ 'nin $\bar{U}$ sınıfı, $U(r)$ ile gösterilir.

$U(r) = \{\alpha \in R \mid \text{uygun } \hat{a} \in R' \text{ ler için } \alpha \hat{a} r = r\}$ şeklinde tanımlanır.

Bu tanımı kullanarak aşağıdaki önermeyi kolayca ispatlayabiliriz.

Önerme 2.3

- i) Eğer $\alpha\beta \in U(r)$ ise o zaman $\alpha\beta \in U(r)$ dir.
- ii) Eğer $\alpha \in U(rs)$ ve $r \in U(s)$ ise o zaman $\alpha \in U(s)$ dir.
- iii) $U(r) \subseteq U(rs)$ dir.
- iv) Sıfır böleni olmayan bir a için $U(ar) = U(r)$ dir.

İspat :

i) $U(r) = \{\alpha \in R \mid \alpha \beta r = r\}$

$\alpha, \beta \in U(r)$ olsun. O zaman $\alpha \gamma r = r$ ve $\beta \gamma^1 r = r$ ($\gamma, \gamma^1 \in R$) yazılabilir.

Buradan $\alpha \gamma \beta \gamma^1 r = r$ yazılır. Sonuç olarak R değişmeli olduğundan $\alpha\beta\gamma\gamma^1 r = r$ bulunur, yani $\alpha\beta \in U(r)$ dir.

ii) $\alpha \in U(rs)$ ve $r \in U(s)$ ise $\alpha \in U(s)$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in U(rs)$ ise tanımdan $\alpha\beta rs = rs$ ve $r \in U(s)$ için tanımdan $r \gamma s = s$ yazılır. Buradan $\alpha\beta rs \gamma = rs \gamma = s$ yazılabilir. Böylece

$\alpha \beta s = s$ elde edilir. Bu ise $\alpha \in U(s)$ olduğunu gösterir.

iii) $x \in U(r)$ olsun. O zaman tanımdan $x\beta r = r$ yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafını s ile çarparsak

$x\beta rs = rs$ elde edilir. Böylece tanımdan $x \in U(rs)$ olur. Bu ise $U(r) \subseteq U(rs)$ olduğunu gösterir.

iv) a sıfır böleni olmadığında $U(ar) = U(r)$ olduğunu gösterelim. (iii)den $U(r) \subset U(ar)$ idi.

Tersine olarak $x \in U(ar)$ alalım. O halde $x \beta ar = ar$ 'dır. a sıfır bölensiz olduğundan kısaltma özelliği kullanılarak

$x \beta r = r$ elde edilir. Bu ise $x \in U(r)$ olmasını gerektirir.

O halde $U(ar) \subset U(r)$ 'dir ve sonuç olarak $U(ar) = U(r)$ bulunur.

Tanım 2.4: $r \in R$ 'nin bir U -ayrışımı, r 'nin

$r = (p_1^{-1} \dots p_k^{-1}) (p_1 \dots p_n)$ şeklinde çarpanlara ayrılmasıdır. Öyleki burada

i) $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$ için $p_i^{-1} p_j$ indirgenemezdir.

ii) $i = 1, \dots, k$ için $p_i^{-1} \in U(p_1 \dots p_n)$ 'dir.

iii) $j = 1, \dots, n$ için $p_j \notin U(p_1 \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$ 'dir.

Eğer ilk parantez boş ise $r = () (p_1 \dots p_n)$ şeklinde yazarız. Tanım 2.4'den, eğer bir elemanın bir U -ayrışımı varsa o zaman bu elemanın bir indirgenemez ayrışımı sahip olması gerekir. Tersine olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 2.5: Eğer $r \in R$, bir indirgenemez ayrışımı sahipse o zaman r 'nin bir U -ayrışımı vardır.

İspat: $r \in R$ 'nin bir $r = p_1 \dots p_n$ indirgenemez ayrışımı olduğunu kabul edelim.

O zaman ya

$r = () (p_1 \dots p_n)$ 'dir ve r 'nin bir U -ayrışımı vardır, ya da $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i \in U (p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_n)$ 'dir. İkinci durumu düşünelim; p_1 'in bunu gerçeklediğini kabul edelim ve benzer şekilde p_2 'de gerçekleşsin; burada $p_2 \in U (p_3 \dots p_n)$ 'dir. O halde bunu tekrarlamak suretiyle, $p_1, \dots, p_k$ özelliğini gerçekleyen sadece p_i ler olsun. O zaman $r = (p_1 \dots p_k) (p_{k+1} \dots p_n)$ olur ve r 'nin bir U - ayrışımı vardır deriz. Çünkü oluşturulan ifadeden $j = k + 1, \dots, n$ olmak üzere $p_j \notin U (p_{k+1} \dots p_{j-1} p_{j+1} \dots p_n)$ vardır ve $q = 1, \dots, k$ için $p_q \in U (p_{q+1} \dots p_n)$ 'dir. Önerme 2.3 (ii)'den $p_q \in U (p_{k+1} \dots p_n)$ olur.

Tanım 2.6: $a, b \in R$ olmak üzere $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ilgilidir denir.

Bir $r = (p_1^1 \dots p_k^1) (p_1 \dots p_n)$ olan U -ayrışımında $(p_1 \dots p_n)$ olan U -ayrışımında $(p_1 \dots p_n)$ bölümüne relevant (uygun) kısım, $(p_1^1 \dots p_k^1)$ bölümüne de relevant olmayan kısım denir.

Önerme 2.7: Eğer $r = (p_1^1 \dots p_k^1) (p_1 \dots p_n)$, $r \in R$ 'nin bir U -ayrışımı ise o zaman $p_1 \dots p_n$ ve r ilgilidir.

İspat: U -ayrışımının tanımından $i = 1, 2, \dots, k$ için

$p_i^1 \in U (p_1 \dots p_n)$ 'dir. O halde önerme 2.3 (i)'den

$p_1^1 \dots p_k^1 \in U (p_1 \dots p_n)$ olur. Böylece $p_1 \dots p_n$ ile r ilgilidir.

Şimdi Fletcher'in tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka tanımını verelim.

Tanım 2.8: Bir R halkası aşağıdaki özellikleri gerçeklerse R 'ye tek türlü çarpanlara ayrılabilen halka (TÇH) denir.

TÇH 1: R 'nin birimsel olmayan her elemanının bir U -ayrışımı vardır.

TÇH 2: Eğer $r \in R$ 'nin iki U -ayrışımı

$r = (p_1^1 \dots p_k^1) (p_1 \dots p_n) = (q_1^1 \dots q_l^1) (q_1 \dots q_m)$ ise o zaman $m = n$ olur ve $i = 1, \dots, n$ için q_i 'lerin uygun bir numaralandırılmasından sonra p_i ve q_i 'ler ilgilidir.

Örnek: Z_8 'in elemanlarının U-ayrışimleri aşağıdaki gibidir. Önce Z_8 'in birimsel elemanlarını saptayalım

$(8, a) = 1 \Leftrightarrow a \in U_{Z_8}$ 'dir. Bu sonucu kullanarak Z_8 'in birimselleri $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}$ kalan sınıflarıdır.

Z_8 'in indirgenemez elemanları $\bar{2}, \bar{6}$ kalan sınıflarıdır ve bunlar ilgilidirler

Buna göre $\bar{4}, \bar{0}$ 'nın bazı U-ayrışımı şöyledir.

$$\bar{4} = () (\bar{2} \cdot \bar{2}) = () (\bar{6} \cdot \bar{6})$$

$$\bar{0} = () (\bar{2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2}) = () (\bar{6} \cdot \bar{6} \cdot \bar{6})$$

Buradan Z_8 TÇH1 ve TÇH2 özelliklerini sağladığı görülür ve Z_8 bir TÇH'dır

Önerme 2.9: R bir tamlık bölgesi olsun. R 'nin bir TÇH olabilmesi için gerek ve yeter koşul R 'nin bir TÇB olmasıdır.

İspat: R bir TÇH olsun. R 'nin sıfırdan farklı ve birimsel olmayan elemanlarının bir U-ayrışimleri vardır.

$r \neq 0$ $r \in R$ ve r birimsel olmasın. $\alpha \in U(r)$ olsun.

$U(r) = \{\alpha \in R \mid \text{uygun } \beta \in R \text{ 'ler için } \alpha\beta r = r\}$ 'dir.

R bir tamlık bölgesi olduğundan $\alpha\beta r = r$ ifadesinde kısaltma özelliği

kullanılırsa $\alpha\beta = 1$ bulunur ki bu α 'nın birimsel olduğunu gösterir.

O zaman R 'nin birimsel olmayan ve sıfırdan farklı elemanlarının U-sınıfları birimsellerden oluşacağından R bir TÇB'dir. Tersine eğer R bir TÇB ise o zaman R 'nin sıfırdan farklı ve birimsel olmayan her elemanı tek türlü

çarpanlara ayrılabilir. $U(O) = R$ ve bütün $O \neq a \in R$ 'ler için $O \notin U(a)$

olduğundan sıfır elemanı daima $O = (p_1^{-1} \dots p_n^{-1})(O)$ şeklinde bir U-ayrışımına sahiptir. O halde sıfır tek türlü çarpanlara ayrılabilir ve R bir TÇH'dır.

Aşağıdaki sonuç iki TÇH'nin direct toplamının bir TÇH olduğunu gösterir.

Önerme 2.10: Eğer R_1 ve R_2 iki TÇH ise o zaman

$R_1 \oplus R_2$ 'de bir TÇH'dır.

İspat: p, q indirgenemezler ve u, v sırasıyla R_1 ve R_2 'nin birimsel elemanları olmak üzere $R_1 \oplus R_2$ 'nin indirgenemezleri (p, v) ve (u, q) şeklindeki elemanlardan oluşur.

r_1, r_2 birimsel olmamak üzere $(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$ 'yi göz önüne alalım. r_1 ve r_2 'nin U-ayrışimleri aşağıdaki gibi olsun.

$$r_1 = (p_1^{-1} \dots p_k^{-1})(p_1 \dots p_n) \quad r_2 = (q_1^{-1} \dots q_l^{-1})(q_1 \dots q_m)$$

Böylece $(r_1, r_2) = (p_1^{-1}, 1) \dots (p_n, 1)(1, q_1^{-1}) \dots (1, q_m)$ bir indirgenemez ayrışımıdır. O halde TÇH 1 önerme 2.5'den gerçekleşir.

$(r_1, r_2) \in R_1 \oplus R_2$ 'nin iki U-ayrışımı şöyle olsun.

$$(r_1, r_2) = \{(p_1^{-1}, s_1^{-1}) \dots (p_k^{-1}, s_k^{-1})\} \{(p_1, s_1) \dots (p_n, s_n)\}$$

$$(r_1, r_2) = \{(t_1^{-1}, q_1^{-1}) \dots (t_l^{-1}, q_l^{-1})\} \{(t_1, q_1) \dots (t_m, q_m)\}$$

$$\text{Böylece } U = p_1 \dots p_q \quad \mu = t_1 \dots t_h \text{ ve } \lambda = s_{q+1} \dots s_n$$

$v = q_{h+1} \dots q_m$ sırasıyla R_1 ve R_2 'nin birimseli ve $1 \leq q \leq n, 1 \leq h \leq m$ olmak

üzere r_1 ve r_2 'nin

$$r_1 = (p_1^{-1} \dots p_k^{-1}) \{(U p_{q+1}) \dots p_n\} = (t_1^{-1} \dots t_l^{-1}) \{(\gamma t_{n+1}) \dots t_m\} \text{ ve}$$

$$r_2 = (s_1^{-1} \dots s_k^{-1}) (s_1 \dots (s_q v)) = (q_1^{-1} \dots q_l^{-1}) (q_1 \dots q_h \lambda)$$

Şeklinde iki U-ayrışımı vardır. R_1 ve R_2 TÇH olduğundan $n-q = m-h$ ve $q = h$ olur. Buradan $n = m'$ 'dir. $i = q + 1, \dots, n$ için p_i ile t_i ve $j = 1, \dots, q$ için s_j ile q_j uygun bir numaralandırılmadan sonra ilgilidirler. O halde $i = 1, \dots, n$ için (p_i, s_i) ve (t_i, q_i) ilgilidirler. Böylece TÇH2 koşulunda gerçekleşir ve $R_1 \oplus R_2$ bir TÇH'dir.

