

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Çok Amaçlı Hed, Prog, ve bir Hast. Uyg

Yüksek Lisans Tezi

Husam H. Kamarji

1992

Ref
MTM
135
1992

Matt.

T.C
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇOK AMAÇLI HEDEF PROGRAMLAMA
VE
BİR HASTANE UYGULAMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan:Husam HAMAMH KAMARJİ

İSTANBUL-1992

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot	209
Alındığı Yer	141
	F.B. Enstitüsü
Tarih	25.9.1996
Fatura	
Fiyatı	40 Bin
Ayniyat No	1/7
Kayıt No	52548
UDC	
Ek	

Y. T. O.

KÜTÜPHANE DOK. DAL. BAŞKANLIĞI

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ

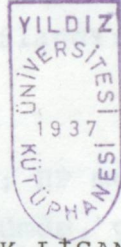
D.B. No. 51663

T.C

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

139

ÇOK AMAÇLI HEDEF PROGRAMLAMA
VE
BİR HASTANE UYGULAMASI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tezi Hazırlayan: Husam HAMAMH KAMARJİ

Y. T. Ö.

KÜTÜPHANE DOK. DAL. BAŞKANLIĞI

İSTANBUL-1992

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Hedef Programlama modelleri, Çözüm yöntemleri ve uygulama alanları sunulmuştur.

Hedef Programlama (HP) tekniği, matematik programlama teknikleri içinde uygulama alanı en geniş olan bir tekniktir. HP gerçek hayat problemlerini (politik, ekonomik, sosyal, ticari, vs.) çözmeye yardımcı olan etkili bir modeldir. Yatırım kararlarında, eğitim alanlarında, üretim planlama vs. başarıları sonuçlar vermektedir.

Birinci bölümde;

a) HP'nin tanımı ve varsayımları,

b) Matematiksel yapısı ve modelleri,

c) HP'nin sınıflandırılması,

yer almaktadır.

İkinci bölümde; HP modelinin çözüm teknikleri incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, grafik yöntemi, iki faz simpleks yöntemi ve çok faz simpleks yöntemi verilmiştir. Yine bu bölümde HP'nin çözümüyle ilgili bazı özel durumlar da incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; Etkileşimli hedef programlama (EHP) modeli ele alınmış ve çözüm yöntemi gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde; HP'nin bazı uygulama alanları ele alınmıştır.

Eğitim alanında (Çok kriterli okulun çalışma modeli) ve ekonomik alandaki (Kamu Sektöründe proje seçimi için bir lineer HP modeli) uygulamaların modelleri ve bilgisayarla olan çözümleri gösterilmiştir.

Beşinci bölümde; Özel bir hastanenin sermaye bütçeleme problemi HP ile çözülmeye çalışılmıştır.

Problemin çözümünde Ignizio'nun HP için geliştirdiği FORTRAN Programından faydalanılmıştır.

PREFACE

The models of Goal programming (GP), solution methods and areas applied are presented in this book.

The technique of goal programming is the wider area of application to mathematical programming.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda, çalışmalarım süresince yardımcı olan ve yol gösteren danışman hocam Yard.Doç. Dr. AYŞE KURUÜZÜM'e teşekkür ederim.

Türkiye'de yüksek lisans yapabilmem için destek veren ve gelmemde etkin rol oynayan hocalarım, Prof.Dr.MOUFAK DEABUL'a, Doç.Dr.REJA ALSABUNI'ye ve Dr.NAZER HELAAL'e teşekkür ederim.

Ayrıca arkadaşlarım Araş.Gör.Aydın Demiriz'e, Araş. Gör.Ünsal Özdoğru'ya, elinden gelen yardımlarını esirgemeyen diğer tüm arkadaşlarıma, manevi desteğinden dolayı Anne ve Babama teşekkür ederim.

Husam H. KAMARJİ

PREFACE

The models of Goal programming (GP), solution methods and areas applied are presented in this book.

The technique of goal programming is the wider area of application in mathematical programming.

Goal programming helps us to solve the problems of life in such areas as politics, economics and commerce. As it gives us an effective result in investment plans and education policies and production plans etc.

First Part :

- a) The defining and hypothesis of goal programming.
- b) Mathematical form and models.
- c) Classification of goal programming.

Second Part :

The solution techniques of goal programming are shown. Although in this part graphical methods and multiphase simplex methods are given. Some special situations are also examined.

Third Part :

The model of Interactive Goal Programming (IGP) and solution method are illustrated.

Fourth Part :

Education field (Multi-Criteria Scholl Busing Models) and economics sector (A Linear Goal-Programming Model For public-Sector Project Selection) application models are illustrated.

Fifth Part :

Financial budget of private hospital is prepared by Goal programming.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

1. BÖLÜM

1. HEDEF PROGRAMLAMA (HP)	1
1.1. Hedef Programlama Tanımı ve Varsayımları.	1
1.2. Hedef Programlama'nın Matematik Yapısı	3
1.3. Lineer Hedef Programlama'nın Matematik Yapısı	6
1.4. Lineer Hedef Programlama Modelinin Oluşturulması için Verilen Örnekler	9
1.5. Hedef Programlamanın Sınıflandırılması	15

2. BÖLÜM

2. HEDEF PROGRAMLAMA ÇÖZÜM TEKNİKLERİ.	17
2.1. Grafik Yöntemi	17
Primalın Dejenerelik Durumu	26
2.2. Hedef Programlama Problemi İçin Simpleks İşlemleri	27
2.2.1. İki Faz Simpleks Yöntemi	28
2.2.2. Çok Faz Simpleks Yöntemi	38
Özel Durumlar	52
1- Uygun çözümler yok	52
2- Primalın dejenerelik durumu	52
3- Dualın dejenerelik durumu	52
4- Alternatif optimal çözümler	53
5- Sınırsız optimal çözümler	53

3. BÖLÜM

3. ETKİLEŞİMLİ HEDEF PROGRAMLAMA (EHP)	60
Çözüm Algoritması	63

4. BÖLÜM

4. HEDEF PROGRAMLAMA'NIN UYGULAMA ALANLARI	82
4.1. Çok Kriterli Okulun Çalışma Modeli	82
4.1.1. Modelin Hedefleri ve Hedeflerin Öncelikleri	83
4.1.2. Karar Değişkenleri	86
4.1.3. Modelin Kısıtları	86
4.1.4. Çözümlerin Yorumları	95
4.2. Kamu Sektöründe Proje Seçimi İçin Bir Lineer Hedef Programlama Modeli	102
4.2.1. Modelin Algoritması	103
4.2.2. Spesifik Hedef Programlama Modeli	105
1. Öncelik Yapısı	105
2. Hedef Programlama Kısıtları	106
3. Kaynak Kısıtları	111
4. Negatif Olmayan Kısıtlar	112
4.2.3. Çözüm İşlemi	113
4.2.4. Sonuçların Analizi	113

5. BÖLÜM

5. LİNEER HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI KULLANILARAK BİR ÖZEL HASTANENİN SERMAYE BÜTÇELEME SİNİN YAPILMASI	116
5.1. Hastane Çalışanlarıyla İlgili Bilgiler	116
5.2. Modelin Oluşturulması	120
Değişkenler	120
Kısıtlar ve Hedefler	121
5.3. Modelin Sonaçları	125
5.4. Sonuçların Yorumlanması	126

YARARLANILAN KAYNAKLAR	132
----------------------------------	-----

ÖZGEÇMİŞ

HEDEF PROGRAMLAMA

I. BÖLÜM

1. HEDEF PROGRAMLAMA

Hedef programlama ilk kez 1952'de bir fikir olarak ortaya atılmasına rağmen algoritmik olarak 1961'de Charnes ve Cooper tarafından geliştirilmiştir (1, sh:1109). Algoritma daha sonra 1965'de Ijiri, 1972'de Lee ve 1976'da Ignizio tarafından geliştirilmiştir (2, sh:56). Bu gelişimin aşamaları sırasında, önce modelin genel yapısı ortaya konmuş daha sonra hedef fonksiyonunda öncelik kavramları üzerinde durulmuş, ardından önceliklere ait ağırlıklar ortaya konmuştur. Daha sonraki aşamalarda ise modelin işleyiş biçimiyle ilgili çözüm teknikleri ve modelin yapısı ile ilgili diğer gelişmeler (doğrusal olmayan veya stokastik yapılar gibi) birbirini izlemiştir. Oldukça basit bir mantığı ve diğer çok amaçlı algoritmaların aksine temel matematik bilgisiyle çözülebilir olması dolayısıyla hem akademik çalışmalarda hem de endüstriyel çalışmalarda çok rağbet gören bir teknik olarak bilinmektedir.

1.1. Hedef Programlama (HP) Tanımı ve Varsayımları

Birbirleriyle çelişen birden fazla amacı aynı anda tatmin eden, en iyi çözümü kümesini bulma durumunda olan bir karar verici, başlıca, iki yaklaşımla bu sorununa cevap arayabilir. Birinci olarak, amaçlar arasından uygun dönüşümle bir fayda fonksiyonu tanımlayarak bunu maksimize etmek istenebilir. İkinci olarak da amaçlar için belirlediği hedeflerden sapmaları minimize etmek isteyebilir. Her iki yaklaşım

ile bulacağı çözümler, genellikle birbirine çok yakın veya aynıdır. Zira her ikisinin nihai amacı, sorunlar sisteminin bütününe iyileştirilmesine ilişkin en iyi çözüm kompozisyonunun elde edilmesidir.

Hedef programlama genel yapısı itibariyle ikinci tip yaklaşımla ilgilidir. Saptanan hedeflerden sapmaları minimize etmeye çalışırken de her bir amaç fonksiyonu için, karar verici tarafından, tanımlanmış öncelik ve ağırlık katsayılarını dikkate alır. Öncelikle daha yüksek öncelikli hedefler veya eşit öncelikte daha çok ağırlıklı hedefleri, teknolojik ikame oranlarının ve amaç fonksiyonu katsayılarının elverdiği ölçüde, tam başarmaya çalışır. Daha yüksek öncelikli bir hedefteki sapma miktarını azaltabilmek için daha düşük öncelikli bir hedefteki sapma miktarını artırmayı göze alabilir. Dolayısıyla hedef programlama tekniği olarak, tüm sapmalar toplamını minimize eden bir teknik olmasından ziyade, mümkün olduğu kadar daha yüksek öncelikli sapmaları minimize eden bir tekniktir. Nitekim aşağıdaki bölümlerde hedef programlamanın bu sırasallık özelliği tekrar gündüme getirilerek daha açık bir şekilde ifade edilecektir.

Hedef programlama varsayımlarına geçmeden önce konu ile ilgili bazı kavramlarında tanımlanması gerekir. İngilizce'de goal programming olarak bilinen bu teknik Türkçe'de hedef programlama, amaç programlama veya gaye programlama olarak ifade edilegelmektedir. Ignizio amacı (objektive); "karar vericinin arzu ettiği genel bir ifadenin yansımasıdır" şeklinde tanımlarken hedefi (goal); "istenen bir seviye ile belirlenmiş bir amaç" olarak tanımlamaktadır (3, sh:4). Dervitsiotis ise amacı; "hareket etmek istenilen yön" olarak ifade ederken hedefi (goal veya target); "verilen bir zamanda ilerlemek istenilen yönün neresinde bulunulduğunu gösteren terim" olarak tanımlamaktadır (4, sh:9). Dolayısıyla, bu tekniğin işleyiş yaklaşımı dikkate alındığında, hedef programlama olarak ifade edilmesi daha doğru olacaktır.

Lee, hedef programlamanın varsayımlarını dört başlık altında incelemektedir (5, sh:32-33). Bunlar: Oransallık, toplanabilirlik, bölünebilirlik ve belirlilik varsayımlarıdır. Buradaki bir eksikliği tamamlamak üzere pozitiflik koşulu da eklenmelidir. Görüldüğü gibi bu varsayımlar temelde tek amaçlı doğrusal programlamanın varsayımlarıyla büyük bir benzeşim içerisindedir (6, sh:14). Ignizio ise modelle ilgili anahtar bir varsayım olarak, karar vericinin her bir amaç ya da amaçlar kümesine ait geçerli öncelikleri belirlemesi gereğinden bahsetmektedir (7, sh:5). Daha sonra ise yukarıdaki varsayımlara yaklaşmaktadır.

1.2. HP'nın Matematik Yapısı

$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ karar değişkenlerin vektörü olmak üzere, $f_\ell(\underline{x})$ ($\ell = 1, 2, \dots, s$) amaç fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bunlar, genel olarak bir üretim sisteminde belirli kısıtlar altında maksimize ya da minimize edilmek istenen;

$$f_\ell(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{\ell j} x_j = c_{\ell 1} x_1 + c_{\ell 2} x_2 + \dots + c_{\ell n} x_n ; \ell = 1, 2, \dots, s$$

şeklindeki fonksiyonlardır. G_ℓ ; f_ℓ amaç fonksiyona karşı gelen hedef değeri (istek değeri) ve d_ℓ^- , d_ℓ^+ sapma değişkenleri [d_ℓ^- ; f_ℓ ile G_ℓ arasındaki alttan olan farkı ya da ℓ 'inci hedefin alt başarısı, aynı şekilde d_ℓ^+ ; f_ℓ ile G_ℓ arasındaki üstten olan farkı ya da ℓ 'inci hedefin üst başarısı (2, sh:56)] farz edelim. Bu görüşler ışığında genel bir hedef programlama (çok amaçlı HP) modelinin basit matematik formülasyonu aşağıdaki gibi yapılabilir:

(amaç fonksiyonu)

$$\min \left[\sum_{\ell=1}^s (d_{\ell}^{-} + d_{\ell}^{+})^P \right]^{1/P}, \quad P \geq 1$$

(Kısıt alanı veya Mutlak kısıtları)

$$g_i(\underline{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

($f_{\ell}(\underline{x})$ amaç fonksiyonu için ℓ .hedefin kısıtı)

$$f_{\ell}(\underline{x}) + d_{\ell}^{-} - d_{\ell}^{+} = G_{\ell}, \quad \ell = 1, 2, \dots, s$$

(Sabit koşul)

$$d_{\ell}^{-}, d_{\ell}^{+} \geq 0, \quad \forall \ell$$

(Sabit koşul)

$$d_{\ell}^{-} \cdot d_{\ell}^{+} = 0, \quad \forall \ell$$

(Sabit koşul)

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(1.1)

Burada $d_{\ell}^{-} \cdot d_{\ell}^{+} = 0$ sabitlik koşulu; d_{ℓ}^{-} ve d_{ℓ}^{+} sapma değişkenlerinden biri varsa diğeri olmayacaktır. (1.1)'de olan $f_{\ell}(\underline{x})$ ve $g_i(\underline{x})$ fonksiyonları şu şekilde yazılır;

$$f_{\ell}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n c_{\ell j} x_j = c_{\ell 1} x_1 + c_{\ell 2} x_2 + \dots + c_{\ell n} x_n; \quad \ell = 1, \dots, s$$

$$g_i(\underline{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{im} x_m + \dots + a_{in} x_n;$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_m(\underline{x}) = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m + \dots + a_{mn} x_n$$

P'nin değeri $U(\underline{f}) = U(f_1, \dots, f_s)$ fayda fonksiyonuna bağlıdır. HP'nin matematik formülasyonu (1.1) gibi ise; P'inci dereceden bir hedef programlama denir.

Hedef programlama genel matematik formülasyonu yazmadan önce öncelik seviyesi kavramını açıklayalım. Öncelik seviyesi kavramının anlamı; hedef fonksiyonunda hangi sırada minimize edileceğini belirlemektedir. Şayet $\forall_j$ için $P_j \gg P_{j+1}$ ise; P_j seviyesi P_{j+1} seviyesinden çok önceliklidir. Yani $w \cdot P_{j+1} > P_j$ yazılabilen bir w sayısı, ne kadar büyük olursa olsun bulunamaz. Önceliklerin önem seviyesi, soldan sağa doğru daha azalmak üzere;

$$P_k \gg P_{k+1} \gg P_{k+2} \gg \dots \quad (1.2)$$

1.1. Linear Hedef Programlama'nın Matematik Yapısı

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi (1.1)'de $P = 1$ alarak ve öncelik seviyesi kavramını kullanarak, hedef programlama modelinin genel matematik formülasyonu şudur:

(amaç fonksiyonu)

$$\min [P_1 h_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+), P_2 h_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+), \dots, P_k h_k(\underline{d}^-, \underline{d}^+)]$$

(kısıt alanı)

$$g_i(\underline{x}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(Hedeflerin kısıtları)

$$f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, s$$

(Sabit koşullar)

$$d_\ell^-, d_\ell^+ \geq 0, \quad \forall \ell$$

$$d_\ell^- \cdot d_\ell^+ = 0, \quad \forall \ell$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(1.3)

Burada $h_i(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$, ($i = 1, 2, \dots, k$); sapma değişkenlerin Lineer fonksiyonlarıdır. $h_i(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$, ($i = 1, \dots, k$) fonksiyonlara başarı fonksiyonları denir. (1.3)'ün çözüm algoritması şudur; İlk baştaki $h_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimizasyonu alınır, $\min h_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+) = h_1^*$ diyelim. Bundan sonra h_1, h_1^* 'dan daha büyük olduğunu sayarak $h_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimize edilir ve $\min h_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+) = h_2^*$ yazılır. Böylece sonda $h_k(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimize edilir (2, sh:57). En yüksek öncelikli olan başarı fonksiyonu tam şeklinde sağlar. Daha düşük öncelikli bir başarı fonksiyonu tam şeklinde sağlayamaz. Şayet (1.3)'te $f_\ell(\underline{x})$ veya $g_i(\underline{x})$ fonksiyonlarından biri Lineer değilse; (1.3) Lineer olmayan bir hedef programlama problemidir.

1.3. Lineer Hedef Programlama'nın Matematik Yapısı

Bilindiği gibi çok amaçlı Lineer (Doğrusal) programlama modelinin genel matematik formülasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\left. \begin{array}{ll} \max [f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_s(\underline{x})] \\ g_i(\underline{x}) \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Burada

$$\begin{aligned} f_\ell(\underline{x}) &= \sum_{j=1}^n c_{\ell j} x_j, & \ell &= 1, 2, \dots, s \\ g_i(\underline{x}) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, & i &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Yukarıdaki problemi karşı gelen (çok amaçlı) Lineer hedef programlama (LHP) Modelinin matematik formülasyonu şöyledir;

(Amaç fonksiyonu)

$$\min [P_1 a_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+), P_2 a_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+), \dots, P_k a_k(\underline{d}^-, \underline{d}^+)]$$

$$g_i(\underline{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell, \quad \ell = 1, 2, \dots, s$$

$$d_j^-, d_j^+ \geq 0, \quad d_j^- \cdot d_j^+ = 0, \quad \forall j$$

(1.5)

(1.6)

Lineer olan $a_i(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ fonksiyonlarına başarı fonksiyonları olarak adlandırılır. $g_i(\underline{x}) + d_i^- - d_i^+ = b_i$ Mutlak (absolute) kısıtları, $f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell$ Hedeflerin kısıtlarıdır.

(1.5)'in çözüm algoritması şudur: İlk baştaki $a_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimizasyonu alınır, $\min a_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+) = a_1^*$ varsayarak, bundan sonra, a_1, a_1^* 'dan daha büyük olduğunu unutmayarak $a_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimize edilir ve $\min a_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+) = a_2^*$ yazılır. Böylece $a_k(\underline{d}^-, \underline{d}^+)$ minimizasyonu alınır (2, sh:65). Şu üç durum gösterilebilir;

1) Eğer istek durumu $f_\ell(\underline{x}) \leq G_\ell$ ise; hedefin kısıtı

$$f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell \quad \text{ve amacı} \quad \min d_\ell^+ \quad \text{dir.}$$

2) Eğer istek durumu $f_\ell(\underline{x}) \geq G_\ell$ ise; hedefin kısıtı

$$f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell \quad \text{ve amacı} \quad \min d_\ell^- \quad \text{şeklindedir.}$$

3) İstek durumu $f_\ell(\underline{x}) = G_\ell$ ise; hedefin kısıtı

$$f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell \quad \text{ve amacı} \quad \min(d_\ell^+ + d_\ell^-) \quad \text{şeklindedir (8, sh:383).}$$

$w_{\ell k}^+$ ve $w_{\ell k}^-$; k'ıncı öncelik seviyesinde, sırasın-
da d_ℓ^+, d_ℓ^- ağırlıklarıdır. d_ℓ^+ ve d_ℓ^- , ($\ell = 1, 2, \dots, s$) ağırlıkları gözönüne alarak Lineer hedef programlama modelinin

matematik formülasyonu şu şekilde de yazılır;

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^r P_k \left[\sum_{l=1}^s w_{lk}^+ d_{lk}^+ + \sum_{l=1}^s w_{lk}^- d_{lk}^- \right] \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n c_{lj} x_j + d_{lk}^- - d_{lk}^+ = G_l \quad , \quad l = 1, 2, \dots, s \\ & x_j, d_{lk}^-, d_{lk}^+ \geq 0 \quad , \quad \forall j, l \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Şimdiye kadar, çok amaçlı Lineer programlama probleminin tüm kısıtlarında sadece ($\leq$) eşitsizliğin olduğunu kabul ederek Lineer hedef programlama modelinin formülasyonunu yaptık. Eğer (1.4)'te bazı kısıtlarda ($\geq$ veya $=$) işaretleri varsa o zaman bildiğiniz gibi (1.4)'teki problemin çözülmesi için yapay (geçiçi) değişkenler kullanılır. Ve bu durumda (1.6)'nın genel şekli şöyle yazılabilir;

$$\left. \begin{aligned} P: \min \quad & P_0 \sum_{i \in I} A_i + \sum_{k=1}^r P_k \left[\sum_{l=1}^s w_{lk}^+ d_{lk}^+ + \sum_{l=1}^s w_{lk}^- d_{lk}^- \right] \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + A_i = b_i \quad , \quad i \in I \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad , \quad i \in I \\ & \sum_{j=1}^n c_{lj} x_j + d_{lk}^- - d_{lk}^+ = G_l \quad , \quad l = 1, 2, \dots, s \\ & x_j, d_{lk}^-, d_{lk}^+, A_i \geq 0 \quad \forall j, l, i \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

(1.7)'de P_0 en yüksek öncelikli seviyeyi ifade etmektedir.
(8, sh:384).

Ve bu hedef programlama problemi şu şekilde kurulabilir:

1.4. Linear Hedef Programlama Modelinin Oluşturulması İçin Şu Örnekleri Verelim:

Örnek 1.1: Oyuncak fabrikasında iki türlü oyuncak, A ve B üretilmektedir. A tipi oyuncak B tipi oyuncaktan daha kalitelidir. A oyuncağının fiyatı 0.40 \$, B oyuncağı ise 0.30 \$ dır. A tipi oyuncakların üretim süresi, B tipi oyuncakların üretim süresinin iki katıdır. Eğer tüm yapılan oyuncaklar B çeşidinden ise; Şirket günde 500 oyuncak yapabilmektedir. Eldeki ham maddeler, günde 400 oyuncak yapmak için (A ve B) yetmektedir. Fabrikadaki A ve B tipi oyuncak yapıldığını varsayarak, Şirketin en fazla kazanç sağlaması için, A tipi ve B tipinden kaç oyuncak yapabileceğini bulalım (2, sh:59-60).

Bu problem, bir lineer programlama problemidir. Ve problemin formülasyonu şudur:

$$\begin{array}{l} \max f_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ \left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \max f_1 = 0.4x_1 + 0.3x_2 \\ x_1 + x_2 + s_1 = 400 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 500 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

Burada x_1 , A tipinden üretilen oyuncak sayısıdır.

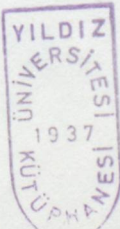
x_2 , B tipinden üretilen oyuncak sayısıdır.

s_1, s_2 yardımcı değişkenlerdir.

Bu problemin optimal çözümü;

$$x_1^* = 100, \quad x_2^* = 300$$

$$f_1^* = 130 \$.$$



Yukarıdaki tek amaçlı Lineer programlama problemi, çok amaçlı Lineer hedef programlama problemi olarak yapılabilir. Ve bu hedef programlama problemi şu şekilde kurulabilir:

$$x_1 + x_2 \leq 400$$

istek durumu olarak alınır => bu kısıtı şu şekilde yazılır;

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 400$$

ve burada amacı $\min d_1^+$ dır. Aynı şekilde

$$2x_1 + x_2 \leq 500$$

$$2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 500$$

şeklinde yazılır ve amacı $\min d_2^+$ dır.

Şimdi kârın istek seviyesi (istek değeri) en az 240 \$ ise;

$$0.4x_1 + 0.3x_2 \geq 240$$

isteyecek. O zaman bu hedefin kısıtı;

$$0.4x_1 + 0.3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 240$$

şeklinde yazılır ve amacı $\min d_3^-$ dir. Böylece problemimiz çok amaçlı Lineer hedef programlama problemi olarak şu şekilde yazılır.

$$\begin{array}{l}
 \text{(Amaç fonksiyonu)} \\
 \min \underline{a} = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^-)\} \\
 G_1 : x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\
 G_2 : 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 500 \\
 G_3 : 0.4x_1 + 0.3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 240 \\
 \underline{x}, \underline{d}^-, \underline{d}^+ \geq 0
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \min \underline{a} = \{(d_1^+ + d_2^+), (d_3^-)\} \\ G_1 : x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ G_2 : 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 500 \\ G_3 : 0.4x_1 + 0.3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 240 \\ \underline{x}, \underline{d}^-, \underline{d}^+ \geq 0 \end{array}} \right\} \text{(Burada 3 hedef vardır)}$$

Burada amaç (başarı) fonksiyonu iki öncelik seviyesinden oluşur. Birinci öncelik seviyesi $\min(d_1^+ + d_2^+)$ şeklinde verilmiştir. Çünkü G_1 ve G_2 mutlak hedefler. İkinci öncelik seviyesi $\min d_3^-$ ile verilmiştir. Lineer hedef programlama (LHP) çözüm tekniklerinden biri kullanılmakla problemin optimal çözümü bu şekildedir;

$$x_1^* = 100, \quad x_2^* = 300, \quad d_3^- = 110, \quad d_1^+ = 0, \quad d_2^+ = 0, \quad d_3^+ = 0$$

$$\underline{a}^* = \{0, 110\}$$

Yukarıdaki tek amaçlı Lineer programlama problemi, tek amaçlı Lineer hedef programlama problemi olarak da yapılabilir. Ve bu tek amaçlı Lineer hedef programlama problemi şu şekilde yazılır;

$$\begin{array}{l}
 \text{(Amaç fonksiyonu)} \\
 a = \min d_3^- \\
 \text{(Mutlak kısıtları)} \\
 x_1 + x_2 + S_1 = 400 \\
 2x_1 + x_2 + S_2 = 500 \\
 \text{(Hedefin kısıtı)} \\
 0.4x_1 + 0.3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 240 \\
 d_3^-, x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = \min d_3^- \\ x_1 + x_2 + S_1 = 400 \\ 2x_1 + x_2 + S_2 = 500 \\ 0.4x_1 + 0.3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 240 \\ d_3^-, x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{array}} \right\} \text{(Sadece tek hedef var)}$$

Lineer hedef programlama çözüm tekniklerinden birini kullanarak problemin optimal çözümü: 180,000 birim ve antibiyotikten 200,000 birim yollamak istenmiştir. Kan nakliyesinde

günlük $x_1^* = 100$, $x_2^* = 300$, $d_3^- = 110$, $d_3^+ = 0$ gün olarak transport süresi, kandan birim başına gereksinim miktarı $d^* = \min d_3^- = 110$ transport fiyatları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

şeklinde vermektedir.

Örnek 1.2:

$$P: \min P_0[A_2] + P_1[d_1^+ + d_2^+] + P_2[2d_3^- + d_3^+] + P_3[d_4^-]$$

$$(5x_1 + 3x_2 \leq 15) \rightarrow 5x_1 + 3x_2 + S_1 = 15$$

$$(x_1 + x_2 \geq 1) \rightarrow x_1 + x_2 - E_2 + A_2 = 1$$

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 2$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4$$

$$5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30$$

$$10x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 50$$

$$x_1, x_2, S_1, E_2, A_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+ \geq 0$$

(1.7) Modeline benzeyen bir (çok amaçlı) Lineer hedef programlama problemidir. Burada A_2 yapay değişken, S_1, E_2 yardımcı değişkenlerdir (8, sh:402).

