YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONLARI

Seda KIZILBUDAK

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Akın TAŞDİZEN

İSTANBUL , 1995

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamamda bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Akın TAŞDİZEN 'e teşekkür ederim.

Ayrıca Yüksek lisans eğitimim boyunca bana maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve yardımlarından dolayı sevgili arkadaşım Arş.Gör. Çiğdem GENÇ 'e teşekkür ederim.

Seda KIZILBUDAK
İstanbul,1995

ÖZET

Adi diferansiyel denklemleri içeren başlangıç ve sınır değer problemleri , nümerik analiz . fizik ve mühendislik gibi bir çok alanda değişik problemlerin çözümlerinin hesaplanmasında karşımıza çıkmaktadır. Bu başlangıç ve sınır değer problemleri çeşitli yöntemlerle çözülebilmektedir. Bu yöntemlerden biri de bu çalışmının konusu olan Adi diferansiyel denklemler için Green fonksiyonudur.

Bu çalışmanın birinci bölümünde Green fonksiyonlarının daha iyi anlaşılması amacıyla çalışmalarda yardımcı olacak geliştirilmiş fonksiyonlar ele alınmıştır.

İkinci bölümünde ise homojen yada homojen olmayan koşullara sahip sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin, homojen kısımlarının çözümlerinin trivial yada non-trivial (aşikar yada aşikar olmayan) olmasına bağlı olarak elde edilecek Green fonksiyonları yardımıyla çözümlerinini ne şekilde elde edileceğine ilişkin teoremler ve problemler ele alınmıştır.

SUMMARY

We've run into the initial and boundary value problems which contained ordinary differential equations for calculating various problems solving in lots of areas such as numerical analysis,physics and engineering. These initial and boundary value problems were solved in various technics. Also one of the technic is Green functions for the ordinary differential equations which is a subject of this study.

First part of this study advanca functions which will support in the studies for the purpose of better understanding of the Green functions had been considered.

And in the second part of this study, it had been considered the theorems and problems related to how to get the results with the help of the Green functions which will being get depending on the solving of the homogenous sections which are trivial or non-trivial of the boundary value and the initial value problems being in a homogenous or non-homogenous conditions.

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

Birçok fizik problemlerin çözümünde *nokta* olarak adlandırılan matematiksel idealleştirmeler vardır. Bir noktadaki yük,kütle,ısı kaynağı ve güç bunlardan birkaçıdır.

$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0 = y(L)$$

sınır değer problemi, x uzunluğundaki bir telin sabit gerilimi τ ve telin bir bölümüne uygulanan kuvvet F(x) olmak üzere telin denge durumundan sapma miktarını ifade eder. Bir başka deyişle (1.1) sınır değer problemi ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemin basit integrasyonu ve bu integrasyon sonucunda elde edilen çözümdeki integrasyon sabitlerinin bulunması için sınır şartlatının F(x) e uygulanacağını ifade eder.

Örneğin ; Şekil 1.1 ' de gösterildiği gibi bir tele orta noktasından kuvvet uygulandığında,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ 1 & x = \frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlamak üzere (1.1) diferansiyel denklemini çözdüğümüzde;

$$y(x) = \begin{cases} Ax + B & 0 < x < \frac{L}{2} \\ Cx + D & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

olur. Verilen sınır şartlarını y(x) e uyguladığımızda ve y(x) in $x = \frac{L}{2}$ de sürekliliğini gözönüne aldığımızda,

$$y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y(0)=A.0+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=0 \quad \Rightarrow \quad y(x)=Ax$$

$$y(L)=0 \quad \Rightarrow \quad y(L)=C.L+D=0 \quad \Rightarrow \quad B=-CL \quad \Rightarrow \quad y(x)=C(x-L),$$

$$y\left(\frac{L}{2}\right)=A\left(\frac{L}{2}\right) \quad , \quad y\left(\frac{L}{2}\right)=C\left(-\frac{L}{2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$A\left(\frac{L}{2}\right)=-C\left(\frac{L}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A=-C \quad , \quad C=-A$$

olur. Bu durumda çözümü,

$$y(x)\begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -A(x-L) & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

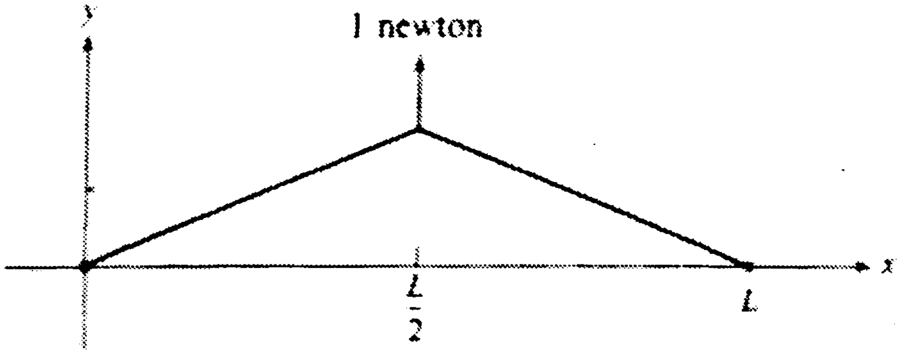
olarak buluruz. Verilen şartları sağlayan bu çözümdeki A integrasyon sabiti ise F(x) kuvvetinin büyüklüğüne ve telin τ gerginliğinin büyüklüğüne göre hesaplanır. Analiz bilgilerimize göre herhangi bir noktada integral işlemi uygulanamayacağından (1.1) diferansiyel denklemini çözerken F(x) in sadece $(0,\frac{L}{2})$ ve $(\frac{L}{2},L)$ aralığındaki değerlerini gözönüne alırız. F(x) kuvvetini tel boyunca yayarak problemi çözdüğümüzde, tek bir noktadaki kuvveti hesaplamak için yayılan kuvvet bir noktadaki kuvvete yanaşacak şekilde limit alırız. O halde (1.1) sınır değer problemi L uzunluğundaki bir telin $x=\frac{L}{2}$ orta noktasından tele uygulanan kuvvet miktarı için (1.2) ile tanımlanan F(x) i ifade eder.

F(x) birçok şekilde tanımlanabilir, ancak tüm F(x) ler kesinlikle,

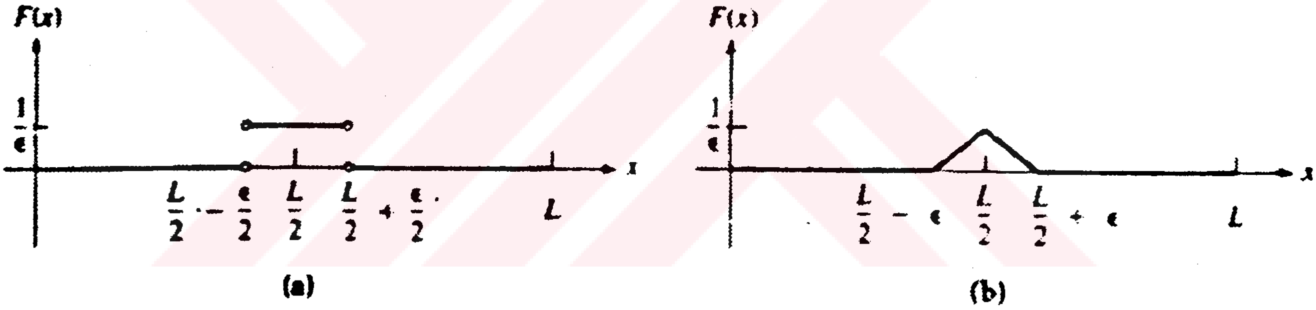
$$\int_0^L F(x)dx = 1 \tag{1.3}$$

şartını sağlamalıdır.

F(x) in benzer şekilde tanımlandığı iki yol şekil 1.2 de gösterilmektedir.



Şekil 1.1



Şekil 1.2

Şekil 1.2(a) da dağılımı gösterilen F(x) fonksiyonu için (1.1) sınır değer problemini çözelim. O halde,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{T}\begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ 0 & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

olur. Burada integrasyon işlemi uyguladığımızda,

$$y(x) = -\frac{1}{\tau}\begin{cases} Ax + B & 0 < x < \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{x^2}{2\varepsilon} + Cx + D & \frac{L-\varepsilon}{2} < x < \frac{L+\varepsilon}{2} \\ Ex + F & \frac{L+\varepsilon}{2} < x < L \end{cases}$$

olarak çözümü elde ederiz.

(1.1) ile verilen sınır şartlarını elde ettiğimiz $y(x)$ çözümüne uygulamak suretiyle $x = \frac{L-\varepsilon}{2}$ ve $x = \frac{L+\varepsilon}{2}$ de $y(x)$ ve $y'(x)$ in sürekli olduklarını göz önüne alalım; bu durumda,

$$y(x) = \frac{1}{\tau}\begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq \frac{L-\varepsilon}{2} \\ \frac{-x}{2\varepsilon} + \frac{Lx}{2\varepsilon} - \frac{1}{8\varepsilon}(L-\varepsilon)^2 & \frac{L-\varepsilon}{2} \leq x \leq \frac{L+\varepsilon}{2} \\ \frac{L-x}{2} & \frac{L+\varepsilon}{2} \leq x \leq L \end{cases} \tag{1.4}$$

çözümü şekil 1.3 deki grafiği gösterir.

Geometrik olarak bu grafikte parabolik kısım küçüktür ve eni de küçük olur. Sadece tek bir noktada toplanan F(x) kuvvetini bulmak için ε u sıfıra yaklaştırmak suretiyle çözümün limitini aldığımızda şekil 1.3 de iki düz çizgi ile gösterdiğimiz kısımlar $x = \frac{L}{2}$ de birleşirler. (şekil 1.4)

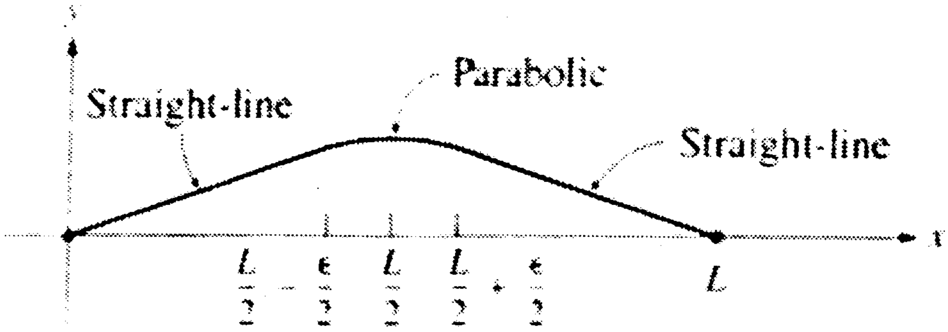
Bunun anlamı ,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\tau} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{L}{4\tau} & x = \frac{L}{2} \\ \frac{L-x}{2\tau} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

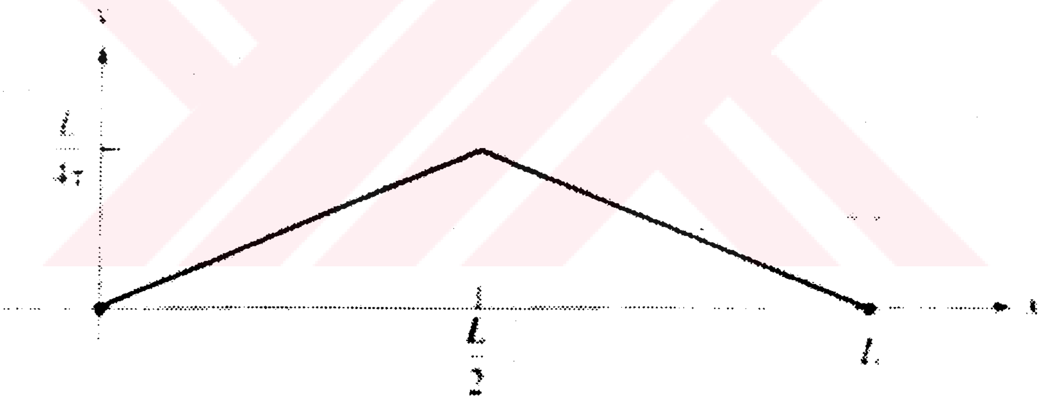
olmak üzere fonksiyonun $x = \frac{L}{2}$ noktasında $\frac{L}{4\tau}$ değerini almasıdır. Cebirsel olarak y(x) çözümü

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\tau} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{L-x}{2\tau} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \tag{1.5}$$

şeklindedir.



Şekil 1.3



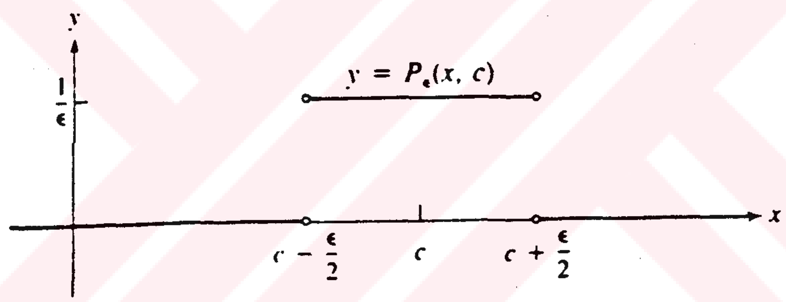
Şekil 1.4

Bu örnekle, bir noktada herhangi bir kaynak yani, güç,yük, kütle,ısı kaynağı v.b. gibi kaynakları içeren problemlerin kaynak dağılımı ve limit ile çözülebileceğini açıklamaya çalıştık. Bu metod konumuzun amacıdır ve bundan sonra adi ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmemize yardımcı olacak tasvirler genişleteceğiz.

Bunun için; telin denge durumundan sapma miktarını yada çubukdaki durgun haldeki ısının iletimini yada potansiyeli ifade eden x-ekseni boyunca zamana bağlı olmaksızın tek boyutlu problemimizin olduğunu varsayalım. x=c gibi bir birim noktadaki kaynağı ifade etmek için $\delta(x-c)$ ile gösterilen bir fonksiyon tanımlansın. x-ekseni üzerinde bir birim noktadaki kuvveti tel boyunca yayarak çözdüğümüz örneği esas aldığımızda, şekil 1.5 de gösterilen $P_\varepsilon(x,c)$ birim puls fonksiyonunun $\varepsilon \to 0$ için limitinin $\delta(x-c)$ olarak tanımlandığı kolayca görülür.

$$\delta(x-c) = \lim_{\varepsilon \to 0} P_\varepsilon(x,c) \qquad (1.6)$$

$\delta(x-c)$ klasik anlamda bir fonksiyon değildir. Ancak (1.6) ile gösterildiği gibi klasik bir fonksiyonun limit durumu olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyon, tanım gereği x in c den farklı her değeri için sıfır ve x=c için de sonsuz değerini alır. $\delta(x-c)$ nin klasik anlamda bir fonksiyon almadığını gösterebilmek için; bir noktadaki kaynağı temsil eden fonksiyonların tamamıyla yeni bir yaklaşımına gereksinimimiz vardır.