Tümevarım metodu ile bu sonucu sonlu bir sayıya kadar genelleştirebiliriz.

Sonuç: $i = 1, \dots, n$ için R_i bir TÇH ise o zaman $R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ bir TÇH'dir.

3.Esas İdeal Halkaları

Tamlık bölgesi olma durumunda bir esas ideal bölgesinin (EİB) bir TÇB olduğu iyi bilinir. Bir esas ideal halkasının (EİH) bir TÇH olduğunu ispatlayalım.

Tanım 2.11: R halkası, eğer $P \neq R$ şeklinde sadece bir P asal idealine sahipse ve eğer P nilpotent ise yani $m > 0$ her bir m için $P^m = (0)$ ise R 'ye bir özel EİH denir.

Önerme 2.12: Her EİH, EİB'lerin ve özel EİH'lerinin sonlu bir direct toplamıdır.

O halde Önerme 2.10'un sonucundan aşağıdaki sonucu ispatlamak yeterli olacaktır.

Önerme 2.13: R bir özel EİH ise o zaman R bir TÇH'dir.

İspat: Bir indirgenemez ayrışımına sahip olmayan ve birimsel olmayan elemanlarla üretilen esas idealleri düşünelim. R noetherian olduğundan bu sınıfın bir maksimal üyesi vardır. $a \in R$ indirgenemez olmamak koşuluyla bu maksimal üye (a) olsun. a, a_i, y_i bölmeyecek ve tüm $i = 1, \dots, n$ için $(a) \subset$

(a_1) olacak şekilde $a = a_1 \dots a_n$ yazılır. a_i bir indirgenemez ayrışımına sahip olduğundan a 'da bir indirgenemez ayrışımına sahip olacaktır. Bu bir çelişkidir. $P^m = (0)$ ve m minimal olacak şekilde P , y_i R 'nin tek asal ideali olarak alalım. Eğer $m = 1$ ise o zaman R bir cisimdir ve böylece bir TÇH'dir. Eğer $m > 1$ olursa $P = (\alpha)$ alalım $r \notin (\alpha)$ olması r 'nin bir birimsel olduğunu belirtir. Aksi taktirde (r) , asal olan bir maksimal ideal içinde kapsanacaktı. α 'nın ilgililik farkıyla R 'de tek indirgenemez olduğunu söyleyebiliriz. β , α ile ilgili olmayan bir başka indirgenemez olsun. β birimsel olmadığından $\beta \in (\alpha)$ 'dır ve $\beta = r \alpha$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. β 'in indirgenemez olduğundan bazı $s \in R$ 'ler için $r = \beta s$ 'dir. O halde $\beta = \beta s \alpha$ ve $\beta(1-s\alpha) = 0$ olur. $1 = 1-(s \alpha)^m = (1-s \alpha) (1+s \alpha + \dots + (s \alpha)^{m-1})$ ve böylece $1-s \alpha$ bir birimseldir. O halde $\beta = 0$ ve R bölgedir. $m > 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece birimsel olmayan her $r \in R$, u birimsel ve $0 < k < l \leq m$ olmak üzere, $r = u \alpha^k$ şekline sahiptir. Burada k tekdir. Çünkü burada $0 < k < l \leq m$ olmak üzere eğer $u \alpha^k = v \alpha^l$ ise o zaman $\alpha^{-l+k+m} = 0$ 'dır ve bu m 'in minimal oluşuyla çelişir. O halde $r = () ((u \alpha) \alpha^{k-1})$ ve $O = (p_1^1 \dots p_l^1) (\alpha^m)$ sırasıyla $r \neq 0$ ve sıfır elemanının tek türlü U-ayrışımılarıdır. Böylece R bir TÇH'dir.

Sonuç: Her EİH bir TÇH'dir.

Bu sonuçtan ve önerme 2.10'dan aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Z 'yi göz önüne alırsak, $Z \oplus Z$ bir TÇH (tamlık bölgesi değildir) ve aynı zamanda bir EİH olan Z_4 tamlık bölgesi olmayan bir TÇH'dir

4.Pseudo Bölgeleri

Önerme 2.10'un sonucundan sonlu sayıda TÇB'lerin direct toplamının bir TÇH olduğunu biliyoruz. Fakat karşıtı her zaman doğru olmaz. TÇH'lerin yapısını araştıralım ve her TÇH'nin, TÇB'lerin ve özel TÇH'ların sonlu bir direct toplamı olduğunu gösterelim.

Bunun için bazı ön bilgiler verelim.

Tanım 2.14: Sıfırdan farklı tüm $r \in R$ 'ler için $U(r)$ birimlerin sınıfı ise R 'ye bir pseudo bölgesi denir.

Önerme 2.15; i) $p \in R$ indirgenemez olmak üzere $q \in R$ için $q|p$ ise ya p ile q ilgilidir ya da $q \in U(p)$ 'dir.

ii) Bir pseudo bölgede indirgenemezle ilgili olan elemanda indirgenemezdir.

Bir TÇH olan pseudo bölgeyi TÇPB ile gösterelim.

Önerme 2.16: i) Her TÇPB ilgililik farkı düşünölmeksizin tam olarak bir indirgenemez içerir ayrıca bu indirgenemez sıfır bölendir.

ii) Tek sıfır bölen indirgenemezi sıfırdan farklı olan bir TÇPB bir reqüler (sıfır böleni olmayan) indirgenemezi içermez.

İspat: i) $q \neq 0$ olmak üzere R 'de ilgili olmayan iki sıfır bölen indirgenemezi p ve q olsun. Eğer $p = 0$ ise R bir bölge olur. Çünkü p indirgenemezdır ve sıfır indirgenemez ise R bölgedir. Ayrıca R bölge olduğunda $q = 0$ olmalıdır.

Çünkü R bir bölge olduğunda sıfır bölen içermez. Oysa ki q sıfır bölen indirgenemezi idi.

$0 \neq a, b \in R$ için $p \neq 0$ ve $ap = 0 = bq$ olsun

$a = a_1 a_2 \dots a_l$; $b = b_1 b_2 \dots b_k$ a ve b indirgenemez ayrışımıları olsun. Bu taktirde

$O = (\dots) (a_1 \dots a_l p) = (\dots) (b_1 \dots b_k q)$ yazabiliriz. Burada p ve b_k TÇH 2'den ilgili olurlar. Bir $u \in R$ birimseli için $b_k = pu$ yazılabilir. O zaman $O = (\dots) (b_1 b_2 \dots b_{k-1} pq)$ yazılabilir. p ve q ile ilgili elemanlar bir araya getirilip düzenlenirse

$$O = (\dots) (p^r q^s c_1 \dots c_g) \quad r, s > 0 \quad i = 1, 2, \dots, g \text{ için}$$

c_i 'ler indirgenemez ve p ya da q ile ilgili değildirler.

$$O = p^r (p - (p - q^s c_1 \dots c_g)) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Burada $p - q^s c_1 \dots c_g$ birimsel değildir. Eğer u gibi bir birimsel olsaydı $u = p - q^s c_1 \dots c_g$ $O = p^{r+1} - p^r u$ ve $p^{r+1} = p^r u$ ve her ik tarafı u^{-1} ile çarparsak $p^r = p^{r+1} u^{-1}$ ve $pu^{-1} p^r = p^r$ olur ve $p \in U(p^r)$ 'dir.

$p^r \neq 0$ olduğundan ve R bir TÇPB olduğundan, sıfırdan farklı elemanların U sınıfları birimsellerden oluşacağından p birimseldir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $p \in R$ sıfır bölen indirgenemezi olarak alınmıştı.

O halde $p - q^s c_1 \dots c_g$ birimsel değildir. O zaman $p - q^s c_1 \dots c_g$ 'nin bir indirgenemez ayrışımı vardır.

$$p - q^s c_1 \dots c_g = d_1 d_2 \dots d_h \text{ şeklinde bir indirgenemez ayrışımına sahip olsun.}$$

Buradan $p^{r+1} = p^r d_1 \dots d_h$ yazılabilir. U -ayrışimleri dikkate alınırsa p ile d_1 ilgilidir. O zaman bir v birimseli için $d_1 = pv$ yazılır. O halde $p - q^s c_1 \dots c_g = p v d_2 \dots d_h$

$q^s c_1 \dots c_g = p (1 - v d_2 \dots d_h)$ olur. Sol taraf sıfırdan farklı olduğundan $1 - v d_2 \dots d_h \neq 0$ 'dır. Böylece

$$p \notin U(1 - v d_2 \dots d_h) \text{ Buradan } p, q \text{'nün ilgilileri veya bazı } i = 1, 2, \dots, g \text{ için}$$

c_i 'lerle ilgilidir. Bu ise bir çelişkidir. O halde ilgililik farkı düşünülmezsizin

R' 'de en çok bir sıfır bölen indirgenemezi vardır. Sıfırın bir sıfır böleni içeren bir indirgenemez ayrışımı olduğundan ispat tamamlanır.

ii) Bir TÇPB'de sıfırın ayrışımı $O = (p_1 \dots p_k) (\alpha^m)$ şeklinde olacaktır. Öyle ki burada α , tek sıfır bölen indirgenemezidir. p , R' 'de bir regüler

indirgenemez olsun. O zaman $p+\alpha$ birimsel değildir. Eğer $p+\alpha = u$ gibi bir birimsel olsaydı $\alpha = u-p$ ve her iki tarafı α^{m-1} ile çarparsak

$$\alpha^{m-1} \alpha = \alpha^{m-1} u - \alpha^{m-1} p \text{ ve } \alpha^m = \alpha^{m-1} u - \alpha^{m-1} p \text{ ve } \alpha^m = 0 \text{ olduğundan } p \alpha^{m-1} =$$

$$u \alpha^{m-1} \text{ ve her iki tarafı } u^{-1} \text{ ile çarparsak } p u^{-1} \alpha^{m-1} = \alpha^{m-1} \text{ olur ve buradan}$$

$$p \in U(\alpha^{m-1}) \text{ yazılır. Bu bir çelişkidir. O halde } p+\alpha \text{ birimsel değildir. O zaman}$$

$p+\alpha$ 'nın bir indirgenemez ayrışımı vardır.

$p+\alpha = q_1 \dots q_l$ şeklinde bir indirgenemez ayrışımına sahip olsun.

$$p+\alpha = q_1 \dots q_l \text{ her iki tarafı } \alpha^{m-1} \text{ ile çarparsak } (p+\alpha) \alpha^{m-1} = q_1 \dots q_l \alpha^{m-1}$$

$$p \alpha^{m-1} + \alpha^m = q_1 \dots q_l \alpha^{m-1} \text{ ve } O = (p_1 \dots p_k) (\alpha^m) \text{ olduğundan } p \alpha^{m-1} = q_1 \dots q_l \alpha^{m-1}$$

$$^1 \text{ şeklinde yazılır. Her iki tarafın } U\text{-ayrışımı göz önünde tutulursa } p, q_1 \text{ ile}$$

$$\text{ilgilidir ve } p|\alpha^1 \text{ dır. Önerme 2.15(i)'den } p \text{ ile } \alpha \text{ ilgilidir ki bu bir çelişkidir.}$$

Tanım 2.17: Bir R halkasında $p \in R$ birimsel olmamak üzere $a, b \in R$ için $p|ab$ olduğunda $p|a$ veya $p|b$ oluyor ise p elemanına asal eleman denir.

Bu tanımdan, bir halkada her asalın bir indirgenemez olduğu açıktır. Ve

ayrıca bir halkada, bir asalla ilgili olan elemanlarında asal olduğunu

kolaylıkla görebiliriz. Şimdi

Önerme 2.16 ile her indirgenemezin asal olması TÇH2'nin yerine verilebilir.