Örnek 1.3: (Bazı bölgelere sağlık yardımı yapılmasının modeli)

C_1, C_2 ve C_3 bölgelerine sağlık yardımı vermek için hükümetin Sağlık Bakanlığı kan ve antibiyotik göndermek üzere bir plan yapmaktadır. Birim (ünite) kan fiyatı 5\$, antibiyo-

tik fiyatı ise 3 \$ dır. Bakanlığın sermayesi 2,000,000 \$ dır. Bakanlık mümkünse, o bölgelere kandan 180,000 birim ve antibiyotikten 200,000 birim yollamak istemiştir. Kan nakliyesinde günlük olarak kan miktarında %5 zarar vardır. Her bölge için, gün olarak transport süresi, kandan birim başına gereksinim miktarı ve dolar olarak transport fiyatları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	C ₁	C ₂	C ₃
Transport süresi	3	5	2
Kandan gereksinim miktarı	50,000	30,000	0
Birim başına transport fiyatı	2	5	1.5

Kanın önemini, antabiyotiğin öneminden üç defa daha fazla varsayarak, Bakanlığın kandan ve antibiyotikten yollamak istediği miktarın sağlanması birinci öncelikli seviye olarak istenmektedir. İkinci öncelik seviyesi ise; yolculuk süresinin ortalamasının 3.2 günü aşmamasıdır. Üçüncü öncelik seviyesi ise, sermayenin miktarı 2,000,000 doları aşmamasıdır.

x_{ij} ($i = 1$ kan için, $i = 2$ antibiyotik için); j bölgeye ($j = 1,2,3$) yollanan ilacın i miktarını farz edelim.

$$(0.95)^3 x_{11} \geq 50,000 \quad (C_1'e \text{ yollanan kan miktarı})$$

$$(0.95)^5 x_{12} \geq 30,000 \quad (C_2'ye \text{ yollanan kan miktarı})$$

(Birinci hedef)

$$(0.95)^3 x_{11} + (0.95)^5 x_{12} + (0.95)^2 x_{13} \geq 180,000$$

(Kandan en az 180,000 birim gönderilmelidir.)

(İkinci hedef)

$$\begin{cases} 3(x_{11}+x_{21})+5(x_{12}+x_{22})+2(x_{13}+x_{23}) \leq 3.2(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}) \\ \text{(Yolculuk süresi)} \end{cases}$$

(Üçüncü hedef)

$$\begin{cases} (5+2)x_{11}+(5+5)x_{12}+(5+1.5)x_{13}+(3+2)x_{21}+(3+5)x_{22}+(3+1.5)x_{23} \leq 2,000,000 \\ \text{(Sermaye için)} \end{cases}$$

Bu durumda çok amaçlı Lineer hedef programlama modeli oluşur. Modelin formülasyonu aşağıdaki gibidir;

(Amaç fonksiyonu)

$$P : \min P_0[A_1+A_2]+P_1[3d_1^-+d_2^-]+P_2[d_3^+]+P_3[d_4^+]$$

(Mutlak kısıtlar)

$$(0.95)^3 x_{11} - E_1 + A_1 = 50,000$$

$$(0.95)^5 x_{12} - E_2 + A_2 = 30,000$$

(1.hedef kısıtları)

$$(0.95)^3 x_{11} + (0.95)^5 x_{12} + (0.95)^2 x_{13} + d_1^- - d_1^+ = 180,000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + d_2^- - d_2^+ = 200,000$$

(2.hedef kısıtı)

$$3(x_{11}+x_{21})+5(x_{12}+x_{22})+2(x_{13}+x_{23})+d_3^- - d_3^+ = 3.2(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23})$$

(3. hedef kısıtı)

$$7x_{11}+10x_{12}+6.5x_{13}+5x_{21}+8x_{22}+4.5x_{23}+d_4^- - d_4^+ = 2,000,000$$

(Sabit koşul)

$$x_{11}, \dots, x_{23} ; d_1^+, \dots, d_4^+ ; d_1^-, \dots, d_4^- \geq 0$$

1.5. Hedef Programlamanın Sınıflandırılması

Tekniğin varsayımları ve yapısal özellikleri dikkate alınarak, konuya bakış açısına göre değişen, farklı sınıflandırmalar yapılagelmektedir. Ancak bu sınıflandırmaların tümünü birden içerecek genel bir ayırım aşağıdaki gibi yapılabilir:

1) Amaç fonksiyonlarına göre hedef programlama;

- Lineer (Doğrusal) hedef programlama,
- Lineer olmayan hedef programlama,

olmak üzere iki grupta incelenebilir. Lineer olmayan teknikler gerekli dönüşümlerden geçirilerek Lineer hale getirilirler ve çözümleri ondan sonra yapılır.

2) Karar değişkenlerine göre ise;

- Sürekli değerler alabilen,
- Kesikli değerler alabilen,
- Tüm tamsayı olan,
- Karışık tamsayı olan,
- 0-1 değerleri alabilen,

hedef programlama tekniklerinden söz edilebilir.

3) Katsayıların özelliklerine göre de;

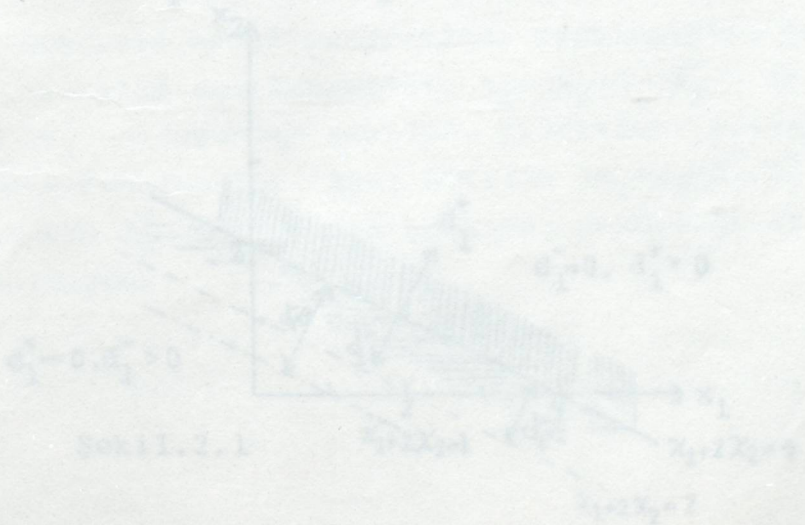
- Deterministik olan,
- Stokastik olan,
- Belirsiz (fuzzy) olan,

hedef programlama teknikleri ifade edilebilir. Burada stokastik ve belirsiz katsayılı hedef programlama tekniklerinde belirlilik varsayımı geçerli değildir.

Bu araştırmada kullanılan teknik, yukarıdaki sınıflandırmaya göre doğrusal-sürekli ve deterministik hedef programlama gruplarıyla ilgilidir. Dolayısıyla yapılan açıklamalar, genellikle bu tekniklerin özelliklerini içermektedir. Görüldüğü

gibi yukarıdaki sınıflandırma birbirlerinden bağımsız ayırımları göstermez. Aralarında değişik kombinasyonlar veya arakesitler mevcuttur. Sınıflandırma konusunda diğer bir yaklaşım da modelin etkileşimli olup olmaması özelliğine dayanabilir. Modele ait bir çözümler kümesinin karar-vericiye götürülmesinden sonra onun yönlendirmeleriyle mevcut çözümü baz olarak yeniden problem çözme işlemi, algoritmanın karar vericiyle etkileşimli olduğunu gösterir. Böyle bir modele örnek olarak Hwang ve Masud'un "etkileşimli ardışık hedef programlama" (10, sh:392) ve Lee'nin "Etkileşimli tam sayı hedef programlama" (11, sh:362) algoritmaları gösterilebilir.

G_1 için, Euclidean uzayında hiper düzlem olarak gösterilir. Şimdi eğer bu hedef için $(\cdot, \text{hedef}) = \min d_1^+$ ise; optimal çözümleri $f_1(x) \leq G_1$ yarı uzayında aranır. Çünkü $f_1(x) \leq G_1$ yarı uzayında olan tüm noktalar için $d_1^+ = 0$ dir. Yani amaç $\min d_1^+$ olduğunda istek noktaların kümesi $f_1(x) \leq G_1$ yarı uzayının noktalarıdır. Aynı şekilde amaç $\min d_1^-$ ise; optimal noktaları $f_1(x) \geq G_1$ yarı uzayında aranır. Çünkü $f_1(x) \geq G_1$ yarı uzayında olan tüm noktalar için $d_1^- = 0$ dir. Ve bu durumda istek noktaların kümesi $f_1(x) \geq G_1$ yarı uzayının noktalarıdır. Son olarak $f_1(x) + d_1^- - d_1^+ = G_1$ 1'inci hedefin kısıtı olmak üzere, bu hedef için $(d_1^+ + d_1^-)$ minimizasyonu istenirse; o zaman istek noktaların kümesi $f_1(x) = G_1$ hiper düzlemi üzerinde olan noktaların kümesidir. Yukarıda olan durumları şu örnekle açıklayalım. Hedefin kısıtı $x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4$ varsayalım. $x_1 + 2x_2 \geq 4$ yarı uzayında (dik çizgiyle ile gösteren yarı uzay) olan tüm noktalar için $d_1^- = 0$ ve d_1^+ negatif olmayan pozitif değerler alır.



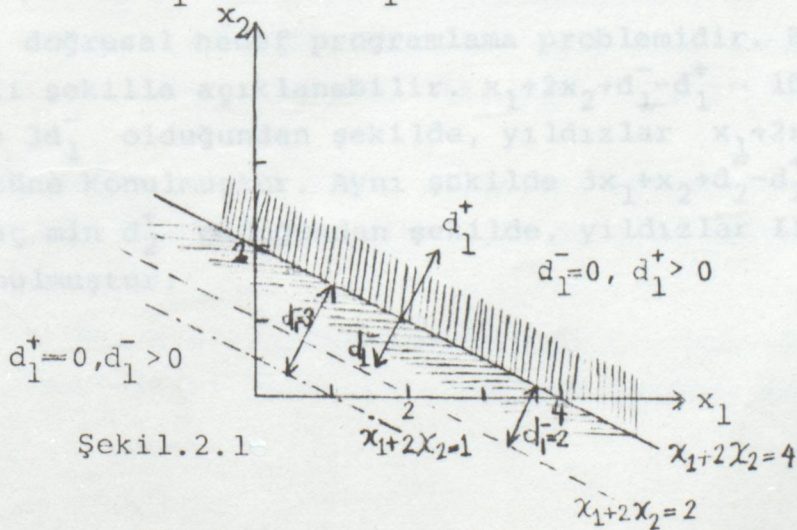
Şekil 1.1.1

2. BÖLÜM

2. HEDEF PROGRAMLAMA ÇÖZÜM TEKNİKLERİ

2.1. Grafik Yöntemi

Hedef programlama probleminde $f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell$; ℓ 'inci hedefin kısıtı varsayalım. Açıkça bu kısıt her hedef değeri G_ℓ için, Euclidean uzayında hiper düzlem olarak gösterilir. Şimdi eğer bu hedef için (ℓ .hedef) amacı $\min d_\ell^+$ ise; optimal çözümleri $f_\ell(\underline{x}) \leq G_\ell$ yarı uzayında aranır. Çünkü $f_\ell(\underline{x}) \leq G_\ell$ yarı uzayında olan tüm noktalar için $d_\ell^+ = 0$ dır. Yani amacı $\min d_\ell^+$ olduğunda istek noktaların kümesi $f_\ell(\underline{x}) \leq G_\ell$ yarı uzayının noktalarıdır. Aynı şekilde amacı $\min d_\ell^-$ ise; optimal noktaları $f_\ell(\underline{x}) \geq G_\ell$ yarı uzayında aranır. Çünkü $f_\ell(\underline{x}) \geq G_\ell$ yarı uzayında olan tüm noktalar için $d_\ell^- = 0$ dır. Ve bu durumda istek noktaların kümesi $f_\ell(\underline{x}) \geq G_\ell$ yarı uzayının noktalarıdır. Son olarak $f_\ell(\underline{x}) + d_\ell^- - d_\ell^+ = G_\ell$, ℓ 'inci hedefin kısıtı olmak üzere, bu hedef için $(d_\ell^- + d_\ell^+)$ minimizasyonu istenirse; o zaman istek noktaların kümesi $f_\ell(\underline{x}) = G_\ell$ Hiper düzlemi üzerinde olan noktaların tümüdür. Yukarıda olan durumları şu örnekle açıklayalım. Hedefin kısıtı $x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4$ varsayalım. $x_1 + 2x_2 \geq 4$ yarı uzayında (dik çizgiler ile taranan yarı uzay) olan tüm noktalar için $d_1^- = 0$ ve d_1^+ negatif olmayan çeşitli değerler alır.

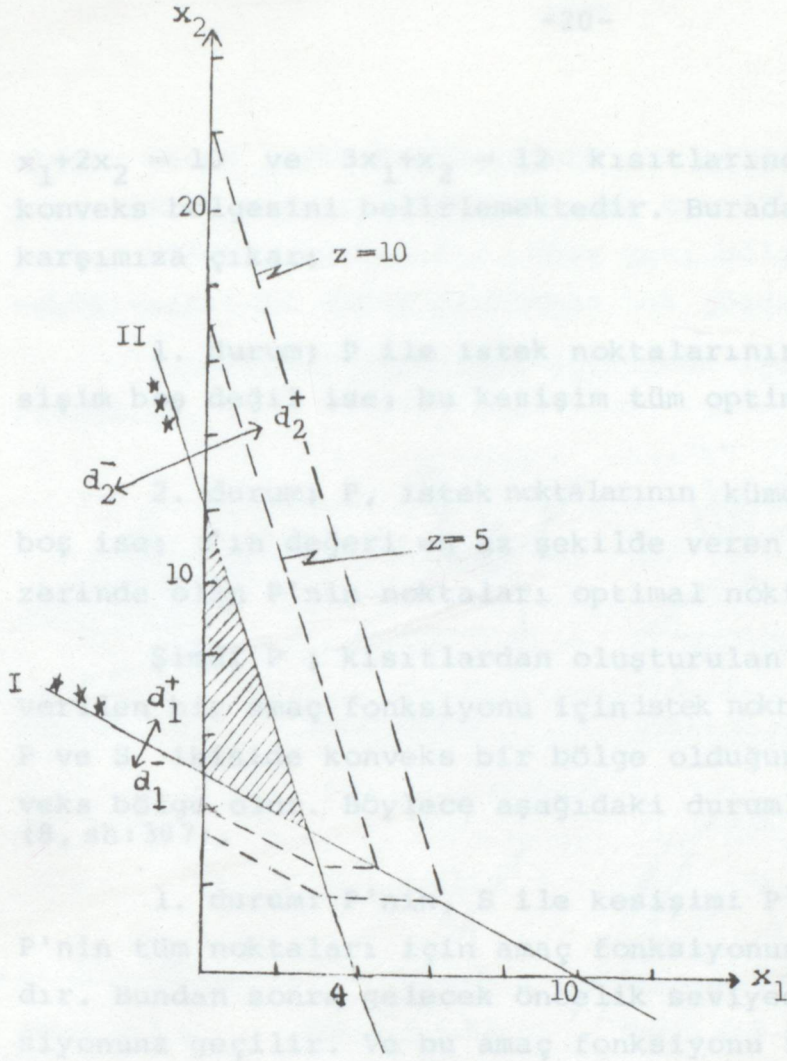


Böylece bu noktalar için d_1^- minimize eder. Başka şekilde $\min d_1^-$ istenirse; $x_1+2x_2 \geq 4$ yarı uzayı, istek noktaları kümesini verir. Diğer bir yönde $\min d_1^+$ istenirse; $x_1+2x_2 \leq 4$ yarı uzayı (yatay çizgilerle taranan yarı uzay), istek noktalarının kümesini verir. Son olarak $\min(d_1^-+d_1^+)$ istenirse; istek kümesi $x_1+2x_2 = 4$ hiper düzlemiyle verilir. Şekillerde istek noktalarının kümesi (ya yarı uzay ya da hiper düzlem); verilen hiper düzlemine göre uygun tarafta yıldızlar ile gösterilecektir. İstenilmeyen yarı uzayda, verilen hiper düzlem paralel olan diğer hiper düzlemler araştırılır. Bu hiper düzlemler amaçın başarı seviyesini de verirler. Mesela yukarıdaki örnek için, eğer amaç $\min d_1^-$ ise; $x_1+2x_2 = 2$ doğrunun üzerinde olan tüm noktalar, $d_1^- = 2$ başarı seviyesi verirler. Ve $x_1+2x_2 = 1$ doğrunun üzerinde olan tüm noktalar, $d_1^- = 3$ başarı seviyesi verirler (8, sh:394-395).

Örnek 2.1.1.

$$\left. \begin{array}{l} P : \min z = 3d_1^- + d_2^+ \\ I : x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10 \\ II : 3x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 12 \\ x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0 \end{array} \right\}$$

bir doğrusal hedef programlama problemidir. Bu problem, aşağıdaki şekilde açıklanabilir. $x_1+2x_2+d_1^- - d_1^+ = 10$ hedefinde amaç $\min 3d_1^-$ olduğundan şekilde, yıldızlar $x_1+2x_2 = 10$ doğrunun üstüne konulmuştur. Aynı şekilde $3x_1+x_2+d_2^- - d_2^+ = 12$ hedefinde amaç $\min d_2^+$ olduğundan şekilde, yıldızlar II doğrusunun altına konulmuştur.



Şekil.2.2

Yukarıdaki şekilde taralı alan, istek noktaların kümesini verir. Çünkü taralı alanda olan tüm noktalar için d_1^-, d_2^+ sapma değişkenleri sıfır değerler alarak amaç fonksiyonun değerini $z = 0$ yaparlar. $(x_1, x_2) = (0, 4 \frac{1}{6}); (3 \frac{2}{15}, 2 \frac{3}{5});$

$(4 \frac{4}{5}, 2 \frac{3}{5})$ ve $(0, 17)$ noktalarından geçen noktalı doğrunun üzerinde olan tüm noktalar için amaç fonksiyonun değeri $z = 5$ tir. Aynı şekilde $(x_1, x_2) = (0, 3 \frac{1}{3}); (3 \frac{7}{15}, 1 \frac{3}{5});$

$(6 \frac{4}{5}, 1 \frac{3}{5})$ ve $(0, 22)$ noktaları içeren noktalı doğrunun üzerinde olan tüm noktalar için amaç fonksiyonun değeri $z = 10$ dur.

P; kısıtlardan oluşturulan bir konveks bölge varsayalım. Yukarıdaki örnek için şekilde görünen taralı alan;

$x_1 + 2x_2 = 10$ ve $3x_1 + x_2 = 12$ kısıtlarından oluşturulan P konveks bölgesini belirlemektedir. Burada iki değişik durum karşımıza çıkar;

1. durum; P ile istek noktalarının kümesiyle olan kesişim boş değil ise; bu kesişim tüm optimal noktaları içerir.

2. durum; P , istek noktalarının kümesiyle olan kesişim boş ise; z 'ın değeri en az şekilde veren noktalı doğrunun üzerinde olan P 'nin noktaları optimal noktalar olur.

Şimdi P ; kısıtlardan oluşturulan konveks bölgeyi, S ; verilen bir amaç fonksiyonu için istek noktalarının kümesi olsun. P ve S ikisinde konveks bir bölge olduğunda ; $P \cap S$ da konveks bölge olur. Böylece aşağıdaki durumlar ortaya çıkar: (8, sh:397).

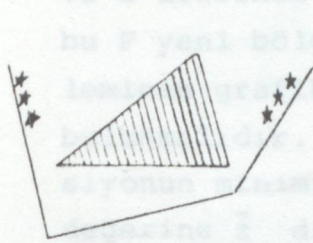
1. durum: P 'nin, S ile kesişimi P 'ye eşittir. Böylece P 'nin tüm noktaları için amaç fonksiyonunun minimizasyonu sıfırdır. Bundan sonra gelecek öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonuna geçilir. Ve bu amaç fonksiyonu için P den optimal olan noktalar aranır.

2. durum: P 'nin, S ile kesişimi boş değildir. Fakat en az S 'de olmayan P 'de olan bir nokta vardır. Bu durumda sadece $P \cap S$ noktaları alınır. Çünkü bu noktaları hem uygundur (P 'nin elemanları) hem de onlar için verilen amaç fonksiyonunun minimizasyonu sıfır değeri alır (S 'nin elemanları). Böylece bu durumda $P \cap S$ yeni P olarak alınır ve bu yeni P bölgesiyle, sonraki öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonuna hareket edilir.

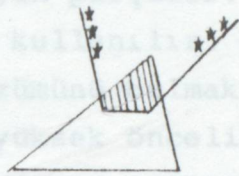
3. durum: P ile S 'nin kesişimi boştur. Bu durumda (P 'nin elemanları ve aynı zamanda, verilen amaç fonksiyonunun minimizasyonuna sıfır değeri veren noktalar yoktur. Böylece P 'de olan ve aynı zamanda amaç fonksiyonuna en az değeri veren noktalar, en iyi çözümler olarak alınır. Bu noktalardan

oluşan bölge (eski P bölgesinin alt bölgesidir.) yeni P bölgesi olarak alınır. Şimdi gelecek öncelik seviyesinde sadece yeni P bölgesi kullanılır. Eğer yeni bölge içinde sadece bir nokta varsa; bu nokta problemin tek çözümüdür.

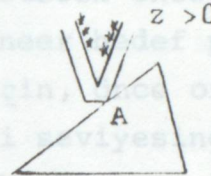
Yukarıdaki durumları açıklamak için şu şekiller gösterilebilir.



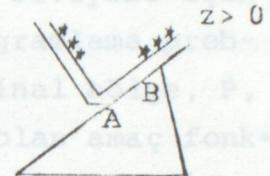
Şekil.2.3.a



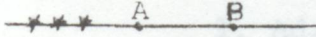
Şekil.2.3.b



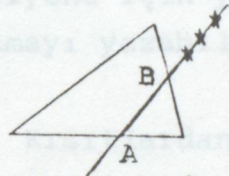
Şekil.2.3.c



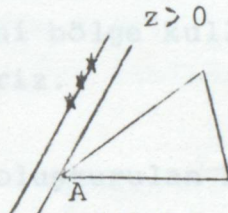
Şekil.2.3.d



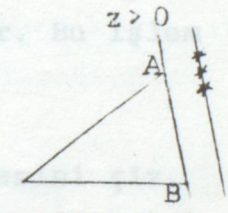
Şekil.2.3.a'



Şekil.2.3.b'



Şekil.2.3.c'



Şekil.2.3.d'

Şekil(2.3.a')'de P; A ve B arasında olan tüm noktalardan oluşur (A ve B dahildir). Oysa diğer şekillerde P ; üçgende olan tüm noktalarından oluşur. Yukarıdaki şekillerde istek noktalarının kümesi, S, yıldızlarla gösterilmiştir. (2.3.a) ve(2.3.a') şekilleri 1.durumu açıklamaktadır. Yani (2.3.a) ve (2.3.a') şekilleri için $P \subseteq S$, böylece P'nin tüm noktaları için amaç fonksiyonun değeri sıfırdır ($z = 0$). Burada yeni bölge, eski bölgeye eşittir. (2.3.b) ve (2.3.b') şekillerinde $S \cap P$; P'nin alt kümesidir. Bu durumda (2.3.b) şeklinde taralı alan olarak, (2.3.b') şeklinde A ve B arasında olan tüm noktaların kümesi olarak gösterilen yeni bölgenin tüm elemanları için amaç fonksiyonunun değeri sıfırdır ($z=0$). Böylece (2.3.b) ve (2.3.b') şekilleri 2.durumu açıklamaktadır. Sonda (2.3.c), (2.3.c'), (2.3.d) ve (2.3.d') şekilleri 3.durumu açıklamaktadır. Çünkü bu şekillerde $P \cap S = \emptyset$ dir. (2.3.c)

ve (2.3.c') şekillerinde üçgenin kenarında gösterilen A noktası, hem uygun bölgededir (P'de) hem de bu noktada amaç fonksiyonu z en az değeri alır. Bu durumda yeni bölge sadece A noktasıdır. Ama (2.3.d) ve (2.3.d') şekillerinde A ve B arasında olan tüm noktaları (A ve B dahil), hem uygundur hem de bunların için z en az değeri alır. Bu durumda yeni bölge; A ve B arasında oluşan parçadır. Gelecek öncelik seviyesi için bu P yeni bölgesi kullanılır. Lineer hedef programlama probleminin grafik çözümünü bulmak için, önce orijinal bölge, P, bulunmalıdır. En yüksek öncelikli seviyesinde olan amaç fonksiyonunun minimizasyonunu aranır. Ve bu amaç fonksiyonun min. değerine $\bar{z}$ diyelim. O zaman amaç fonksiyonu $\bar{z}$ yapan P'den tüm noktalar yeni bölgeyi belirlemektedir. Bundan sonra daha düşük öncelikli seviyesine hareket edilir, ve bu seviyede olan amaç fonksiyonu için yeni bölge kullanılır. Bu işlem için şu algoritmayı yazabiliriz.

1. Adım: Kısıtlardan oluşturulan P bölgesini çiz.
 $S_1, S_2, \dots, S_r$; r tane öncelik seviyelerine karşı gelen istek noktalarının kümelerini bul.
 $k = 1$ koy.
2. Adım: $k = r+1$ mi?
Eğer evetse; dur, P'de olan tüm noktaları optimaldir.
Hayırsa; 3. adıma git.
3. Adım: $P \cap S_k = P$ mi?
Eğer evetse ; $k = k+1$ koy ve 2. adıma dön.
Hayırsa; 4. adıma git.
4. Adım: $P \cap S_k = \emptyset$ mı?
Eğer evetse; 5. adıma git.
Hayırsa; $P = P \cap S_k$ koy, $k = k+1$ koyarak 2. adıma dön.

5. Adım: P'nin, amaç fonksiyonuna en az değeri veren noktaları; yeni P bölgesini belirlemektedir. Eğer yeni bölgede sadece bir nokta varsa; dur, bu nokta optimaldir. Yeni bölgede bir noktadan daha fazla nokta olursa; $k = k+1$ koy ve 2. adıma dön.

Aşağıdaki örnek yukarıda anlatılan algoritmayı açıklamaktadır (8, sh:398-399).

Örnek 2.1.2. Bayan Q.M. iyi bir yemek pişirmek için bir plan yapmak istemiştir. Bu planı sığır eti (inek) ve domuz eti için yapılır. Her paund için birim olarak, sığır ve domuz etlerinde olan besinlerin değerlerini, Paund karşısına dolar olarak gelen fiyatlarını şu tabloda açıklamaktadır.

	Sığır eti	Domuz eti	Gereksinim
Vitamin A (her paund için birim olarak)	12	6	en az 36
Protein (her paund için birim olarak)	3	3	en az 24
Karbonhidrat (her paund için birim olarak)	2	1	Paund = 453.6 gram.
Vitamin F (her paund için birim olarak)	1	1	
Fiyat (her paund için dolar olarak)	1.50	1.00	

Bayan Q.M. tabloda verilen A vitamini ve proteini gereksinimlerinin sağlanmasını esas olarak saymıştır. Bayan Q.M.'nin bütçesi 7 \$ dır. Bütçeyi aşan miktarı minimize etmek istemiştir. Ve bu amacı birinci öncelik seviyesi olarak farz etmiştir. Karbonhidratın miktarını 2'ye eşit alarak ikinci öncelik seviyesini oluşturmuştur. Üçüncü öncelik seviyesi ise; F

vitaminden en az 10 birim alınmalıdır. Bayan Q.M.'nin nasıl bir plan yapması gerekir?

x_1 ; sığır etinden olan miktarı

x_2 ; domuz etinden olan miktarı varsayarak modelin matematiksel formülasyonu şudur;

$$P : \min P_1 d_1^+ + P_2 (d_2^- + d_2^+) + P_3 d_3^-$$

$$I : 12x_1 + 6x_2 \geq 36$$

$$II : 3x_1 + 8x_2 \geq 24$$

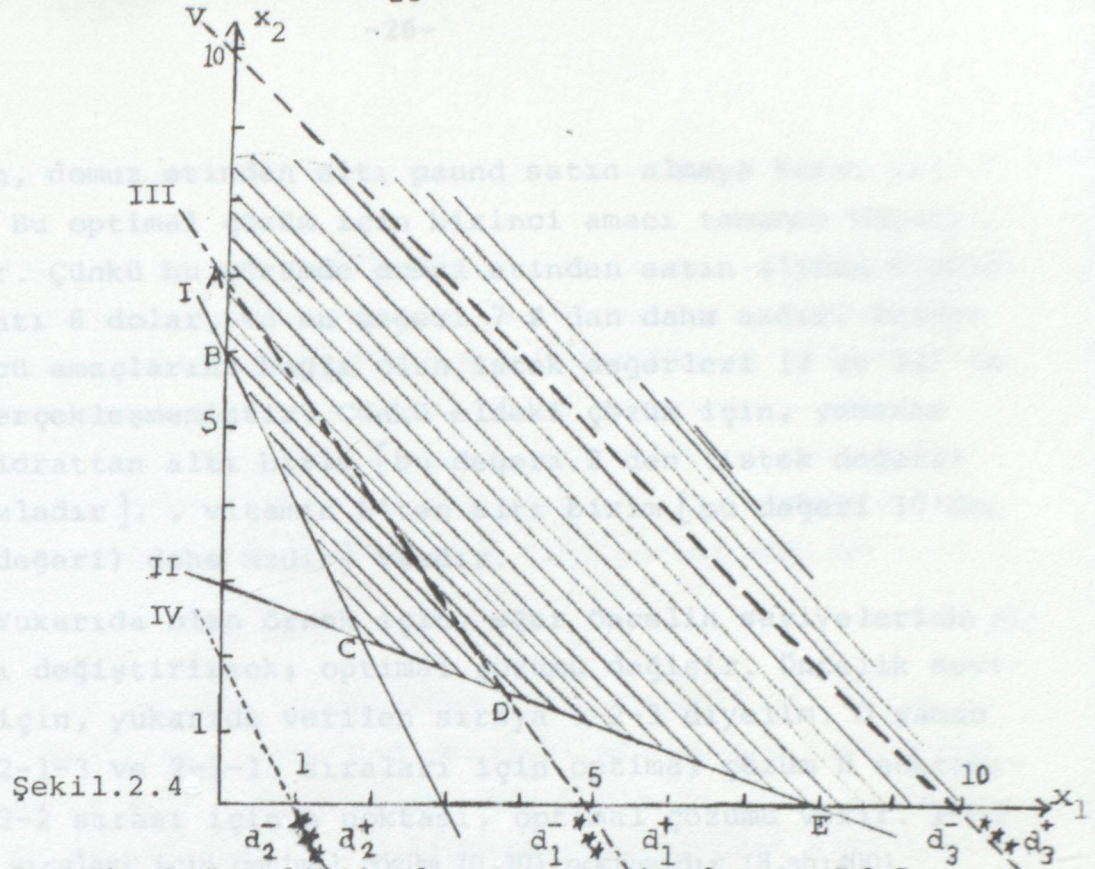
$$III : 3/2x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 7 \leftarrow \begin{cases} P_1 : \text{hedef} (3/2x_1 + x_2 \leq 7) \end{cases}$$

$$IV : 2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 2 \leftarrow \begin{cases} P_2 : \text{hedef} (2x_1 + x_2 = 2) \end{cases}$$

$$V : x_1 + x_2 + d_3^- - d_3^+ = 10 \leftarrow \begin{cases} P_3 : \text{hedef} (x_1 + x_2 \geq 10) \end{cases}$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

Aşağıdaki şekilde; I. ve II. kısıtlara karşı gelen hiper düzlemler doğrular olarak gösterilmiştir. P bölgesi; B, C ve E noktalarından oluşturulan taralı alandır. III noktali doğru yıldızların olduğu taraf ile oluşan yarı uzay, S_1 istek noktalarının kümesini belirlemektedir. S_2 istek noktaların kümesi, IV hiper düzleminin noktalarıyla gösterilmiştir. V noktali doğru, yıldızların olduğu tarafla oluşan yarı uzay, S_3 istek noktalarının kümesini belirlemektedir.