Şekil 1.5

Bunu açıklayalım; g(x), $a \le x \le b$ aralığında sürekli bir fonksiyon, f(x) de integrallerle tanımlanan reel sayılar üzerine dönüşüm fonksiyonu olmak üzere g(x) ile bu integral dönüşüm birleştirildiğinde ;

$$f(x) \xrightarrow{g(x)} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

olur ve g(x) e fonksiyonel yada operatör adı verilir.

Yani g(x) e karşı bir sayı getiren her işleme *Fonksiyonel* yada *Operatör* denir. Bu fonksiyonel bir adi fonksiyonunu görüntüsü olarak, $\delta(x-c)$ şeklinde kabul edilebilir.

Genelleştirilmiş $\delta(x-c)$ fonksiyonuna *Dırac* delta fonksiyonu denir. $\delta(x-c)$, x=c de sürekli bir f(x) fonksiyonunun x=c noktasındaki değeri üzerine bir dönüşüm gösteren bir fonksiyoneldir.

$$f(x) \xrightarrow{\delta(x-c)} f(c)$$

Örneğin;

$$x^2+2x-3 \xrightarrow{\delta(x-2)} 5$$

$$(x+1)^2 \xrightarrow{\delta(x)} 1$$

olur.

Delta fonksiyonelinin bir integral gösterime sahip olabilmesi

$$f(x) \xrightarrow{\delta(x-c)} f(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-c)dx \tag{1.7}$$

demektir.

$\delta(x-c)$ klasik anlamda bir fonksiyon olmadığından (1.7) integrali ve bu integraldeki $f(x)\delta(x-c)$ çarpımı semboliktir. O halde bu şekilde bir integralle karşılaştığımızda bunu f(x) fonksiyonuna uygulanan $\delta(x-c)$ fonksiyonelinin bir etkisi olarak yorumlarız ve f(x) in x=c deki değerine eşitleriz. Örneğin;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(x^2+\frac{2}{(x-1)}\right)\delta(x)dx=-2$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x+2)dx=1$$

dır. Bu son integral $f(x)\equiv 1$ olan fonksiyona $\delta(x+2)$ delta fonksiyonunun uygulandığını gösterir.

x=c de bir fonksiyonun değerini $\delta(x-c)$ belirlediğinden dolayı $a<c<b$ olduğu sürece

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx=f(c) \tag{1.8}$$

dir. Bu durumda integral üzerindeki limitlerin $\pm\infty$ olması gerekmez. Eğer x=c , (a,b) aralığı dışında ise

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = 0 \tag{1.9}$$

olarak alınır.

Örneğin;

$$\int_{-2}^{6} \sqrt{x+5}\,\delta(x)dx = \sqrt{5}$$

ve

$$\int_{2}^{3} (x^2+2x-4)\delta(x+1) = 0$$

1.2. Başlangıç Örneği

Gerilme kuvveti τ olan L uzunluğundaki, kütlesi ihmal edilebilen bir tele F(x) ağırlığı asıldığında telin denge durumundan sapma miktarını ifade eden sınır değer problemi

$$-\tau\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)$$

$$y(0) = 0 = y(L) \tag{1.10}$$

dir.

Bu problemi verilen diferansiyel denklemin homojen kısmının genel çözümü olan y=Ax+B ' ye sabitin değişimi yöntemini uygulamak suretiyle çözelim. A(x) ve B(x) 'in türevleri;

$$A'x + B' = 0$$

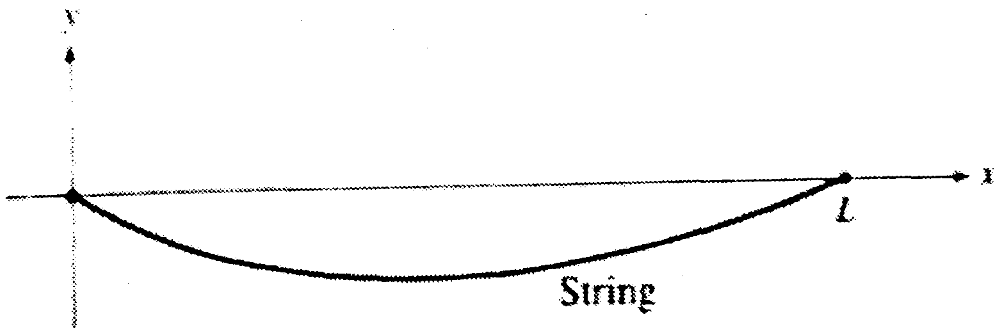
$$A' = -\frac{F(x)}{\tau}$$

denklemlerini sağlar.

bu denklemlerin çözümleri aşağıdaki gibi belirli integrallerle ifade edilirler.

$$A(x) = \int_0^x -\tau^{-1} F(T) dT + C$$

$$B(x) = \int_0^x \tau^{-1} T.F(T) dT + D$$



Şekil 1.6

Dolayısıyla çözüm;

$$\begin{aligned} y(x) &= x\left[\int_0^x -\tau^{-1} F(T) dT + C\right] + \tau^{-1}\int_0^x T.F(T) dT + D \\ &= \tau^{-1}\int_0^x (T - x).F(T) dT + Cx + D \end{aligned}$$

olur. (1.10) diferansiyel denklemine ait verilen sınır şartları bu bağıntıya uygulanırsa C ve D integrasyon sabitlerini aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$y(0) = \int_0^0 (T - 0).F(T) dT + C.0 + D = 0$$

$$\Rightarrow y(0) = D = 0$$

$$y(L) = \tau^{-1}\int_0^L (T - L).F(T) dT + C.L = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{-1}{L\tau}\int_0^L (T - L).F(T) dT$$

Böylece,

$$y(x) = \tau^{-1}\int_0^x (T-x).F(T)dT + (L\tau)^{-1}x\int_0^L (L-T).F(T)dT$$
$$= \tau^{-1}\int_0^x \left[(T-x)+L^{-1}.x.(L-T)\right]F(T)dT + (L\tau)^{-1}x\int_x^L (L-T).F(T)dT$$

yada

$$y(x) = \int_0^L g(x;T).F(T)dT \tag{1.11}$$

olur ki burada

$$g(x;T) = \begin{cases} \frac{T(L-x)}{L\tau} & 0 \le T \le x \\ \frac{x(L-T)}{L\tau} & x \le T \le L \end{cases} \tag{1.12}$$

dir.

O halde (1.10) diferansiyel denkleminin çözümü $g(x;T)$ fonksiyonu ile F(x) in çarpımından oluşan bir integral ile ifade edilir. Buradaki $g(x;T)$ fonksiyonuna (1.10) sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir. $g(x;T)$, F(x) 'e bağlı değildir; sadece sınır şartlarına ve diferansiyel operatöre bağlıdır. $g(x;T)$ bilindiğinden herhangi bir F(x) değeri için (1.10) diferansiyel denkleminin çözümü (1.11) bağıntısıyla elde edilir. Ayrıca sınır şartlarının homojen olmaması durumunda denklemin Green fonksiyonu cinsinden çözümü bu homojensizliklere bağlı olarak değişecektir. Sonuç olarak bu nümerik analizde birçok problemin çözümünde kesin fayda sağlar.

(1.12) ile bulunan $g(x;T)$, bir T bağımsız değişkeni ve bir x parametresine bağlıdır. x ve T yer değiştirdiğinde, x bağımsız değişkeni ve T parametresi için $g(x;T)$,

$$g(x;T) = \begin{cases} \frac{x(L-T)}{L\tau} & 0 \le x \le T \\ \frac{T(L-x)}{L\tau} & T \le x \le L \end{cases} \tag{1.13}$$

şeklinde elde edilir.

Bu son bağıntıyla elde deilen Green fonksiyonu için aşağıda belirleyeceğimiz üç özellik tüm Green fonksiyonları için geçerlidir.

1) $g(x:T)$, tüm x ' ler için süreklidir. (x=T dahil)

2) $g(x:T)$ 'nin x ' e göre türevi tüm $x \neq T$ için süreklidir ve

$$\lim_{x \to T^+} \frac{dg}{dx} - \lim_{x \to T^-} \frac{dg}{dx} = \left(\frac{-T}{L\tau}\right) - \left(\frac{L-T}{L\tau}\right) = -\frac{1}{\tau} \tag{1.14}$$

olur. Bu sıçrama (1.10) ile verilen diferansiyel denklemin $\frac{d^2y}{dx^2}$ teriminin katsayısının tersidir.

3) $g(x:T)$, her $x \neq T$ ' de verilen diferansiyel denklemin homojen kısmını sağlar.

Bu özellikleri Bölüm 2 'de Green fonksiyonlarını karakterize etmek için kullanacağız.

Kısım 1.1 ' de bir noktadaki kaynağı tasvir eden keyfi delta fonksiyonu tanımlamıştık. Şimdi bu delta fonksiyonundan yararlanarak (1.10) probleminde

$$F(x) = \delta(x - \frac{L}{2})$$

almak suretiyle çözümün nasıl olcağını araştıralım:

$$y(x) = \int_0^L g(x;T)\delta(T - \frac{L}{2})dT$$

$$= \int_0^x \frac{T(L-x)}{L\tau}\delta(T - \frac{L}{2})dT + \int_x^L \frac{x(L-T)}{L\tau}\delta(T - \frac{L}{2})dT$$

$x < \frac{L}{2}$ olduğunda 1.integral için $\frac{L}{2}$ sınırın dışında kaldığından ilk integral sıfıra eşitlenir ve $x > \frac{L}{2}$olduğunda da 2. integral için $\frac{L}{2}$ sınırın dışında kaldığından ikinci integral sıfıra eşitleneceğinden ((1.9) 'dan dolayı) y(x) çözümü iki kısma ayrılabilir: böylece,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{L\tau}(\frac{L}{2}) & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{1}{L\tau}(\frac{L}{2})(L-x) & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases}$$

ya da

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\tau} & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{L-x}{2\tau} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

olarak $\frac{L}{2}$ ' de sürekli olan çözüm bulunur. Bu çözüm aynı sınır değer problemi için şekil 1.2(a) ile belirtilen F(x) kuvvetine göre nokta kaynaklar metodu ile elde edilen (1.5) çözümü ile aynıdır. Başka bir deyişle, $x = \frac{L}{2}$ ' de bir F(x) nokta kuvvetinin bir gösterilimi de $\delta(x - \frac{L}{2})$ 'dir.

Örnek 1.1

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = F(x) \qquad 0 < x < L$$
$$y(0) = 0 = y(L)$$

sınır değer problemini gözönüne almak suretiyle

(a) Sabitin değişimi yöntemini kullanarak çözümün

$$y(x) = \int_0^L g(x;T).F(T)dT$$

şeklinde olduğunu ve

(b)

$$g(x;T) = -\frac{1}{cosL}\begin{cases} sinT.cos(L-x) & 0 \leq x \leq T \\ sinx.cos(L-T) & x \leq T \leq L \end{cases}$$

fonksiyonunun (1.14) ile belirtilen Green fonksiyonunun özelliklerini sağladığını gösteriniz.

Çözüm:

(a) Öncelikle homojen denklemi çözelim;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0$$
$$\Rightarrow r = \pm i$$
$$\Rightarrow y(x) = Asinx + Bcosx$$

Ve şimdi de sabitin değişimi yöntemini uygulayalım;

$$y'(x) = A'sinx + B'cosx + Acosx - Bsinx$$

$$\Rightarrow A'sinx + B'cosx = 0 \qquad [a] \qquad (keyfi)$$

$$\Rightarrow y'(x) = Acosx - Bsinx$$

$$\Rightarrow y''(x) = A'cosx - B'sinx - Asinx - Bcosx$$

olur. Bu değerleri diferansiyel denklemde yerine koyduğumuzda,

$$A'cosx - B'sinx - \underbrace{Asinx - Bcosx + Asinx + Bcosx}_{=0} \equiv F(x)$$

$$\Rightarrow A'cosx - B'sinx \equiv F(x) \qquad [b]$$

[a] ve [b] 'den

$$W = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix} = -sin^2x - cos^2x = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow A' = -\begin{vmatrix} 0 & cosx \\ F(x) & -sinx \end{vmatrix} = cosx.F(x)$$

$$\Rightarrow A(x) = \int_0^x cosT.F(T)dT + k_1$$

$$\Rightarrow B' = -\begin{vmatrix} sinx & 0 \\ cosx & F(x) \end{vmatrix} = -sinx.F(x)$$

$$\Rightarrow B(x) = -\int_0^x sinT.F(T)dT + k_2$$

buluruz.Çözüm.

$$y(x) = A(x)sinx + B(x)cosx$$

şeklinde idi, o halde A(x) ve B(x) değerlerini burada yerine koyarsak çözümü

$$y(x) = sinx \int_0^x cosT.F(T)dT - cosx \int_0^x sinT.F(T)dT + k_1 sinx + k_2 cosx$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x [sinxcosT - cosxsinT]F(T)dT + k_1 sinx + k_2 cosx$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x sin(x - T).F(T)dT + k_1 sinx + k_2 cosx$$

şeklinde elde ederiz. k_1 ve k_2 integrasyon sabitlerini bulmak için verilen sınır şartlarını çözüme uygularız.

$$y(0) = \int_0^0 sinT.F(T)dT + k_1.0 + k_2.0 = 0$$

$$\Rightarrow k_2 = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x sin(x - T).F(T)dT + k_1 sinx$$

olur. Ve

$$y'(x) = \int_0^x cos(x - T).F(T)dT + k_1 cosx$$

$$\Rightarrow y'(L) = \int_0^L cos(L - T).F(T)dT + k_1 cosL = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = -\frac{1}{cosL} \int_0^L cos(L - T).F(T)dT$$

bulunur. Bu durumda çözüm;

$$y(x) = \int_0^x sin(x-T).F(T)dT - \frac{sinx}{cosL}\int_0^L cos(L-T).F(T)dT$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x sin(x-T).F(T)dT - \frac{sinx}{cosL}\int_0^x cos(L-T).F(T)dT$$

$$- \frac{sinx}{cosL}\int_x^L cos(L-T).F(T)dT$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{-1}{cosL}.\frac{1}{2}\int_0^x -[sin(L+x-T) - sin(L-x+T)]F(T)dT$$

$$= \frac{-1}{2cosL}\int_0^x [sin(x+L-T) + sin(x-L+T)]F(T)dT$$

$$- \frac{sinx}{cosL}\int_x^L cos(L-T)F(T)dT$$

$$y(x) = \frac{-1}{cosL}\int_0^x \frac{1}{2}\Big[- sin(L+x-T) + sin(L-x+T)$$

$$+ sin(x+L-T) + sin(x-L+T)\Big] F(T)dT$$

$$- \frac{1}{cosL}\int_x^L sinx.cos(L-T).F(T)dT$$

olarak bulunur. Böylece,

$$g(x;T) = \frac{-1}{cosL}\begin{cases} sinT.cos(L-x) & 0 \le T \le x \\ sinx.cos(L-T) & x \le T \le L \end{cases}$$

olmak üzere çözümün

$$y(x) = \int_0^L g(x;T)F(T)dT$$

şeklinde olduğu bulunmuş olur.

(b) Bulunan $g(x;T)$ Green fonksiyonun 1.14 özelliklerini sağlayıp sağlamadığını araştıralım:

1) sinx ve cosx fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olduklarından bulduğumuz $g(x;T)$ fonksiyonu x=T dahil tüm x ' ler için süreklidir.

