

47001

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NOETHERİAN VE ARTİNİAN HALKALAR



Ayten KOÇ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erol BALKANAY

İSTANBUL , 1995

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

ÖZET i

SUMMARY ii

BÖLÜM I 1

I. ZİNCİR KOŞULLU HALKALAR 1

Tanım.1.1 1

Tanım.1.2 2

Teorem.1.1 2

Tanım.1.3 4

Teorem.1.2 4

Teorem.1.3 (Hilbert Temel Teoremi) 5

Teorem.1.4 (Levitsky) 8

Tanım.1.4 11

Teorem.1.5 11

Teorem.1.6 11

Teorem.1.7 13

Teorem.1.8 13

Teorem.1.9 13

Teorem.1.10 15

Teorem.1.11 15

Teorem.1.12 15

Teorem.1.13 19

Teorem.1.14 22

Teorem.1.15 23

Teorem.1.16 (Wedderburn) 27

BÖLÜM II	27
II. NOETHERİAN HALKALARDA DİĞER BAZI SONUÇLAR	27
Tanım.2.1	27
Teorem.2.1 (Noether)	29
Tanım.2.2	30
Teorem.2.2	30
Teorem.2.3	32
Teorem.2.4	32
Teorem.2.5	33
Teorem.2.6 (Cohen)	35
Teorem.2.7 (Nakayama'nın Yardımcı Teoremi)	39
Teorem.2.8	40
Teorem.2.9 (Krull Kesişim Teoremi)	41
Teorem.2.10	42
Teorem.2.11	46
SONUÇ	
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	

T E Ş E K K Ü R

Çalışmam boyunca hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocam
Sayın Prof.Dr.Erol BALKANAY 'a teşekkür ederim.

Ayrıca bana yardımcı olan Uzm.Elif TEKİN 'e teşekkür ederim.

Ayten KOÇ

İstanbul,1995

Ö Z E T

Noetherian ve Artinian Halkalar adlı çalışmamız iki ana bölümden oluşturmıştır.

Birinci bölümde zincir koşullu halkalar ve bununla yakından ilgili olan Noetherian ve Artinian halkalar incelenmiştir. Bu bölümde ayrıca Hilbert Temel Teoremi, Noetherian halkada asal radikal ile ilgili Levitsky Teoremi, bir Artinian halkada $rad\mathcal{R}$ 'nin bazı özellikleri, yerel halkanın homomorfik görüntüsü ile ilgili teorem, Wedderburn Teoremi v.b. gibi tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Noetherian halkalardaki diğer bazı özelliklere ayrılan ikinci bölümün başlıca ilgi alanları, Noetherian halkalarda indirgenemez idealler, Cohen Teoremi, $\mathcal{R}$ halkasının sonlu üretilmiş idealleriyle ilgili Nakayama Yardımcı Teoremi, Krull Kesişim Teoremi v.b. dir.

S U M M A R Y

Our thesis named *Noetherian and Artinian Rings* consists of two chapters.

First chapter deals with the rings with chain conditions and the Noetherian and the Artinian rings obtained by using the chain conditions. In this chapter we also give some important definitions and theorems as Hilbert Basis Theorem, Levitsky Theorem on the prime radical in a Noetherian ring, a theorem about the homomorphic image of a local ring, Wedderburn Theorem and some properties of $\text{rad}\mathcal{R}$ in a Artinian ring $\mathcal{R}$.

In chapter II we give further results on Noetherian rings. This chapter also presents irreducible ideals in the Noetherian rings, Cohen Theorem, Nakayama's Lemma on a finitely generated ideal of the ring $\mathcal{R}$ and Krull Intersection Theorem.

BÖLÜM I

ZİNCİR KOŞULLU HALKALAR

Değişmeli cebirin önemli bir bölümünü oluşturan Noetherian ve Artinian halkalar temel konumuzdur ve ayrıntılarıyla incelenmektedir. Çalışmamızda halka denilince birimli ve değişmeli halka anlaşılabacaktır.

Tanım.1.1: $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ olacak şekilde bir $\mathcal{R}$ halkasının bir $I_1, I_2, I_3, \dots$ ideal dizisi verilsin.

Tüm $m \geq n$ için $I_m = I_n$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa $\mathcal{R}$ halkası, idealler için *artan zincir koşulunu sağlar*.

Örnek.1.1: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında

$$\begin{aligned} (n) \subseteq (m) &\Rightarrow n \in (m) \\ &\Rightarrow n = m.d \\ &\Rightarrow m|n \end{aligned}$$

sıfırdan farklı bir tamsayının farklı bölenlerinin sayısı sonlu olduğundan $\mathbb{Z}$ halkası Tanım.1.1 'i aşıkarak sağlar.

Örnek.1.2: $(9) \subseteq (3) \subseteq (1)$

$$\forall m \geq n \text{ için } I_n = I_m \text{ dır.}$$

Örnek.1.3: $\mathcal{R}$ bir esas ideal halkası olsun.

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ şeklinde $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir dizisi alınsın.

$I = \bigcup I_i$ de bir idealdir. $\mathcal{R}$ bir esas ideal halkasıydı.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow I = (a) \text{ şeklinde bir } a \text{ vardır.} \\ &\Rightarrow a \in I \\ &\Rightarrow a \in I = \bigcup I_i \\ &\Rightarrow a \in I_n \text{ şeklinde bir ideal vardır.} \\ &\Rightarrow I \subseteq I_n \end{aligned}$$

$m \geq n$ için $I = (a) \subseteq I_n \subseteq I_m$ dir.

$I_m \subseteq I = UI_i$ dir.Çünkü $i = 1, 2, \dots, m, \dots$ dir.

$$\Rightarrow I \subseteq I_n \subseteq I_m \subseteq I, \quad m \geq n \Rightarrow I_n = I_m$$

Tanım.1.2: $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin her boş olmayan kümesi (içerme ile kısmi sıralı) en azından bir maksimal elemana sahip ise $\mathcal{R}$ halkasında idealler için *maksimum koşulu geçerlidir* denir.

Teorem.1.1. Bir $\mathcal{R}$ halkasının idealleri ile ilgili aşağıdaki durumlar denktir;

- 1-) $\mathcal{R}$ 'nin idealler için artan zincir koşulunu sağlaması,
- 2-) Maksimum koşulunun, $\mathcal{R}$ de geçerli olması,
- 3-) $\mathcal{R}$ 'nin her idealinin sonlu bir şekilde üretilmiş olması.

İspat:

(1) $\Rightarrow$ (2) olduğunu gösterelim. φ , $\mathcal{R}$ 'nin boştan farklı idealler kümesi olsun.

φ nin maksimal elemanı olmasın.(Çelişki çıkaracağız.)

$\varphi \neq \emptyset \Rightarrow$ bir $I_1 \in \varphi$ vardır.

φ nin maksimal elemanı yoktu.

$\Rightarrow I_1, \varphi$ de maksimal eleman olamaz.

$\Rightarrow I_1 \subseteq I_2$ şeklinde $I_2 \in \varphi$ vardır.

φ nin maksimal elemanı yoktu.

$\Rightarrow I_2, \varphi$ de maksimal eleman olamaz.

Benzer şekilde $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3$ olacak şekilde I_3 vardır.

Bir $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ artan zincir elde edilir. $\mathcal{R}$ de artan zincir koşulu geçerliydi. Bu artan zincir koşuluna aykırıdır. Bu çelişki, φ nin maksimal elemanınımın olmadığı kabulünden çıktı.

φ nin maksimal elemanı olmalıdır.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Şimdide $\mathcal{R}$ de maksimum koşulunun geçerli olduğunu farzedelim.

I , $\mathcal{R}$ 'nin herhangi bir ideali olsun. Eğer $I = \{0\}$ ise $I = (0)$ dır. Aksi halde $a_1 \neq 0$ olmak üzere $a_1 \in I$ vardır. Ya $I = (a_1)$ şeklinde esas idealdir yada $a_2 \notin (a_1)$ şeklinde $a_2 \in I$ vardır.

$$\Rightarrow (a_1) \subset (a_1, a_2) \subseteq I$$

Eğer $I \neq (a_1, a_2)$ ise $(a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3)$ şeklinde $a_3 \in I$ vardır.

$\vdots$

$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset (a_1, a_2, a_3) \subset \dots$ bir artan zincir olur. Maksimal koşulunun olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla bir maksimum elemanı vardır. Bu $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ olsun.

Eğer $I \neq (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ise $a \in I$, $a \notin (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ şeklinde bir a elemanı vardır.

$$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \subset (a, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Bu maksimum koşulu ile çelişir.

$$\Rightarrow I = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \text{ olmak zorundadır.}$$

Yani her ideal sonlu üretilmiştir.

Sonuç olarak (2) $\Rightarrow$ (3) ispatlanmış olur.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Şimdi $\mathcal{R}$ 'nin her idealinin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim.

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ şeklinde bir artan zincir alınsın. $I = \cup I_i$ olsun. I da bir idealdir. $\mathcal{R}$ 'nin her idealinin sonlu üretilmiş olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla $I = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ şeklinde sonlu üretilmiştir.

$$\Rightarrow a_k \in I \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad I = \cup I_i$$

$\Rightarrow a_k \in \cup I_i$. Yani her a_k üretici, verilen zincirin bir I_{i_k} idealinin bir elemanıdır. örneğin ;

$$a_1 \in I_1 \quad , \quad a_2 \in I_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad a_r \in I_r \quad \text{olsun.}$$

$$\Rightarrow a_1 \in I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_r$$

$$\Rightarrow a_1 \in I_r$$

Aynı şekilde $a_2 \in I_2 \subseteq \dots \subseteq I_r$ dir.

$$\Rightarrow a_2 \in I_r$$

$\vdots$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in I_r$ dir. Bu r indisi n olsun.

Böylece I 'nın her üretici I_n dedir.

$$\Rightarrow I \subseteq I_n$$

$m \geq n$ için $I_n \subseteq I_m$ dir. Çünkü I_i ler artan zincir oluşturuyor-

du.

Aynı zamanda $I_m \subseteq \cup I_i = I \quad (i = 1, 2, \dots, m \dots)$

$$\Rightarrow I \subseteq I_n \subseteq I_m \subseteq I$$

$$\Rightarrow I_n = I_m$$

Dolayısıyla zincir koşulunu sağlar. İspat tamamlanmıştır.

Tanım.1.3: İdealler için artan zincir koşulunu sağlayan halkalara *Noetherian halkalar* denir.

Teorem.1.2. Eğer $I, \mathcal{R}$ Noetherian halkasının bir ideali ise bir $n \in \mathbb{Z}_+$ için $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ dir.

İspat:

$\sqrt{I}, \mathcal{R}$ 'nin bir idealidir. Teorem.1.1'den $\sqrt{I}$ sonlu üretilmiştir.

$$\Rightarrow \sqrt{I} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow a_i \in \sqrt{I}$$

$$\Rightarrow a_i^{n_i} \in I \quad \text{şeklinde bir pozitif } n_i \text{ tamsayısı vardır.}$$

$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$ olsun.

Şimdi $k_i \in \mathbb{Z}$ ve $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ olmak üzere $a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ çarpımları ile $(\sqrt{I})^n$ 'i oluşturalım. Bir $i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ indisi için $k_i \geq n_i$, $a_i^{n_i} \in I$ olduğundan $a_i^{k_i} \in I$ dir.

$$\Rightarrow a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \in I$$

$(\sqrt{I})^n$ in tüm üreteçleri I da olduğundan $(\sqrt{I})^n \subseteq I$ dir.

Sonuç: $Q, \mathcal{R}$ Noetherian halkasının bir primary ideali ve $IJ \subseteq Q$ olmak üzere, I ve $J, \mathcal{R}$ 'nin idealleri olsun. Bir $n \in \mathbb{Z}_+$ için ya $I \subseteq Q$ yada $(\sqrt{J})^n \subseteq Q$ dir.

Not: $ab \in Q$, $a \notin Q$, Q primary ideal $\Rightarrow b \in \sqrt{Q} \quad (b^n \in Q)$

Problem: $IJ \subseteq Q$ ve J sonlu üretilmiş ise ya $I \subseteq Q$ yada bir $n \in \mathbb{Z}_+$ için $J^n \subseteq Q$ dur.

Çözüm: $I \not\subseteq Q$ ise $J^n \stackrel{?}{\subseteq} Q$.

$J = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $I \not\subseteq Q$ olsun.

$\Rightarrow a \in I$, $a \notin Q$ şeklinde bir a elemanı vardır.

$$J = (a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow a_1 \in J$$

$$\Rightarrow aa_1 \in IJ \text{ , } IJ \subseteq Q \text{ dı.}$$

$$\Rightarrow aa_1 \in Q$$

$$\Rightarrow aa_1 \in Q \text{ ve } a \notin Q \text{ , } Q \text{ primary}$$

$$\Rightarrow a_1 \in \sqrt{Q}$$

$$\Rightarrow J \subseteq \sqrt{Q}$$

$$\Rightarrow J = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ , } J \subseteq \sqrt{Q}$$

$$\Rightarrow a_i \in J \subseteq \sqrt{Q} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow a_i \in \sqrt{Q}$$

$$\Rightarrow a_i^{n_i} \in Q \text{ şeklinde bir } n_i \in \mathbb{Z} \text{ vardır.}$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_n \text{ olsun. } (a_i^{n_i} \in Q \Rightarrow a_i^n \in Q)$$

Şimdi $k_i \in \mathbb{Z}$ ve $n = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ olmak üzere $a_1^{k_1} . a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}$ çarpımları ile J^n sistemi oluşturulur. $k_i \geq n_i$ olmalıdır.

$$a_i^{n_i} \in Q \text{ , } k_i \geq n_i \Rightarrow a_i^{k_i} \in Q$$

$$\Rightarrow a_1^{k_1} . a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \in Q$$

$$\Rightarrow J^n \subseteq Q \text{ çıkar.}$$

Sonucun İspatı:

$I \not\subseteq Q$ olsun.

Yukardaki problemten $J^m \subseteq Q$ şeklinde $m \in \mathbb{Z}_+$ vardır. Ayrıca $\mathcal{R}$ Noetherian olduğundan $(\sqrt{J})^k \subseteq J$ şeklinde $k \in \mathbb{Z}_+$ vardır. Her iki tarafın m . kuvveti alınırsa $(\sqrt{J})^{mk} \subseteq J^m$ çıkar.

$$\Rightarrow (\sqrt{J})^{mk} \subseteq J^m \text{ , } J^m \subseteq Q \text{ dı.}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{J})^{mk} \subseteq J^m \subseteq Q$$

$$\Rightarrow (\sqrt{J})^{mk} \subseteq Q \text{ , } n = mk \text{ denirse}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{J})^n \subseteq Q \text{ çıkar.}$$

Teorem.1.3. (Hilbert Temel Teoremi) $\mathcal{R}$ bir Noetherian halka ise $\mathcal{R}[x]$ polinom halkasında Noetherian'dır.