Önerme 2.18: Her birimsel olmayan elemanın bir indirgenemez ayrımı vardır ve her indirgenemez bir asaldır özelliğiyle R bir Pseudo bölge olsun. R

ilgililik farkıyla tam olarak bir sıfır bölen indirgenemezi içerir. Eğer bu indirgenemez sıfır değilse R bir regüler indirgenemez içermez.

FLETCHER , 1969

Önerme 2.19: R , her birimsel olmayan elemanın bir indirgenemez ayrışımı vardır özelliğine sahip bir Pseudo bölge olsun. R 'nin bir TÇH olması için gerek ve yeter koşul her indirgenemez elemanın asal olmasıdır.

İspat: R bir TÇH olsun. R , aynı zamanda hipotezde verilen özellikleri sağlayan bir Pseudo bölge olduğundan R tam olarak bir sıfır bölen indirgenemezi içerir ve bu eleman α olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise R bir bölge olur ve her indirgenemez asaldır. $\alpha \neq 0$ ise R bir regüler indirgenemez içermez. O halde α R 'nin her birimsel olmayan elemanını böler ve böylece α asaldır. Tersine her indirgenemez asal olsun. R tam olarak bir sıfır bölen indirgenemenizi içerir. Bu eleman α olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise R bölge ve aynı zamanda bir TÇH'dir. Eğer $\alpha \neq 0$ ise her eleman u birimsel olmak üzere $u\alpha^k$ şeklinde yazılır. Sıfırın tek türlü çarpanlara ayrılabilirdiği açıktır. $0 \neq r \in R$ için $r = u\alpha^k = v\alpha^l$ ve $k > l$ olsun. O zaman $\alpha \in U(\alpha^l)$ O halde $k = l$ dir ve r tek türlü çarpanlara ayrılır. Böylece R bir TÇH dır.

5.Yapı Teoremi

Bu kısımda her TÇH nin TÇB lerin ve özel EİH ların sonlu bir direct toplamı olduğunu gösterelim. Önce her TÇH nin TÇPB lerin sonlu bir toplamına izomorfik olduğunu ispatlayalım. İlk olarak bir başlangıç sonucu verelim TÇH nin sıfır elemanının standart U- ayrışımı $O = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ olsun.

Önerme 2.20 : Eğer R bir TÇH ve $O = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ ın şeklinde bir U-ayrışımı varsa

i) $i = 1, 2, \dots, n$ için $0 \leq d_i < m_i$ olmak üzere $\alpha_i \notin U(\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_i^{d_i} \dots \alpha_n^{m_n})$ dir.

ii) $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha_i \in U(\alpha_i^{m_i})$ dir.

İspat: i) U-ayrışımı tanımdan açıktır.

ii) $i = 1$ ve $\alpha_1 = \alpha$, $m_1 = m$ alalım $n=1$ ise o zaman

$O = () (\alpha^m)$ ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ dir.

$n > 1$ olsun o zaman $O = \alpha^m (\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}))$ olur.

Eğer $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$ birimsel ise

O zaman $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = u$ gibi bir birimsel olsun.

$O = \alpha^m (\alpha - u)$ ve $O = \alpha^m \alpha - \alpha^m u$ buradan $\alpha^m \alpha = \alpha^m u$ her iki tarafı u^{-1} ile çarparsak ve düzenlersek

$\alpha u^{-1} \alpha^m = \alpha^m$ olur ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ olduğu görülür.

Eğer $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$ ifadesi birimsel değilse bir $c_1 \dots c_k$ indirgenemez ayrışımı vardır.

$\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = c_1 c_2 \dots c_k$

$O = \alpha^m (\alpha - c_1 c_2 \dots c_k) \Rightarrow \alpha^{m+1} = \alpha^m c_1 \dots c_k$ bulunur.

i) den α^{m+1} 'in U-ayrışımı ya $\alpha^{m+1} = (\alpha) (\alpha^m)$ ya da $\alpha^{m+1} = () (\alpha^{m+1})$

şeklinde olmalıdır. Birinci ayrışımından $\alpha \in U(\alpha^m)$ elde edilir. İkinci ayrışımında

$j = 1, 2, \dots, k$ için bazı c_j 'ler α ile ilgilidir. Örneğin c_1 , α ile ilgili olsun. d

birimsel olmak üzere $c_1 = \alpha d$ yazılır. O zaman

$\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = \alpha d c_2 \dots c_k$ ve buradan

$\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = \alpha (1 - d c_2 \dots c_k)$ olur. O halde α , sağ taraftaki U-ayrışımının relevant kısmında değildir. Ve böylece $\alpha \in U(\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n})$ ve bu i ile çelişir.

Önerme 2.21: R bir TÇH olsun ve $O = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ şeklinde yazılsın.

i) Eğer $r \in U(\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n})$ ise o zaman $r + \alpha^m R$, $R/\alpha^m R$ 'nin bir birimselidir.

($\alpha_1 = \alpha$, $m_1 = m$ alalım) özel olarak

$\alpha_i + \alpha_j^{m_j} R$ ($i \neq j$), $R/\alpha_j^{m_j} R$ 'nin bir birimselidir.

ii) $i \neq j$ için $\alpha_i^{m_i} R + \alpha_j^{m_j} R = R$ 'dir.

İspat: i) $r \in U(\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n})$ olsun. O zaman $\gamma \in R$ için $r\gamma\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$ 'dir. Bu $\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} (r\gamma - 1) = 0$ olduğunu gösterir. O halde $\alpha^m | r\gamma - 1$ 'dir. Bu ise $R/\alpha^m R$ 'de, $(r + \alpha^m R)(\gamma + \alpha^m R) = (1 + \alpha^m R)$ ve $r + \alpha^m R$ 'nin bir birimsel olduğunu verir. Önerme 2.20 (ii)'den $\alpha_i \in U(\alpha_i^{m_i})$ olur ve böylece $i \neq j$ için

$\alpha_i \in U(\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_{j-1}^{m_{j-1}} \alpha_{j+1}^{m_{j+1}} \dots \alpha_n^{m_n})$ dir. Benzer şekilde (i)den $\alpha_i + \alpha_j^{m_j} R$, $R/\alpha_j^{m_j} R$ 'nin bir birimselidir.

ii) (i)den $\alpha_i^{m_i} + \alpha_j^{m_j} R$, $R/\alpha_j^{m_j} R$ ($i \neq j$)de bir birimseldir. Böylece $r_1, r_2 \in R$ için

$\alpha_i^{m_i} r_1 + \alpha_j^{m_j} r_2 = 1$ yazabiliriz. Bu $\alpha_i^{m_i} R + \alpha_j^{m_j} R = R$ olduğunu gösterir.

Önerme 2.21 (i)den $\alpha_1^{m_1}R, \dots, \alpha_n^{m_n}R$ ideallerinin ikişer ikişer comaximal olduğunu görürüz. Bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Önerme 2.22: Eğer R bir TÇH ve $O = (\quad) (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ şeklinde yazılırsa o zaman

$$R \cong R/\alpha_1^{m_1}R \oplus \dots \oplus R/\alpha_n^{m_n}R \text{ 'dir.}$$

İspat: Genel olarak; eğer $I_1, \dots, I_n$, R 'nin ikişer ikişer comaximal idealleri ise o zaman $I_1 \cap I_2 \dots \cap I_n = I_1 \dots I_n$ 'dir. Bunun için $n = 2$ kabul edelim, o zaman

$$I_1 \cap I_2 = (I_1 + I_2) (I_1 \cap I_2) = I_1 (I_1 \cap I_2) + I_2 (I_1 \cap I_2) \subset I_1 I_2 + I_2 I_1 = I_1 I_2$$

$n-1$ çarpan için $I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} = I_1 \dots I_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$I_1 \cap \dots \cap I_{n-1} \cap I_n = (I_1 \cap \dots \cap I_{n-1}) \cap I_n = (I_1 \dots I_{n-1}) I_n \text{ 'dir.}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$ için $I_i = \alpha_i^{m_i}R$ ve $R_i = \cap_{j \neq i} I_j$ ($i \neq j$ için) alalım. O zaman $R_i + I_i = R$ yazılır. O halde bir $r \in R$ için $r = r_i + y_i$ ($r_i \in R_i$, $y_i \in I_i$) yazabileceğiz. $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$ olmak üzere

$$r - r_j = y_j \in I_j \text{ ve } r_i \in R_i \subset I_j \text{ olduğundan } r - \sum_{i=1}^n r_i = (r - r_j) - \sum_{i \neq j} r_i \in I_j \text{ 'dir. Bu}$$

durumda

$$r - \sum_{i=1}^n r_i \in \bigcap_{j=1}^n I_j = (0) \text{ 'dır. Dolayısıyla } r = \sum_{i=1}^n r_i \text{ ve } R = R_1 + \dots + R_n \text{ olur.}$$

$$R_i \cap \sum_{j \neq i} R_j \subset R_i \cap I_i = (0) \text{ olduğundan } R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n \text{ yazılır. Şimdi } R_i \cong R/I_i$$

olduğunu gösterelim. $e_i \in R_i$ için $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ yazalım.

$f: R \rightarrow R_i \forall r \in R$ için $f(r) = re_i$ ($i=1,2,\dots,n$) fonksiyonunu tanımlayalım. f bir halka homomorfizmasıdır. Bunu gösterelim

i) $r_1, r_2 \in R$ için $f(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)e_i = r_1e_i + r_2e_i = f(r_1) + f(r_2)$

ii) $r_1, r_2 \in R$ için $f(r_1 r_2) = (r_1 r_2)e_i = (r_1e_i)(r_2e_i) = f(r_1).f(r_2)$ yazılır.

$\text{Ker } f, a = \sum_{i \neq j} ae_i$ elemanlarından oluşur.

O halde $\text{Ker } f = I_i$ 'dir ve $R_i \cong R/I_i$ 'dir.

Böylece $R \cong R/\alpha_1^{m_1} R \oplus \dots \oplus R/\alpha_n^{m_n} R$ 'dir.

Her bir $R/\alpha_i^{m_i} R$ 'nin bir TÇPB olduğunu ispatlayalım. İlk olarak aşağıdaki sonuç gereklidir.

Önerme 2.23: Eğer R bir TÇH ise ve $R \cong R_1 \oplus R_2$ şeklinde yazılırsa o zaman R_1 ve R_2 TÇH'dirler.

İspat: $r \in R_1$ birimsel olmayan bir eleman olsun. O zaman $(r, 1)$ R 'de birimsel değildir. O halde indirgenemez ayrışımı vardır.

$(r, 1) = (a_1, b_1)(a_2, b_2) \dots (a_n, b_n)$ şeklinde bir indirgenemez ayrışımına sahip olsun.

$r \in R_1$ için $r = a_1 a_2 \dots a_n$ olur ve R_2 'de b_i 'ler birimseldir.

($i=1, 2, \dots, n$) (a_i, b_i) , R 'nin bir indirgenemezi olduğundan a_i , R_1 'in bir

indirgenemezidir. Şimdi $r \in R_1$,

$r = (p_1^1 \dots p_k^1)(p_1 \dots p_n) = (q_1^1 \dots q_l^1)(q_1 \dots q_m)$ şeklinde iki U-ayrışımına sahip olsun. O halde

$$(r, 1) = ((p_1^1, 1) \dots (p_k^1, 1))((p_1, 1) \dots (p_n, 1)) = ((q_1^1, 1) \dots (q_l^1, 1))$$

$((q_1, 1) \dots (q_m, 1))$ şeklinde R 'de $(r, 1)$ 'in iki U-ayrışımını bulabiliriz. R bir

TÇH olduğundan $m = n$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için uygun bir numaralandırılmadan

sonra p_i ve q_i 'ler ilgilidir. Böylece R_1 bir TÇH'dir. Benzer şekilde R_2 'de bir TÇH'dir.