2)

$$\frac{dg(x;T)}{dx} = \frac{-1}{cosL}\begin{cases} sinT.sin(L-x) & 0 \leq T \leq x \\ cosx.cos(L-T) & x \leq T \leq L \end{cases}$$

$$\lim_{x \to T^-} \frac{dg}{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{-1}{cosL}cos(T-\varepsilon).cos(L-T)\right] = \frac{-1}{cosL}.cosT.cos(L-T)$$

$$\lim_{x \to T^+} \frac{dg}{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{-1}{cosL}sinT.sin(L-T+\varepsilon)\right] = \frac{-1}{cosL}.sinT.sin(L-T)$$

$$\lim_{x \to T^-} \frac{dg}{dx} - \lim_{x \to T^-} \frac{dg}{dx} = \frac{-1}{cosL}\left[-cosT.cos(L-T) + sinT.sin(L-T)\right]$$

$$= \frac{-1}{cosL}\Big\{ cosT\left[cosL.cosT + sinL.sinT\right]$$

$$+ sinT\left[sinL.cosT - cosL.sinT\right]\Big\}$$

$$= \frac{-1}{cosL}\Big\{ - cosT.cosL.cosT - cosT.sinL.sinT$$

$$+ sinT.sinT.sinL.cosT - sinT.cosL.sinT\Big\}$$

$$= \frac{-1}{cosL}\left[-cosT.cosT.cosL - sinT.cosL.sinT\right]$$

$$= cosT.cosT + sinT.sinT$$

$$= 1$$

3)

$g(x;T)$ fonksiyonu verilen diferansiyel denklemimizin homojen kısmını sağlamalı; O halde

$$\frac{d^2g}{dx^2} + g(x;T) = 0$$

olmalıdır.

$$\frac{dg}{dx} = \frac{-1}{cosL}\begin{cases} sinT.sin(L-x) \\ cosx.cos(L-T) \end{cases}$$

ve

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{-1}{cosL}\begin{cases} -sinT.cos(L-x) \\ -sinx.cos(L-T) \end{cases}$$

olduğundan

$$\frac{-1}{cosL}\underbrace{\left\{\begin{bmatrix} -sinT.cos(L-x) \\ -sinx.cos(L-T) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sinT.cos(L-x) \\ sinx.cos(L-T) \end{bmatrix}\right\}}_{=0} = 0$$

olur. O halde bulunan $g(x;T)$ fonksiyonu Green fonksiyonlarını belirleyen üç özelliği sağlar.

BÖLÜM II

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONLARI

2.1. Green Fonksiyonları

Bu bölümde; P(x), Q(x) ve R(x) fonksiyonları $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında sürekli kabul edilmek üzere

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = f(x) \qquad \alpha < x < \beta \tag{2.1}$$

ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi ile Green fonksiyonları arasında ilişki kurulacaktır.
Bu denklemin, her terimini $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında sürekli P(x) fonksiyonu ile bölelim ve yine her terimini $e^{\int \frac{Q}{P}dx}$ ile çarpalım; bu durumda

$$e^{\int \frac{Q}{P}dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Q}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}\frac{dy}{dx} + \frac{R}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}y = \frac{1}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{Q}{P}dx}\frac{dy}{dx}\right] + \frac{R}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}y = \frac{1}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}f(x)$$

bulunur. Burada

$$e^{\int \frac{Q}{P}dx} = a(x) \quad , \quad \frac{R}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx} = c(x) \quad ve \quad \frac{1}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}f(x) = F(x)$$

şeklinde alıp, denklemi yeniden düzenlediğimizde;

$$\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{dy}{dx}\right] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta \tag{2.2}$$

elde ederiz. Başka bir deyişle; her ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem $P(x) \neq 0$ olmak koşuluyla (2.2) bağıntısı ile ifade edilebilir ($a(x) > 0$ 'dır). Bu ifadeye diferansiyel denklemin kendine eş denklemi denir. Ve (2.2) bağıntısının sol kısmı genellikle bir L diferansiyel operatörü ile ifade edilir. Buna göre diferansiyel denklem kısaca aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$Ly = F(x) \qquad \alpha < x < \beta \tag{2.3}$$

Bu denklemin tek çözümü elde edilir ve bu çözümün iki sınır şartını sağlaması gerekir. Genel olarak bu sınır şartlarını $\ell_1, \ell_2, h_1, h_2, m_1\, ve\, m_2$ sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_1 y &= -\ell_1 y'(\alpha) + h_1 y(\alpha) = m_1 \\ B_2 y &= \ell_2 y'(\beta) + h_2 y(\beta) = m_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde göz önüne alacağız. Bu şartlara karışık olmayan sınır şartları denir. Bunun sebebi ilk şartın sadece $x = \alpha$ 'ya, ikinci şartında sadece $x = \beta$ 'ya bağlı olmasıdır. Ayrıca bu sınır şartlarını,

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= y(\beta) \\ y'(\alpha) &= y'(\beta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde göz önüne alabiliriz; bu durumda ise şartlar periodik sınır şartları adını alırlar. Periodik sınır şartları sadece denklemin a(x) katsayısının $\alpha\; ve\; \beta$ noktalarındaki değerlerinin eşit olması durumunda söz konusu olurlar ve homojendirler.

Bunların dışında L operatörünü göz önüne alırsak, L diferansiyel operatörünü

$$Ly \equiv a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2 y \tag{2.6}$$

bağıntısıyla tanımlayabiliriz. $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında $a_0''(x), a_1'(x)\; ve\; a_2(x)$ sürekli kabul edilsin, eğer u(x) ve v(x) yine aynı aralıkta sürekli, türeve sahip ve ikinci türevleri de parçalı sürekli herhangi iki fonksiyon ise

$$\int_\alpha^x vLudx = \int_\alpha^x \left[(a_0 v)u'' + (a_1 v)u' + (a_2 v)u\right]dx \qquad (\alpha \leq x \leq \beta) \tag{2.7}$$

olur. Bu bağıntının sağ yanındaki 1. ve 2. terime kısmi integrasyon uygularsak; (1. terime iki kez kısmi integrasyon uygularız)

$$\int_{\alpha}^{x}(a_0v)u''dx = \left[(a_0v)u'\right]_{\alpha}^{x} - \int_{\alpha}^{x}(a_0v)'u'dx$$

$$= \left[(a_0v)u' - (a_0v)'u\right]_{\alpha}^{x} - \int_{\alpha}^{x}(a_0v)''udx$$

$$\int_{\alpha}^{x}(a_1v)u'dx = \left[(a_1v)u\right]_{\alpha}^{x} - \int_{\alpha}^{x}(a_1v)'udx$$

buluruz. Bu iki ifadeyi (2.7) 'de yerine yazarsak;

$$\int_{\alpha}^{x} vLudx = \left[(a_0v)u' - (a_0,v)'u + (a_1v)u\right]_{\alpha}^{x} + \int_{\alpha}^{x}\left[(a_0v)'' - (a_1v)' + (a_2v)\right]udx \quad (2.8)$$

olur. Eşitliğin ikinci yanındaki integral içindeki parantezli ifadeyi (2.6) bağıntısına göre L^*v olarak tanımlarsak;

$$L^*v \equiv (a_0v)'' - (a_1v)' + (a_2v) \equiv a_0v'' + (2a_0' - a_1)v' + (a_0'' - a_1' - a_2)v \quad (2.9)$$

olmak üzere (2.8) bağıntısı

$$\int_{\alpha}^{x}(vLu - uL^*v)dx = \left[a_0(u'v - uv') + (a_1 - a_0')uv\right]_{\alpha}^{x} \quad (2.10)$$

şeklinde düzenlenir. L^* operatörüne, L operatörüne karşılık gelen eş operatör denir. L^*, L'den ve L 'de L^* 'dan kolayca elde edilir. Bu nedenle L ve L^* operatörlerinin herbiri biribirinin eş operatörüdür. Ancak L ve L^* operatörlerinin karşılıklı katsayıları özdeş ise L operatörüne kendine-eş operatör denir. Buna göre (2.6) ve (2.9) bağıntılarından ancak ve ancak

$$2a_0' - a_1 = a_1$$

ve

$$a_0'' - a_1' + a_2 = a_2$$

ise L operatörünün kendine-eş olacağı açıktır. O halde bu koşullar yalnız

$$a_1 = a_0' \tag{2.11}$$

olduğunda sağlanır.

x 'e bağlı olarak (2.10) denkleminin diferansiyelini aldığımızda

$$vLu - uL^*v = \frac{d}{dx}\left[a_0(u'v - uv') + (a_1 - a_0')uv\right] \tag{2.12}$$

olarak elde ederiz. Bu bağıntıya L ikinci mertebeden bir diferansiyel operatör olmak üzere Lagrange Özdeşliği denir. Ve (2.12) eşitliğinin sağ kısmındaki parantez içindeki ifade u ve v fonksiyonlarının bilineer eşleniği adını alır.

(2.10) denkleminde $x = \beta$ alırsak;

$$\int_\alpha^\beta (vLu - uL^*v)dx = \left[a_0(u'v - uv') + (a_1 - a_0')uv\right]_\alpha^\beta \tag{2.13}$$

olarak Green özdeşliğini elde ederiz. Ancak L kendine-eş bir operatör olduğunda Green özdeşliğini

$$\int_\alpha^\beta (vLu - uLv)dx = \left[a_0(u'v - uv')\right]_\alpha^\beta = \left[J(u,v)\right]_\alpha^\beta \tag{2.14}$$

ya da x 'e göre türevi alındığında

$$vLu - uLv = \frac{d}{dx}\left[a_0(u'v - uv')\right] = \frac{d}{dx}\left[J(u,v)\right] \tag{2.15}$$

şeklinde ifade ederiz. J(u,v) 'ye, u ve v fonksiyonlarının konjüktü denir. Bu özdeşlik u ve v 'nin ikinci türevlerinin süreksiz olduğu her nokta dışında geçerlidir. Çünkü böyle süreksizlikler sonlu olabilirler. (2.15) bağıntısının her iki yanını $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında x 'in herhangi iki değeri arasında integre edersek;

$$\int_{x_1}^{x_2} (uLv - vLu)dx = \left[J(u,v)\right]_{x_1}^{x_2} \tag{2.16}$$

buluruz ve buna $x_1 \leq x \leq x_2$ aralığı üzerindeki Green özdeşliği deriz. (2.14), (2.15) ve (2.16) bağıntıları L operatörünün özellikleridir.

u(x) ve v(x) fonksiyonları (2.3) diferansiyel denkleminin homojen kısmını sağladığında bu fonksiyonların konjüktlerinin sabit olduğu açıktır. Bu sonucu kısaca aşağıdaki teorem ile ifade edebiliriz.

Teorem 1. Eğer u(x) ve v(x) fonksiyonları Ly=0 homojen diferansiyel denklemini sağlıyorsa J(u,v) bir sabittir. (x bağımsız)

İspat :

u(x) ve v(x) için (2.6) bağıntısına göre

$$vLu - uLv = (a_0u'' + a_1u' + a_2u)v - (a_0v'' + a_1v' + a_2v)u$$

$$\Rightarrow vLu - uLv = a_0u''v + a_1u'v + a_2uv - a_0v''u - a_1v'u - a_2vu$$

$$\Rightarrow vLu - uLv = a_0(u''v - uv'') + a_1(u'v - uv')$$

buluruz.

$$u'v - uv' = w(u, v)$$

olarak alalım. Bu durumda

$$vLu - uLv = a_0\frac{dw}{dx} + a_1w$$

olur. u ve v Ly=0 diferansiyel denklemini sağladıklarından Lu=0 ve Lv=0 'dır. O halde

$$a_0\frac{dw}{dx} + a_1w = 0$$

buluruz. Bu diferansiyel denklemi çözersek;

$$\frac{w'}{w} = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{w} = -\frac{a_1}{a_0}dx \Rightarrow lnw = lnc - \int(\frac{a_1}{a_0})dx$$

$$\Rightarrow w = c.e^{\int(\frac{a_1}{a_0})dx}$$

olarak buluruz. L kendine-eş operatör olduğunda $a_1 = a_0'$ idi. Bu durumda

$$w = ce^{-\int \frac{a_0'}{a_0} dx} = ce^{-ln a_0}$$
$$\Rightarrow \ w = \frac{c}{a_0(x)}$$

şeklinde çözüm bulunur.

$$J(u,v) = a_0(u'v - uv')$$

ve

$$u'v - uv' = w(u,v)$$

olduğundan

$$J(u,v) = a_0 w(u,v)$$

olur. Bulduğumuz w(u,v) çözümünü burada yerine koyarsak;

$$J(u,v) = a_0 \frac{c}{a_0} = c = sbt \quad \Rightarrow \quad J(u,v) = sbt$$

olarak teoremin ispatı tamamlanmış olur.■

Eğer u ve v lineer bağimlı iseler sabit sıfır değerini alır.

Bu bilgiler ile birlikte $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında a(x), sıfırdan farklı ve sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ve c(x) 'de sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$Ly = \frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{dy}{dx}\right] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$\begin{aligned} B_1 y = m_1 \\ B_2 y = m_2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunu tanımlamaya çalışalım. (Eğer sınır şartları periodik ise aynı zamanda homojendirler, $m_1 = m_2 = 0$) (2.17) diferansiyel denkleminin çözümleri F(x) parçalı sürekli ise klasik çözüm adını alır. y(x) parçalı sürekli ikinci türeve sahip ve (2.17) ile verilen sınır şartlarını sağlayan sürekli türetilebilir bir fonksiyon olsun. Eğer F(x) 'in sürekli olduğu her noktada Ly özdeş olarak F(x) 'e eşit ise diferansiyel denklemin çözümü klasik çözümdür.

Ancak Green fonksiyonları yardımıyla elde ettiğimiz çözümler klasik çözümler değildirler.

(2.17) ile verilen sınır değer probleminin eğer Green fonksiyonu varsa,

$$Lg = \delta(x - T)$$

$$\begin{aligned} B_1 g &= 0 \\ B_2 g &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

probleminin çözümü olarak tanımlanır. Bu problem, F(x) kaynak fonksiyonunun bir birim kaynak fonksiyonu olan $\delta(x - T)$ ile yer değiştirmesi ve $\delta(x - T)$ 'nin parçalı sürekli olmamasından dolayı sınır şartlarının homojen olması dışında (2.17) probleminin aynısıdır. O halde Green fonksiyonu (2.18) probleminin klasik çözümü değildir.

(2.18) ile verilen diferansiyel denklemin çözümleri olan $g(x;T)$ Green fonksiyonları da (1.14) ile verilen özelliklere paralel aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $g(x;T)$, $\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında süreklidir.

(2) $\frac{dg(x;T)}{dx}$, $\frac{1}{a(T)}$ büyüklüğünün x=T 'deki süreksizliği dışında süreklidir. Bunun anlamı

$$\lim_{x \to T+} \frac{dg}{dx} - \lim_{x \to T-} \frac{dg}{dx} = \frac{1}{a(T)} \tag{2.19}$$

demektir.

(3) Tüm $x \neq T$ için

$$Lg = 0$$

dır.