İspat:

$I, \mathcal{R}[x]$ 'in sıfırdan farklı herhangi bir ideali olsun. $\mathcal{R}[x]$ 'in Noetherian olduğunu göstermek için, I 'nın sonlu üretilmiş olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk önce $\forall k \geq 0$ tamsayısı için, I da bulunan k dereceli bir polinomun, sıfırdan farklı en büyük dereceden terimin katsayıları olan $r \in \mathcal{R}$ elemanlarını ve sıfırı içeren I_k kümesini gözden geçirelim;

$$I_k = \{r \in \mathcal{R} \mid a_0 + a_1x + \dots + rx^k \in I\} \cup \{0\}$$

$I_k \subseteq I_{k+1}$ olmak üzere I_k 'nın, $\mathcal{R}$ 'nin bir ideali olduğu kolayca gösterilebilir. (Eğer $r \in I_k$ ise ilgili polinom x ile çarpıldığı zaman r, x^{k+1} in katsayısı olur. Böylece $r \in I_{k+1}$ olur. $I_k \subseteq I_{k+1}$ çıkar.)

$$\Rightarrow a_0 + a_1x + \dots + rx^k \in I, \quad x \in \mathcal{R}[x], \quad I \text{ ideal di.}$$

$$\Rightarrow (a_0 + a_1x + \dots + rx^k).x \in I \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow a_0x + a_1x^2 + \dots + rx^{k+1} \in I, \quad r \neq 0 \text{ dı.}$$

$$\Rightarrow r \in I_{k+1}$$

$$\Rightarrow I_k \subseteq I_{k+1}$$

$\mathcal{R}$, Noetherian halkaydı. Böylece $\mathcal{R}$ de artan zincir koşulu geçerli olduğundan tüm $k \geq n$ için $I_k = I_n$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır.

I da i dereceli bir $f_{ij}(x)$ polinomunun en büyük dereceden terimin katsayıları a_{ij} olmak üzere I_i ($i = 1, \dots, n$) ideallerinin herbiri sonlu üretilmiş.

$I_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im_i})$ ($i = 1, \dots, n$) şeklindedir.

Şimdi $m_0 + m_1 + \dots + m_n$ tane $f_{ij}(x)$ polinomunun, I 'yı ürettiğini ispatlamaya çalışalım.

$J = (f_{01}, \dots, f_{0m_0}, \dots, f_{n1}, \dots, f_{nm_n})$ sonlu üretilmiş ve I da olacak şekilde f_{ij} 'leri uygun seçeriz. Yani $f_{ij} \in I$ lerden, sonlu üretilmiş bir

$$J = (f_{01}, \dots, f_{0m_0}, \dots, f_{n1}, \dots, f_{nm_n}) \text{ alınsın.}$$

$$\Rightarrow J \subseteq I \text{ elde edilir. (Çünkü } f_{ij} \in I \text{ dı.)}$$

Ters içermeyi elde etmek için ve ispatı tamamlamak için keyfi bir r dereceli

$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{r-1}x^{r-1} + bx^r$ şeklinde $f(x) \in I$ polinomunu ele alalım.

r üzerinde tümevarım uygulanabilir.

Eğer $r = 0$ ise $f(x) = b_0 \in I_0 \subseteq J$ elde ederiz ispat biter.

I' da olan $r - 1$ dereceli polinomun, $f_{ij}(x)$ ile üretilen ideale ait olduğunu farzedelim.

$r > n$ olmak üzere, $b \in I_r$ en büyük dereceden terimin katsayısı, $\mathcal{R}$ artan zincir koşulunu sağlıyor ve $r > n$

$$\Rightarrow r > n \text{ için } I_r = I_n \text{ dir ve } b \in I_r$$

$$\Rightarrow b \in I_n, \text{ uygun } c_i \in \mathcal{R} \text{ seçilerek}$$

$$b = a_{n_1}c_1 + a_{n_2}c_2 + \dots + a_{n_{m_n}}c_{m_n} \text{ yazılabilir.}$$

O takdirde,

$$f_1(x) = f(x) - x^{r-n}(c_1 f_{n_1}(x) + c_2 f_{n_2}(x) + \dots + c_{m_n} f_{n_{m_n}}(x)) \text{ polinomu,}$$

I ya aittir ve derecesi r den daha küçüktür.

Gerçekte, bu polinomda x^r nin katsayısı,

$$b - \sum_{i=1}^{m_n} c_i a_{n_i} = 0$$

dır.

$$\Rightarrow x^r \text{ nin katsayısı } 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \text{ derecesi } r \text{ den daha küçüktür.}$$

$f(x) \in I$, $f_{n_i}(x) \in I$, I idealdi.

$$f_1(x) = f(x) - x^{r-n}(c_1 f_{n_1}(x) + c_2 f_{n_2}(x) + \dots + c_{m_n} f_{n_{m_n}}(x))$$

$$\Rightarrow f_1(x) \in I \text{ çıkar.}$$

$$\Rightarrow f_1(x) \in I \text{ ve } \deg f_1(x) < r \Rightarrow f_1(x) \in J$$

$$f_1(x) = f(x) - x^{r-n}(c_1 f_{n_1}(x) + c_2 f_{n_2}(x) + \dots + c_{m_n} f_{n_{m_n}}(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = f_1(x) + x^{r-n}(c_1 f_{n_1}(x) + c_2 f_{n_2}(x) + \dots + c_{m_n} f_{n_{m_n}}(x)) \text{ ve } f_1(x) \in J,$$

$$f_{n_j}(x) \in J, \text{ } J \text{ ideal} \Rightarrow f(x) \in J$$

Eğer $r \leq n$ ise $b \in I_r$ ve $I_r = (a_{r_1}, a_{r_2}, \dots, a_{r_{m_r}})$ olduğundan $b = d_1 a_{r_1} + d_2 a_{r_2} + \dots + d_{m_r} a_{r_{m_r}}$ olacak şekilde $d_i \in \mathcal{R}$ vardır.

$$f_2(x) = f(x) - (d_1 f_{r_1}(x) + d_2 f_{r_2}(x) + \dots + d_{m_r} f_{r_{m_r}}(x)) \text{ polinomu } I \text{ da ve derecesi}$$

$r - 1$ veya daha küçük olacaktır. Çünkü bu polinomda x^r nin katsayısı,

$$b - \sum_{i=1}^{m_r} d_i a_{r_i} = 0$$

olduğundan x^r nin katsayısı sıfır olur.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_2(x) &\in I, \quad \deg f_2(x) \leq r-1 \\ \Rightarrow f_2(x) &\in J, \quad f_{r,j} \in J, \quad J \text{ idealdi.} \\ f(x) &= f_2(x) + d_1 f_{r_1}(x) + d_2 f_{r_2}(x) + \dots + d_{m_r} f_{r_{m_r}}(x) \\ \Rightarrow f(x) &\in J \\ \Rightarrow I &\subseteq J \\ \Rightarrow I &\subseteq J, \quad J \subseteq I \text{ dır.} \\ \Rightarrow I &= J, \quad J \text{ sonlu} \\ \Rightarrow I &\text{ sonludur.} \\ \Rightarrow \mathcal{R}[x] &\text{ Noetherian'dır.} \end{aligned}$$

Sonuç: Eğer $\mathcal{R}$, Noetherian ise sonlu sayıda $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmiyeni olan $\mathcal{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom halkasında Noetherian'dır.

$$I^n = \{0\} \Rightarrow I \text{ nilpotent idealdir.}$$

$\forall a \in I$ için $a^n = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}_+$ varsa I nil idealdir.

I nilpotent ideal ise bir nil idealdir.

Levitsky, Noetherian halkalar için karşınının geçerli olduğunu ispatlamıştır. Yani Noetherian halkalarda her nil idealin nilpotent ideal olduğunu ispatlamıştır.

Teorem.1.4.(Levitsky) Bir $\mathcal{R}$ Noetherian halkada asal radikal $\text{Rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin en geniş (büyük) nilpotent idealidir.

$$\text{Rad}\mathcal{R} = \cap \{ \mathcal{P} \mid \mathcal{P}, \mathcal{R} \text{ nin bir asal idealidir. } \}$$

İspat:

Başlangıçta $\mathcal{R}$ Noetherian olduğundan dolayı, maksimum koşulunu kullanarak, $\mathcal{R}$ 'nin maksimal olan bir N nilpotent idealini seçebiliriz.

$$\Rightarrow N^j = \{0\} \text{ dır.}$$

Bizim çabamız, N 'in, $\mathcal{R}$ 'nin en geniş (maksimum) nilpotent ideal olmasıdır. (Tüm diğer nilpotent idealleri içermesi manasındadır.)İspatta bunu elde etmek için, N_1 , $\mathcal{R}$ 'nin herhangi bir nilpotent ideali olsun.

$$\Rightarrow N_1^k = \{0\} \text{ dir. O takdirde } (N + N_1)^{j+k} = \{0\} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow N + N_1 \text{ nilpotenttir.}$$

$$\Rightarrow N \subseteq N + N_1 \text{ ve } N \text{ maksimal nilpotentti.}$$

$$\Rightarrow N = N + N_1$$

$$\Rightarrow N_1 \subseteq N \text{ dir.}$$

Böylece N , $\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotent idealidir.

Her nilpotent ideal, nil idealdir.

N bir nilpotent ideal ise nil idealdir. Böylece N 'in her elemanı nilpotenttir.

$\text{Rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin tüm nilpotent elemanlarının idealidir. Ayrıca N 'nin her elemanı nilpotentdi.

$$\Rightarrow N \subseteq \text{Rad}\mathcal{R} \text{ dir.}$$

Karşıtını göstermek için $a + N$ 'in, $\mathcal{R}/N$ bölüm halkasının bir nilpotent elemanı olduğunu farzedelim.

$$\Rightarrow (a + N)^n = N \text{ şeklinde bir } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow a^n + N = N$$

$$\Rightarrow a^n \in N$$

$$\Rightarrow a^n \in N, N \text{ nil idealdi.}$$

$$\Rightarrow (a^n)^m = 0 \text{ olacak şekilde } m \in \mathbb{Z}_+ \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow a^{nm} = 0$$

$$\Rightarrow a, \mathcal{R} \text{ 'nin nilpotent elemanıdır.}$$

$$\Rightarrow (a) \text{ esas ideal ve nilpotent idealdir.}$$

$$\Rightarrow (a) \text{ nilpotent ideal, } N \text{ maksimum nilpotent idealdir.}$$

$$\Rightarrow (a) \subseteq N$$

$$\Rightarrow a \in (a) \subseteq N$$

$$\Rightarrow a \in N$$

$$\Rightarrow a + N = N$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}/N \text{ bölüm halkası, sıfırdan farklı nilpotent eleman içermez.}$$

Ayrıca $\text{Rad}\mathcal{R}/N$, $\mathcal{R}/N$ 'in tüm nilpotent elemanlarını içerirdi.

$\text{Rad}\mathcal{R}/N = \{N\}$. Yani sıfır asal radikale sahiptir.

Biz biliyoruz ki;

$\text{Rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}/N$ asal radikalsız olacak şekilde $\mathcal{R}$ 'nin en küçük idealidir.

$$\Rightarrow \text{Rad}\mathcal{R} \subseteq N \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \text{Rad}\mathcal{R} = N \quad \text{ve} \quad N, \mathcal{R} \text{ 'nin en geniş nilpotent idealidir.}$$

$$\Rightarrow \text{Rad}\mathcal{R}, \mathcal{R} \text{ 'nin en geniş nilpotent idealidir.}$$

Sonuç 1: Bir Noetherian halkada, bir nil ideal nilpotenttir.

İspat:

$a \in I$, I nil ideal olsun.

$$\Rightarrow a^n = 0$$

$$\Rightarrow a \text{ nilpotent elemandır.}$$

$$\Rightarrow a \in \text{Rad}\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow I \subseteq \text{Rad}\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow I^n \subseteq (\text{Rad}\mathcal{R})^n$$

Ayrıca $\text{Rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotent idealiydi.

$$\Rightarrow (\text{Rad}\mathcal{R})^n = \{0\}$$

$$\Rightarrow (\text{Rad}\mathcal{R})^n = \{0\} \quad , \quad I^n \subseteq (\text{Rad}\mathcal{R})^n$$

$$\Rightarrow I^n \subseteq \{0\}$$

$$\Rightarrow I^n = \{0\}$$

$$\Rightarrow I \text{ nilpotent idealdir.}$$

Sonuç 2: Bir yarıbasit Noetherian halka sıfırdan farklı nilpotent ideal bulundurmaz.

İspat:

$I \neq \{0\}$ nilpotent ideal olsun.

$$\Rightarrow I \text{ nil idealdir.}$$

$$\mathcal{R} \text{ yarıbasit halkaydı.} \Rightarrow \text{rad}\mathcal{R} = \{0\}$$

Her nil ideal $\text{rad}\mathcal{R}$ tarafından içerilir.

$$\Rightarrow I \subseteq \text{rad}\mathcal{R} = \{0\}$$

$$\Rightarrow I \subseteq \{0\}$$

$$\Rightarrow I = \{0\}$$

Tanım.1.4: $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ azalan zinciri verilsin. $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$ olacak şekilde bir n tamsayısı varsa, $\mathcal{R}$, idealler için *azalan zincir koşulunu sağlıyor* denir.

Teorem.1.5. Bir $\mathcal{R}$ halkasının idealleri ile ilgili olarak aşağıdaki durumlar denktir;

1-) $\mathcal{R}$ 'nin, idealler için azalan zincir koşulunu sağlaması,

2-) $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin (içerme ile kısmi sıralı) her boş olmayan kü-

mesinin, bir minimal eleman içermesi.

Bu şartlardan birini sağlayan bir halkaya, *Artinian halka* denir.

Teorem.1.6. Eğer $\mathcal{R}$ Noetherian (Artinian) halka ise $\mathcal{R}$ 'nin homomorfik imajıda Noetherian (Artinian)'dır.

İspat:

f , $\mathcal{R}$ Noetherian halkasından $\mathcal{R}'$ üzerine bir homomorfi olsun.

