

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

34683

2-DİZAYN VE 3-DİZAYN ' LARIN İNCELENMESİ

Özlem KARCI

**F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erol BALKANAY

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

İSTANBUL, 1994

TEŞEKKÜR

ÖZET

i

SUMMARY

ii

I. TEMEL TANIM ,KAVRAM ve TEOREMLER

1

1.1. Yapılar

1

1.2. Projektif ve Afin Geometri

4

1.3. İlgili Yapılar

5

1.4. Çakışım Matrisi

8

II. SİMETRİK DİZAYNLAR

10

2.1. Residual Yapılar

10

2.2. Singer Gruplar, Fark Kümeleri ve Simetrik Dizaynlarla İlişkileri

21

2.3. Hadamard 2-dizaynlar

23

III. BAZI SİMETRİK DİZAYN AİLELERİ

29

3.1. Projektif ve Afin Düzlemler

29

3.2. Hadamard Matrisler ve Hadamard 2-dizaynlar

29

3.3. Cameron Teoremi ve Hadamard 3-dizaynlar

37

3.4. Örnekler

41

SONUÇ

43

KAYNAKLAR

44

ÖZGEÇMİŞ

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarında ve tezimin hazırlanması sırasında yardımlarını hiçbir zaman eksik etmeyen değerli hocam Sayın Prof.Dr. EROL BALKANAY 'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimi yazmama yardımcı olan arkadaşlarım Elif Tekin ve Hakan Bakşi 'ye teşekkür ederim.

Özlem KARCI

Haziran ,1994

ÖZET

Dizayn teori matematiğin birçok alanında gelişmiş ve son yıllarda diğer alanlarda artan biçimde gelişmelerde etkili olmuştur. Dizayn Teorinin istatiki kaynağı burada kullanılan terminolojik sözlerin bazılarında bellidir.Örneğin bir yapıdaki noktaların sayısını gösteren v , varieties (değişkenlik) kelimesinden gelir.Dizayn teorisinin grup teorisi, graf teorisi,kodlama teorisi ve geometriyle sıkı bağlantıları vardır.Bu tezde yapılan çalışma 2-dizayn ve 3-dizaynları incelemeye yöneliktir.Fakat bunu yapmadan önce dizaynların temeli olan yapılar incelenmiş, bu yapıların tanımları yapıp özellikleri belirtilmiştir.

Sonlu projektif ve afin geometriler dizayn teoride önemli rol oynarlar.Bu tezde yalnızca bu geometrilerin tanımları yapılmış ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca simetrik dizaynlara girilmiş ve bu konuyla ilgili olan teoremler ispatlanmıştır. Bu teorem ve konuların bazıları Bruck - Ryser - Chowla Teoremi ,Singer grupları ve fark kümeleri, Hadamard 2-dizaynlardır. Tezin sonunda verilen iki uygulama 2-dizayn ve 3-dizayn 'a ait iki örnektir.İlk bölümdeki teoremlerin ispatı asıl konuya hazırlık amaçlı olduklarından verilmemiştir.

SUMMARY

The subject of design theory has been developed in recent years. Although design theory comes from statistic, it starts to make progress after mathematicians were interested in this theory. Today it has very fruitful connections with group theory, graph theory, coding theory and geometry.

The first chapter covers basic definitions, theorems, and some properties of structures and symmetric designs. In the chapter two we give certain families of designs, e.g. 2-designs, 3-designs and Hadamard designs. Finite projective and affine geometries are central to design theory, and are introduced early in this thesis. The subject of symmetric designs are also introduced early, and its important aspects (The Bruck-Ryser-Chowla Theorem, Singer groups and difference sets, Hadamard 2-designs) are developed.

Finally chapter three deals with some properties of Projective plane, and we are also introduced Hadamard matrix, and Hadamard designs. We proved Cameron Theorem. This says that there are very few possibilities for starting with symmetric design, and extending to a 3-design.

BÖLÜM I

TEMEL TANIM , KAVRAM VE TEOREMLER

1.1 Yapılar

Bir yapı yada çakışım yapısı aralarında bir çakışım bağıntısı olan noktalar ve blokların sonlu iki kümesidir. $\mathcal{S}$ bir çakışım yapısı olmak üzere $\mathcal{S}$ ' nin noktalarını sayısını v bloklarının sayısını b ile gösterelim. Bir yapı için noktalar ve bloklar kümesi boş kümeden farklıdır. Bir yapıyı yukarıdaki gibi tanımladığımız zaman genellikle bir blok, blok üzerindeki noktalar kümesi ile tanımlanır. Bununla birlikte farklı iki blok aynı nokta kümesi ile tanımlanırsa yapı tekrarlı bloklara sahiptir denir .

Eğer $\mathcal{S}$ yapının bir elemanı $\mathcal{S}$ yapının diğer elemanları ile sıfır veya bir kez çakışıyorsa bu eleman yalıtık eleman olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{S}$ yapının bir elemanı $\mathcal{S}$ yapının diğer tüm elemanlarıyla çakışıyorsa bu eleman full eleman olarak adlandırılır. $\mathcal{S}$ yapının tüm full ve yalıtık elemanları çıkarılarak elde edilen yapıya standard hale getirilmiştir denir. Full, yalıtık elemanlara ve tekrarlı bloklara sahip olmayan yapıya tamamen indirgenmiş yapı denir.

$v \neq 0$ $b \neq 0$ olmak üzere bir yapıyı v noktalı b bloklu farzelim.

$\mathcal{S}$ ' nin noktaları $P_1 P_2 \dots P_v$

$\mathcal{S}$ ' nin blokları $x_1 x_2 \dots x_b$

şeklinde indekslenir . Bu taktirde $\mathcal{S}$ yapı için $A = (a_{ij})$ çakışım matrisi

eğer P_i x_j üzerinde ise $a_{ij} = 1$ aksi taktirde 0

şeklinde tanımlanır.

A çakışım matrisi $\mathcal{S}$ tarafından tek olmayan biçimde belirlenir . Bu belirleme noktaların ve blokların indekslenmesine bağlıdır . Eğer bir $\mathcal{S}$ yapının blokları boş kümeden farklı ve bloklarının herbiri $k > 0$ sayıda nokta içeriyorsa bu yapı birbiçimli olarak adlandırılır .

Yani J , elemanları $+1$ 'ler olan uygun boyutlu matris bir olmak üzere

$$J_{mv}A = kJ_{mb}$$

dir. Benzer biçimde r bir sabit J elemanları $+1$ 'ler olan uygun boyutlu bir matris olmak üzere tüm P noktaları için

$$|P| = r > 0$$

ise $\mathcal{S}$ yapının düzgün olması için gerek ve yeter koşul

$$AJ_{bm} = rJ_{vm}$$

olmasıdır.

$\mathcal{S}$ bir yapı ve $v > 0$ olsun . $\lambda > 0$ ve $0 \leq t \leq v$ olacak şekilde λ ve t sayıları varsa, öyle ki $\mathcal{S}$ yapının t noktalı her alt kümesi λ blokta ise $\mathcal{S}$ yapıya λ için bir t - yapı denir . Bir birbiciimli k bloklu bir t - yapı t - (v, k, λ) yapı olarak adlandırılır.

Teorem 1.1.1.

Eğer $\mathcal{S}$ (v, k, λ) parametrelili bir t - yapı ise $0 \leq s < t$ koşulunu sağlayan her s tamsayısı için $\mathcal{S}$ yapının noktalarının verilen herhangi bir s -kümesiyle çıkışım halinde olan tam λ_s tane bloğu vardır ve burada

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s).(v-s-1) \dots (v-t+1)}{(k-s).(k-s-1) \dots (k-t+1)}$$

' dir./

Teorem 1.1.1. ' in sonucu olarak (v, k, λ) 'nın her seçimi için birbiciimli t -yapılarının olmadığı söylenebilir. Çünkü λ_s değerlerinin herbiri tamsayı olmak zorundadır.

Eğer $\mathcal{S}$ bir t - (v, k, λ) yapı ise blokların sayısı b ile gösterilir. Eğer $t \geq 1$ ise Teorem 1.1.1.'den bir nokta üzerindeki blokların sayısı r ile gösterilen bir tamsayıdır. Eğer $t \geq 2$ ise

$$r = r - \lambda_2$$

olup $\mathcal{S}$ yapının mertebesi olarak adlandırılır. λ, r, t, v, b, k tamsayıları $\mathcal{S}$ yapının parametreleri olarak adlandırılır. Bu sayıların birbirinden bağımsız olmadığı açıktır.

Teorem 1.1.2.

Eğer $\mathcal{S}$, (v, k, λ) parametrelili bir t -yapı ise

(a)

$$b = \lambda \frac{v(v-1)\dots(v-t+1)}{k(k-1)\dots(k-t+1)}$$

(b) Eğer $t > 0$ ise $b.k = v.r$

(c) Eğer $t > 1$ ise $r.(k-1) = \lambda_2.(v-1)$

dir./

Bir yapı içinde bir bayrak denince bir (P, x) ikilisi anlaşılır. Burada x bir blok, P x bloğu üzerinde bir noktadır. Bir yapı içinde bir 2-bayrak (P, Q, x) ile tanımlanır. x bir blok, P ve Q noktaları x bloğu üzerindeki farklı iki noktadır.

Eğer bir $\mathcal{S}$ yapının noktalarının ve bloklarının sayısı eşitse, $\mathcal{S}$ 'nin çakışım matrisi kare matristir. Bu nedenle bir yapıda $b = v$ ise yapıya kare yapı denir.

Bir dizayn birbiçimli indirgenmiş bir yapıdır. Yani tekrarlı bloklara sahip olmayan, birbiçimli bir yapıdır. Teorem 1.1.1. ' den dolayı t, v, k, λ 'nın keyfi seçilmesi halinde $t-(v, k, \lambda)$ dizaynı olmayabilir. Bununla beraber $0 \leq t \leq k \leq v$ ile verilmiş herhangi t, v, k parametrelili bir

$$t - \left(v, k, \binom{v-t}{k-t} \right)$$

dizayn vardır. Verilmiş bir v -kümesinden her k -altkümesi çağrılarak bir blok elde edilir. Bu dizaynlara trivial dizayn denir. $t \geq 7$ için trivial olmayan t -dizayn bilinmiyor.

Teorem 1.1.3.

$$0 < t < k \leq v/2$$

ile verilmiş herhangi pozitif tamsayılar t, v, k olmak üzere trivial olmayan bir $t-(v, k, \lambda)$ yapısı olacak şekilde bir λ değeri vardır./

1.2. Projektif ve Afin Geometri

Yapılar ve dizaynların birçok sonsuz ailesi olduğu biliniyor. Bunların arasında en önemlileri sonlu projektif ve afin geometrilerden elde edilir.

Bir Projektif geometri noktalar ve doğruların öyle bir $\mathcal{P}$ yapısıdır ki

(P 1) Her nokta ikilisi bir tek doğru üzerindedir.

(P 2) Her doğru en azından üç nokta içerir.

(P 3) $\mathcal{P}$ aynı doğru üzerinde olmayan üç noktalı bir küme içerir.