Bu özellikler, (2.18) ile verilen sınır şartları ile birlikte Green fonksiyonlarını karakterize ederler; tüm bu özellikleri verilecek adi bir diferansiyel denklemin Green fonksiyonunun elde edilmesine yardımcı olacak formüllerin çıkartılmasında kullanacağız.

Teorem 2.

$$\frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = 0 \quad \alpha < x < \beta$$

$$B_1 y = 0 \tag{2.20}$$

$$B_2 y = 0$$

homojen sistemi sadece aşikar (trivial) çözüme sahip ise u(x) ve v(x) bu homojen sistemin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere (2.18) ile verilen sınır şartlarını sağlayan (2.17) probleminin Green fonksiyonu A ve C bilinmeyenleri bulunmak suretiyle

$$g(x;T) = Au(x)+Cv(x)+\frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)\Big] \tag{2.21}$$

bağıntısıyla tek olarak ifade edilir.

İspat:

Ly=0 diferansiyel denkleminin sürekli ve türeve haiz iki çözümü u ve v olsun. u ve v (2.19) ile verilen (3) özelliğine göre $g(x;T)$ yi şu şekilde ifade ederler.

$$g(x;T) = \begin{cases} Eu(x) + Bv(x) & \alpha \le x < T \\ Du(x) + Gv(x) & T < x \le \beta \end{cases} \tag{2.22}$$

(1) özelliğine göre $x = \alpha$ ve $x = \beta$ 'yı sınırlara dahil ederiz ve x=T 'deki süreklilik ise

$$Eu(T) + Bv(T) = Du(T) + Gv(T)$$

olmasını gerektirir. (2) özelliğine göre ise x=T 'de $\frac{dg}{dx}$ 'deki sıçrama için

$$Du'(T) + Gv'(T) - Eu'(T) - Bv'(T) = \frac{1}{a(T)}$$

olması gerekir. Bu son iki denklemden B ve D 'yi E ve G cinsinden çözüp (2.22) 'de yerine koyarsak $g(x;T)$ 'yi

$$g(x;T) = \begin{cases} Eu(x) + Gv(x) - \frac{u(T)v(x)}{J(u,v)} & \alpha \le x \le T \\ Eu(x) + Gv(x) - \frac{v(T)u(x)}{J(u,v)} & T \le x \le \beta \end{cases}$$

olarak buluruz.

$$H(x-x_0)=\begin{cases}0 & x<x_0\\ 1 & x>x_0\end{cases}$$

Heaviside birim basamak fonksiyonuna göre $g(x;T)$ 'yi aşağıdaki gibi tek şekilde ifade edebiliriz; bu durumda

$$g(x;T)=Eu(x)+Gv(x)-\frac{1}{J(u,v)}[u(T)v(x)H(T-x)+v(T)u(x)H(x-T)]$$

$$=Eu(x)+Gv(x)-\frac{1}{J(u,v)}\Big\{u(T)v(x)[1-H(x-T)]+v(T)u(x)[1-H(T-x)]\Big\}$$

$$=\left[E-\frac{v(T)}{J(u,v)}\right]u(x)+\left[G-\frac{u(T)}{J(u,v)}\right]v(x)$$

$$+\frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)\Big]$$

$$=Au(x)+Cv(x)+\frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)\Big]$$

olarak teoremin ifade ettiği şekilde $g(x;T)$ bulunmuş olur. Bu bağıntıdaki A ve C bilinmeyenleri (2.18) denklemi ile verilen sınır şartlarını kullanmak suretiyle hesaplayabiliriz. Bu sınır şartları

$$r=J^{-1}(u,v)[u(x)v(T)H(T-x)+u(T)v(x)H(x-T)]$$

olmak üzere

$$B_1g=AB_1u+CB_1v+B_1r=0$$

$$B_2g=AB_2u+CB_2v+B_2r=0 \tag{2.23}$$

olmasını gerektirir. A ve C yi hesapladığımızda

$$\begin{vmatrix}B_1u & B_1v\\ B_2u & B_2v\end{vmatrix}\neq 0$$

olacaktır.

Determinantın sıfıra eşit olması durumunda $\lambda \neq 0$ sabit olmak üzere

$$B_1 u = \lambda B_1 v \qquad ve \qquad B_2 u = \lambda B_2 v \tag{2.24}$$

yada

$$B_1(u - \lambda v) = 0 \qquad ve \qquad B_2(u - \lambda v) = 0 \tag{2.25}$$

olacaktır. Sonuç olarak; homojen sınır değer problemimiz ancak ve ancak u(x) ve v(x) lineer bağımlı olduğunda $u - \lambda v$ non-trivial (aşikar olmayan) çözüme sahip olacaktır. Ve determinant sıfıra eşitlenecektir. ∎

Teorem 3.

(2.20) homojen sistemi sadece trivial (aşikar) çözüme sahip ve sınır şartları karışık olmadığında (2.20) sisteminin lineer bağımsız u(x) ve v(x) çözümleri sistemin sınır şartlarını sağlıyorsa (2.17) problemi için Green fonksiyonu aşağıdaki gibi tek şekilde ifade edilir;

$$g(x;T) = \frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\Big] \tag{2.26}$$

İspat:

$$g(x;T) = Au(x) + Cv(x) + \frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\Big]$$

Green fonksiyonu tüm $x \neq T$ 'ler için Lg=0 'ı sağladığından (2.18) ile verilen $Lg = \delta(x-T)$ 'yi de sağladığı açıktır. Ayrıca u(x) ve v(x) (2.20) homojen sisteminin sınır şartlarını sağladığından

$$B_1 u = B_1 v = B_2 u = B_2 v = 0$$

olur. Bu durumda $g(X;T)$ Green fonksiyonu $x < T$ için

$$g(x;T) = Au(x) + Cv(x) + \frac{1}{J(u,v)}[u(x)v(T)]$$

ve $x > T$ için de

$$g(x;T) = Au(x) + Cv(x) + \frac{1}{J(u,v)}[u(T)v(x)]$$

olarak ifade edilir. Bu Green fonksiyonunun $B_1 g = 0$ ve $B_2 g = 0$ sınır şartlarını sağlaması gerekir. O halde

$$r = \frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\Big]$$

olmak üzere

$$B_1 g = \underbrace{AB_1 u(x)}_{=0} + \underbrace{CB_1 v(x)}_{=0} + B_1 r = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_1 g = B_1 r = 0$$

ve

$$B_2 g = \underbrace{AB_2 u(x)}_{=0} + \underbrace{CB_2 v(x)}_{=0} + B_2 r = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_2 g = B_2 r = 0$$

olarak sağlanır ve böylece $g(x;T)$ fonksiyonu

$$g(x;T) = r$$

olacağından

$$g(x;T) = \frac{1}{J(u,v)}\Big[u(x)v(T)H(T-x) + u(T)v(x)H(x-T)\Big]$$

olarak elde edilir. ∎

Heaviside birim basamak fonksiyonu ile belirttiğimiz (2.21) ve (2.26) bağıntıları x=T için tanımnsızdır. Ancak $g(x;T)$ nin x=T 'deki sürekliliği için

$$\lim_{x \to T^+} g(x;T) = \lim_{x \to T^-} g(x;T)$$

olması gerektiğinden $g(x;T)$ bu limitlerden birisi ile ifade edilebilir.

Örnek 2.1

$-\tau \frac{d^2 y}{dx^2} = F(x)$ diferansiyel denkleminin y(0)=y(L)=0 koşulları altındaki Green fonksiyonunu (2.26) bağıntısını kullanarak bulunuz.

Çözüm:

Problemimizin y(0)=0=y(L) koşullarını sağlayan homojen kısmının çözümleri sırasıyla;

$$y'' = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \begin{cases} Ax + B & 0 \leq x < T \\ Cx + D & T < x \leq L \end{cases}$$

olacağından

$$y(0) = A.0 + B = 0 \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow y = Ax$$

$$y(L) = C.L + D = 0 \Rightarrow \quad D = -CL \quad \Rightarrow y = -C(L - x)$$

olmak üzere A ve C integrasyon sabitlerinin A=1 ve C=-1 olarak keyfi seçilmesiyle

$$u(x) = x \qquad ve \qquad v(x) = L - x$$

şeklinde elde edilir. u ve v 'nin konjüktleri

$$J(u, v) = a_0[uv' - vu'] = -\tau[x.(-1) - (L - x).1]$$

$$= -\tau[-x - L + x]$$

$$= \tau L$$

olarak bulunur ve böylece $g(x;T)$, (2.26) bağıntısına göre

$$g(x;T) = \frac{1}{\tau L}\Big[x(L - T)H(T - x) + T(L - x)H(x - T)\Big]$$

yada

$$g(x;T) = \begin{cases} \frac{x(L-T)}{\tau L} & 0 \leq x \leq T \\ \frac{T(L-x)}{\tau L} & T \leq x \leq L \end{cases}$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuç daha önce bulduğumuz (1.13) bağıntısıyla aynıdır.

Örnek 2.2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$y(\alpha) = m_1 \qquad y'(\beta) = m_2$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunu (2.26) bağıntısını kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$y(\alpha) = 0$, $y'(\beta) = 0$ koşullarını sağlayan diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümünü bulalım.

$$y'' + 4y' = 0 \quad \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

olduğundan

$$y(x) = \begin{cases} Acos2x + Bsin2x & \alpha < x < T \\ Ccos2x + Dsin2x & T < x < \beta \end{cases}$$

yada

$$y(x) = \begin{cases} Bsin2(x + \phi) & \alpha \leq x < T \\ Ccos2(x + \phi) & T < x \leq \beta \end{cases}$$

olarak buluruz. Burada verilen homojen sınır şartlarını kullanarak istenen çözümü elde ederiz.

$$y(\alpha) = Bsin2(\alpha + \phi) = 0$$

$$\Rightarrow sin2(\alpha + \phi) = 0$$

olmalıdır. Çünkü B=0 olması durumunda çözüm elde edemeyiz.

O halde

$$\alpha + \phi = 0 \Rightarrow \alpha = -\phi$$

olur. Ve

$$y(x) = Bsin2(x - \alpha)$$

buluruz. Aynı şekilde ikinci koşul içinde

$$y'(x) = -2Csin2(x + \phi)$$

$$y'(\beta) = -2Csin2(\beta + \phi) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad sin2(-\beta - \phi) = 0$$

olmalıdır. Bu durumda

$$-\beta - \phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\beta = \phi$$

olur. Ve

$$y(x) = Ccos2(\beta - x)$$

buluruz. Keyfi olarak B=C=1 alırsak;

$$u(x) = sin2(x - \alpha) \qquad ve \qquad v(x) = cos2(\beta - x)$$

olarak istenen çözümleri elde ederiz.

$$J(u, v) = a_0(uv' - u'v) \qquad \Rightarrow \qquad a_0 = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned} J(u,v) &= uv' - u'v \\ &= 2sin2(x-\alpha)isn2(\beta - x) - 2cos2(x-\alpha)cos2(\beta - x) \\ &= -2cos2(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

buluruz. O halde (2.26) bağıntısına göre verilen sınır değer problemine ait Green fonksiyonunu;

$$\begin{aligned} g(x;T) = \frac{-1}{2cos2(\beta - \alpha)} \Big[& Sin2(x-\alpha)Cos2(\beta - T)H(T - x) \\ & + Sin2(T-\alpha)Cos2(\beta - x)H(x - T) \Big] \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz.

Örnek 2.3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 10y = F(x) \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

diferansiyel denkleminin $y'(0) = 5$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ koşulları altındaki Green fonksiyonunu (2.26) bağıntısını kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$y'' + 2y' + 10y = 0$ homojen diferansiyel denklemini çözelim.

$$r^2 + 2r + 10 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_{1,2} = -1 \pm 3i$$

olduğundan

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x}(Asin3x + Bcos3x) & 0 \leq x < T \\ e^{-x}(Csin3x + Dcos3x) & T < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

olarak buluruz. $y'(0) = 0$ ve $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ homojen şartlarını bu çözüme uyguladığımızda, $y'(0)$ için

$$y'(x) = -e^{-x}(Asin3x + Bcos3x) + e^{-x}(3Acos3x - 3Bsin3x)$$

$$\Rightarrow y'(0) = -B + 3A = 0$$

$$\Rightarrow B = 3A$$

olacağından

$$y(x) = e^{-x}(Asin3x + 3Acos3x)$$

buluruz ve $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ için de

$$y(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{-\pi}{2}}(Csin\frac{3x}{2} + \underbrace{Dcos\frac{3x}{2}}_{=0}) = 0$$

$$\Rightarrow Ce^{\frac{-\pi}{2}} = 0$$

olur. $e^{\frac{-\pi}{2}}$ üstel fonksiyonu sıfır olamayacağından

$$C = 0$$

dır ve

$$y(x) = e^{-x}Dcos3X = v(x)$$

olarak buluruz. u ve v ' nin konjüktünü bulabilmek için diferansiyel denklemi $e^{2\pi}$ ile çarparak kendine eş formda ifade edelim;

$$e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2}+2e^{2x}\frac{dy}{dx}+10e^{2x}y=F(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{2x}\frac{dy}{dx}\right]+10e^{2x}y=F(x)$$

$$a(x)=e^{2x}$$

olur. Bu durumda

$$J(u,v)=e^{2x}\Big[e^{-x}(sin3x+3cos3x)(-e^{-x}cos3x-3e^{-x}sin3x)$$

$$-e^{-x}cos3x(-10e^{-x}sin3x)\Big]$$

$$=-3$$

olarak elde ederiz ve böylece (2.26) bağıntısına göre Green fonksiyonunu

$$g(x;T)=\frac{-1}{3}\Big[e^{-(x+T)}cos3T(sin3x+3cos3x)H(T-x)+e^{-(x+T)}cos3x(sin3T+3cos3T)H(x$$

olarak buluruz.

Örnek 2.4

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=F(x) \qquad 0<x<1$$

$$y(0)-y(1)=0 \qquad , \qquad y'(0)-y'(1)=0$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$y''+y=0$ homojen diferansiyel denkleminin çözümleri

$$r^2+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad r=\pm i$$

olmak üzere

$$y(x)=\begin{cases} AsinxBcosx & 0<x<T \\ Dsinx+Ccosx & T<x<1 \end{cases}$$

yada

$$y(x) = \begin{cases} Asin(x+\phi) & 0 < x < T \\ Ccos(x+\phi) & T < x < 1 \end{cases}$$

,

şeklindedir. Keyfi olarak A=D=1 ve $\phi = 0$ alırsak bu homojen diferansiyel denklemin çözümlerini

$$u(x) = sinx \qquad ve \qquad v(x) = cosx$$

olarak elde ederiz. O halde u ve v ' nin konjüktü $a_0 = 1$ olduğundan;

$$\begin{aligned} J(u,v) &= uv' - u'v \\ &= sinx(-sinx) - cosxcosx \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur.