$\mathcal{R}'$ 'nün ideallerinin bir

$$I_1' \subseteq I_2' \subseteq \dots \subseteq I_n' \subseteq \dots \quad \text{artan zinciri ele alınsın.}$$

$$k = 1, 2, \dots \quad \text{için} \quad I_k = f^{-1}(I_k') \text{ dır.}$$

O takdirde,

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

$\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir artan zincirini teşkil eder, $\mathcal{R}$ Noetherian halkaydı.

$$\Rightarrow \text{Tüm } m \geq n \text{ için } I_m = I_n \text{ olacak şekilde } n \text{ vardır.}$$

$$f \text{ üzerineydi. } \Rightarrow \text{ Her } I_k' \text{ için } I_k' = f(I_k) \text{ şeklinde } I_k \text{ vardır.}$$

$$I_m = I_n \text{ idi. } \Rightarrow I_m' = f(I_m) \text{ , } I_m = I_n$$

$$\Rightarrow I_m' = f(I_m) = f(I_n) = I_n'$$

$$\Rightarrow I_m' = I_n'$$

Yani $m \geq n$ için $I_m' = I_n'$ dür.

$$\Rightarrow \mathcal{R}' \text{ 'ünde artan zincir koşulu sağlanır.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}', \text{ Noetherian halkadır.}$$

Eğer $f = \text{nat}_I : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/I$, $\text{nat}_I(a) = a+I$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuç çıkar.

Sonuç: Eğer I , $\mathcal{R}$ Noetherian (Artinian) halkasının bir ideali ise $\mathcal{R}/I$ bölüm halkasında Noetherian (Artinian)'dir.

$f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/I$, $f = \text{nat}_I$ olarak alınırsa, f homomorfî, $\mathcal{R}$ Noetherian'dır. Böylece $\mathcal{R}/I$ da Noetherian halka olur.

Yardımcı Teorem:

$$1-) J \subseteq K$$

$$2-) J \cap I = K \cap I$$

$$3-) J/I = K/I \quad \text{olacak şekilde } I, J, K, \mathcal{R} \text{ 'nin idealleri ise } J = K$$

dır.

İspat:

$K \subseteq J$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir $k \in K$ alalım.

$$\Rightarrow k+I \in K/I \quad , \quad J/I = K/I \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow k+I \in J/I$$

$$\Rightarrow k+I = j+I \quad \text{şeklinde bir } j \in J \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow k-j \in I \quad \Rightarrow \quad k-j = i \in I \quad \text{şeklinde } i \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow J \subseteq K \quad \text{ve} \quad j \in J \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow j \in K \quad \text{elde edilir.}$$

$$\Rightarrow k \in K \quad , \quad j \in K$$

$$\Rightarrow k-j \in K \quad , \quad k-j = i$$

$$\Rightarrow i \in K \quad , \quad i \in I \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow i \in K \cap I \quad , \quad K \cap I = J \cap I$$

$$\Rightarrow i \in J \cap I$$

$$\Rightarrow i \in J \quad , \quad i = k-j \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow i \in J \quad , \quad k = i+j$$

$$\Rightarrow i \in J \quad , \quad k = i+j \quad , \quad j \in J$$

$$\Rightarrow k = i+j \in J$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow k \in J \\
&\Rightarrow K \subseteq J \\
&\Rightarrow K \subseteq J, \quad J \subseteq K \\
&\Rightarrow K = J
\end{aligned}$$

Teorem.1.7. $I, \mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. Eğer I ve $\mathcal{R}/I$ 'nın her ikisinde Artinian halkalar ise $\mathcal{R}$ de Artinian'dır.

Teorem.1.8. $I, \mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. Eğer I ve $\mathcal{R}/I$ 'nın her ikisinde Noetherian halkalar ise $\mathcal{R}$ de Noetherian'dır.

İspat:

$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_n \subseteq \dots$, $\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin artan bir dizisi olsun.

I ideal olduğundan $J_i \cap I$ larda ideallerdir.

$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_n \subseteq \dots$ di.

$$\Rightarrow J_1 \cap I \subseteq J_2 \cap I \subseteq \dots \subseteq J_n \cap I \subseteq \dots \text{ zinciri alınsın.}$$

nat, $J_k = J_k/I$ olmak üzere,

$$J_1/I \subseteq J_2/I \subseteq \dots \subseteq J_n/I \subseteq \dots \text{ şeklinde } \mathcal{R}/I \text{ 'nın bir idealler zinciri}$$

alınsın.

I ve $\mathcal{R}/I$ Noetherian'dı. Böylece sırasıyla r ve s gibi sayılar vardır ki,

$$m \geq r \text{ için } J_r \cap I = J_m \cap I,$$

$$m \geq s \text{ için } J_s/I = J_m/I \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow n, r \text{ ve } s \text{ den büyük olmak üzere}$$

$$\text{Tüm } m \geq n \text{ için } J_m \cap I = J_n \cap I, \quad J_n/I = J_m/I \text{ dir.}$$

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots \subseteq J_n \subseteq \dots \text{ di.}$$

$$\Rightarrow m \geq n \text{ için } J_n \subseteq J_m \text{ dir.}$$

$J_n \subseteq J_m$, $J_n/I = J_m/I$, $J_m \cap I = J_n \cap I$ ve yukardaki yardımcı teoremden

$$\Rightarrow m \geq n \text{ için } J_n = J_m \text{ dir.}$$

Böylece $\mathcal{R}$, Noetherian halkadır.

Teorem.1.9. Bir $\mathcal{R}$ Artinian bölgesi (tamlık bölgesi ve Artinian halka) bir cisimdir.

İspat:

İspat için, $\mathcal{R}$ 'nin sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal inverse sahip olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir $0 \neq a \in \mathcal{R}$ elemanını alalım.

$(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \dots$ idaelerin azalan zincirini ele alalım.

$\mathcal{R}$, Artinian bölge olduğundan azalan zincir koşulunu sağlar. Azalan zincir koşulu ile bu zincir, sonlu uzunlukta olmalıdır. Böylece

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \dots \supseteq (a^n) = (a^{n+1}) = (a^{n+2}) = \dots \text{ dir.}$$

O takdirde,

$a^n = ra^{n+1}$ olacak şekilde bir $r \in \mathcal{R}$ vardır. Çünkü;

$$(a^n) = (a^{n+1}) \Rightarrow a^n \in (a^n) = (a^{n+1})$$

$$\Rightarrow a^n \in (a^{n+1})$$

$$\Rightarrow a^n = a^{n+1}.r, \quad r \in \mathcal{R}.$$

$\mathcal{R}$, tamlık bölgesi olduğundan sıfır bölensizdir.

$\mathcal{R}$ de kısaltma özelliği vardır, $a^n = r.a^{n+1}$ di.

$$\Rightarrow a^n = r.a^n.a$$

$$\Rightarrow 1 = r.a, \quad 0 \neq a \in \mathcal{R} \text{ olduğundan } \mathcal{R} \text{ de sıfırdan farklı her elemanın inversi vardır.}$$

Böylece $\mathcal{R}$ cisimdir.

Sonuç: Yalnız sonlu sayıda idealleri olan bir tamlık bölgesi, bir cisimdir.

İspat:

a , $\mathcal{R}$ 'nin sıfırdan farklı elemanı olsun. $n \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere (a^n) esas ideallerin kümesini gözönüne alalım. $(a^n) = \{ra^n \mid r \in \mathcal{R}\}$

$\mathcal{R}$, sonlu sayıda farklı ideallere sahip olduğundan $m < n$ ve $m, n \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere $(a^m) = (a^n)$ dir.

$$\Rightarrow a^m = r' a^n \text{ olacak şekilde } r' \in \mathcal{R} \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow a^m = r' a^{n-m}.a^m$$

$$\Rightarrow 1 = r' a^{n-m} = (r' a^{n-m-1}).a$$

$$\Rightarrow a^{-1} = r' a^{n-m-1}$$

$\mathcal{R}$ 'nin sıfırdan farklı her a elemanın inversi vardır. Dolayısıyla $\mathcal{R}$ cisimdir.

Teorem.1.10. Eğer $\mathcal{R}$, bir Artinian halka ise $\mathcal{R}$ 'nin her öz asal ideali, bir maksimal idealidir.

İspat:

I , $\mathcal{R}$ 'nin bir öz asal ideali olsun.

I , asal ideal olduğundan $\mathcal{R}/I$ bir tamlık bölgesidir. Ayrıca $\mathcal{R}$ Artinian olduğundan $\mathcal{R}/I$ bir Artinian'dır.

$\mathcal{R}/I$ Artinian bölgedir ve teorem.1.9 'dan

$$\Rightarrow \mathcal{R}/I \text{ cisimdir.}$$

$$\Rightarrow I \text{ maksimal idealdir.}$$

Sonuç: Bir $\mathcal{R}$ Artinian halkada $\text{rad}\mathcal{R} = \text{Rad}\mathcal{R}$ dir.

İspat:

Teorem.1.10 'dan her asal ideal, maksimal idealdir.

$$\Rightarrow \{ \text{Asal idealler} \} \subseteq \{ \text{Maksimal idealler} \} \quad (1) \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca her maksimal ideal, asal idealdir. Çünkü I herhangi maksimal ideal olsun.

$$\Rightarrow \mathcal{R}/I \text{ cisimdir.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}/I \text{ tamlık bölgesidir.}$$

$$\Rightarrow I \text{ asal idealdir.}$$

$$\Rightarrow \{ \text{Maksimal idealler} \} \subseteq \{ \text{Asal idealler} \} \quad (2) \text{ elde edilir.}$$

$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } \{ \text{Maksimal idealler} \} = \{ \text{Asal idealler} \} \text{ çıkar.}$$

$$\Rightarrow \cap \{ \text{Maksimal idealler} \} = \cap \{ \text{Asal idealler} \} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \text{Rad}\mathcal{R} = \text{rad}\mathcal{R} \text{ elde edilir.}$$

Teorem.1.11. Her Artinian halka herbiri maksimal olan yalnızca sonlu sayıda öz asal ideallere sahiptir.

Teorem.1.12. Eğer $\mathcal{R}$, bir Artinian halka ise $\text{rad}\mathcal{R}$, bir nilpotent idealdir.

İspat:

$$\text{rad}\mathcal{R} \supseteq (\text{rad}\mathcal{R})^2 \supseteq (\text{rad}\mathcal{R})^3 \supseteq \dots \text{ azalan zinciri alınsın.}$$

$\mathcal{R}$, Artinian halka olduğundan $(\text{rad}\mathcal{R})^n = (\text{rad}\mathcal{R})^{n+1} = \dots$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}_+$ vardır.

$I = (\text{rad}\mathcal{R})^n$ diyelim. O takdirde, $I \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$ ve $I^2 = I$ dır. Çünkü
 $(\text{rad}\mathcal{R})^n \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$, $I = (\text{rad}\mathcal{R})^n$ di.
 $\Rightarrow I \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$ dır.

Ayrıca

$$(\text{rad}\mathcal{R})^n = \dots = (\text{rad}\mathcal{R})^{n+n} = \dots \text{ di.}$$

$$\Rightarrow (\text{rad}\mathcal{R})^n = (\text{rad}\mathcal{R})^{2n}$$

$\Rightarrow I = I^2$ dır. Bizim amacımız $I = \{0\}$ olduğunu göstermektir. Çünkü $(\text{rad}\mathcal{R})^n = \{0\}$ olduğunu göstermek istiyoruz. Ayrıca $I = (\text{rad}\mathcal{R})^n$ di.

$I \neq \{0\}$ olduğunu kabul edip çelişki çıkaralım.

$$(i) \quad J \subseteq I$$

$$(ii) \quad JI \neq \{0\}$$

olacak şekilde $\mathcal{R}$ 'nin tüm J ideallerinin kümesini ele alalım. Bu küme I 'yı içerdiğinden boştan farklıdır. Çünkü,

$$(i) \quad I \subseteq I,$$

$$(ii) \quad I.I = I^2 = I \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow I.I \neq \{0\}$$

$\Rightarrow I$ bu iki şartı sağladığından kümeye ait olur.

Böylece bu kümenin minimal elemanı vardır. Bu K olsun.

$\Rightarrow K$, (i) ve (ii) şartlarını sağlar.

$\Rightarrow K \subseteq I$ ve $KI \neq \{0\}$ dır.

$KI \neq \{0\}$ olduğundan $aI \neq \{0\}$ olacak şekilde bir $a \in K$ vardır.

Böylece $(aI)I = aI^2 = aI \neq \{0\} \Rightarrow (aI)I \neq \{0\}$ dır.

$aI \subseteq K$ dır. Çünkü $a \in K$, K ideal, $\forall x \in I \subseteq \mathcal{R} \Rightarrow ax \in K$

$\Rightarrow aI \subseteq K$

$\Rightarrow aI \subseteq K$ ve $K \subseteq I$

$\Rightarrow aI \subseteq K \subseteq I$ dır.

- $$\Rightarrow aI \subseteq I, \quad (aI)I \neq \{0\}$$
- $$\Rightarrow aI, \text{ bu kümeye aittir. } aI \subseteq K \text{ ve } K \text{ bu kümenin en küçük elemanıydı.}$$
- $$\Rightarrow aI = K \text{ olmalıdır.}$$
- $$aI = K, \quad a \in K$$
- $$\Rightarrow ab = a \text{ olacak şekilde bir } b \in I \text{ vardır.}$$
- $$\Rightarrow b \in I, \quad I \subseteq \text{rad}\mathcal{R} \text{ idi.}$$
- $$\Rightarrow b \in \text{rad}\mathcal{R}$$
- $$\Rightarrow 1 - b, \quad \mathcal{R} \text{ 'nin tersinir elemanı olmalıdır.}$$
- $$\Rightarrow (1 - b)c = 1 \text{ şeklinde bir } c \in \mathcal{R} \text{ vardır.}$$
- $$a = a.1 = a.(1 - b).c = (a - ab)c = (a - a)c = 0c = 0$$
- $$\Rightarrow a = 0, \text{ bu } aI \neq \{0\} \text{ ile çelişir.}$$
- Bu çelişki $I \neq \{0\}$ kabülünden çıktı.
- $$\Rightarrow I = (\text{rad}\mathcal{R})^n = \{0\} \text{ dır.}$$
- $$\Rightarrow \text{rad}\mathcal{R}, \text{ nilpotenttir.}$$

Sonuç: Bir $\mathcal{R}$, Artinian halkada aşağıdakiler geçerlidir.