Sonuç: Eğer R bir TÇH ise ve $R \cong R/\alpha_1^{m_1}R \oplus \dots \oplus R/\alpha_n^{m_n}R$ yazılırsa o zaman $i = 1, \dots, n$ için $R/\alpha_i^{m_i}R$ bir TÇH'dır.

Önerme 2.24: Eğer R bir TÇH ve $O = (\quad) (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ şeklinde yazılırsa o zaman $i = 1, \dots, n$ için $R/\alpha_i^{m_i}R$ bir TÇPB'dir.

İspat: R bir TÇH olsun ve $O = (\quad) (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ yazılsın. O zaman $R/\alpha_i^{m_i}R$ 'nin, $\alpha_i + \alpha_i^{m_i}R$ gibi tek bir sıfır bölen indirgenemezi vardır ve $R/\alpha_i^{m_i}R$ 'nin birimsel olmayan bir elemanı $i = 1, \dots, n$ için bir indirgenemez ayrışımına sahiptir. $R/\alpha_i^{m_i}R = A$ ve $\alpha_i = \alpha$, $m_i = m$, $\alpha_i^{m_i}R = I$ alalım. O halde $I = (\quad) (\alpha^m + I)$ 'dir. $m=1$ ise o zaman A bir bölgedir ve böylece bir pseudo bölge olur. $m>1$ ve $a+I$ 'i A 'nın bir regüler olmayan elemanı kabul edelim. Bu durumda $a+I = b\alpha^k + I$ 'dir. Öyle ki burada $b+I$ regüler bir eleman ve $0 < k < m$ 'dir. $U(b\alpha^k + I) = U(\alpha^k + I)$ olduğundan sadece $U(\alpha^k + I)$ 'yi göz önüne alabiliriz. Eğer $\alpha^k + I = (\mu + I)(\nu + I)$ ise o zaman $\alpha^k(1 - \mu\nu) \in I$ ve $(1 - \mu\nu) + I$ regüler değildir. $1 \leq h \leq m$ için $\alpha^h + I \mid (1 - \mu\nu) + I$ ve $t \in R$ için $(1 - \mu\nu) + I = (\alpha^h + I)(t + I) = \alpha^h t + I$ olduğunu kabul edelim. Burada $(1 - \alpha^h t) + I$, $(1 - (t\alpha^h)^m) + I = 1 + I$ 'nin bir bölenidir. O halde $\mu\nu + I$ bir birimseldir ve $U(\alpha^k + I)$ birimsellerin sınıfıdır. Böylece A bir pseudo bölgedir.

Şimdi temel sonucu verelim.

Önerme 2.25: Eğer R bir TÇH ise ve $O = (\quad) (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ yazılırsa o zaman

$R \cong R/\alpha_1^{m_1}R \oplus \dots \oplus R/\alpha_n^{m_n}R$ olur. Öyle ki burada $i = 1, \dots, n$ için $R/\alpha_i^{m_i}R$ bir TÇPB'dir.

İspat: Önerme 2.22, Önerme 2.23 sonuç ve Önerme 2.24'den istenilen elde edilir.

Şimdi EİH'lerin ve TÇH'lerin yapıları arasında bir bağlantı kurulabilir.

Tanım 2.11'de bir özel EİH tanımladık. Biz burada bir özel TÇH'nin tanımını verelim ve bir özel TÇH ile bir özel EİH'nin eşdeğer kavramlar olduğunu ispatlayalım.

Tanım 2.26: R bir TÇH olmak üzere $R, P \neq R$ gibi sadece bir asal ideale sahipse ve P nilpotent ise R 'ye bir özel TÇH denir.

Önerme 2.27: Bir R halkasının bir özel EİH olması için gerek ve yeter koşul R 'nin bir özel TÇH olmasıdır.

İspat: R bir özel EİH ise o zaman Önerme 2.13'den R bir özel TÇH olur.

R bir özel TÇH olsun. Buradan R 'ye bir cisimdir (ve açık olarak bir özel EİH) ya da R bir belge değildir.

R bir bölge olmasın ve $i = 1, 2, \dots, n$ için R_i 'ler birer TÇPB olmak üzere $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ olduğunu kabul edelim.

q_1, R_1 'de indirgenemez ve $j = 2, \dots, n$ için u_j, R_j 'de bir birimsel olmak üzere $\alpha = (q_1, u_2, \dots, u_n) \in R$ alalım.

Eğer R 'de $\alpha | ab$ ise o zaman R 'de

$(q_1, u_2, \dots, u_n) | (a_1, \dots, a_n) (b_1, \dots, b_n)$ ve R_1 'de $q_1 | a_1 b_1$ 'dir. R_1 , Pseudo bölge olduğundan q_1 asaldır ve kabul edelim ki $q_1 | a_1$ olsun. Bu R 'de $\alpha | a$ ve α 'nın asal olduğunu gösterir. R bir özel TÇH olduğundan, sadece bir sıfır

bölen indirgenemezini kapsar. O halde Önerme 2.24'ün ispatındaki gibi aynı şekilde R bir pseudo bölgedir.

$O = (\quad) (\alpha^m)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall r \in R$ için u birimsel olmak üzere $0 \leq k \leq m$ $r = u \alpha^k$ şeklindedir. R 'nin her I ideali için k minimum ve $u \alpha^k \in I$ olmak üzere $I = (u \alpha^k)$ şeklinde yazılabilir. O halde R bir özel EİH'dir.

Önerme 2.28: Bir TÇPB ya bir TÇB ya da özel EİH'dır.

İspat: R bir TÇPB ve $O = (\quad) (\alpha^m)$ şeklinde yazılmak üzere bir bölge değilse o zaman α , R 'nin her P asal idealinde kapsanır.

Önerme 2.16'dan R 'nin tek bir (α) nilpotent asal ideali vardır. O halde R bir özel EİH'dır.

Bu durumda EİH'lar için yapı teorimine (Önerme 2.12) benzeyen aşağıdaki yapı teorimini verebiliriz.

Önerme 2.29: Her TÇH, TÇB'lerin ve özel EİH'ların sonlu bir direct toplamıdır.

İspat: Önerme 2.25 ve Önerme 2.28'den elde edilir.

6. Temel Sonuçlar

Bu kısımda Teorem 2.19'u genelleştirelim. Birimsel olmayan her elemanı indirgenemez bir ayrışımaya sahip olan bir halkanın TÇH olması için gerek ve yeter koşulun her indirgenemizin asal olduğunu ispatlayalım. Bunun için ilk olarak bazı hazırlayıcı sonuçlara gerek vardır.

Önerme 2.30. R , TÇHI'i sağlayan bir halka ve R 'deki her indirgenemizin asal olduğunu kabul edelim. $i \neq j$ için α_i ve α_j ile $r \neq s$ için β_r ve β_s ilgili olmayacak şekilde eğer

$$0 = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}) = () (\beta_1^{k_1} \dots \beta_n^{k_n})$$

ise o zaman $n=$ ve $i=1, \dots, n$ için β 'ların uygun bir şekilde

numaralanmasından sonra α_i ve β_i ilgilidir. (Bu aşamada $m_i \neq k_j$ gereklidir)

İspat: $\alpha_i \mid \beta_1^{k_1} \dots \beta_n^{k_n}$ ($i = 1, \dots, n$) ve α_i asal olduğundan bir $j=1, \dots, n$ için

$\alpha_i \mid \beta_j$ 'dir. $\alpha_i \mid \beta_k$ olsun. Benzer şekilde $\beta_k \mid \alpha_t$ alalım. Bu $\alpha_i \mid \alpha_t$ olmasını

gerektirir. Önerme 2.15 (i) ya α_i ve α_t ilgilidir, ya da $\alpha_i \in U(\alpha_t)$ 'dir. O halde

$i=t$ ve α_i, β_k ilgilidir. Böylece α_1 ve $\beta_{k_1}, \dots, \alpha_n$ ve β_{k_n} ilgilidir. Burada eğer

β_{k_1} ve β_{k_1} ilgili ise o zaman α_r ve α_s ilgilidir ve $r=s$ 'dir. Bu β_{k_j} 'lerin farklı

ilgililik sınıflarında ve $n \geq n$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde β 'lar için n

$\geq n$ olduğu gösterilebilir. O halde $n=$ 'dir. Aynı zamanda β 'ların uygun bir

şekilde numaralanmasından sonra α_i ve β_i ilgilidir.

Önerme 2.31. R TÇH1'i sağlayan bir halka ve R 'nin her indirgenemez

elemanı asal olsun. $i \neq j$ ve $i, j=1, \dots, n$ için α_i ve α_j ilgili olmamak üzere eğer

$0 = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n})$ bir U-ayrışımı ise o zaman

(i) $i=1, \dots, n$ için $0 \leq d_i < m_i$ olmak üzere $\alpha_i \notin U(\alpha_1^{d_1} \dots \alpha_n^{d_n})$ 'dir.

(ii) $i=1, \dots, n$ için $\alpha_i \in U(\alpha_i^{m_i})$ 'dir.

İspat (i). Açıktır.

(ii) $i=1$ ve $\alpha_1 = \alpha$, $m_1 = m$ alalım. $n=1$ 'in durumunda açıkça $\alpha \in U(\alpha^m)$ 'dir. Şimdi

$n > 1$ olsun. O halde $0 = \alpha^m (\alpha - (\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}))$ 'dir. Eğer $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$

bir birimsel ise o zaman $\alpha^{m+1} = \alpha^m u$ ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ 'dir. $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$

birimsel olmasın. Böylece c 'ler hipotezden asal olmak üzere $\alpha - \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$

$\alpha_n^{m_n}$ 'nin $c_1 \dots c_k$ şeklinde bir indirgenemez ayrışımı vardır. Ve $\alpha^{m+1} = \alpha^m c_1 \dots c_k$

yazılır. O halde $i=1, \dots, k$ için $c_i | \alpha'$ 'dir. Önerme 2.15.(i) den ya c_i, α' 'nın bir ilgisidir ya da $c_i \in U(\alpha)$ 'dır. İlk durum için $\alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = \alpha \cdot c_1 \dots c_k$ 'den $j \geq 2$ için $\alpha | \alpha_j$, ve ya α, α_j 'nin bir ilgisidir ya da $\alpha \in U(\alpha_j)$ 'dir. Bu 0 (sıfır)'ın U-ayrışımından bir çelişki gösterir. Böylece $c_i \in U(\alpha)$ ve $c_1 \dots c_k \in U(\alpha)$ vardır. O halde $\alpha^m = c_1 \dots c_k r \alpha^m = r \alpha^{m+1}$ ve $\alpha \in U(\alpha^m)$ 'dir.

Sonuç: Sıfır elemanı tek türlü çarpanlara ayrılabilir.

İspat: 0 (sıfır) elemanın

$$0 = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}) = () (\beta_1^{k_1} \dots \beta_l^{k_l})$$

şeklinde iki U-ayrışımına sahip olduğunu kabul edelim. O zaman önerme 2.30'dan $\neq \alpha_i$ ve β_j ilgilidir. Buradan $0 = () (\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_n^{m_n}) = (\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n})$ 'dır. Bazı i 'ler için $m_i > k_i$ olsun. O zaman önceki önermeden $\alpha_i \notin U(\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_i^{m_i-1} \dots \alpha_n^{m_n})$ ve $\alpha_i \in U(\alpha_i^{k_i})$ 'dir. $m_i - 1 \geq k_i$ olduğundan ve böylece $U(\alpha_i^{k_i}) \subseteq U(\alpha_1^{m_1} \dots \alpha_i^{m_i-1} \dots \alpha_n^{m_n})$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $i=1, \dots, n$ için $m_i = k_i$ 'dir.

Burada $\alpha_1^{c_1} \dots \alpha_n^{c_n}$ çarpımının U-ayrışımı, $(\alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n})$.

$(\alpha_1^{y_1} \dots \alpha_n^{y_n})$ olduğunu not edebiliriz, öyleki burada eğer $c_i \geq m_i$ ise o zaman $x_i = c_i - m_i$ ve $y_i = m_i$ 'dir ve eğer $c_i < m_i$ ise o zaman $x_i = 0$ ve $y_i = c_i$ alınır.