Bu durumda $g(x;T)$ Green fonksiyonunu sınır şartları periyodik sınır şartı (karışık sınır şartı) olduğundan (2.21) bağıntısına göre

$$g(x;T) = Asinx + Ccosx - [sinxcosTH(T-x) + sinTcosxH(x-T)]$$

şeklinde buluruz. Bu fonksiyon verilen sınır şartlarını sağlayacağından A ve C bilinmeyenlerini

$$C - Asin1 - Ccos1 + sinTcos1 = 0$$

$$A - cosT - Acos1 + Csin1 - sinTsin1 = 0$$

denklemlerinden

$$A = \frac{cosT - cos(1+T)}{2(1-cos1)} \quad , \quad C = \frac{sinT + sin(1-T)}{2(1-cos1)}$$

olarak buluruz. Bu eşitlikleri $g(x;T)$ eşitliğinde yerine yazdığımızda; verilen sınır değer problemi için Green fonksiyonu

$$g(x;T) = \frac{1}{2(1-cos1)}\{sinx[cosT - cos(1+T)] + cosx[sinT + sin(1-T)]\}$$

$$- sinxcosTH(T-x) - sinTcosxH(x-T)$$

olur.

Teorem 4

$g(x;T)$,

$$Ly = \frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$B_1y = 0$$
$$B_2y = 0 \tag{2.27}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu olmak üzere homojen sınır şartlarına sahip bu problemin çözümü

$$y(x) = \int_\alpha^\beta g(x;T).F(T)dT \tag{2.28}$$

şeklindedir. (Homojen olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünün nasıl olacağını ilerki konularımızda ele alacağız.)

İspat:

(2.27) problemine ait Green fonksiyonunun (2.18) ile gösterdiğimiz problemi sağlayacağı açıktır. O halde (2.28) ile verilen çözüm denklemi (2.27) denklemini sağlarsa teorem ispatlanmış olur.

$$Ly = L\int_\alpha^\beta g(x;T).F(T)dT$$

olur. L operatörü ile integrasyonun sırasını değiştirirsek ;

$$Ly = \int_\alpha^\beta L[g(x;T)].F(T)dT$$

olur. Ve (2.18) e göre $Lg = \delta(x - T)$ olduğundan

$$Ly = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x - T).F(T)dT$$

dır.

x=T $\Rightarrow$ dx=dT

aldığımızda

$$Ly = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(T - x)F(x)dx$$

$$Ly = F(x)$$

olarak ispat tamamlanmış olur. ∎

Ayrıca $g(x;T)$ (2.18) ile verilen sınır şartlarını sağladığından dolayı y(x) çözümü (2.27) problemini sağlamalıdır.

Bu teoremin sonucu olarak; bir sınır değer problemini çözmek için öncelikle Green fonksiyonunun bilinmesi gerektiği anlaşılır. Böylece herhangi bir F(x) kaynak fonksiyonu için istenen çözüm integrasyon ile elde edilebilir. Bu integral bir superpozisyon olarak düşünülebilir. Çünkü Green fonksiyonu T 'deki bir birim nokta kaynak $[\delta(x - T)]$ yardımıyla (2.27) probleminin çözümünü bulmamıza yardım eder; yani $g(x;T).F(T)dT$ x-ekseninin dT aralığı üzerindeki F(x) kaynağının F(T)dT kısmına uygulanan etki olarak izah edilir. F(x) kaynağı verilen aralık boyunca dağıldığında; kaynak x_j noktalarındaki F_j büyüklüklerinin n tanesi ile oluşturulmak üzere F(x) kaynağı ile toplanarak (2.27) probleminin istenen çözümü;

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T)[F(x) + \sum_{j=1}^{n} F_j \delta(T - x_j)]dT \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T).F(T)dT + \sum_{j=1}^{n} F_j g(x;x_j) \end{aligned} \qquad (2.29)$$

olarak elde edilir.

Bu teoreme ait örnekler gözönüne alınmadan önce delta fonksiyonunu içeren Green formülünü ele alacağız ve $g(x;T)$ Green fonksiyonunun simetrikliğini de inceleyeceğiz.

Teorem 5

L operatörü,(2.27) probleminin diferansiyel operetörü olarak ele alınmak üzere v(x;T), $Lv = \delta(x-T)$' nin bir çözümü ve u(x) 'de ikinci türevi parçalı sürekli olan sürekli ve türeve haiz bir fonksiyon olduğunda

$$\int_{\alpha}^{\beta}(uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu')\right\}_{\alpha}^{\beta} \tag{2.30}$$

dir.

İspat :

u(x) ' in bir $\overline{T} < T$ noktasında ikinci türevinin bir süreksizliğinin olduğunu varsayalım (Benzer incelemeler eğer $\overline{T} > T$ ise yada u(x) daha çok süreksizlik noktasına sahip ise de yapılabilir). O zaman $\varepsilon > 0$ küçük bir sayı olmak üzere,

$$\int_{\alpha}^{\beta}(uLv - vLu)dx = \int_{\alpha}^{\overline{T}}(uLv - vLu)dx + \int_{\overline{T}}^{T-\varepsilon}(uLv - vLu)dx$$

$$+ \int_{T-\varepsilon}^{T+\varepsilon}(uLv - vLu)dx + \int_{T+\varepsilon}^{\beta}(uLv - vLu)dx$$

şeklindedir. Bu integrallerin 1.,2. ve 4. süne (2.16) ile tanımladığımız Green özdeşliğini uygularsak Green fonksiyonlarının (3). özelliğine göre ((2.19)' dan) tüm $x \neq T$ için Lv=0 olduğundan;

$$\int_{\alpha}^{\beta}(uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu')\right\}_{\alpha}^{\overline{T}} + \left\{a(uv' - vu')\right\}_{\overline{T}}^{T-\varepsilon}$$

$$+ \int_{T-\varepsilon}^{T+\varepsilon}(u\delta(x-T) - vLu)dx + \left\{a(uv' - vu')\right\}_{T+\varepsilon}^{\beta}$$

olur.

$\overline{T}$ ' de a, u, u', v ve v' ' nün tümü süreklidir. Bu yüzden $\overline{T}$' de terimler sıfıra eşitlenir ve ifadenin sağ kısmı ;

$$\int_{\alpha}^{\beta}(uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu2)\right\}_{\alpha}^{\beta}$$

$$+ a(T-\varepsilon)\Big[u(T-\varepsilon)v'(T-\varepsilon;T) - v(T-\varepsilon;T)u'(T-\varepsilon)\Big]$$

$$- a(T+\varepsilon)\Big[u(T+\varepsilon)v'(T+\varepsilon;T) - v(T+\varepsilon;T)u'(T-\varepsilon)\Big]$$

$$+ u(T) - \int_{T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} vLudx$$

şeklini alır. Burada $\varepsilon \to 0$ olacak şekilde limit aldığımızda $T-\varepsilon \leq x \leq T+\varepsilon$ aralığında v,u,u' ve u'' sürekli olduklarından son integral sıfıra eşit olur ve ifade ;

$$\int_{\alpha}^{\beta}(uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu2)\right\}_{\alpha}^{\beta} + a(T)\Big[u(T)v'(T_{-};T) - v(T;T)u'(T)\Big]$$

$$- a(T)\Big[u(T)v'(T_{+};T) - v(T;T)u'(T)\Big] + u(T)$$

$$= \left\{a(uv' - vu')\right\}_{\alpha}^{\beta} - a(T)u(T)\Big[v'(T_{+};T) - v'(T_{-};T)\Big]$$

$$- \underbrace{a(T)v(T;T)u'(T) + a(T)v(T;T)u'(T)}_{=0} + u(T)$$

$$= \left\{a(uv' - vu')\right\}_{\alpha}^{\beta} - a(T)u(T)[v'(T_{+};T) - v'(T_{-};T)]$$

$$+ u(T)$$

olur. Green fonksiyonlarına ait 2. özelliğe göre $g(x;T) = v(x;T)$ için;

$$v'(T_+;T) - v'(T_-;T) = \frac{1}{a(T)}$$

olduğundan;

$$\int_\alpha^\beta (uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu')\right\}_\alpha^\beta - a(T)u(T)\frac{1}{a(T)} + u(T)$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta (uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu')\right\}_\alpha^\beta$$

olarak elde edilir. ∎

Teorem 6

L operatörü (2.27) probleminin diferansiyel operatörü olsun. u ve v $Lu = \delta(x - T)$ ve $Lv = \delta(x - S)$ ' i sağladığında

$$\int_\alpha^\beta (uLv - vLu)dx = \left\{a(uv' - vu')\right\}_\alpha^\beta \tag{2.31}$$

dır.

Bir önceki teoremin ispatına benzer ispat Green formülünün bu uzantısı içinde yapılabilir.

Teorem 7

Sınır şartları karışık olmasa da yada periyodik (karışık) olsa da (2.27) problemi için Green fonksiyonu simteriktir.

$$g(x;T) = g(T;x) \tag{2.32}$$

İspat :

(2.31) Green formülü $u = g(x;T)$ ve $v = g(x;S)$ alarak düzenlediğimizde

$$\int_\alpha^\beta [g(x;T)Lg(x;S) - g(x;S)Lg(x;T)]dx = \left\{a(x)[g(x;T)\frac{dg(x;S)}{dx} - g(x;S)\frac{dg(x;T)}{dx}]\right\}_\alpha^\beta$$

olur. Buradan açıkça görülür ki $g(x;T)$ ve ya $g(x;S)$ karışık olmayan (2.4) ya-da periyodik (karışık)olan (2.5) sınır şartlarını sağladığında bu son denklemin sağ kısmı sıfıra eşit olur ve böylece

$$\int_{\alpha}^{\beta}[g(x;T)\delta(x-S)-g(x;S)\delta(x-T)]dx=0$$

$$\Rightarrow g(S;T)-g(T;S)=0$$

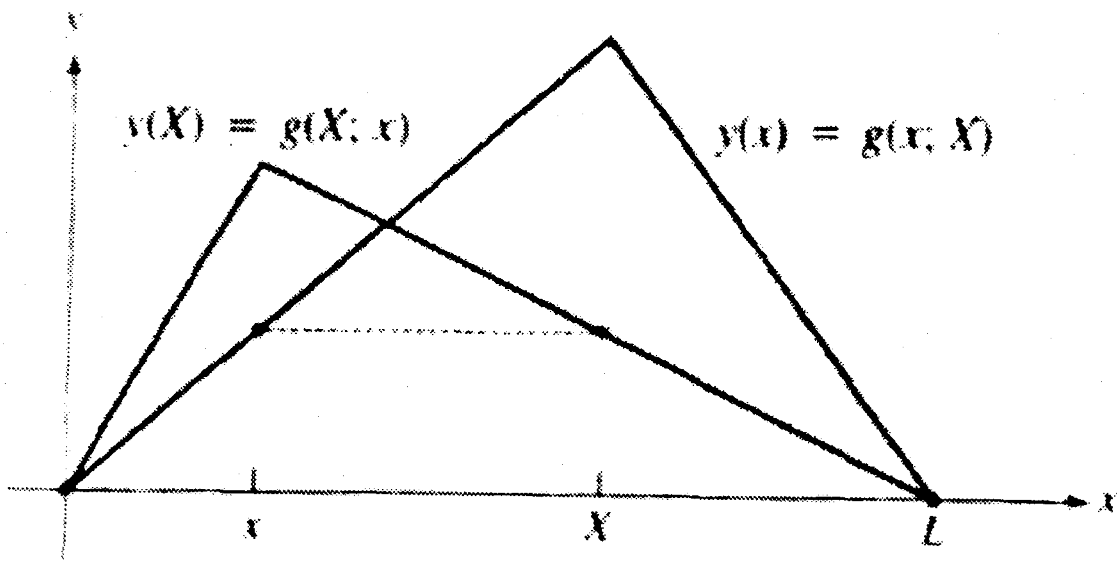
$$\Rightarrow g(S;T)=g(T;S)$$

olarak buluruz.■

Bu ifade daha önce Bölüm1 'de (1.10) problemini incelerken sözü geçen fiziksel simetriyi gösterir.

(1.10) problemi için $g(x;T)$ Green fonksiyonu; telin T noktasından uygulanan bir birim kuvvete göre denge durumundan sapma miktarını verir.

$g(x;T)$ nin simetrisi; T noktasına uygulanan birim kuvvetten dolayı telin x noktasındaki sapma miktarına özdeş x noktasına uygulanan birim kuvvete karşılık telin T noktasındaki sapma miktarını ifade eder. Buna *Maxwell Karşılaştırılması* denir ve şekil 2.1 'de örneklenmiştir.



Şekil 2.1

2.2. Green Fonksiyonlarını Kullanarak Sınır Değer Problemlerinin Çözümleri

Bu bölümde Green fonksiyonunu bildiğimiz sınır değer problemlerinin çözümlerinin nasıl olacağını ele alacağız. Bir önceki konuda sınır şartlarının homojen olması durumunda çözümün

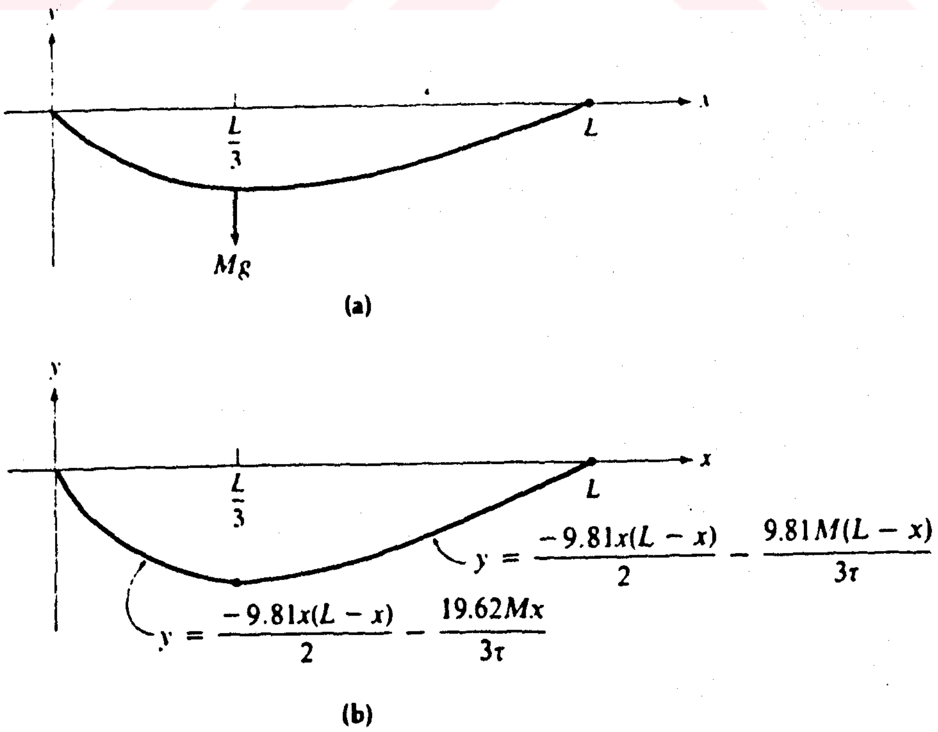
$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T).F(T)dT$$

bağıntısıyla bulunabileceğinden bahsetmiştik. Homojen olmayan sınır şartlarına sahip problemlerin çözümlerini ise ya superpozisyon ya da Green formülünü kullanmak suretiyle bulabileceğiz.