(P 4) Eğer her $i \neq j$ için x_i noktası y_j doğrusu üzerinde olmak koşuluyla X_1, X_2, X_3 farklı noktalar l_1, l_2, l_3 farklı doğrular ve eğer l_1, l_2 ve l_3 'ü kesen fakat X_1 noktasını içermeyen herhangi bir doğru ise l_1 doğrusunu da keser. (Yani eğer bir doğru bir üçgenin iki kenarını keser fakat bu kenarların köşesinden geçmezse bu doğru üçüncü kenarı keser.)

şeklinde bir yapıdır.

Projektif geometriler içinde özel bir alt sınıfı ayrılır . Bir projektif düzlem

(P 5) Her farklı doğru çifti ortak bir nokta içerir

şartını sağlayan bir projektif geometridir.

Bir Afin Geometri bir projektif geometriden sabit bir hiper düzlem ve bu düzlemin tüm altuzaylarının silinmesiyle ortaya çıkar.

Bir $\mathcal{A}$ afin düzlem noktalar ve doğruların

(A 1) Her farklı nokta çifti tek bir ortak doğru üzerindedir.

(A 2) Eğer P, y çakışım halinde olmayan nokta-doğru çifti ise . P ' yi içeren y ile keşismeyen tek bir z doğrusu vardır.

(A 3) $\mathcal{A}$ ortak bir doğru üzerinde olmayan üç noktalı bir küme içerir.

koşullarını sağlayan bir yapıdır.

n mertebeli projektif düzlem $\mathcal{P}_n(q)$ ile gösterilir. Burada q asal sayıdır. Bir simetrik dizayn $\mathcal{P}(m,q)$ notasyonu ile gösterilir. Burada m tamsayısı bir asal sayının kuvveti şeklindedir. İki boyutlu bir projektif geometri projektif düzlem adını alır. $\mathcal{P}(2,q)$ ile gösterilir.

1.3. İlgili Yapılar

Eğer $\mathcal{S}$ bir yapı ise $\mathcal{S}$ yapıyı kullanarak başka yapı kurmak için bir çok yol vardır. Bunun için en basit yol $\mathcal{S}$ yapının dualini almaktır. Bu yapı $\mathcal{S}^T$ ile gösterilir. Noktaların ve blokların rolleri değiştirilir. Yani

$\mathcal{S}$ yapının her P noktası için $\mathcal{S}^T$ yapının P' bloğu vardır.

$\mathcal{S}$ yapının her x bloğu için $\mathcal{S}^T$ yapının x' noktası vardır.

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{S}^T$ yapıda çakışım

$\mathcal{S}^T$ yapıda x' noktasının P' bloğu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}$ yapıda P noktasının x bloğu üzerinde olmasıdır.

Burada $(\mathcal{S}^T)^T = \mathcal{S}$ 'dir.

Diğer bir yapı ise $\mathcal{S}$ yapının çakışım matrisinden elde edilen yapıdır. Bu yapıya $\mathcal{S}$ yapının tümleyeni denir ve $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ ile gösterilir. $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ yapının noktaları $\mathcal{S}$ yapının noktalarıdır. $\mathcal{S}$ yapının her x bloğu için P noktasının x^* bloğu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul P noktasının x bloğu üzerinde olmamasıdır' çakışım kuralı ile $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ yapının blokları x^* bloklarıdır. Herhangi $\mathcal{S}$ yapı için

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{S})) = \mathcal{S}$$

' dir. Ayrıca $\mathcal{S}$ bir dizayn ise $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ ' de dizayndır.

Teorem 1.3.1.

$2 \leq k \leq v - 2$ olmak üzere $\mathcal{S}$, bir $2-(v, k, \lambda)$ dizayn ise $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, bir

$$2-(v, v - k, b - 2\lambda_1 + \lambda)$$

dizayndır./

Teorem 1.3.2.

$2 \leq k \leq v - 2$ olmak üzere eğer $\mathcal{S}$, bir (v, k, λ) parametrelili 2-yapı ise $\mathcal{S}$ yapının mertebesi $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ yapının mertebesine eşittir./

Eğer $\mathcal{S}$, blokları k noktalı birbiçimli bir yapı ise $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ blokları $v - k$ noktalı birbiçimli bir yapıdır. Burada ya

$$k \leq \frac{v}{2}$$

ya da

$$v - k \leq \frac{v}{2}$$

'dir. Bu sebeble sadece $t \leq k \leq v/2$ şeklindeki (v, k, λ) parametrelili t -yapıları incelenecektir.

Şimdi $\mathcal{S}$ 'nin bir yapı olduğunu ve P 'nin $\mathcal{S}$ yapının bir noktası olduğunu farzedelim.

P dışındaki tüm noktalardan ve P 'yi içeren bloklardan P 'nin silinmesiyle elde edilen yapı $\mathcal{S}$ yapının P noktasındaki içsel yapısı olarak adlandırılır. $\mathcal{S}_P$ ile gösterilir. Benzer biçimde P dışındaki tüm noktalardan ve P noktasını içermeyen tüm bloklardan meydana gelen yapı $\mathcal{S}$ yapının P 'deki dışsal yapısı olarak adlandırılır. $\mathcal{S}^P$ ile gösterilir.

Aynı yöntemle $\mathcal{S}$ 'nin bir yapı olduğunu ve x 'in bir blok olduğunu farzedelim. x bloğu üzerinde olan noktalardan ve x bloğu dışındaki bloklardan oluşan yapıya $\mathcal{S}_x$ iç yapı denir. x bloğu üzerinde olmayan noktalardan ve bu noktaların tüm bloklardan silinmesiyle oluşan yapıya ise $\mathcal{S}^x$ dış yapı denir. Eğer $\mathcal{S}$ bir dizayn ise $\mathcal{S}^P$ ve $\mathcal{S}_P$ 'de dizayndır.

$\mathcal{S}_P$ iç yapısı önemli bir yapıdır. P noktasında $\mathcal{S}$ yapının kısıtlaması olarak adlandırılır. $t \geq 2$ olmak üzere t -dizaynın herhangi noktada kısıtlaması $(t-1)$ -dizayndır. $\mathcal{T}$ dizaynın bazı P noktaları için $\mathcal{S} = \mathcal{T}_P$ olacak şekilde eğer $\mathcal{T}$ bir dizayn ve $\mathcal{S}$ bir $(t-1)$ -dizayn ise $\mathcal{T}$ 'ye $\mathcal{S}$ dizaynın bir genişlemesi denir. Herhangi bir $\mathcal{S}$ yapısı ile $\mathcal{T}$ yapıdaki bazı P noktaları için

$$\mathcal{T}_P = \mathcal{S}$$

olmak üzere bir $\mathcal{T}$ yapısını kurmak mümkündür. ($\mathcal{S}$ yapının noktalar kümesine sadece P eklenir, $\mathcal{S}$ yapının her x bloğu için $x \cup P$, $\mathcal{T}$ 'nin bir bloğunu tanımlar ve $\mathcal{T}$ 'nin P 'yi içeren bu bloklardan başka bloğu yoktur.)

t -dizaynın genişlemesi $(t+1)$ -dizayn olduğundan t -dizaynı elde etmenin en kolay yolu kendisinden yararlanmaktır. Yani 1-dizaynla başlanır ve daha sonra birçok kez 1-dizayn genişletilir. Eğer trivial dizaynla başlanırsa genişleme vardır. Fakat genişleme ile oluşan dizaynda trivialdır.

$t(v, k, \lambda)$ ile verilmiş dizaynın genişlemesinin olup olmadığını anlamak için basit bir yol vardır. Blokların sayısı hesaplanır ve eğer bu sayı tam sayı değilse genişleme yoktur.

Teorem 1.3.3.

$\mathcal{S}$, b bloklu bir $t(v, k, \lambda)$ dizayn olsun. Eğer $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ dizaynın bir genişlemesi ise $\mathcal{T}$ dizayn

$$b \cdot \frac{(v+1)}{(k+1)}$$

bloklu $(t+1)-(v+1, k+1, \lambda)$ parametrelili bir dizayndır./

Teorem 1.3.4.

$t(v, k, \lambda)$ dizaynın bir genişlemeye sahip olması için gerek koşul

$$(k+1) \mid b(v+1)$$

olmasıdır./

Bloklara göre yapılan iç ve dış yapılar incelendiğinde $\mathcal{S}$ dizayn olsa bile iç ve dış yapıların dizayn olmayabildiği görülür. Örneğin x bloğu $\mathcal{S}$ dizaynın y ' den farklı bir bloğu ise $x \cap y$ ya boştur yada $\mathcal{S}_y$ yapının bir bloğudur.

Fakat $\mathcal{S}$ bir t -dizayn olsa bile $x \cap y$ ve $y \cap w$ ' nın her ikisinde boş olmayan fakat farklı boyutlu iki küme olabilir. Bu taktirde $\mathcal{S}_y$ birbiciimli değildir. Ayrıca x, y blokları için $x \cap y$ ve $w \cap y$ ' nin boş olmayan nokta kümeleri eşit olacak şekilde üçüncü bir w bloğu olabilir. Bu taktirde $\mathcal{S}_y$ tekrarlı bloklara sahiptir. Her iki durumda da $\mathcal{S}_y$ dizayn değildir.

$\mathcal{S}^y$ genellikle y bloğuna göre $\mathcal{S}$ yapının residuali olarak adlandırılır. Eğer bir $\mathcal{T}$ dizayn $\mathcal{S}$ yapısının residualine izomorfikse $\mathcal{T}$ dizayn $\mathcal{S}$ içine gömülebilir denir. $\mathcal{S}$ yapının iç ve dış yapılarının tamamını $\mathcal{S}$ ' nin noktalarının ve bloklarının altkümelerinden ibarettir. $\mathcal{S}$ yapıyla benzer çakışma sahiptirler.

Eğer $\mathcal{S}$ herhangi bir yapı ise

$\mathcal{C}$ yapının bir elemanının $\mathcal{C}'$ de çakışım halinde olması için gerek ve yeter koşul bu elemanların $\mathcal{S}$ ' de de çakışım olmasıdır

koşuluyla eğer $\mathcal{C}$ yapı $\mathcal{S}$ ' nin noktalarının ve bloklarının bir alt kümesi ise $\mathcal{C}$ yapı $\mathcal{S}$ ' nin bir alt yapısıdır. Bir altdizaynda benzer biçimde tanımlanır.

Eğer $x \in \mathcal{S}$ ' nin $\mathcal{C}$ altyapısının bir bloğu ise $\mathcal{C}'$ nin x bloğu üzerindeki noktaların sayısı $\mathcal{S}$ yapının x bloğu üzerindeki noktaların sayısından daha az olabilir. Eğer $\mathcal{C}$ yapıdaki her x bloğu için $\mathcal{S}$ 'nin x bloğu üzerindeki her noktası $\mathcal{C}$ yapıda ise $\mathcal{S}$ yapının $\mathcal{C}$ altyapısı tam ' dır denir.

1.4. Çakışım Matrisi

Eğer bir yapıda en az bir blok var ve bu yapının blokları 1 'den fazla fakat v ' den az nokta içeriyorsa bu yapı bir öz yapı olarak adlandırılır.

Teorem 1.4.1.

A , bir çakışım matrisi , N bir $v \times v$ köşegen matris , J $v \times v$ elemanları +1'ler olan matris olmak üzere

$$A.A^T = N + \lambda.J_v$$

'dir. N matrisinin köşegeni üzerinde i . konumdaki eleman

$$n_i = r_i - \lambda$$

' dir ./

Teorem 1.4.2.