Şimdi aşağıdaki temel sonucu verelim.

Önerme 2.32: R, TÇH1 koşulunu sağlasın. O zaman R'nin bir TÇH olması için gerek ve yeter koşul her indirgenemizin asal olmasıdır.

İspat: R bir TÇH olsun. O zaman $i=1, \dots, n$ için R_i bir TÇPB olmak üzere $R \cong R_i \oplus \dots \oplus R_n$ 'dir. R'de bir $p=(u_1, \dots, p_i, \dots, u_n)$ indirgenemezi alalım öyleki burada R_i 'de p_i indirgenemez ve u_j ($j \neq i$) R_j 'de bir birimseldir. Eğer R'de $p \mid (a_1, \dots, a_n) (b_1, \dots, b_n) = ab$ ise o zaman $p_i \mid a_i b_i$ 'dir. p_i asal olduğundan (Teorem 2.19) o zaman $p_i \mid a_i$ veya $p_i \mid b_i$ 'dir. Bu $p \mid a$ veya $p \mid b$ olduğunu gösterir.

Tersine, R'deki her indirgenemez asal olsun. Önceki sonuçtan 0 (sıfır), $0=(\alpha_1^{m_1}, \dots, \alpha_n^{m_n})$ şeklinde tek türlü çarpanlara ayrılabilir. O halde $0 \neq r \in R$ $i=1, \dots, n$; $k_i \leq m_i$ ve p'ler regüler olmak üzere daima $(\sigma_1, \dots, \sigma_g)$ $(p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n})$ şeklinde bir U ayrışımına sahiptir. Şimdi $0 \neq r \in R$ 'nin iki U-ayrışımı $r=(\sigma_1, \dots, \sigma_g)(p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n})$
 $= (q_1, \dots, q_h) (q_1, \dots, q_l \alpha_1^{l_1}, \dots, \alpha_n^{l_n})$ (1) olduğunu kabul edelim.

İlk olarak $k_1 < m_1$ olsun. O zaman σ 'ların hiçbirisi α_1 'e ilgili değildir.

Çünkü $1 \leq e \leq g$ için eğer σ_e, α_1 ilgili iseler o zaman

$\sigma_e \gamma p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} = p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n}$ 'dir ve $\gamma \in R$ için,

$\sigma_1 \gamma p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} = p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n}$ yazılır.

Bu $\alpha_1 \gamma \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n} = \alpha_1^{m_1-1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}$ olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. Eğer $k_1 < l_1$ ise o zaman $t_1 = \max(0, m_1 - l_1)$ olmak üzere eşitliğin iki tarafını $\alpha_1^{t_1} \dots \alpha_n^{m_n}$ ile çarpalım. O halde $l+t_1 \geq m_1$ olduğundan

$$\sigma_1, \dots, \sigma_g p_1, \dots, p_k \alpha_1^{k_1+t_1} \alpha_2^{k_2+m_2} \dots \alpha_n^{k_n+m_n} =$$

$$q_1, \dots, q_l q_1, \dots, q_l \alpha_1^{l_1+t_1} \alpha_2^{l_2+m_2} \dots \alpha_n^{l_n+m_n} = 0$$

Önerme 2.31'den bir $(\sigma_1 \dots \sigma_g p_1 \dots p_k \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n})$

$(\alpha_1^{k_1+t_1} \alpha_2^{m_2} \dots \alpha_n^{m_n}) = 0$ U-ayrışımını yazabiliriz. $k_1+t_1 < m_1$ olduğundan

bu bir çelişkidir. Böylece $k_1 < l_1$ durumunda ispat verilmiş oldu. $k_1 > l_1$

durumunda da benzer şekilde ispat yapılabilir.

İkinci olarak $k_1 \geq m_1$ olsun. Eğer $l_1 < m_1$ ise o zaman l_1 ile k_1 'i değiştirmeyeyle

yukarıdaki ispatı tekrarlayabiliriz. O halde $m_1, l_1 \geq m_1$ alalım. $k_1 - m_1 = a_1$

koyalım ve $a_1 \neq 0$ olsun. Önerme

2.31 (ii) den, $\gamma \in R$ için $\alpha_1 \gamma \alpha_1^{m_1} = \alpha_1^{m_1}$ 'dir ve böylece

$$\alpha_1 \gamma p_1 \dots p_k \alpha_1^{m_1+a_1-1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n} = p_1 \dots p_k \alpha_1^{m_1+a_1-1} \alpha_2^{k_2} \dots$$

$\alpha_n^{k_n}$ O zaman

$\alpha_1 \in U(p_1 \dots p_k \alpha_1^{k_1-1} \alpha_2^{k_2} \dots \alpha_n^{k_n})$ yazabiliriz, fakat bu (1) deki r nin

U-ayrışımıyla çelişir. Bundan dolayı, $a_1 = 0$ ve $m_1 = k_1 = l_1$ dir. Böylece r nin

regüler olmayan çarpanlarının tekliğinin ispatı $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ lerli ilgili olan elemanları gözönüne alınarak tamamlanır.

Şimdi regüler çarpanları düşünelim. p_1 , relevant kısmın regüler çarpanı

olduğundan $p_r | \alpha_1$ dir. Bundan dolayı $p_1 | q_1$ veya q_1 relevant olmayan kısmın

bir regüler çarpanı olmak üzere $p_1 | q_1$ dir. Eğer $p_1 | p_1$ ise o zaman $p_1 \in U(p_2 \dots p_k \alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n})$ dir. Çünkü $q_1 \in$

$U(q_1 \dots q_l \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_n^{l_n})$ dir ve buradan $q_1 \in U(\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n})$ olur. Bu

bir çelişkidir. O halde $p_1 | q_1$ olmak zorundadır. Böylece, p_1, q_1 ile ilgilidir.

p_1 ve q_1 ile ilgili olanlarını biraraya getirerek ve azalan kuvvetleri kısaltarak

p_1 ile ilgili olan elemanların sayısı ile q_1 ile ilgili olan elemanların sayısının

aynı olduğunu görürüz. Bu şekilde devam ederek relevant kısımdaki regüler çarpanlardan oluşan çarpımın tekliğini görürüz. Bundan dolayı r tek türlü çarpanlara ayrılabilir ve R bir TÇH dir.

Son olarak bir TÇB için denlik şartlarının genelleştirilmesi olan aşağıdaki ara sonucu verebiliriz.

Önerme 2.33 : Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

(i) R bir TÇH dir.

(ii) R esas idealler için maksimum koşulunu gerçekler ve her indirgenemez eleman asaldır .

(iii) R nin her birimsel olmayan elemanı asalların çarpımı şeklinde yazılabilir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) kabul edelim ki R bir TÇH olsun. Önceki teoremden her indirgenemez asaldır. Yapı teoremine göre R_i ler ya TÇB yada özel EİH olmak üzere $R \cong R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ yazılır. Açık olarak her bir TÇB esas idealler için maksimum koşulunu sağlar. (bak. Hungerford sayfa 136 ve 141) Şimdi özel EİH olarak R_1 i düşünelim R_1 'in herhangi birimsel olmayan bir eleman $u\alpha^k$ şeklinde olup buradaki u bir birimsel ve $0 = () (\alpha^m)$ U- ayrışımı için $0 < k \leq m$ dir. R_1 'in kendisinden farklı esas ideallerinin kümesinden minimal k değeri için $u\alpha^k$ ile üretilen ideali alalım. Bu idealler kümesinin maksimal elemanıdır. Çünkü $k < l$ için $(u\alpha^k) \subset (u\alpha^l)$ olur $\alpha \in U(\alpha^k)$ yazılır ve R_1 bir pseudo-bölge olduğundan $\alpha^k = 0$ ve buradan $(u\alpha^k) = (u\alpha^l)$ elde edilirki bu bir çelişkidir. Böylece her i için R_i ler ve buradan R de esas idealler için maksimum koşulunu sağlar. Şimdi, β bir I indeks kümesini taramak ve $a_{\beta_j} \in R_j$ olmak üzere R nin $\{(a_{\beta_1}, \dots, a_{\beta_n})\}$ üreteçleriyle üretilen

esas ideallerinin kümesini düşünelim. R_1 'in esas ideallerinin $\{(a_{\beta_1})\}$ ($\beta \in I$) kümesi bir maksimal üyeye sahiptir. Öyle ki bu birden fazla karşımıza gelebilir. $\gamma \in I_1 \subseteq I$ için $\{(a_{\gamma_1})\}$ 'yi eşit maksimal üyelerin kümesi olarak alalım. $\{(a_{\gamma_2})\}$ kümesini düşünelim. O zaman bu küme bir maksimal üyeye sahip olacaktır. $\gamma \in I_2 \subseteq I_1 \subseteq I$ için bütün eşit olanları (a_{γ_2}) olarak alalım. Benzer şekilde $\{(a_{\gamma_3})\}$ ve diğerlerini düşünerek sonuçta $\{(a_{v_n})\}$, ($v \in I_{n-1} \subseteq \dots \subseteq I$) kümesi $i \in I_{n-1}$ için (a_{i_n}) maksimal üyeye sahip olacaktır. O zaman $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ R 'nin esas ideallerinin orjinal kümesindeki maksimal eleman olacaktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) indirgenemez ayrışma sahip olmayan birimsel olmayan elemanlarla üretilmiş esas ideallerin kümesi bir maksimal elemana sahiptir. Bundan dolayı Teo 2.13 ün ispatındaki gibi bir çelişki elde ederiz. O halde R 'nin birimsel olmayan her elemanı asalların bir çarpımı şeklinde yazılır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Önceki teoremden dolayı her indirgenemezin asal olduğunu göstermek yeterli olacaktır. q indirgenemez olsun p_i asalları için $q = p_1 \dots p_n$ şeklinde yazılsın. Buradan bir k için $q | p_k$ yazılır ve q ile p_k ilgili olur. O halde q bir asaldır.

BÖLÜM -3-

KESİR HALKALARI , LOKALİZASYON VE TEK TÜRLÜ

ÇARPANLARA AYRILABİLME

Bu bölümün başında tamsayılar halkasından rasyonel sayılar cisminin bilinen kuruluşu epeyce genelleştirilmiştir. Tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge kavramı kesir halkaları için incelenmiştir..

2.Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1: R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi S olsun. Eğer $a, b \in S$ iken $a.b \in S$ oluyorsa S'ye R nin çarpımsal bir alt kümesi denir.

Örnekler : Birimli, sıfır bölensiz ve sıfır olmayan bir halkadaki tüm elemanlardan oluşan S kümesi çarpımsaldır.

$S = \{a, b, c, \dots\}$ ve $a, b, c, \dots \in S$ sıfır bölen değiller . $a, b \in S$ alalım.

$a.b \in S$ olduğunu gösterirsek S çarpımsaldır.

$a.b$ sıfır bölen olsun. $\exists k \in R$ bulabiliriz ki ($k \neq 0$)

$k(a.b) = 0 \Rightarrow (ka)b = 0$ a sıfır bölen değildir. $ka \neq 0 \Rightarrow b = 0$ dır. Bu ise çelişki olur. Çünkü b sıfır bölen değildir ve $a.b \in S$ dir. S çarpımsaldır.

Bir tamlık bölgesindeki sıfır olmayan tüm elemanların kümeside çarpımsaldır.

Herhangi bir halkadaki birimsel elemanların kümesi çarpımsal kümedir.

Eğer P değişmeli bir R halkasının asal ideali ise o zaman hem P hem de $S=R-P$ çarpımsal bir kümedir.

Buradan çıkan sonuç tamsayılar halkası Z ve rasyonel sayılar cismi Q'da en kolay şekilde görülebilir. Sıfır olmayan tüm tamsayılardan oluşan S

kümesi Z nin çarpımsal bir alt kümesidir. Q cisminin $a \in Z$ ve $b \in S$ olmak üzere

$\frac{a}{b}$ olan tüm kesirlerden oluştuğu kabul edilir. ve

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \text{ veya } ad - bc = 0 \text{ dır.}$$

Daha kesin bir şekilde, Q aşağıdaki gibi kurulabilir.