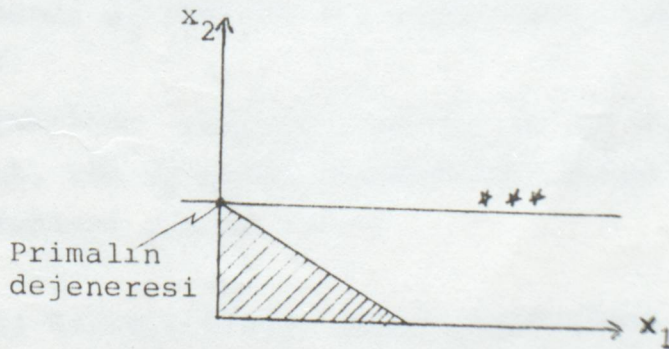
Şekil.2.4

En yüksek öncelikli olan amaçtan başlarız. $P \cap S_1$ araştırılacaktır. Şekil (2.4)'te görüldüğü gibi $P \cap S_1$ boş değildir (2.durum). Böylece yeni bölge, A, B, C ve D noktaları ile belirlenen bölgedir. Şimdi ikinci öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonuna geçelim. Bu seviye için istek noktalarının kümesi S_2 tamamen IV hiper düzleminin üzerinde olan noktalardır. Biraz önce elde edilen yeni bölge, IV hiper düzlemiyle olan kesişim boştur (3.durum ve şekil(2.3.d')). ABCD bölgesini, BC kenarıyla IV hiper düzlemi kaplamaktadır. O zaman yeni bölgemiz; B ve C'den oluşan tüm Lineer konveks kombinasyonlar kapsamaktadır (I. ve IV. doğrular paraleldir.). Böylece p (yeni bölgesi); BC kenarıdır, bildiğimiz gibi ikinci seviyede olan amaç fonksiyonu için istenen değer tamamen gerçekleşmez. Şimdi üçüncü öncelik seviyesine geçelim. Bu seviyede istek noktaların kümesi S_3 ; V hiper düzlem, yıldızların olduğu tarafla oluşan yarı uzaydır. (P) yeni bölgesinin S_3 ile olan kesişimi boştur. (3.hedefin değeri de tamamen gerçekleşmeyecektir). Eldeki P bölgesi (BC kenarı), B noktasıyla S_3 kümesini kaplamaktadır. O zaman optimal çözüm B noktasında bulunmuştur. Yani Bayan Q.M. siğir etini satın al-

maksızın, domuz etinden altı paund satın almaya karar vermiştir. Bu optimal çözüm için birinci amacı tamamen başarılı olmuştur. Çünkü bu çözümde domuz etinden satın alınan 6 paundun fiyatı 6 dolar, ve bu değeri 7 \$'dan daha azdır. İkinci ve üçüncü amaçlarına bağlı olan istek değerleri (2 ve 10) tamamen gerçekleşmemiştir. Çünkü eldeki çözüm için, yemekte karbonhidrattan altı birim [bu değeri 2'den (istek değeri) daha fazladır]. , vitamin F'ten altı birim [bu değeri 10'dan (istek değeri) daha azdır] vardır.

Yukarıda olan örnek için, eğer öncelik seviyelerinin sıralarını değiştirirsek; optimal çözümü değişir. Öncelik seviyeleri için, yukarıda verilen sıraya 1-2-3 diyelim. O zaman 1-2-3, 2-1-3 ve 2-3-1 sıraları için optimal çözüm B noktasıdır. 1-3-2 sırası için A noktası, optimal çözümü verir. 3-1-2 ve 3-2-1 sıraları için optimal çözüm (0,10) noktasıdır (8,sh:400).

Primalin Dejenerelik Durumu: n karar değişkeni için, mutlak kısıtlar ve hedeflerin kısıtlarıyla ilgili (n+1) yada daha fazla hiper düzlemler, R^n eksenlerinden biri üzerinde olan bir noktada kesişirlerse, primal dejenerelik durumu olur. Aşağıdaki şekilde primalin dejenerelik durumu ile ilgili bir örnek görülmektedir.



Şekil.2.5

2.2. Hedef Programlama Problemi İçin Simpleks İşlemleri

İlk başta, ardışık (sequential) Lineer hedef programlama algoritması açıklanacaktır. Bu algoritma; Lineer hedef programlama problemleri için ardışık (birbirini izleyen) çözümler kavramına dayanmaktadır. Hedef programlama problemini çözmek için, iki simpleks yöntemi vardır. Bunlarından birincisi iki faz simpleks yöntemi, ikincisi çok faz simpleks yöntemidir. Bu yöntemleri açıklamadan önce şu iki noktaya dikkat edelim:

1. Not: Eğer verilen hedeflerden biri, negatif bir istek değeriyle verilirse; sapma değişkenleri eklenmeden önce o hedefin kısıtı (-1) ile çarpılır. Örnek olarak x_1, x_2 sırasıyla geliri ve fiyatı gösteren değişkenler varsayarak kârı ; -20' den daha az istemeyeceğini (mümkünse) farz edelim. Böylece istek durumu $x_1 - x_2 \geq -20$ veya $-x_1 + x_2 \leq 20$ şeklinde yazılabilir. O zaman sapma değişkenleri kullanarak bu hedefin kısıtı şu şekilde yazılır; $-x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20$. Ve bu öncelik seviyesi için amaç fonksiyonu $\min d_1^+$ şeklinde verilir. $-x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20$ formülünde d_1^- işareti (+) olduğundan, taban değişken olarak alınır. Yukarıda yapılan işlem, ilk başta sapma değişkenleri konarak hedefin kısıtı (-1) ile çarpılmasıyla olan işlem de mümkündür. Son yapılan işlem için sırasıyla hedefin kısıtı ve amaç fonksiyonu şu şekilde verilmektedir; $-x_1 + x_2 - d_1^- + d_1^+ = 20$, $\min d_1^-$. Bu durum için, $-x_1 + x_2 - d_1^- + d_1^+ = 20$ formülünde d_1^+ işareti (+) olduğundan, taban değişken olarak alınır.

Hedeflerin kısıtlarında d_k^- , ($k = 1, 2, \dots, r$) işareti (+) yaparak, tüm d_k^- sapma değişkenleri taban değişkenler (temel değişkenler) olarak alınır.

2. Not: Ardışık Lineer hedef programlama (ALHP) algoritmasında, taban değişkenler ve taban dışı değişkenler açık olarak belirlenmelidir.

2.2.1. İki Faz Simpleks Yöntemi

İki faz simpleks yöntemi (8, sh:401-404), bölünen (ayrılan) algoritması (9, sh:291) veya iteratif (tekrarlanmış) çözüm yaklaşımı, adlarıyla bilinir ve algoritması şu şekilde gösterilir:

1. $k = 0$ koyulur. Birinci problemde sadece mutlak kısıtlar (gerekli kısıtlar) alınır, primal simpleks işlemi yaparak problem çözülür. Böylece iki faz simpleks yönteminin birinci fazı kullanılmıştır. Eğer, birinci fazda uygun bir çözüm yoksa; durulur, varsa; 2. adıma gidilir.

2. $k = k+1$ konur. Eğer $k > r$ ise, durulur, optimal çözümü bulunmuştur. $k < r$ ise; k . hedefin kısıtları eklenerek, k . öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu (z_k) için problem çözülür. Bu durumda k . hedefin sapma değişkenleri alınır. (Burada taban değişkenlerin ve taban dışı değişkenlerin açık olarak belirlenmesi gereklidir). Pivot sütunlar bulunmayınca ya kadar simpleks işlemi yapılır ve optimal çözüme ulaşılır. Bu optimal çözüm için k . amaç fonksiyonu başarı seviyesini sağlar. Ve onun değerine " $\bar{z}_k$ " diyelim. Bütün gelecek adımlarda z_k değeri değişmez. Tablonun son satırında, yani simpleks kriterleri satırında, simpleks kriterleri pozitif olan taban dışı değişkenleri tablodan atılır (Sütun düşme kuralı). Böylece k . seviyede olan amaç fonksiyonu silinmiştir. Bundan sonra $(k+1)$ 'inci hedefin kısıtları eklenerek $(k+1)$ 'inci öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için yeni problem çözülür, ve 2. adımda yapıldığı gibi devam edilir.

Yukarıdaki algoritma şu örnekle açıklanabilir.

Örnek 2.2.1:

$$P: \min P_1[d_1^+ + d_2^+] + P_2[2d_3^- + d_3^+] + P_3[d_4^-]$$

$$I : 5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

Burada;

$$\text{II} : x_1 + x_2 \geq 1$$

$$\text{III} : x_1 + d_1^- - d_1^+ = 2$$

$$\text{IV} : x_2 + d_2^- - d_2^+ = 4$$

$$\text{V} : 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30$$

$$\text{VI} : 10x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 50,$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+, d_4^-, d_4^+ \geq 0$$

Bu problemin çözümünü bulmak için iki faz yöntemini kullanalım. İki faz yönteminin 1. fazıyla başlayalım.

FAZ I)

Faz I'deki problem şudur:

$$P_0 : z_0 = \min A_2$$

$$5x_1 + 3x_2 + s_1 = 15$$

$$x_1 + x_2 - E_2 + A_2 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, E_2, A_2 \geq 0$$

Burada s_1, E_2 yardımcı değişkenler, A_2 yapay değişkendir. Başlangıç tablosu T^1 kuralım.

T^1 tablosu:

$w_{0,j}$		0	0	0	0	1	L
$u_{0,j}$	V	x_1	x_2	s_1	E_2	A_2	
0	s_1	5	3	1	0	0	15
1	A_2	①	1	0	-1	1	1
$P_0 :$	$w_{0,j} - z_{0,j}$	-1	-1	0	1	0	$z_0 - 1$

Burada; T^2 tablosu;

$w_{0,j}$ = j. değişkene ait $O(P_0)$ önceliğinin ağırlık faktörü.

$u_{0,j}$ = j. taban (temel) değişkenle ilgili $O(P_0)$ önceliğinin ağırlık faktörü.

L = Sağ tarafın vektörü.

V = Taban değişkenlerin vektörü

Tablonun son satırında, değişkenlere ait simpleks kriterleri şu şekilde hesaplanmıştır.

$$w_{0,1} - z_{0,1} = 0 - [(5)(0) + (1)(1)] = -1$$

$$w_{0,2} - z_{0,2} = 0 - [(3)(0) + (1)(1)] = -1$$

$$w_{0,3} - z_{0,3} = 0 - [(1)(0) + (0)(1)] = 0$$

$$w_{0,4} - z_{0,4} = 0 - [(0)(0) + (-1)(1)] = +1$$

$$w_{0,5} - z_{0,5} = 1 - [(0)(0) + (1)(1)] = 0$$

T^1 tablosundan, P_0 seviyesinde olan amaç fonksiyonunun değeri $z_0 = (15)(0) + (1)(1) = 1$ dir.

Amaç fonksiyonunda minimizasyon durumu olduğundan, T^1 tablosunun son satırında, yani simpleks kriterleri satırında olan tüm negatif simpleks kriterler tükeninceye kadar (yani optimallik şartı $((w_{0,j} - z_{0,j} \geq 0, \forall j))$ gerçekleşinceye kadar) iterasyonları yapılır.

T^1 tablosunda simpleks kriterlerinin en küçüğü -1 dir. Bu nedenle x_1 yada x_2 tabana gerebilmektedir. x_1 tabana girerek, $\min \{ \frac{15}{5}, \frac{1}{1} \} = 1$ olduğundan A_2 tabandan çıkar. T^1 tablosunun yanında, işlemi açıklanan oklar koyulmuştur. Birinci simpleks iterasyonu yaparak T^2 tablosu elde edilir.

T^2 tablosu:

$w_{0,j}$		0	0	0	0	L
$u_{0,j}$	V	x_1	x_2	S_1	E_2	
0	S_1	0	-2	1	5	10
0	x_1	1	1	0	-1	1
$P_0 :$	$w_{0,j} - z_{0,j}$	0	0	0	0	$z_0 = 0$

Simpleks kriteri negatif olan değişkenler tükenmiştir; bu nedenle amaç fonksiyonu (z_0) daha küçültülemez. Optimum çözüme ulaşılmıştır; optimal çözüm:

$$\underline{x} = (1, 0) , E_2 = 0 , S_1 = 10$$

$$z_0 = \min A_2 = (10)(0) + (1)(0) = 0 , A_2^* = 0 \text{ dır.}$$

Şimdi 1. hedefin kısıtları eklenerek elde edilen problem, 1. öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için çözülür. Bu amaç fonksiyonu; d_1^+ , d_2^+ sapma değişkenleri kapsadığı için III ve IV kısıtları probleme eklemektedir. T^2 tablosunda x_1 taban değişkenini ve aynı zamanda III kısıtı x_1 'i kapsamaktadır. O zaman x_1 değişkeni; taban dışı değişkenler vasıtasıyla ifade edilir. T^2 tablosundan $x_1 = 1 - (+1)x_2 - (0)S_1 - (-1)E_2 \implies x_1 = 1 - x_2 + E_2$, o zaman III şu şekilde yazılır; III': $1 - x_2 + E_2 + d_1^- - d_1^+ = 2$ veya III': $-x_2 + E_2 + d_1^- - d_1^+ = 1$. Böylece III' ve IV kısıtlarını ekleyerek 1. öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için yeni tabloyu kuralım.

T^3 tablosu : (amaç fonksiyonu; $P_1: z_1 = \min(d_1^+ + d_2^+)$)

	$w_{1,j}$		0	0	0	0	0	1	0	1	
	$u_{1,j}$	V	x_1	x_2	S_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	L
	0	S_1	0	-2	1	5	0	0	0	0	10
	0	x_1	1	1	0	-1	0	0	0	0	1
III':	0	d_1^-	0	-1	0	1	1	-1	0	0	1
IV :	0	d_2^-	0	1	0	0	0	0	1	-1	4
$P_1 :$	$w_{1,j} - z_{1,j}$		0	0	0	0	0	1	0	1	$z_1 = 0$

Burada;

$w_{1,j}$ = j. değişkene ait $l(P_1)$ önceliğinin ağırlık faktörü

$u_{1,j}$ = j. taban değişkenle ilgili $l(P_1)$ önceliğinin ağırlık faktörü.

T^3 tablosunda simpleks kriterleri negatif olan değişkenler tükenmiştir. Yani optimallik şartı ($w_{1,j} - z_{1,j} \geq 0, \forall j$) gerçekleşmiştir. Optimum çözüme ulaşılmıştır; Optimal çözüm:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, S_1 = 10, d_1^- = 1, d_2^- = 4 \quad \text{ve}$$

$$z_1 = \min(d_1^+ + d_2^+) = 0 \rightarrow (d_1^+ + d_2^+)^* = 0$$

$$\underline{x} = (1, 0), \quad d_1^+ = 0, \quad d_2^+ = 0$$

Bu optimal çözümde olan değerleri 1. hedefe bağlı III ve IV kısıtlarında konursa; III ve IV kısıtlarında verilen istek değerleri (seviyeleri) gerçekleşmektedir. Çünkü; $x_1 + d_1^- - d_1^+ = 1 + 1 - 0 = 2$, $x_2 + d_2^- - d_2^+ = 0 + 4 - 0 = 4$ 'tir.

Burada Böylece bu amaç fonksiyonu ve daha önceki amaç fonksiyonu ikiside aynı optimal çözümü almışlardır. T^3 tablosunda x_2 , E_2 taban dışı değişkenlerinden biri tabana girerse; P_1 öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için alternatif çözümler elde edilir. Şimdi T^3 tablosunun son satırında simpleks kriterleri pozitif olan taban dışı değişkenler tablodan atılır. O zaman d_1^+ ve d_2^+ değişkenleri sıfır seviyesinde tespit edilerek tablodan atılır. Böylece 2. öncelik seviyesine hareket edilir. 2. hedefin kısıtları eklenerek elde edilen problem; 2. öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için çözülür. Bu amaç fonksiyonu d_3^- , d_3^+ sapma değişkenlerini kapsadığı için V kısıtı probleme eklenmektedir. T^3 tablosunda x_1 taban değişken olduğundan V kısıtında olan x_1 ; taban dışı değişkenler vasıtasıyla ifade edilir. T^3 tablosundan;

$$x_1 = 1 - (1)x_2 - (0)S_1 - (-1)E_2 - (0)d_1^- - (0)d_2^- \rightarrow x_1 = 1 - x_2 + E_2,$$

o zaman V kısıtı şu şekilde yazılabilir; $V': 5(1 - x_2 + E_2) + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 30$ veya daha basit şekilde $V': -2x_2 + 5E_2 + d_3^- - d_3^+ = 25$ yazılabilir. V' kısıtına bakarak gelecek tablosunda (T^4) açıkça d_3^- taban değişken olacağı görülür. Amaç fonksiyonu $P_2: z_2 = \min(2d_3^- + d_3^+)$, d_3^- değişkeni de kapsamıştır. Bu durumda V' kısıtından faydalanarak $d_3^- = 25 + 2x_2 - 5E_2 + d_3^+$ şeklinde ifade edilir ve amaç fonksiyonu; $\min 2(25 + 2x_2 - 5E_2 + d_3^+) + d_3^+$ veya $\min 4x_2 - 10E_2 + 3d_3^+ + 50$ şeklinde yazılabilir. Şimdi P_2 öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için T^4 tablosunu kuralım:

T^4 tablosu: (amaç fonksiyonu; $P_2: z_2 = \min(2d_3^- + d_3^+)$)

$w_{2,j}$		0	0	0	0	0	0	2	1	L
$u_{2,j}$	V	x_1	x_2	S_1	E_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_3^+	
0	S_1	0	-2	1	5	0	0	0	0	10
0	x_1	1	1	0	-1	0	0	0	0	1
0	d_1^-	0	-1	0	(1)	1	0	0	0	1
0	d_2^-	0	1	0	0	0	1	0	0	4
V' :	d_3^-	0	-2	0	5	0	0	1	-1	25
$P_2 :$	$w_{2,j} - z_{2,j}$	0	+4	0	-10	0	0	0	3	$z_2 = 50$



Burada;

$w_{2,j}$ = j. değişkene ait 2(P₂) önceliğinin ağırlık faktörü

$u_{2,j}$ = j.temel değişkenle ilgili 2(P₂) önceliğinin ağırlık faktörü.

T^4 tabosunda amaç fonksiyonun değeri; $z_2 = (10)(0) + (1)(0) + (1)(0) + (4)(0) + (25)(2) = 50$ dir. T^4 tablosunda, E_2 değişken tabana girerek, d_1^- değişkeni tabandan çıkar. Simpleks iterasyon yaparak T^5 tablosu elde edilir.

T^5 tablosu: (amaç fonksiyonu, $P_2: z_2 = \min(2d_3^- + d_3^+)$)

$w_{2,j}$		0	0	0	0	0	0	2	1	
$u_{2,j}$	V	x_1	x_2	S_1	E_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_3^+	L
0	S_1	0	③	1	0	-5	0	0	0	5 →
0	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	2
0	E_2	0	-1	0	1	1	0	0	0	1
0	d_2^-	0	1	0	0	0	1	0	0	4
2	d_3^-	0	3	0	0	-5	0	1	-1	20
$P_2 :$		$w_{2,j} - z_{2,j}$	0	-6	0	0	10	0	3	$z_2 = 40$

T^5 tablosunda simpleks kriterlerinde negatif olanlar tükenmediğinden, minimum çözüme ulaşılmamıştır. O zaman T^5 tablosunda, x_2 tabana girip S_1 tabandan çıkar. Böylece bir simpleks iterasyonu yaparak T^6 tablosu elde edilir.

T^6 tablosu:

$w_{2,j}$		0	0	0	0	0	0	2	1	L
$u_{2,j}$	V	x_1	x_2	S_1	E_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_3^+	
0	x_2	0	1	1/3	0	-5/3	0	0	0	5/3
0	x_1	1	0	0	0	1	0	0	0	2
0	E_2	0	0	1/3	1	-2/3	0	0	0	8/3
0	d_2^-	0	0	-1/3	0	5/3	1	0	0	7/3
2	d_3^-	0	0	-1	0	0	0	1	-1	15
$P_2 : w_{2,j} - z_{2,j}$		0	0	2	0	0	0	0	3	$z_2 = 30$

T^6 tablosunda, simpleks kriterlerinde negatif olanlar tükendiğinden minimum çözüme ulaşılmıştır; optimal çözüm:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5/3, \quad E_2 = 8/3, \quad d_2^- = 7/3, \quad d_3^- = 15,$$

$$S_1 = 0, \quad d_2^+ = 0, \quad d_3^+ = 0, \quad \text{ve}$$

$$z_2 = \min (2d_3^- + d_3^+) = 30 \rightarrow (2d_3^- + d_3^+)^* = 30 \quad \text{dur.}$$

2. öncelik seviyesinde, yani P_2 seviyesinde olan amaç fonksiyonu minimizasyonunun istenildiği gibi tamamen gerçekleşmediği görülür. Şimdi T^6 tablosunun son satırında simpleks kriterleri pozitif olan taban dışı değişkenler tablodan atılır. O zaman S_1 ve d_3^+ değişkenleri sıfır seviyesinde tespit edilerek tablodan atılır. Böylece 3. öncelik seviyesine hareket edilir. 3.hedefin kısıtları eklenerek elde edilen problem; 3. öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için çözülür. Bu amacı d_4^- sapma değişkeni kapsadığı için VI kısıtı probleme

eklenmektedir. T^6 tablosunda x_1, x_2 taban değişkenler olduklarından VI kısıtında olan x_1 ve x_2 değişkenleri; her biri taban dışı değişkenler vasıtasıyla ifade edilir. T^6 tablosundan;

$$x_1 = 2 - (0)x_2 - (0)S_1 - (0)E_2 - (1)d_1^- - (0)d_2^- - (0)d_3^- - (0)d_3^+$$

$$x_1 = 2 - d_1^-$$

aynı şekilde;

$$x_2 = (5/3) - (1/3)S_1 + (5/3)d_1^-$$

$$= (5/3) + (5/3)d_1^- \quad (\text{Çünkü } S_1 \text{ sıfır seviyesinde tespit edilmiştir.})$$

O zaman VI kısıtı şu şekilde yazılabilir:

$$VI': 10(2 - d_1^-) + 5((5/3) + (5/3)d_1^-) + d_4^- - d_4^+ = 50$$

veya daha basit şekilde:

$$VI': (-5/3)d_1^- + d_4^- - d_4^+ = 65/3 \quad \text{yazılabilmektedir.}$$

VI' kısıtına bakarak gelecek tablosunda (T^7) açıkça d_4^- 'ün taban değişken olacağı görülür. Amaç fonksiyonu $P_3: z_3 = \min(d_4^-)$, d_4^- değişkeni de kapsamıştır. Bu durumda VI' kısıtından faydalanarak $d_4^- = (5/3)d_1^- + d_4^+ + (65/3)$ yazılır ve amaç fonksiyonu, $\min d_4^- = \min((5/3)d_1^- + d_4^+ + (65/3))$ şeklinde yazılabilir. Şimdi P_3 öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonu için T^7 tablosunu kuralım.

T^7 tablosu: (amaç fonksiyonu; $P_3: z_3 = \min d_4^-$)

$w_{3,j}$		0	0	0	0	0	0	0	1	0	
$u_{3,j}$	V	x_1	x_2	E_2	d_1^-	d_2^-	d_3^-	d_4^-	d_4^+		L
0	x_2	0	1	0	-5/3	0	0	0	0		5/3
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0		2
0	E_2	0	0	1	-2/3	0	0	0	0		8/3
0	d_2^-	0	0	0	5/3	1	0	0	0		7/3
0	d_3^-	0	0	0	0	0	1	0	0		15
1	d_4^-	0	0	0	-5/3	0	0	1	-1		65/3
$P_3 : w_{3,j} - z_{3,j}$		0	0	0	5/3	0	0	0	1		$z_3 = 65/3$

T^7 tablosunda optimal şartı sağladığı görülmektedir. O zaman P_3 öncelik seviyesi için optimal çözüm şudur:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5/3, \quad E_2 = 8/3, \quad d_2^- = 7/3, \quad d_3^- = 15, \\ d_4^- = 65/3, \quad d_2^+ = d_3^+ = d_4^+ = 0, \quad d_1^- = d_1^+ = 0 \quad \text{ve}$$

$$z_3 = \min d_4^- = 65/3 \rightarrow [d_4^-]^* = 65/3, \quad \underline{x} = (2, 5/3) = (2, 1\frac{2}{3})$$

Problemde, P_3 seviyesi son öncelik seviyesi olduğu için sipleks işlemleri bitmiştir. T^7 tablosunda olan çözüm, bütün seviyelerin optimal çözümüdür. Bu çözümde olan değerler III, IV, V, VI kısıtlarına götürülürse:

$$\text{III} : x_1 + d_1^- - d_1^+ = 2 + 0 - 0 = 2$$

$$\text{IV} : x_2 + d_2^- - d_2^+ = (5/3) + (7/3) - 0 = 12/3 = 4$$

$$\text{V} : 5x_1 + 3x_2 + d_3^- - d_3^+ = 5(2) + 3(5/3) + 15 - 0 = 30$$

$$\text{VI} : 10x_1 + 5x_2 + d_4^- - d_4^+ = 10(2) + 5(5/3) + (65/3) - 0 = 50$$

o kısıtlar gerçekleşmektedir. Bu problemde birinci hedef tam şekilde gerçekleşmiş ($d_1^+ = 0$, $d_2^+ = 0$, $z_1 = d_1^+ + d_2^+ = 0$), ikinci ve üçüncü hedefleri tam şekilde gerçekleşmemiştir ($d_3^- = 15 \neq 0$, $d_4^- = 65/3 \neq 0$).

2.2.2. Çok Faz Simpleks Yöntemi

Çok faz simpleks (multiphase) yöntemi (8, sh:405), değiştirilmiş simpleks algoritması (7, sh:44), veya sözlüksel (Lexicographic) simpleks yöntemi (12, sh:295), adlarıyla verilen yöntem şu şekilde sunulur.

Bu yöntemde başlangıç tablosu, tüm değişkenleri ve öncelik seviyelerinde olan tüm amaç fonksiyonlarını kapsamaktadır. Tablonun büyüklüğü bakımından, 2 faz simpleks yöntemi çok faz simpleks yönteminden daha avantajlıdır. Çok faz yönteminde eldeki taban dışı değişkenler vasıtasıyla ifade edilen kısıtlar ya da amaçlar olmadığı için bu açıdan, çok faz yöntemi iki faz yönteminden daha avantajlıdır.