Eğer $\mathcal{S}$,bir öz 2-yapı ve A , $\mathcal{S}$ yapı için bir çakışım matrisi ise

$$\det(A.A^T) = \prod_{i=1}^v n_i \left[1 + \lambda \sum_{j=1}^v 1/n_j \right]$$

' dir ./

$v > k$ olmak üzere (v, k, λ) parametrelili kare 2-dizayn bir simetrik dizayn olarak tanımlanır. Simetrik dizaynlar için

$$k = r$$

ve A çakışım matrisi için

$$A.J_v = J_v.A = k.J_v$$

'dır.

Teorem 1.4.3.(Fisher Eşitsizliği)

$v > k$ olmak üzere eğer $\mathcal{S}$, bir $2-(v, k, \lambda)$ parametrelili dizayn ise $v \leq b$ 'dir./

Teorem 1.4.4.

Eğer $\mathcal{S}$, v noktalı bir öz 2-yapı ise

$$\prod_{i=1}^v n_i \left[1 + \lambda \sum_{j=1}^v 1/n_j \right]$$

bir tamsayının karesidir./

Ayrıca $t \geq 2$ olmak üzere kare birbiçimli t -yapılar ilgileneyeğimiz simetrik dizaynlardır.

BÖLÜM II

SİMETRİK DİZAYNLAR

2.1 Residual Yapılar

Eğer y , bir 2-dizayn olan $\mathcal{D}$ 'nin keyfi bir bloğu ise ne $\mathcal{D}^y$ ne de $\mathcal{D}_y$ dizayn olmayabilir. Bununla birlikte $\mathcal{D}$, bir $2-(v, k, \lambda)$ simetrik dizayn ise $\mathcal{D}$ 'nin herhangi iki bloğu λ noktada kesişirler. Bu nedenle $\mathcal{D}$ simetrik dizayn olduğu zaman $\mathcal{D}_y$ ve $\mathcal{D}^y$ birbiriçimli yapılar olmak zorundadır.

$\mathcal{D}_y$ yapısının blok genişliği λ , $\mathcal{D}^y$ 'nin blok genişliği ise $k - \lambda$ 'dır. Fakat genelde $\mathcal{D}_y$ ve $\mathcal{D}^y$ tekrarlı bloklara sahip olabilir ve dizayn olmayabilirler. Bununla birlikte eğer $2k < v$ ise $\mathcal{D}^y$ her y bloğu için bir 2-dizayndır.

Teorem 2.1.1.

$2k < v$ olmak üzere eğer $\mathcal{D}$ bir $2-(v, k, \lambda)$ dizayn ise $\mathcal{D}$ dizaynının herhangi y bloğu için $\mathcal{D}^y$ bir $2-(v - k, k - \lambda, \lambda)$ dizayndır.

İspat:

y bloğu k elemanlı olduğu için $\mathcal{D}^y$ yapının bir bloğundaki nokta sayısı $v - k$ 'dır. $\mathcal{D}$ dizaynının herhangi iki bloğu λ noktada kesiştiğinden $\mathcal{D}^y$ 'nin her bloğunda $k - \lambda$ nokta vardır.

$\mathcal{D}^y$ yapının iki noktadan geçen blokları $\mathcal{D}$ dizaynının aynı noktalardan geçen blokları olduğundan, $\mathcal{D}^y$ yapının her nokta ikilisi λ tane ortak blok üzerindedir. Şimdi $\mathcal{D}^y$ yapının tekrarlı blokları olmadığını göstermeliyiz.

Eğer $\mathcal{D}^y$ yapının iki bloğu aynı nokta künesi ile çakışım halinde ise $\mathcal{D}$ dizaynı $k - \lambda$ ortak noktalı en az iki bloğu içermek zorundadır .

$2k < v$ ve teorem 1.1.2.(c)'den

$$r(k-1) = \lambda_2(v-1)$$

$$k(k-1) > \lambda(2k-1)$$

'dir. Buradan

$$2\lambda < k \text{ ya da } \lambda < k - \lambda$$

elde edilir. Bu nedenle $\mathcal{D}$ dizaynının herhangi blok ikilileri λ noktada çakışacağından $\mathcal{D}^y$ tekrarlı bloklara sahip değildir. Yani $\mathcal{D}^y$ dizayndır.

Teoremin karşıtı da doğrudur. Yani eğer bir 2-dizayn olan $\mathcal{D}$, her y bloğu için $\mathcal{D}^y$ bir 2-dizayn özeliğini taşıyorsa, simetriktir./

Teorem 2.1.2.

Eğer $\mathcal{D}$ trivial olmayan bir $2-(v, k, \lambda)$ dizaynı, $\mathcal{D}^y$ bir 2-dizayn olacak şekilde bir y bloğuna sahipse, simetriktir.

İspat:

$\mathcal{D}$ dizaynının herhangi x bloğu seçilip geride kalan blokları $x_1 x_2 \dots x_{b-1}$ şeklinde etiketlensin.

$$x \cap x_i \quad i = 1 \dots b-1$$

kümesindeki noktaların sayısı $n_{x,i}$ olsun. P noktası x bloğu üzerinde ve $x \neq z$ olmak üzere (P, z) bayraklarının sayısı iki yoldan hesaplansın.

P noktası için k seçenek olduğunda z bloğu için $r-1$ seçenek vardır. Bu yüzden (P, z) bayrakların sayısı $k(r-1)$ 'dir. Bununla birlikte her x_i için P noktasının $n_{x,i}$ seçeneği vardır. Bu nedenle

$$\sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i}$$

bayrak vardır. Buradan

$$\sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i} = k(r-1) \quad (1)$$

elde edilir. Benzer biçimde $P \neq Q \implies z \neq x$ olmak üzere P, Q noktalarındaki (P, Q, z) 2- bayrakların sayısı

$$\sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i}(n_{x,i} - 1) = k(k-1)(\lambda-1)$$

'dir. w_x , $n_{x,i}$ 'nin ortalama değeri olmak üzere

$$w_x = \sum_{i=1}^{b-1} \frac{n_{x,i}}{(b-1)} = \frac{k(r-1)}{(b-1)}$$

ifadesi

$$\sum_{i=1}^{b-1} (n_{x,i} - w_x)^2$$

'nin açılımında yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{b-1} (n_{x,i} - w_x)^2 &= \sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i}^2 - 2w_x \sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i} + (b-1)w_x^2 \\ &= \sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i}(n_{x,i} - 1) - (2w_x - 1) \sum_{i=1}^{b-1} n_{x,i} + (b-1)w_x^2 \\ &= k(k-1)(\lambda-1) - \left(2\frac{k(r-1)}{(b-1)} - 1\right)k(r-1) + (b-1)k^2 \frac{(r-1)^2}{(b-1)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat için bu ifadeyi iletletmeye gerek yoktur. Bu değer orjinal x bloğundan bağımsızdır. Bu nedenle bu değer bir blok için sıfırsa her blok için sıfır olacaktır.

$\mathcal{D}^y$ bir 2- dizayn olduğundan bir biçimlidir ve her blok aynı sayıda eleman içerir.

Bu sayıya k' diyelim. $\mathcal{D}$ dizaynının herhangi c bloğu için $c \neq y$ olduğundan

$$|c \cap y| = k - k'$$

dır. $n_{y,i} = k - k'$ yazılırsa

$$\begin{aligned} w_y &= \sum_{i=1}^{b-1} \frac{n_{y,i}}{b-1} \\ &= \sum_{i=1}^{b-1} \frac{k - k'}{b-1} \\ &= \frac{k - k'}{b-1} (b-1) \\ &= k - k' \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$n_{y,i} = k - k' = w_y$$

ya da

$$\sum_{i=1}^{b-1} (n_{y,i} - w_y)^2 = 0$$

'dır. Bundan dolayı her x bloğu için

$$\sum_{i=1}^{b-1} (n_{x,i} - w_x)^2 = 0$$

'dır. $\mathcal{D}$ trivial olmadığı için $2 < k < v$ ve Fisher eşitsizliğinden bir $2-(v, k, \lambda)$ dizayn olan $\mathcal{D}$ için $v > k$ olmak üzere $v \leq b$ ' dir. Teorem 1.1.1. (b) ' den $t > 0$ olmak üzere

$bk = vr$ ' dir.

$$v > k \quad v < b \quad bk = vr$$

eşitsizlilerinden $r > 1$ elde edilir. Bu da P noktasından geçen başka bir bloğun varlığını ispatlar. Yani $w_x > 0$ ' dır. Buradan her i için $n_{x,i} = w_x$ olduğundan diğer bloklar x bloğuyla $w_x > 0$ noktada çakışırlar. Aynı zamanda bir y bloğu da x bloğuyla w_y noktada çakışır. Bu yüzden her y bloğu için

$$w_x = w_y$$

' dir. Bu nedenle $\mathcal{D}$ 'nin herhangi iki bloğu w_y noktada çakışır. İspatlanması gerekende budur./

Eğer $\mathcal{S}$, $v-1$ bloklu bir $2-(v-k, k-\lambda, \lambda)$ dizayn ise $\mathcal{D}$ quasi-residual 2-dizayn olarak adlandırılır. Bir (v, k, λ) parametrelili simetrik dizayn için $v = b$ ve $k = r$ olduğundan

$$(v-1)\lambda = k(k-1)$$

ya da

$$v = \frac{k(k-1) + \lambda}{\lambda}$$

'dır. Bununla birlikte eğer (v, k, λ) bu bağıntıyı sağlayan tamsayılar ise bu bağıntı bir $2-(v, k, \lambda)$ simetrik dizaynın varlığını garantilemez. Şimdi v, k, λ değerleri önemli sınırlamaları sağlamadıkça $2-(v, k, \lambda)$ simetrik dizaynın varolmadığını ispatlayacağız.

Teorem 2.1.3 : Bruck - Ryser - Chowla Teoremi

v, k, λ parametreleri $(v-1)\lambda = k(k-1)$ eşitliğini sağlayan tamsayılar ise $\mathcal{D}$ simetrik dizaynın varlığı için aşağıdaki koşullar gereklidir:

- (a) Eğer v çift ise $k - \lambda$ bir tamsayının karesi şeklindedir.
- (b) Eğer v tek ise

$$z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{\frac{(v-1)}{2}} \lambda y^2$$

denklemini x, y, z , tamsayıları için aşikar çözümden farklı çözüme sahip olmalıdır.

İspat :

- (a) $\mathcal{S}$, v noktalı bir öz 2-yapı ise

$$AA^T = N + \lambda J_v$$

dir. Burada $r_i = k_i = k$ olmalıdır.

Buradan

$$\begin{aligned} n_i &= r_i - \lambda \\ &= r - \lambda \\ &= n \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.4.4 'den

$$\prod_{i=1}^v n_i \left[1 + \lambda \sum_{j=1}^v 1/n_j \right]$$

bir tamsayının karesidir. $n_i = n$ yazılırsa

$$\begin{aligned} n^v \left(1 + \lambda \frac{v}{n} \right) &= n^{v-1} (n + \lambda v) \\ &= n^{v-1} k^2 \end{aligned}$$

elde edilir. v çift olduğundan $v - 1$ tektir. Bu durumda n^{v-1} 'in bir tamsayının karesi olması için n bir kare olmalıdır.