$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$ ifadesiyle tanımlanan $Z \times S$ kümesindeki

ilişkinin bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülebilir. Şöyle ki

Bu bağıntının yansıyan olduğu aşikardır.

Simetri özelliğini gösterelim.

$(a, b) \equiv (c, d) \Leftrightarrow ad - bc = 0$ dır. Buradan $ad = bc$ olur.

$bc - ad = 0 \Rightarrow cb - da = 0$ ve $(c, d) \equiv (a, b)$ dir.

Geçişme özelliğini gösterlim.

$(a, b) \equiv (c, d)$ ve $(c, d) \equiv (s, u)$ olsun. O zaman $(a, b) \equiv (s, u)$ olur.

$$(a, b) \equiv (c, d) \Rightarrow ad - bc = 0 \quad ad = bc \quad (1)$$

$$(c, d) \equiv (s, u) \Rightarrow cu - ds = 0 \quad cu = ds \quad (2)$$

(1) denklemi u ile (2) denklemi b ile çarpıp taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rcl} uad & = & ubc \\ bcu & = & bds \\ & & + \text{-----} \\ & & uad - bds = 0 \end{array}$$

ve $d(au - bs) = 0$ buradan $(a, b) \equiv (s, u)$ dur. ve bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Q , bu denklik bağlantısı altında $Z \times S$ nin denklik sınıflarının kümesi olarak tanımlanmıştır.

(a,b) nin denklik sınıfı $\frac{a}{b}$ olarak gösterilir.

Denklik sınıflarının kümesi S^{-1} olarak gösterilir.

Toplama ve çarpma genel şekliyle tanımlanmıştır. Bu işlemlerin iyi tanımlı olduğu ve Q 'nun bir cisim olduğu kolayca ispatlanır.

$a \rightarrow a/1$ tarafından verilen $Z \rightarrow Q$ tasvirinin bir monomorfizim olduğu kolaylıkla görülür.

Şimdi az önce özetlenen kurma işlemini herhangi bir değişmeli R halkasının keyfi bir çarpımsal alt kümesine doğru genişleteceğiz. Birimli ve değişmeli bir $S^{-1} R$ halkası ve $U_S : R \rightarrow S^{-1} R$ homomorfizmi kuracağız. Eğer S , R tamlık bölgesindeki sıfır olmayan tüm elemanların kümesi ise o zaman $S^{-1} R$ bir cisim olacak.
($S^{-1} R = 0$, eğer $R = Z$ ise) ve $\forall s, S^{-1} R$ içine R yi gömen monomorfizim olacak.

3.Temel Sonuçlar

Önerme 3.1: S , değişmeli R halkasının bir çarpımsal alt kümesi olsun. $R \times S$ kümesinde tanımlanan $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow s_1 (rs' - r's) = 0$ ($s_1 \in S$) bağlantısı bir denklik bağlantısıdır. Ayrıca, eğer R sıfır bölensiz ise ve $0 \notin S$ ise

$$(r,s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - r's = 0 \text{ olur.}$$

$$i) r/s = r'/s' \Leftrightarrow s_1(rs' - r's) = 0, s_1 \in S$$

$$ii) tr/ts = r/s \quad \forall r \in R \text{ ve } s, t \in S$$

iii) Eğer $0 \in S$ ise, $S^{-1}R$ nin tek bir denklik sınıfından oluştuğunu kanıtlayın.

İspat :

i) $r/s = r'/s' \Leftrightarrow s_1(rs' - r's) = 0$ ($s_1 \in S$ için) olduğunu göstereceğiz. Biz biliyoruz ki (r,s) in denklik sınıfları r/s olarak gösteriliyordu.

$$\overline{(r, s)} = r/s \text{ dir.}$$

$$\overline{(r, s)} = \{(r', s') \mid (r', s') \sim (r, s)\}$$

$r/s = r'/s' \Leftrightarrow (r,s) \sim (r', s')$ olur. Buradan ise

$$\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \Rightarrow s_1(rs' - r's) = 0 \text{ dır.}$$

ii) $tr/ts = r/s$

i) şıkkından dolayı $s_1(trs - rts) = 0$ olacak şekilde $s_1 \in S$ bulabiliyorduk.

Eğer bir $s \in S$ için $s_1(rs^1 - r^1s) = 0 \Rightarrow r/s = r'/s'$ oluyordu. O zaman $trs - rts$ dir.

$$\Rightarrow trs - rts = 0 \text{ dır.}$$

$$\forall s_1 \in S \text{ için } s_1(trs - rts) = 0 \text{ dır.}$$

$$tr/ts = r/s \text{ dir.}$$

iii) Eğer $O \in S$ ise $S^{-1}R$ tek bir denklik sınıfından oluşur. Bu ise $S^{-1}R$ deki bütün denklik sınıflarının eşit olduğunu göstermemiz gerekir demektir.

$O \in S$ ise ve $O(rs' - r's) = 0$ olacağından

$(r, s) \sim (r', s')$ olur ve $S^{-1}R$ de tek bir denklik sınıfı vardır.

Önerme 3.2: S , değişmeli R halkasının çarpımsal bir alt kümesi olsun ve $S^{-1}R$, önerme 3.1 in denklik bağıntısı altındaki $R \times S$ in denklik sınıflarının kümesi olsun.

i) $S^{-1}R$ toplama ve çarpmanın

$$r/s + r'/s' = (rs' + r's)/ss' \text{ ve}$$

$$(r/s)(r'/s') = rr'/ss'$$

ile tanımlandığı, birimli ve değişmeli bir halkadır.

ii) Eğer R sıfır olmayan ve sıfır bölensiz bir halka ise ve $O \notin S$ ise, o zaman $S^{-1}R$ bir tamlık bölgesidir.

iii) Eğer R sıfırdan farklı ve sıfır bölensiz bir halka ise ve S, R nin sıfır olmayan tüm elemanlarının kümesi ise $S^{-1}R$ bir cisimdir.

İspat:

i) $S^{-1}R$ de toplama ve çarpmanın iyi tanımlı olduğunu (r, s, r', s') seçiminden bağımsız) gösterdiğimizde ispatın geri kalan kısmı rutin olur. Özellikle tüm $s, s' \in S$ için $O/s = O/s'$ ve O/s toplamsal birimdir. r/s in toplamsal tersi $-r/s$ dir. Herhangi bir $s, s' \in S$ için $s/s = s'/s'$ ve s/s $S^{-1}R$ de çarpımsal birimdir.

Toplamanın iyi tanımlı olduğunu göstermek için, S çarpımsal olduğundan ($rs' + r's$) / ss' ifadesinin $S^{-1} R$ nin bir elemanı olduğunu görürüz.

$S^{-1} R$ de toplama $(a/s) + (a'/s') = (as' + a's)/ss'$ olarak tanımlanmıştı.

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$$

$$\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'} \text{ olsun.}$$

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{r} = \frac{ar + bs}{sr} = \frac{a'r' + b's'}{s'r'}$$

$$(ar + bs) r' s' = (a'r' + b's') sr$$

$$arr's' - a'r'sr = b's'sr - bsr's'$$

$$arr's' - a'r'sr = b's'sr + bsr's', \quad arr's' - a'r'sr' - b's'sr' + bsr's' = 0$$

$$rr' (as' + a's) + ss' (br' - b'r) = 0$$

$$r, r' \in S \quad s, s' \in S$$

$$rr' \in S \quad s' \in S$$

$$(as' - a's) = 0 \quad (br' - b'r) = 0$$

Toplama iyi tanımlıdır.

Çarpmanın iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$\frac{a}{s} \frac{b}{r} = \frac{ab}{sr} = \frac{a'b'}{s'r'}$$

$$abs'r' = a'b'sr$$

$$abs'r' - a'b'sr - br'a's + br'a's = 0$$

$$br' (as' - a's) + a's (br' - b's) = 0$$

ve sonuçta çarpma iyi tanımlıdır.

ii) Eğer R sıfır bölensiz ise ve $0 \notin S$ ise, o zaman $r/s = 0/s$ olması için gerek ve yeter koşul R de $r = 0$ olmasıdır.

Sonuç olarak, $S^{-1}R$ de $(r/s)(r'/s') = 0$ dir $\Leftrightarrow R$ de $rr' = 0$ dir. $rr' = 0$ olması ancak ve ancak $r = 0$ veya $r' = 0$ ise mümkündür. Buradan $S^{-1}R$ nin bir tamlık bölgesi olduğu sonucu ortaya çıkar.

iii) Eğer $r \neq 0$ ise $(r/s) \in S^{-1}R$ nin çarpımsal tersi $s/r \in S^{-1}R$ dir.

Önerme 3.2 deki $S^{-1}R$ halkasına bölümler halkası veya kesirler halkası ya da R nin S tarafından kurulan Kesir halkası denir.

S, R tamlık bölgesindeki tüm sıfır olmayan elemanların kümesi olduğu zaman önemli bir durum ortaya çıkar. O zaman $S^{-1}R$ bir cisimdir. Ve R tamlık bölgesinin kesir cismi olarakta adlandırılır. Böylece $R = \mathbb{Z}$ ise kesir cismi kesinlikle $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismidir.

Daha genel olarak R nin herhangi bir değişmeli halka olduğunu S nin R nin sıfır bölensiz olmayan tüm elemanlarının kümesi olduğunu farzedelim.

Eğer S boş değil is O zaman $S^{-1}R$ ye, R halkasının kesirlerinin tam halkası denir. Önerme 3.2. (iii) şu şekilde yeniden ifade edilebilir. Eğer sıfırdan farklı R halkası sıfır bölensiz ise o zaman R nin kesirlerinin tam halkası bir cisimdir.

Açıkça bir tamlık bölgesinin tam halkası onun kesir cismidir.

Eğer $U : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \quad n \rightarrow n/1$ ile verilen tasvir ise o zaman $U, \mathbb{Z}$ yi $\mathbb{Q}$, ya gömen monomorfizimdir. Üstelik sıfırdan farklı her n için $U(n)$ $\mathbb{Q}$ 'da bir birimseldir.

Daha genel olarak şu tanıımı verebiliriz.

Önerme 3.3: S , değişmeli R halkasının çarpımsal bir alt kümesi olsun.

i) $r \rightarrow rs/s$ herhangi bir $s \in S$ için $U_s : R \rightarrow S^{-1}R$ tasviri iyi tanımlanmış bir halka homomorfizmasıdır. Öyleki $\forall s \in S$ için $U_s(s) = 1$ $S^{-1}R$ içinde bir birimseldir.

ii) Eğer $0 \notin S$ ise S hiç sıfır bölen içermiyorsa U_s bir monomorfizmdir.

Özel olarak herhangi bir tamlık bölgesi R in kesir cismine gömülebilir.

iii) Eğer R nin birim elemanı varsa ve S birimsellerden oluşuyorsa o zaman U_s bir izomorfizmdir. Özel olarak bir F cisminin kesirlerinin tam halkası F' e izomorftur.

İspat :

i) $\forall s, s' \in S$ için $rs/s = rs'/s'$ olur ve U_s iyi tanımlıdır.

Bunu şöyle görebiliriz.

$U_s(r) = rs/s$ bir $s \in S$ için

$U_s(r) = rs'/s'$ $s' \in S$ için $rs/s = rs'/s'$ olduğunu görelim.

$rs = rs$ dir.

$s'rs = s'rs$ dir.

$rss' = rs's \Rightarrow rss' - rs's = 0 \quad \forall t \in S$ için

$t(rss' - rs's) = 0 \Rightarrow rs/s = rs'/s'$

U_s 'in bir homomorfizma olduğunu görelim.

$\forall r, r' \in R$ için $U_s(r+r') = U_s(r) + U_s(r')$

$U_s(r+r') = \frac{(r+r')s}{s} = \frac{rs+r's}{s} = \frac{rs}{s} + \frac{r's}{s}$ olur. Bu ise

$U_s(r+r') = U_s(r) + U_s(r')$ demektir.