- 1-) $\text{rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotent idealidir.
- 2-) $\mathcal{R}$ 'nin her nil ideali, nilpotenttir.
- 3-) $\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$, sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

İspat:

1-) $\text{rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotent idealidir. İspatlayalım;

I , $\mathcal{R}$ 'nin herhangi bir nilpotent ideali olsun.

- $$\Rightarrow I, \text{ nil idealidir.}$$
- $$\Rightarrow I \text{ 'nin her elemanı nilpotenttir.}$$
- $$\Rightarrow \mathcal{R} \text{ 'nin her nilpotent elemanı } \text{Rad}\mathcal{R} \text{ tarafından içerilir.}$$
- $$\Rightarrow I \subseteq \text{Rad}\mathcal{R}$$

$\mathcal{R}$, Artinian halkaydı. $\Rightarrow \text{Rad}\mathcal{R} = \text{rad}\mathcal{R}$

$$\Rightarrow I \subseteq \text{rad}\mathcal{R}.$$

2-) $\mathcal{R}$ 'nin her nil idealinin, nilpotent olduğunu gösterelim.

I bir nil ideal olsun.

$$\Rightarrow x \in I \text{ için } x^n = 0 \text{ dır.}$$

Her nilpotent eleman $Rad\mathcal{R}$ dedir.

$$\Rightarrow I \subseteq Rad\mathcal{R} = rad\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow I \subseteq rad\mathcal{R} \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow rad\mathcal{R} \text{ nilpotent idealdi.}$$

$$\Rightarrow (rad\mathcal{R})^n = \{0\} \text{ dır.}$$

$I \subseteq rad\mathcal{R}$.Her iki tarafın n .kuvveti alınırsa $I^n \subseteq (rad\mathcal{R})^n$ çıkar.

$$\Rightarrow I^n \subseteq (rad\mathcal{R})^n = \{0\}$$

$$\Rightarrow I^n \subseteq \{0\}$$

$$\Rightarrow I^n = \{0\} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow I \text{ nilpotent idealdir.}$$

3-) J , $\mathcal{R}/rad\mathcal{R}$ 'nin sıfırdan farklı nilpotent ideali olsun.

$$\Rightarrow J \neq \{rad\mathcal{R}\}$$

Bir $a \in \mathcal{R}$ için $a + rad\mathcal{R} \neq rad\mathcal{R}$ olmak üzere bir $a + rad\mathcal{R} \in J$ vardır.

$$\Rightarrow a + rad\mathcal{R} \in J, \quad J \text{ nilpotent idealdi.}$$

$$\Rightarrow (a + rad\mathcal{R})^n = rad\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow a^n + rad\mathcal{R} = rad\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow a^n \in rad\mathcal{R} = Rad\mathcal{R}$$

$\Rightarrow a^n \in Rad\mathcal{R}$ ayrıca $\mathcal{R}$ 'nin tüm nilpotent elemanlarını $Rad\mathcal{R}$ içerir.

$$\Rightarrow a^n, \quad \mathcal{R} \text{ 'nin bir nilpotent elemanıdır.}$$

$$\Rightarrow (a^n)^m = 0 \text{ olacak şekilde bir } m \in \mathbb{Z}_+ \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow a^{nm} = 0$$

$$\Rightarrow a \text{ nilpotent elemandır.}$$

$$\Rightarrow a \in Rad\mathcal{R} = rad\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow a \in rad\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow a + rad\mathcal{R} = rad\mathcal{R} \text{ çelişki çıkar.}$$

$$\Rightarrow J = \{rad\mathcal{R}\} \text{ olmalıdır.}$$

$\Rightarrow \mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$, sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

2. İspat:

$\text{rad}\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin idealidir. Ayrıca $\mathcal{R}$ Artinian halka olduğundan $\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$, Artinian halkadır.

$\Rightarrow \mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotent ideali $\text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R})$ dir.

$\text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}) = \text{rad}\mathcal{R}$ olduğunu gösterirsek, ispat tamamlanır.

$\text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}) \neq \text{rad}\mathcal{R}$ olsun.

$\Rightarrow a \in \mathcal{R}$ olmak üzere sıfırdan farklı bir $a + \text{rad}\mathcal{R} \in \text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R})$ elemanı vardır.

$\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$ Artinian'dır. $\Rightarrow \text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}) = \text{Rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R})$ dir.

$\Rightarrow a + \text{rad}\mathcal{R} \in \text{Rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R})$

Ayrıca $\text{Rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R})$, $\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$ 'nin tüm nilpotent elemanlarının idealidir.

$\Rightarrow a + \text{rad}\mathcal{R}$ nilpotenttir.

$\Rightarrow (a + \text{rad}\mathcal{R})^n = \text{rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow a^n \in \text{rad}\mathcal{R} = \text{Rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow a^n \in \text{Rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow a^n$, $\mathcal{R}$ 'nin nilpotent elemanıdır.

$\Rightarrow (a^n)^m = 0$

$\Rightarrow a^{nm} = 0$

$\Rightarrow a$, $\mathcal{R}$ 'nin nilpotent elemanıdır.

$\Rightarrow a \in \text{Rad}\mathcal{R} = \text{rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow a \in \text{rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow a + \text{rad}\mathcal{R} = \text{rad}\mathcal{R}$ elde edilir.

$\Rightarrow$ Çelişki çıkar.

$\Rightarrow \text{rad}(\mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}) = \text{rad}\mathcal{R}$

$\Rightarrow \mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$ 'nin en geniş nilpotenti sıfır çıktı.

$\Rightarrow \mathcal{R}/\text{rad}\mathcal{R}$, sıfırdan farklı nilpotent ideal içermez.

Teorem.1.13. $\mathcal{R}$, zincir koşulunu sağlayan bir subdirectly indirgenemez ise $\mathcal{R}$ nin her sıfır böleni nilpotenttir. (Yani $\mathcal{R}$, primary bir halkadır.)

İspat:

İlk önce $\mathcal{R}$ 'yi Artinian halka olarak alalım. $a \in \mathcal{R}$, nilpotent olmayan bir sıfır bölen olsun.

$(a) \supseteq (a^2) \supseteq \dots$, esas ideallerin azalan zincirini gözönüne alalım.

Bunların hiçbirisi sıfır ideal değildir. Çünkü a nilpotent değildir.

$$\Rightarrow a^n = 0 \text{ olacak şekilde bir } n \in \mathbb{Z} \text{ yoktur.}$$

$$\Rightarrow a^2 \neq 0, \quad a^3 \neq 0, \quad \dots \text{ dır.}$$

Zincir koşulundan bir $n \in \mathbb{Z}$ için $(a^n) = (a^{n+1})$ dir.

$$\Rightarrow a^n \in (a^{n+1})$$

$$\Rightarrow r \in \mathcal{R} \text{ olmak üzere } a^n = r.a^{n+1} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a^n - r.a^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow a^n(1 - r.a) = 0, \quad a^n \neq 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow (1 - ra) = 0 \text{ ise } 1 = ra \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow a \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow a \text{ sıfır bölen değildir.}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir. Çünkü } a \text{ sıfır bölendi.}$$

$$\Rightarrow (1 - ra) \neq 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow (1 - ra), \mathcal{R} \text{ 'nin sıfır bölenidir.}$$

$$\text{Ayrıca } \mathcal{R} \text{ 'nin her sıfır böleni } \text{ann}\mathcal{R}^v \text{ dedir.}$$

$$\Rightarrow (1 - ra) \in \text{ann}\mathcal{R}^v$$

Böylece $0 \neq x \in \mathcal{R}^v$ için $x(1 - ra) = 0$ dır.

$$\Rightarrow x - rxa = 0$$

Ayrıca a sıfır bölendi. $\Rightarrow a \in \text{ann}\mathcal{R}^v$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{R}^v \text{ için } xa = 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow x - rxa = 0, \quad xa = 0$$

$$\Rightarrow x - r.0 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir.}$$

Bu çelişki, istenildiği gibi a 'yı nilpotent olması için zorlar.

Sonuç: Eğer $\mathcal{R}$, zincir koşulunu sağlayan bir subdirectly indirgenemez ise $\mathcal{R}$ 'nin sıfır bölenlerinin kümesi, bir nil ideal meydana getirir.

İspat:

İlk önce sıfır bölenlerin kümesinin ideal olduğunu göstereceğiz.

a ve b , $\mathcal{R}$ 'nin farklı iki sıfır böleni olsun. O takdirde $ax = 0 = by$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x, y \in \mathcal{R}$ vardır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x) \text{ ve } (y) \text{ esas ideallerinin kesişimi sıfırdan farklıdır.} \\ \Rightarrow 0 \neq l \in (x) \cap (y) \\ \Rightarrow l \in (x) \text{ , } l \in (y) \\ \Rightarrow l = xu \text{ , } l = yv \\ \Rightarrow xu = yv \neq 0 \text{ olmak üzere } u, v \in \mathcal{R} \text{ elemanları vardır.} \end{aligned}$$

O takdirde,

$$\begin{aligned} (a - b)xu &= axu - bxu \text{ , } ax = 0 \text{ dır.} \\ \Rightarrow (a - b)xu &= -bxu \text{ , } xu = yv \text{ di.} \\ \Rightarrow (a - b)xu &= -byv \text{ , } by = 0 \text{ dı.} \\ \Rightarrow (a - b)xu &= 0 \text{ , } xu \neq 0 \text{ , } a \text{ ve } b \text{ farklı sıfır bölendi.} \\ \Rightarrow a - b &\neq 0 \text{ dır.} \\ \Rightarrow a - b &\text{ de sıfır bölendir.} \end{aligned}$$

$0 \neq r \in \mathcal{R}$ için, a bir sıfır bölen olmak üzere acaba ra sıfır bölen midir?

a sıfır bölendi. $\Rightarrow ax = 0$ şeklinde bir $x \neq 0$ vardır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (ra)x &= rax = r.0 = 0 \\ \Rightarrow (ra)x &= 0 \text{ , } x \neq 0 \end{aligned}$$

Ayrıca $ra \neq 0$ dır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (ra)x &= 0 \text{ , } x \neq 0 \text{ , } ra \neq 0 \\ \Rightarrow ra &\text{ sıfır bölendir.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tüm sıfır bölenlerin kümesi bir ideal meydana getirir.

Ayrıca Teorem.1.13 'den $\mathcal{R}$ 'nin her sıfır böleni nilpotenttir.

$\Rightarrow$ Sıfır bölenlerinin oluşturduğu idealin her elemanı nilpotenttir.

$\Rightarrow$ Sıfır bölenlerin kümesi bir nil idealdir.

Teorem.1.14. $I \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$ olmak üzere I , $\mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. Ancak ve ancak $\mathcal{R}$ yerel halka ise $\mathcal{R}/I$ da yerel halkadır.

İspat:

($\Rightarrow$)

Bir yerel halkanın homomorfik imajıda yerel olacağından bu aşıkardır.

$f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/I$, $\mathcal{R}$ yerel halka, f homomorfi olduğundan $\mathcal{R}/I$ yerel halkadır.

($\Leftarrow$)

$\mathcal{R}/I$ yerel halka olsun.

$a + I$, $\mathcal{R}/I$ 'nin bir tersinir elemanı olsun. O takdirde bir $x \in \mathcal{R}$ için

$$(a + I)(x + I) = 1 + I \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow ax + I = 1 + I$$

$$\Rightarrow ax + r = 1 \text{ olacak şekilde } r \in I \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow r = 1 - ax, \quad r \in I, \quad I \subseteq \text{rad}\mathcal{R} \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow 1 - ax \in \text{rad}\mathcal{R}$$

$$\Rightarrow 1 - 1.(1 - ax) \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow 1 - 1 + ax$$

$$\Rightarrow ax \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow (ax)b = 1 \text{ olacak şekilde bir } b \text{ elemanı vardır.}$$

$$\Rightarrow a(xb) = 1$$

$$\Rightarrow a \text{ tersinirdir.}$$

Şimdi c ve b , $\mathcal{R}$ de tersinir olmayan iki eleman olsun.

$$\Rightarrow c + I \text{ ve } b + I \text{ elemanları } \mathcal{R}/I \text{ 'da tersinir değildir. Aynı zamanda}$$

$$\mathcal{R}/I \text{ yerel halkadır.}$$

$$\Rightarrow (c + I) + (b + I) = c + b + I \text{ da tersinir değildir.}$$

$$\Rightarrow c + b, \quad \mathcal{R} \text{ de tersinir değildir.}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R} \text{ bir tek maksimal ideale sahiptir.}$$

Böylece $\mathcal{R}$ 'nin yerel halka olduğu ispatlanır.

Sonuç: $D \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$ olmak üzere $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin sıfır bölenlerinin kümesi bir D ideali olan bir halka olsun. Ancak ve ancak $\mathcal{R}$ yerel ise $\mathcal{R}/D$ de yereldir.

Teorem.1.15. $\mathcal{R}$, aşağıdaki şartları sağlayan bir halka olsun.

- 1-) $rad\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ 'nin sıfırdan farklı bir asal idealdir.
- 2-) $rad\mathcal{R}$, 'yi içeren tüm idealler esas idealdir.
- 3-) Sıfır bölenlerinin kümesi $D \subseteq rad\mathcal{R}$.

O takdirde $\mathcal{R}$, bir yerel halkadır.

İspat :

$rad\mathcal{R}$ 'nin, $\mathcal{R}$ 'nin tüm tersinir olmayan elemanlarının kümesini içerdiğini göstermek yeterlidir.

$rad\mathcal{R} \subseteq rad\mathcal{R}$ ve 2.hipotezden $rad\mathcal{R}$ esas idealdir.

$rad\mathcal{R} = (x)$ olsun ve keyfi bir $a \notin rad\mathcal{R}$ alalım.

Amacımız a 'nın bir inverse sahip olduğunu göstermektir.

$(rad\mathcal{R}, a)$ esas ideal olmalıdır. Çünkü $rad\mathcal{R} \subseteq (rad\mathcal{R}, a)$ dir ve hipotezden $rad\mathcal{R}$ 'yi içeren tüm idealler esas idealdi.

$b \notin rad\mathcal{R}$ olmak üzere $(rad\mathcal{R}, a) = (b)$ diyelim.

$\Rightarrow b \notin rad\mathcal{R}$ dir. Çünkü,

$b \in rad\mathcal{R}$ olsun.

$\Rightarrow (b) \subseteq rad\mathcal{R}$

$\Rightarrow (rad\mathcal{R}, a) \subseteq rad\mathcal{R}$ olur.