Hedef programlama (HP) problemini çözmek için çok faz simpleks yönteminin başlangıç tablosu şu şekilde tanımlanmaktadır (8, sh:406).

Burada: -Çok Faz Simpleks Yönteminin Başlangıç Tablosu-

P_r	$w_{r,j}$	...	L				
P_{r-1}	$w_{r-1,j}$	...					
.	.	.					
P_k	$w_{k,j}$	...					
.	.	.					
P_1	$w_{1,j}$	...					
P_0	$w_{0,j}$	...					
	x	S	E	A	d^-	d^+	
" $\leq$ " kısıtları için	$\uparrow$	I	0	0	0	0	b
"=" kısıtları için	A	0	0		0	0	
" $\geq$ " kısıtları için	$\downarrow$	0	-I	-I	0	0	
Hedefler	F	0	0	0	I	-I	G
P_r	$w_{r,j}^{-z_{r,j}}$	...	z_r				
P_{r-1}	$w_{r-1,j}^{-z_{r-1,j}}$	...	z_{r-1}				
.	.	.	.				
P_k	$w_{k,j}^{-z_{k,j}}$	...	z_k				
.	.	.	.				
P_1	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	...	z_1				
P_0	$w_{0,j}^{-z_{0,j}}$	...	z_0				
				j. sütun			

Burada;

x = Karar değişkenleri

S, E = Yardımcı değişkenler

A = Yapay değişkenler

$w_{k,j}$ = j . değişkenle ilgili $k(P_k)$ önceliğinin ağırlık faktörü.
($k = 0, 1, \dots, r$),

$w_{k,j}^{-z_{k,j}}$ = k . öncelik seviyesinde, j . değişkenin simpleks
kriteridir. ($k = 0, 1, \dots, r$),

I = Uygun boyutla birim matrisidir.

$F = (c_{lj})$; Hedeflerin kısıtlarının katsayılarından oluşturulan
($S \times n$) boyutlu matrisidir.

$G = (G_1, G_2, \dots, G_S)$; Hedeflerin değerlerinin vektörü.

$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$; Mutlak kısıtlarla ilgili ikinci taraf
vektörü.

z_k = k öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonunun eldeki değeri-
ridir. ($k = 0, 1, \dots, r$).

$$L = \begin{bmatrix} b \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ G_1 \\ \vdots \\ G_S \end{bmatrix}; \text{ sağ tarafın vektörüdür.}$$

$A = (a_{ij})$; Mutlak kısıtlarının katsayılarından oluşturulan ($m \times n$)
boyutlu matrisidir.

Açıkça başlangıç taban; yardımcı, yapay değişkenler ve
 d_k^- sapma değişkenlerinden oluşur.

Çok faz algoritmanın kuralı bu şekilde açıklanabilir;

k . Fazda ($k = 0, 1, \dots, r$); k . öncelik seviyesinde olan
amaç fonksiyonu optimize edilmektedir. Ve bu amaç fonksiyonu-
nun optimal değeri z_k yazılır. Böylece çok faz algoritmasında

(r+1) fazı vardır. Genellikle birinci faz, uygun çözüme ulaşmak için yapılır, ve r tane faz, r amaç fonksiyonlarının optimizasyonları için yapılmaktadır.

k = 0 koyarak, algoritmayı şöyle sunabiliriz (8,sh: 406-407)

1. Adım:

$N = \{j \mid (w_{k,j} - z_{k,j} < 0) \wedge (w_{t,j} - z_{t,j} = 0 \quad \forall t < k)\}$ i seçilebilen pivot (anahtar) sütunlarının kümesi olarak tanımlayalım.

2. Adım:

$N = \emptyset$ mi?

Yanıt evetse ; 5. adıma git.

Hayırsa; 3. adıma git.

3. Adım:

Pivot sütun olarak N'den $s \in N$ sütunu seç, ve bu sütunda primal simpleks algoritmasının kurallarına göre pivot elemanı belirle. $a_{\mu\nu} > 0$ pivot elemanı kabul et.

4. Adım:

$a_{\mu\nu}$ pivot elemanı alarak bir primal simpleks iterasyonu yap, ve 1. adıma git.

5. Adım:

k = r mi?

Yanıt evetse dur, eldeki çözüm optimaldir.

Hayırsa 6. adıma git.

6. Adım:

k = 0 mi?

Yanıt evetse 7. adıma git.

Hayırsa k = k+1 koy ve 1. adıma git.

7. Adım:

$z_0 = 0$ mı?

Yanıt evetse $k = k+1$ koy ve 1. adıma git.

Hayırsa dur, problemde uygun bir çözüm yoktur.

Yukarıda anlatılan algoritma aşağıdaki örnekle açıklanabilir:

Örnek (2.2.2): (8, sh:407-410)

$$P : \min P_1 [2d_1^- + d_2^-] + P_2 [3d_2^+] + P_3 [d_3^- + 2d_3^+]$$

$$I : 3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$II : x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$III : 5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20$$

$$IV : 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 3$$

$$V : x_1 + d_3^- - d_3^+ = 4$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

Burada III'ten $d_1^- = 20 - 5x_1 - 4x_2 + d_1^+$ ve IV'ten $d_2^- = 3 - 2x_1 + x_2 + d_2^+$ şeklinde yazarak en yüksek öncelikli amaç fonksiyonu bu şekilde;

$2d_1^- + d_2^- = 2(20 - 5x_1 - 4x_2 + d_1^+) + (3 - 2x_1 + x_2 + d_2^+)$ ya da daha basit şekilde;

$\min P_1 [-12x_1 - 7x_2 + 2d_1^+ + d_2^+ + 43]$ yazılabilir. Aynı şekilde V'ten;

$d_3^- = 4 - x_1 + d_3^+$ şeklinde yazarak 3. amaç fonksiyonu bu şekilde;

$\min P_3 [(4 - x_1 + d_3^+) + 2d_3^+]$ ya da daha basit şekilde;

Tablo T¹ (Başlangıç Tablosu): ($P_0 \gg P_1 \gg P_2 \gg P_3$)
 $\min P_3 [-x_1 + 3d_3^+ + 4]$ yazılabilir.

I. kısıtına S_1 yardımcı değişken, II. kısıtına E_2 yardımcı değişken ve A_2 yapay değişkeni ekleyerek aşağıdaki problemi yazabiliriz:

$$P : \min P_0 [A_2] + P_1 [2d_1^- + d_2^-] + P_2 [3d_2^+] + P_3 [d_3^- + 2d_3^+]$$

$$I : 3x_1 + 2x_2 + S_1 = 12$$

$$II : x_1 + 2x_2 - E_2 + A_2 = 5$$

$$III : 5x_1 + 4x_2 + d_1^- - d_1^+ = 20$$

$$IV : 2x_1 - x_2 + d_2^- - d_2^+ = 3$$

$$V : x_1 + d_3^- - d_3^+ = 4$$

$$x_1, x_2, S_1, E_2, A_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

Böylece başlangıç tablosunu kurabiliriz.

Tablo T¹ (Başlangıç Tablosu): ($P_0 \gg P_1 \gg P_2 \gg P_3$)

$P_3:$	$w_{3,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	L
$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	
$P_0:$	$w_{0,j}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
$u_{3,j} \ u_{2,j} \ u_{1,j} \ u_{0,j} \ V$		x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
		S_1	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	12
		A_2	1	②	0	-1	1	0	0	0	0	0	5
		d_1^-	5	4	0	0	0	1	-1	0	0	0	20
		d_2^-	2	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	3
		d_3^-	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	4
$P_3:$	$w_{3,j}^{-z_{3,j}}$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	$z_3=4$
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	$z_2=0$
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	-12	-7	0	0	0	0	2	0	1	0	0	$z_1=43$
$P_0:$	$w_{0,j}^{-z_{0,j}}$	-1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$z_0=5$

→



T^1 tablosunda, değişkenlere ait simpleks kriterleri şu şekilde hesaplanmıştır. Mesela x_1 'e ait simpleks kriterleri;

$$P_0: w_{0,1} - z_{0,1} = 0 - [3(0) + 1(1) + 5(0) + 2(0) + 1(0)] = -1$$

$$P_1: w_{1,1} - z_{1,1} = 0 - [3(0) + 1(0) + 5(2) + 2(1) + 1(0)] = -12$$

$$P_2: w_{2,1} - z_{2,1} = 0 - [3(0) + 1(0) + 5(0) + 2(0) + 1(0)] = 0$$

$$P_3: w_{3,1} - z_{3,1} = 0 - [3(0) + 1(0) + 5(0) + 2(0) + 1(1)] = -1$$

ve d_2^+ değişkene ait simpleks kriterleri;

$$P_0: w_{0,g} - z_{0,g} = 0 - [0(0) + 0(1) + 0(0) + (-1)(0) + 0(0)] = 0$$

$$P_1: w_{1,g} - z_{1,g} = 0 - [0(0) + 0(0) + 0(2) + (-1)(1) + 0(0)] = +1$$

$$P_2: w_{2,g} - z_{2,g} = 3 - [0(0) + 0(0) + 0(0) + (-1)(0) + 0(0)] = 3$$

$$P_3: w_{3,g} - z_{3,g} = 0 - [0(0) + 0(0) + 0(0) + (-1)(0) + 0(1)] = 0$$

şeklinde hesaplanmıştır. T^1 tablosunda z_k 'nin ($k = 0, 1, 2, 3$) değerleri şu şekilde hesaplanmıştır.

$$z_0 = (12)(0) + (5)(1) + (20)(0) + (3)(0) + (4)(0) = 5$$

$$z_1 = (12)(0) + (5)(0) + (20)(2) + (3)(1) + (4)(0) = 43$$

$$z_2 = (12)(0) + (5)(0) + (20)(0) + (3)(0) + (4)(0) = 0$$

$$z_3 = (12)(0) + (5)(0) + (20)(0) + (3)(0) + (4)(1) = 4$$

P_0 seviyesinden başlarız. Bu seviyede x_1, x_2 sütunları seçilebilen pivot sütunlarıdır. Çünkü; $w_{0,1} - z_{0,1} = -1 < 0$ ve $w_{0,2} - z_{0,2} = -2 < 0$ dır. (-2) daha küçük olduğundan x_2 sütunu, pivot sütun olarak seçilir, ve x_2 tabana girer. Şimdi bu sütun-

da olan pivot elemanı bulmak için, primal simpleks algoritması gibi hareket edilir. Böylece L elemanları ve x_2 sütunun elemanları (sıfır veya negatif elemanları hariç) alarak $\frac{12}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{20}{4}$ oranlarının minimumu alınır. $\min\{\frac{12}{2}, \frac{5}{2}, \frac{20}{4}\} = 2.5$ olduğundan Tablo T^1 'de x_2 sütununun elemanlarından daire içinde olan elemanı pivot elemandır. O zaman A_2 tabandan çıkar. Böylece simpleks iterasyonu yapılarak elde edilen Tablo aşağıdadır:

T^2 tablosu:

$P_3:$	$w_{3,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	
$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	L
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	
$P_0:$	$w_{0,j}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
$u_{3,j} \ u_{2,j} \ u_{1,j} \ u_{0,j}$		V	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
		S_1	2	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	7
		x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	0	0	0	0	5/2
		d_1^-	3	0	0	2	-2	1	-1	0	0	0	10
		d_2^-	5/2	0	0	-1/2	1/2	0	0	1	-1	0	11/2
		d_3^-	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
$P_3:$	$w_{3,j}^{-z_{3,j}}$		-1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	$z_3 = 4$
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$		0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	$z_2 = 0$
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$		-17/2	0	0	-7/2	7/2	0	2	0	1	0	$z_1 = \frac{51}{2}$
$P_0:$	$w_{0,j}^{-z_{0,j}}$		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$z_0 = 0$

T^2 tablosunda, z_0 değeri:

$$z_0 = (7)(0) + (5/2)(0) + (10)(0) + (11/2)(0) + (4)(0) = 0$$

dır, aynı şekilde:

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = (0, 51/2, 0, 4) \text{ elde edilir.}$$

T^2 tablosunda görüldüğü gibi P_0 seviyesine ait simpleks kriterler A_2 için 1'e eşit ve tüm başka değişkenler için sıfırdır. Böylece z_0 optimuma ulaşmıştır. T^2 tablosunda A_2 sütunun, P_0 seviyesine ait tüm ağırlıkları ve simpleks kriterleri de silinmektedir.

Şimdi en yüksek öncelik seviyesine geçelim. Yani P_1 seviyesinde olan amaç fonksiyonunun minimizasyonu aranır. P_1 seviyesi için T^2 tablosuna bakarak x_1 , E_2 sütunları, seçilebilen pivot sütunlardır. Çünkü x_1 için; $w_{1,1} - z_{1,1} = -17/2 < 0$ ve $w_{t,1} - z_{t,1} = 0 \quad \forall t < 1$ ($w_{0,1} - z_{0,1} = 0$ dır) ve E_2 için; $w_{1,4} - z_{1,4} = -7/2 < 0$ ve $w_{t,4} - z_{t,4} = 0 \quad \forall t < 1$ ($w_{0,4} - z_{0,4} = 0$ dır). $-17/2 < -7/2$ olduğundan x_1 sütunu seçilir ve x_1 tabana girmektedir. $\min\{7/2, \frac{5/2}{1/2}, 10/3, \frac{11/2}{5/2}, 4/1\} = 11/5$ olduğundan d_2^- tabandan çıkar. Böylece simpleks iterasyonu yapılarak T^3 tablosu elde edilir.

T^3 tablosu:

$P_3:$	$w_{3,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	
$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	L
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	
$u_{3,j} \ u_{2,j} \ u_{1,j} \ \vee$		x_1	x_2	s_1	e_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
		0	0	0	s_1	0	0	1	7/5	0	0	13/5
		0	0	0	x_2	0	1	0	-2/5	0	0	7/5
		0	0	2	d_1^-	0	0	0	13/5	1	-1	17/5
		0	0	0	x_1	1	0	0	-1/5	0	0	11/5
		1	0	0	d_3^-	0	0	0	1/5	0	0	9/5
$P_3:$	$w_{3,j} - z_{3,j}$	0	0	0	-1/5	0	0	2/5-2/5	0	3		$z_3 = 9/5$
$P_2:$	$w_{2,j} - z_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	$z_2 = 0$
$P_1:$	$w_{1,j} - z_{1,j}$	0	0	0	-26/5	0	2	17/5	-12/5	0	0	$z_1 = 34/5$

T^3 tablosunda olan çözüm:

$$(z_1, z_2, z_3) = (34/5, 0, 9/5), \quad \underline{x} = (x_1, x_2) = (11/5, 7/5),$$

$$d_1^- = 17/5, \quad d_3^- = 9/5, \quad s_1 = 13/5$$

$$d_1^+ = d_2^+ = d_2^- = d_3^+ = 0$$

Bu çözümde 1. ve 3. amaçların minimizasyonları verilmiştir. Fakat z_2 amaç fonksiyonunun minimizasyonuna ulaşılmıştır. P_1 seviyesi için devam ederiz. P_1 seviyesi için T^3 tablosuna bakarak E_2, d_2^+ sütunları, seçilebilen pivot sütunlardır. Çünkü; E_2 için $w_{1,4} - z_{1,4} = -26/5 < 0$ ve $w_{t,4} - z_{t,4} = 0$ $\forall t < 1$ ($w_{0,4} - z_{0,4} = 0$ dır.). d_2^+ için $w_{1,8} - z_{1,8} = -12/5 < 0$ ve $w_{t,8} - z_{t,8} = 0$ $\forall t < 1$ ($w_{0,8} - z_{0,8} = 0$ dır.). $-26/5 < -12/5$ olduğundan E_2 sütunu seçilir. Başka açıdan T^3 tablosuna bakarak eğer E_2 sütununu, pivot sütun olarak seçersek; ikinci seviyesi (P_2) değişmeyecek, birinci ve üçüncü seviyelerin durumları değişecektir. (Çünkü E_2 sütununda olan simpleks kriterler $P_1: -26/5, P_2: 0, P_3: -1/5$). Fakat eğer d_2^+ sütununu pivot sütun olarak seçersek; birinci, ikinci ve üçüncü seviyelerin durumları değişecektir (Çünkü d_2^+ sütununda olan simpleks kriterleri $P_1: -12/5, P_2: 3, P_3: -2/5$). Böylece E_2 tabana girecektir. $\min \{ \frac{13/5}{7/5}, \frac{17/5}{13/5}, \frac{9/5}{1/5} \} = \frac{17}{13}$ olduğundan d_1^- tabandan çıkacaktır. Bir simpleks iterasyonu yaparak T^4 tablosu elde edilir.

T^4 tablosu:

$P_3:$	$w_{3,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	L			
$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0				
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0				
$u_{3,j}$	$u_{2,j}$	$u_{1,j}$	V	x_1	x_2	s_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+		d_3^-	d_3^+	
0	0	0	s_1	0	0	1	0	-7/13	7/13	-2/13	2/13		0	0	10/13
0	0	0	x_2	0	1	0	0	2/13	-2/13	-5/13	5/13		0	0	25/13
0	0	0	E_2	0	0	0	1	5/13	-5/13	-6/13	6/13		0	0	17/13
0	0	0	x_1	1	0	0	0	1/13	-1/13	4/13	-4/13		0	0	32/13
1	0	0	d_3^-	0	0	0	0	-1/13	1/13	-4/13	4/13		1	-1	20/13
$P_3:$	$w_{3,j} - z_{3,j}$	0	0	0	0	1/13	-1/13	4/13	-4/13	0	3		$z_3 = 20/13$		
$P_2:$	$w_{2,j} - z_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	$z_2 = 0$			
$P_1:$	$w_{1,j} - z_{1,j}$	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	$z_1 = 0$			



T^4 tablosunda olan çözüm;

$$(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 20/13) , \underline{x} = (x_1, x_2) = (32/13, 25/13) ,$$

$$d_3^- = 20/13, E_2 = 17/13, S_1 = 10/13$$

$$d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_2^+ = d_3^+ = 0$$

Bu çözümde, P_1 ve P_2 seviyelerinde olan amaç fonksiyonlarının minimizasyonları verilmiştir. Ve bu çözüm için P_1 ve P_2 seviyelerinde olan d_1^-, d_1^+, d_2^- ve d_2^+ sapma değişkenleri, sıfır değerleri almışlardır. Yani bu çözüm P_1 ve P_2 seviyeleri için, optimal bir çözümdür ($d_1^- = d_1^+ = d_2^- = d_2^+ = 0, z_1 = 0, z_2 = 0$). Fakat P_3 seviyesinde olan amaç fonksiyonu minimuma ulaşmamıştır. O zaman simpleks işlemi, P_3 seviyesi için sürmektedir. T^4 tablosuna bakarak, d_1^+ için simpleks kriterleri:

$w_{3,6} - z_{3,6} = -1/13 < 0$ ve $w_{t,6} - z_{t,6} = 0 \quad \forall t < 3 (w_{2,6} - z_{2,6} = 0 \text{ ve } w_{1,6} - z_{1,6} = 0 \text{ dır})$. Ve d_2^+ için simpleks kriterler; $w_{3,8} - z_{3,8} = -4/13 < 0, w_{1,8} - z_{1,8} = 0$, fakat $w_{2,8} - z_{2,8} = 3 \neq 0$ dır. Böylece d_2^+ sütununu pivot sütun olarak seçilmez ve seçilebilen pivot sütun, d_1^+ sütunudur. d_1^+ tabana girecek, $\min \{ \frac{10/13}{7/13}, \frac{20/13}{1/13} \} = 10/7$ olduğundan S_1 tabandan çıkacaktır. Bir simpleks iterasyonu yaparak T^5 tablosu elde edilir.

T^5 tablosu:

$P_3:$	$w_{3,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	L				
$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0					
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0					
$u_{3,j} \ u_{2,j} \ u_{1,j} \ v$		x_1	x_2	S_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+					
		0	0	0	d_1^+	0	0	13/7	0	-1	1	-2/7	2/7	0	0	10/7
		0	0	0	x_2	0	1	2/7	0	0	0	-3/7	3/7	0	0	15/7
		0	0	0	E_2	0	0	5/7	1	0	0	-4/7	4/7	0	0	13/7
		0	0	0	x_1	1	0	1/7	0	0	0	2/7	-2/7	0	0	18/7
		1	0	0	d_3^-	0	0	-1/7	0	0	0	-2/7	2/7	1	-1	10/7
$P_3:$	$w_{3,j}^{-z_{3,j}}$	0	0	1/7	0	0	0	2/7	-2/7	0	3	$z_3=10/7$				
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	$z_2=0$				
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	0	0	0	0	2	0	1	0	0	0	$z_1=0$				

T^5 tablosunda olan çözüm:

$$(z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 10/7), \underline{x} = (x_1, x_2) = (18/7, 15/7),$$

$$E_2 = 13/7, \quad d_1^+ = 10/7, \quad d_3^- = 10/7$$

$$d_1^- = d_2^+ = d_2^- = d_3^+ = 0$$

Şeklinde verilmektedir. Bu çözüm; optimal çözümdür. Çünkü 1. ve 2. öncelik seviyelerinde olan amaç fonksiyonları optimuma ulaşmışlardır. Eğer d_2^+ tabana girerse; 3. seviyesinde olan amaç fonksiyonu daha başarılı olacak, fakat d_2^+ tabana girdiğinde 2. seviyesi için daha kötü sonuçlar elde edilecek (Yani 2. amaç fonksiyonunun optimallliği bozulacaktır). Bu durumda işleme devam etmemeliyiz. Ve problemimizin optimal çözümü $\underline{x} = (18/7, 15/7)$ şeklinde olur.

Notasyon: H.P probleminde, genellikle daha yüksek öncelikli olan hedefler, daha iyi şekilde gerçekleşmektedir.

Özel durumlar:

1- Uygun çözümler yok:

Bu durumda yapay amaç fonksiyonu (Yapay değişkenlere bağlı, P_0 öncelik seviyesinde olan amaç fonksiyonudur) için $w_{0,j} - z_{0,j} < 0$ sağlayan bir simpleks kriteri yoktur ve aynı zamanda $z_0 \neq 0$ dır.

2- Primalin dejenerelik durumu:

Eğer Algoritmanın adımlarından birinde sağ tarafın vektörü sıfır bir eleman içerse; primalin dejenerelik (yozlaşmış) durumu olur.

Not: Bildiğimiz gibi sağ tarafın vektörü $\underline{L} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ c_1 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}$ sek-

linde verilmiştir.

3- Dualin dejenerelik durumu:

Eğer algoritmanın adımlarından birinde, tüm öncelik seviyeleri için sıfır simpleks kriterilerle verilen en az bir ta-

ne taban dışı değişken varsa; dualın dejenerelik durumu olur. Yani eğer bir tabloda j.değişken hem taban dışı değişken hem de simpleks kriterleri $w_{k,j} - z_{k,j} = 0$, ($k = 1, 2, \dots, r$) ise; dualın dejeneresi vardır.

4- Alternatif optimal çözümler:

Bir çözüm için H.P probleminin optimallik şartı sağlandığında taban dışında ($\forall k$) $w_{k,j} - z_{k,j} = 0$ 'ı gerçekleyen değişkenler varsa, bir tanesi tabana alınarak yeni bir çözüm elde edilir. Amaçların yine aynı optimal değerleri aldıkları bu çözüme "Alternatif çözüm" denir.

5- Sınırsız optimal çözümleri:

Aşağıdaki şartlar oluşursa optimal çözüm sınırsızdır:

a) Verilen tabloda tüm amaçlar optimuma ulaşmışlar (Yani $w_{k,j} - z_{k,j} \geq 0$ ($\forall j, k$) optimallik şartı sağlanmıştır.)

b) Bu tabloda, j. değişken diyelim, hem taban dışı değişken, hem de o'nun için tüm simpleks kriterleri $w_{k,j} - z_{k,j} = 0$, $k = 1, \dots, r$ (dualın dejenerelik durumu) şeklinde bir değişken vardır.

c) j.sütununda pivot elemanı bulunamaz (j.sütununun tüm elemanları ≤ 0 dır.).

Yukarıda gösterilen durumlar şu örnekte görülebilir:

Örnek 2.2.3:

$$P: \min P_1 [d_1^-] + P_2 [d_2^- + d_3^-]$$

$$x_1 \geq 1$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 3$$

$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 3$$

$$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 3$$

$$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

veya bu şekildedir:

$$P: \min P_0[A_1 + A_2] + P_1[d_1^-] + P_2[d_2^- + d_3^-]$$

$$x_1 - E_1 + A_1 = 1$$

$$x_2 - E_2 + A_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 3$$

$$x_1 + d_2^- - d_2^+ = 3$$

$$x_2 + d_3^- - d_3^+ = 3$$

$$x_1, x_2, E_1, E_2, A_1, A_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

Başlangıç tablosu aşağıdaki gibidir:

Tablo T¹: (Başlangıç tablosu): $P_0 \gg P_1 \gg P_2$

$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0			
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	L		
$P_0:$	$w_{0,j}$	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0			
$u_{2,j} u_{1,j} u_{0,j}$		V	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+		
0	0	1	A_1	(1)	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	
0	0	1	A_2	0	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	2	
0	1	0	d_1^-	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	3	
1	0	0	d_2^-	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	3	
1	0	0	d_3^-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	3
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	z_2^{-6}	
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	z_1^{-3}	
$P_0:$	$w_{0,j}^{-z_{0,j}}$	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z_0^{-3}	



(2.2.2) Örneğindeki gibi yaparsak, şu tablolar elde edilir:

T^2 tablosu:

$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	L		
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0			
$P_0:$	$w_{0,j}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0			
$u_{2,j} u_{1,j} u_{0,j}$		V	x_1	x_2	E_1	E_2	A_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+		
0	0	0	x_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	
0	0	1	A_2	0	(1)	0	-1	1	0	0	0	0	0	2	
0	1	0	d_1^-	0	1	1	0	0	1	-1	0	0	0	2	
1	0	0	d_2^-	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	2	
1	0	0	d_3^-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	3
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	$z_2=5$	
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$z_1=2$	
$P_0:$	$w_{0,j}^{-z_{0,j}}$	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$z_0=2$	



T^3 tablosu:

$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	L
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	$u_{2,j}$ $u_{1,j}$ V	x_1	x_2	E_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	0 0 x_1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0 0 x_2	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
	0 1 d_1^-	0	0	(1)	1	1	-1	0	0	0	0	0
	1 0 d_2^-	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	2
	1 0 d_3^-	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	1
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	0	0	-1	-1	0	0	0	1	0	1	$z_2=3$
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	0	0	-1	-1	0	1	0	0	0	0	$z_1=0$



T^4 tablosu:

$P_2:$	$w_{2,j}$	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	L
$P_1:$	$w_{1,j}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
	$u_{2,j}$ $u_{1,j}$ V	x_1	x_2	E_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	0 0 x_1	1	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	1
	0 0 x_2	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
	0 0 E_1	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
	1 0 d_2^-	0	0	0	-1	-1	(1)	1	-1	0	0	2
	1 0 d_3^-	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	1
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$	0	0	0	0	1	-1	0	1	0	1	$z_2=3$
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$z_1=0$



T^5 tablosu:

$P_2:$	$w_{2,j}$		0	0	0	0	0	0	1	0	1	0		
$P_1:$	$w_{1,j}$		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	L	
	$u_{2,j}$	$u_{1,j}$	V	x_1	x_2	E_1	E_2	$\bar{d}_1$	d_1^+	$\bar{d}_2$	d_2^+	$\bar{d}_3$	d_3^+	
	0	0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	3
	0	0	x_2	0	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	E_1	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	2
	0	0	d_1^+	0	0	0	-1	-1	1	1	-1	0	0	2
	1	0	d_3^-	0	0	0	(1)	0	0	0	0	1	-1	1 →
$P_2:$	$w_{2,j}^{-z_{2,j}}$			0	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	$z_2=1$
$P_1:$	$w_{1,j}^{-z_{1,j}}$			0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$z_1=0$



T^6 tablosu:

$P_2:$	$w_{2,j}$		0	0	0	0	0	0	1	0	1	0		
$P_1:$	$w_{1,j}$		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	L	
	$u_{2,j}$	$u_{1,j}$	V	x_1	x_2	E_1	E_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	
	0	0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	3
	0	0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-1	3
	0	0	E_1	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	2
	0	0	d_1^+	0	0	0	0	-1	1	1	-1	1	-1	3
	0	0	E_2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	1
$P_2:$	$w_{2,j}$	$^{-z_{2,j}}$		0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	$z_2=0$
$P_1:$	$w_{1,j}$	$^{-z_{1,j}}$		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$z_1=0$

Yukarıdaki tablolar şöyle açıklanabilir:

T^3 tablosunda, primal uygun çözümü gösterilmiş, T^4 tablosunda, , 1.öncelik seviyesinde (P_1) olan amaç fonksiyonu optimuma ulaşmış ve T^6 tablosunda, 2.öncelik seviyesinde (P_2) olan amaç fonksiyonu optimuma ulaşmıştır. T^3 ve T^4 tablolarında primalin dejenerelik durumu görülür (sağ tarafın vektörünün 3. elemanı sıfırdır), T^4 tablosunda dualın dejenerelik durumu görülür (E_2 taban dışı değişken ve E_2 sütununda olan tüm simpleks kriterler sıfırdır), aynı şekilde T^5 tablosunda, d_2^+ değişkeni, hem taban dışı değişken hem de onun simpleks kriterleri (P_1 ve P_2 için) sıfır olduğundan dualın dejenerelik durumu vardır. T^6 tablosunda olan çözüm, optimal çözümdür. T^6 tablosunda yine dualın dejeneresi karşımıza çıkar [d_2^+ ve d_3^+ taban dışı değişkenler için tüm simpleks kriterleri sıfırdır]. T^6 tablosunda, sınırsız alternatif optimal çözümler vardır. Çünkü d_2^+ ve d_3^+ taban dışı değişkenler için tüm simpleks kriterleri sıfırdır (dualın dejenerelik durumu) ve aynı zamanda d_2^+ ve d_3^+ sütunlarında hiç bir pivot elemanı yoktur.

3. BÖLÜM

3. ETKİLEŞİMLİ HEDEF PROGRAMLAMA (EHP)

İki amaçtan daha fazla olduğunda, değiş-tokuş oranları zor bir şekilde elde edilir. Fakat karar varici; başarı seviyesinde iki amaç aralarındaki değiş-tokuş (trade-off)u kolayca tayin edebilmektedir. Böylece değiş-tokuşların ardılı boyunca, fayda fonksiyonuna gelen düzeltme, optimizasyon etkileşimli tekniği kullanmakla yapılabilir (2, sh:104).

Aşağıdaki HP modelini alalım:

$$\left. \begin{aligned} \min \underline{a} &= \{a_1(\underline{d}^-, \underline{d}^+), a_2(\underline{d}^-, \underline{d}^+), \dots, a_k(\underline{d}^-, \underline{d}^+)\} \\ g_i(\underline{x}) + d_1^- - d_1^+ &= b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ f_i(\underline{x}) + d_{m+i}^- - d_{m+i}^+ &= G_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \\ \underline{d}^-, \underline{d}^+ &\geq 0, d_i^- \cdot d_i^+ = 0, \quad \forall i \end{aligned} \right\} (3.1)$$

X , m mutlak kısıtlarından (amaçlarından) oluşturulan bölgedir. Karar verici, amaçların azalmamasını tercih etmektedir. Yani $\underline{d}^+$ sapma değişkenlerinin minimizasyonuna gerek yoktur. Mutlak kısıtları gerçekleştirmiş varsayarak (3.1) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \min \underline{a} &= \{h_1(\underline{d}^-), h_2(\underline{d}^-), \dots, h_{k-1}(\underline{d}^-)\} \\ \underline{x} &\in X \\ f_i(\underline{x}) + d_i^- - d_i^+ &= G_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} (3.2)$$

$$\underline{d}^-, \underline{d}^+ \geq 0, \underline{d}_i^-, \underline{d}_i^+ = 0, \forall_i$$

Öncelik seviyelerine göre, mutlak olmayan (nonabsolutive) amaçlarına ait ağırlıkların kullanılmasıyla (3.2) şu şekilde yazılabilir:

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^s w_i \underline{d}_i^- \\ \underline{x} \in X \\ f_i(\underline{x}) + \underline{d}_i^- - \underline{d}_i^+ = G_i, \quad i = 1, 2, \dots, s \\ \underline{d}^-, \underline{d}^+ \geq 0, \underline{d}_i^-, \underline{d}_i^+ = 0 \quad \forall_i \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Öyleyse w_i ; i 'inci amacın ağırlığı olmak üzere (3.3)'te yazılan hedef programlama formülasyonuna "tek taraflı" [bir-taraf/one-sided] hedef programlama denir, çünkü minimizasyonu sadece $\underline{d}_i^-$ sapma değişkenleri için alınmıştır. (3.3)'ten $\underline{d}^- = \underline{G} - \underline{f}(\underline{x}) + \underline{d}^+$ yazılabilir. $\underline{G} = (G_1, G_2, \dots, G_s)$ kısıtların vektörü, $\underline{d}^-$ minimizasyonunda ihmal edilebilir. O zaman (3.3)'deki amaç fonksiyonu şu şekilde:

$$\min \underline{w} \cdot (-\underline{f}(\underline{x}) + \underline{d}^+)$$

$$\text{veya:} \quad \max \underline{w} \cdot (\underline{f}(\underline{x}) - \underline{d}^+)$$

$$\text{yada:} \quad \max U[\underline{f}(\underline{x})] \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max U(f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_s(\underline{x})) \\ \underline{x} \in X \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

U , artan, ayrılabilen fayda fonksiyonu olduğundan ise;

$$U[\underline{f}(\underline{x})] = U_1[f_1(\underline{x})] + \dots + U_s[f_s(\underline{x})] .$$

Ve $f_j \geq G_j$ sağlayan birimleri için faydada olan marjinal fazlası sıfırdır.

Yani;

$$f_j \geq G_j \quad \text{için} \quad \frac{\partial U}{\partial f_j} = 0 \quad \text{dır. (2, sh:122,123).}$$

(3.4) probleminin çözülebilmesi için, Frank-wolfe yöntemi kullanılır. Bu yöntemin kullanılması için şu koşullar sağlanmalıdır:

- 1) X kısıtlar kümesi konveks (dış bükey) olmalıdır.
- 2) $U(\underline{f})$, $\underline{x}$ üzerinde diferansiyeli alınabilen (türetilen) ve konkav (iç bükey) bir fonksiyondur.
- 3) Her f_i , konkav fonksiyondur.
- 4) $\underline{x}^i = i$ 'inci iterasyonda olan $\underline{x}$, $f_1(\underline{x}) = \text{referans amaç fonksiyonu olmak üzere; } \underline{x}^i$ civarında $\frac{\partial U}{\partial f_1} > 0$ (marjinal pozitif faydası).
- 5) $U(\underline{f})$ artan, ayrılabilen fayda fonksiyonu olarak alınır.

- 6) $f_j \geq G_j$ için $\frac{\partial U}{\partial f_j} = 0$ koşulunu sağlamak üzere, G_j seçilmelidir.

Algoritma:

(3.4) problemin en uygun çözümünü bulmak için, Frank-Wolfe algoritması şu şekilde açıklanabilir.

0. Adım:

$\underline{x}^i \in X$ başlangıç noktasını seç. $i = 1$ koy.

1. Adım:

Aşağıdaki yön bulma probleminin optimal çözümü $\underline{y}^i$ belirle:

$$\left. \begin{aligned} \min \sum_{j=1}^s w_j^i d_j^- \\ \underline{y}^i \in X \\ f_j(\underline{y}^i) + d_j^- - d_j^+ = G_j, \quad j = 1, 2, \dots, s \\ \underline{d}^-, \underline{d}^+ \geq 0, \quad d_j^- \cdot d_j^+ = 0, \quad v_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Bundan sonra; $\underline{z}^i = \underline{y}^i - \underline{x}^i$ koy.

2. Adım:

Aşağıdaki Adım büyüklüğü probleminin optimal değeri t^i belirle:

$$\left. \begin{aligned} \max U(f_1(\underline{x}^i + t^i \underline{z}^i), \dots, f_s(\underline{x}^i + t^i \underline{z}^i)) \\ 0 \leq t^i \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^i + t^i \underline{z}^i, \quad i = i+1 \text{ koyarak 1. adıma dön.}$$

$$\underline{x}^i = \underline{x}^{i+1} \text{ olduğunda ; dur, optimal çözüme ulaşılmıştır.}$$

Bu Algoritmayı şu şekilde yorumlayabiliriz: algoritma; ilk başta $\underline{x}^i$ noktasından hareket etmek için en iyi bir yön belirlemektedir (Adım 1). Bundan sonra karar verici; bu yönde olan hareketi nereye kadar uzaklaşacağını sormaktadır (Adım 2).

(3.4) Probleminin iyileştirilen çözümü $\underline{x}^i$, iterasyonların artmasıyla (i artıkça) optimal çözüme yaklaşmaktadır.

Yönü belirlemek için şu açıklama verilir:

(3.5)'te görülen w_j^i ağırlıkları, f_1 referans fonksiyonu olmak üzere şu şekilde tanımlanır:

$$(i. \text{ iterasyon}) \quad w_j^i = \left(\frac{\partial U}{\partial f_j} \right) / \left(\frac{\partial U}{\partial f_1} \right), \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (3.7)$$

w_j^i ağırlıkları; $\underline{x}^i$ noktasında f_1, f_j aralarında karar vericinin değiş-tokuşunu açıklamaktadır.

w_j^i ağırlıklarının hesaplanması için, birinci amaç fonksiyonundaki değişiklik Δf_1 'i alınır, ve bu değişiklik j'inci amaç fonksiyonunun değişikliğine bölünür. Burada tüm diğer amaçlar sabit olarak alınmaktadır. Böylece (3.7) şu şekilde yazılır.

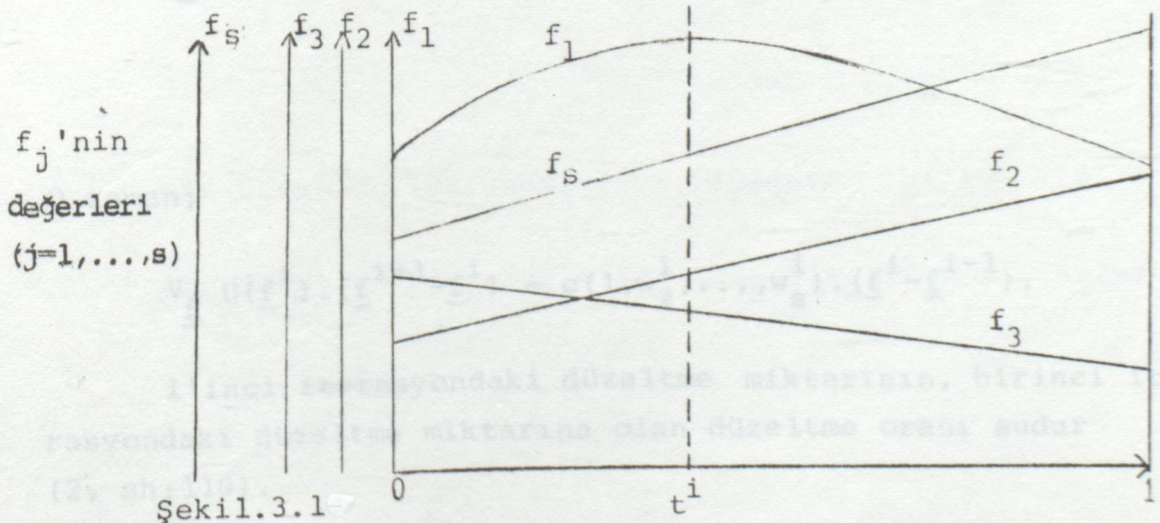
$$w_j^i = - \frac{\Delta f_1}{\Delta f_j} \quad (3.8)$$

Adım büyüklüğünün seçilmesi:

Adım büyüklüğü probleminde sadece t değişkeni vardır. ve bu değişken 0,1 arasında değerleri (0 ve 1 dahil) alır. Burada $f_j(\underline{x}^i + t\underline{z}^i)$, $j = 1, 2, \dots, s$ s tane amaç fonksiyonları; t 'nin fonksiyonları olarak değerlendirilebilir. Tablo (3-1)'de t değerlere karşı gelen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_s)$ değerlerinden biri, karar verici tarafından alınmasıyla o değere karşı gelen t 'nin değeri seçilir. Örneğin: Şekil (3-1)'de $t = t^i$ değeri seçilmiştir (2, sh:108).

(Tablo (3-1))

t	0	0.1	0.2		0.9	1
f_1						
f_2						
.						
.						
.						
f_s						



Nihai Ölçütü (bitiş Ölçütü):

Teorik olarak, $\underline{x}^i = \underline{x}^{i+1}$ olduğunda nihai ölçütü sağlamaktadır. Fakat bazı durumlarda bu ölçütü, az adımlarla sağlayamaz. $U(\underline{f})$ konkav bir fonksiyon olduğundan $U(\underline{f})$ fonksiyonu, her $\underline{f}^i$ noktasında onun hiper düzleminin teğetini (tanjant) hiç bir yerde aşamaz. Böylece:

$$U(\underline{f}) \leq U(\underline{f}^i) + \nabla_{\underline{f}} U(\underline{f}^i) \cdot (\underline{f} - \underline{f}^i), \quad \forall \underline{f}_i \quad \underline{f}_i \in S$$

veya:

$$U(\underline{f}) - U(\underline{f}^i) \leq \nabla_{\underline{f}} U(\underline{f}^i) \cdot (\underline{f} - \underline{f}^i), \quad \forall \underline{f}_i, \quad \underline{f}_i \in S$$

Böylece $\underline{f}^i$ 'den $\underline{f}^{i+1}$ 'e yapılan düzeltme miktarı $U(\underline{f}^{i+1}) - U(\underline{f}^i)$; $\nabla_{\underline{f}} U(\underline{f}^i) \cdot (\underline{f}^{i+1} - \underline{f}^i)$ ile belirlenmektedir. Bütün uygun noktalarda

$$\frac{\partial U}{\partial f_1} = c > 0 \quad \text{olduğu için, her } \underline{f}^i \in S \text{ noktasında } U \text{'nün}$$

eğimi şu şekilde verilir:

$$\nabla_{\underline{f}} U(\underline{f}^i) = c \cdot (1, w_2^i, \dots, w_s^i) \Big|_{\underline{f}^i}$$

O zaman;

$$\nabla_{\underline{f}} U(\underline{f}^i) \cdot (\underline{f}^{i+1} - \underline{f}^i) = c(1, w_2^i, \dots, w_s^i) \cdot (\underline{f}^i - \underline{f}^{i-1}).$$

i 'inci iterasyondaki düzeltme miktarının, birinci iterasyondaki düzeltme miktarına olan düzeltme oranı şudur (2, sh:110).

$$\frac{\Delta^i}{\Delta^1} = \frac{c.(1, w_2^i, \dots, w_s^i) \cdot (\underline{f}^i - \underline{f}^{i-1})}{c.(1, w_2^1, \dots, w_s^1) \cdot (\underline{f}^1 - \underline{f}^0)} \quad (3.9)$$

Burada c bilinmeyi (3.9)'dan kolayca çıkar. Böylece:

$$\frac{\Delta^i}{\Delta^1} = \frac{\underline{w}^i \cdot (\underline{f}^i - \underline{f}^{i-1})}{\underline{w}^1 \cdot (\underline{f}^1 - \underline{f}^0)}$$

$$\underline{w}^i = (1, w_2^i, \dots, w_s^i)$$

$$\underline{w}^1 = (1, w_2^1, \dots, w_s^1)$$

Böylece nihai ölçütü şu şekilde belirleyebiliriz:

$$\left. \begin{array}{l} i > 1 \text{ için eğer } \frac{\Delta^i}{\Delta^1} \leq \alpha \text{ ise; sona ulaşılır.} \\ \alpha = \text{ verilen belli bir değerdir.} \end{array} \right\}$$

Örnek (3.1): $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ olmak üzere:

Hedefler:

$$\max f_1(\underline{x}) = -0.225x_1 - 2.2x_2 - 0.8x_3 - 0.1x_4 - 0.05x_5 - 0.26x_6$$

$$(\text{Hedef : } f_1(\underline{x}) = -2.2)$$

$$\max f_2(\underline{x}) = -10x_1 - 20x_2 - 120x_3 \quad (\text{Hedef: } f_2(\underline{x}) = -17)$$

$$\max f_3(\underline{x}) = -24x_1 - 27x_2 - 15x_4 - 11x_5 - 52x_6 \quad (\text{Hedef : } f_3(\underline{x}) = -150)$$

Kısıtlar:

$$g_1(\underline{x}) = 720x_1 + 107x_2 + 7080x_3 + 134x_5 + 1000x_6 \geq 5000$$

$$g_2(\underline{x}) = 0.2x_1 + 10.1x_2 + 13.2x_3 + 0.75x_4 + 0.15x_5 + 1.2x_6 \geq 12.5$$

$$g_3(\underline{x}) = 344x_1 + 460x_2 + 1040x_3 + 75x_4 + 17.4x_5 + 240x_6 = 2500$$

$$g_4(\underline{x}) = 18x_1 + 151x_2 + 78x_3 + 2.5x_4 + 0.2x_5 + 4x_6 = 63$$

$$g_5(\underline{x}) = x_1 \leq 6.0$$

$$g_6(\underline{x}) = x_2 \leq 1.0$$

$$g_7(\underline{x}) = x_3 \leq 0.25$$

$$g_8(\underline{x}) = x_4 \leq 10.0$$

$$g_9(\underline{x}) = x_5 \leq 10.0$$

$$g_{10}(\underline{x}) = x_6 \leq 4.0$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

X, Mutlak kısıtlarından oluşturulan uygun bölge olmak üzere Hedef programlama problemi şu şekilde yazılabilir:

$$f_1(\underline{x}) + d_1^- - d_1^+ = -2.2$$

$$f_2(\underline{x}) + d_2^- - d_2^+ = -17$$

$$f_3(\underline{x}) + d_3^- - d_3^+ = -150$$

$$\underline{x} \in X$$

1. İterasyon:

0. Adım : $\underline{x}^1 \in X$ başlangıç noktasının seçimi:

$\underline{x}^1 = (3.0, 0.5, 0.15, 5.0, 5.0, 3.0)$ noktasını seçelim:

$i = 1$ koy.

1. Adım: Düzeltme yönünün belirlenmesi:

a) Ağırlıkların hesaplanması:

Başlangıç noktasında amaçların değerleri:

$$f_1(\underline{x}^1) = -0.225(3.0) - 2.2(0.5) - 0.8(0.15) - (0.1)(5.0) - (0.5)(5.0) - (0.26)(3.0)$$

$$f_1(\underline{x}^1) = -3.43$$

$$f_2(\underline{x}^1) = -10(3.0) - 20(0.5) - 120(0.15) = -58$$

$$f_3(\underline{x}^1) = -24(3.0) - 27(0.5) - 15(5.0) - 1.1(5.0) - 52(3.0) = -322$$

$$\underline{f}^0 = (f_1(\underline{x}^1), f_2(\underline{x}^1), f_3(\underline{x}^1)) \text{ elde edilir.}$$

w_i^1 ($i = 2, 3$) Ağırlıklarının belirlenmesi için karar verici, özdeşlik amacıyla şu değiş-tokuşlar göstermektedir.

f_1 ve f_2 için:

$$(-3.43, -58, -322) \sim (-3.43 + 0.5, -58 - 20, -322)$$

f_1 ve f_3 için:

$$(-3.43, -58, -322) \sim (-3.43 + 0.5, -58, -322 - 30)$$

0 zaman:

$$w_1^1 = 1$$

$$w_2^1 = - \frac{\Delta f_1}{\Delta f_2} = - \frac{0.5}{-20} = 0.025$$

$$w_3^1 = - \frac{\Delta f_1}{\Delta f_3} = - \frac{0.5}{-30} = 0.017$$

b) y^1 ve z^1 optimal çözümlerinin hesaplanması:

Burada (3.5)'te gösterilen amaç fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$\sum_{j=1}^3 w_j^1 d_j^- = w_1^1 d_1^- + w_2^1 d_2^- + w_3^1 d_3^-$$

$$= 1(d_1^-) + 0.025 d_2^- + 0.017 d_3^-$$

Aşağıdaki Lineer programlama (LP) probleminin çözülmesiyle y^1 'in ve d^- 'nin değerleri elde edilir.

$$\min d_1^- + 0.025 d_2^- + 0.017 d_3^-$$

$$y^1 \in X$$

$$f_1(y^1) + d_1^- - d_1^+ = -2.2$$

$$f_2(y^1) + d_2^- - d_2^+ = -17$$

$$f_3(y^1) + d_3^- - d_3^+ = -150$$

$$d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_1^+, d_2^+, d_3^+ \geq 0, \quad d_j^- \cdot d_j^+ = 0, \quad v_j$$

Veya:

$$\min d_1^- + 0.025 d_2^- + 0.017 d_3^-$$

$$y^1 \in X$$

$$f_1(y^1) + d_1^- \geq -2.2$$

$$f_2(y^1) + d_2^- \geq -17$$

$$f_3(y^1) + d_3^- \geq -150$$

$$d_1^-, d_2^-, d_3^- \geq 0$$

Optimal çözümü şudur:

$$y^1 = (y_1^1, y_2^1, y_3^1, y_4^1, y_5^1, y_6^1) = (5.12, 0.66, 0.25, 0, 10, 0),$$

$$d^- = (d_1^-, d_2^-, d_3^-) = (1.11, 77.44, 1.77)$$

Böylece; düzeltme yönü z^1 :

$$z^1 = y^1 - x^1 = (2.12, 0.16, 0.1, -5, 5, -3) \text{ şeklindedir.}$$

2. Adım. Adım büyüklüğünü belirlemek (t^1):

t^1 'in belirlenmesi için t değerlerine göre $f_j(x^1 + tz^1)$ değerleri hesaplanmaktadır. Böylece tablo 1 elde edilir.

Tablo.1:

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_1	-3.43	-3.40	-3.34	-3.35	-3.33	-3.31
f_2	-58	-65.3	-72.6	-79.8	-87.1	-94.4
f_3	-322	-287.9	-253.9	-219.8	-185.8	-151.8

Tablonun değerleri şu şekilde hesaplanmıştır. Mesela $t = 0.2$ için:

$$\begin{aligned} f_1(\underline{x}^1 + (0.2)\underline{z}^1) &= f_1[(3.0, 0.5, 0.15, 5.0, 5.0, 3.0) + \\ &\quad (0.2)(2.12, 0.16, 0.1, -5, 5, -3)] \\ &= f_1(3.424, 0.532, 0.17, 4, 6, 2.4) = -3.40 \end{aligned}$$

$$f_2(\underline{x}^1 + (0.2)\underline{z}^1) = (-10)(3.424) - 20(0.532) - 120(0.17) = -65.3$$

$$f_3(\underline{x}^1 + (0.2)\underline{z}^1) = f_3(3.424, 0.532, 0.17, 4, 6, 2.4) = -287.9$$

Aynı şekilde $t = 0, 0.4, 0.6, 0.8$ ve 1 değerlerine karşı gelen $f_j(\underline{x}^1 + t\underline{z}^1)$ değerleri hesaplanmıştır. En iyi çözüm karar verici tarafından seçilir. Karar vericinin, birinci iterasyonda $\underline{f}^1 = (-3.35, -79.8, -219.8)$ çözümü en iyi çözüm olarak seçtiğini farz edelim. Böylece $t^1 = 0.6$ dır.

Şimdi:

$$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 + t^1 \underline{z}^1 = (4.27, 0.60, 0.21, 2, 8, 1.2)$$

$$i = i+1 = 2$$

koyarak 2. iterasyona geçelim.

2. Iterasyon:

1. Adım. Düzeltme yönünün belirlenmesi:

a) Ağırlıkların hesaplanması:

Tablo (1)'e bakarak $\underline{f}^1 = (-3.35, -79.8, -219.8)$ başarı se-

viyesinde t^1 'in değerinin artmasıyla f_1, f_3 değerlerinin arttığı görülür, aksi halde t^1 'in artmasıyla f_2 'nin değeri azalmaktadır. f^1 civarında f_2 amacı, f_1 ve f_3 amaçları çeliştiği için karar verici, referans amacı f_1 'den f_2 'e değiştirecektir. f^1 seviyesinde karar verici aşağıdaki değiş-tokuşlar vermektedir.

f_2 ve f_1 için:

$$(-3.35, -79.8, -219.8) \sim (-3.35+0.5, -79.8-15, -219.8)$$

f_2 ve f_3 için:

$$(-3.35, -79.8, -219.8) \sim (-3.35, -79.8-15, -219.8+20)$$

0 zaman:

$$w_1^2 = - \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = - \frac{-15}{0.5} = 30$$

$$w_2^2 = 1$$

$$w_3^2 = - \frac{\Delta f_2}{\Delta f_3} = - \frac{-15}{20} = 0.75$$

Böylece ağırlıkların vektörü,

$$\underline{w}^2 = (30, 1, 0.75)$$

$$\text{veya: } \underline{w}^2 = (30/30, 1/30, 0.75/30) = (1, 0.033, 0.025)$$

$$\text{böylece } \underline{w}^2 = (w_1^2, w_2^2, w_3^2) = (1, 0.033, 0.025)$$

b) y^2 ve z^2 'nin hesaplanması:

Burada (3.5)'te gösterilen amaç fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 w_j^2 d_j^- &= w_1^2 d_1^- + w_2^2 d_2^- + w_3^2 d_3^- \\ &= d_1^- + 0.033 d_2^- + 0.025 d_3^-\end{aligned}$$

Aşağıdaki LP Probleminin çözülmesiyle y^2 'nin ve d^- 'nin değerleri elde edilir:

$$\min d_1^- + 0.033 d_2^- + 0.025 d_3^-$$

$$y^2 \in X$$

$$f_1(y^2) + d_1^- \geq -2.2$$

$$f_2(y^2) + d_2^- \geq -17$$

$$f_3(y^2) + d_3^- \geq -150$$

$$d_1^-, d_2^-, d_3^- \geq 0$$

Optimal çözümü şudur:

$$y^2 = (5.12, 0.66, 0.25, 0, 10, 0),$$

$$d^- = (d_1^-, d_2^-, d_3^-) = (1.11, 77.44, 1.77)$$

y^2 çözümü y^1 çözüme eşittir. Böylece:

$$z^2 = y^2 - x^2 = (0.85, 0.06, 0.04, -20, 2, -1.2)$$

2. Adım. t^2 'nin belirlenmesi:

t 'nin değerlerine karşı gelen $f_j(\underline{x}^2 + t\underline{z}^2)$ değerleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 2:

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_1	-3.35	-3.34	-3.33	-3.32	-3.31	-3.31
f_2	-79.8	-82.8	-85.1	-88.6	-91.5	-94.4
f_3	-219.8	-206.2	-192.6	-178.9	-165.3	-151.8

Karar verici, 2. iterasyonda $\underline{f}^2 = (-3.34, -82.8, -206.2)$ çözümünü en iyi çözüm olarak seçmiştir. O zaman $t^2 = 0.2$ dir.

2. iterasyondaki düzeltme miktarının, 1. iterasyondaki düzeltme miktarına olan düzeltme oranı şudur:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2}{\Delta^1} &= \frac{(1, w_2^2, w_3^2) (\underline{f}^2 - \underline{f}^1)}{(1, w_2^1, w_3^1) (\underline{f}^1 - \underline{f}^0)} \\ &= \frac{(1, 0.033, 0.025) (-3.34 + 3.35, -82.8 + 79.8, -206.2 + 219.8)^T}{(1, 0.025, 0.017) (-3.35 + 3.34, -79.8 + 58, 219.8 + 322)^T} \\ &= \frac{0.25}{1.27} = 0.20 \end{aligned}$$

Eğer $\alpha = 0.15$ koyarsak, nihai ölçütü henüz sağlamamıştır. O zaman

$$\underline{x}^3 = \underline{x}^2 + t^2 \underline{z}^2 = (4.44, 0.61, 0.22, 1.6, 8.4, 0.96)$$

$i = i+1 = 3$ koyarak 3. iterasyona geçelim.

veya: 3. İterasyon:

1. Adım: Düzeltme yönünün belirlenmesi:

a) Ağırlıkların hesaplanması:

Tablo (2)'e bakarak $\underline{f}^2 = (-3.34, -82.8, -206.2)$ başarı seviyesinde, t^2 'nin değerinin artmasıyla f_1, f_3 değerlerinin arttığı görülür, aksi halde t^2 'nin artmasıyla f_2 'nin değeri azalmaktadır. $\underline{f}^2$ civarında f_2 amacı, f_1 ve f_3 amaçları çeliştiği için, referans amacı f_2 olmaktadır. $\underline{f}^2$ seviyesinde karar verici aşağıdaki değiş-tokuşları vermiştir:

f_2 ve f_1 için:

$$(-3.34, -82.8, -206.2) \sim (-3.34 - 0.025, -82.8 + 5, -206.2)$$

f_2 ve f_3 için:

$$(-3.34, -82.8, -206.2) \sim (-3.34, -82.8 + 5, -206.2 - 10)$$

O zaman:

$$w_1^3 = - \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1} = - \frac{5}{-0.025} = 200$$

$$w_2^3 = 1$$

$$w_3^3 = - \frac{\Delta f_2}{\Delta f_3} = - \frac{5}{-10} = 0.5$$

Böylece ağırlıklar vektörü;

$$\underline{w}^3 = (200, 1, 0.5)$$

veya;

$$\underline{w}^3 = (200/200, 1/200, 0.5/200)$$

$$= (1, 0.005, 0.0025)$$

b) $\underline{y}^3$ ve $\underline{z}^3$ 'ün hesaplanması:

Aşağıdaki LP problemini çözmesiyle $\underline{y}^3$ 'ün ve $\underline{d}^-$ 'nin değerleri elde edilir.

$$\min d_1^- + 0.005 d_2^- + 0.0025 d_3^-$$

$$\underline{y}^3 \in X$$

$$f_1(\underline{y}^3) + d_1^- \geq -2.2$$

$$f_2(\underline{y}^3) + d_2^- \geq -17$$

$$f_3(\underline{y}^3) + d_3^- \geq -150$$

$$d_1^-, d_2^-, d_3^- \geq 0$$

Optimal çözümü şudur:

$$\underline{y}^3 = (3.78, 0, 0.25, 10, 0, 0.79),$$

$$\underline{d}^- = (d_1^-, d_2^-, d_3^-) = (0.0559, 50.8, 131.8)$$

ve

$$\underline{z}^3 = \underline{y}^3 - \underline{x}^3 = (-0.63, -0.61, 0.03, 8.4, -8.4, -0.17)$$

2. Adım. t^3 'ün belirlenmesi:

t 'nin değerlerine karşı gelen $f_j(\underline{x}^3 + t\underline{z}^3)$ değerleri aşağı-

ğdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f ₁	-3.34	-3.12	-2.91	-2.67	-2.47	-2.26
f ₂	-82.8	-79.7	-76.7	-73.8	-70.8	-67.8
f ₃	-206.2	-220.7	-236.0	-251.3	-266.5	-281.7

Karar verici, 3. iterasyonda $\underline{f}^3 = (-2.91, -76.7, -236.0)$ çözümü en iyi çözüm olarak seçmiştir, o zaman $t^3 = 0.4$ tür.

3. Iterasyondaki düzeltme miktarının, 1. iterasyondaki düzeltme miktarına olan düzeltme oranı şudur:

$$\frac{\Delta^3}{\Delta^1} = \frac{(1, w_2^3, w_3^3)(\underline{f}^3 - \underline{f}^2)}{(1, w_2^1, w_3^1)(\underline{f}^1 - \underline{f}^0)}$$
$$= \frac{(1, 0.005, 0.0025)(\underline{f}^3 - \underline{f}^2)}{(1, 0.025, 0.017)(\underline{f}^1 - \underline{f}^0)} = 0.303$$

0.303 değeri $\alpha = 0.15$ değerinden daha büyüktür. Böylece:

$$\underline{x}^4 = \underline{x}^3 + t^3 \underline{z}^3 = (4.16, 0.37, 0.23, 4.96, 5.04, 0.89)$$

$$i = i+1 = 4$$

koyarak 4. iterasyona geçelim.

Veya: 4. Iterasyon: 3/50 , 1/50

1. Adım. Düzeltme yönünün belirlenmesi:

a) Ağırlıkların hesaplanması:

Tablo 3'e bakarak $f^3(-2.91, -76.7, -236.0)$ civarında, t^3 'ün değerinin artmasıyla f_1 ve f_2 değerlerinin arttığı görülür, buna zıd olarak t^3 'ün artmasıyla f_3 'ün değeri azalmaktadır. Böylece referans amacı f_2 'den f_3 'e değiştirilecektir. f^3 seviyesinde karar verici aşağıdaki değiş-tokuşları vermiştir.

f_3 ve f_1 için:

$$(-2.91, -76.7, -236) \sim (-2.91 - 0.3, -76.7, -236 + 15)$$

f_3 ve f_2 için:

$$(-2.91, -76.7, -236) \sim (-2.91, -76.7 - 5, -236 + 15)$$

O zaman;

$$\underline{w}^4 = (w_1^4, w_2^4, w_3^4)$$

$$w_1^4 = - \frac{\Delta f_3}{\Delta f_1} = - \frac{15}{-0.3} = 50$$

$$w_2^4 = - \frac{\Delta f_3}{\Delta f_2} = - \frac{15}{-5} = 3$$

$$w_3^4 = 1$$

Böylece ağırlıklar vektörü;

$$\underline{w}^4 = (50, 3, 1)$$

Veya; $\underline{w}^4 = (50/50, 3/50, 1/50)$

$$= (1, 0.06, 0.02)$$

b) $\underline{y}^4$ ve $\underline{z}^4$ 'ün hesaplanması:

Aşağıdaki LP probleminin çözülmesiyle $\underline{y}^4$ 'ün ve $\underline{d}^-$ 'nin değerleri elde edilir:

$$\min \underline{d}_1^- + 0.06 \underline{d}_2^- + 0.02 \underline{d}_3^-$$

$$\underline{y}^4 \in X$$

$$f_1(\underline{y}^4) + \underline{d}_1^- \geq -2.2$$

$$f_2(\underline{y}^4) + \underline{d}_2^- \geq -17$$

$$f_3(\underline{y}^4) + \underline{d}_3^- \geq -150$$

$$\underline{d}_1^-, \underline{d}_2^-, \underline{d}_3^- \geq 0$$

Optimal çözümü şudur:

$$\underline{y}^4 = (4.11, 0.14, 0.10, 10.0, 10.0, 0),$$

$$\underline{d}^- = (\underline{d}_1^-, \underline{d}_2^-, \underline{d}_3^-) = (0.613, 38.9, 113.42)$$

ve

$$\underline{z}^4 = \underline{y}^4 - \underline{x}^4 = (-0.05, -0.23, -0.13, 5.04, 4.96, -0.89)$$

2. Adım. $\underline{t}^4$ 'ün belirlenmesi:

$\underline{t}$ 'nin değerlerine karşı gelen $f_j(\underline{x}^4 + \underline{t}\underline{z}^4)$ değerleri aşağı-

ğıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 4.

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f_1	-2.91	-2.89	-2.87	-2.85	-2.83	-2.80
f_2	-76.6	-72.5	-68.3	-64.2	-60.0	-55.5
f_3	-236.0	-241.5	-247.0	-252.5	-258.0	-263.2

Karar verici, 4. İterasyonda $\underline{f}^4 = (-2.89, -72.5, -241.5)$ çözümü, en iyi çözüm olarak seçmiştir. O zaman $t^4 = 0.2$ dir.

4. İterasyondaki düzeltme miktarının, 1. İterasyondaki düzeltme miktarına olan düzeltme oranı şudur:

$$\frac{\Delta^4}{\Delta^1} = \frac{(1, w_2^4, w_3^4)(\underline{f}^4 - \underline{f}^3)}{(1, w_2^1, w_3^1)(\underline{f}^1 - \underline{f}^0)} = 0.128$$

0.128 değeri $\alpha = 0.15$ değerinden daha küçüktür. Böylece nihai ölçütü sağlamıştır. Ve son optimal çözümü:

$$\underline{x} = \underline{x}^5 = \underline{x}^4 + t^4 \underline{z}^4 \\ = (4.15, 0.32, 0.20, 6.0, 6.03, 0.71)$$

$$\underline{f} = \underline{f}^4 = (-2.89, -72.5, -241.5)$$

Yani problemimizin optimal çözümü şudur:

$$\underline{x} = (4.15, 0.32, 0.20, 6.0, 6.03, 0.71)$$

$$\underline{f} = (-2.89, -72.5, -241.5)$$

toplamı 2500 olarak görünür. O zaman öğrencilerin toplamı bütün okulların kapsayabileceği öğrencilerin toplamından 200 daha fazladır. Yani 200 öğrenci okullarda yer bulamayacaklar. Bu problem bazı özel okullarda da karşımıza çıkabilir. Her çocuk için eğitim fırsatı, bütün çocukları okullara alarak sağlanır. Bu problemle hedef programlama modelini kullanırsak

4. BÖLÜM

4.. HEDEF PROGRAMLAMA'NIN UYGULAMA ALANLARI

Hedef Programlama, Matematik Programlama teknikleri içinde uygulama alanı en geniş olan bir tekniktir. Yatırım kararlarında, eğitim alanlarında, üretim planlama, hastane yönetiminde (sermaye bütçeleme ve kaynak ataması probleminde) vs. başarıyla kullanılmaktadır. Aşağıda hedef programlama çalışmalarından birkaçı konusunda geniş bilgi verilmiştir.

4.1.1. Modelin hedefleri ve hedeflerin öncelikleri

4.1. Çok Kriterli Okulun Çalışma Modeli (13,sh:703-715)

Bu model kırsal bölgeler için yapılmıştır. Bir köye ait bölgenin altıya bölünmüş hali. Bu bölünmüş alanların her birinin alanı 3 mil karedir. Bölge dört okulu kapsar. Bu tasarımı Şekil(4.1)'de açıklanmıştır. Yıllık olarak her öğrenci için transport (taşımacılık) maliyeti ve her alandan her okul için, mil olarak, uzaklık Tablo(4.1)'de yazılmıştır. Tablo(4.1)'de de her okulun kapsayabileceği öğrencilerin sayısı (okulun kapasitesi), her alandaki öğrenci sayısı ve her alandan her okula giden öğrenci sayısı gösteren karar değişkenleri kapsar. Öğrencileri taşımak için, her alandan her okula otobüsle olan yolculuğa göre, en kısa yolla, uzaklıkları Tablo(4.1)'de yazılmıştır. Bu makalede Clarke-Surkis ve Heckman-Taylor yaklaşımları kullanılır. Tablo(4.1)'de yazılan maliyetler şu varsayımdandır; 1. mil için yıllık olarak her öğrencinin sabit transport maliyeti 10.00 \$ ve 1.milden fazla gelen her mil için sabit transport maliyetine 5 \$ eklenir. Tablo (4.1)'deki tüm öğrencilerin toplamı 2700, Okulların kapasitelerinin

toplamı 2500 olarak görünür. O zaman öğrencilerin toplamı bütün okulların kapsayabileceği öğrencilerin toplamından 200 daha fazladır. Yani 200 öğrenci okullarda yer bulamayacaklar. Bu problem bazı özel okullarda da karşımıza çıkabilir. Her çocuk için eğitim fırsatı, bütün çocukları okullara alarak sağlanır. Bu problemle hedef programlama modelini kullanırsak aşağıdaki maddeler oluşur:

- 1) Modelin hedeflerini ve önceliklerini belirlemek,
- 2) Karar değişkenlerini belirlemek,
- 3) Modelin kısıtlarını formülleştirmek,
- 4) Modelin çözümü ve onunla olan bağlantıları yorumlamak.

4.1.1. Modelin hedefleri ve hedeflerin öncelikleri

Okul çalışma problemi, sosyal, politik, ekonomik hedefler ve o hedeflere bağlantıları kapsar. Bu hedefler şöyledir;

- 1) Her çocuğun, bulunduğu bölgede (vilayette) eşit olarak eğitim fırsatı sağlamak.

1.Alan	2.Alan	3.Alan
A	C	
B		D
4. Alan	5. Alan	6. Alan

Şekil.(4.1) -Vilayetteki olan 6 alanları, 4 okulları gösterir. Burada her kesilmiş alan = 3 mil kare.

Tablo (4.1).

		mil olarak i alandan j okula olan mesafesi					
		Her öğrenci için yıllık olarak transport maliyeti					
Alan	Okul İrk	A	B	C	D	i alanda bulunan öğrencilerin toplamı	
1	Siyah (Black)	20 3 x_{b11}	45 8 x_{b12}	35 6 x_{b13}	55 10 x_{b14}	0	
	Beyaz (White)	20 3 x_{w11}	45 8 x_{w12}	35 6 x_{w13}	55 10 x_{w14}	390	
2	Siyah	25 4 x_{b21}	50 9 x_{b22}	10 0.5 x_{b23}	35 6 x_{b24}	3	
	Beyaz	25 4 x_{w21}	50 9 x_{w22}	10 0.5 x_{w23}	35 6 x_{w24}	437	
3	Siyah	55 10 x_{b31}	65 12 x_{b32}	10 1 x_{b33}	35 6 x_{b34}	0	
	Beyaz	55 10 x_{w31}	65 12 x_{w32}	10 1 x_{w33}	35 6 x_{w34}	546	
4	Siyah	25 4 x_{b41}	15 2 x_{b42}	45 8 x_{b43}	60 11 x_{b44}	9	
	Beyaz	25 4 x_{w41}	15 2 x_{w42}	45 8 x_{w43}	60 11 x_{w44}	425	
5	Siyah	15 2 x_{b51}	15 2 x_{b52}	30 5 x_{b53}	45 8 x_{b54}	351	
	Beyaz	15 2 x_{w51}	15 2 x_{w52}	30 5 x_{w53}	45 8 x_{w54}	37	
6	Siyah	45 8 x_{b61}	40 7 x_{b62}	35 6 x_{b63}	10 1 x_{b64}	447	
	Beyaz	45 8 x_{w61}	40 7 x_{w62}	35 6 x_{w63}	10 1 x_{w64}	55	
	Okul Kapasite- si	500	700	800	500	2500 2700	

2) Her çocuğun bulunduğu bölgede, ırk oranına göre, her okulda ırk dengesini sağlamak.

3) Transport Maliyetini (bölgeden okula ve okuldan bölgeye gidip gelen öğrencilerin taşıma maliyetini) minimize etmek.

4) Otobüste fazla zamanı süren transportlardan (yolculuklardan) uzak durmak gerekir.

5) Eğer vilayette olan öğrencilerin toplamı, okulların kapasitelerinin toplamını aşarsa, her okulda fazlalık dengesini sağlamalıyız.

6) Eğer vilayette olan öğrencilerin toplamı, okulların kapasitelerinin toplamından daha fazla ise; her okulun kapasitesinin alt sınırını kullanmaktan uzak durmalıyız.

Yukarıdaki hedefler çok yönlü amaçlar gösteriyor ve bu amaçlar aralarında çelişirler. Mesela ırk dengesinin amacı transport maliyetinin minimizasyonu ile direk olarak çelişiyor. Bu makalede 3 değişik hedef programlama modeli yapılmıştır. Tablo (4.2)'de her modelin hedefleri ve o hedeflerin öncelik seviyeleri gösterilir.

4.1.3- Modelin kısıtları

Hedef programlama modelinde genellikle iki çeşit kısıtlar vardır. Bunlar sistem (mutlak) ve hedef kısıtlarıdır. Sis-

Tablo(4.2)-(Değişik modellere öncelik yapı)

Hedefler	Model I	Model II	Model III
-Bütün öğrencileri kabul etmek	P_1	P_1	P_1
-Her okulun kapasitesinin alt sınırını kullanmaktan uzak durmak hedefi	P_2	P_2	P_2
-70:30 ırk dengesi hedefi	P_4	P_3	P_3
-Fazlalık dengesi hedefi	P_5	P_4	P_5
-Transport maliyetinin minimizasyon hedefi	$P_3(0)$	$P_5(35,010) \dots P_4(50,000)$	
-Transport süresinin 20 dakikayı aşmaması hedefi	P_6	P_6	P_6

$P_j = \text{öncelik seviyesinin ağırlığı } (P_j \gg P_{j+1})$

4.1.2- Karar değişkenleri

Okul çalışma probleminin amacı; her okula her alandan ve her ırktan kaç öğrenci gideceğini belirlemektir. Böylece karar değişkenleri x_{rij} şeklinde gösterilir. Burada r =ırk (race) [b = siyah(black), w = beyaz(white)], i = vilayette olan i alanı, j = okul. Karar değişkenleri tablo(4.1)'de görülebilir.

4.1.3- Modelin kısıtları

Hedef programlama modelinde genellikle iki çeşit kısıtlar vardır. Bunlar sistem (mutlak) ve hedef kısıtlarıdır. Sis-

tem kısıtları; genel çözümü bulmadan önce hayatın gerçeklerinden kısıtlar olarak bilinen kısıtlardır. Hedef kısıtları; problemin amaçlarını gösteren kısıtlardır.

Hedef programlama modelin amacı şöyledir; Sistem kısıtlarıyla belirlenen konveks bölgesine yaklaşabileceği kadar hedefleri meydana çıkarmak gereklidir. Bu amacı, hedeflerden olan negatif (d_i^-) veya pozitif (d_i^+) sapma, öncelik seviyesinin ağırlıklılarıyla (P_j) olan minimizasyonu ile elde edilir. Notasyonlar bu makalede kullanılmıştır. Okul çalışma modelinde hedef kısıtları şöyle gösterilebilir.

A. Eğitim fırsatı:

Her okulun kamu sisteminde birinci amacı; her çocuğu bulunduğu bölgede eğitim fırsatı vermektir. Böylece problemimizde, vilayette olan 4 okul yine bu vilayette olan tüm öğrencileri kapsamalıdır. Bu hedefin kısıtı;

Her okulda ırk dengesi, vilayette ırkın bulunduğu oranlara bağlıdır. Elimizde problemde, vilayetteki öğrencilerin 430'u siyah ve 470 beyaz olduğundan, eğitim fırsatı için (4.1) den yazılabilir.

$d^- = r$ ırkından, i alanından, vilayetteki 4 okullarda kabul edilmeyen çocukların sayısı.

$b_{ri} = i$ alanında r ırkından olan çocukların toplamı.

Eğitim fırsatı, d^- minimize ederek sağlanır. Problemimizde iki ırk ve vilayette 6 alan olduğundan, eğitim fırsatı için (4.1)'den 12 hedef kısıtları elde edilir.

$$\sum_{j=1}^4 x_{b1j} + d_1^- = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{b4j} + d_7^- = 9 \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{w1j} + d_2^- = 390 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{w4j} + d_8^- = 425 \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{b2j} + d_3^- = 3 \quad (3) \quad \sum_{j=1}^4 x_{b5j} + d_9^- = 351 \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{w2j} + d_4^- = 437 \quad (4) \quad \sum_{j=1}^4 x_{w5j} + d_{10}^- = 37 \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{b3j} + d_5^- = 0 \quad (5) \quad \sum_{j=1}^4 x_{b6j} + d_{11}^- = 447 \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^4 x_{w3j} + d_6^- = 546 \quad (6) \quad \sum_{j=1}^4 x_{w6j} + d_{12}^- = 55 \quad (12)$$

B.İrk dengesi:

Her okulda ırk dengesi, vilayette ırkın bulunduğu oranlara bağılıdır. Elimizde problemde, vilayetdeki öğrencilerin %30'u siyah (b) ve %70'i (w) beyaz'dır. Bu oranları şu tablodan çıkartabiliriz.

	Öğrenci	Oran	
Siyahların toplamı	810	% 30	$\leftarrow \frac{(810) \cdot (100)}{2700} = 30$
Beyazların toplamı	1890	% 70	$\leftarrow \frac{(1890) \cdot (100)}{2700} = 70$
Öğrencilerin toplamı	2700	% 100	

Böylece her okulda %30 siyah ve %70 beyaz olması gerekir. Her okul için, ırk dengesi hedefinin kısıtı şu şekilde açıklanabilir:

$$0.3 \sum_{i=1}^6 x_{wij} - 0.7 \sum_{i=1}^6 x_{bij} + d^- - d^+ = 0 \quad \text{her } j \text{ için} \quad (4.2)$$

Burada;

$d^- = 70:30$ ırk dengesi oranını aşan tüm siyah öğrencilerin sayısı.

$d^+ = 70:30$ ırk dengesi oranını aşan tüm beyaz öğrencilerin sayısı.

Her okul için d^- ve d^+ negatif ve pozitif sapmaları minimize ederek ırk dengesinin hedefi sağlanır. Problemde 4 okul olduğundan, ırk dengesinin hedefi için 4 kısıt elde edilecektir.

$$0.3 \sum_{i=1}^6 x_{wi1} - 0.7 \sum_{i=1}^6 x_{bi1} + d_{13}^- - d_{13}^+ = 0 \quad (13)$$

D. Transport zamanı

$$0.3 \sum_{i=1}^6 x_{wi2} - 0.7 \sum_{i=1}^6 x_{bi2} + d_{14}^- - d_{14}^+ = 0 \quad (14)$$

$$0.3 \sum_{i=1}^6 x_{wi3} - 0.7 \sum_{i=1}^6 x_{bi3} + d_{15}^- - d_{15}^+ = 0 \quad (15)$$

$$0.3 \sum_{i=1}^6 x_{wi4} - 0.7 \sum_{i=1}^6 x_{bi4} + d_{16}^- - d_{16}^+ = 0 \quad (16)$$

C. Transport Maliyeti

Transport maliyetinin hedef kısıtı: öğrencilerin mesafesi için, i alandan j okula taşınan öğrencilerin sayısı.

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 C_{ij} (x_{bij} + x_{wij}) - d^+ = 0 \quad (4.3)$$

Bu kısıttan transport maliyetlerin toplamı minimizasyonu, pozitif sapmasını (d^+) minimize ederek elde edilir.

C_{ij} = Her öğrenci için i alandan j okula olan transport maliyetidir.

(4.3) 'ten genel olarak şu denklem yazılır;

$$\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 C_{ij} (x_{bij} + x_{wij}) + d_{17}^- - d_{17}^+ = itm \quad (17)$$

itm = İstenen transport maliyetinin minimizasyon değeri
lenir.

D. Transport zamanı

Bazı öğrencilerin aileleri, otobüste uzun yolculuktan çocukları yoruldukları için şikayet etmişlerdir. Okulların Müdürleri, 20 dakikayı aşan bütün yolculuklardan uzak durmaya karar vermişlerdir. Otobüsün sürati ortalama olarak saatte 25 mildir. O zaman yolculuğun mesafesi en fazla (Max halinde) 8 mil olması gerekir. Böylece 8 milden daha fazla olan yolculuklardan, olabileceği kadar uzak durmalıdırlar. Bu hedefin kısıtı;

$$x_{rij} - d^+ = 0 \quad (4.4)$$

burada $x_{rij} = 8$ milden daha fazla olan yolculukların mesafesi için, r ırkından, i alandan j okula taşınan öğrencilerin sayısı.

Bu hedefin, d^+ minimizasyonu alarak elde edilir. Tablo (4.1)'de 8 milden daha fazla olan mesafeler 10 tane görünür.

Böylece bu hedef için 10 kısıt vardır.

$$x_{b31} - d_{22}^+ = 0 \quad (22) \quad x_{w32} - d_{27}^+ = 0 \quad (27)$$

$$x_{w31} - d_{23}^+ = 0 \quad (23) \quad x_{b14} - d_{28}^+ = 0 \quad (28)$$

$$x_{b22} - d_{24}^+ = 0 \quad (24) \quad x_{w14} - d_{29}^+ = 0 \quad (29)$$

$$x_{w22} - d_{25}^+ = 0 \quad (25) \quad x_{b44} - d_{30}^+ = 0 \quad (30)$$

$$x_{b32} - d_{26}^+ = 0 \quad (26) \quad x_{w44} - d_{31}^+ = 0 \quad (31)$$

8 milden daha fazla olan mesafelerde, her tanesi için 8 mil-
den fazla olan miktarı amaç fonksiyonunda ağırlık olarak kul-
lanılır.

E. Fazlalık dengesi

Her okulun kalabalık olmaması için, o okulların kapasite-
lerine göre öğrenci olması gereklidir. Her okulun kapasite-
sine göre kapsama oranı şu şekilde gösterilir.

Okul	Kapasite	Kapsama oranı	
A	500	0.20	← 500/2500
B	700	0.28	← 700/2500
C	800	0.32	← 800/2500
D	500	0.20	← 500/2500
Toplam	2500	1.00	

Böylece A okulunun kapsayabileceği öğrencilerin sayısı

$$\sum_{i=1}^6 (x_{bil} + x_{wil}) = (0.2) \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 (x_{bij} + x_{wij})$$

yukarıdaki kısıt şu şekilde yazılır.

$$(0.8) \sum_{i=1}^6 (x_{bil} + x_{wil}) - (0.2) \sum_{i=1}^6 \sum_{j=2}^4 (x_{bij} + x_{wij}) = 0$$

o zaman bu hedefin (fazlalık dengesi) kısıtları, her okul için aşağıdaki gibidir;

$$(1 - \ell_j) \sum_{i=1}^6 (x_{bij} + x_{wij}) - \ell_j \sum_{i=1}^6 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^4 (x_{bik} + x_{wik}) + d^- - d^+ = 0 \quad (4.5)$$

Bu hedefin, her okul için d^+ ve d^- pozitif ve negatif sapma değişkenlerinin minimizasyonu alınarak başarılı olunur. Burada $\ell_j = j$ okulu için kapsama oranı.

d^+ = Kapsama oranındaki fazlalık.

d^- = Kapsama oranındaki azlık.

Vilayette 4 okul olduğundan fazlalık dengesi hedefin kısıtları 4 kısıttır.

$$0.8 \sum_{i=1}^6 (x_{bil} + x_{wil}) - 0.2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=2}^4 (x_{bij} + x_{wij}) + d_{18}^- - d_{18}^+ = 0 \quad (18)$$

$$0.72 \sum_{i=1}^6 (x_{bi2} + x_{wi2}) - 0.28 \sum_{i=1}^6 [(x_{bil} + x_{wil}) + \sum_{j=3}^4 (x_{bij} + x_{wij})] + d_{19}^- - d_{19}^+ = 0 \quad (19)$$

$$0.68 \sum_{i=1}^6 (x_{bi3} + x_{wi3}) - 0.32 \sum_{i=1}^6 \left[\sum_{j=1}^2 (x_{bij} + x_{wij}) + (x_{bi4} + x_{wi4}) \right] + d_{20}^- - d_{20}^+ = 0 \quad (20)$$

$$0.8 \sum_{i=1}^6 (x_{bi4} + x_{wi4}) - 0.2 \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^3 (x_{bij} + x_{wij}) + d_{21}^- - d_{21}^+ = 0 \quad (21)$$

Bu problemde 3 değişik hedef programlama modeli kullanıldığı için, 3 amaç fonksiyonu elde edilir.

F. Her okulun kapasitesinin alt sınırını kullanmaktan uzak durmak:

Eğer bütün alanlardan j okula giden öğrencilerin toplamı, j okulunun kapasitesinden daha az ise bu hedefi sağlayamaz. Bu hedefi elde etmek için, şu kısıtlar yazılır;

$$\begin{aligned} \text{(Hedefte: } \sum_{i=1}^6 (x_{bij} + x_{wij}) &\geq \text{KAP}_j) \\ \sum_{i=1}^6 (x_{bij} + x_{wij}) + d^- - d^+ &= \text{KAP}_j, \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned} \quad (4.6)$$

KAP_j = j okulunun normal kapasitesi. Bu hedefin, d^- minimizasyonu alınarak başarılı olunur. Bu hedef için aşağıdaki gibi 4 kısıt elde edilir.

$$\sum_{i=1}^6 (x_{bi1} + x_{wi1}) + d_{32}^- - d_{32}^+ = 500 \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_{bi2} + x_{wi2}) + d_{33}^- - d_{33}^+ = 700 \quad (33)$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_{bi3} + x_{wi3}) + d_{34}^- - d_{34}^+ = 800 \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^6 (x_{bi4} + x_{wi4}) + d_{35}^- - d_{35}^+ = 500 \quad (35)$$

Bu problem için olan hedef programlama modeli 35 hedefin kısıtlarını, 48 karar değişkenlerini ve 6 tane öncelik seviyesini kapsar.

G. Amaç fonksiyonu: Gramları (Analizleri)

Bu problemde 3 değişik hedef programlama modeli kullanıldığı için, 3 amaç fonksiyonu elde edilir.

1) Hedefleri elde etmek için, girilen hedefler:

Model I için; girilen hedefler:

$$2) \text{ Girdi minimize } z = P_1 \sum_{i=1}^{12} d_i^- + P_2 \sum_{i=32}^{35} d_i^- + P_3 d_{17}^+ + P_4 \sum_{i=13}^{16} (d_i^- + d_i^+) +$$

3) Girdilerin hedefleri:

$$+ P_5 \sum_{i=18}^{21} (d_i^- + d_i^+) + P_6 (2d_{22}^+ + 2d_{23}^+ + d_{24}^+ + d_{25}^+ + 4d_{26}^+ + 4d_{27}^+ + 2d_{28}^+ + 2d_{29}^+ + 3d_{30}^+ + 3d_{31}^+).$$

Model II için;

$$\text{nu 0'da minimize } z = P_1 \sum_{i=1}^{12} d_i^- + P_2 \sum_{i=32}^{35} d_i^- + P_3 \sum_{i=13}^{16} (d_i^- + d_i^+) +$$

1. modelin hedefleri:

$$+ P_4 \sum_{i=18}^{21} (d_i^- + d_i^+) + P_5 d_{17}^+ + P_6 (2d_{22}^+ + 2d_{23}^+ + d_{24}^+ + d_{25}^+ + 4d_{26}^+ + 4d_{27}^+ + 2d_{28}^+ + 2d_{29}^+ + 3d_{30}^+ + 3d_{31}^+).$$

Model III için;

$$\text{minimize } z = P_1 \sum_{i=1}^{12} d_i^- + P_2 \sum_{i=32}^{35} d_i^- + P_3 \sum_{i=13}^{16} (d_i^- + d_i^+) + P_4 d_{17}^+ +$$

Table 1.1. Hedefler ve Ağırlıklar (Gramları)

$$+ P_5 \sum_{i=18}^{21} (d_i^- + d_i^+) + P_6 (2d_{22}^+ + 2d_{23}^+ + d_{24}^+ + d_{25}^+ + 4d_{26}^+ + 4d_{27}^+ + 2d_{28}^+ + 2d_{29}^+ + 3d_{30}^+ + 3d_{31}^+).$$

4.1.4- Çözümlerin yorumları (Analizleri)

Hedef programlama yaklaşımları 3 türlü yorum verir.