2.2.1. Homojen Sınır Şartlarıyla İlgili Problemler

Örnek 2.5

L uzunluğundaki bir teli,x-ekseni üzerinde uçlarından x=0 ve x=L ' ye bağlayarak gerelim.$x = \frac{L}{3}$ noktasından bu gergin tele bir M kütlesi astığımızda (şekil2.2(a)) ağırlık hesaba katılmak suretiyle telin denge durumundan sapma miktarını bulalım.



Şekil 2.2

Çözüm:

Bu telin denge durumundan sapma miktarını ifade eden sınır değer problemi

$$-\tau\frac{d^2y}{dx^2} = -9.81 - 9.81M\delta(x - \frac{l}{3})$$

$$y(0) = 0 = y(L)$$

dir. (1.13) bağıntısıyla ve örnek 1' e göre herhangi bir F(x) kaynak fonksiyonu için telin denge durumundan sapma miktarını ifade eden problemin Green fonksiyonunu

$$g(x;T) = \frac{1}{L\tau}\left[x(L-T)H(T-x) + T(L-x)H(x-T)\right]$$

olarak bulmuştuk. O halde verilen problemin çözümünü (2.28) bağıntısına göre;

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^L g(x;T)[-9.81 - 9.81M\delta(T - \frac{L}{3})]dT \\
&= -9.81\int_0^L g(x;T)dT - 9.81Mg(x;\frac{L}{3}) \\
&= \frac{-9.81}{L\tau}\int_0^x T(L-x)dT - \frac{9.81}{L\tau}\int_x^L x(L-T)dT \\
&\quad - \frac{9.81}{L\tau}\left[x(L-\frac{L}{3})H(\frac{L}{3}-x) + \frac{L}{3}(L-x)H(\frac{x-L}{3})\right] \\
&= \frac{-9.81}{L\tau}(L-x)(\frac{x^2}{2}) - \frac{9.81}{L\tau}\frac{x(L-x)^2}{2} \\
&\quad - \frac{9.81}{L\tau}\left[\frac{2Lx}{3}H(\frac{L}{3}-x) + (\frac{L}{3})(L-x)H(x-\frac{L}{3})\right]
\end{aligned}$$

$$y(x) = \frac{-9.81x(L-x)}{2\tau} - \frac{9.81M}{3\tau}\begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{L}{3} \\ (L-x) & \frac{L}{3} \leq x \leq L \end{cases}$$

olarak buluruz. Bu çözüm bir superpozisyondur. Çünkü F(x) kaynağı hem ağırlığı hem da bir noktada toplanan yükü içermektedir. (şekil 2.2(b))

Örnek 2.6

(a) F(x)=2x

(b) F(x)=H(x -1)-H(x-2)

olmak üzere

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = F(x) \qquad 0 < x < 3$$

$$y(0) = 0 = y'(3)$$

sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Bu sınır değer problemi için Green fonksiyonunu $y(\alpha) = 0 = y'(\beta)$ olmak üzere örnek 2.2 de hesaplamıştık. O halde verilen bu sınır şartları için Green fonksiyonunu $\alpha = 0$ ve $\beta = 3$ almak suretiyle ;

$$g(x;T) = \frac{-1}{2cos6}\left[sin2x.cos(6-2T).H(T-x) + sin2T.cos(6-2x).H(x-T)\right]$$

olarak elde ederiz. F(x) kaynak fonksiyonumuz olmak üzere homojen sınır şartlarına sahip bu problemimizin çözümünü

$$\int_0^3 g(x;T).F(T)dT$$

integali ile hesaplarız.

(a) F(x)=2x ise;

$$y(x) = \int_0^3 2Tg(x;T)dT$$

$$= \frac{-1}{2cos6}\int_0^x 2Tsin2Tcos(6-x)dT - \frac{1}{2cos6}\int_x^3 2Tsin2xcos(6-2T)dT$$

$$= -\frac{cos(6-2x)}{cos6}\left\{\frac{-Tcos2T}{2}+\frac{sin2T}{4}\right\}_0^x$$

$$-\frac{sin2x}{cos6}\left\{\frac{-Tsin(6-2T)}{2}+\frac{cos(6-2T)}{4}\right\}_0^x$$

$$= \frac{x}{2}-\frac{sin2x}{4cos6}$$

olarak çözümü buluruz. Bu sonucu $y''+4y=2x$ diferansiyel denkleminin verilen sınır şartları altındaki genel çözümünü bularak da basitçe elde edebiliriz.

(b) F(x)=H(x-1)=H(x-2) ise;

$$y(x) = \int_0^3 [H(x-1)-H(x-2)g(x;T)dT$$

olduğundan

$$H(x-1) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x>1 \end{cases} \qquad ve \qquad H(x-2) = \begin{cases} 0 & x<2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

olmak üzere

$$y(x) = \int_1^2 g(x;T)dT$$

dir.

$x \leq 1$ olduğunda;

$$y(x) = \int_1^2 \frac{-1}{2cos6}.sin2x.cos(6-2T)dT$$

$$= \frac{sin2x}{2cos6}\left\{\frac{sin(6-2T)}{2}\right\}_1^2$$

$$= \frac{sin2x(sin2 - sin4)}{4cos6}$$

$1 < x < 2$ olduğunda;

$$y(x) = \int_1^x \frac{-1}{2cos6}.sin2T.cos(6-2x)dT + \int_x^2 \frac{-1}{2cos6}.sin2x.cos(6-2T)dT$$

$$= \frac{cos(6-2x)}{2cos6}\left\{\frac{cos2T}{2}\right\}_1^x + \frac{sin2x}{2cos6}\left\{\frac{sin(6-2T)}{2}\right\}_2^x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4cos6}[sin2x.sin2 - cos(6-2x).cos2]$$

$2 \leq x \leq 3$ olduğunda da ;

$$y(x) = \int_1^x \frac{-1}{2cos6}.sin2T.cos(6-2x)dT$$

$$= \frac{cos(6-2x)}{2cos6}\left\{\frac{cos2T}{2}\right\}_1^2$$

$$= \frac{cos(6-2x)(cos4 - cos2)}{4cos6}$$

şeklinde çözümü elde ederiz.

2.2.2. Homojen Olmayan Sınır Şartlarıyla İlgili Problemler

$$Ly = \frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$
$$B_1 y = m_1$$
$$B_2 y = m_2 \tag{2.33}$$

olarak sınır şartları homojen olmayan bir problemimiz olduğunu varsayalım. (sadece homojen olmayan karışmamış sınır şartlarını göz önüne alacağız; periyodik sınır şartları homojendir.) Bu tip problemlerin çözümlerini superpozisyon metodu ile yada Green özdeşliği ile bulabileceğimizi söylemiştik.

Her iki metod ile çözüm için de

$$Ly = \frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$
$$B_1 y = 0$$
$$B_2 y = 0 \tag{2.34}$$

probleminin Green fonksiyonunu göz önüne alacağız.

1. Superpozisyon Metodu :

Bu metodda

$$y_1 = \int_\alpha^\beta g(x;T).F(T)dT$$

(2.34) probleminin çözümü olmak üzere eğer y_2 'de

$$Ly = 0$$
$$B_1 y = m_1$$
$$B_2 y = m_2 \tag{2.35}$$

problemin çözümü ise (2.33) probleminin çözümü;

$$y = y_1 + y_2$$

olarak hesaplanır.

y_2 çözümü (2.35) ile verilen Ly=0 diferansiyel denkleminin bir genel çözümüne $B_1y = m_1$ ve $B_2y = m_2$ sınır şartlarını uygulamak suretiyle elde edilir.

Örnek 2.7

$$-\tau\frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \qquad 0 < x < L$$

$$y(0) = m_1 \ , \ y(L) = m_2$$

sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Daha önce bu problemin homojen sınır şartlarına sahip olduğunda çözümünün

$$y_1(x) = \int_0^L g(x;T).F(T)dT = \frac{L-x}{L\tau}\int_0^x T(FT)dT + \frac{x}{L\tau}\int_x^L (L-T)F(T)dT$$

olduğunu bulmuştuk. Bu çözüme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ , \ y(0) = m_1 \, ve \, y(L) = m_2$$

probleminin çözümünü eklemek suretiyle istenen çözümü elde etmeye çalışalım.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

diferansiyel denkleminin her çözümü

$$y_2(x) = Ax + B$$

şeklinde olacağından sınır şartlarını sağlattığımızda;

$$y_2(0) = B = m_1$$

$$y_2(L) = AL + m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{m_2 - m_1}{L}$$

olur ve böylece istenen y_2 çözümü

$$y_2(x) = (m_2 - m_1)\frac{x}{L} + m_1$$

şeklinde buluruz. Verilen sınır değer problemimizin çözümü

$$y = y_1(x) + y_2(x)$$

olarak tanımlandığından

$$y(x) = (m_2 - m_1)\frac{x}{L} + m_1 + \frac{L-x}{L\tau}\int_0^x TF(T)dT + \frac{x}{L\tau}\int_x^L (L-T).F(T)dT$$

şeklinde elde ederiz.

Superpozisyon metodu adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması için geçerli bir metotdur. Fakat kısmi diferansiyel denklemlere genelleştirilemez; çünkü bu metod ile kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunması ve homojen olmayan sınır şartları uygulandığında keyfi fonksiyonların bulunması mümkün değildir. Bu nedenle olabilecek ikinci yaklaşım (2.30) Green özdeşliğinin kısmi diferansiyel denklemlere genelleştirilerek kullanılmasıdır. Bu metod problemin çözümünün homojen sınır şartlarına bağlı olduğunu ifade eder.

2. Green Özdeşliği Metodu:

(2.33) probleminin $y(x)$ çözümü istendiğinde, $v(x)$ de bu problem için $g(x;T)$ Green fonksiyonu ise (2.30) Green özdeşliği

$$\int_\alpha^\beta (uLv - vLu)dx = \int_\alpha^\beta yLg(x;T)dx - \int_\alpha^\beta g(x;T)Lydx$$

$$= \left\{a(x)\left[y(x)\frac{\partial g(x;T)}{\partial x} - g(x;T)y'(x)\right]\right\}_\alpha^\beta$$

şeklini alır. $Ly = F(x)$ *ve* $Lg(x;T) = \delta(x-T)$ olduğundan dolayı

$$\int_\alpha^\beta y(x)\delta(x-T)dx - \int_\alpha^\beta g(x;T)F(x)dx = \left\{a(x)\left[y(x)\frac{\partial g(x;T)}{\partial x} - g(x;T)y'(x)\right]\right\}_\alpha^\beta$$

yada

$$y(T) - \int_\alpha^\beta g(x;T)F(x)dx = a(\beta)\left[y(\beta)\frac{\partial g(\beta;T)}{\partial x} - g(\beta;T)y'(\beta)\right]$$

$$-a(\alpha)\left[y(\alpha)\frac{\partial g(\alpha;T)}{\partial x} - g(\alpha;T)y'(\alpha)\right] \qquad (2.36)$$

olur. Eğer karışık olmayan (2.4) sınır şartlarından $y'(\alpha)$ ve $y'(\beta)$ değerlerini bulup (2.36) eşitliğinde yerine yazarsak

$$y(T) - \int_\alpha^\beta g(x;T)F(x)dx = a(\beta)\Big[y(\beta)\frac{\partial g(\beta;T)}{\partial x} - g(\beta;T)(\frac{m_2}{l_2} - \frac{h_2}{l_2})y(\beta)\Big]$$

$$- a(\alpha)\Big[y(\alpha)\frac{\partial g(\alpha;T)}{\partial x} - g(\alpha;T)(\frac{-m_1}{l_1} + \frac{h_1}{l_1})y(\alpha)\Big]$$

$$= a(\beta)\Big[-\frac{m_2}{l_2}g(\beta;T) + \frac{y(\beta)}{l_2}(l_2\frac{\partial g(\beta;T)}{\partial x} + h_2 g(\beta;T))\Big]$$

$$- a(\alpha)\Big[-\frac{m_1}{l_1}g(\alpha;T) + \frac{y(\alpha)}{l_1}(l_1\frac{\partial g(\alpha;T)}{\partial x} + h_1 g(\alpha;T))\Big]$$

buluruz. g(x;T) karışık olmayan (2.4) sınır şartlarının homojen kısnmını sağladığından

$$-l_1\frac{\partial g(\alpha;T)}{\partial x} + h_1 g(\alpha;T) = 0$$

$$l_2\frac{\partial g(\beta;T)}{\partial x} + h_2 g(\beta;T) = 0$$

dir. Bu durumda

$$y(T) = \int_\alpha^\beta g(x;T)F(x)dx - \frac{m_1}{l_1}a(\alpha)g(\alpha;T) - \frac{m_2}{l_2}a(\beta)g(\beta;T)$$

olacaktır. Sonuç olarak x ile T nin yerini değiştirdiğimizde ve $g(x;T)$ nin simetrikliğini kullandığımızda;

$$y(x) = \int_\alpha^\beta g(x;T).F(T)dT - \frac{m_1}{l_1}a(\alpha)g(x;\alpha) - \frac{m_2}{l_2}a(\beta)g(x;\beta) \qquad (2.37)$$

olmak üzere istenilen çözümü elde ederiz.

Sınır şartlarında $l_1 = l_2 = 0$ ve $h_1 = h_2 = 1$ aldığımızda (2.36) bağıntısı (2.37) ifadesini aşağıdaki şekilde belirler.

$$y(x) = \int_\alpha^\beta g(x;T).F(T)dT - m_2 a(\beta)\frac{\partial g(x;\beta)}{\partial T} - m_1 a(\alpha)\frac{\partial g(x;\alpha)}{\partial T} \qquad (2.38)$$

(2.37) ve (2.38) ifadeleri (2.33) problemindeki non-homojenliğin y(x) e bağlı olduğunu gösterir. Kismi diferansiyel denklemlerde denklemin homojen olmayan kısmı f(x) ile oluşturulan bir integral terim ile hesaplanır ve diğer terimlerde homojen olmayan sınır şartlarına bağlı olarak bulunur.

Parçalı sürekli F(x) fonksiyonu x noktasında sürekli ve $g(x;T)$ de bu noktada sürekli olduğundan (2.38) ifadesindeki integral terim bu noktada süreklidir. Sadece x=T de $g(x;T)$ sürekli ve $\frac{\partial g(x;T)}{\partial x}$ bir süreksizliğe sahip olduğundan dolayı (2.38) ifadesindeki diğer terimler sınır şartlarının homojen olmamasından dolayı süreklidirler. Başka bir deyişle, bir sınır değer probleminin çözümü problemin Green fonksiyonuna bağlı olarak daima sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 2.8

Bir önceki örnekte verilen sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$-\tau \frac{d^2y}{dx^2} = F(x) \qquad 0 < x < L$$

$$y(0) = m_1 \quad , \quad y(L) = m_2$$

olarak verilmişti. Bu problem için Green fonksiyonunu örnek 2.1 de

$$g(x,T) = (L\tau)^{-1}[x(L-T)H(T-x) + T(L-x)H(x-T)]$$

olarak bulmuştuk.