$\Rightarrow a \in rad\mathcal{R}$

Fakat $a \notin rad\mathcal{R}$ di.

$\Rightarrow b \notin rad\mathcal{R}$ dir.

$rad\mathcal{R} = (x) \Rightarrow x \in rad\mathcal{R}$, $(rad\mathcal{R}, a) = (b)$

$\Rightarrow x \in (b)$

Böylece uygun bir $y \in \mathcal{R}$ için $x = by$ dir.

$\Rightarrow x \in rad\mathcal{R}$, $x = by$

$\Rightarrow x = by \in rad\mathcal{R}$, $b \notin rad\mathcal{R}$, $rad\mathcal{R}$ asal idealdi.

$\Rightarrow y \in rad\mathcal{R}$

$\Rightarrow y \in rad\mathcal{R} = (x)$

$\Rightarrow y = xc$ gibi bir $c \in \mathcal{R}$ vardır.

$\Rightarrow x = by$, $y = xc$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x = bxc \\
&\Rightarrow x(1 - bc) = 0 \quad , \quad x \neq 0 \quad \text{dı.} \\
&\Rightarrow 1 - bc, \quad \text{sıfır bölendir.} \\
&\Rightarrow 1 - bc \in D \subseteq \text{rad}\mathcal{R} \Rightarrow 1 - bc \in \text{rad}\mathcal{R} \\
&\Rightarrow 1 - 1.(1 - bc) \quad \text{tersinirdir.} \\
&\Rightarrow bc \quad \text{tersinir.} \Rightarrow b \quad \text{tersinirdir.} \\
&\Rightarrow (b) = \mathcal{R} \\
&\Rightarrow (\text{rad}\mathcal{R}, a) = \mathcal{R} \quad \text{dir. Ayrıca } 1 \in \mathcal{R} \quad \text{dı.} \\
&\Rightarrow 1 = t + ra \quad , \quad r \in \mathcal{R} \quad , \quad t \in \text{rad}\mathcal{R} \quad \text{vardır.} \\
&\Rightarrow 1 - ra = t \in \text{rad}\mathcal{R} \Rightarrow 1 - ra \in \text{rad}\mathcal{R} \\
&\Rightarrow 1 - 1.(1 - ra) \quad \text{tersinirdir.} \Rightarrow ra \quad \text{tersinir.} \\
&\Rightarrow a \quad \text{tersinirdir.} \\
&\Rightarrow \mathcal{R} \text{ 'nin tüm tersinir olmayan elemanları } \text{rad}\mathcal{R} \text{ dedir.} \\
&\Rightarrow \mathcal{R} \text{ yerel halkadır.}
\end{aligned}$$

Sonuç: $D \subseteq \text{rad}\mathcal{R}$ olmak üzere $\mathcal{R}$ bir esas ideal halkası olsun. $\text{rad}\mathcal{R}$, sıfırdan farklı asal ideal olmak üzere $\mathcal{R}$ bir yerel halkadır.

Teorem.1.16.(Wedderburn) Bir $\mathcal{R}$ yarıbasit Artinian halka sonlu sayıda cismin direkt toplamıdır.

İspat :

$\mathcal{R}$, sonlu sayıda maksimal ideale sahip olduğundan ideallerin herhangi biri ihmal edilirse diğerlerinin kesişiminin sıfırdan farklı olduğunu farzedelim.

Buna bağlı olarak $\cap M_i = \{0\}$ olacak şekilde $\mathcal{R}$ 'nin $M_1, M_2, \dots, M_n$ maksimal idealleri mevcuttur. Fakat

$$\forall i \text{ için } I_i = \bigcap_{k \neq i} M_k \neq \{0\} \quad \text{dır.}$$

M_i maksimal olduğundan $\mathcal{R} = I_i + M_i$ ve $I_i \cap M_i = \{0\}$ dir. Öyleki bu direkt toplamıdır. Böylece $\text{Nat}_{M_i} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/M_i$ doğal fonksiyonu, I_i 'yi bir cisim yaparak, bir $I_i \cong \mathcal{R}/M_i$ izomorfizmasına neden olur.

$\mathcal{R} = I_i + M_i$ bağıntısından dolayı her bir $a \in \mathcal{R}$ için

$$a = x_i + y_i \quad , \quad x_i \in I_i \quad , \quad y_i \in M_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

yazılabilir.

k , 1 ile n arasında bir tamsayı olsun.

$i \neq k$ için $x_i \in I_i \subseteq M_k$ olmak üzere $a - x_k = y_k \in M_k$ olduğundan dolayı

$$a - \sum_{i=1}^n x_i = (a - x_k) - \sum_{i \neq k} x_i \in M_k$$

dır. Çünkü

$$\begin{aligned} I_i &= \bigcap_{k \neq i} M_k \neq \{0\} \quad , \quad x_i \in I_i \\ \Rightarrow x_i &\in I_i \subseteq M_k \quad \Rightarrow x_i \in M_k \\ \Rightarrow \sum_{i \neq k} x_i &\in M_k \\ \Rightarrow a &= x_k + y_k \quad , \quad y_k \in M_k \\ \Rightarrow a - x_k &= y_k \in M_k \\ \Rightarrow a - x_k &\in M_k \quad , \quad \sum_{i \neq k} x_i \in M_k \\ \Rightarrow a - \sum_{i=1}^n x_i &\in M_k \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} \Rightarrow a - \sum_{i=1}^n x_i &\in \bigcap M_k \quad , \quad \bigcap M_k = \{0\} \\ \Rightarrow a - \sum_{i=1}^n x_i &\in \{0\} \\ \Rightarrow a - \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \\ \Rightarrow a &= \sum_{i=1}^n x_i \quad , \quad x_i \in I_i \quad , \quad a \in \mathcal{R} \\ \Rightarrow \mathcal{R} &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \end{aligned}$$

demektir.

$i \neq k$ için $I_i \subseteq M_k$ idi.

$$\Rightarrow \sum_{i \neq k} I_i \subseteq M_k$$

$$\Rightarrow I_k \cap \left(\sum_{i \neq k} I_i \right) \subseteq I_k \cap M_k = \{0\}$$

$$\Rightarrow I_k \cap \sum_{i \neq k} I_i = \{0\}$$

$\mathcal{R}$, I_i 'lerin direkt toplamıdır. I_i lerde cisimdir. Böylece $\mathcal{R}$, sonlu sayıda cismin direkt toplamıdır.

Sonuç: Herhangi bir yarıbasit Artinian halka Noetherian'dır.



BÖLÜM II

NOETHERIAN HALKALARDA DİĞER BAZI SONUÇLAR

Tanım.2.1: I , $\mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun.Eğer I , I 'yı içeren $\mathcal{R}$ 'nin öz ideallerinin sonlu bir kesişimi değilse I 'ya *indirgenemez* denir.Aksi halde I 'ya *indirgenebilir* denir.

Herhangi bir P asal ideal daima indirgenemezdir.

İspat:

P asal ideal olsun.Aynı zamanda indirgenebilir olsun.Yani I ve J , $P = I \cap J$, $P \subseteq I$, $P \subseteq J$ sağlayan $\mathcal{R}$ 'nin idealleri olduğunu farzedelim.

$\Rightarrow a \in I - P$, $b \in J - P$ olacak şekilde a ve b elemanlarını seçebiliriz.

$\Rightarrow a \in I$, $b \in J$, I ve J ideal

$\Rightarrow ab \in I, J$

$\Rightarrow ab \in I \cap J$, $I \cap J = P$

$\Rightarrow ab \in P$, $a \notin P$, $b \notin P$ di.

$\Rightarrow P$, asal ideal değildir.

$\Rightarrow$ Çelişkidir.

$\Rightarrow P$, indirgenemezdir.

Yardımcı Teorem.1: Bir $\mathcal{R}$ Noetherian halkada her ideal indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimidir.

İspat:

İndirgenemez ideallerin sonsuz kesişimi olan $\mathcal{R}$ 'nin tüm ideallerinin ailesi $\mathcal{F}$ olsun.(Eğer $\mathcal{F} = \emptyset$ bulunursa teorem ispatlanır.)

Eğer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ise $\mathcal{R}$ Noetherian olduğundan ve Teorem.1.1'den $\mathcal{F}$ kümesinde maksimal olan bir I ideali vardır.

O takdirde $\mathcal{R}$ 'nin I 'yı içeren herhangi öz ideali, indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimidir.Çünkü $I \subseteq J$ olsun. $I, \mathcal{F}$ 'in maksimaliydi.Öyleyse $J \notin \mathcal{F}$ dir.Burdanda J 'nin indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimi olduğu çıkar.

$I \in \mathcal{F}$ olduğundan I indirgenemez değildir.

$\Rightarrow I$ 'yı içeren ve $I = J \cap K$ olan J ve K idealleri vardır.

$\Rightarrow I \subseteq J$, $I \subseteq K$, $I, \mathcal{F}$ in maksimaliydi.

$\Rightarrow J, K \notin \mathcal{F}$ dir.

$\Rightarrow J$ ve K indirgenemez ideallerin sonlu kesişimidir ve $I = J \cap K$ dır.

$\Rightarrow I$, indirgenemez ideallerin sonlu kesişimidir. Bu $I \in \mathcal{F}$ ile çelişir.

$\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$ dir.

Yani her ideal, indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimidir.

Yardımcı Teorem.2: Bir $\mathcal{R}$ Noetherian halkada her indirgenemez ideal primary idealdir.

İspat:

Amacımız $\mathcal{R}$ 'nin primary olmayan I idealinin indirgenebilir olduğunu göstermektir.

I primary olmadığından $ab \in I$, $b \notin I$ ve a 'nin hiçbir kuvveti I da olmayan, $\mathcal{R}$ de bir a ve b eleman çifti vardır.

$$I : (a) \subseteq I : (a^2) \subseteq \dots \subseteq I : (a^n) \subseteq \dots$$

$\mathcal{R}$ 'nin ideallerinin bir artan zincirini oluşturur. Bunu ispatlayalım ;

$$(a) \supseteq (a^2) \supseteq \dots \supseteq (a^n) \supseteq \dots$$

di.

$$I : (a) = \{ r \in \mathcal{R} \mid r(a) \subseteq I \}$$

$I : (a) \subseteq I : (a^2)$ olduğunu gösterelim.

$r \in I : (a)$ olsun. $\Rightarrow r(a) \subseteq I$

$\Rightarrow ra \in I$ dır. Ayrıca $a \in \mathcal{R}$, I idealdi.

$\Rightarrow ra.a = ra^2 \in I$, $ra^2 \in r(a^2)$

$\Rightarrow ra^2 \in I$, $ra^2 \in r(a^2)$

$\Rightarrow r(a^2) \subseteq I$

$$\Rightarrow I : (a) \subseteq I : (a^2)$$

Eğer $ra^n \in I$ ise $ra^{n+1} \in I$ dir.

$\mathcal{R}$, Noetherian halka olduğundan $I : (a^k) = I : (a^{k+1})$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır.

$I = (I, a^k) \cap (I, b)$ dir. Bunu gösterelim;

$$I \subseteq (I, a) \quad \text{ve} \quad I \subseteq (I, b) \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow I \subseteq (I, a^k) \cap (I, b) \quad (1) \quad \text{elde edilir.}$$

$$(I, a^k) \cap (I, b) \stackrel{?}{\subseteq} I$$

$x \in (I, a^k) \cap (I, b)$ alalım.

$$\Rightarrow x = i + ra^k = i' + r'b, \quad r, r' \in \mathcal{R}, \quad i, i' \in I$$

$$\Rightarrow ra^k = i' - i + r'b \quad /a$$

$$\Rightarrow ra^{k+1} = (i' - i)a + r'(ab) \in I \Rightarrow \forall r \in \mathcal{R} \quad \text{için} \quad ra^{k+1} \in I$$

$$\Rightarrow r(a^{k+1}) \subseteq I \Rightarrow r \in I : (a^{k+1})$$

$$\Rightarrow r \in I : (a^{k+1}), \quad I : (a^k) = I : (a^{k+1})$$

$$\Rightarrow r \in I : (a^{k+1}) = I : (a^k) \Rightarrow r \in I : (a^k)$$

$$\Rightarrow ra^k \in I, \quad x = i + ra^k, \quad i \in I$$

$$\Rightarrow x \in I$$

$$\Rightarrow (I, a^k) \cap (I, b) \subseteq I \quad (2) \quad \text{elde edilir.}$$

Ayrıca $I \subseteq (I, a^k)$ ve $I \subseteq (I, b)$ dan $I \subseteq (I, a^k) \cap (I, b)$ dir.

(1) ve (2) 'den $I = (I, a^k) \cap (I, b)$ çıkar.

$\Rightarrow I$, indirgenebilirdir.

Teorem.2.1.(Noether) Bir Noetherian halkada her ideal, primary ideallerin sonlu bir kesişimi olarak ifade edilebilir.

Q_i , primary ideal olmak üzere $I = \bigcap_i Q_i$ 'ye, I 'nın bir *primary ifadesi* denir.

Q_i lere, ifadenin *primary elemanları* denir. $\sqrt{Q_i}$ lerde, I ile ilgili *asal* ideallerdir.

Tanım.2.2: Eğer bir $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ primary ifadesi aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa kalıntısız olarak adlandırılacak,

1-) Q_i , diğer primary elemanların kesişimini içermez.Yani

$$\bigcap_{i \neq j} Q_i \neq \cap Q_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

2-) $i \neq j$ için $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$.

$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ise Q_i lerin yeterli kadarını ihmal ederek, bir kalıntısız ifade elde edilebilir.Bunun için aynı ilgili asal ideale sahip olanların kesişimi Q'_i olsun.Yani

$$\sqrt{Q_{i1}} = \sqrt{Q_{i2}} = \dots = \sqrt{Q_{ir}}$$

olmak üzere

$$Q'_i = Q_{i1} \cap Q_{i2} \cap \dots \cap Q_{ir}$$

olsun.

Öyleyse Q'_i primary idealdir ve $\sqrt{Q'_i} = \sqrt{Q_{ik}}$ dır. Ayrıca $I = \bigcap_i Q'_i$ dır.

Q'_i lerin nil radikalleri birbirinden farklıdır.Yani $i \neq j$ için $\sqrt{Q'_i} \neq \sqrt{Q'_j}$ dır.

Çünkü $\sqrt{Q'_i} = \sqrt{Q_{ik}}$, $\sqrt{Q'_j} = \sqrt{Q_{jr}}$ ve $\sqrt{Q_{ik}} \neq \sqrt{Q_{jr}}$ dır. Böylece

Tanım.2.2 nin 2.şartı sağlandı.