- 1) Hedefleri elde etmek için, girdilerin (input) gereksinimlerini belirlemek gereklidir.
- 2) Girdilere (input) göre hedefleri sağlama derecesi.
- 3) Girdilerin hedefler ile olan bağlantı değişikliğine göre hedefleri sağlama derecesi değişir.

Problemi Lineer hedef programlama modeli ile çözerek, modellerin sonuçları aşağıdaki gibi açıklanmıştır.

1. Model

1. modelde istenen transport maliyetinin minimizasyonu 0'dır. Bu model için tablo(4.2)'de görünen hedeflerin öncelik seviyelerine göre 1. modelin sonuçları tablo(4.3)'te görünür. 1. modelin sonuçlarından;

P_1 : Bütün öğrencileri kabul etmek $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

P_2 : Her okulun kapasitesinin alt $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.
sınırını kullanmaktan uzak
durmak hedefi

P_3 : Transport maliyeti minimizasyonu 35,010 \$ elde edilir.

$$\begin{aligned} & [\text{Tablo (4.3) 'ten}; (390).(20) + (3).(10) + (437).(10) + (546).(10) + (9).(15) + (425).(15) \\ & + (122).(15) + (229).(15) + (37).(15) + (447).(10) + (55).(10) \\ & = 35,010 \$] \cdot \end{aligned}$$

Tablo 4.3- I. Modelin sonuçları

Alan	Okul İrk	A	B	C	D	Kabul edilen i alanda bulunan öğrenci- lerin toplamı
1	Siyah					0
	Beyaz	390				390
2	Siyah			3		3
	Beyaz			437		437
3	Siyah					0
	Beyaz			546		546
4	Siyah		9			9
	Beyaz		425			425
5	Siyah	122	229			351
	Beyaz		37			37
6	Siyah				447	447
	Beyaz				55	55
Kabul edilen		512	700	986	502	2700
Okul kapasitesi		500	700	800	500	2500

P_4 :İrk dengesi hedefi $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı olmadı.

P_5 :Fazlalık dengesi hedefi $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı olmadı.

P_6 :Transport (yolculuk) $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.
süresinin 20 dakikayı
aşmaması hedefi

Bu modelde transport maliyeti minimizasyonu hedefi en önemli hedef olarak alınmıştır. Bu modelde ırk dengesi, fazlalık dengesi hedefleri başarısız olmuştur. Bu durumlar, tablo (4.3)'te görünür. Mesela, tüm alanlardan A okuluna giden beyaz öğrencilerin sayısı 390, siyah öğrencilerin sayısı ise 122 olduğundan A okulunda olan siyah öğrencilerin oranı $\frac{(122).(100)}{512} = \%23.8 \neq \%30$ baeyazların oranı ise $\frac{(390).(100)}{512} = \%76.17 \neq \%70$ tir. Fazlalık dengesi hedefi için mesela, tablo(4.3)'ten A okulu kapasama oranı; $\frac{512}{2700} = 0.18 \neq 0.20$ dir.

Model II:

2. Modelde istenen transport maliyetinin minimizasyonu 35,010 \$. Bu model için tablo(4.2)'de görünen hedeflerin öncelik seviyelerine göre 2. modelin sonuçları tablo (4.4)te görünür. 2. Modelin sonuçlarından;

P_1 : Bütün öğrencileri kabul etmek $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

P_2 : Her okulun kapasitesinin alt $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.
sınırını kullanmaktan uzak
durmak hedefi.

Tablo (4.4)'ten mesela A okuluna gidecek öğrencilerin sayısı $540 > 500$.

P_3 :İrk dengesi hedefi $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

Tablo 4.4- II. Modelin Sonuçları.

Alan	Okul İrk	A	B	C	D	Kabul edilen alanda bulunan öğrenci- lerin toplamı
1	Siyah					0
	Beyaz	323	67			390
2	Siyah			3		3
	Beyaz	55		59	323	437
3	Siyah					0
	Beyaz			546		546
4	Siyah		9			9
	Beyaz		425			425
5	Siyah	162	189			351
	Beyaz		37			37
6	Siyah		29	256	162	447
	Beyaz				55	55
Kabul edilen Okul kapasitesi		540	756	864	540	2700
		500	700	800	500	2500

Tablo (4.4)'ten mesela A okuluna gidecek beyaz öğrencilerin sayısı 378 ve siyahların sayısı 162'dir. O zaman A okulunda olan beyaz öğrencilerin oranı %70, siyah öğrenciler oranı ise %30'dur.

P_4 : Fazlalık dengesi hedefi $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

Tablo (4.4)'ten mesela A okulunda olan öğrencilerin oranı $\frac{540}{2700}$
 $= 0.20$ 'dir.

P_5 : Transport maliyeti minimizasyonu 35,010 \$ çıkmadı. Çünkü tablo (4.4)'ten transport maliyeti minimizasyonu 52,862 \$ elde edilir. Yani;

$$(323).(20) + (67).(45) + (3).(10) + (55).(25) + (59).(10) + (323).(35) + (546).(10)$$

$$+ (9).(15) + (425).(15) + (162).(15) + (189).(15) + (37).(15) + (29).(40) + (256).(35)$$

$$+ (162).(10) + (55).(10) = 52,862 \$ > 35,010 \$.$$

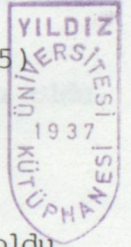
P_6 : Transport (yolculuk) süresinin $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

20 dakikayı aşmaması hedefi.

Bu modelde bütün sosyal hedefler başarılı oldu ve transport maliyeti minimizasyonu 52,862 \$ çıktı. Bu değer, 1. modelde olan transport maliyeti minimizasyonu 35,010 \$ değerinden 17,852 \$ daha fazladır. Ama bu modelde, geçen modelde başarılı olmayan 2 önemli sosyal hedeften ırk dengesi ve fazlalık dengesi başarılı oldu.

Model III:

3. Modelde istenen transport maliyeti minimizasyonu 50,000 \$ dır. Bu model için tablo (4.2)de görülen hedeflerin ön-



celik seviyelerine göre 3. modelin sonuçları tablo (4.5)'te görülmür. 3.modelin sonuçlarından;

P_1 : Bütün öğrencileri kabul etmek. $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

P_2 : Her okulun kapasitesinin alt $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.
sınırını kullanmaktan uzak
durmak hedefi.

P_3 : İrk dengesi hedefi. $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.

P_4 : Transport maliyeti minimizasyonu 50,000 \$ çıkmadı.
Çünkü Tablo(4.5)'te Transport maliyeti minimizasyonu 50,536 \$
elde edilir. (50,536 \$ > 50,000 \$)

P_5 : Fazlalık dengesi hedefi $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı olmadı.

P_6 : Transport (Yolculuk)süresinin $\Rightarrow$ Bu hedef başarılı oldu.
20 dakikayı aşmaması hedefi.

Bu modelde bütçe hedefi sağlamadı. Çünkü transport maliyeti minimizasyonu 50,536 \$ > 50,000 \$ çıktı. Bu maliyeti 50,000 \$ olarak elde etmek hedefi, her okulun kapasitesinin alt sınırını kullanmaktan uzak durmak hedefinin başarılı olmasını sağlamak için başarısız olur.

1. Model gerçeğe uymayan bir modeldir.Çünkü 1.model,ırk dengesi hedefine bakmaksızın transport maliyeti minimizasyonu hedefine çok önem vermiştir.

3. Model'de 50,000 \$ istenen transport maliyeti minimizasyonu elde edilmemiş ve başka açıdan her okulda fazlalık dengesi hedefi başarılı olmamıştır.

2. Model'de daha fazla hedef başarılı oldu. Bu model gerçeğe çok yakındır. Bu modelde olan transport maliyeti minimizasyonu 52,862 \$, 3. Modelde olan 50,536 \$ değerinden çok

Tablo.4.5- III. Modelin sonuçları

Alan	Okul İrk	A	B	C	D	Kabul edilen i alanda bulunan öğren- cilerin toplamı
1	Siyah (Black)					0
	Beyaz (White)	362	28			390
2	Siyah			3		3
	Beyaz			142	295	437
3	Siyah					0
	Beyaz			546		546
4	Siyah		9			9
	Beyaz		425			425
5	Siyah	155	196			351
	Beyaz		37			37
6	Siyah		5	292	150	447
	Beyaz				55	55
Kabul edilen		517	700	983	500	2700
Okul kapasitesi		500	700	800	500	2500

fazla değildir. O zaman 2. Modelde bütün istenen hedefler başarılı oldu diyebiliriz.

4.2- Kamu Sektöründe Proje Seçimi İçin Bir Lineer Hedef Programlama Modeli

Bu çalışmada Colin BENJAMİN tarafından geliştirilen ve kamu sektöründe hedef programlama yaklaşımı kullanılarak genel bir kamu proje seçimi modeli tanıtılmaktadır. Model Trinidad ve Tobago'da enerji esaslı sektör uygulanmıştır. Karmaşık yapıdaki bir kamu sektörü yatırım programı iki aşamaya ayrılmaktadır. Birinci aşamada karar verici planlama periyodu için hedefleri gerçekleştirmek üzere en iyi aday projeler cümlesinden seçim yapmak ister. Sonra bu projeler planlanır ve kaynak kısıtlamaları tespit edilir. (14, sh:13-22).

BENJAMİN'in geliştirdiği modelde tek sektörde proje seçimini gözönüne almıştır. Model'le ilgili kavramlar şöyledir:

1) Amaçlar: Seçilen projelerin birleşimi, ekonomik büyüme, gelir, refahın paylaştırılması, kendine güvenin arttırılması para değişiminin oluşması gibi amaçların başarılmasını maximum ölçüde garantiler. Bu amaçlar finansal, sosyal veya politik düşüncelerden çıkan hedeflere dönüştürülebilir. Finansal ve ekonomik hedeflerdeki esas ticari olarak gelişmeye açık ve ekonomik olarak kusursuz projelerle, uzun dönemde ekonomik büyümeyi destekleyecek nitelikteki alt yapı projelerine öncelik verilmesidir. Sosyal hedeflerdeki esas ise gelir ve refah dağılımı için potansiyel vadeden örneğin projenin oluşturulması ve yürütülmesi sırasında, düşük gelirli işçilerin istihdam edilmesini öneren, projelere öncelik vermektir.

Güven verici veya doğal kaynakları kontrol edici ve koruyucu olması istenen politik projeler, kuvvetli bir milliyetçilik yapan projelerin favorileridir.

2) Kısıtlar: Bir kamu söktörü yatırım programının formülünde, şehir yatırım sermayesini sağlama yeteneği, projeyi planlayacak ve yürütecek tecrübeli mühendislerin, uzman işgücünün varlığı, projenin oluşturulması ve yürütülmesi sırasında gerekli kaynakların kullanılabilirliği gibi konular bulunmalıdır.

3) Hedefler: KSYP (kamu Sektörü Yatırım Programı)nin hedefleri öncelikle, ülkenin gelişmiş amaçlara ulaşma olanağını elde etmek üzere sahip olduğu her potansiyel yatırım programının gerçek ölçülerini sağlamak için kantitatif hedefler belirlemektedir.

4) Başarı Fonksiyonu: Modelin amaçlarını özetler ve ulaşılmak istenen hedef seviyelerinden zorunlu sapmaların etkisini minimize etmeye çalışır. Keza sıralı bir öncelik yapısında olan amaçları uyumlu hale getirmek üzere farklı önceliklerle birleştirir.

4.2.1- Modelin Algoritması

Modelin Genel bir Formülasyonu:

Alışıl gelmiş Hedef programlama notasyonu kullanılarak, kamu sektörü proje seçimi problemi

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \text{ olmak üzere}$$

$$\min z = f(d^+, d^-) \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Öncelik seviyelerine bakarak (4.7) denklemini şu şekilde yazabiliriz;

$$\min z = \{P_1[g_1(d_1^+, d_1^-)], P_2[g_2(d_2^+, d_2^-)], \dots, P_i[g_i(d_i^+, d_i^-)]\} \quad (4.8)$$

Burada $g_i(d_i^+, d_i^-)$; sapma değişkenlerinin ağırlık fonksiyonudur ve lineerdir.

P_i ; $g_i(d_i^+, d_i^-)$ ile ilgili düzenli öncelik seviyesidir.

Şayet V_j için $P_j \gg P_{j+1}$ ise P_j seviyesi P_{j+1} seviyesinden daha öncelikli ise

$P_i \gg P_{i+1} \gg P_{i+2} \dots$ şeklinde yazılır.

Buna göre;

Hedeflerin kısıtları:

$$CX = G + d^+ - d^- \quad (4.9)$$

$$\text{Kaynak kısıtları: } AX \leq B \quad (4.10)$$

$$\text{Negatif olmayan kısıtlar } x, d^+, d^- \geq 0 \quad (4.11)$$

$$\text{Çoklu projenin olmaması } 0 \leq x \leq 1 \quad (4.12)$$

a) $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ çözüm vektörü, x_j = plan periyodu esnasında, j projesini yürütmek için seçme seviyesi (kabul seviyesi $x = 1$ dir).

b) d^+ ; pozitif sapma değişkenlerin vektörü. d^+ hedefin değerinden yüksek olan ve negatif olmayan bir sayıdır.

c) d^- ; Negatif sapma değişkenlerin vektörü. d^- hedefin değerinden aşağı olan ve negatif olmayan bir sayıdır.

d) G; Amaçlarla ilgili sağ taraf hedefler değerleri vektörü

e) A; Kaynak tüketiminin katsayılarının matrisi.

f) C; Etkin katsayıların matrisi.

g) B; Kaynağın kısıtlarına bağlı olan sağ tarafın vektörü.

proje için yürütülmesi sırasında istihdam yaratmak.

4.2.2. Spesifik (Özel) Hedef Programlama Modeli

Proje Profilleri: Endüstriyel projeler ve altyapıyı destekleyen projelerde projelerin genel bir çerçevesini belirlemek için bazı bilgiler gereklidir. BENJAMIN bu bilgileri "Manual for the preparation of Industrial Feasibility studies" isimli bir yayından almıştır. Bu bilgiler tablo (4.6)'de özetlenmiştir. Ve burada genelde tahmini sermaye maliyeti, projeyi tamamlama süresi, net kârın bugünkü değeri ve labaratuar, doğal gaz vs. gibi anahtar kaynak gereksinimleri bulunmaktadır.

Aday cümle içindeki projeler bağımsız, tamamlayıcı ve karşılıklı bağdaşmaz olabilir. (hedeflerin kısıtları):

1- Öncelik Yapısı: Kabul edilen 7 seviyeyi öncelik sırasına göre şu şekilde açıklayabiliriz.

P_1 : Çoklu projeleri reddetmek, eldeki bütün projeleri tamamlamak (Yani planın periyodunda bitmeyen projelerini tamamlamalıyız).

Ekonomik Hedefler:

P_2 : Bütçe sermayesinin aşılmasını minimize etmek.

P_3 : Uzun süreli ekonomik büyümeyi (Halkın refahını) maximize etmek.

P_4 : Altyapıyı destekleyen projelerin tamamlamak.

karşılanan projeleri tamamlamak (1,7 ve 10 projeleri)

Sosyal Hedefler:

P₅: Projenin oluşumu esnasında istihdamı maksimize etmek,
projenin yürütülmesi sırasında istihdam yaratmak.

Politik Hedefler:

P₆: Doğal kaynaklardan faydalanmak (doğal gaz).

P₇: Diğer hedefler

- Yabancı değişim (foreign exchange) kazanç oranını potansiyel olarak arttırmak.

- Yatırım riskini azaltmak.

2- Hedef programlama kısıtları (hedeflerin kısıtları):

HP kısıtları şu şekilde gösterebiliriz.

Hedeflerin kısıtları: $CX = G + d^+ - d^-$

P₁ (1. Öncelik seviyesi):

Çoklu projelerin reddedilmesi.

$$(Hedef: x_1 \leq 1) \quad x_1 - d_1^+ + d_1^- = 1 \quad (1)$$

$$\vdots$$
$$(Hedef: x_{14} \leq 1) \quad x_{14} - d_{14}^+ + d_{14}^- = 1 \quad (14)$$

Amaç Fonksiyonu: $\{ \min \sum_{j=1}^{14} d_j^+ \}$

Yarım kalan projeleri tamamlamak (1,7 ve 10 projeleri için);

$$(Hedef: x_1 = 1) \quad x_1 - d_{15}^+ + d_{15}^- = 1 \quad (15)$$

$$(Hedef: x_7 = 1) \quad x_7 - d_{16}^+ + d_{16}^- = 1 \quad (16)$$

$$(Hedef: x_{10} = 1) \quad x_{10} - d_{17}^+ + d_{17}^- = 1 \quad (17)$$

Amaç fonksiyonu: $\{ \min \sum_{j=15}^{17} (d_j^- + d_j^+) \}$

Ekonomik Hedefler:

P₂ (İkinci öncelik seviyesi)

Bütçe sermayesinin aşılmasını minimize etmek.

$$(Hedef: \sum_{j=1}^{14} c_j x_j \leq 4000) \quad \sum_{j=1}^{14} c_j x_j + d_{18}^- - d_{18}^+ = 4000$$

(Bütçe sermayesi = 4 milyar dolardır).

Sosyal hedefler:

$$50x_1 + 150x_2 + 100x_3 + 200x_4 + 600x_5 + 300x_6 + 50x_7 + 700x_8 + 150x_9 + 100x_{10} + 500x_{11} + 1000x_{12} + 20x_{13} + 200x_{14} + d_{18}^- - d_{18}^+ = 4000 \quad (18)$$

$$\text{Amaç:} \quad \min d_{18}^+$$

P₃ (Üçüncü öncelik seviyesi)

Uzun süreli refah yaratmayı maksimize etmek

$$(Hedef: \sum_{j=1}^{14} v_j \geq 1200) \quad \sum_{j=1}^{14} v_j + d_{19}^- - d_{19}^+ = 1200$$

$$60x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 75x_4 + 200x_5 + 100x_6 + 5x_7 + 50x_8 + 50x_9 + 10x_{10} + 200x_{11} + 300x_{12} + 0x_{13} + 45x_{14} + d_{19}^- - d_{19}^+ = 1200 \quad (19)$$

Amaç: $\min d_{19}^-$

P₄ (Dördüncü öncelik seviyesi)

Altyapıyı destekleyen yeni projeleri tamamlamak (8,9 ve 13 projeleri için)

$$(\text{Hedef: } x_8 = 1) \quad x_8 + d_{20}^- - d_{20}^+ = 1 \quad (20)$$

$$(\text{Hedef: } x_9 = 1) \quad x_9 + d_{21}^- - d_{21}^+ = 1 \quad (21)$$

$$(\text{Hedef: } x_{13} = 1) \quad x_{13} + d_{22}^- - d_{22}^+ = 1 \quad (22)$$

$$\text{Amaç: } \min \sum_{j=20}^{22} (d_j^- + d_j^+)$$

Sosyal hedefler:

P₅ (Beşinci öncelik seviyesi): 1) İstihdam

$$(\text{Hedef: } \sum_{j=1}^{14} k_j x_j \geq 20,000) \quad \sum_{j=1}^{14} k_j x_j + d_{23}^- - d_{23}^+ = 20,000$$

(k_j = plan periyodu esnasında j projesine gerçekleştirmek için gerekli istihdam "adam-yıl")

$$15x_1 + 658x_2 + 405x_3 + 749x_4 + 3325x_5 + 2360x_6 + 56x_7 + 6650x_8 + 212x_9 + 135x_{10} + 2080x_{11} + 6575x_{12} + 0x_{13} + 5365x_{14} + d_{23}^- - d_{23}^+ = 20,000 \quad (23)$$

Amaç: $\min d_{23}^-$

Tablo(4.6)-Endüstriyel ve destekli alt yapı projeleri listesi.

Proje j	Çeşit	Sabit süresi (Ay olarak)	Bütçe sermayesinden alınacak projenin ihtiyaç miktarı (C ₁) (\$ x 10 ⁶)	Verilebilecek miktar (v _j) (\$ x 10 ⁶)	İstenen adamın gücü (k _j) (Adam-yıl)	Var olan Kapasite adamın gücü (Adam)	Su ihtiyaç miktarı (gals x 10 ⁶)	Doğal gaz ft ³ x 10 ⁶ /gün	Açıklama
1	Tringen	3	50	60	15	120	0.8	45	Serbest-endüstriyel
2	Çimento	24	150	100	658	260	0.2	10	Serbest-endüstriyel
3	Aldehid	24	100	50	405	100	0.35	15	Serbest-endüstriyel
4	Polyester ipleri	24	200	75	749	850	0.4	0.2	Serbest-endüstriyel
5	Demir ve Çelik	36	600	200	3325	1070	1.6	28	11.Projeye özgü ortaklık
6	Kimyasal gübre	27	300	100	2360	282	0.8	78	Serbest-endüstriyel
7	Fabrikanın Kapasitesi	9	50	5	56	40	0.4	61	12.Projeyi tamamlayan
8	Su caronisi	42	700	50	6650	200	0	0	Serbest-alt yapı
9	Deniz projeleri	27	150	50	212	50	0	0	Serbest-alt yapı
10	Endüstriyel mallar	9	100	10	135	40	0.1	0	Serbest-alt yapı
11	Alüminyum dokümanı	30	500	200	2080	1000	0.4	35	5.Projeye özgü ortaklık
12	Petro-kimya	36	1000	300	6575	2000	3.5	50	7.Projeyi tamamlayan
13	Transport projeleri	6	20	-	-	-	0	0	Serbest-alt yapı
14	Petrol rafineri	27	200	45	5365	250	0.5	15	Serbest-endüstriyel
			4120	1245	23,585	6262	9.05	337.2	

2) İstihdam (mevcut)

(Hedef: $\sum_{j=1}^{14} p_j x_j \geq 6000$) $\sum_{j=1}^{14} p_j x_j + d_{24}^- - d_{24}^+ = 6000$

($p_j = j$ projesini sürekli olarak tamamlamak için mevcut (iş-ten faydalanan) işçilerin sayısı)

$120x_1 + 260x_2 + 100x_3 + 850x_4 + 1070x_5 + 282x_6 + 40x_7 + 200x_8 + 50x_9$
 $+ 40x_{10} + 1000x_{11} + 2000x_{12} + 0x_{13} + 250x_{14} + d_{24}^- - d_{24}^+ = 6000 \quad (24)$

Amaç: $\min d_{24}^-$

Yatırım riskini azaltmak
Politik hedefler:

P_6 (6.öncelik seviyesi):

(Hedef: Doğal kaynaklardan faydalanma (doğal gaz kaynağı))

(Hedef: $\sum_{j=1}^{14} g_j x_j \geq 350$) $\sum_{j=1}^{14} g_j x_j + d_{25}^- - d_{25}^+ = 350$

3) Kay ($g_j = j$ projesinin kullanacağı doğal gaz miktarı "birim olarak: $ft^3 \times 10^6 / \text{gün}$ ")

$45x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 0.2x_4 + 28x_5 + 78x_6 + 61x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 35x_{11}$
 $+ 50x_{12} + 0x_{13} + 15x_{14} + d_{25}^- - d_{25}^+ = 350 \quad (25)$

Amaç: $\min d_{25}^-$

Diğer Hedefler:

P_7 (7.öncelik seviyesi)

Yabancı değişim kazanç potansiyeli arttırmak.

4) Petrokimyevi olan projelerden, yabancılarla yapılan mübadelelerde, en az iki büyük proje yatırım yapmak

Tablo (4.6)'dan petrokimyevi olan projeler 2,4,5,6,11 ve 12 dir.

$$(Hedef: x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_{11} + x_{12} \geq 2)$$

$$x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_{11} + x_{12} + d_{26}^- - d_{26}^+ = 2 \quad (26)$$

$$Amaç: \min d_{26}^-$$

Yatırım riskini azaltmak

Yüksek riskli olan projelerde yatırmamalıyız (Videli-cet çelik "x₅" veya alüminyum döküm "x₁₁" projeleri gibi)

$$(Hedef: x_5 + x_{11} \leq 1) \quad x_5 + x_{11} + d_{27}^- - d_{27}^+ = 1 \quad (27)$$

$$Amaç: \min d_{27}^+$$

3) Kaynak kısıtları

$$AX \leq B$$

$$\text{Kapasite (güç): } 5.5x_1 + 4.5x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 + 80x_5 + 6x_6 + x_7 + 5x_8 + 2x_9$$

$$+ x_{10} + 148x_{11} + 170x_{12} + 0x_{13} + 15x_{14} \leq 400 \quad (28)$$

$$\text{Su: } 0.8x_1 + 0.2x_2 + 0.35x_3 + 0.4x_4 + 1.6x_5 + 0.8x_6 + 0.4x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0.1x_{10}$$

$$+ 0.4x_{11} + 3.5x_{12} + 0x_{13} + 0.5x_{14} \leq 9.0 \quad (29)$$

4) Negatif olmayan kısıtlar

$$x_1 \geq 0 \quad \text{tüm } x_j \geq 0 \quad (30)$$

$$x_{14} \geq 0 \quad (43)$$

$$d_1 \geq 0 \quad (44)$$

$$\text{tüm } d_j^+ \geq 0 \quad (70)$$

$$d_{27}^+ \geq 0 \quad (71)$$

$$d_1^- \geq 0 \quad (97)$$

$$\text{tüm } d_j^- \geq 0$$

$$d_{27}^- \geq 0 \quad (97)$$

5) Başarı (amaç) fonksiyonu

$$\min z = P_1 \{w_1 (d_1^+ + \dots + d_{14}^+) + w_2 (d_{15}^+ + d_{15}^+ + d_{16}^+ + d_{16}^+ + d_{17}^+ + d_{17}^+)\} +$$

$$+ P_2 \{w_3 (d_{18}^+)\} + P_3 \{w_4 (d_{19}^-)\} + P_4 \{w_5 (d_{20}^- + d_{20}^+ + d_{21}^- + d_{21}^+ + d_{22}^- + d_{22}^+)\} +$$

$$+ P_5 \{w_6 (d_{23}^-) + w_7 (d_{24}^-)\} + P_6 \{w_8 (d_{25}^-)\} + P_7 \{w_9 (d_{26}^-) + w_{10} (d_{27}^+)\}$$

$P_1, \dots, P_7$ = öncelik seviyeleri

$w_1, \dots, w_{10}$ = sapma değişkenlere bağlı ağırlıklar.

İlk baştaki formüllerde sapma değişkenleri değişik olmayan ağırlıklara bağlanmıştır.

$$w_1 = w_2 = \dots = w_{10} = 1$$

4.2.3- Çözüm İşlemi

Yukarıdaki model wagner's II. faz yöntemin bir uzantısı olan değiştirilmiş simpleks işlemi ile çözülür. Yukarıdaki problemi çözmek için uygun Lineer programlama (LP) paketleri kullanılabilir. (LINDO, MPSX, MINOS vs). Çözümü bulmak için ilk başta birinci öncelik seviyesi (çoklu projelerden uzak durmak ve planın periyotta bitmeyen projeleri tamamlamak) kısıtlar olarak kullanılır. Çözüm işlemini öncelik seviyelerine göre amaç fonksiyonunu bölmeyi kapsar. Bundan sonra Lineer programlama yöntemlerinden çözümler bulunur. Ve sonucu olan çözüm o çözümlerden elde edilir. Her öncelik seviyesi sonraki seviyede kısıtı olarak kullanılarak çözüme yaklaşılar. Bu hedef programlama algoritması (Ignizio) ve (Kornbluth) taslağıdır. Bu model XMP bilgisayar kodu ile çözülmüştür. İlk başta yazılan formüller için optimal çözümü Tablo (4.7)'de görülmektedir.

4.2.4- Sonuçların Analizi (Açıklanması)

Kısa olarak ilkbaştaki formüllere dayanan projelerin seçme seviyeleri Tablo (4.7)'de gösterilmiştir. Sonuçlara bakarak 1,2,3,4,6,7,8,9,10,12,13 ve 14 projelerinin kabul seviyesine ulaşabildikleri görünebilir. (Kabul seviyesi 1.00 dir). Burada 5.projenin seçme seviyesi, aşağı yukarı kabul seviyesine ulaşmıştır. Fakat 11. Projede (Alüminyum dökümü) 0.7165 kabul olmayan seviye olduğundan gelecek planın periyodu esnasında, o proje reddedilir. Kullanılabilen kaynakların iştirak seviyesini vermeli ve aynı anda iki büyük projeden vazgeç. Kaynaklar seviyeleri değiştirilerek gelecek planın periyodunda Alüminyum dökümü projesi de listeye alınabilir. Sapma değişkenlerinin değerlerine bakarak, amaç fonksiyonunda olan en sonraki öncelikleri dikkate almazsak ; modelin tüm hedeflerinin başarılı olduklarını söyleyebilir. Öncelik seviyele-

rinin sırası değiştiğinde seçme seviyeleri de değişir. (Tablo (4.7)'de görüldüğü gibi birinci ve ikinci değişiklikte Demir ve Çelik projesinin seçme seviyesi 1.00 olmuş ve kabul seviyesine ulaşmıştır. Buna zıt olarak birinci değişiklikte transport projelerinin seçme seviyesi 0.0518 olmuş ve kabul seviyesinden uzaklaşmıştır.

5. LİNEER HEDF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI KULLANILARAK

BİR ÖZEL HASTANENİN SERMAYE BÜTÇELEME SINIRI YAPILMASI

Bu bölümde özel bir hastanenin sermaye bütçeleme yapılmıştır. Böyle bir çalışmanın yapılabilmesi için hastanenin tipi (kâr amacı güden, hizmet amacı güden), özellikleri, yeri, büyüklüğü gibi faktörler gözönüne alınmaktadır. Her hastane için bu özellikler değişik olacağından genel bir modelden yararlanarak yaptığımız hastanenin özelliklerine uygun bir hedef programlama modeli geliştirilmiştir. Bütün veriler, 1.4.93 yılı ile 1.4.92 yılı arasındaki değerlerdir.

5.1. Hastane Çalışanlarıyla İlgili Bilgiler

Bu çalışmanın alanı sınırlıdır. Bir yıl için (1.4.92-1.4.93 arası) plan yapılmıştır. Hastanede (klinikte) çalışan personeli ve sayıları aşağıdaki gibidir.

Prof.Dr.	4 (Yarım gün olarak çalışmaktadır)
Doç.Dr.	6 (Yarım gün olarak çalışmaktadır)
Uzman Dr.	9 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Pratisyen Dr.	3 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Psikolog Uzm.Dr.	2 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Teknisyen	4 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Poliklinik memuru	2 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Sekretör	3 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Yardımcı	1 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Vardiyalı Hemşire	8 (8'ar saatlik vardiyalar şeklinde çalışmaktadır)

5. BÖLÜM

5. LİNEER HEDEF PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI KULLANILARAK BİR ÖZEL HASTANENİN SERMAYE BÜTÇELEMESİNİN YAPILMASI

Bu bölümde özel bir hastanenin sermaye bütçelemesi yapılmıştır. Böyle bir çalışmanın yapılabilmesi için hastanenin tipi (kâr amacı güden, hizmet amacı güden), özellikleri, yeri, büyüklüğü gibi faktörler gözönüne alınmaktadır. Her hastane için bu özellikler değişik olacağından genel bir modelden çok araştırma yaptığımız hastanenin özelliklerine uygun bir hedef programlama modeli geliştirilmiştir. Bütün veriler, 1.4.91 yılı ile 1.4.92 yılı arasındaki değerlerdir.

5.1. Hastane Çalışanlarıyla İlgili Bilgiler

Bu çalışmanın alanı sınırlıdır, bir yıl için (1.4.92-1.4.93 arası) plan yapılacaktır. Hastanede (klinikte) çalışan personel ve sayıları aşağıdaki gibidir.

Prof.Dr.	4 (Yarım gün olarak çalışmaktadır)
Doç.Dr.	8 (Yarım gün olarak çalışmaktadır)
Uzman Dr.	9 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Pratisyen Dr.	3 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Psikolog Uzm.Dr.	2 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Teknisyen	3 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Poliklinik memuru	2 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Sekreter	4 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Veznedar	1 (Tam gün olarak çalışmaktadır)
Vardiyeli Hemşire	9 (8'er saatlik vardiyeler şeklinde çalışmaktadırlar)

Ameliyathane hemşiresi	5	(Tam gün olarak çalışmaktadır)
Vardiyesiz hemşire	4	(Tam gün olarak çalışmaktadır)
Müstahdem	8	(Tam gün olarak çalışmaktadır)
Büro memuru	5	(Tam gün olarak çalışmaktadır)
Hasta bakıcı	2	(Tam gün olarak çalışmaktadır)

Tablo (5.1)'de personelin çalışma saatlerine göre aldıkları ücretler ile gelecek yıl için öngörülen %25'lik artış sonrası ücretlerin durumu ve maaş artışlarındaki öncelikler görülmektedir.

Tüm personeli için haftada iki gün tatil olmak üzere, yarım gün çalışanlar hergün 4 saat, tam gün çalışanlar ise 8 saat çalışmaktadırlar. Vardiyeli çalışanlar, günde 8'er saatlik 3 vardiye şeklinde çalışmaktadırlar.

Hastaneye hergün ortalama 20 hasta gelmekte bunların tümü muayene olduktan sonra 10 tahlil yaptırmakta, 5 röntgen veya ultrasonografi çektirmektedir. Bazın ameliyat olanlar ve hastaneye yatanlar da çıkmaktadır.

Muayene fiyatları 125.000 TL ile 200.000 TL. arasında değişmektedir. Çünkü muayene eden doktorun ünvanı ücretlerde etkili olmaktadır.

Ameliyat fiyatları ise aşağıdaki gibidir:

Küçük Ameliyatlar	1,690,000
Orta Ameliyatlar	3,040,000
Büyük Ameliyatlar	7-10 Milyon arası

Yatak ücretleri:

Özel oda	400,000 (Banyolu-televizyonlu)
Bir kişilik oda	350,000 (Banyolu)
	250,000 (Banyosuz)
İki kişilik oda	150,000 (Her hasta için)
Üç kişilik oda	100,000 (Her hasta için)

Tablo(5.1).

Personelin niteliği	Çalışanların sayısının	Kişi başına aylık ücretleri (x1000)	Kişi başına aylık çalış- ma saatleri nin sayısı	Kişi başına 1 saatlik ücreti (x1000)	Yıllık çalışma saatlerinin toplamı	825'lik artışla kişi başına 1 saatlik ücreti (x1000)	Maaş artışında ki öncelikler
(Yarım gün) Prof.Dr.	4	7990	88	90.8	4224	113.5	15.
(Yarım gün) Doç.Dr.	8	4465	88	50.7	8448	63.4	14.
Uzman Dr.	9	5174	176	29.4	19008	36.75	13.
Pratisyen Dr.	3	4890	176	27.8	6336	34.75	12.
Psikolog Dr.	2	4614	176	26.2	4224	32.75	11.
Teknisyen	3	1596	176	9	6336	11.25	3.
Poliklinik memuru	2	1440	176	8.2	4224	10.25	5.
Sekreter	4	1403	176	8	8448	10	4.
Veznedar	1	1422	176	8.1	2112	10	7.
Vardiye li Hemşire	9	2207	176	12.5	19008	15.6	9.
Vardiye siz Hemşire	4	2080	176	11.8	8448	14.75	8.
Ameliyathane Hemşiresi	5	2341	176	13.3	10560	16.6	10.
Müstahdem	8	2100	176	11.9	16896	14.9	2.
Büro memuru	5	1390	176	7.9	10560	9.9	6.
Hasta Bakıcı	2	1405	176	8	4224	10	1.

Röntgen, ultrasonografi ve elektro kardiograf için fiyatlar 100,000 TL ile 450,000 TL arasında değişmektedir.

Tahlil fiyatları ise ortalama 20,000 TL ile 190,000 TL arasındadır.

Hastalarla ilgili bilgiler:

Geçen yılki (1.4.91-1.4.92) hastaların sayısı: 8914 dir.
Gelecek yılki hastaların sayısında beklenen artış(%7): 624
Planlama yılı (gelecek yıl) için hastaların toplamı : 9536

Harcamalar:

	Geçen yılki toplam	Her hasta için %15 zamdan harcama ortala-sonraki ması	harcama
Röntgen, Ultrasonograf	610,500,000	68,521.7	78,800
Elektrohardiogram			
Tahlil	80,090,000	9,000	10,350
İdari harcamalar	2,629,872,400	295,130	339,400
(Bütün maaşlar toplamı)			

Diğer Harcamalar:

Yeni cihaz alımı, tamiri için 149,500,000 (geçen yıl 130,000,000)
planlanan harcamalar

Çalışanların sigorta primleri gelecek yılki maaş tutarının %15 kadar.

Harcamalarda gelecek yıl için %15 lik bir artışın olacağı tahmin edilmektedir.

5.2- Modelin Oluşturulması

Değişkenler:

- x_1 = Her yeni saat başı için yarım iş günü çalışan Prof.Dr.'un maaşı,
- x_2 = Her yeni saat başı için yarım iş günü çalışan Doç.Dr.'un maaşı,
- x_3 = Her yeni saat başı için Uzman Dr.'un maaşı,
- x_4 = Her yeni saat başı için pratisyen hekimin maaşı,
- x_5 = Her yeni saat başı için Uzman Psikolog Dr.'un maaşı,
- x_6 = Her yeni saat başı için Teknisyen'in maaşı,
- x_7 = Her yeni saat başı için Poliklinik memurunun maaşı,
- x_8 = Her yeni saat başı için Sekreterin maaşı,
- x_9 = Her yeni saat başı için Veznedarın maaşı,
- x_{10} = Her yeni saat başı için vardiyeli hemşirenin maaşı,
- x_{11} = Her yeni saat başı için vardiyesiz hemşirenin maaşı,
- x_{12} = Her yeni saat başı için ameliyethane hemşiresinin maaşı,
- x_{13} = Her yeni saat başı için müstahdemın maaşı,
- x_{14} = Her yeni saat başı için büro memurunun maaşı,
- x_{15} = Her yeni saat başı için hasta bakıcının maaşı,
- x_{16} = Yeni cihaz alımı ve tamiri için ayrılan harcamalar
- x_{17} = Çalışanların yeni sigorta primleri için ayrılan harcamalar
- x_{18} = Yarım gün çalışan Prof.doktorlarının 1 yılda çalışması gerekli saat,
- x_{19} = Yarım gün çalışan Doç.doktorlarının 1 yılda çalışması gerekli saat,
- x_{20} = Uzman doktorlarının 1 yılda çalışması gerekli saat,

- x_{21} = Pratisyen hekimlerinin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{22} = Psikolog uzm.Dr.'lerinin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{23} = Teknisyenlerin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{24} = Poliklinik memurlarının 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{25} = Sekreterlerin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{26} = Veznedarların 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{27} = Vardiyeli hemşirelerinin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{28} = Vardiyesiz hemşirelerinin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{29} = Ameliyathane hemşirelerinin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{30} = Müstahdemlerin 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{31} = Büro memurlarının 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{32} = Hasta bakıcıların 1 yılda çalışması gerekli saat.
 x_{33} = Her hasta için yapılacak röntgen ultrasonografi harcamalar.
 x_{34} = Her hasta için yapılacak tahlil harcamaları.
 x_{35} = Her hasta için yapılacak idari ve çeşitli harcamaları.
 x_{36} = Her hasta için yapılacak ortalama fiyat.

Kısıtlar ve Hedefler:

A.Maaşlar:

Her personelin yeni maaşı geçen yılki maaşlarından %25 daha fazla olacak şekilde istenecektir.

$$\begin{aligned}(\text{Hedef: } x_1 \geq 113500) \quad & x_1 + d_1^- - d_1^+ = 113500 \text{ TL} \\(\text{Hedef: } x_2 \geq 63400) \quad & x_2 + d_2^- - d_2^+ = 63400 \\(\text{Hedef: } x_3 \geq 36750) \quad & x_3 + d_3^- - d_3^+ = 36750 \\(\text{Hedef: } x_4 \geq 34750) \quad & x_4 + d_4^- - d_4^+ = 34750 \\(\text{Hedef: } x_5 \geq 32750) \quad & x_5 + d_5^- - d_5^+ = 32750 \\(\text{Hedef: } x_6 \geq 11250) \quad & x_6 + d_6^- - d_6^+ = 11250 \\(\text{Hedef: } x_7 \geq 10250) \quad & x_7 + d_7^- - d_7^+ = 10250 \\(\text{Hedef: } x_8 \geq 10000) \quad & x_8 + d_8^- - d_8^+ = 10000 \\(\text{Hedef: } x_9 \geq 10000) \quad & x_9 + d_9^- - d_9^+ = 10000 \\(\text{Hedef: } x_{10} \geq 15600) \quad & x_{10} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 15600 \\(\text{Hedef: } x_{11} \geq 14750) \quad & x_{11} + d_{11}^- - d_{11}^+ = 14750 \\(\text{Hedef: } x_{12} \geq 16600) \quad & x_{12} + d_{12}^- - d_{12}^+ = 16600 \\(\text{Hedef: } x_{13} \geq 14900) \quad & x_{13} + d_{13}^- - d_{13}^+ = 14900 \\(\text{Hedef: } x_{14} \geq 9900) \quad & x_{14} + d_{14}^- - d_{14}^+ = 9900 \\(\text{Hedef: } x_{15} \geq 10000) \quad & x_{15} + d_{15}^- - d_{15}^+ = 10000\end{aligned} \quad (5.1)$$

B.Harcamalar:

1.Yeni cihaz alımı ve tamiri için 149,500,000 lık bir harcama tahmin edilmektedir.

$$(\text{Hedef: } x_{16} \geq 149,500,000) \quad x_{16} + d_{16}^- - d_{16}^+ = 149,500,000 \quad (5.2)$$

2.Çalışanların sigorta primleri için ayrılan miktar gelecek yılki maaş tutarının %15'inin kapsamaktadır.

$$x_{17} - 0.15 [4224x_1 + 8448x_2 + 19008x_3 + 6336x_4 + 4224x_5 + 6336x_6 + 4224x_7 + \\ + 8448x_8 + 2112x_9 + 19008x_{10} + 8448x_{11} + 10560x_{12} + 16896x_{13} + 10560x_{14} + \\ + 4224x_{15}] + d_{17}^- - d_{17}^+ = 0. \Rightarrow$$

$$x_{17} - 633.6x_1 - 1267.2x_2 - 2851.2x_3 - 950.4x_4 - 633.6x_5 - 950.4x_6 - 633.6x_7 - \\ - 1267.2x_8 - 316.8x_9 - 2851.2x_{10} - 1267.2x_{11} - 1584x_{12} - 2534.4x_{13} - 1584x_{14} - \\ - 633.6x_{15} + d_{17}^- - d_{17}^+ = 0. \quad (5.3)$$

C. Personelin Gereksinimi:

Personelin işgücü, hastalara yeterli hizmet vermekle sınırlıdır.

(Hedef: $x_{18} \geq 4224$)

$$x_{18} + d_{18}^- - d_{18}^+ = 4224$$

$$x_{19} + d_{19}^- - d_{19}^+ = 8448$$

$$x_{20} + d_{20}^- - d_{20}^+ = 19008$$

$$x_{21} + d_{21}^- - d_{21}^+ = 6336$$

$$x_{22} + d_{22}^- - d_{22}^+ = 4224$$

$$x_{23} + d_{23}^- - d_{23}^+ = 6336$$

$$x_{24} + d_{24}^- - d_{24}^+ = 4224$$

$$x_{25} + d_{25}^- - d_{25}^+ = 8448$$

$$x_{26} + d_{26}^- - d_{26}^+ = 2112$$

$$x_{27} + d_{27}^- - d_{27}^+ = 19008$$

(5.4)

$$x_{28} + d_{28}^- - d_{28}^+ = 8448$$

$$x_{29} + d_{29}^- - d_{29}^+ = 10560$$

$$x_{30} + d_{30}^- - d_{30}^+ = 16896$$

$$x_{31} + d_{31}^- - d_{31}^+ = 10560$$

$$x_{32} + d_{32}^- - d_{32}^+ = 4224$$

D. Her hasta için yapılan harcamalar:

Her hasta için yapılan harcamalar şunlardır:

- 1) Röntgen, ultrasonograf ve elektrohardiogram harcamaları.
- 2) Tahlil harcamaları.
- 3) İdari ve diğer harcamalar.

1. Her hasta için yapılacak röntgen, ult. ve elektroh. harcamaları:

$$(\text{Hedef: } x_{33} \geq 78800) \quad x_{33} + d_{33}^- - d_{33}^+ = 78800 \quad (5.5)$$

2. Her hasta için yapılacak tahlil harcamaları:

$$(\text{Hedef: } x_{34} \geq 10350) \quad x_{34} + d_{34}^- - d_{34}^+ = 10350 \quad (5.6)$$

3. Her hasta için yapılacak idari ve çeşitli harcamaları:

$$(\text{Hedef: } x_{35} \geq 339400) \quad x_{35} + d_{35}^- - d_{35}^+ = 339400 \quad (5.7)$$

E. Her hasta için çıkarılan fiyat (Denge kısıtı):

Hastadan alınan uygun fiyat, tüm hedeflerin sağlanması şeklinde belirlenir.

$$9536x_{36} - [(4224x_1 + 8448x_2 + 19008x_3 + 6336x_4 + 4224x_5 + 6336x_6 + 4224x_7 + 8448x_8 + 2112x_9 + 19008x_{10} + 8448x_{11} + 10560x_{12} + 16896x_{13} + 10560x_{14} + 4224x_{15}) + (x_{16} + x_{17}) + (9536x_{33} + 9536x_{34} + 9536x_{35})] + d_{36}^- - d_{36}^+ = 0$$

İş teminatı hedefi : Başarılı oldu.

Maaş artışı hedefi : Başarılı oldu.

5.3- Modelin Sonuçları

Hastane yöneticileri, hedeflerin öncelik sırasını şu şekilde vermişlerdir.

1. Tüm personelin iş teminatı sağlanmalıdır. Bu hedef, personelin iş saatlerinin alt sınırlarından uzak durulması şeklinde sağlanır.

2. Tüm personelin uygun maaş artışının (%25) olarak sağlanması. (Öncelik ağırlıkları Tablo (5.1)'de görülür).

3. Her hastanın harcamaları için sermayenin sağlanması.

4. Yeni cihaz alımı ve tamiri için sermayenin sağlanması.

5. Çalışanların sigorta primleri için sermayenin sağlanması.

6. Denge kısıtının sağlanması.

Amaç fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \min z = P_1 \sum_{i=1}^{32} d_i^- &+ (15P_2 d_{15}^- + 14P_2 d_{13}^- + 13P_2 d_6^- + 12P_2 d_8^- + 11P_2 d_7^- + \\ &+ 10P_2 d_{14}^- + 9P_2 d_9^- + 8P_2 d_{11}^- + 7P_2 d_{10}^- + 6P_2 d_{12}^- + 5P_2 d_5^- + 4P_2 d_4^- + 3P_2 d_3^- + 2P_2 d_2^- + \\ &+ P_2 d_1^-) + P_3 (d_{33}^- + d_{34}^- + d_{35}^-) + P_4 (d_{16}^-) + P_5 (d_{17}^-) + P_6 (d_{36}^- + d_{36}^+) \end{aligned}$$

Elde edilen hedefler:

İş teminatı hedefi : Başarılı oldu.
Maaş artışı hedefi : Başarılı oldu.
Hasta harcamalarının hedefi: Başarılı oldu.
Yeni cihaz alımının ve tamirinin hedefi: Başarılı oldu.
Çalışanların sigorta primlerinin hedefi: Başarılı oldu.
Denge hedefi : Başarılı oldu.

Değişkenlerin değerleri Tablo(5.2)'de verilmiştir.

Model'in çözümünde İGNİZİO'nun Hedef Programlama Programı kullanıldı (7, sh:234). Program FORTRAN-IV dilindedir ve sonuçlar IBM 4781 den alınmıştır. Programa göre modelimizdeki verilerin girişi Tablo (5.3)'te verilmiştir.

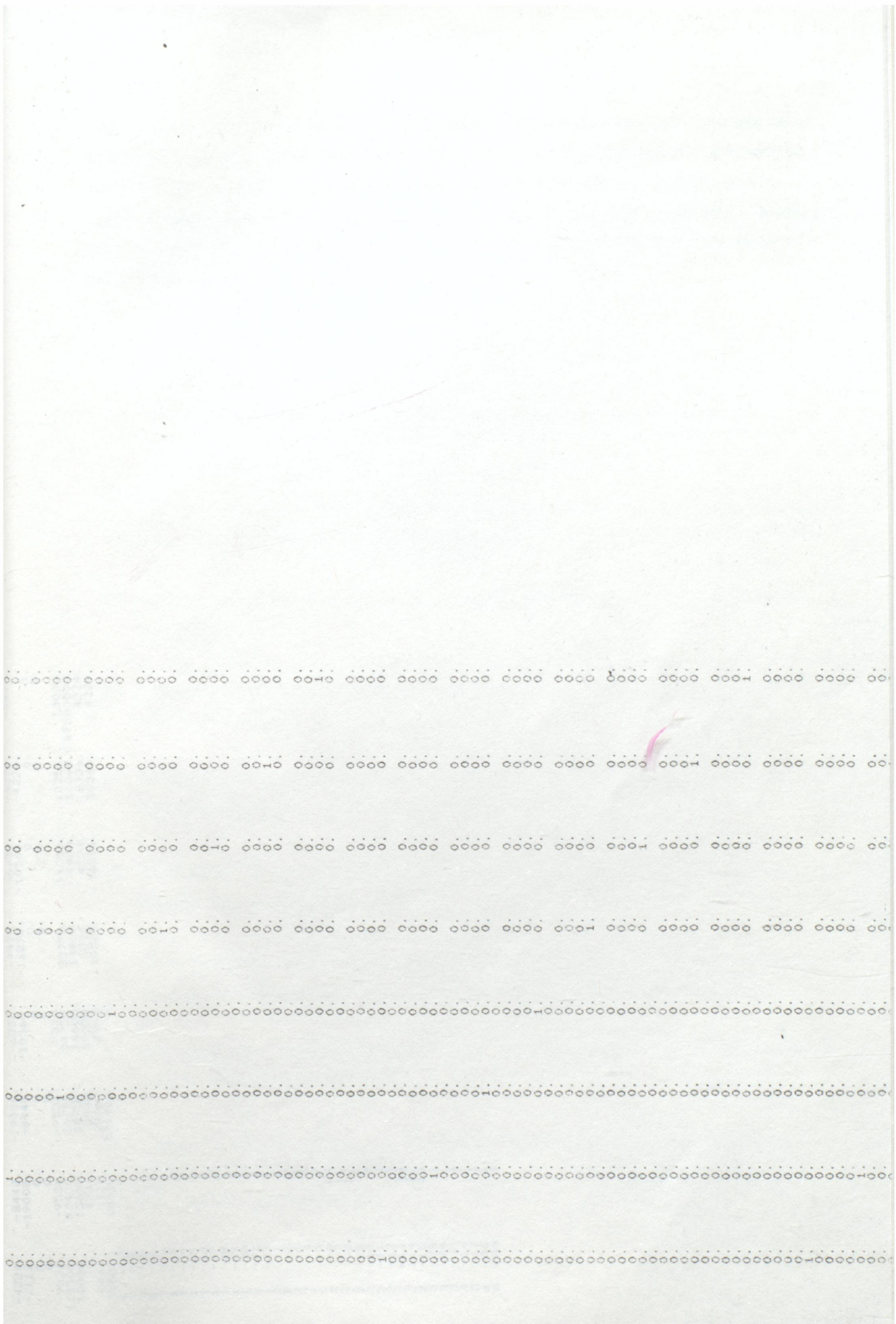
5.4- Sonuçların Yorumlanması

Modelimizin sonuçlarına göre hastane yöneticilerinin verdikleri hedefler başarılı olmuştur. Hasta başına ortalama gelir 706,566.687 TL olduğunda hastane gelecek yıl için maaşlardaki %25'lik artışı karşılayabilecektir. Bu rakam büyük görünmekle birlikte, araştırma yaptığımız hastanenin durumu göz önüne alınırsa normaldir. Çünkü sözkonusu hastane asıl gelirini özel ve yüksek ücretli ameliyatlardan sağlamaktadır. Bu du-

PROBLEM 1 READ IN SUCCESSFULLY

SUBSCRIPT	6 TERMS ASIR	36 TERMS XSIAR	36 TERMS PSTAR	36 TERMS NSTAR
1	0.0000	113500.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	63400.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	36750.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	34730.0000	0.0000	0.0000
5	0.0000	32750.0000	0.0000	0.0000
6	0.0000	11250.0000	0.0000	0.0000
7	0.0000	10250.0000	0.0000	0.0000
8		10000.0000	0.0000	0.0000
9		10000.0000	0.0000	0.0000
10		13600.0000	0.0000	0.0000
11		14750.0000	0.0000	0.0000
12		16600.0000	0.0000	0.0000
13		14900.0000	0.0000	0.0000
14		9900.0000	0.0000	0.0000
15		10000.0000	0.0000	0.0000
16		149500000.0000	0.0000	0.0000
17		493092003.0000	0.0000	0.0000
18		4224.0000	0.0000	0.0000
19		8448.0000	0.0000	0.0000
20		19003.0000	0.0000	0.0000
21		6235.0000	0.0000	0.0000
22		4224.0000	0.0000	0.0000
23		8336.0000	0.0000	0.0000
24		4224.0000	0.0000	0.0000
25		8448.0000	0.0000	0.0000
26		2112.0000	0.0000	0.0000
27		19003.0000	0.0000	0.0000
28		8448.0000	0.0000	0.0000
29		10560.0000	0.0000	0.0000
30		16896.0000	0.0000	0.0000
31		10560.0000	0.0000	0.0000
32		4224.0000	0.0000	0.0000
33		78800.0000	0.0000	0.0000
34		10350.0000	0.0000	0.0000
35		339400.0000	0.0000	0.0000
36		708566.6870	0.0000	0.0000

Table (5.5) - Variations in *g* and *h*



rum hasta başına düşen geliri şişirmektedir. Hastane çalışanların sigorta primleri için sonuçta 493,099,008 TL ödenmesi gerekmektedir. Bu öncelik hedefi de gerçekleşmektedir. Cihaz alımı için öngörülen 149,500,000 TL lık hedef gerçekleşmekte, modelde bu hedefi ifade eden x_{16} değişkeni 149,500,000 TL değerini almaktadır.

- 2) Huang, C., L., Masud, A., S., R., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 164, Multiple Objective Decision Making Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- 3) Ignizio, J., P., Advances in Applications in Goal Programming, The Pennsylvania State University Pub, Pennsylvania, 1980.
- 4) Sarvitidis, K., S., Operations Management, Mc Graw-Hill Co. Tokyo, 1981.
- 5) Lee, S., M., Goal Programming for Goal Setting Analysis, Academic pub., Philadelphia, 1972.
- 6) Keah, N., K., Mathematical programming with Business Applications, Mc Graw Hill Co., New York, 1972.
- 7) Ignizio, J., P., Goal programming and Extensions, Lexington Books Co., London, 1975.
- 8) Gueyter, W., Continuous Optimization and Linear Theory, Techniques, Applications, Operations Research, Berlin New York, 1981.
- 9) Zeleny, M., Multiple criteria Decision Making Mc Graw-Hill Book, company, New York, 1981.
- 10) Masud, S., A., Huang, C., L., Infeasible sequential goal programming, Journal of operations Research society, Vol. 22, (1981), sh:391-400.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- 1) Ignizio, J., P., A Review Goal programming A tool for Multi objective Analysis, Operations Research Society, vol.29, No 11, (1978), sh:1109-1119.
- 2) Hwang, C., L., Masud, A., S., M, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 164, Multiple Objective Decision Making Methods and Applications, springer-verlag, Berlin, 1979.
- 3) Ignizio, J., P., Advances an Applications in Goal Programming, The Pennsylvania State University Pub, Pennsylvanie, 1980.
- 4) Dervitisiotis, K., N., Operations Management, MC Graw-Hill Co. Tokyo, 1981.
- 5) Lee, S., M., Goal Programming for Decisions Andysis, Averbach pub., Phidelphia, 1972.
- 6) Kwak, N., K., Mathematical programming with Business Applications, Mc Graw Hill Co., New York, 1973.
- 7) Ignizio, J., P., Goal programming and Extensions, Lexington Books Co., London, 1976.
- 8) Gruyter, W., Continuos Optimization Models: Theory. Techiques. Applicatios, operations Research, Berlin. New York, 1987.
- 9) Zeleny, M., Multiple criteria dicision making Mc Graw-Hill Book, company, New York, 1982.
- 10) Masud, S., A., Hwang , C., L., Intenactive sequential Goal programming, journal of operational Research society, Vol. 32, (1981), sh:391-400.

- 11) Lee, S., M., Interactive Integer Goal programming; Methods and Application, in Multiple Criteria Problem Solving (adited by zionts,s.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag Co., Berlin-Heidelberg, 1978.
- 12) Stener. R., E., Multiple Criteria optimization: Theory, computation, and Application, John Wiley and Sons, New York, 1986.
- 13) Lee, S., MOORE. L., Multi-Criteria School Busing Models, Management Science, Vol. 23, no. 7, 1977, sh: 703-715.
- 14) BENJAMIN. C., A Linear Goal-Programming Model for Public-Sector Project Selection, Journal of The Operational Research Society, Vol. 36, no. 1, 1985, sh: 13-23.

11-10-1911