(b)

Her pozitif tamsayı dört tamsayının karesinin toplamıdır. (1)

Ayrıca

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \quad (2)$$

elemanter özdeşliğini kullanırız. Bu eşitlik culer tarafından bulunmuştur. Burada

$$y_1 = b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 - b_4 x_4$$

$$y_2 = b_2 x_1 + b_1 x_2 - b_4 x_3 + b_3 x_4$$

$$y_3 = b_3 x_1 + b_4 x_2 + b_1 x_3 - b_2 x_4$$

$$y_4 = b_4 x_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3 + b_1 x_4$$

dır.

$\mathcal{D}$, $2-(v, k, \lambda)$ parametrelili bir simetrik dizayn olsun.

$\mathcal{D}$ 'nin noktaları $P_1 P_2 \dots P_v$

$\mathcal{D}$ 'nin blokları $c_1 c_2 \dots c_v$

ve $A = (a_{ij})$ çakışım matrisi olsun.

$x_1 x_2 \dots x_v$ $i = 1 \dots v$ 'yi lineer bağımsız değişkenler olarak alalım.

v tane lineer

$$L_i = \sum_{j=1}^v a_{ij} x_j$$

formunu belirleyelim. $i = 1, 2, \dots, v$ olmak üzere

$$L_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1v}x_v$$

$$L_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2v}x_v$$

$$\vdots$$

$$L_v = a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + \dots + a_{vv}x_v$$

yazalım. Şimdi $L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_v^2$ ifadesini hesaplayalım .

$$\begin{aligned} L_1^2 &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1v}x_v)^2 \\ &= a_{11}^2x_1^2 + a_{12}^2x_2^2 + \dots + a_{1v}^2x_v^2 \\ &\quad + 2(a_{11}a_{12}x_1x_2 + a_{11}a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1v}a_{1v-1}x_vx_{v-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2^2 &= (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2v}x_v)^2 \\ &= a_{21}^2x_1^2 + a_{22}^2x_2^2 + \dots + a_{2v}^2x_v^2 \\ &\quad + 2(a_{21}a_{22}x_1x_2 + a_{21}a_{23}x_1x_3 + \dots + a_{2v}a_{2v-1}x_vx_{v-1}) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} L_v^2 &= (a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + \dots + a_{vv}x_v)^2 \\ &= a_{v1}^2x_1^2 + a_{v2}^2x_2^2 + \dots + a_{vv}^2x_v^2 \\ &\quad + 2(a_{v1}a_{v2}x_1x_2 + a_{v1}a_{v3}x_1x_3 + \dots + a_{vv-1}a_{vv}x_{v-1}x_v) \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned}
L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_v^2 &= a_{11}^2 x_1^2 + a_{12}^2 x_2^2 + \dots + a_{1v}^2 x_v^2 + a_{21}^2 x_1^2 + a_{22}^2 x_2^2 \\
&+ \dots + a_{2v}^2 x_v^2 + \dots + a_{v1}^2 x_1^2 + a_{v2}^2 x_2^2 + \dots + a_{vv}^2 x_v^2 \\
&+ \dots + 2(a_{11}a_{12}x_1x_2 + a_{11}a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1v-1}a_{1v}x_{v-1}x_v \\
&+ a_{21}a_{22}x_1x_2 + a_{21}a_{23}x_1x_3 + \dots + a_{2v}a_{2v-1}x_vx_{v-1} \\
&+ \dots \\
&+ a_{v1}a_{v2}x_1x_2 + a_{v1}a_{v3}x_1x_3 + \dots + a_{vv-1}a_{vv}x_{v-1}x_v) \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{v1}^2)x_1^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{v2}^2)x_2^2 \\
&+ \dots + (a_{1v}^2 + a_{2v}^2 + \dots + a_{vv}^2)x_v^2 \\
&+ 2(a_{11}a_{12}x_1x_2 + a_{11}a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1v}a_{1v-1}x_vx_{v-1} \\
&+ a_{21}a_{22}x_1x_2 + a_{21}a_{23}x_1x_3 + \dots + a_{2v}a_{2v-1}x_vx_{v-1} \\
&+ \dots \\
&+ a_{v1}a_{v2}x_1x_2 + a_{v1}a_{v3}x_1x_3 + \dots + a_{vv-1}a_{vv}x_{v-1}x_v)
\end{aligned}$$

 a_{11} a_{21} $\dots$ a_{v1}

Bir blok oluşturur. Bir blok k nokta ile kesiştiğinden x_1 değişkeni bu blokta k tane vardır. Buradan x_1^2 ' de k tane olur. Bu her i için her c_i bloğunda geçerlidir.

$i \neq j$ ise $a_i a_j$ gibi ise iki nokta λ blokta kesiştiğinden $x_i x_j$ değeri λ kez meydana gelir. Bu eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_v^2 &= k(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + 2\lambda(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{v-1}x_v) \\
&= k(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + 2\lambda(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{v-1}x_v) \\
&+ \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) \\
&= (k - \lambda)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_v)^2 \equiv Q
\end{aligned} \tag{3}$$

$n > 0$ olduğundan n 'yi $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$ şeklinde yazarsak (1) ve (2)'den

$$n(x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2) = y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_{i+2}^2 + y_{i+3}^2 \quad (4)$$

yazılır.

Kabulden v tek olduğundan $v \equiv 1 \pmod{4}$ veya $v \equiv 3 \pmod{4}$ yazılabilir.

Önce $v \equiv 1 \pmod{4}$ halini ele alalım.

$$\begin{aligned} n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) &= n(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + n(x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2) \\ &+ \dots + n(x_{v-4}^2 + x_{v-3}^2 + x_{v-2}^2 + x_{v-1}^2) + nx_v^2 \end{aligned}$$

olur. (4) 'ü (3) 'ün sağ tarafına uygular ve

$$\sum_{i=1}^v x_i = w$$

yazarsak

$$\begin{aligned} L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_v^2 &= y_1^2 + \dots + y_4^2 + y_5^2 + \dots + y_8^2 \\ &+ y_{v-4}^2 + \dots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \\ &= y_1^2 + \dots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Burada (2) 'yi kullanarak ve x 'lerden y 'lere lineer transformasyon tekil olmadığından x 'leri y 'lere göre çözebiliriz. Yani

$$w = x_1 + x_2 + \dots + x_v$$

olup bu ifade $y_1, y_2, \dots, y_{v-1}, x_v$ 'ler cinsinden ifade edilebilir. Böylece L_s ve w rasyonel lineer formlar olmak üzere $y_1, y_2, \dots, y_{v-1}, x_v$ bağımsız değişkenleri cinsinden bir özdeşliğe sahip oluruz.

Eğer L_1 , y_1 için $+1$ katsayısına sahip değilse

$$L_1 = y_1$$

yazılır. Eğer katsayı $+1$ ise

$$L_1 = -y_1$$

yazılır.

Her iki durumda da bu bağıntıyı y_1 'i $y_2, y_3, \dots, y_{v-1}, x_v$ 'lerin lineer kombinasyonu olarak çözmek için kullanırız. Buradan

$$L_1^2 = y_1^2$$

dir. Bu nedenle (5) özdeşliği

$$L_2^2 + L_3^2 + \dots + L_v^2 = y_2^2 + \dots + y_{v-1}^2 + nx_v^2 + \lambda w^2 \quad (6)$$

olur. Sonraki değişkenlere göre $y_2, y_3, \dots, y_{v-1}$ 'i çözmek için

$$L_2 = \pm y_2$$

....

$$L_{v-1}^2 = \pm y_{v-1}^2$$

yazılırsa sonuçta

$$L_v^2 = nx_v^2 + \lambda w^2 \quad (7)$$

elde edilir. Burada x_v bağımsız değişken, L_v ve w ifadeleri x_v 'nin rasyonel katı şeklindedir. x_v 'yi L_v ve w da ortaya çıkan paydaların bir katı olan bir tamsayı olarak alalım. O zaman

$$z^2 = (k - \lambda)x^2 + \lambda y^2$$

elde edilir. Eğer $v \equiv 3 \pmod{4}$ ise

$$\begin{aligned} n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2) + x_{v+1}^2 &= n(x_1^2 + \dots + x_4^2) + \dots + n(x_5^2 + \dots + x_8^2) \\ &+ \dots + n(x_{v-2}^2 + x_{v-1}^2 + x_v^2 + x_{v+1}^2) \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Buradan

$$L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_v^2 + nx_{v+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{v+1}^2 + \lambda w^2 \quad (8)$$

dir. Yukarıdakine benzer bir işlem uygulanırsa

$$nx_{v+1}^2 = y_{v+1}^2 + \lambda w^2 \quad (9)$$

elde edilir.

y_{v+1} ve w , x_{v+1} bağımsız değişkeninin bir katıdır.Bu durumda

$$(k - \lambda)x^2 = z^2 + \lambda y^2$$

denkleminin tamsayı çözümleri olmalıdır.Bununla birlikte $v \equiv 3 \pmod{4}$ olduğu zaman $(-1)^{\frac{(v-1)}{2}} = -1$ ' dir.Bu nedenle

$$(k - \lambda)x^2 + (-1)^{\frac{(v-1)}{2}} \lambda y^2$$

denkleminin tamsayı çözümleri vardır./

Teorem 2.1.4.

Eğer $\lambda = 1$, n mertebeli bir simetrik dizayn mevcut ve

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

ya da

$$n \equiv 2 \pmod{4}$$

ise n iki tam sayının karelerinin toplamıdır.

İspat :

$\mathcal{D}$, bir $2-(v,k,1)$ parametrelili simetrik dizayn olsun. $\lambda = 1$ olduğundan

$$n = k - \lambda$$

$$n = k - 1$$

$k = n + 1$ yazılabilir.Bu takdirde $k(k - 1) = (v - 1)\lambda$, $\lambda = 1$ ve $k = n + 1$

$$(n + 1)n = (v - 1)1$$

'dir.Buradan

$$v = n^2 + n + 1$$

olur.Bu sayı her zaman tektir.Çünkü $n^2 + n \equiv n(n + 1) \pmod{4}$ çift olduğundan v tektir.

Eğer $v \equiv 1 \pmod{4}$ ise $n \equiv 0 \pmod{4}$ ya da $n \equiv 3 \pmod{4}$ 'dür.

Eğer $v \equiv 3 \pmod{4}$ ise $n \equiv 2 \pmod{4}$ ya da $n \equiv 1 \pmod{4}$ 'dür.

Ayrıca $v \equiv 1 \pmod{4}$ ise $(-1)^{\frac{v-1}{2}} = -1$ ' dir.

Bu sebeble , BRC Teoreminden

$$nx^2 = z^2 - y^2$$

denkleminin bir çözümü var olmalıdır.

$x = 0$, $y = z = 1$ aşıkak çözüm değildir.