$\forall r, r' \in R$ için $U_s(r.r') = U_s(r) \cdot U_s(r')$. $U_s(r')$ olduğunu gösterelim.

$$U_s(r.r') = \frac{rr's}{s} = \frac{rs}{s} \frac{r's}{s} \text{ olur. Bu ise}$$

$$U_s(r.r') = U_s(r) \cdot U_s(r')$$

U_s bir halka homomorfizmasıdır.

Şimdi $\forall s \in S$ için $s/s^2 \in S^{-1}R$ nin $s/s^2 = U_s(s)$ in çarpımsal tersi olduğunu gösterelim.

Önerme 3.2. ye göre $S^{-1}R$ birimli ve değişmeli bir halkadır ve $S^{-1}R$ nin birimi s/s dir.

$s \in S$ için $s/s^2 \in S^{-1}R$ dir.

$U_s(s)$ in birimseli ss/s dir.

$$ss/s. s/s^2 = s^3/s^3 = 1_{S^{-1}R}$$

ii) $S^{-1}R$ de $U_s(r) = rs/s = 0$ ise $rs/s = 0/s$ olur. Buradan bazı $s_1 \in S$ için $rs^2s_1 = 0$ olur. $r(s^2s_1) = 0$ $s^2s_1 \in S$ olduğundan $s^2s_1 \neq 0$ dır. O zaman $r = 0$ dır. Çünkü S sıfır bölen içermeyen bir kümedir.

iii) U_s (ii) durum gereği bir monomorfizmdir. Eğer R de bir birimsel olan s ile $r/s \in S^{-1}R$ ise $r/s = U_s(rs^{-1})$ olur.

Bu nedenle U_s bir epimorfizmadır.

Önerme 3.3 (ii) den dolayı bir R tamlık bölgesini U_s altındaki görüntüsü ile özdeşleştirmek ve R yi kensi kesir cisminin bir alt halkası olarak düşünmek yaygın bir görüştür. Bu durumda $1_R \in S$ olduğundan R böylece $r/1_R \in S^{-1}R$ ile özdeşleştirilir.

$S^{-1}R$ halkası ve $f: R \rightarrow S^{-1}R$ homomorfizmi aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $s \in S \Rightarrow f(s)$, $S^{-1}R$ de birimseldir.

ii) $f(r) = 0$ ise bir $s \in S$ için $rs=0$ dır.

iii) $S^{-1}R$ nin her elemanı, bir $r \in R$ için ve bir $s \in S$ için $f(r) f(s)^{-1}$ şekklindedir.

Sonuç :

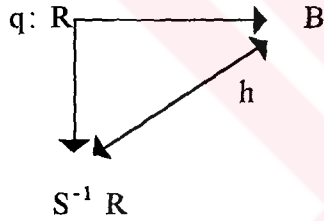
Eğer $q: R \rightarrow B$

i) $s \in S \Rightarrow q(s), B$ de birimseldir.

ii) $q(r) = 0 \Rightarrow$ bir $s \in S$ için $rs = 0$

iii) B nin her elemanı $q(r) q(s)^{-1}$ biçiminde olacak şekilde bir

homomorfizm ise o zaman tek bir $h: S^{-1}R \rightarrow B$ izomorfizmi vardır ve $q = h \circ f$ olur.



$h(r/s) = q(r) q(s)^{-1}$ ile tanımlı $h: S^{-1}R \rightarrow B$ dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz.

h örtendir ve h nin 1-1 olduğunu göstermek için çekirdeğine bakalım. Eğer

$h(r/s) = 0$ ise $q(r) = 0$ dır.

Önerme : 3.4 : $q: R \rightarrow B$ her $s \in S$ için $q(s), B$ de birimsel olacak

şekilde bir homorfi olsun. O zaman $q = h \circ f$ olacak şekilde tek bir $h: S^{-1}R$

$\rightarrow B$ homomorfisi vardır.

Teklik :

Eğer h koşulları sağlanırsa, o zaman her $r \in R$ için $h(r/1) = hf(r) = q(r)$

olur. Böylece $s \in S$ ise

$$h(1/s) = h(s/1)^{-1} = q(s)^{-1} \text{ o halde}$$

$h(r/s) = h(r/1) h(1/s) = q(r) q(s)^{-1}$ Bu yüzden h, q tek olarak tanımlanır.

Varlık : $h(r/s) = q(r) q(s)^{-1}$ olsun. O zaman iyi tanımlı homomorfizm olacaktır. Şimdi $r/s = r'/s'$ olsun. O halde $(rs' - sr') t = 0$ olacak şekilde $t \in S$ olacak şekilde $t \in S$ vardır.

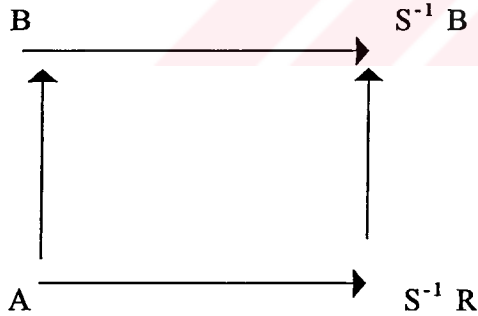
$$[q(r) q(s') - q(s) q(r')] q(t) = 0 \text{ olur. } q(t), B \text{ de birimseldir.}$$

$$q(r) q(s)^{-1} = q(r') q(s')^{-1} \text{ elde edilir.}$$

$f : R \rightarrow B$ tam olsun. S de R nin çarpımsal alt kümesi olsun. O takdirde

$S^{-1} f : S^{-1} R \rightarrow S^{-1} B$ homomorfizması vardır.

$(S^{-1} f)(x/s) = f(x) / f(s)$ ile tanımlanır.



Aşağıdaki teoremler kesirler halkasının ideal yapısıyla ilgilidir.

Önerme 3.5 : S , değişmeli R halkasının çarpımsal bir alt kümesi olsun.

i) Eğer I, R de bir ideal ise $S^{-1} I = \{ a/s \mid a \in I, s \in S \}$ ifadesi $S^{-1} R$ de bir idealdir.

ii) Eğer J, R de başka bir ideal ise o zaman

$$S^{-1} (I + J) = S^{-1} I + S^{-1} J;$$

$$S^{-1} (I J) = (S^{-1} I) (S^{-1} J);$$

$$S^{-1} (I \cap J) = S^{-1} I \cap S^{-1} J \text{ dir.}$$

Uyarılar: $S^{-1} I$ ya I nın $S^{-1} R$ de genişlemesi denir.

$a \in I, r \notin I$ ile $a/s = r/s$ eşitliği elde edildiğinden $r/s \in S^{-1} I$ nın $r \in I$

demek olmadığına dikkat edelim.

İspat :

$$i) \frac{a_1}{s_1}, \frac{a_2}{s_2} \in S^{-1} I \text{ olsun. } \frac{a_1}{s_1} + \frac{-(a_2)}{s_2} = \frac{a_1 s_2 - a_2 s_1}{s_1 s_2} \in S^{-1} I$$

olduğunu göstereceğiz.

$$a_1, a_2 \in I, s_1, s_2 \in S \Rightarrow a_1 s_2 \in I \text{ ve } a_2 s_1 \in I \Rightarrow$$

$$a_1 s_2 - a_2 s_1 \in I \text{ ve } (a_1 s_2 - a_2 s_1) / s_1 s_2 \in S^{-1} I \text{ dir.}$$

Şimdi

$$r/s \in S^{-1} R \text{ ve } a/s \in S^{-1} I \text{ alalım.}$$

$$(r/s) \cdot (a/s) = (ra)/s^2 \in S^{-1} I \text{ olup } S^{-1} I, S^{-1} R \text{ nin idealidir.}$$

ii) $S^{-1} (I + J) = S^{-1} I + S^{-1} J$ olduğunu gösterelim.

$$I + J = \{ i+j \mid i \in I, j \in J \} \text{ dir.}$$

$$(a + b)/s \in S^{-1} (I + J) \text{ olsun. } (a+b)/s = (a/s) + (b/s) \in S^{-1} I + S^{-1} J$$

$$(a/s) + (b/s) \in S^{-1} I + S^{-1} J \Rightarrow (a+b)/s \in S^{-1} (I + J) \text{ dir.}$$

ve $S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J$ dir.

$S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$ olduğunu gösterelim.

$(a/s) \in S^{-1}(I \cap J) \Rightarrow a \in I \cap J \Rightarrow a \in I$ ve $a \in J$

$a \in I$ olduğundan $a/s \in S^{-1}I$ dır.

$a \in J$ olduğundan $a/s \in S^{-1}J$ dir. O zaman $a/s \in S^{-1}I \cap S^{-1}J$ olur.

$a/s \in S^{-1}I \cap S^{-1}J \Rightarrow a/s \in S^{-1}I$ olup $a \in I$ dır.

Önerme 3.6: R , birimli değişmeli bir halka S de R nin çarpımsal bir alt kümesi ve I, R de bir ideal olsun. O zaman $S^{-1}I = S^{-1}J$ olması ancak ve ancak

$S \cap I \neq \emptyset$ olması ile mümkündür.

İspat : Eğer $s \in S \cap I$ ise $1s^{-1}_R = s/s \in S^{-1}I$ olur ve bu nedenle $S^{-1}I =$

$S^{-1}R$. Diğer taraftan eğer $S^{-1}I = S^{-1}R$ ise $U_s^{-1}(S^{-1}I) = R$ olur. ve

böylece $a \in I$ $s \in S$ için $U_s(1_R) = a/s$ olur. $U_s(1_R) = 1_R s/s$ olduğundan

bazı $s_1 \in S$ için $s^2s_1 = as_1$ olur. Fakat $s^2s_1 \in S$ ve $as_1 \in I$ olduğundan

$S \cap I \neq \emptyset$ dir.

Bir kesirler halkasındaki asal idealleri karakterize edebilmek için bir lemma'ya ihtiyacımız vardır.

Eğer $J, S^{-1}R$ kesirler halkasındaki bir ideal ise $U_s^{-1}(J), R$ de bir idealdir.

Lemma :3.7 : S , birimli ve değişmeli R halkasının çarpımsal bir alt kümesi olsun, ve I, R de bir ideal olsun.

i) $I \subset U_s^{-1}(S^{-1}I)$

ii) Eğer, $S^{-1}R$ de J ideali için $I = U_s^{-1}(J)$ ise $S^{-1}I = J$ biçimindedir.

Başka bir deyişle $S^{-1} R$ deki her ideal R deki bir I ideali için $S^{-1} I$ biçimdedir.

iii) Eğer P, R de bir asal ideal ise ve $S \cap P = \emptyset$ ise $S^{-1} P, S^{-1} R$ de bir asal idealdir ve $U_s^{-1} (S^{-1} P) = P$ olur.

İspat :

i) $a \in I$ ise, $\forall s \in S$ için $as \in I$ olur. Sonuçta $U_s(a) = as/s \in S^{-1} I$ olup o zaman $a \in U_s^{-1} (S^{-1} I)$ Bu nedenle $I \subset U_s^{-1} (S^{-1} I)$

ii) $I = U_s^{-1} (J)$ olduğundan $S^{-1} I$ nin her elemanı $U_s(r) \in J$ şartıyla r/s

biçimindedir. Bu nedenler $r/s = (1_R/s)(rs/s)$

$= (1_R/s) U_s(s) \in J$ yani $S^{-1} I \subset J$ olur. Diğer taraftan eğer $r/s \in J$ ise

$U_s(r) = rs/s = (r/s)(s^2/s) \in J$ böylece $r \in U_s^{-1} (J) = I$ olur. O halde $r/s \in S^{-1} I$ ve $J \subset S^{-1} I$ olur.

iii) $S^{-1} P$ bir idealdir. Öyleki önerme 3.6 gereği $S^{-1} P \neq S^{-1} R$ dir. Eğer $(r/s)(r'/s') \in S^{-1} P$ ise $a \in P, t \in S$ olmak üzere $rr'/ss' = a/t$ olur. Sonuç

olarak bir $s_1 \in S$ için $s_1 t r r' = s_1 s s' a \in P$ yazılır. $s_1 t \in S$ ve $S \cap P = \emptyset$

olduğundan $rr' \in P$ ve bu suretle $r \in P$ veya $r' \in P$ olur. Böylece $r/s \in$

$S^{-1} P$. Bu nedenle $S^{-1} P$ asaldir. Son olarak (i) deki ispat gereği $P \subset U_s^{-1}$

$(S^{-1} P)$ dir.