Örnek 2.7 de superpozisyon metodunu kullanmak suretiyle homojen diferansiyel denklemi ve homojen olmayan sınır şartlarını sağlayan tek çözüm elde etmiştik. Şimdi buna alternatif olarak Green özdeşliği metodunu kullanmak suretiyle çözümü elde edelim. (2.38) bağıntısına göre;

$$y(x) = \int_0^L g(x;T).F(T)dT - \tau m_2 \frac{\partial g(x;L)}{\partial T} + \tau m_1 \frac{\partial g(x;0)}{\partial T}$$

$$= \int_0^L g(x;T).F(T)dT - \frac{\tau m_2}{L\tau}[-xH(T-x) + (L-x)H(x-T)]|_{T=L}$$

$$+ \frac{\tau m_1}{L\tau}[-xH(T-x) + (L-x)H(x-T)]|_{T=0}$$

$$= \int_0^L g(x;T).F(T)dT + \frac{m_2}{L}x + \frac{m_1}{L}(L-x)$$

$$= \int_0^L g(x;T).F(T)dT + (m_2 - m_1)\frac{x}{L} + m_1$$

şeklinde istenilen çözümü elde ederiz. $g(x;T)$ yi açık bir şekilde yazarsak da

$$y(x) = (m_2 - m_1)\frac{x}{L} + m_1 + \frac{L-x}{L\tau}\int_0^x TF(T)dT + \frac{x}{L\tau}\int_x^L (L-T).F(T)dT$$

buluruz.

Örnek 2.9

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$y(\alpha) = m_1 \quad , \quad y'(\beta) = m_2$$

sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Örnek 2.2 de bu problem için Green fonksiyonunu

$$g(x;T) = \frac{-1}{2cos2(\beta-\alpha)}\Big[sin2(x-\alpha)cos2(\beta-T)H(T-x)$$

$$+sin2(T-\alpha)cos2(\beta-x)H(x-T)\Big]$$

olarak bulmuştuk.

m_1 ve m_2 sabitleri sınır şartlarını non-homojen yapan değerlerdir. (2.37) nin m_2 ve (2.38) ün m_1 içeren terimlerini kullanmak üzere:

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T).F(T)dT - m_1 \frac{\partial g(x;\alpha)}{\partial T} - m_2 g(x;\beta)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T)F(T)dT \frac{m_1}{2cos2(\alpha-\beta)} \Big[2sin2(x-\alpha)sin2(\beta-\alpha)H(\alpha-x)$$

$$+2cos2(\beta-x)H(x-\alpha) \Big] + \frac{m_2}{2cos2(\beta-\alpha)} \Big[sin2(x-\alpha)H(\beta-x)$$

$$+sin2(\beta-\alpha)cos2(\beta-x)H(x-\beta) \Big]$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x;T).F(T)dT + \frac{2m_1 cos2(\beta-x) + m_2 sin2(x-\alpha)}{2cos2(\beta-\alpha)}$$

şeklinde istenilen çözümü elde ederiz.

2.3. Green Fonksiyonları Kullanılarak Başlangıç Değer Problemlerinin Çözümleri

$$Ly = \frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$B_1 y = m_1 \tag{2.39}$$

$$B_2 y = m_2$$

sınır değer probleminde verilen koşulları $y(\alpha) = 0$ ve $y'(\alpha) = 0$ olarak aldığımızda problemimizi başlangıç değer problemi ve şartlarımızı da başlangıç şartları olarak adlandırırız. Bu tip problemlerde bağımsız değişken t olarak alınır ve böylece başlangıç değer problemimiz de

$$Ly = \frac{d}{dt}[a(x)\frac{dy}{dt}] + c(t)y = F(t) \qquad t > t_0$$

$$y(t_0) = m_1 \tag{2.40}$$

$$y'(t_0) = m_2$$

şeklinde ele alınır.

t_0 başlangıç zamanı genellikle $t_0 = 0$ olarak seçilir, ama çoğunlukta t_0 keyfi alınır.

Bu problem için g(x;T) Green fonksiyonun

$$\frac{d}{dt}[a(t)\frac{dg}{dt}] + c(t)g = \delta(t-T)$$

$$g(t_0;T) = 0$$
$$\frac{dg(t;T)}{dt} = 0 \tag{2.41}$$

problemini sağlayan bir fonksiyon olduğu kolayca görülmektedir. Ancak bu g(t;T) fonksiyonu (2.40) probleminin çözümlerini improper integral olarak bulmamıza yol açtığından çözümleri improper integrallere ilişkin yakınsaklık problemleri ile elde ederiz. Bu yüzden g(t;T) Green fonksiyonunu (2.40) in bir esas çözümü olarak tanımlayabiliriz. Ve bu

$$g(t;T) = 0 \quad , \quad t_0 < t < T$$
$$\tag{2.42}$$
$$Lg = \delta(t-T)$$

probleminin bir çözümüdür.

Fiziksel olarak g(t;T) ,T zamanında bir birim impulsa (2.40) ile verilen sistemin tepkisidir. Doğal olarak $t < T$ için sistem özdeş olarak sıfıra eşitlenebilir.

[(2.42) ile verilen g(t;T)=0 dan dolayı]

$t \geq t_0$ için a(t) sıfırdan farklı olacağından (2.42) probleminin çözümü vardır ve tektir.

(2.17) sınır değer problemi için Green fonksiyonunu karakterize eden (2.19) özelliklerine karşılık gelen aşağıdaki özellikler (2.40) başlangıç değer problemi için Green fonksiyonunu karakterize eder.

$$g(t;T) = 0 \qquad t_0 < t < T$$

$$Lg = \frac{d}{dt}[a(t)\frac{dg}{dt}] + c(t)g = 0 \quad , \quad t > T$$

$$g(T_+;T) = 0 \tag{2.43}$$

$$\frac{dg(T_+;T)}{dt} = \frac{1}{a(t)}$$

u(t) ve v(t) (2.43) ile verilen $Lg = 0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğundan

$$g(t;T) = \frac{1}{J(u,v)}[u(T)v(t) - v(T)u(t)]H(t-T) \qquad (2.44)$$

fonksiyonu (2.43) sistemini sağlar. Sınır değer problemleri için bulduğumuz (2.26) formülünün yerine, başlangıç değer problemleri için (2.44) formülü geçerlidir. Ancak sınır değer problemlerinde homojen sistemin trivial ve non-trivial çözümlerine göre Green fonksiyonları için iki formül bulmuştuk. Başlangıç değer problemleri için böyle bir şey söz konusu değildir. Çözüm ne olursa olsun (2.44) formülü ile istenilen Green fonksiyonunu hesaplayabiliriz.

Örnek 2.10

k bir sabit olmak üzere bir telin ucuna bir M kütlesi bağlandığını ifade eden

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F(t) \quad , \quad t > 0$$

$$y(0) = m_1 \quad , \quad y'(0) = m_2$$

başlangıç değer problemi için Green fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$My'' + ky = 0$ homojen diferansiyel denkleminin çözümlerini bulalım.

$$Mr^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \frac{k}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_{1,2} = \mp i\sqrt{\frac{k}{M}}$$

olmak üzere

$$y(x) = Acos\sqrt{\frac{k}{M}}t + BSin\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

olacağından

$$u(x) = cos\sqrt{\frac{k}{M}}t \qquad ve \qquad v(x) = sin\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

şeklinde iki çözüm elde ederiz. O halde istenen Green fonksiyonunu (2.44) formülüne göre

$$g(t;T) = \frac{1}{J(sin\sqrt{\frac{k}{M}}t, cos\sqrt{\frac{k}{M}}t)}\left[sin\sqrt{\frac{k}{M}}Tcos\sqrt{\frac{k}{M}}t\right.$$

$$-\cos\sqrt{\frac{k}{M}}T\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t\Big]H(t-T)$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{k}M}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}(T-t)H(t-T)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}M}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T)H(t-T)$$

olarak buluruz.

Bir başlangıç değer probleminin çözümünü de Green fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz. Özellikle (2.40) probleminin çözümü

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t;T).F(T)dT + a(t_0)[m_2 g(t;t_0) - m_1\frac{\partial g(t;t_0)}{\partial T}] \tag{2.45}$$

formülüyle heasaplanır.

İntegral terim, diferansiyel denklemdeki non-homojenlik için hesaplanmak üzere incremental sonuçların süperpozisyonu olarak izah edilir. g(t;T) Green fonksiyonu T zamanında $\delta(t-T)$ bir birim impulstan dolayı t zamanındaki sonuç olduğundan, g(t;T).F(T)dT de dT aralığı üzerinde bir F(T)dT incremental kuvvetten dolayı t zamanındaki sonuçtur. İntegral t_0 başlangıç zamanından itibaren tüm aralıklar üzerinde toplanır ve t zamanındaki sonucu (sonsuz çözümü) verir. (2.45) formülündeki son iki terim (2.40) ile verilen başlangıç şartları uygulanmak suretiyle non-homojenliğe bağlı olarak hesaplanır.

Örnek 2.11

Örnek 2.10 ile verilen problemin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

(2.45) formülüne göre istenilen çözüm;

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{k}M}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T)H(t-T).F(T)dT$$

$$+M\left[\frac{m_2}{\sqrt{k}M}Sin\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{m_1}{\sqrt{k}M}\sqrt{\frac{k}{M}}\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}M}\int_{0}^{t}\sin\sqrt{\frac{k}{M}}(t-T).F(T)dT + \sqrt{\frac{k}{M}}m_2\sin\sqrt{\frac{k}{M}}t + m_1\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t$$

2.4. Modifiye Green Fonksiyonları

$$\frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = 0 \qquad \alpha < x < \beta$$

$$B_1 y = 0$$

$$B_2 y = 0 \tag{2.46}$$

homojen sınır değer problemi non-trivial çözümlere sahip olduğunda L operatörü ve verilen sınır şartlarına göre bu problem için Green fonksiyonunu bulamayız, yoktur. Bir başka deyişle

$$\frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + [c(x) + \lambda p(x)]y = 0 \qquad \alpha < x < \beta$$

$$B_1 y = 0$$

$$B_2 y = 0 \tag{2.47}$$

probleminin bir özdeğeri $\lambda = 0$ olduğunda bu problemin Green fonksiyonu yoktur.

Kenarları ve uçları yalıtılmış bir çubuğun durgun haldeki ısı iletimini ifade eden

$$-k\frac{d^2u}{dx^2} = F(x) \qquad 0 < x < L$$

$$u'(0) = 0 \qquad u'(L) = 0 \tag{2.48}$$

sınır değer problemin göz önüne alalım.

(2.47) homojen denklemi u=sbt non-trivial çözümüne sahiptir. Eğer x=0 dan x=L ye kadar (2.48) diferansiyel denklemini integre edersek;

$$\int_0^L F(x)dx = \int_0^L k\frac{d^2u}{dx^2}dx = \left\{ -k\frac{du}{dx}\right\}_0^L = 0$$

olur. O halde eğer bu problemin bir çözümü varsa F(x) keyfi bir değer alamaz; yani F(x)

$$\int_0^L F(x)dx = 0 \tag{2.49}$$

koşulunu sağlamalıdır.

Fiziksel olarak bunun anlamı kenarları ve uçları yalıtılmış olan bir çubuğun içindeki toplam ısı miktarı sıfır ise bir durgun hal koşulunun olması gerekir.

$\delta(x-T)$ fonksiyonu (2.49) koşulunu sağlamadığından dolayı (2.48) de $F(x) = \delta(x-T)$ aldığımızda bu probleme ait Green fonksiyonu için

$$-k\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-T)$$

$$g'(0;T) = 0 \qquad\qquad g'(L;T) = 0$$

probleminin çözümü yoktur.

Aşağıdaki teorem ile homojen sınır şartlarına sahip bir çok problem için (2.49) koşuluna eşdeğer bir koşulun varlığından söz edeceğiz.

Teorem 8.

$$Ly = \frac{d}{dx}[a\frac{dy}{dx}] + cy = F(x)$$

$$\begin{aligned} B_1y &= 0 \\ B_2y &= 0 \end{aligned} \tag{2.50}$$

probleminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} Ly &= 0 \\ B_1y &= 0 \\ B_2y &= 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

homojen sınır değer problemi w(x) non-trivial çözümüne sahip olduğunda her w(x) çözümü için

$$\int_\alpha^\beta F(x)w(x)dx = 0 \tag{2.52}$$

olmasıdır.

İspat :

(2.52) koşulunun gerekliliğini kolayca gösterebiliriz. Eğer y(x), (2.50) probleminin bir çözümü ise ve w(x) (2.51) problemini sağladığı için Lw=0 olduğundan

$$\int_\alpha^\beta F(x)w(x)dx = \int_\alpha^\beta (Ly)w(x)dx$$

$$= \int_\alpha^\beta y(Lw)dx + \left\{a(wy' - yw')\right\}_\alpha^\beta \tag{2.53}$$

$$= a(\beta)[w(\beta)y'(\beta) - y(\beta)w'(\beta)] - a(\alpha)[w(\alpha)y'(\alpha)$$

$$- y(\alpha)w'(\alpha)]$$

elde ederiz.

(2.52) ile verilen sınır şartları karışık olmayan sınır şartları yada periyodik sınır şartları olduğunda (2.53) eşitliğinin sağ kısmı sıfıra eşit olur. Ve

$$\int_\alpha^\beta F(x)w(x)dx = 0$$

olarak elde ederiz.

Teoremin yeterliliğini inceleyelim. (2.51) problemi non-trivial çözümlere sahip olduğunda ve (2.52) uygunluk koşulu sağlandığında (2.50) probleminin çözümü tek değildir. Eğer y(x) bir çözüm ise c keyfi bir değer ve w(x), (2.51) in bir çözümü olmak üzere y(x)+cw(x) de bir çözümdür. Bu nedenle teoremin yeterliliğini sağlamak için yani (2.52) uygunluk koşulu sağlanmak üzere (2.50) probleminin çözümünü bulnak için Modifiye (değiştirilmiş) Green fonksiyonlarını ele alacağız. Çünkü $\delta(x-T)$ fonksiyonu (2.52) uygunluk koşulunu sağlamadığından dolayı g(x;T) adi Green fonksiyonu

$$Lg = \delta(x-T)$$

$$B_1 g = 0$$

$$B_2 g = 0$$

problemini sağlamaz.

(2.51) probleminin bir veya iki lineer bağımsız çözüme sahip olup olmamasına bağlı olarak iki durum ortaya çıkar. Bunlardan ilki; (2.51) nın bir çarpımsal sabit için sadece tek bir non-trivial çözüme sahip olmasıdır. Bu yüzden

$$\int_{\alpha}^{\beta} [w(x)]^2 dx = 1 \tag{2.54}$$

normalize edilmiş olarak alabiliriz.

(2.50) problemi için bir modifiye Green fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L\overline{g} &= \delta(x-T) - w(x)w(T) \\ B_1\overline{g} &= 0 \\ B_2\overline{g} &= 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

probleminin bir $\overline{g}(x;T)$ çözümü olarak tanımlanır. Çünkü (2.55) ile verilen diferansiyel denklemin sağ kısmı (2.52) uygunluk koşulunu sağlar ve $\overline{g}(x;T)$ çözümü ile teorem 8 i sağlarız. Fakat çözümün tek olmamasından dolayı $\overline{g}(x;T)$ nin yapısında kullanılan metoda bağlı olarak $\overline{g}(x;T)$ simetrik olabilir yada olmayabilir. Modifiye Green fonksiyonu, Adi Green fonksiyonunun sağladığı süreklilik özelliklerine benzer özellikleri sağlar. Bu özellikleri $\overline{g}(x;T)$ nin bulunmasında kullanabiliriz. Modifiye Green fonksiyonları, (2.52) koşulunu sağlayan bir F(x) çözümüne sahip olduğundan (2.50) probleminin çözümünü bulmak için kullanılabilir.
u=y(x) ve $v = \overline{g}(x;T)$ olmak suretiyle (2.30) Green özdeşliğini

$$\int_{\alpha}^{\beta} [yL\overline{g} - \overline{g}Ly]dx = \left\{ a(x)[y(x)\frac{d\overline{g}(x;T)}{dx} - \overline{g}(x;T)y'(x)] \right\}_{\alpha}^{\beta}$$

şeklinde elde ederiz.