Eğer $v \equiv 3 \pmod{4}$ ise

$$nx^2 = z^2 + y^2$$

$$\frac{nx^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2}$$

$$n = a^2 + b^2$$

denkleminin bir çözümü var olmalıdır.Burada a ve b rasyonel sayılardır.Fakat bir tamsayının iki rasyonel sayının karesinin toplamı olması için gerek ve yeter koşul bu sayının iki tamsayının karesinin toplamı olması gerekir.İspatlanması gerekende budur./

2.2 Singer Grupları , Fark kümeleri ve Simetrik Dizaynlar ile ilişkileri

Eğer G, bir X kümesi üzerinde bir permütasyon grubu ise herhangi $x \in X$ için G altında x'in yörüngesi x^G ile gösterilir.Eğer

$$G_x = \{g \in G | x^g = x\}$$

ise G_x , G 'nin bir alt grubudur.Eğer G , X üzerinde geçişken ve bir $x \in X$ için $G_x = I$ ise G 'ye X üzerinde düzgündür denir.

Eğer G, X üzerinde düzgün ise birim permütasyondan başka hiçbir permütasyonun sabit elemanı yoktur.Bu nedenle herhangi $x, y \in X$ için $x^g = y$ olmak üzere tek bir $g \in G$ vardır.Bir $2 - (v, k, \lambda)$ parametrelili simetrik $\mathcal{D}$ dizaynı için G, $\mathcal{D}$ 'nin noktaları ve blokları üzerinde düzgün ve geçişken ise G bir singer gruptur.

Eğer G , bir $\mathcal{D} = 2 - (v, k, \lambda)$ simetrik dizaynın singer grubu ise herhangi bir P noktası ve x bloğu için

$$D = \{g \in G | P^g \text{ x üzerindedir}\}$$

alt kümesi G 'nin fark kümesi olarak adlandırılır.

Eğer G sonlu grup ise $c_i, d_i, e_i, f_i, g_i \in D$ için G 'nin birimden farklı her elemanı λ kere $c_i d_i^{-1}$, λ kere $e_i^{-1} f_i$ şeklinde temsil edilebilirse G 'nin D alt kümesine G için λ - fark kümesi denir. λ - fark kümeli G grubunun parametreleri v, k, λ 'dır.

$$|G| = v \text{ ve } |D| = k \text{ 'dır.}$$

Teorem 2.2.1.

G , $k < v$ elemanlı D λ - fark kümesiyle v mertebeli grup olsun. G , D fark kümeli $\mathcal{D}$ için bir singer grubu olacak şekilde (v, k, λ) parametrelili izomorfizme bağlı tek bir $\mathcal{D}$ simetrik dizaynı vardır./

Bu teoremin ispatını vermek yerine teoremi bir örnekle açıklamayı tercih ediyoruz.

G singer gruplu ve G 'nin bir D fark kümesi olan $\mathcal{D}$ dizayna birleştirilmiş dizayn denir.

Örnek 2.2.1.

$G = Z_v$ ve $D = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ verilmiş olsun. D 'nin G için fark kümesi olduğunu ve birleştirilmiş simetrik dizaynın parametrelerini bulalım.

Çözüm:

$$G = \{0, 1, \dots, 10\} \text{ ve } v = 11$$

$$D = \{1, 3, 4, 5, 9\} \text{ ve } k = 5$$

$$1 - 3 \equiv 9 \pmod{11} \quad 3 - 1 \equiv 2 \pmod{11} \quad 4 - 1 \equiv 3 \pmod{11}$$

$$1 - 4 \equiv 8 \pmod{11} \quad 3 - 4 \equiv 10 \pmod{11} \quad 4 - 3 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$1 - 5 \equiv 7 \pmod{11} \quad 3 - 5 \equiv 9 \pmod{11} \quad 4 - 5 \equiv 10 \pmod{11}$$

$$1 - 9 \equiv 3 \pmod{11} \quad 3 - 9 \equiv 5 \pmod{11} \quad 4 - 9 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$5 - 1 \equiv 4 \pmod{11} \quad 9 - 1 \equiv 8 \pmod{11}$$

$$5 - 3 \equiv 2 \pmod{11} \quad 9 - 3 \equiv 6 \pmod{11}$$

$$5 - 4 \equiv 1 \pmod{11} \quad 9 - 4 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$5 - 9 \equiv 7 \pmod{11} \quad 9 - 5 \equiv 4 \pmod{11}$$

Bütün elemanlar $\lambda = 2$ kez her blokta bulunuyor. Birleştirilmiş simetrik dizaynın parametreleri $(11, 5, 2)$ 'dir./

Örnekte görüldüğü gibi fark kümeleri simetrik dizaynları kurmanın uygun ve basit bir yoludur. Dizaynın elemanları singer grubu ve fark kümesiyle belirlenir. Eğer bir simetrik dizayn devresel singer grubuna sahip ise bu simetrik dizayn özel bir çakışım matrisine sahiptir. Bunu açıklamak için Örnek 2.2.1 'e tekrar dönelim. $\mathcal{D}$ birleştirilmiş dizaynın blokları $D + i$ nokta kümeleridir.

$$i = 0 \quad \text{için } D_1 = \{0, 1, 3\}$$

$$i = 1 \quad \text{için } D_2 = \{1, 2, 4\}$$

$$i = 2 \quad \text{için } D_3 = \{2, 3, 5\}$$

$$i = 3 \quad \text{için } D_4 = \{3, 4, 6\}$$

$$i = 4 \quad \text{için } D_5 = \{4, 5, 0\}$$

$$i = 5 \quad \text{için } D_6 = \{5, 6, 1\}$$

$$i = 6 \quad \text{için } D_7 = \{6, 0, 2\}$$

$\mathcal{D}$ dizaynın çakışım matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Bu bir devresel matris örneğidir. Her satır veya sütun önceki satırdaki elemanların yerini sağa ya da aşağı devretmesiyle elde edilir.

2.3 Hadamard 2-dizaynlar

Eğer $\mathcal{D}$, (v, k, λ) parametrelili trivial olmayan bir simetrik dizayn ise

$$2 \leq k \leq v - 2$$

'dir. Teorem 1.3.1 ve Teorem 1.3.2. 'den $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ $(v, v - k, v - 2k + \lambda)$ parametrelili bir simetrik dizayndır. $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ dizaynın mertebesi ile $\mathcal{D}$ dizaynın mertebesi aynıdır.

v ve n simetrik dizayn ve bu dizaynın tümleyeni arasında ortak iki parametredir.

Teorem 2.3.1.

Eğer $\mathcal{D}$, n mertebeli (v, k, λ) parametrelili trivial olmayan bir simetrik dizayn ise $4n - 1 \leq v \leq n^2 + n + 1$ 'dir.

İspat:

v , n $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ dizayn için aynı olduğundan $2k \leq v$ kabul edilebilir. (Teorem 1.1.3. ve (v, k, λ) parametrelili t-yapı olduğu zaman $k \leq v/2$ kısıtlaması yapıldığından) Bununla birlikte $\lambda(v-1) = k(k-1)$ olduğundan $k|\lambda$ ya da $k|v-1$ 'dir. $k|v-1$ olduğundan $k \nmid v$ 'dir. Bu yüzden eşitlik kaldırılır ve $2k < v$ yazılır. $\lambda \geq 1$ olduğundan

$$2k < v$$

$$2k - 2\lambda < v - 2\lambda \quad (1)$$

$$2n < v - 2\lambda$$

$$2n < v$$

dir. Ayrıca

$$2k < v$$

$$k^2 < k(v-k)$$

$$k < \sqrt{k(v-k)}$$

$$2k < 2\sqrt{k(v-k)}$$

buradan

$$2\sqrt{k(v-k)} < v \quad (2)$$

dır. Fakat $k = n + \lambda$ olduğundan

$$k(v-k) = (n+\lambda)(v-k)$$

$$= n v - nk + \lambda v - \lambda k$$

$$= n v + \lambda v - nk - \lambda k$$

$$= n v + \lambda v - k(n+\lambda)$$

$$= n v + \lambda v - k^2$$

elde edilir. Şimdi $\lambda v - k^2$ değcrini hesaplayalım.

$$v = \frac{k(k-1) + \lambda}{\lambda}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda v - k^2 &= \lambda \cdot \frac{k(k-1) + \lambda}{\lambda} - k^2 \\ &= k^2 - k + \lambda - k^2 \\ &= -(k - \lambda) = -n\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değcr yukarıdaki $\lambda v - k^2$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}k(v - k) &= n v - n \\ &= n(v - 1)\end{aligned}$$

bulunur. $k(v - k)$ ' yı (2) ' de yerine koyar ve karesini alırsak

$$\begin{aligned}2\sqrt{k(v - k)} &< v \\ 2\sqrt{n(v - 1)} &< v \\ 4(n(v - 1)) &< v^2 \\ 4n v - 4n &< v^2\end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}4n v - 4n + 4n^2 &< v^2 + 4n^2 \\ 4n^2 - 4n &< v^2 - 4n v + 4n^2 \\ 4n^2 - 4n &< (v - 2n)^2 \\ 4n^2 - 4n + 1 &\leq (v - 2n)^2 \\ (2n - 1)^2 &\leq (v - 2n)^2\end{aligned}$$

bulunur.

$2n > 1$ olduğu açıktır. Buradan $2n - 1 > 0$ ve $(2n - 1) \leq (v - 2n)$ olduğundan $v - 2n > 0$ olur. Bu nedenle $v - 2n$ ve $2n - 1$ pozitif sayılardır.

Buradan $2n - 1 \leq v - 2n$ ya da $4n - 1 \leq v$ bulunur. Eğer a, b pozitif tamsayılar ise $a + b - 1 \leq ab$ 'dir. ($a \neq 1$ $b \neq 1$)

$\lambda \geq 1$ ve $v > 2k$ olduğundan bu eşitsizliği

$$a = \lambda$$

$$b = v - 2k + \lambda$$

için uygularsak

$$a + b - 1 \leq ab$$

$$\lambda + v - 2k + \lambda - 1 \leq \lambda(v - 2k + \lambda)$$

Şimdi $\lambda(v - 2k + \lambda)$ değerini hesaplayalım. $n = k - \lambda$ olduğundan $\lambda = k - n$ yazılacaktır.

$$\begin{aligned} \lambda(v - 2k + \lambda) &= (k - n)(v - 2k + \lambda) \\ &= (k - n)(v - k - k + \lambda) \\ &= (k - n)(v - k - (k - \lambda)) \\ &= (k - n)(v - k - n) \\ &= k(v - k) - nk - n(v - k) + n^2 \\ &= n^2 - n(v - k + k) + k(v - k) \\ &= n^2 - n v + n(v - 1) \\ &= n^2 - n v + n v - n \\ &= n^2 - n \end{aligned}$$

bulduğumuz değeri yerine koyarsak

$$v - 2k + 2\lambda - 1 \leq n(n - 1)$$

$$v - 2n - 1 \leq n(n - 1)$$

$$v \leq n^2 + n + 1$$

elde edilir.

$4n - 1 \leq v$ ve $v \leq n^2 + n + 1$ sonuçları birleştirilirse

$$4n - 1 \leq v \leq n^2 + n + 1$$

bulunur.İspatlanması gereken de budur./

Teorem 2.3.1 'in iki özel durumu mevcuttur. Bunları inceleyelim. Eğer $v = n^2 + n + 1$ ise

$$\begin{aligned} n(n-1) &= \lambda(n^2 + n + 1 - 2(\lambda + n) + \lambda) \\ &= \lambda(n^2 + n + 1 - 2\lambda - 2n + \lambda) \\ &= \lambda(n^2 - n + 1 - \lambda) \\ &= \lambda(n^2 - n + 1) - \lambda^2 \end{aligned}$$

olur. $(\lambda - 1)(\lambda - (n^2 - n)) = 0$ denkleminin kökleri hesaplanırsa $\lambda = 1$ ya da $\lambda = n^2 - n$ bulunur.