Diğer taraftan eğer $r \in U_s^{-1} (S^{-1} P)$ $U_s(r) \in S^{-1} P$ olur. Böylece $a \in P$ ve

$s_1 t \in S$ olmak üzere $U_s(r) = rs/s = a/t$ dir.

Sonuç olarak bir $s_1 \in S$ için $s_1 s t r = s_1 a s \in P$ olur.

$s_1 s t \in S$ ve $S \cap P = \emptyset$ olduğu için $r \in P$ olur. Bu nedenle $U_s^{-1} (S^{-1} P) \subset P$ dir.

Önerme 3.8 : Birimli ve değişmeli R halkasının çarpımsal bir alt kümesi S olsun. O zaman $p \rightarrow S^{-1} P$ olmak üzere S 'den ayrılmış olan R nin asal ideallerinin kümesi u ile $S^{-1} R$ nin asal ideallerinin kümesi v arasındaki bire bir benzerlik vardır.

İspat : Lemma 3.7. (iii) ile $P \rightarrow S^{-1} P$ ifadesi $u \rightarrow v$ tasvir tanımlar. Bunun örten olduğunda göstermeye ihtiyacımız vardır. J , $S^{-1} R$ nin bir asal ideali olsun ve $P = U_s^{-1} (J)$ olsun. Lemma 3.7. (ii) gereği $S^{-1} P = J$ olduğundan P nin asal olduğunu göstermek yeterli olur. Eğer $ab \in P$ ise o zaman $P = U_s^{-1} (J)$ olduğundan $U_s (a) U_s (b) = U_s (ab) \in J$ olur. J , $S^{-1} R$ de asal olduğundan ya $U_s (a) \in J$ veya $U_s (b) \in J$ olur. Sonuç olarak ya $a \in S^{-1} (J) = P$ ya da $b \in P$ olur. Bu nedenle P asaldir.

R , birim elemanlı değişmeli bir halka ve P , R nin bir asal ideali olsun. O zaman $S = R - P$ R nin çarpımsal bir alt kümesidir. $S^{-1} R$ kesirler halkası R nin P de lokalizasyonu olarak adlandırılır ve R_p ile gösterilir. Eğer I , R de bir ideal ise o zaman R_p deki $S^{-1} I$ ideali I_p olarak gösterilir.

Önerme 3.9: P , birimli ve değişmeli R halkasında bir asal ideal olsun.

i) $Q \rightarrow Q_p$ olmak üzere P de bulunan R nin asal ideallerinin kümesi ile R_p nin asal idealleri arasında birebir, bir eşleme vardır.

ii) R_p deki P_p ideali R_p nin tek maksimal idealidir.

İspat : P nin içerdiği R nin asal idealleri kesinlikle $S = R - P$ den ayrılmış olan idealler olduğundan (i), önerme 3.8 in doğrudan sonucudur. Eğer M , R_p nin maksimal ideali ise o zaman M asaldir. Bu suretle $Q \subset P$ olmak üzere R nin bazı Q asal idealleri için $M = Q_p$ olur. Fakat $Q \subset P$, $Q_p \subset P_p$

anlamına gelmektedir. Önerme 3.6 gereği $P_p = R_p$ olduğundan $Q_p = P_p$ eşitliğine sahip oluruz. Bu nedenle P_p, R_p deki tek maksimal idealdir.

Tanım 3.2. : Tek bir maksimal ideali olan birimli, değişmeli bir halkaya lokal halka denir.

Uyarı : Birim elemanlı bir halkadaki her ideal bazı maximal idealler tarafından kapsandığından Local R halkasının tek maximal ideali R nin her idealini kapsamalıdır. Elbetteki R nin kendisi hariçtir.

Önerme 3.10 : Eğer R birim elemanlı ve değişmeli bir halka ise o zaman aşağıdakiler denktir.

- i) R Local bir halkadır.
- ii) R nin bütün birimsel olmayan elemanları $M \neq R$ idealinde bulunmaktadır.
- iii) R nin birimsel olmayan elemanları bir ideal oluşturur.

İspat : Eğer I, R nin bir ideali ise ve $a \in I$ ise $(a) \subset I$ olur. Sonuç olarak, ancak ve ancak I sadece birim olmayanlardan oluşuyorsa $I \neq R$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (i) durumları bu gerçekten sonuç olarak çıkmaktadır.

(i) $\Rightarrow$ (ii) eğer $a \in R$ bir birimsel olmayan eleman ise o zaman uyarı gereği R nin tek maximal ideali tarafından kapsanmaktadır.

4.Kesir Halkaları İçin TÇB Kavramı

Şimdi 1. Bölümde verdiğimiz TÇB kavramını kesir halkaları için inceleyeceğiz.

Önerme 3.11: R bir tamlık bölgesi ve S, R^* in çarpımsal bir alt kümesi olsun.

- i) Eğer R bir TÇB ise, $S^{-1}R$ de bir TÇB dir.
- ii) Eğer R TÇB 1 özelliğini sağlıyor ve S asalların çarpımlarından oluşuyorsa $S^{-1}R$ bir TÇB dir, bu durumda R de bir TÇB dir.

İspat:

i) R 'yi $S^{-1}R$ in bir alt halkası olarak alabiliriz, çünkü doğal dönüşüm λ :

$R \rightarrow S^{-1}R$ birebir ve örtendir. Ve S in elemanları $S^{-1}R$ in içinde birimsel eleman olduklarından, $S^{-1}R$ in her elemanı $S^{-1}R$ için de R nin bir elemanı ile ilgilidir. R de her eleman asal çarpanlarına ayrılabilir. R nin içindeki her p asalının, $S^{-1}R$ içinde birimsel elemana dönüştüğünü veya asal olarak kaldığını, p nin S in bir elemanını bölüp bölmemesine bağlı olarak gösterirsek (i) yi ispatlamış oluruz.

Eğer $p \mid s \in S$ ise, p $S^{-1}R$ içinde birimsel olur. diğer durumda $S^{-1}R$ de $p \nmid ab$, (burada $a, b \in R$ den alınabilir.) ise $ab = pd$, $d = c/s$ ($c \in R, s \in S$). Böylece $abs = pc$. Hipoteze göre $p \mid s$, fakat $p \in R$ de asaldır. Bu durumda $p \mid a$ veya $p \mid b$ ve bu p nin $S^{-1}R$ de asal olduğunu gösterir. $S^{-1}R$ in her elemanının asal çarpanlara ayrılışı vardır. Ve $S^{-1}R$ bir TÇB dir.

ii) R deki her indirgenemez'in asal olduğunu göstermemiz gerekir. p nin R de bir indirgenemez olduğunu kabul edelim. $S^{-1}R$ de p nin indirgenemez olarak kaldığını veya birimsele dönüştüğünü iddia edelim. $S^{-1}R$ de $p = ab$ için a veya b nin $S^{-1}R$ de birimsel olduğunu göstereceğiz. $a = a'/s$, $b = b'/t$ ($a', b' \in R; s, t \in S$). Buradan $pst = a'b'$ sonucu çıkar. Hipoteze göre st

asalların çarpımı olarak yazılabilir. $st = q_1 \dots q_r$ ve $pq_1 \dots q_r = a^1 \mid b^1$
Her bir q_i , a^1 veya b^1 böler ($i = 1, 2, \dots, r$). Birebir sadeleştirme ile $p = a^{11} b^{11}$ (1.1) bulunur. $S^{-1} R$ de bütün q lar birimseldir ve $S^{-1} R$ de a^{11} , a^1 ile ilgilidir ve oradan a ile ilgilidir. Benzer şekilde b^{11} ve b ilgilidir. Şimdi p , R de bir indirgenemez ve (1.1) ile a^{11} veya b^{11} birimsel elemandır. Buna bağlı olarak a veya b $S^{-1} R$ de birimseldir. Buda p nin $S^{-1} R$ de bir indirgenemez veya birimsel eleman olduğunu gösterir.

Şimdi bu iki duruma ayrı ayrı bakalım.

1) p , $S^{-1} R$ de indirgenemez olarak kalır ve buna bağlı olarak $S^{-1} R$ de asaldır. Çünkü $S^{-1} R$ bir TÇB dir. Eğer R de $p \mid ab$ ise $S^{-1} R$ de $p \mid ab$.

Böylece $S^{-1} R$ de p a 'yı veya b yi böler. Biz $a = pd$, $d = c/s$ ($c \in R$, $s \in R$) olarak kabul edelim.

$$as = pc \quad (1.2)$$

Şimdi s R de asalların çarpımıdır. $s = s_1 \dots s_r$, ve hiç bir s_i ($i = 1, 2, \dots, r$) R de p yi bölmez. Eğer $s_i \mid p$ ise buradan p R de s_i ile ilgilidir. Ve $S^{-1} R$ de birimsel eleman olmak zorundadır. Bu da mümkün değildir. Bu yüzden (1.2) ye göre $s_i \mid c$ R de ($i = 1, 2, \dots, r$) ve (1.2) den $s_1 \dots s_r$ leri sadeleştirerek, $a = pc^1$ R de $p \mid a$ formunu elde ederiz. Bu da p nin asal olduğunu gösterir.

2) $S^{-1} R$ de p birimsel elemana dönüşsün. O zaman p bazı $s \in S$ leri böler, diyelim ki $s = pc$ ve s in asal çarpanlarını birebir sadeleştirerek p nin s in bazı s^1 özel çarpanlarını bölebildiğini görürüz. O halde p kendi başına asaldır.

K A Y N A K L A R

- [1] ASAR, Ali O., 1985
Halkalar ve Modüller,
Yaz Okulu Ders Notları, Gebze
- [2] BHATTACHARYA, P.B., 1986
Basic Abstract Algebra,
Cambridge University Press, London
- [3] BURTON, David M., 1970
A First Course in Rings and Ideals,
Addison - Wesley Pub. Co., London
- [4] COHN, P.M., 1989
Algebra, Volume 2
John Wiley and Sons, London
- [5] ÇALLIALP, Fethi, 1994
Cebir,
Sakarya Üniversitesi Ders Kitapları dizisi
No:6, Adapazarı
- [6] FLETCHER, Colin R., 1969
Unique Factorization Rings,
Proc. Camb. Phil. Soc., 65; 579-583
- [7] FLETCHER, Colin R., 1970
The Structure of Unique factorization Rings

Proc. Comb. Phil. Soc., 65, 538-540

[8] HUNGERFORD, Thomas W., 1974

Algebra,

Springer - Verlag, New York

[9] ŞAHİN. Ali., 1996

Kesir Halkaları ve Lokalizasyon

Bitirme tezi, İstanbul

[10] ŞENKON, Hülya., 1993

Soyut Cebir Dersleri, Cilt II,

İstanbul Üniversite Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul

[11] ZARISKI, O., ve SAMUEL, P., 1958

Commutative Algebra, Vol.I, Princeton

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali Şahin

Doğum Tarihi : 16 Ocak 1974

Doğum Yeri : İstanbul - Sarıyer

İlk Öğrenimi : 1986 yılında Recaizade Mahmud Ekrem
İlkokulundan mezun oldu.

Orta Öğrenimi : 1989 Yılında Behçet Kemal Çağlar Lisesinden
mezun oldu.

Lise Öğrenimi : 1991 Yılında Behçet Kemal Çağlar Lisesinden
mezun oldu.

Yüksek Öğrenimi : 1996 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesinden mezun oldu.

Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim dalında yüksek Lisans
öğrencisi