$\bigcap_{i \neq j}^n Q'_j \subseteq Q'_i$ olan Q'_i leri atarsak, $\bigcap_{i \neq j} Q'_j \not\subseteq Q'_i$ olur.

$\bigcap_{i \neq j} Q'_j \neq \bigcap_i Q'_i$ olur. Tanım.2.1'in 1.şartıda sağlanır.Verilen primary ifade, bu yolla bir kalıntısız ifadeye dönüştürülebilir.

Teorem.2.2. Bir Noetherian halkada her ideal, sonlu kalıntısız primary ifadeye sahiptir.

Yardımcı Teorem.3: $\mathcal{R}$, herhangi bir halka ve I da, $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ sonlu kalıntısız primary ifadeye sahip, $\mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. $\mathcal{R}$ 'nin bir P asal idealinin $\sqrt{Q_i}$ leri içermesi için gerek ve yeter koşul I 'yıda içermesidir.

İspat:

($\Rightarrow$)

$\sqrt{Q_i} \subseteq P$ olsun.

$$Q_i \subseteq \sqrt{Q_i} \text{ , } \sqrt{Q_i} \subseteq P \Rightarrow Q_i \subseteq \sqrt{Q_i} \subseteq P$$

$$\Rightarrow Q_i \subseteq P$$

$$\Rightarrow \bigcap_i^n Q_i \subseteq P \text{ , } I = \bigcap_i^n Q_i$$

$$\Rightarrow I \subseteq P$$

($\Leftarrow$)

$I \subseteq P$ iken $\sqrt{Q_i} \not\subseteq P$ olsun.

$\sqrt{Q_i} \not\subseteq P \Rightarrow$ Herbir i için $a_i \in \sqrt{Q_i}$ ve $a_i \notin P$ olacak şekilde bir a_i elemanı seçebiliriz.

$$\Rightarrow a_i \in \sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow a_i^{k_i} \in Q_i \text{ olacak şekilde } k_i \text{ tamsayısı vardır.}$$

$$a = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \forall i \text{ için } a \in Q_i \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow a \in \bigcap_i^n Q_i = I \Rightarrow a \in I$$

$$\Rightarrow a \in I \text{ , } I \subseteq P \Rightarrow a \in P$$

$$\Rightarrow a = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \in P$$

Ayrıca $a_1 \notin P$ dir. $\Rightarrow a_1^{k_1} \notin P$ dir.

$$\Rightarrow a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \in P \text{ , } a_1^{k_1} \notin P \text{ , } P \text{ asal idealdi.}$$

$$\Rightarrow a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} \in P \text{ , } a_2^{k_2} \notin P \text{ asal idealdi.}$$

$$\Rightarrow a_3^{k_3} \dots a_n^{k_n} \in P$$

$\vdots$

$$\Rightarrow a_n^{k_n} \in P \text{ , } P \text{ asal idealdi.}$$

$$\Rightarrow a_n \in P \text{ olmalı.}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir. Çünkü } a_n \notin P \text{ di.}$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_i} \subseteq P \text{ dir.}$$

Eğer $\mathcal{R}$ 'nin bir asal ideali, I 'yı içeren asal ideallerin kümesinde minimal ise buna I idealinin *minimal asalı* denir.

Teorem.2.3. Bir Noetherian halkada bir ideal, sonlu sayıda minimal asal ideallere sahiptir.

Teorem.2.4. $\mathcal{R}$ halkasının bir I ideali sonlu bir kalıntısız primary ifadeye sahip yani $I = \bigcap_i^n Q_i$ ve P , $\mathcal{R}$ 'nin bir asal ideali olsun. Bir i için $P = \sqrt{Q_i}$ ise $P = \sqrt{I : (a)}$ olacak şekilde bir $a \notin I$ elemanı vardır.

İspat:

Verilen bir i indisi için $P = \sqrt{Q_i}$ olsun.

I , kalıntısız primary ifadeye sahip olduğundan $\bigcap_{k \neq i} Q_k \neq \bigcap_k Q_k = I$ dır.

$$\Rightarrow \bigcap_{k \neq i} Q_k \neq I$$

$$\Rightarrow a \in \bigcap_{k \neq i} Q_k, \quad a \notin I, \quad a \notin Q_i \quad \text{şeklinde bir } a \text{ elemanı}$$

vardır.

Böyle bir a elemanı için $I : (a) \subseteq \sqrt{Q_i} \subseteq \sqrt{I : (a)}$ (1') dır. Bunu gösterelim;

$$I : (a) \stackrel{?}{\subseteq} \sqrt{Q_i}$$

$$I = \bigcap Q_i \subseteq Q_i \Rightarrow I \subseteq Q_i$$

$$I : (a) = \{ r \in \mathcal{R} \mid (a)r \subseteq I \}$$

$$\Rightarrow x \in I : (a) \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow (a)x \subseteq I$$

$$\Rightarrow (a)x \in I \text{ ve } I \subseteq Q_i$$

$$\Rightarrow ax \in Q_i, \quad a \notin Q_i, \quad Q_i \text{ primary idealdi.}$$

$$\Rightarrow x \in \sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow I : (a) \subseteq \sqrt{Q_i} \quad (1)$$

$$\sqrt{Q_i} \stackrel{?}{\subseteq} \sqrt{I : (a)}$$

$$a \in \bigcap_{i \neq k} Q_k \text{ ve } \bigcap_{i \neq k} Q_k \text{ idealdi.}$$

$$\Rightarrow aQ_i \subseteq \bigcap_{i \neq k} Q_k, \quad aQ_i \subseteq Q_i$$

$$\Rightarrow aQ_i \subseteq \bigcap_{\forall k} Q_k = I$$

$$\Rightarrow aQ_i \subseteq I$$

$$\Rightarrow Q_i \subseteq I : (a)$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_i} \subseteq \sqrt{I : (a)} \quad (2)$$

(1) ve (2) den (1') elde edilir.

$b \notin \sqrt{Q_i}$ ve $bc \in I : (a)$ olsun. O takdirde,

$$bc \in I : (a) \text{ ve } I : (a) = \{ r \in \mathcal{R} \mid (a)r \subseteq I \}$$

$$\Rightarrow (a)bc \subseteq I$$

$$\Rightarrow abc \in I, \quad I = \cap Q_i \Rightarrow abc \in \cap Q_i$$

$$\Rightarrow abc \in Q_i \Rightarrow abc \in Q_i, \quad Q_i \text{ primary ideal, } b \notin \sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow ac \in Q_i$$

Ayrıca $a \in \cap_{k \neq i} Q_k$ dır.

$$\Rightarrow (a) \subseteq \cap_{k \neq i} Q_k \text{ elde edilir.}$$

$$\Rightarrow (a) \subseteq \cap_{k \neq i} Q_k, \quad ac \in (a) \Rightarrow ac \in \cap_{k \neq i} Q_k$$

$$\Rightarrow ac \in \cap_{k \neq i} Q_k, \quad ac \in Q_i \text{ idi.}$$

$$\Rightarrow ac \in \cap_k Q_k = I$$

$$\Rightarrow ac \in I \Rightarrow a / ac \in I, \quad I \text{ ideal.}$$

$$\Rightarrow a^2 c \in I$$

$\vdots$

$$\Rightarrow (a)c \subseteq I \Rightarrow c \in I : (a)$$

Sonuçta

$$b \notin \sqrt{Q_i}, \quad bc \in I : (a) \Rightarrow c \in I : (a) \text{ dır ve (1') dan}$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_i} = \sqrt{I : (a)}, \quad P = \sqrt{Q_i} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{I : (a)} \text{ elde edilir.}$$

Teorem.2.5. Bir $I = \cap_{i=1}^n Q_i$ sonlu kalıntısız ifade olmak üzere, $I, \mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. Ancak ve ancak I yarıasal ise her bir $Q_i, \mathcal{R}$ 'nin asal idealidir.

İspat:

($\Leftarrow$)

$Q_i, \mathcal{R}$ 'nin asal ideali olsun.

$$a \in \sqrt{I} \Rightarrow n \in \mathbb{Z} \text{ için } a^n \in I \text{ dır. } I = \cap_{i=1}^n Q_i$$

$$\Rightarrow \forall i \text{ için } a^n \in Q_i, \quad Q_i \text{ asal ideal.}$$

$$\Rightarrow \forall i \text{ için } a \in Q_i \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a \in \bigcap_{i=1}^n Q_i = I \\
&\Rightarrow a \in I \\
&\Rightarrow \sqrt{I} \subseteq I, \quad I \subseteq \sqrt{I} \Rightarrow I = \sqrt{I} \\
&\Rightarrow I \text{ yarıasaldır.}
\end{aligned}$$

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}
I = \sqrt{I} \text{ olsun. } &\Rightarrow I = \sqrt{I} = \sqrt{\bigcap_i Q_i} = \bigcap_i \sqrt{Q_i} \\
&\Rightarrow I = \bigcap_i \sqrt{Q_i}
\end{aligned}$$

Primary (gerçekte asal) ideallerin bir kesişimi olarak I 'nin bir kalıntısız ifadesi önemlidir. Olmadığını farzedelim;

$I = \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i}$ olacak şekilde pozitif bir j tamsayısı varolsun. O takdirde,

$$\begin{aligned}
I &= \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i} \supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i \supseteq I \\
&\Rightarrow I \supseteq \bigcap_{i \neq j} Q_i \supseteq I \Rightarrow I = \bigcap_{i \neq j} Q_i
\end{aligned}$$

Bu, I 'nin verilen ifadesinin kalıntısız olması hipoteziyle çelişir.

$$\Rightarrow \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i} \neq \bigcap \sqrt{Q_i} \text{ olur.}$$

Bundan dolayı $b \notin \sqrt{Q_j}$, $b \in \bigcap_{i \neq j} \sqrt{Q_i}$ şeklinde b vardır.

$\sqrt{Q_j}$ idealinin bir a elemanı alınsın.

$$\Rightarrow a \in \sqrt{Q_j}, \quad b \notin \sqrt{Q_j} \Rightarrow ab \in \sqrt{Q_j}$$

$$b \in \sqrt{Q_i} \Rightarrow ab \in \sqrt{Q_i}$$

$$\Rightarrow ab \in \bigcap_i \sqrt{Q_i} = I \subseteq Q_j$$

$$\Rightarrow ab \in Q_j, \quad b \notin \sqrt{Q_j}, \quad Q_j \text{ primary idealdi.}$$

$$\Rightarrow a \in Q_j$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_j} \subseteq Q_j, \quad Q_j \subseteq \sqrt{Q_j}$$

$$\Rightarrow \sqrt{Q_j} = Q_j \Rightarrow Q_j \text{ asal idealdir.}$$

Çünkü $ab \in Q_j$, $a \notin Q_j$ olsun. ($b \in Q_j$)

$$\Rightarrow a \notin Q_j, \quad ab \in Q_j, \quad Q_j \text{ primary idealdi.}$$

$$\Rightarrow b \in \sqrt{Q_j} = Q_j$$

$$\Rightarrow b \in Q_j \Rightarrow Q_j \text{ asal idealdir.}$$

Sonuç: Bir Noetherian halkada, bir yarıasal ideal, asal ideallerin sonlu bir kesişimidir.

Teorem.2.6.(Cohen) Bir $\mathcal{R}$ halkası ancak ve ancak her asal ideali sonlu üretilmiş ise Noetherian'dır.

İspat:

($\Leftarrow$)

$\mathcal{R}$, Noetherian olsun. Teorem.1.1'den her ideali sonlu üretilmiş olmalıdır. $\mathcal{R}$ 'nin her asal idealide sonlu üretilmiştir.

($\Rightarrow$)

$\mathcal{R}$ 'nin her asal ideali sonlu üretilmiş olsun. Fakat $\mathcal{R}$, Noetherian olmasın. Böylece $\mathcal{R}$ 'nin sonlu üretilmeyen ideallerinin topluluğu $\mathcal{F}$ boş olmamalıdır. Zorn Yardımcı Teoremi'nden $\mathcal{F}$ bir maksimal eleman içermelidir. Bu I olsun. I hipotezden dolayı, $\mathcal{R}$ 'nin asal ideali değildir.

Sonuç olarak, $ab \in I$ olacak şekilde, $\mathcal{R}$ 'nin I da olmayan a ve b elemanları mevcuttur.

(I, b) ve $I : (b)$ ideallerinin her ikisinde I 'yı içerir. Özellikle $a \in I : (b)$ dir. Çünkü,

$$\begin{aligned} ab \in I &\Rightarrow a(b) \subseteq I \\ &\Rightarrow a \in I : (b) \end{aligned}$$

dır.

$I, \mathcal{F}$ 'de maksimal eleman olduğundan, bu idealler sonlu üretilmiştir.

Böylece $(I, b) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ve $I : (b) = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ dir.

O takdirde,

$(I, b) = (a_1, a_2, \dots, a_n, b)$, $a_i \in I$, $r_i \in \mathcal{R}$ olmak üzere $c_i = a_i + br_i$ dir.

a_i, bd_j elemanları ile üretilen J idealini gözden geçirelim. Başka bir deyişle

$$J = (a_1, a_2, \dots, a_n, bd_1, \dots, bd_m)$$

olsun.

$$\begin{aligned} I : (b) = (d_1, d_2, \dots, d_m) &\Rightarrow d_i(b) \subseteq I \\ &\Rightarrow d_i b \in I, \quad a_i \in I \end{aligned}$$

$\forall i$ için $bd_i \in I$, $a_i \in I$ olduğundan $J \subseteq I$ dir.

$$I \stackrel{?}{\subseteq} J$$

Bunu göstermek için x , I 'nin herhangi bir elemanı olsun.

$$\Rightarrow x \in I, \quad I \subseteq (I, b)$$

$$\Rightarrow x \in (I, b) \quad \text{olduğundan}$$

$$x = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + by \quad (y_i, y \in \mathcal{R})$$

yazılabilir.

$$\Rightarrow a_i \in I, \quad x \in I, \quad x = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + by$$

$$\Rightarrow by \in I$$

$$\Rightarrow y \in I : (b) = (d_1, d_2, \dots, d_m)$$

$$\Rightarrow y = d_1 z_1 + d_2 z_2 + \dots + d_m z_m$$

olacak şekilde $z_i \in \mathcal{R}$ elemanları vardır.

$$\Rightarrow x = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + b(d_1 z_1 + d_2 z_2 + \dots + d_m z_m)$$

$$\Rightarrow x = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n + (bd_1)z_1 + (bd_2)z_2 + \dots + (bd_m)z_m$$

$$\Rightarrow x \in J$$

$$\Rightarrow I \subseteq J$$

$$\Rightarrow I \subseteq J, \quad J \subseteq I \Rightarrow I = J$$

$$\Rightarrow I \text{ sonlu üretilmiş bir idealdir.}$$

Bu $I \in \mathcal{F}$ ile çelişir.

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$$

$\mathcal{R}$ 'nin her ideali sonlu üretilmiştir. Buda $\mathcal{R}$ 'nin Noetherian halka olması demektir.

Ayrıca $I, \mathcal{R}$ 'nin bir ideali olsun. $b \in \mathcal{R}$ için (I, b) ve $I : (b)$ her ikisinde sonlu üretilmiş ise I da sonludur. (Çünkü $I \subseteq (I, b)$ ve $I \subseteq I : (b)$ dir.)

Cohen Teoremi'nin bir uygulaması olarak, aşağıdaki veriliyor.

Sonuç: Eğer $\mathcal{R}$, her bir maksimal ideali, bir idempotent tarafından üretilen halka ise $\mathcal{R}$, Noetherian'dır.

İspat:

İlkönce $\mathcal{R}$ 'nin her primary idealinin maksimal olduğunu ispatlarız. Yani I maksimal olmayan primary ideal olsun.

I bir M maksimal ideal tarafından icerilecektir. Hipotezden M bir idempotent üretecine sahiptir. e , 0 ve 1 den farklı bir idempotent olmak üzere $M = (e)$ olsun.

(Eğer $e = 0$ ise $\mathcal{R}$ bir cisim olur. İspat tamamlanır.)

$$e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0, \quad 0 \in I \Rightarrow e(1-e) \in I$$

$$I \subset M = (e) \Rightarrow e \notin I$$

$$\Rightarrow e(1-e) \in I, \quad e \notin I, \quad I \text{ primary idealdi.}$$

$$\Rightarrow (1-e)^n \in I \subseteq M$$

$$\Rightarrow (1-e)^n \in M$$

$$\Rightarrow (1-e)^n = 1 - \binom{n}{1} 1.e + \binom{n}{2} 1.e^2 + \dots - e^n \in M$$

$$\Rightarrow 1-e = (1-e)^n + \binom{n}{1} e - \binom{n}{2} e \dots \in M$$

$$\Rightarrow 1-e \in M = (e)$$

$$\Rightarrow 1-e, e \in M$$

$$\Rightarrow 1-e+e \in M$$

$$\Rightarrow 1 \in M, \quad M \text{ maksimal idealdi.}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir.}$$

Her primary ideal, maksimal idealdir.

Her asal ideal, primary idealdir. Bunu ispatlayalım;

I , bir asal ideal, $ab \in I$ ve $a \notin I$ olsun.

$$\Rightarrow b \in I \text{ olup, } n=1 \text{ için } b^n \in I \text{ dır. Yani } I \text{ primary}$$

idealdir.

Sonuçta

$$\text{Asal ideal} \Rightarrow \text{Primary ideal} \Rightarrow \text{Maksimal ideal olur.}$$

Hipotezden her maksimal ideal sonlu üretilmiştir. Böylece $\mathcal{R}$ 'nin her asal ideali sonlu üretilmiş olur. Cohen Teoremin'den $\mathcal{R}$ Noetherian halkadır.

Yardımcı Teorem.4: I sonlu üretilmiş olmak üzere, I ve J , $\mathcal{R}$ 'nin iki ideali olsun. Eğer $IJ = I$ ise $(1-r)I = \{0\}$ olacak şekilde bir $r \in J$ vardır.

İspat:

I 'nın $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemanlarıyla üretilmiş olduğunu farzedelim.

$I_i, (a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ idealini gösterebiliriz.

$$\Rightarrow I_{n+1} = \{0\} \text{ dir.}$$

i üzerinde tümevarımla $(1 - r_i)I \subseteq I_i$ olacak şekilde bir $r_i \in J$

($i = 1, 2, \dots, n+1$) elemanının varlığını ispatlayacağız. Özellikle r_{n+1} , teoremin ifadesinde bahsedilen eleman olacaktır. Çünkü;

$$(1 - r_{n+1})I \subseteq I_{n+1} = \{0\}$$

$$\Rightarrow (1 - r_{n+1})I = \{0\}$$

$$i = 1 \text{ için } I_1 = I \text{ ve } r_1 = 0 \text{ alınabilir.}$$

$$\Rightarrow (1 - 0)I \subseteq I_1$$

$$\Rightarrow I \subseteq I_1 = I$$

Yani $i = 1$ için doğrudur.

Tümevarım hipotezini kullanarak, $I \subseteq IJ$ olacak şekilde bir $r_i \in J$ için

$$(1 - r_i)I \subseteq I_i \text{ olsun.}$$

$$(1 - r_i)I \subseteq (1 - r_i)IJ \subseteq I_i J \text{ olur.}$$

Herbir a_i üretici I da olduğundan $(1 - r_i)a_i \in I_i J$ dir.

$$\Rightarrow (1 - r_i)a_i \in I_i J, \quad I_i = (a_i, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow (1 - r_i)a_i = (a_i t_i + \dots + a_n t_n) b_i, \quad b_i \in J$$

$$t_k b_i = b_{i_k} \text{ denirse } (1 - r_i)a_i = a_i b_{i_i} + \dots + a_n b_{i_n} \text{ olur.}$$

Böylece

$$(1 - r_i)a_i = \sum_{k=i}^n b_{i_k} a_k$$

dir.

Sonuçta

$$(1 - r_i - b_{i_i})a_i = \sum_{k=i+1}^n b_{i_k} a_k \in I_{i+1}$$

$$1 - r_{i+1} = (1 - r_i)(1 - b_{i_i}) \text{ alırsak,}$$

$$\begin{aligned}
r_{i+1} &= 1 - 1 + r_i + b_{i_i} + r_i - r_i^2 - r_i b_{i_i} \\
\Rightarrow r_{i+1} &= 2r_i + b_{i_i} - r_i b_{i_i} - r_i^2 \\
\Rightarrow r_{i+1} &\in J
\end{aligned}$$

olur.

$$(1 - r_{i+1})I \stackrel{?}{\subseteq} I_{i+1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (1 - r_{i+1})I &= (1 - r_i)(1 - r_i - b_{i_i})I, \quad (1 - r_i)I \subseteq I_i \text{ dir.} \\
\Rightarrow (1 - r_{i+1})I &\subseteq (1 - r_i - b_{i_i})I_i = (1 - r_i - b_{i_i})(a_i, I_{i+1}) \\
\Rightarrow (1 - r_{i+1})I &\subseteq (1 - r_i - b_{i_i})(a_i, I_{i+1})
\end{aligned}$$

$$(1 - r_i - b_{i_i})a_i = \sum_{k=i+1}^n b_{i_k} a_k \in I_{i+1}$$

di.

$$\Rightarrow (1 - r_{i+1})I \subseteq I_{i+1}$$

İspat tamamlanır. Bu r_{n+1} içinde geçerlidir. Yani

$$\begin{aligned}
(1 - r_{n+1})I &\subseteq I_{n+1}, \quad I_{n+1} = \{0\} \\
\Rightarrow (1 - r_{n+1})I &= \{0\} \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Teorem.2.7.(Nakayama'nın Yardımcı Teoremi) $I, \mathcal{R}$ halkasının sonlu üretilmiş bir ideali olsun. Eğer $I(\text{rad}\mathcal{R}) = I$ ise $I = \{0\}$ dir.

İspat:

$I(\text{rad}\mathcal{R}) = I$, önceki yardımcı teoremde $J = \text{rad}\mathcal{R}$ alınırsa $(1 - r)I = \{0\}$ şeklinde bir $r \in \text{rad}\mathcal{R}$ vardır.

Eğer $1 - r, \mathcal{R}$ 'de tersinir değilse $1 - r \in M$ şeklinde bir M maksimal ideali vardır.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r &\in \text{rad}\mathcal{R}, \quad \text{rad}\mathcal{R} = \cap \{ M \mid M, \mathcal{R} \text{ 'nin maksimal idealidir.} \} \\
\Rightarrow r &\in \text{rad}\mathcal{R} \subseteq M \\
\Rightarrow r &\in M, \quad 1 - r \in M \\
\Rightarrow 1 - r + r &\in M \\
\Rightarrow 1 &\in M, \quad M \text{ maksimal idealdi.} \\
\Rightarrow \text{Çelişki}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 1 - r$ tersinirdir.

$(1 - r)I = \{0\}$ ve $1 - r$ tersinirdir. $x = (1 - r)^{-1}$ olsun.

$\Rightarrow x / (1 - r)I = \{0\}$

$\Rightarrow I = \{0\}$

$rad\mathcal{R}$ yerine $rad\mathcal{R}$ tarafından içerilen bir ideal alınırsa yine geçerli olacaktır.

Teorem.2.8. $\mathcal{R}$ Noetherian halkasının bir öz ideali I olsun.O takdirde,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{ r \in \mathcal{R} \mid \text{bir } a \in I \text{ için } (1 - a)r = 0 \}$$

dir.

İspat :

$\{ r \in \mathcal{R} \mid \text{bir } a \in I \text{ için } (1 - a)r = 0 \}$ kümesini S ile gösterelim.

Eğer uygun bir $a \in I$ için $(1 - a)r = 0$ olacak řakilde $r \in S$ ise $r = ar = a^2r = \dots = a^n r = \dots$ elde ederiz.çünkü

$$(1 - a)r = 0 \Rightarrow r - ar = 0 \Rightarrow r = ar, \quad (1 - a)r = 0$$

$$\Rightarrow (1 - a)ar = 0$$

$$\Rightarrow ar - a^2r = 0$$

$$\Rightarrow ar = a^2r$$

$$\Rightarrow r = ar = a^2r = \dots \text{ dir.}$$

$$a \in I \Rightarrow ra \in I, \quad r = ra \in I \Rightarrow r \in I$$

$$a \in I \Rightarrow a^2 \in I^2 \Rightarrow ra^2 \in I^2 \Rightarrow r \in I^2$$

$$\Rightarrow r \in \bigcap_n I^n$$

Sonuçta $S \subseteq \bigcap_n I^n$ elde ederiz.

$J = \bigcap_n I^n$ diyelim. ($J \stackrel{?}{\subseteq} S$)

$IJ = \bigcap_i Q_i$ (Q_i primary) kalıntısız ifadesini gözden geirelim.

$$IJ \stackrel{?}{=} J$$

$IJ \subseteq J$ dir.

Herbir i indisi için $J \subseteq Q_i$ olduğunu gösterelim.

$IJ = \bigcap_i Q_i \Rightarrow IJ \subseteq Q_i$ Teorem.1.2'nin sonucundan

$\Rightarrow J \subseteq Q_i$ yada $(\sqrt{I})^n \subseteq Q_i$, $n \in \mathbb{Z}_+$ dir.

Eğer $(\sqrt{I})^n \subseteq Q_i$ ise $J \subseteq I^n \subseteq (\sqrt{I})^n \subseteq Q_i$

$\Rightarrow \forall i$ için $J \subseteq Q_i$ dir.

$\Rightarrow J \subseteq \bigcap_i Q_i = IJ$

$\Rightarrow J \subseteq IJ$, $IJ \subseteq J$

$\Rightarrow J = IJ$

$\Rightarrow IJ = J$ ve J sonlu üretilmiş, önceki yardımcı teoremden

$\Rightarrow (1-a)J = \{0\}$ olacak şekilde bir $a \in I$ vardır.

$\Rightarrow (1-a)J = \{0\}$, $x \in J$

$\Rightarrow (1-a)x = \{0\}$, $a \in I$

$\Rightarrow x \in S$

$\Rightarrow J \subseteq S$, $J = \bigcap_n I^n$

$\Rightarrow \bigcap_n I^n \subseteq S$

$\Rightarrow \bigcap_n I^n = S$ dir.

Teorem.2.9.(Krull Kesişim Teoremi) $\mathcal{R}$ Noetherian halkasının bir öz ideali I olsun. Ancak ve ancak $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$ ise $1 - I = \{1 - a \mid a \in I\}$ kümesinin hiçbir elemanı $\mathcal{R}$ de bir sıfır bölen değildir.

Sonuç.1: Eğer I , $\mathcal{R}$ Noetherian bölgesinin (özellikle eğer $\mathcal{R}$ bir esas ideal bölgesi ise) bir öz ideal ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{0\}$ dır.

Sonuç.2: Bir $\mathcal{R}$ Noetherian halkasında $\bigcap_{n=1}^{\infty} (rad\mathcal{R})^n = \{0\}$ dır.

İspat :

$a \in rad\mathcal{R} \Rightarrow 1 - a$ tersinirdir.

$1 - rad\mathcal{R}$ 'nin tüm elemanları tersinirdir. Böylece $1 - rad\mathcal{R}$ 'nin hiçbir elemanı sıfır bölen olamaz. $I = rad\mathcal{R}$ alınrsa ve Krull Kesişim Teoremi'nden

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (rad\mathcal{R})^n = \{0\}$$

dır.

Sonuç.3: Bir $\mathcal{R}$ Noetherian bölgesinde bir (a) asal esas ideal, $\mathcal{R}$ 'nin bir minimal asal idealidir.

İspat:

$\{0\} \subset P \subset (a)$ olacak şekilde bir P minimal asal ideal olduğunu farzedelim.

$$\Rightarrow a \notin P \text{ dir.}$$

Eğer $ra \in P$ ise $r \in P$ dir.

$$\Rightarrow P = aP \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow P = aP = a^2P = \dots = a^nP \subseteq \bigcap_n (a^n) = \bigcap_n (a)^n$$

$$\Rightarrow P \subseteq \bigcap_n (a)^n, \quad (a) \text{ , } \mathcal{R} \text{ 'nin bir öz ideali ve sonuç.1'den}$$

$$\Rightarrow P \subseteq \bigcap_n (a)^n = \{0\}$$

$$\Rightarrow P \subseteq \{0\} \Rightarrow P = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişki çıkar.}$$

(a) , $\mathcal{R}$ 'nin bir minimal asal idealidir.

Teorem.2.10. I , $\mathcal{R}$ Noetherian halkasının bir ideali ve $\{0\} = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ de, $\{0\}$ 'ın bir primary kalansız ifadesi olsun. $m+1 \leq i \leq n$ için $\sqrt{Q_i} \cap (1-I) \neq \emptyset$ olduğunu ve $1 \leq i \leq m$ için bunun geçerli olmadığını farzedelim. O takdirde,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

dir.

İspat:

Teorem.2.8 de $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$ di. Buna bağlı olarak,

$$S = \{ r \in \mathcal{R} \mid \text{bir } a \in I \text{ için } (1-a)r = 0 \} = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$S \stackrel{?}{\subseteq} Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

Bir $r \in S$ alalım. $(1-a)r = 0$, $a \in I$ vardır.

$$\Rightarrow 1-a \in 1-I \text{ , } 1-a = x \text{ dersek,}$$

$$\Rightarrow x \in 1-I \text{ , } xr = 0 \in Q_i$$

$$\Rightarrow xr \in Q_i$$

$$1 \leq i \leq m \text{ için } \sqrt{Q_i} \cap (1-I) = \emptyset \text{ ve } x \in 1-I \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow x \notin \sqrt{Q_i} \quad , \quad xr \in Q_i \quad , \quad Q_i \text{ primary}$$

$$\Rightarrow 1 \leq i \leq m \quad \text{için} \quad r \in Q_i \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow r \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

$$\Rightarrow S \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

$$Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \stackrel{?}{\subseteq} S$$

$y \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ alınsın.

$i > m+1$ tamsayısı için $\sqrt{Q_i} \cap (1-I) \neq \emptyset$ di.

$$\Rightarrow \text{bir } a_i \in \sqrt{Q_i} \cap (1-I) \text{ elemanı vardır.}$$

$$\Rightarrow a_i \in 1-I \quad , \quad a_i \in \sqrt{Q_i} \quad , \quad i > m+1$$

$$a_i \in \sqrt{Q_i} \Rightarrow a_i^{n_i} \in Q_i \quad , \text{ yeterince büyük } k \text{ için}$$

$$\Rightarrow (a_{m+1} \dots a_n)^k \in Q_i \quad , \quad i > m+1$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k \in Q_i \quad , \quad i > m+1$$

$$y \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \text{ di.}$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k \in Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \cap Q_{m+1} \cap \dots \cap Q_n$$

$$\text{Hipotezden } Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n = \{0\} \text{ di.}$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k \in \{0\}$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k = 0$$

$$\text{Ayrıca } i > m+1 \text{ için } a_i \in 1-I \text{ di.}$$

$$\Rightarrow a_{m+1} \dots a_n \in 1-I$$

$$\Rightarrow (a_{m+1} \dots a_n)^k \in 1-I$$

$$\Rightarrow y(a_{m+1} \dots a_n)^k = 0 \quad , \quad (a_{m+1} \dots a_n)^k \in 1-I$$

$$\Rightarrow y \in S$$

$$\Rightarrow Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \subseteq S$$

$$Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m \subseteq S \quad , \quad S \subseteq Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

$$\Rightarrow Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m = S \quad , \quad S = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n \text{ di.}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$$

Yardımcı Teorem.5: $\mathcal{R}$, M maksimal ideali esas olan bir yerel halka olsun.

1-) Sıfırdan farklı $a, b \in M$ olmak üzere $(a) = (b)$ olması için gerek ve yeter şart $u, \mathcal{R}$ de bir tersinir eleman olmak üzere $a = bu$ olmasıdır.

2-) Eğer $M = (p) \neq \{0\}$ ise $p, \mathcal{R}$ 'nin bir indirgenemez elemanıdır.

3-) Eğer $q \in M$ ve u tersinir olmak üzere $0 \neq a = q^n u$ ise bu çarpım tekdir.

İspat:

1-) ($\Rightarrow$)

Eğer $(a) = (b)$ ise $a = br$ ve $b = as$ şeklinde $r, s \in \mathcal{R}$ vardır.

$$a = br, \quad b = as \Rightarrow a = asr$$

$$\Rightarrow a(1 - sr) = 0$$

r ve s den biri M de olsun.

$$\Rightarrow sr \in M \Rightarrow 1 - sr \notin M \text{ olmalı. Çünkü;}$$

$$1 - sr \in M, \quad sr \in M \Rightarrow 1 - sr + sr \in M$$

$$\Rightarrow 1 \in M, \quad M \text{ maksimal idealdi.}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir.}$$

$$\Rightarrow 1 - sr \notin M$$

$$\Rightarrow 1 - sr \text{ tersinirdir. Çünkü;}$$

$$x \in M, \quad x^{-1} \in \mathcal{R} \Rightarrow x.x^{-1} \in M$$

$$\Rightarrow 1 \in M, \quad M \text{ maksimal idealdi.}$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir.}$$

$$\Rightarrow \text{Maksimal idealin elemanı değilse tersinirdir.}$$

$$x^{-1} = (1 - sr)^{-1} \text{ olsun.}$$

$$x^{-1} / a(1 - sr) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \text{Çelişkidir. Çünkü } a \neq 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow s \text{ ve } r \text{ den biri } M \text{ de değildir.}$$

$$\Rightarrow s, r \notin M$$

$$\Rightarrow s \text{ ve } r \text{ tersinirdir.}$$

($\Leftarrow$)

$a = bu$ ve u tersinir olsun.

$$\Rightarrow u^{-1} / a = bu \Rightarrow a.u^{-1} = b$$

$$\Rightarrow b \in (a) \Rightarrow (b) \subseteq (a)$$

$$a = bu \Rightarrow a \in (b) \Rightarrow (a) \subseteq (b)$$

$$\Rightarrow (a) \subseteq (b) , (b) \subseteq (a)$$

$$\Rightarrow (a) = (b)$$

2-) $M = (p) \neq \{0\}$

$p = ab$ olsun. Ayrıca b tersinir olmasın. (a^{-1} var mı?)

$$p = ab \Rightarrow M = (p) \subsetneq (a)$$

$$\Rightarrow M \subset (a) \text{ ve } M \text{ maksimal idealdi.}$$

$$\Rightarrow (a) = \mathcal{R} , 1 \in \mathcal{R}$$

$$\Rightarrow 1 = a.k \text{ şeklinde } k \in \mathcal{R} \text{ vardır.}$$

$$\Rightarrow a \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow p = ab \text{ ve } a \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow p \text{ indirgenemezdir.}$$

3-) $q \in M$ ve u tersinir olmak üzere $0 \neq a = q^n u$ çarpımının tek olmadığını varsayalım. Yani $m > n$ için $a = q^n . u = q^m . v$ olsun. O takdirde,

$$q^n u(1 - q^{m-n} v u^{-1}) = 0$$

dır.

$$\text{Çünkü } q^n u(1 - q^{m-n} v u^{-1}) = q^n u - q^m v u^{-1} u = q^n u - q^m v = a - a = 0 \text{ dır.}$$

$$q \in M \Rightarrow q^{m-n} \in M \Rightarrow q^{m-n} v u^{-1} \in M$$

$$\Rightarrow 1 - q^{m-n} v u^{-1} \notin M$$

$$\Rightarrow 1 - q^{m-n} v u^{-1} \text{ tersinirdir.}$$

$$\Rightarrow (1 - q^{m-n} v u^{-1})^{-1} / q^n u(1 - q^{m-n} v u^{-1}) = 0$$

$$\Rightarrow q^n u = 0 , a = q^n u$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ Çelişkidir. Çünkü } a \neq 0 \text{ dır.}$$

Dolayısıyla $a = q^n u$ çarpımı tektir.

Teorem.2.11. $\mathcal{R}$, esas maksimal ideali $M = (p)$ olmak üzere bir yerel halka olsun. u tersinir olmak üzere her $0 \neq a \in M$ elemanının $a = p^m u$ şeklinde bir çarpıma sahip olması için gerek ve yeter şart $\bigcap_{n=1}^{\infty} (p^n) = \{0\}$ olmasıdır.

İspat:

($\Leftarrow$)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (p^n) = \{0\}$$

olduğunu farzedelim.

$0 \neq a \in M$ ise $a \in M = (p)$ dir. Böylece $a = pr$ şeklinde bir $r \in \mathcal{R}$ vardır.

Eğer r tersinir değilse $r \in M = (p)$ dir.

$\Rightarrow r = ps$ şeklinde bir s elemanı vardır.

$\Rightarrow a = pr$, $r = ps$

$\Rightarrow a = p^2 rs$, s tersinir değilse $s \in M = (p)$ dir.

$\vdots$

$\Rightarrow a \in \bigcap_n (p^n)$ dir.

$\bigcap_n (p^n) = \{0\}$ dı.

$\Rightarrow a \in \{0\} \Rightarrow a = 0$

Bu çelişkidir. Çünkü $a \neq 0$ dı.

Sonuçta bir m için $a = p^m k$ ve k tersinir olmalıdır.

($\Rightarrow$)

$\{0\} \neq \bigcap_n (p^n)$ olsun. Böylece sıfırdan farklı bir $a \in \bigcap_n (p^n)$ elemanı vardır.

$\Rightarrow a \in (p), a \in (p^2), \dots, a \in (p^m), \dots$

$\Rightarrow a \in (p^m)$

$\Rightarrow a = p^m u$, u tersinirdir.

$\Rightarrow p^m = au^{-1} \in (a)$

$\Rightarrow (p^m) \subseteq (a)$

Bir $k > m$ için $p^k = p^m \cdot p^{k-m} \in (p^m)$ dir.

$\Rightarrow p^k \in (p^m)$

$$\Rightarrow (p^k) \subseteq (p^m)$$

Ayrıca $a \in \bigcap_n (p^n)$ di.

$$\Rightarrow a \in (p^k)$$

$$\Rightarrow (a) \subseteq (p^k)$$

Bir $k > m$ için $(p^m) \subseteq (a) \subseteq (p^k) \subseteq (p^m)$ dir.

$$\Rightarrow (p^m) = (p^k)$$

$(p^m) = (p^k)$ ve önceki yardımcı teoremden dolayı v , $\mathcal{R}$ de tersinir

olmak üzere $p^m = p^k.v$ dır.

$$\Rightarrow p^m = p^k.v \text{ ve } a = p^m.u, \text{ } u \text{ ve } v \text{ tersinirdi.}$$

$$\Rightarrow a = p^k.v.u, \text{ } vu \text{ tersinirdir.}$$

Önceki yardımcı teoremden bu çarpım tek olmalıdır.

Fakat $0 \neq a = p^k.vu$ ve $a = p^m.u$ şeklindedir. Dolayısıyla çelişki çıkar. Bu çelişki $a \neq 0$ kabulünden çıktı.

$$\Rightarrow a = 0 \text{ olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow \bigcap_n (p^n) = \{0\}$$

Sonuç.1:

$\mathcal{R}$, esas maksimal ideali $M = (p)$ olan bir yerel halka ve $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \{0\}$ olsun. Eğer I , $\mathcal{R}$ 'nin aşikar olmayan bir ideali ise bir $k \in \mathbb{Z}_+$ için $I = M^k$ dır. (Böylece $\mathcal{R}$ Noetherian'dır. Yani herhangi I ideali sonlu üretilmiştir.)

İspat:

I , $\mathcal{R}$ 'nin aşikar olmayan bir ideali ve M maksimal ideali olduğundan $I \subseteq M$ dir.

I , $\mathcal{R}$ 'nin aşikar olmayan bir ideali olduğundan $0 \neq a \in I$ elemanı vardır.

$$\Rightarrow a \in I \subseteq M = (p), \quad \bigcap_n (p^n) = \{0\} \text{ ve önceki teoremden}$$

$$a = p^n.u, \text{ } u \text{ tersinirdir.}$$

$p^k.u \in I$ olacak şekilde en küçük tamsayı k olsun.

$$a \in I \Rightarrow a = p^n.u = p^k.p^{n-k}.u = p^k.(p^{n-k}.u) \in (p^k)$$

$$\Rightarrow a \in (p^k)$$

$$\Rightarrow I \subseteq (p^k)$$

Şimdi tersini gösterelim;

$$p^k = (p^k u)u^{-1} \quad , \quad p^k u \in I \quad \text{dı.}$$

$$\Rightarrow p^k = (p^k u)u^{-1} \in I$$

$$\Rightarrow p^k \in I$$

$$\Rightarrow (p^k) \subseteq I$$

$$\Rightarrow (p^k) \subseteq I \quad , \quad I \subseteq (p^k)$$

$$\Rightarrow I = (p^k) = (p)^k \quad , \quad (p) = M$$

$$\Rightarrow I = M^k$$

Sonuç.2: Eğer $\mathcal{R}$, maksimal ideali esas ideal olan bir yerel halka ise $\mathcal{R}$, bir esas ideal halkasıdır.

İspat:

Eğer $I = \{0\}$ ise $I = (0)$ dir.

$I \neq \{0\}$ olsun.

$$\Rightarrow 0 \neq a \in I \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow a \in I \subseteq M = (p)$$

$$\Rightarrow a \in (p) \Rightarrow a = p.l$$

$$a \in I \Rightarrow (a) \subseteq I$$

$$I \stackrel{?}{\subseteq} (a)$$

$x \in I$ alalım.

$$\Rightarrow x \in I \subseteq M = (p)$$

$$\Rightarrow x = p.k$$

$$\Rightarrow x = p.k.l.l^{-1} = p.l.k.l^{-1} = a.k.l^{-1} \in (a)$$

$$\Rightarrow x \in (a)$$

$$\Rightarrow I \subseteq (a)$$

$$\Rightarrow I \subseteq (a) \quad , \quad (a) \subseteq I$$

$$\Rightarrow I = (a)$$

S O N U Ç

Değişmeli cebirin temel konusu olan radikaller, zincir koşullu halkalar ve buna bağlı olarak, Noetherian ve Artinian halkaların temel özellikleri elde edildi. Ayrıca Noetherian ve Artinian halkalardaki ideallerin bu konudaki önemi vurgulandı.

K A Y N A K L A R

1. ATIYAH M.F, MACDONALD I.G. , 1980
Introduction to Commutative Algebra, U.S.A
2. BURTON David M. , 1970
A First Course in Rings and Ideals, U.S.A.
3. HUNGERFORD Thomas W. , 1974
Algebra, Newyork.
4. LANG Serge, 1984
Algebra, U.S.A



Ö Z G E Ç M İ Ş

Adı Soyadı : Ayten KOÇ
Doğum Tarihi : 18 Kasım 1971
Doğum Yeri : İstanbul
İlk Öğrenimi : 1982 yılında Yamanevler İlkokulu'ndan mezun oldu.
Orta Öğrenimi : 1988 yılında Haydarpaşa Lisesi'nden mezun oldu.
Yüksek Öğrenimi : 1988 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1992 yılında tamamladı.
Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.