Eğer $\lambda = 1$ ise

$$\begin{aligned} n &= k - \lambda \\ &= k - 1 \end{aligned}$$

olduğundan $k = n + 1$ bulunur.

$\mathcal{D}$, bir $2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ dizayn olur.Buradan $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, bir $2-(v, v - k, v - 2k + \lambda)$ dizayn olduğundan $2-(n^2 + n + 1, n^2, n^2 - n)$ dizayn olur.

Eğer $\lambda = n^2 - n$ ise

$$\begin{aligned} k &= n + \lambda \\ &= n^2 - n + n = n^2 \end{aligned}$$

bulunur. $\mathcal{D}$, bir $2-(n^2 + n + 1, n^2, n^2 - n)$ dizayn ve $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ ise bir $2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ dizayn olur.

Bu nedenle eğer $v = n^2 + n + 1$ ise ya $\mathcal{D}$ ya da $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ dizaynlar için $\lambda = 1$ 'dir.

Eğer $v = 4n - 1$ ise

$$\begin{aligned} n(n-1) &= \lambda(4n-1-2(\lambda+n)+\lambda) \\ &= \lambda(2n-1-\lambda) \\ &= -\lambda^2 + \lambda(2n-1) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda(2n-1) + n^2 - n &= 0 \\ (\lambda - n)(\lambda - (n-1)) &= 0 \end{aligned}$$

dir. $n = k - \lambda$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda - (k - \lambda)(\lambda - (k - \lambda - 1)) &= 0 \\ (k - 2\lambda)(k - (2\lambda + 1)) &= 0 \end{aligned}$$

dir.

Bu denklemin kökleri $k = 2\lambda$ ya da $k = 2\lambda + 1$ 'dir. Eğer $k = 2\lambda + 1$ ise $\mathcal{D}$, bir $2-(4\lambda + 3, 2\lambda + 1, \lambda)$ dizayndır.

Bu parametrelere sahip herhangi bir dizayn herhangi bir λ değeri için Hadamard 2-dizayn olarak adlandırılır. Buradan $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, bir $2-(4\lambda + 3, 2\lambda + 2, \lambda + 1)$ dizayndır.

Eğer $k = 2\lambda$ ise $\mathcal{D}$, bir $2-(4\lambda - 1, 2\lambda, \lambda)$ dizayndır. $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ bir

$$2-(4\lambda - 1, 2\lambda - 1, \lambda - 1)$$

dizayn olur ki bu da Hadamard 2-dizayndır.

Çünkü $4\lambda - 1 = 4(\lambda - 1) + 3$ $2\lambda - 1 = 2(\lambda - 1) + 1$ 'dir. Bu nedenle eğer $v = 4n - 1$ ise ya $\mathcal{D}$ ya da $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ Hadamard 2-dizayndır. $\lambda = 1$ hali ve Hadamard 2-dizaynlar simetrik dizaynların özel sınıflarıdır. Birinci bölümde sözü edilen herhangi bir q asal sayısı için $\mathcal{P}(2, q)$ projektif düzlemi bir $2-(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ dizayn yani $\lambda = 1$ için simetrik dizayndır.

BÖLÜM III

BAZI SİMETRİK DİZAYN AİLELERİ

3.1. Projektif ve Afın Düzlemler

Daha önceden belirtildiği gibi n mertebeli projektif düzlem ya da simetrik bir $2-(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ dizayn $n = q^t$ (q asal sayı) şeklinde herhangi bir n tamsayısı için vardır.

Ayrıca Teorem 2.1.4. 'den eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ ya da $n \equiv 2 \pmod{4}$ ve n iki tamsayının karesinin toplamı şeklinde değilse n mertebeli projektif düzlem yoktur.

3.2. Hadamard Matrisler ve Hadamard 2-dizaynlar

Eğer bir H matrisin tüm elemanları ± 1 'ler ve $HH^T = nI$ ise $n \times n$ matrise, n mertebeli Hadamard matris denir. Bir Hadamard matrisi yerine kısaca $\mathcal{H}$ -matris yazılacaktır.

Teorem 3.2.1.

Eğer H , bir $\mathcal{H}$ -matris ise H^T 'de bir $\mathcal{H}$ -matris'tir.

İspat:

H^T matrisin tüm elemanlarının ± 1 'ler olduğu açıktır. $H^T(H^T)^T = H^TH = nI$ olduğu gösterilmelidir. $HH^T = nI$ olduğundan H tekil olmayan matristir ve tersi alınabilir.

$$\begin{aligned}
H^T H &= H^{-1}(H^T H)H \\
&= H^{-1}(nI)H \\
&= nH^{-1}H \\
&= nI
\end{aligned}$$

olur. Bu da H^T bir $\mathcal{H}$ -matris demektir./

Eğer A , bir $n \times n$ matris ve H , bir n mertebeli Hadamard matris ise

$$\begin{aligned}
(AH)(AH)^T &= AHH^T A^T \\
&= A(nI)A^T \\
&= nAA^T
\end{aligned}$$

dir.

Buradan AH matrisinin Hadamard matrisi olması için gerek ve yeter koşul AH matrisinin her elmanının ± 1 ve $AA^T = 1$ olmasıdır.

Eğer A ve B $n \times n$ permütasyon matrisleri ise AH , HB ve AHB , birer Hadamard matristir.

Bir genelleştirilmiş permütasyon matrisi bir satırında ve bir sütununda sadece bir tane sıfırdan farklı eleman olacak şekilde tüm elemanları ± 1 'ler veya sıfır olan matristir. Buradan tüm elemanları sıfır ya da $+1$ olan genelleştirilmiş permütasyon matrisi adi permütasyon matrisi adını alır.

Teorem 3.2.2

H , bir n mertebeli $\mathcal{H}$ -matris ve A, B $n \times n$ genelleştirilmiş permütasyon matrisleri ise AHB , bir $\mathcal{H}$ -matris'tir.

İspat:

$$\begin{aligned}
(AHB)(AHB)^T &= AHBB^T H^T A^T \\
&= nI
\end{aligned}$$

olması için

$$BB^T = AA^T = I$$

olması gerektiği açıktır. AH , H matrisin satırlarının bir permütasyonu ve bu satırların bazıları -1 ile çarpıldığından AH matrisinin her elemanı ± 1 'dir. Benzer biçimde $(AHB) = (AH)B$, AH matrisin sütunlarının bir permütasyonudur ve bu sütunların bazıları -1 ile çarpıldığından AHB matrisin her elemanı ± 1 'dir. Buradan AHB , bir $\mathcal{H}$ -matristir./

$$H_2 = AH_1B$$

olacak şekilde A, B genelleştirilmiş permütasyon matrisleri varken eğer H_1, H_2 n mertebeli $\mathcal{H}$ -matrisler ise H_1 ve H_2 $\mathcal{H}$ -denk'tir. Bu n mertebeli Hadamard matrisleri üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar.

Teorem 3.2.3

Herhangi bir $\mathcal{H}$ -matris 1.satır ve 1.sütun elemanları $+1$ olan bir $\mathcal{H}$ -matrise denktir. Buna $\mathcal{H}$ -denktir denir.

İspat:

Eğer $\mathcal{H}$ -matrisin i . satırı -1 ile çarpılırsa bu matris (i,i) . elemanı -1 olan fakat köşegen üzerindeki diğer elemanları $+1$ olan genelleştirilmiş köşegen permütasyon matrisi ile çarpımı olan matrise denk olur. Böylece teorem 3.1.2 'den H matrisin herhangi bir satırını -1 ile çarpmak yeni bir $\mathcal{H}$ -matris oluşturur. Bu H matrisine denktir.

Benzer olarak herhangi bir sütunun -1 ile çarpımı yeni bir $\mathcal{H}$ -denk matris oluşturur. Böylece eğer ilk elemanları -1 olan H matrisinin bu satır ve sütunlarını -1 ile çarparsak istenen biçimde $\mathcal{H}$ -denk matris elde ederiz./

Eğer bir Hadamard matrisin ilk satır ve ilk sütunu $+1$ 'lerden oluşuyorsa H matrisine normalize edilmiş denir. Eğer ilk satırdaki elemanlar normalize edilmişse satır normalize, ilk sütundaki elemanlar normalize edilmişse sütun normalize edilmiştir denir.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisi 2 mertebeli normalize edilmiş Hadamard matristir. Bununla birlikte 3 mertebeli Hadamard matris yoktur.

Gerçekte Hadamard matrisin mertebesi belli koşullarla kısıtlanmıştır.

Teorem 3.2.4

Eğer H , bir n mertebeli $\mathcal{H}$ -matris ise $n = 1$, $n = 2$ ya da $n \equiv 0 \pmod{4}$ 'dür.

İspat:

$n = 1$, $n = 2$ ve $n = 4$ için Hadamard matrisler mevcuttur. Teoremin ispatı $n > 4$ için yapılacaktır. Her Hadamard matris normalize edilebileceğinden H matrisi normalize edilmiş kabul edebiliriz. Öyleyse $n \geq 4$ için bir Hadamard matris gözönüne alınsın.

H matrisin ilk üç satırından oluşan $3 \times n$ matris ele alınsın ve bu matris H_1 ile gösterilsin. n 'nin sadece çift olduğu biliniyor. İspatlanması gereken dördün katı olduğudur.

H_1 matrisin n tane sütunu dört farklı tipte olabilir. Bunlar ise

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$

'lerdir. Başka bir deyişle H_1 için farklı sütun yoktur, bu sütunların belli sayıda tekrarı gelecektir.

1. sütun c_1 defa
2. sütun c_2 defa
3. sütun c_3 defa
4. sütun c_4 defa

$$(1) \ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$(2) \ c_1(1) + c_2(1) + c_3(-1) + c_4(-1) = 0$$

$$(3) \ c_1(1) + c_2(1) + c_3(1) + c_4(-1) = 0$$

Dördüncü denklemi 2. ve 3. satırların iç çarpımını alarak bulursak

$$(4) \ c_1 - c_2 - c_3 - c_4 = 0$$

bulunur. Amaç bu sistemi çözmektir. Bu sistem çözülürse

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = n/4$$

elde edilir. $n = 4k$ ise $n \equiv 0 \pmod{4}$ bulunur. /

Teorem 3.2.5.

$n \geq 2$ olmak üzere eğer H normalize edilmiş n mertebeli Hadamard matrisi ise

- (a) İlk satır dışındaki her satır elemanlarının yarısı $+1$ 'dir.
- (b) İlk sütun dışındaki her sütun elemanlarının yarısı $+1$ 'dir.
- (c) Eğer $H = (h_{ij})$ ise $l \neq k$ $l \neq 1$ $k \neq 1$ olmak üzere herhangi sabit l ve k için n tane $(i=1,2,\dots,n)$ (h_{li}, h_{ki}) ikilisinin $n/4$ tanesi $(+1, +1)$, $n/4$ tanesi $(+1, -1)$, $n/4$ tanesi $(-1, +1)$ ve $n/4$ tanesi $(-1, -1)$ 'dir.

İspat:

H , n mertebeli normalize edilmiş bir $\mathcal{H}$ -matris olsun. Bu durumda Hadamard matris tanımından $HH^T = nI$. H matrisinin 1. satır ve 1. sütun elemanları $+1$ 'lerdir. Hadamard matris tanımından 1.satır dışında farklı iki satır çarpımı sıfırdır. Bu normalize edilmiş Hadamard matrisin her satırında eşit sayıda $+1$ ve -1 olduğunu yani her satırının elemanlarının yarısının $+1$ olduğunu gösterir. Bu teoremin (a) şikkının ispatıdır.

Hadamard matrisin transpozesinde Hadamard matris olduğundan satırlar için elde edilen bu sonuç sütunlar içinde geçerlidir. Çünkü H^T sütunları H Hadamard matrisin satırlarıdır. Bu da teoremin (b) şikkının ispatıdır.

H matrisin ilk üç satırından oluşan $3 \times n$ matris ele alınsın matris H_1 ile gösterilsin.

H_1 matrisin n tane sütunu dört farklı tipte olabilir. Bunlar ise

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$

'lerdir. Başka bir deyişle H_1 için farklı sütun yoktur, bu sütunların belli sayıda tekrarı gelecektir. Teorem 3.2.4.'de oluşturulan sistemin aynısıdır ve çıkan sonuç sütunların kaç kez tekrar edildiğini verecektir. Bu sistem çözülürse

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = n/4$$

Buradan $n/4$ tane $(+1, +1)$, $n/4$ tane $(+1, -1)$, $n/4$ tane $(-1, +1)$ ve $n/4$ tane $(-1, -1)$ ikilisi bulunur.

Teorem 3.2.6.

Eğer A , bir n mertebeli Hadamard matris ve $\{B_i\}$ ($i = 1 \dots m$)'ler s mertebeli Hadamard matrisler ise

$$A \otimes \{B_i\} = (a_{ij} B_i)$$

ms mertebeli Hadamard matristir.

İspat:

Herhangi n için I_n $n \times n$ boyutlu birim matris, 0_n tüm elemanları sıfır olan matris olsun. A ve B_i 'lerin her birinin elemanları ± 1 olduğundan $A \otimes \{B_i\}$ 'nin tüm elemanları ± 1 'dir. Bundan dolayı

$$(A \otimes \{B_i\})(A \otimes \{B_i\})^T = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 & a_{12}B_1 & \dots & a_{1m}B_1 \\ a_{21}B_2 & a_{22}B_2 & \dots & a_{2m}B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_m & a_{m2}B_m & \dots & a_{mm}B_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}B_1^T & a_{12}B_1^T & \dots & a_{1m}B_1^T \\ a_{21}B_2^T & a_{22}B_2^T & \dots & a_{2m}B_2^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_m^T & a_{m2}B_m^T & \dots & a_{mm}B_m^T \end{pmatrix}$$

ve matrisin (i,j) . konumundaki elemanı

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} B_i a_{jk} B_j^T = \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk} \right) B_i B_j^T$$

dir. Eğer $i \neq j$ ise

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} a_{jk}$$

A 'nın i . ve j . satırlarının iç çarpımıdır ve sıfıra eşittir. Çünkü A bir Hadamard matristir. Bu durumda (i,j) . konumundaki eleman sıfır olur. Benzer biçimde (i,i) . konumundaki eleman

$$\left(\sum_{k=1}^m a_{ik}^2 \right) B_i B_i^T = m$$

dir. Fakat A , Hadamard matris olduğundan

$$\sum_{k=1}^m a_{ik}^2 = m$$

ve B_i matrisi de Hadamard matris olduğundan

$$B_i B_i^T = s I_s$$

'dir. Bu nedenle $A \otimes \{B_i\}$ matrisinin (i, i) . konumundaki eleman m_s 'dir. Buradan köşegen elemanları m_s olur ispatlanması gereken budur./

Teorem 3.2.7

$n > 4$ olmak üzere H normalize edilmiş $\mathcal{H}$ -matris olsun. Eğer A , H 'nin birinci satır ve birinci sütununun silinmesiyle oluşan ve -1 ler yerine sıfır konulmasıyla elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ matris ise A , bir

$$2 - (n-1, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{4})$$

parametrelili simetrik dizaynın çakışım matrisidir. Teoremin tersi de bir

$$2 - (4\lambda + 3, 2\lambda + 1, \lambda)$$

parametrelili dizaynın çakışım matrisi $4(\lambda + 1)$ mertebeli bir $\mathcal{H}$ -matristir.

İspat :

$A = (a_{ij})$ ve $\mathcal{D}$

P_i noktasının y_j bloğu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $a_{ij} = 1$ olacak şekilde

$\mathcal{D}$ 'nin noktaları $P_1 P_2 \dots P_{n-1}$

$\mathcal{D}$ 'nin blokları $x_1 x_2 \dots x_{n-1}$

şeklinde etiketlenmiş çakışım yapısı olsun. Teorem 3.2.5. 'ün ispatı yapılırken elde edilen sonuçtan Hadamard matrisin sütunlarının yarısı +1 elemanlı diğer yarısı -1 elemanlıdır. Bu sonucu kullanırsak H 'nin her sütununun elemanlarından $n/2$ tanesi +1, $n/2$ tanesi -1 'dir. Buradan H normalize edilmiş olduğundan A matrisin her sütununda

$$\frac{n}{2} - 1$$

tane sıfırdan farklı eleman vardır. Bu yüzden $\mathcal{D}$ 'nin her bloğu

$$\frac{n-2}{2}$$

nokta içerir.

Eğer P_i ve P_j farklı noktalar ise bu noktaların ikisini de içeren blokların sayısı A matrisinin i . ve j . satırlarının iç çarpımıdır. Yine Teorem 3.2.5 'den i . ve j . satırların $n/4$

$$\begin{array}{c} +1 \\ +1 \end{array}$$

ortak sütununa sahiptir.

H matrisinin ilk sütunu silindiğinden A matrisinin i . ve j . satırlarının iç çarpımı

$$\frac{n}{4} - 1$$

'dir. Bu P_i ve P_j 'nin seçimine bağlı olmadığından $\mathcal{D}$ bir

$$2 - (n - 1, \frac{n-2}{2}, \frac{n-4}{4})$$

dizayndır. Şimdi $\mathcal{D}$ 'nin bir $2 - (4\lambda + 3, 2\lambda + 1, \lambda)$ parametrelili dizayn olduğunu farz edelim. A , $\mathcal{D}$ 'nin bir çakışım matrisi olsun. $\mathcal{D}$ simetrik dizayn olduğundan A matrisinin her satır ve her sütununda $2\lambda + 2$ eleman sıfır $2\lambda + 1$ eleman $+1$ 'dir.

$v - k = 4\lambda + 3 - 2\lambda - 1 = 2\lambda + 2$ 0 'ların sayısı

$k = 2\lambda + 1$ 1'lerin sayısıdır.

Herhangi iki nokta λ ortak blok üzerinde olduğundan A matrisinin herhangi iki satırı λ tane elemanı $+1$ olan bloğa sahiptir. Bu nedenle satırların sadece birinde $+1$ olan $2(\lambda + 1)$ sütun vardır. Her iki satırda da sıfır durumunda olan yani hem P_i hem P_j noktalarının bulunmadığı blokların sayısı

$$4\lambda + 3 - 2(\lambda + 1) - \lambda = \lambda + 1$$

' dir. Yani $\lambda + 1$ sütunundaki elemanlar sıfırdır. H , A matrisinin ilk satır ve ilk sütununa $+1$ 'ler eklenmiş ve A matrisinin -1 elemanları yerine sıfır konmuş $n \times n$ matris olsun. A matrisinin her satırında $2\lambda + 1$ tane $+1$ elemanı bulunduğundan H matrisinin her satırında $2\lambda + 2$ tane $+1$ ve $2\lambda + 1$ tane -1 elemanı bulunur. Bu yüzden H matrisinin ilk satırı ile herhangi bir satırının iç çarpımı sıfırdır.

H matrisinin herhangi diğer iki satırının çarpımı için $\lambda + 1$ tane blok $+1$ elemanı, $\lambda + 1$ tane blok -1 elemanı içerir. $2\lambda + 1$ blok ters işaretli eleman içerir.

Bu sebeble H matrisinin herhangi iki satırının iç çarpımı sıfır olur ve bir Hadamard matris olur./

3.3. Cameron Teoremi ve Hadamard 3-Dizaynlar

Bölüm I, Teorem 1.1.4. 'den $t-(v, k, \lambda)$ parametrelili dizaynının bir genişlemesi olması için gerekli koşulun

$$(k+1) \mid b.(v+1)$$

olduğu belirtilmişti. Bu bölme özeliğini aşağıdaki teoremde kullanalım.

Teoremi 3.3.1.

Eğer $n \neq 2, n \neq 4, n \neq 10$ ise bir n mertebeli projektif düzlem genişlemeye sahip değildir.

İspat:

$\mathcal{P}$ bir projektif düzlem olsun. $\mathcal{P}^*$ 'ı $\mathcal{P}$ projektif düzleminin bir genişlemesi olarak kabul edelim. $\mathcal{P}$ Projektif düzlem olduğundan n^2+n+1 bloklu $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ dizayndır. $\mathcal{P}^*$ genişlemesinin varlığı kabul edildiğinden Teorem 1.3.4 'ü kullanırsak

$$(k+1) \mid b.(v+1)$$

$$(n+1+1) \mid (n^2+n+1)(n^2+n+1+1)$$

$$(n+2) \mid (n^2+n+1)(n^2+n+2)$$

'dir. (n^2+n+1) ve (n^2+n+2) ifadeleri çarpanlarına ayrılırsa

$$n^2+n+1 = (n-1)(n+2) + 3$$

$$n^2+n+1 = (n-1)(n+2) + 4$$

elde edilir. Buradan

$$(n^2+n+1)(n^2+n+2) \equiv (n-1)^2(n+2)^2 + 7(n-1)(n+2) + 12 \pmod{n+2}$$

$$(n^2+n+1)(n^2+n+2) \equiv 12 \pmod{n+2}$$

Buradan $n+2 \mid 12$ olur. $n > 1$ olduğundan

$$n + 2 \mid 4 \text{ ise } n = 2$$

$$n + 2 \mid 6 \text{ ise } n = 4$$

$$n + 2 \mid 12 \text{ ise } n = 10$$

bulunur .İspatlanması gereken budur./

Uygulamalar bölümünde de belirtildiği gibi $\mathcal{K}$ bir 3-(8, 4, 1) dizayn iken $\mathcal{F}$ bir 2-(7,3,1) dizayndır. Yani iki mertebeli projektif düzlemdir.Burada $\mathcal{K}_8 \cong \mathcal{F}$ ve bu nedenle 2 mertebeli sonlu projektif düzlem bir genişlemeye sahiptir.

Teoremi 3.3.2. (Cameron Teoremi)

Eğer $\mathcal{S}$,bir (v, k, λ) parametrelili trivial olmayan simetrik dizayn, $\mathcal{S}$ dizaynının bir genişlemesi $\mathcal{S}^*$ ise aşağıdakilerden birisi geçerlidir:

(a) $v = 4\lambda + 3$, $k = 2\lambda + 1$ yani $\mathcal{S}$,bir Hadamard 2-dizayndır.

(b) $v = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$, $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$

(c) $v = 111$, $k = 11$, $\lambda = 1$ yani $\mathcal{S}$ 10 mertebeli projektif düzlemdir.

(d) $v = 495$, $k = 39$, $\lambda = 3$

İspat:

$\mathcal{S}^*$ 'ın bloklarının sayısı

$$b^* = \frac{v(v+1)}{k+1}$$

Teorem 1.1.2. 'den

$$v = \frac{(k^2 - k + \lambda)}{\lambda}$$

yazılırsa

$$b^* = \frac{(k^2 - k + \lambda)(k^2 - k + 2\lambda)}{\lambda^2(k+1)}$$

'dir.Bu yüzden

$$k+1 \mid (k^2 - k + \lambda)(k^2 - k + 2\lambda)$$

olur. $(k^2 - k + \lambda)$ ve $(k^2 - k + 2\lambda)$ ifadeleri çarpanlarına ayrılırsa

$$k^2 - k + \lambda = (k+1)(k-2) + \lambda + 2$$

$$k^2 - k + 2\lambda = (k+1)(k-2) + 2\lambda + 2$$

elde edilir.Buradan

$$(k^2 - k + \lambda)(k^2 - k + 2\lambda) \equiv 2(\lambda + 1)(\lambda + 2) \pmod{k+1}$$

olur. Bu nedenle

$$k + 1 \mid 2(\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad (1)$$

Şimdi $y, \mathcal{S}^*$ dizaynının sabit bir bloğu olsun. $\mathcal{S}^*(y)$ yapısı, y bloğu üzerinde olmayan tüm noktalar ve $\mathcal{S}^*$ dizaynının y bloğu ile çakışmayan tüm bloklarından oluşur.

Eğer $\mathcal{S}^*$ dizaynının iki bloğu X noktasında çakışıyorsa bu iki blok $\mathcal{S}_X^*$ simetrik dizaynının iki bloğudur. Bundan dolayı λ kere daha çakışırlar. Yani $\mathcal{S}^*$ dizaynının iki bloğu ya sıfır ya da $\lambda + 1$ noktada çakışır. Bu yüzden $\mathcal{S}^*(y)$ yapının blokları y ile çakışmaz ve her blok ikilisi $\lambda + 1$ noktada çakışır. (Yani $y, \mathcal{S}^*(y)$ yapının bloğu değildir).

A, B noktaları $\mathcal{S}^*(y)$ yapının iki farklı noktası olsun. X bir nokta w bir blok olmak üzere (X, w) bayrakların sayısı hesaplınsın. Burada X noktası y bloğu üzerinde ve A, B noktaları w bloğu üzerindedir. m , y bloğundan geçen A, B noktaları üzerinde olan $\mathcal{S}^*$ dizaynının bloklarının sayısı olsun. Bu takdirde bayrakların sayısı $m(\lambda + 1)$ 'dir. X noktasının her $k+1$ seçimi için X, A, B noktaları üzerinde λ tane w bloğu vardır. Bu nedenle bayrakların sayısı $\lambda(k + 1)$ 'dir. Buradan

$$m(\lambda + 1) = \lambda(k + 1)$$

$$m = \frac{\lambda(k + 1)}{\lambda + 1}$$

olur. $\mathcal{S}^*$ dizaynının iki noktası üzerinde $\mathcal{S}^*$ dizaynının k tane bloğu vardır. Bu yüzden A, B noktaları üzerinde $\mathcal{S}^*(y)$ yapının

$$k - m = \frac{k - \lambda}{\lambda + 1}$$

bloğu vardır. Bu yüzden de $\mathcal{S}^*(y)$

$$(v - k, k + 1, \frac{k - \lambda}{\lambda + 1})$$

parametrelili 2-yapıdır. Ayrıca

$$\lambda + 1 \mid \lambda(k + 1)$$

olup, s bir pozitif tamsayı olduğundan $k + 1 = s(\lambda + 1)$ 'dir. Eğer $v - k = k + 1$ ise $v = 2k + 1$, $k = 2\lambda + 1$ ve $\mathcal{S}$ bir Hamarad 2-dizayndır. Bu (a) şıkkının ispatıdır. Bu sebeple $v > 2k + 1$ farzedilebilir. Bu takdirde $\mathcal{S}^*(y)$ öz 2-yapıdır ve Teorem 1.4.3 'den $\mathcal{S}^*(y)$ öz 2-yapının bloklarının sayısı en az $v - k$ 'dır. Bu sebeple

$$\frac{k - \lambda}{\lambda + 1} \frac{(v - k)(v - k - 1)}{k(k + 1)} \geq v - k$$

'dir. İspatın başında v için bu ifadeyi kullanırsak

$$(k - \lambda)(k - \lambda - 1) \geq \lambda(\lambda + 1)(k + 1)$$

ya da

$$k^2 - k(2\lambda + 1) + \lambda(\lambda + 1) \geq k\lambda(\lambda + 1) + \lambda(\lambda + 1)$$

olmasını gerektirir. $k \neq 0$ olduğundan

$$k \geq \lambda^2 + 3\lambda + 1 \quad (2)$$

Bu yüzden

$$k + 1 \geq (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad (3)$$

olur. (3) $s \geq \lambda + 2$ olmasını ve (1) $s \leq 2(\lambda + 2)$ olmasını gerektirir. Bu yüzden

$$\lambda + 2 \leq s \leq 2(\lambda + 2) \quad (4)$$

olur. Fakat (1)

$$s(\lambda + 1) \mid 2(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

olduğunu belirtir. Bu sebeple

$$s \mid 2(\lambda + 2) \quad (5)$$

olur. Bundan dolayı (5) ve (4) den

$$s = \lambda + 2$$

ya da

$$s = 2(\lambda + 2) \quad (6)$$

olur. Eğer $s = \lambda + 2$ ise $k = \lambda^2 + 3\lambda + 1$ 'dir. Bu teoremin (b) şıkkının ispatıdır.

Eğer $s = 2(\lambda + 2)$ ise $k = 2\lambda^2 + 6\lambda + 3$ olur. Fakat $\lambda(v - 1) = k(k - 1)$ olması $\lambda \mid k(k - 1)$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\lambda \mid (2\lambda^2 + 6\lambda + 3)(2\lambda^2 + 6\lambda + 2)$$

olur. Buradan da $\lambda \mid 6$ elde edilir. Eğer $\lambda = 1$ ise $k = 11$ $v = 111$ 'dir. Bu teoreminin (c) şıkkıdır.

Eğer $\lambda = 2$ ise $k = 23$ $v = 254$ v çift fakat $n = 21$ iki tamsayının karesinin toplamı değildir. Bu yüzden $\mathcal{S}$ dizayn yoktur.

Eğer $\lambda = 3$ ise $k = 39$ $v = 495$ olur. Bu teoreminin (d) şıkkıdır.

Eğer $\lambda = 6$ ise $k = 111$ $v = 2036$ olur. v çift fakat $n = 105$ iki tamsayının karesinin toplamı değildir. Bu yüzden $\mathcal{S}$ dizayn yoktur./

Bir Hadamard 2-dizaynın izomorfizme bağlı 3-dizayna bir genişlemesi vardır. Bu 3-dizayn $3 - (4\lambda + 2, 2\lambda + 2, \lambda)$ parametrelidir ve Hadamard 3-dizayn olarak adlandırılır.

3.4. Örnekler

Örnek 3.4.1.

$\mathcal{K}$ 'nin noktaları $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\mathcal{K}$ 'nin blokları

$$\begin{aligned} k_1 &= \{1, 3, 7, 8\} & k_2 &= \{1, 2, 4, 8\} & k_3 &= \{2, 3, 5, 8\} \\ k_4 &= \{3, 4, 6, 8\} & k_5 &= \{4, 5, 7, 8\} & k_6 &= \{1, 5, 6, 8\} \\ k_7 &= \{2, 6, 7, 8\} & k_8 &= \{1, 2, 3, 6\} & k_9 &= \{1, 2, 5, 7\} \\ k_{10} &= \{1, 3, 4, 5\} & k_{11} &= \{1, 4, 6, 7\} & k_{12} &= \{2, 3, 4, 7\} \\ k_{13} &= \{2, 4, 5, 6\} & k_{14} &= \{3, 5, 6, 7\} \end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ 'nin üç noktalı her kümesi verilen bloklarla $\lambda = 1$ defa kesişirler. Her blokta $k = 4$ eleman bulunduğundan yapı birbiçimlidir. Ayrıca her nokta $r = 7$ blok üzerinde olduğundan yapı düzgündür. Bu durumda $\mathcal{K}$ bir $3-(8, 4, 1)$ dizayndır./

Örnek 3.4.2.

$\mathcal{F}$ 'nin noktaları $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\mathcal{F}$ 'nin blokları

$$f_1 = \{1, 2, 4\} \quad f_2 = \{1, 3, 7\} \quad f_3 = \{2, 3, 5\}$$

$$f_4 = \{1, 5, 6\} \quad f_5 = \{3, 4, 6\} \quad f_6 = \{4, 5, 7\}$$

$$f_7 = \{2, 6, 7\}$$

$\mathcal{F}$ 'nin iki noktalı her kümesi verilen bloklarla $\lambda = 1$ defa kesişirler. Her blokta $k = 3$ eleman bulunduğundan yapı birbiçimlidir. Ayrıca her nokta $r = 3$ blok üzerinde olduğundan yapı düzgündür. Bu durumda $\mathcal{F}$ bir $2-(7,3,1)$ dizayndır. /



SONUÇLAR

İlk olarak istatistikte ortaya çıkan fakat matematikçilerin ilgisini çektikten sonra büyük gelişmeler gösteren dizayn teorisinin temelleri üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada

- (1) Yapılar incelenmiş ,tanım ve teoremleri verilmiş ,elde edilen sonuçlar dizaynların incelenmesinde de kullanılmıştır,
- (2) Simetrik dizaynlar üzerinde durulmuş , bir dizaynın simetrik olması için hangi koşulları sağlaması gerektiği ,simetrik dizaynın varlığının hangi koşullara bağlı olduğu incelenmiştir,
- (3) Simetrik dizaynların özel sınıfları olan Projektif düzlemler ve Hadamard 2-dizaynlar tanımlanmış ,ilgili teoremler ispatlanarak aralarındaki ilişkiler gösterilmiştir.
- (4) 2-dizayn ve 3-dizaynlar incelenmiş, ilgili teoremler ispatlanmış ve tez sonunda 2-dizayn ve 3-dizayn 'a ait iki örnek verilmiştir.

KAYNAKLAR

- (1) Hughes,D.R. and Piper,F.C. Projective Planes. Berlin,Heidelberg,New York, Springer,1973.
- (2) Hughes,D.R. and Piper,F.C. Design Theory. Berlin, Heidelberg, New York, Springer,1973.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özlem Karcı
Doğum Tarihi : 19 Nisan 1970
Doğum Yeri : İstanbul
İlk Öğrenimi : 1981 yılında Özdemiroğlu İlkokulundan mezun oldu.
Orta Öğrenimi : 1987 yılında Kadıköy Kız Lisesinden mezun oldu.
Yüksek Öğrenimi : 1988 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü başladığı eğitimini 1992 yılında tamamladı.
Görevi : Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.