Bu eşitliğin, $\overline{g}(x;T)$ nin karışık olmayan yada periyodik sınır şartlarını sağlaması durumunda sıfıra eşitlendiği kolayca gösterilebilir.

Bu durumda (2.50) ve (2.55) ile verilen diferansiyel denklemler ile

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ y(x)[\delta(x-T) - W(x)W(T)] - \overline{g}(x;T)F(x) \right\} dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(T) - c_1 W(T) - \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(x;T)F(x)dx = 0$$

buluruz ve

$$c_1 = \int_{\alpha}^{\beta} y(x)W(x)dx$$

dir.

Böylece istenen çözümü

$$y(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(x;T)F(x)dx + c_1W(T) \tag{2.56}$$

yada x ile T 'nin yerini değiştirdiğimizde

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(T;x).F(T)dT + c_1W(x) \tag{2.57}$$

olarak buluruz. y(x), sadece bir cW(x) teriminin eklenmesiyle tek çözüm olacağından (2.57) formülündeki c 'nin indisini atabiliriz ve c keyfi olmak üzere çözümü

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(T;x).F(T)dT + cW(x) \tag{2.58}$$

olarak yazabiliriz.

Sonuç olarak; $\overline{g}(x;T)$ 'in yapısı simetrik olarak verildiğinde çözümü

$$y(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{g}(x;T).F(T)dT + cW(x) \tag{2.59}$$

şeklinde de alabiliriz. Dikkat edilecek olursa cW(x) terimi dışında çözüm şekli Adi Green fonksiyonlarıyla özdeştir.

Örnek 2.12

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = F(x) \quad , \qquad 0 < x < \pi$$

$$y(0) = 0 = y(\pi)$$

sınır değer problemini çözelim.

Çözüm:

$y'' + 4y = 0$ homojen diferansiyel denkleminin çözümleri

$$r^2 + 4r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r_{1,2} = \mp 2i$$

olmak üzere

$$y(x) = Acos2x + Bsin2x$$

şeklindedir.

sin2x fonksiyonu verilen iki sınır şartını sağladığından dolayı bu problem için Green fonksiyonu yoktur. O halde $\overline{g}(x;T)$ 'yi,

$$\frac{d^2\overline{g}}{dx^2} + 4\overline{g} = \delta(x-T) - \frac{2}{\pi} sin2x sin2T$$

$$\overline{g}(0;T) = 0 = \overline{g}(\pi;T)$$

probleminin çözümü olacak şekilde bir Modifiye Green fonksiyonu olarak tanımlayalım ($\frac{2}{\pi}$ normalleştirme faktörüdür).
$\overline{g}(x;T)$, (2.19) ile verilen üç özelliği sağladığından ve

$$\overline{g}'' + 4\overline{g} = -\frac{2}{\pi} sin2x sin2T$$

denkleminin bir özel çözümü

$$(2\pi)^{-1} x sin2T cos2x$$

olduğundan dolayı

$$\overline{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi} sin2T cos2x + \begin{cases} A sin2x + B cos2x & ; 0 \le x < T \\ C sin2x + D cos2x & ; T < x \le \pi \end{cases}$$

olarak alabiliriz. A, B, C ve D bilinmeyenlerini bulmak için

$$\overline{g}(0;T) = 0 = \overline{g}(\pi;T)$$

sınır şartlarını, bu son eşitlikte uyguladığımızda

$$B = 0$$

ve

$$\frac{1}{2} sin2T + D = 0$$

buluruz ve x=T 'de (2.19) ile verilen süreklilik şartı uygulandığında da

$$A sin2T + B cos2T = C sin2T + D sin2T$$

$$(2Ccos2T - 2Dsin2T) - (2Acos2T - 2Bsin2T) = 1$$

buluruz. Bu dört denklem, A=A(T) T nin bir keyfi fonksiyonu olmak üzere

$$C = A + \frac{1}{2}cos2T$$

olmasını gerektirir. Bu durumda Modifiye Green fonksiyonunu

$$\overline{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}sin2Tcos2x + \begin{cases} Asin2x & ; 0 \leq x \leq T \\ [A + \frac{1}{2}cos2T]sin2x - \frac{1}{2}sin2Tcos2x & ; T \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}sin2Tcos2x + \begin{cases} Asin2x & ; 0 \leq x \leq T \\ A + sin2x\frac{1}{2}sin2(x - T) & ; T \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$= \frac{x}{2\pi}sin2Tcos2x + Asin2x + \frac{1}{2}sin2(x - T)H(x - T)$$

şeklinde buluruz. Dikkat edilecek olursa homojen denklemin çözümü $\overline{g}(x;T)$ 'de keyfi hareketle W(x) 'in katı olan bir A(T) sabitidir. Çünkü $\overline{g}(x;T)$ simetrik olmadığından orjinal sınır değer probleminin çözümünü (2.58) ifadesi kullanılmak suretiyle

$$y(x) = \int_0^\pi \overline{g}(x;T)F(T)dT + Csin2x$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{T}{2\pi}sin2xcos2T + A(x)sin2T + \frac{1}{2}sin2(T - x)H(T - x)\right)F(T)dT$$
$$+ Csin2x \quad (c \rightarrow sabit)$$

$$= Csin2x + \frac{sin2x}{2\pi}\int_0^\pi Tcos2T.F(T)dT + A(x)\int_0^\pi F(T)sin2TdT$$
$$+ \frac{1}{2}\int_x^\pi sin2(T - x).F(T)dT$$

şeklinde ifade ederiz.

Buradaki ilk integral bir sabit değer olduğundan dolayı eşitliğin ilk terimi olan $Csin2x$ ile toplayabiliriz. Ayrıca ikinci integral de (2.52) uygunluk koşuluna göre sıfıra eşitlenir ve böylece istenen son çözümü

$$y(x) = Csin2x + \frac{1}{2}\int_{x}^{\pi} sin2(T-x).F(T)dT$$

olarak elde ederiz.

Burada (2.50) problemine karşılık gelen (2.51) probleminin bir çarpımsal sabiti için tek bir non-trivial çözüme sahip olduğunu göz önüne almıştık. Diğer bir olasılık (2.51)diferansiyel denkleminin verilen sınır şartlarını sağlayan tüm çözümlerinin göz önüne alınmasıdır. Böyle bir durumda daima Ly=0 diferansiyel denkleminin v(x) ve w(x) şeklinde iki ortanormal çözümleri bulunur. Eğer $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ lineer bağımsız çözümler ise v(x) ve w(x) ortanormal çözümleri

$$v(x) = \psi(x)\left[\int_{\alpha}^{\beta}[\psi(x)]^2dx\right]^{-\frac{1}{2}}$$

ve

$$w(x) = \left[\phi(x) - v(x)\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x)v(x)dx\right]\left[\int_{\alpha}^{\beta}(\phi(x) - v(x)\int_{\alpha}^{\beta}\phi(x)v(x)dx)^2dx\right]^{-\frac{1}{2}}$$

dir. [$\psi(x)$, v(x) şeklinde normalleştirilmiştir. w(x) için de $\phi(x)$ 'in bileşeni v(x) 'in doğrultusunda yer değiştirir ve sonuç o zaman normalleştirilir]
(2.50) problemi için Modifiye Green fonksiyonunu

$$L\overline{g} = \delta(x-T) - w(x)w(T) - v(x)v(T)$$

$$B_1\overline{g} = 0 \tag{2.60}$$

$$B_2\overline{g} = 0$$

probleminin bir çözümü olarak tanımlarız. Bu diferansiyel denklemin sağ kısmı (2.52) uygunluk koşulunu sağladığından dolayı $\overline{g}(x;T)$ gerçekten varolabilecektir. O halde Green özdeşliği (2.50) problemin çözümünü, C ve D birer keyfi sabit olmak üzere

$$y(x) = \int_{\alpha}^{\beta}\overline{g}(x;T).F(T)dT + Cw(x) + Dv(x) \tag{2.61}$$

şeklinde belirler.

Örnek 2.13

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = F(x) \qquad , \qquad 0 < x < 2\pi$$

$$y(0) = y(2\pi) \quad , \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

sınır değer probleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Problemin homojen kısmı sinx ve cosx non-trivial çözümlerine sahip olsun. Bu fonksiyonlar ortogonal olduklarından dolayı bu problem için Modifiye Green fonksiyonunu

$$\frac{d^2\overline{g}}{dx^2} + \overline{g} = \delta(x-T) - x^{-1}(sinxsinT + cosxcosT)$$

$$\overline{g}(0;T) = \overline{g}(2\pi;T)$$

$$\frac{d\overline{g}(0;T)}{dx} = \frac{d\overline{g}(2\pi;T)}{dx}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Diferansiyel denklemin bir çözümü

$$\overline{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}sin(T-x) + \begin{cases} Asinx + Bcosx & ; 0 \leq x < T \\ Csinx + Dcosx & ; T < x \leq 2\pi \end{cases}$$

dir. A, B, C ve D bilinmeyenlerini bulmak için öncelikle sınır şartlarını uyguladığımızda

$$B = sinT + D$$

$$\frac{sinT}{2\pi} + A = \frac{sinT}{2\pi} - cosT + C$$

buluruz ve daha sonra x=T 'de (2.19) ile verilen süreklilik şartlarını uyguladığımızda da

$$AsinT + BcosT = CsinT + DcosT$$

$$CcosT - DsinT - AcosT + BsinT = 1$$

buluruz. Bu dört denklem C=C(T) ve D=D(T), T'nin birer keyfi fonksiyonu olmak üzere

$$A = C - cosT \qquad ve \qquad B = D + sinT$$

olmasını gerektirir.

Böylece Modifiye Green fonksiyonunu

$$\overline{g}(x;T) = \frac{x}{2\pi}sin(T-x) + Csinx + Dcosx + \begin{cases} sinTcosx - cosTsinx & ; 0 \leq x \leq T \\ 0 & ; T \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= Csinx + Dcosx + sin(T-x)\begin{cases} \frac{x}{2\pi} + 1 & ; 0 \leq x \leq T \\ \frac{x}{2\pi} & ; T \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$= Csinx + Dcosx + sin(T-x)[\frac{x}{2\pi} + H(T-x)]$$

şeklinde buluruz. (2.61) formülüne göre sınır değer problemimizin çözümü

$$\int_0^{2\pi} F(x)sinxdx = 0 = \int_0^{2\pi} F(x)cosxdx$$

uygunluk koşulları sağlandığından dolayı

$$y(x) = \int_0^{2\pi} \overline{g}(T;x).F(T)dT + Esinx + Gcosx$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{CsinT + DcosT + sin(x-T)[\frac{T}{2\pi} + H(x-T)]\right\}.F(T)dT + Esinx + Gcosx$$

$$= Esinx + Gcosx + \int_0^{2\pi} sin(x-T)[\frac{T}{2\pi} + H(x-T)]F(T)dT$$

olarak buluruz.

Bu kısımda da sınır şartları homojen olmayan (ve karışık olmayan) problemlerin çözümleri için Modifiye Green fonksiyonlarını ileri süreceğiz.

(2.51) problemi bir çarpımsal sabit için tek bir w(x) çözümüne sahip olduğunda

$$Ly = \frac{d}{dx}[a(x)\frac{dy}{dx}] + c(x)y = F(x) \qquad \alpha < x < \beta$$

$$B_1 y = m_1 \tag{2.62}$$

$$B_2 y = m_2$$

probleminin çözümü

$$y(x) = \int_\alpha^\beta \overline{g}(T;x).F(T)dT + Cw(x) - \frac{m_1}{\ell_1}a(\alpha)\overline{g}(\alpha;x)$$

$$-\frac{m_2}{\ell_2}a(\beta)\overline{g}(\beta;x) \tag{2.63}$$

yada sınır şartlarında $\ell_1 = \ell_2 = 0$ olduğunda

$$y(x) = \int_\alpha^\beta \overline{g}(T;x).F(T)dT + Cw(x) - m_2 a(\beta)\frac{\partial\overline{g}(\beta;x)}{\partial T}$$

$$-m_1 a(\alpha)\frac{\partial\overline{g}(\alpha;x)}{\partial T} \tag{2.64}$$

denklemlerinden elde ederiz.

Eğer (2.51) problemi w(x) ve v(x) gibi iki lineer bağımsız çözüme sahip ise (2.63) ve (2.64) denklemlerindeki Cw(x) 'in yerine Cw(x)+Dv(x) alırız. Aksi taktirde çözümler aynı olacaktır.

Tüm durumlar için, (2.62) probleminin bir çözümü; ancak ve ancak F(x), m_1 ve m_2, homojen probleme karşılık gelen problemin her w(x) çözümü için

$$\int_\alpha^\beta F(x)w(x)dx = \frac{m_2}{\ell_2}a(\beta)w(\beta) + \frac{m_1}{\ell_1}a(\alpha)w(\alpha) \tag{2.65}$$

yada sınır şartlarında $\ell_1 = \ell_2 = 0$ olduğunda

$$\int_\alpha^\beta F(x)w(x)dx = m_1 a(\alpha)w'(\alpha) - m_1 a(\beta)w'(\beta) \tag{2.66}$$

uygunluk koşullarını sağladıklarında vardır.

SONUÇ

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için ele alınan Green fonksiyonları, koşullar ne olursa olsun, başlangıç ve sınır değer problemlerini kolayca çözmemizi sağlar. Örneğin ısı, kütle transferi, elektrostatik, potansiyel ve bu gibi alanlarda karşılaşılan problemlerin çözümünün kullanılmasında büyük fayda sağlar.

Green fonksiyonları kısmi diferansiyel denklemlere genişletildiğinde Dirichlet ve Neumann sınır değer problemleri, ısı iletimi ve telin titreşimi ile ilgili problemlerin çözümlerinin kolayca elde edilmesini sağlar.

K A Y N A K L A R

1. RABENSTEIN, Albert L.,1966 Academic Press NewYork and London , İntroduction to Ordinary Differential Equations
2. TRIM,D.W.,1989,ISBN 0-534-921340-5,Applied Partial Differential Equations U.S.A
3. İ.T.Ü Lineer Sınır Değer Problemleri Yüksek Lisans ve Doktora Ders Notları

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seda KIZILBUDAK

Doğum Tarihi : 29 Mart 1972

Doğum Yeri : İstanbul

İlk Öğrenimi : 1983 yılında Şişli 19 Mayıs İlkokulundan mezun oldu.

Orta Öğrenimi : 1989 yılında Özel Yıldız Lisesinden mezun oldu.

Yüksek Öğrenimi : 1989 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini 1993 yılında tamamladı

Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi