

57451

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KLEIN $J(\tau)$ FONKSİYONU
DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ VE EISENSTEIN
SERİLERİ İÇİN BİR İNVERSİYON PROBLEMİ**

Belma HAKVERDİ BAŞ

8901005

F.B.E. Matematik Anabilim dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER

İSTANBUL, 1996

İÇİNDEKİLER

1. ELİPTİK FONKSİYONLAR

1.1. GİRİŞ.....	1
1.2. ÇİFTE PERİYODİK FONKSİYONLAR.....	1
1.3. ESAS PERİYOD ÇİFTLERİ	2
1.4. ELİPTİK FONKSİYONLAR.....	4
1.5. ELİPTİK FONKSİYONLARIN OLUŞTURULMASI	6
1.6. WEIERSTRASS P FONKSİYONU.....	9
1.7. ORJİN CİVARINDA P NİN LAURENT AÇILIMI.....	11
1.8. P İLE SAĞLANAN DİFERANSİYEL DENKLEM.....	11
1.9. EISENSTEIN SERİLERİ VE g_2, g_3 İNVARİYANTLARI....	11
1.10. e_1, e_2, e_3 sayılar.....	12
1.11. DİSKRİMİNANT Δ	13
1.12. KLEIN'S MODÜLER $J(z)$ FONKSİYONU.....	14
1.13. J NİN MODÜLER DÖNÜŞÜMLER ALTINDA İNVARİYANTLIĞI.....	16
1.14. $g_2(z)$ ve $g_3(z)$ NUN FOURİER AÇILIMI.....	17
1.15. $\Delta(z)$ ve $J(z)$ NUN FOURİER AÇILIMI.....	19
BİRİNCİ BÖLÜME AİT ÖRNEKLER.....	21

2- MODÜLER GRUP VE MODÜLER FONKSİYONLAR

2.1. MOBIUS DÖNÜŞÜMÜ.....	27
---------------------------	----

2.2. Γ MODÜLER GRUBU.....	28
2.3. ESAS BÖLGELER.....	30
2.4. MODÜLER FONKSİYONLAR.....	32
2.5. J NİN ÖZEL DEĞERİ.....	37
2.6. J NİN RASYONEL FONKSİYONLARI OLARAK MODÜLER FONKSİYONLAR.....	37
2.7. J NİN DÖNÜŞÜM ÖZELLİKLERİ.....	38
2.8. EISENSTEIN SERİLERİ İÇİN İNVERSİYON PROBLEMİNE UYGULAMA.....	39
2.9. PİCARD TEOREMİNE UYGULAMA.....	41
İKİNCİ BÖLÜME AİT ÖRNEKLER.....	43
KAYNAKLAR	53

TANITICI ÖZET

I. Bölümde sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun oluşturulması problemi üzerinde çalıştık. Periyodları tanımladık ve bu periyodlara sahip en basit eliptik fonksiyonu bulmaya çalıştık. Eliptik fonksiyonun lineer olmayan bir diferansiyel denklemi sağladığını verdik. Klein'nin modüler fonksiyonunu tanımladık ve J nin Modüler dönüşümler altında invaryanlığını gösterdik. $J(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ nin fourier açılımları verildi.

II. Bölümde birim modüllü dönüşümler incelendi. Γ modüler grubunun doğuranlarının T ve S olduğunu gösterdik. f fonksiyonu modüler ve eşdeğer olarak sıfırdan farklı ise o zaman R_Γ esas bölgesinin kapanışında f in sıfırlarının sayısının kutuplarının sayısına eşit olduğunu ispatladık ve sonra Eisenstein serileri için inversiyon problemine ve Picard teoremine uygulamaları verildi.

SUMMARY

In the first chapter we studied on the problem of constructing a non constant elliptic function we prescribed the periods and tried to find the simplest elliptic function having these period. We gave the elliptic function satisfies the nonlinear differential equation. We introduced Klein's Modüler function and indicated invariance of J under unimodular transformations. We gave the Fourier expansions of $\Delta(\tau)$ and $J(\tau)$.

In the second chapter we studied unimodular transformations in greater detail. We showed the modular group Γ is generated by T and S . We proved if f is modular and not identically zero then in the closure of fundamental region R_Γ the number of zeros f is equal to the number of poles and then applications to the inversion problem for Eisenstein series and Picard's theorem had been given.

ELİPTİK FONKSİYONLAR

1.1. GİRİŞ

Bu çalışmada önce eliptik fonksiyonlar teorisinin ayrıntılarına fazla girmeden temel kavramlara yer verilmiştir. En basit eliptik fonksiyon elde edilerek bu fonksiyonun özellikleri incelenmiştir.

Daha sonra periyodik olmayan ancak eliptik fonksiyonların paralelkenar ağlarına benzer şekilde kompleks düzleme eğrisel üçgenler halinde değer bölgelerine ayıran ve bu bölgelerin her birinde bütün değerleri alan modüler fonksiyonlara geçilmiştir.

1.2. ÇİFTE PERİYODİK FONKSİYONLAR

Kompleks değişkenli bir f fonksiyonu, ω periyodu ile z ve $z + \omega$, f fonksiyonunun tanım kümesinde olduğu zaman $f(z) = f(z + \omega)$ oluyorsa "**Peryodiktir**" denir. ω bir periyod ise her n tamsayısı için $n\omega$ da bir periyoddur. ω_1 ve ω_2 iki periyod ise m ve n tamsayılarının her seçimi için $m\omega_1 + n\omega_2$ de bir periyoddur.

Tanım: Bir f fonksiyonu ω_2/ω_1 oranı reel olmayan ω_1 ve ω_2 periyodlarına sahip ise "**çifte periyodik fonksiyon**" denir.

Dejenere durumlardan kaçınmak için oranın reel olmamasını istiyoruz. Örneğin ω_1 ve ω_2 oranları reel ve rasyonel olan iki periyod ise ω_1 ve ω_2 nin her biri aynı periyodun bir tamsayı katı olduğu kolayca görülebilir. Gerçekten a ve b aralarında asal seçilmiş tamsayılar olmak üzere $\omega_2/\omega_1 = a/b$ ise bu takdirde m ve n gibi iki tamsayı mevcuttur. Öyleki $mb + na = 1$ olur. $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ olsun. bu takdirde ω bir periyoddur ve

$$\omega = \frac{\omega_1(m + n\omega_2)}{\omega_1} = \frac{\omega_1(m + na)}{b} = \frac{\omega_1(mb + na)}{b} = \frac{\omega_1}{b} \quad \text{alınabilir.}$$

Böylece $\omega_1 = b \cdot \omega$ ve $\omega_2 = a\omega$ bulunur.

Bu durumda ω_1 ve ω_2 nin her ikisi de ω nin tamsayı katlarıdır.

ω_2/ω_1 oranı reel ve irrasyonel ise f in keyfi küçük periyotlara sahip olduğunu gösterir. Keyfi küçük periyodlu bir fonksiyon analitik olduğu her açık-bağlantılı kümede sabittir. Gerçekten f in analitikliğinden her noktada

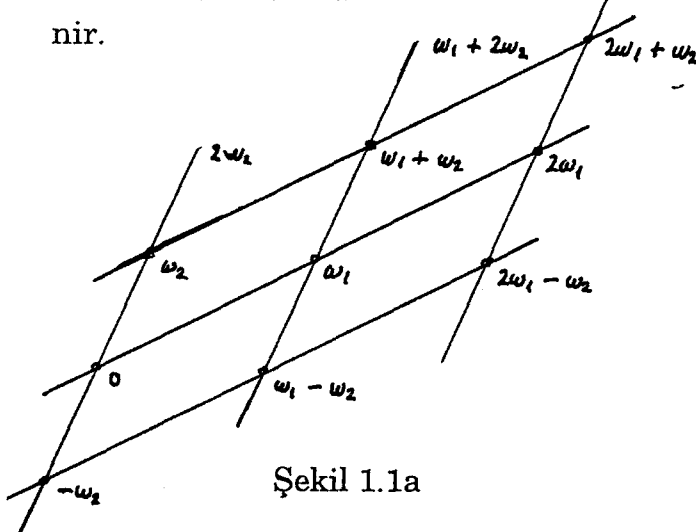
$$f(z) = \lim_{z_n \rightarrow 0} \frac{f(z + z_n) - f(z)}{z_n} \text{ yazılabilir. Burada } \{z_n\}, 0 \text{ a yakınsayan}$$

sıfırdan farklı kompleks sayıların herhangi bir dizisidir. f keyfi küçük periyotlara sahip ise $\{z_n\}$ yi 0 ya yaklaşan periyodların bir dizisi olarak seçebiliriz. O halde $f(z+z_n) = f(z) \rightarrow f'(z) = 0$ olur. Diğer bir deyişle; f in analitikliğinden, her bir noktada $f'(z) = 0$ olup f analitik analitik olduğu her açık-bağlantılı kümede sabit olmalıdır.

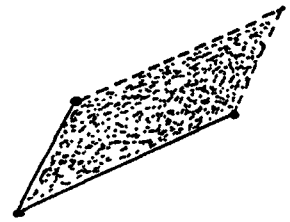
1.3. ESAS PERİYOD ÇİFTLERİ

Tanım: f , ω_2/ω_1 oranı reel olmayan ω_1, ω_2 periyodlarına sahip olsun. m ve n tamsayılar olmak üzere f in her periyodu $m\omega_1 + n\omega_2$ şeklinde ise (ω_1, ω_2) çiftine "**Esas Çift**" denilir.

Her ω_1, ω_2 esas periyod çifti düzlem üzerinde bir paralel kenar ağı belirler. Bunlara "**periyod paralel kenarı**" denir. Örnek olarak Şekil 1-1a gösterilebilir.



Şekil 1.1a



Şekil 1.1b

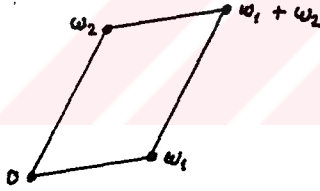
Köşeler $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ periyotlardır. İki kenarın ara kesit noktaları olarak

periyod paralel kenarına ait olan sınır noktaları gibi düşünülmesinde bir sakınca yoktur. Şekil 1.1b bunu gösterir.

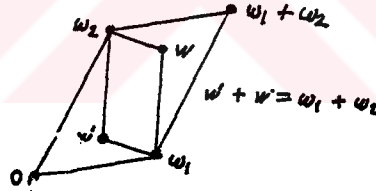
Notasyon: ω_1 ve ω_2 oranları reel olmayan iki kompleks sayı, m ve n keyfi sayılar olmak üzere $m\omega_1 + n\omega_2$ kümesinin tüm lineer kombinasyonları $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ veya kısaca Ω şeklinde gösterilecektir. Bu ω_1, ω_2 ile oluşturulan "**Kafes**"tir.

Teorem 1.1. Eğer (ω_1, ω_2) bir esas periyod çifti ise O, ω_1, ω_2 köşelerinden oluşan üçgen sınırında veya içinde köşelerden başka periyod içermez. Aksine bu özelliği sağlayan periyod çifti esastır.

İspat: Şekil 1.2a da gösterilen O, ω_1, ω_2 ve $\omega_1 + \omega_2$ köşelerinden oluşan paralel kenarı gözönüne alalım. Bu paralel kenarın sınırında veya içindeki noktalar $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$ şeklindedir. Bu noktalar arasında periyodlar sadece O, ω_1, ω_2 olup O, ω_1, ω_2 ile oluşan üçgen köşeler dışında başka periyodlar içermez.



Şekil 1.2a



Şekil 1.2b

Tersine O, ω_1, ω_2 ile oluşan üçgen köşelerden başka periyod içermesin ve ω herhangi periyod olsun. Bazı m ve n tamsayıları için $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ olduğunu gösterelim. ω_1 ve ω_2 oranları reel olmayan sayılar olduğundan ω_1 ve ω_2 reel sayılar üzerinde lineer bağımsızdır. Bu yüzden t_1 ve $t_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ dir. t den küçük en büyük tam sayı $[t]$ tamdeğer t olsun.

$$t_1 = [t_1] + r_1 \quad 0 \leq r_1 < 1, \quad t_2 = [t_2] + r_2 \quad 0 \leq r_2 < 1 \text{ yazalım.}$$

Bu taktirde $\omega = [t_1]\omega_1 + [t_2]\omega_2 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ olur.

r_1 veya r_2 den biri sıfırdan farklı ise o zaman $r_1\omega_1 + r_2\omega_2, O, \omega_1, \omega_2$ ve $\omega_1 + \omega_2$ ile oluşan paralel kenar içinde bulunan bir periyod olacaktır. ω bu paralel kenar içinde bulunan bir periyod ise ω veya $\omega_1 + \omega_2 - \omega$ dan birisi O, ω_1, ω_2 nin oluşturduğu

üçgen içinde veya ω_1 ve ω_2 yi birleştiren köşegen üzerinde bulunur ki bu da hipoteze aykırıdır. Bu yüzden $r_1 = r_2 = 0$ olur ve ispat tamamlanır. Şekil 1.2.b.

TANIM: (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') gibi iki kompleks sayı çifti herbirinin oranı reel olmamak üzere, bu iki çift periyodlar aynı kafesi oluşturuyorlarsa "**Eşdeğerdir**" denilir. Yani $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega_1', \omega_2')$ dır.

Aşağıdaki teorem eşdeğer periyod çifti arasındaki bir esas bağıntıyı ifade eder.

Teorem 1.2. (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') çiftlerinin eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$ad-bc = \pm 1 \text{ olacak şekilde } \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad \text{veya}$$

$\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1, \quad \omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$ şeklinde 2x2 lik tamsayı değerli $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin olmasıdır.

1.4. ELİPTİK FONKSİYONLAR

TANIM: Bir f fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahip ise eliptiktir.

- a) f çifte periyodik
- b) f meromorf

Sabit fonksiyonlar, eliptik fonksiyonların, aşikar bir örneğidir. Daha sonra sabit olmayan eliptik fonksiyonlar için örnekler verilecek fakat ilkin tüm eliptik fonksiyonlara ait bazı esas özellikleri çıkartalım.

Teorem 1.3. Sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun bir esas periyod çifti vardır.

İSPAT: f , analitik olduğu noktalar kümesinde eliptik ise açık bağlantılı bir kümedir. Üstelik f , oranları reel olmayan iki periyoda da sahiptir. Aynı zamanda f in sıfırdan farklı tüm periyodları arasında en az birinin orjinden uzaklığı minimaldir. Aksi halde f sıfırdan farklı keyfi küçük periyodlara sahip olacaktır. Bu yüzden sabit olur. ω sıfırdan farklı orjine en yakın periyodlardan birisi olsun. $|\omega|$ modülü ile tüm periyodlar içinden en küçük argümanı negatif olmayan bir ω , periyodu

seçilsin yine öyle bir peryod mevcut olmalı aksi taktirde, sıfırdan farklı keyfi küçük peryodlar olacaktır. Orada ω_1 ve $-\omega_1$ den başka $|\omega_1|$ modülü ile başka peryodlar varsa ω_1 in argümanından daha büyük olan en küçük argümanlı peryod ω_2 olsun. Değilse $\neq n \omega_1$ peryodlarını içeren en büyük çemberi alalım ve negatif olmayan en küçük argümanlı birini alalım. f lineer olmayan iki peryoda sahip olduğundan böyle bir peryod mevcuttur. Bunlardan birine ω_2 dendiğinden, kurduğumuz yapıya göre O , ω_1 , ω_2 üçgeninde köşelerden başka peryod yoktur. Bu yüzden (ω_1, ω_2) çifti esastır.

f ve g , ω_1 ve ω_2 peryodlu eliptik fonksiyon iseler toplam fark, çarpım ve bölümleri aynı peryodlu ve eliptiktir. Çünkü peryodiklikten dolayı bir eliptik fonksiyonun herhangi bir paralel kenarda incelenmesi yeterlidir.

Teorem 1.4. Bir f eliptik fonksiyonunun bazı peryod paralel kenarlarında kutupları yoksa f sabittir.

İspat: f in bir peryod paralel kenarında kutupları yoksa f süreklidir. Ve bu yüzden paralel kenarın kapanışında sınırlıdır. Peryodiklikten dolayı f tüm düzlemde sınırlıdır. Bu yüzden f Liouville teoremine göre sabittir.

Teorem 1.5. Bir f eliptik fonksiyonu bazı peryod paralel kenarlarında sıfırlara sahip değilse sabittir.

İspat: Teorem 1.4 ü $\frac{1}{f}$ e uygulamakla mümkündür.

Not: Bazen bir peryod paralel kenarın sınırında sıfırların veya kutupların olması uygun değildir. Meromorf bir fonksiyon düzlemin herhangi bir sınırlı bölümünde kutupları veya sıfırların sadece sonlu bir sayısına sahip olduğundan bir peryod paralel kenarın sınırında kutup veya sıfırlara sahip olmamak şartı ile benzer bir paralel kenara daima dönüştürülebilir. Sınırında sıfırlara veya kutuplara sahip olmayan böyle dönüşüm paralel kenarına "**Hücre**" denecektir. Köşelerin peryodu olması gerekmez.

Teorem 1.6. Herhangi bir hücre sınırı boyunca alınan bir eliptik fonksiyonun integrali sıfırdır.

İspat : Periyodiklikten dolayı paralel kenar boyunca integraller kısılır.

Teorem 1.7. Bir eliptik fonksiyonun kutuplarındaki rezidüleri toplamı,

herhangi bir periyot paralel kenar içinde sıfırdır.

İspat Bir hücreye Cauchy'nin rezidü teoremi ve teorem 1.6 uygulanıp çözülür.

Not: Teorem 1.7 bize sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun her bir periyot paralel kenarında en az iki basit kutba veya en az bir çift katlı kutba sahip olduğunu gösterir.

Teorem 1.8. Herhangi bir periyot paralel kenarında bir eliptik fonksiyonun sıfırlarının sayısı kutuplarının sayısına eşittir. (Her biri katları kadar sayılabilir olmak üzere)

İspat: Bir hücrenin C sınırı boyunca alınan $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{f'(z)} dz$ integrali hücrenin içindeki kutupların sayısı ve sıfırlarının sayısı arasındaki farka eşittir. f/f' eliptik, f ile aynı periyoda sahiptir. Ve teorem 1.6'daki bize anlatılan bu integral sıfırdır.

Not: Herhangi bir periyot paralel kenarında bir eliptik fonksiyonun sıfırlarının (kutuplarının) sayısı, "**fonksiyonun mertebesi**"dir. Sabit olmayan her eliptik fonksiyonun mertebesi 2 den büyük veya eşittir.

1.5. ELİPTİK FONKSİYONLARIN OLUŞTURULMASI

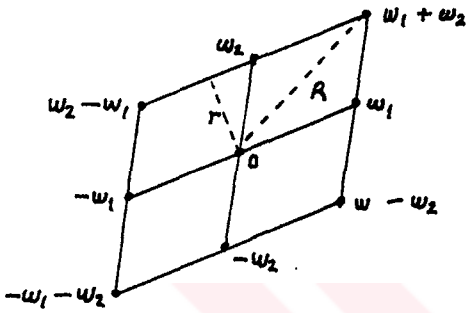
Şimdi sabit olmayan bir eliptik fonksiyonun oluşturulması problemine dönelim. Bu periyodlara sahip en basit eliptik fonksiyonları bulmaya çalışalım. Bir fonksiyonun mertebesi en az iki olduğundan herhangi bir periyot paralel kenarında iki basit kutba veya ikinci mertebeden bir kutba ihtiyaç vardır. Eliptik fonksiyonların iki teorisi Weierstrass ve Jakobiyle geliştirilmiştir.

$z=0$ da ikinci mertebeden bir kutubu olan eliptik fonksiyonun oluşturulmasında başlangıç noktasından hareket ederek Weierstrass yolunu inceleyeceğiz. Herbir ω periyodu yakınında Laurent açılımının esas kısmı $A/(z-\omega)^2 + B/(z-\omega)$ formunda olmalıdır. Kolaylık için $A=1$, $B=0$ alalım. Her bir ω periyot yakınında bir açılım istediğimizden $\sum \frac{1}{(z-\omega)^2}$ toplamını gözönüne almamız doğaldır. Toplam üzerinde bütün periyodlar $\omega=m\omega_1+n\omega_2$ dir. Bu toplam m ve n üzerinde $z \neq \omega$ için çift seridir. Bu tip çift serilerin yakınsaklık özellikleri olan iki lemmaya

değineceğiz. Bu lemmalarda m ve n keyfi tam sayılar olmak üzere $m\omega_1 + n\omega_2$ tüm lineer kombinasyonlarının kümesini Ω ile gösterelim.

Lemma 1 α reel olmak üzere $\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$ sonsuz serisi ancak ve ancak $\alpha > 2$ için mutlak yakınsaktır.

İspat:



Şekil 1.3.

Ve böylece eşitsizlik

$$\frac{1}{R^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{r^\alpha}$$

ilk 8 periyod için

$$\frac{1}{(2R)^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{(2r)^\alpha}$$

16 yeni ω periyodu için. Ve böylece toplam

$$S_n = \sum |\omega|^{-\alpha} \text{ dır.}$$

Orjine en yakın sıfırdan farklı $8(1+2+\dots+n)$ periyodları üzerinden alınan $S_n = \sum |\omega|^{-\alpha}$ toplamı

$$8R^{-\alpha} + 2.8(2R)^{-\alpha} + \dots + n8(nR)^{-\alpha} \leq S_n \leq 8r^{-\alpha} + 2.8(2r)^{-\alpha} + \dots + n8(nr)^{-\alpha}$$

veya

$$8R^{-\alpha} \sum_{k=1}^n k^{1-\alpha} \leq S_n \leq 8r^{-\alpha} \sum_{k=1}^n k^{1-\alpha} \quad \text{eşitsizliklerini sağlar.}$$

O halde bu $S(n)$ kısmi toplamı $\alpha > 2$ iken $8(\alpha-1)/r^\alpha$ ile üstten sınırlıdır.

Fakat herhangi bir kısmi toplam böyle iki kısmi toplam arasında bulunurki $\sum |\omega|^{-\alpha}$ serisinin tüm kısmi toplamı üstten sınırlıdır. O halde $\alpha > 2$ ise seri yakınsaktır. $\alpha > 2$ alındığında $S(n)$ alttan sınırlı olduğu için seri ıraksaktır.

Lemma 2. $\alpha > 2$ ve $R > 0$ ise $\sum_{|\omega|>R} \frac{1}{(z-\omega)^2}$ serisi $|z| \leq R$ dairesinde düzgün mutlak yakınsaktır.

İspat: $\alpha > 1$ olduğunda R ve α ya bağlı bir M sabiti olduğunu göstereceğiz. $\forall \omega, |\omega| > R$ ve $\forall z, |z| \leq R$ için $|z-\omega|^{-\alpha} \leq M \cdot |\omega|^{-\alpha}$ dır.

Lemma 1i Lemma 2'nin ispatına uygulayalım, eşitsizlik.

$$\left(\frac{z-\omega}{\omega}\right)^{\alpha} \geq \frac{1}{M} \quad (1)$$

$|\omega| > R$ olmak üzere Ω daki bütün ω ları gözönüne alalım bunların içinde modülü minumum olanı seçelim. $|\omega| = R+d$ ise $d>0$ yazılır.

Bu takdirde $|z| \leq R$ ve $|\omega| \geq R+d$ ise

$$|(z-\omega)/\omega| = |1-z/\omega| \geq 1-|z|/|\omega| \geq 1-R/(R+d) \text{ yazılır.}$$

O halde $M = (R+d)^{\alpha} / d^{\alpha}$ olmak üzere

$$|(z-\omega)/\omega|^{\alpha} \geq (d/(R+d))^{\alpha} = \frac{1}{M} \text{ dir.}$$

Bu da Lemma 2 yi ispat eder.

Önceden belirtildiği gibi $\sum_{\omega \in R} (z-\omega)^{-2}$ formundaki seriler yardımı ile en basit bir eliptik fonksiyon oluşturuldu. Bu form her bir periyod civarında uygun bir esas kısma sahiptir. Öyle ise üst kuvvet 2 yerine 3 yazılırsa seri mutlak yakınsak olmaz. Bu bize mertebesi üç olan eliptik fonksiyonu verir.

Teorem 1.9. $f, f(z) = \sum_{\omega \in R} (z-\omega)^{-3}$ serisi ile tanımlı olsun. O halde f, Ω da $\forall$ bir ω peryodunu 3. mertebeden kutup kabul eden ω_1, ω_2 peryodlu eliptik bir fonksiyondur.

İspat: Lemma 2ye göre $f(z)$ serisi $|z| \leq R$ dairesinde düzgün yakınsaktır ve $|\omega| > R$ üzerinde alınan toplam ile elde edilmiştir. Bu yüzden f bu bölgede analitik bir fonksiyonu temsil eder.

Bu bölgede $f(z)$ serisi her bir ω peryodunun 3. mertebeden kutbu hariç analiktir. Kalan terimler sonlu sayıdadır. Bu da f in Ω da her bir $\omega, 3.$ mertebeden kutbu ile meromorfik olduğunu ispat eder. f in ω_1 ve ω_2 peryodlarına sahip olduğunu gösterelim. Bunun için serinin mutlak yakınsaklığından yararlanalım. $f(z)$ de z yerine $(z + \omega_1)$ alınırsa $f(z + \omega_1) = \sum_{\omega \in R} (z + \omega_1 - \omega)^{-3}$ olur. Fakat $\omega - \omega_1, \Omega$ daki bütün

periyodlarının içindedir. Öyle ise seri $f(z + \omega_1)$ için $f(z)$ nin sadece yeniden düzenlenmiş bir şeklidir. Mutlak yakınsaklığa göre $f(z + \omega_1) = f(z)$, $f(z + \omega_2) = f(z)$ olup f çiftte periyodiktir bu ispat tamamlanır.

1.6 WEIERSTRASS P FONKSİYONU

Şimdi mertebesi 2 olan bir eliptik fonksiyonu oluşturmak için teorem 1.9 un fonksiyonunu kullanalım. Sadece $f(z)$ serisini terim terim integre edelim. Her bir periyod civarında verilen $-(z-\omega)^{-2}/2$ esas kısmı -2 ile çarpıldığında $(z-\omega)^{-2}$ olur. İntegresyon hesabının bir sabiti de vardır. O dan z ye integre ettiğimizde $\omega=0$ da z^{-3} e tekabül eden terimleri kaldırdığımızda ve terimi eklediğimizde fonksiyon

$\frac{1}{z^2} + \int \sum \frac{-2}{(t-\omega)^3} dt$ şeklini alır. Terim terim integre ederek fonksiyon aşağıdaki şeklini alır. Terim terim "*Weierstrass P fonksiyonu*" halini alır.

Tanım: Weierstrass P fonksiyonu

$$P_z = \frac{1}{z^2} + \sum \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \quad \text{serileri ile tanımlıdır.}$$

Teorem 1.10 Tanımdaki P fonksiyonu ω_1 ve ω_2 periyodlarına sahiptir. P , Ω daki her bir ω -periyodunda bir çift kutup hariç analitiktir. Ve $P(z)$, nin bir çift fonksiyonudur.

İspat: Serideki her bir terim

$$|(z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}| = \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \text{ modülüne sahiptir.}$$

Şimdi herhangi bir $|z| \leq R$ kompakt dairesini gözönüne alalım. Bu dairede sonlu sayıda ω periyodu vardır. Bu periyodları içeren seri hariç tutularak Lemma 2 nin ispatında bulunan $\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} \right| \leq \frac{M}{\omega^2}$ eşitsizliği ile M , yalnız R ye bağlı sabittir. Bu bize $|z| \leq R$ bölgesi dışında ω için $R < |\omega|$ olduğundan

$$\left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2 (z-\omega)^2} \right| \leq M \frac{R(2|\omega| + R)}{|\omega|^4} \leq \frac{MR(2+R/\omega)}{|\omega|^3} \leq \frac{3MR}{|\omega|^3}$$

ifadesini verir. Bu ifade, $|z| \leq R$ dairesinde düzgün ve mutlak yakınsak serileri gösterir. Bundan dolayı bu dairede analitiktir.

Bu daire için her ω periyodunda 2. mertebeden kutbu verir. Bu yüzden P , her bir periyodda 2. mertebeden bir kutbu olan meromorf bir fonksiyondur. Şimdi P nin bir çift fonksiyon olduğunu ispat edeceğiz.

$$(-z - \omega)^2 = (z + \omega)^2 = (z - (-\omega))^2 \text{ dir.}$$

Tüm $-\omega = 0$ periyodları için $P(-z) = P(z)$ olduğundan P çift fonksiyondur. Son olarak periyodikliği gösterelim. P nin türevi

$$P'(z) = -2 \sum_{\omega \in R} \frac{1}{(z-\omega)^3} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bu fonksiyonun ω_1 ve ω_2 periyodlarına sahip olduğu gösterilmiştir. Böylece her bir ω periyodu için $P'(z + \omega) = P'(z)$ dir. Bu yüzden $P(z + \omega) - P(z)$ fonksiyonu sabittir.

Fakat $z = -\omega/2$ alındığında

$P(\omega/2) - P(-\omega/2) = 0$ sabit olduğundan P çifttir. Yani her ω için $P(z + \omega) = P(z)$ olup fonksiyon istenen periyodlara sahip olur.

1.7 ORJİN CİVARINDA P NİN LAURENT AÇILIMI

Teorem 1.11. $r = \min \{|\omega|; \omega \neq 0\}$ olsun. $0 < |z| < r$ için

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2n+2} \cdot z^{2n} \quad (3)$$

$$G_n = \sum \frac{1}{\omega^n} \quad n \geq 3 \text{ için.} \quad (4)$$

yazılabilir

İspat: $0 < |z| < r$, $|z/\omega| < 1$ olduğundan ve

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2 (1 - \frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2} (1 + \sum (n+1) (\frac{z}{\omega})^n) \text{ alındığında}$$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum \frac{n+1}{\omega^{n+2}} \cdot z^n \text{ olur.}$$

Tüm ω lar üzerinde alınan toplam mutlak yakınsaklığa göre G_n , (4) ile verilen $P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum (n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^{n+2}} \cdot z^n = \frac{1}{z^2} + \sum (n+1) G_{n+2} \cdot z^n$ dir.

P çift olduğundan G_{2n-1} katsayıları sıfıra eşit olmalıdır ve (3) eşitsizliği elde edilir.

1-8 P İLE SAĞLANAN DİFERANSİYEL DENKLEM

P fonksiyonu lineer olmayan

$$[P'(z)]^2 = 4.P^3(z) - 60 G_4 P(z) - 140.G_6 \quad \text{diferansiyel denklemini sağlar.}$$

İspat: P nin kuvvetlerinin bir lineer kombinasyonu ile ve P'nün $z=0$ daki kutbu hariç tutularak elde edilir. Bu bize kutubları olmayan bir eliptik fonksiyonu verir. Ve bu yüzden sabit olmalıdır.

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) G_{n+2} \cdot z^n = \frac{1}{z^2} + 3.G_4.z^2 + 5.G_6.z^4 + \dots$$

$P'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6 G_4 z + 20 G_6 z^3 + \dots$ fonksiyonunun $z=0$ civarında 3. mertebeden bir kutup olduğu görülür. Karesi ile 6. mertebeden bir fonksiyon

$$[P'(z)]^2 = \left(\frac{4}{z^6} - \frac{24 G_4}{z^6} - 80 G_6 + \dots \right)$$

$z=0$ için sıfıra eşit kuvvet serisini gösterir. Şimdi

$$4.P^3(z) = \frac{4}{z^6} + 36 \frac{G_4}{z^2} + 60 G_6 + \dots \quad \text{olduğundan}$$

$$[P'(z)]^2 - 4P^3(z) = -60 \cdot \frac{G_4}{z^2} - 140 G_6 + \dots$$

$$[P'(z)]^2 - 4P^3(z) + 60 \cdot \frac{G_4}{z^2} = -140 G_6 + \dots \quad \text{dır.}$$

Sol taraf $z=0$ da kutba sahip olmadığından bir periyod paralel kenarının hiç bir yerinde kutbu yoktur. Öyle ise sabit olmalıdır. Bu yüzden bu sabit $-140 G_6$ olmalıdır ve ispat tamamlanır.

1.9 EISENSTEIN SERİLERİ ve g_2, g_3 İNVARİYANTLARI

Tanım: $n \geq 3$ için $G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n}$ serilerine "*n. mertebeden Eisenstein serileri*" denir.

$$g_2 = 60.G_4 \quad g_3 = 140.G_6$$

Bağıntıları ile tanımlanan sayılar g_2 ve g_3 invaryantlarıdır. O halde diferansiyel denklem

$$[P'(z)]^2 = 4.P^3(z) - g_2 \cdot P(z) - g_3 \quad \text{formunu alır.}$$

Diferansiyel denklem yalnız g_2 ve g_3 e bağlı olduğundan P tamamıyla belirlenir. Çünkü katsayıları g_2 ve g_3 ün terimleri ile ifade edilebilir.

Teorem 1.13 Her G_n Eisenstein serileri pozitif rasyonel katsayılı g_2 ve g_3 ün bir polinomu ile açıklanabilir.

$$b(n) = (2n+1) G_{2n+2} \text{ ise } b(1) = \frac{g_2}{20}, \quad b(2) = \frac{g_3}{28} \text{ dir. Ve } n \geq 3 \text{ için}$$

$$(2n+3)(n-2)b(n) = 3 \sum_{k=1}^{n-2} b(k) \cdot b(n-1-k) \text{ veya eşitlik } m \geq 4 \text{ için}$$

$$(2m+1)(m-3)(2m-1) G_{2m} = 3 \sum_{r=2}^{m-2} (2r-1)(2m-2r-1) G_{2r} \cdot G_{2m-2r} \text{ dir.}$$

İspat: P için diferansiyel denklemin diferansiyeli, P ile elde edilmiş ikinci mertebeli başka bir diferansiyel denklem verir.

$$P'' = 6.P^2 - \frac{g_2}{2} \quad (5)$$

$$\text{Bunu } P(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \cdot z^{2n} \text{ ve}$$

(5) de aynı kuvvetten z leri eşleyerek bulabiliriz.

1.10 e_1, e_2, e_3 SAYILARI

Tanım: Yarı periyodlarda P nin değerlerini e_1, e_2, e_3 ile gösterilir.

$$e_1 = P\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = P\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = P\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

Aşağıdaki teorem, e_1, e_2, e_3 sayılarının $4P^3 - g_2P - g_3$ üçüncü dereceden polinomunun kökleri olduğunu gösterir.

Teorem 1.14

$$4.P^3(z) - g_2P(z) - g_3 = 4(P(z) - e_1)(P(z) - e_2)(P(z) - e_3)$$

alındığında e_1, e_2, e_3 kökleri ayrıktır. Bu yüzden $g_2^3 - 27 \cdot g_3^2 \neq 0$ dir.

İSPAT: P çift olduğundan P' türevi tektir. Tek bir fonksiyonun yarı periyodları ya fonksiyonun sıfırları ya kutupları olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten periyodik olmasından

$$P'\left(-\frac{\omega}{2}\right) = P'\left(\omega - \frac{\omega}{2}\right) = P'\left(-\frac{\omega}{2}\right) \text{ aldığımızda ve } P' \text{ tek olduğundan}$$

$$P'\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -P'\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ dır. Bu yüzden } P'\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ sınırlı ise}$$

$$P'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0 \text{ dır.}$$

$\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ de $P'(z)$ 'nin kutupları olmadığından bu noktalar P 'nin sıfırları olmalıdır. Fakat $P', 3.$ mertebeden olduğundan bunlar basit sıfırlar

olmalıdırlar. Böylece P' köşeleri $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ olan periyod paralel kenarında başka sıfırlara sahip değildir. Diferansiyel denklem bu noktaların her biri kübiğin bir sıfır olduğunu gösterir.

Şimdi e_1, e_2, e_3 sayılarının birbirinden farklı olduklarını göstereceğiz.

$P(z) - e_1$ fonksiyonu $z = \frac{\omega_1}{2}$ de sıfıra eşittir.

$P'(\frac{\omega_1}{2}) = 0$ olduğundan bu çift katlı sıfırdır.

Aynı şekilde $P(z) - e_2$ nin $\omega_2/2$ de bir iki katlı sıfırı vardır. Eğer $e_1 = e_2$ ise mertebesi ≥ 4 olan $P(z) - e_1$ eliptik fonksiyonu $\omega_1/2$ ve $\omega_2/2$ de iki katlı sıfıra sahiptir.

Fakat mertebe 2 olduğundan $e_1 \neq e_2, e_2 \neq e_3, e_3 \neq e_1$ dir. Bir polinomda farklı kökler olduğunda Δ ları sıfıra eşit değildir. $4x^3 - g_2x - g_3$ kübik polinomunun Δ sı $g_2^3 - 27g_3^2$ dir.

$x = P(z)$ polinomunun kökleri farklı olduğundan $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ dır. İspat tamamlanır.

1.11. DİSKRİMİNANT

$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ sayısına diskriminant denir. g_2, g_3 invaryant ve Δ diskriminant ω_1 ve ω_2 periyodlarının fonksiyonlarıdır.

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2) \quad g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2) \quad \Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2)$$

Eisenstein serileri g_2 ve g_3 ün sırasıyla -4 ve -6. dereceden homojen fonksiyonlar olduğunu gösterir. Herhangi $\lambda \neq 0$ için

$$g_2(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-4} \cdot g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$g_3(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\omega_1, \omega_2) \text{ olduğundan}$$

$$\Delta(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \lambda^{-12} \cdot \Delta(\omega_1, \omega_2) \text{ dır. Bu yüzden}$$

$$\lambda = \frac{1}{\omega_1} \text{ ve } \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ alındığında}$$

$$g_2(1, \tau) = \omega_1^4 \cdot g_2(\omega_1, \omega_2)$$

$$g_3(1, \tau) = \omega_1^6 \cdot g_3(\omega_1, \omega_2) \text{ bulunur.}$$

g_2 , g_3 ve Δ da $\omega_2/\omega_1 = \tau$ alınarak bir τ kompleks değişkenli fonksiyonlara çevrilebilir. $\tau = \omega_2/\omega_1$ oranının imajiner kısmı pozitiftir. Ve üst yarı düzlemde $\text{Im}(\tau) > 0$ ile H gösterilecektir.

$\tau \in H$ ise $g_2(1, \tau)$, $g_3(1, \tau)$ ve $\Delta(1, \tau)$ için sırası ile $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ yazalım. Böylece

$$g_2(\tau) = 60 \cdot \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} , g_3(\tau) = 140 \cdot \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} \text{ ve } \Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) \text{ bulunur.}$$

Teorem 1.14 e göre H deki bütün τ lar için $\Delta(\tau) \neq 0$ dır.

1.12 KLEIN'S MODÜLER J(Z) FONKSİYONU

ω_1 ve ω_2 peryodlarının bir fonksiyonu gibi tanımlanan sıfırıncı dereceden g_2 ve g_3 'ün kombinasyonları '*Klein's fonksiyonu*'dur.

Tanım: ω_1/ω_2 reel değil ise $J(\omega_1, \omega_2) = \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)}$ dir.

g_2^3 ve Δ aynı dereceli olduğundan homojendirler.

$$J(\lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = J(\omega_1, \omega_2) \text{ dir.}$$

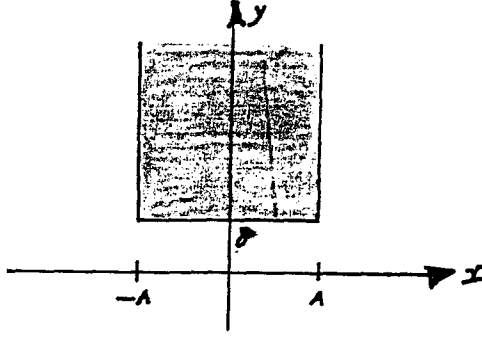
$\tau \in H$ ise $\omega(1, \tau) = J(\omega_1, \omega_2)$ dir. Böylece $J(\omega_1, \omega_2)$ sadece τ oranının bir fonksiyonudur. $J(1, \tau)$ için $J(\tau)$ yazılabilir.

Teorem 1.15 $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ fonksiyonları H de analitiktir.

İspat: H de $\Delta(\tau) \neq 0$ olduğundan g_2 ve g_3 'ün analitikliği ispat için yeterlidir. $\alpha > 2$ ile g_2 ve g_3 'ün her ikisi

$$\sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{+\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^\alpha} \text{ şeklinde çift serileri ile verilmiştir.}$$

$y > 0$ olmak üzere $\tau = x + iy$ olsun. $\alpha > 2$ ise H 'de her τ sabiti için seri mutlak yakınsaktır ve $S = \{x + iy \mid |x| \leq A, y \geq \delta > 0\}$ her bir S şeridinde düzgündür. Bakınız şekil 1.4



Şekil 1.4

$\forall (m,n) \neq (0,0)$ ve $\forall \tau$ için

$$\frac{1}{(m+n\tau)^\alpha} \leq \frac{M}{(m+ni)^\alpha} \quad (6)$$

olacak şekilde yalnız A ve δ 'ya bağlı $M>0$ sabitinin olduğunu ispatlamalıyız. lemma 1 yardımı ile yalnız A ve δ 'ya bağlı olan $K>0$ için

$$|m+n\tau|^2 > K \cdot |m+ni|^2 \text{ veya}$$

$$(m+nx)^2 + (ny)^2 > K(m^2+n^2) \quad (7)$$

(6) nın ispatını sağlar, $n=0$ ise $q=m/n$ olsun $\exists K>0$ için

$$(q+x)^2 + y^2 / (1+q^2) > K \quad (8)$$

$|x| \leq A$ ve $y \geq \delta$ ise $K = \delta^2 / [1+(A+\delta)^2]$ ile (8) gerçektir.

$|q| \leq A+\delta$ ise $(q+x)^2 \geq 0$ ve $y^2 \geq \delta^2$ olduğundan (8) eşitsizliği açık olarak görülür.

$|q| > A+\delta$ ile $|x/q| < |x| / (A+\delta) \leq A / (A+\delta) < 1$ olduğundan

$$|1 + \frac{x}{q}| \geq 1 - |\frac{x}{q}| > 1 - \frac{A}{A+\delta} = \frac{\delta}{A+\delta} \text{ dır. Bu yüzden}$$

$$|q+x| \geq \frac{q \cdot \delta}{A+\delta} \text{ ve } \delta^2 \text{ atılarak}$$

$$\frac{(q+x)^2 + y^2}{1+q^2} > \frac{\delta^2}{(A+\delta)^2} \cdot \frac{q^2}{1+q^2} \quad (9)$$

olur şimdi $q^2 / (1+q^2)$, $q^2 > (A+\delta)^2$ olduğundan

$$\frac{q^2}{1+q^2} \geq \frac{(A+\delta)^2}{1+(A+\delta)^2}, \text{ } q^2 \text{nin artan bir fonksiyonudur.}$$

K tanımı ile (9) ve (8) kullanılır.

1.13 J'NİN MODÜLER DÖNÜŞÜMLER ALTINDA İNVARİYANTLIĞI

Oranları reel olmayan ω_1 ve ω_2 periyodları verildiğinde $\omega_2' = a\omega_2 + b\omega_1$ $\omega_1' = c\omega_2 + d\omega_1$ bağıntıları ile ω_1' , ω_2' yeni periyodlarını verelim. Burada a, b, c, d , $ad-bc=1$ olan tamsayılardır. O halde (ω_1, ω_2) çifti (ω_1', ω_2') çiftine eşdeğerdir. Ve Ω periyodlarının aynı kümesini oluştururlar. Bu yüzden $g_2(\omega_1', \omega_2') = g_2(\omega_1, \omega_2)$ olduğundan Ω periyodlar kümesinde yalnız g_2 ve g_3 e bağlıdır.

Sonuç olarak $\Delta(\omega_1', \omega_2') = \Delta(\omega_1, \omega_2)$ ve $J(\omega_1', \omega_2') = J(\omega_1, \omega_2)$ dir. Yeni periyodların oranı

$$\tau' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{a\omega_2 + b\omega_1}{c\omega_2 + d\omega_1} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{dir.}$$

Kolay bir hesaplama ile

$$\text{Im}(\tau') = \text{Im}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \cdot \text{Im}(\tau) = \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2} \quad \text{olur.}$$

$\tau \in H$ olduğundan ancak ve ancak $\tau' \in H$ dir. a, b, c, d $ad-bc=1$ olan tamsayıları ile $\tau' = (a\tau + b) / (c\tau + d)$ eşitliğine "**birim modüllü dönüşümler**" denir. Bu yazırlar altında bütün modüler dönüşümler kümesine, bir grup oldukları için "**Modüler Grup**" denilir. Gelecek bölümde bu grup tartışılacaktır. $J(\tau)$ fonksiyonu, modüler grub dönüşümleri altında invariant olduğu yeniden gösterilecektir.

Teorem 1.16 $\tau \in H$ ve a, b, c, d ler $ad-bc = 1$ olan tamsayılar olduğunda $\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \in H$ ve $J\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = J(\tau)$ (10)

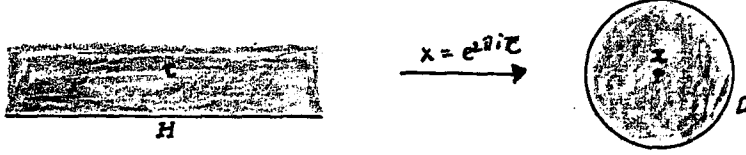
İspat: $\tau' = \tau - 1$ özel bir modüler dönüşümdür. (10) denklemi $J(\tau+1) = J(\tau)$ olduğunu gösterir. Başka bir deyişle $J(\tau)$, 1 periyodlu, τ nun bir periyodik fonksiyonudur. Gelecek teorem $J(\tau)$ nun bir Fourier açılımı olduğunu gösterir.

Teorem 1.17. $\tau \in H$ iken mutlak yakınsak Fourier serileri ile

$$J(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{2\pi i n \tau} \quad (11)$$

şeklinde tanımlanabilir.

İspat: $x = e^{2\pi i \tau}$ değişken dönüşümü yapalım. H üst yarı düzlemi birim daireye dönüştür. $D = \{x \mid 0 < |x| < 1\}$, H de her bir τ , D de bir tek x noktasına dönüştür. Fakat D de her bir x , H deki sonsuz tane noktanın tasviridir. Eğer τ ve τ' x üzerinde $e^{2\pi i \tau} = e^{2\pi i \tau'}$ ise τ ve τ' bir tam sayı kadar farklıdır.



Şekil 1.5

Eğer $x \in D$ ise $f(x) = J(z)$ alalım. x dönüşümü ile H nin noktalarının her biri τ dur. J , 1 periyodludur. Bu noktaların hepsinde J aynı değerlidir. Öyle ise $f(x)$ iyi tanımlıdır. f , D de analitiktir. Çünkü D de her noktada $f(x)$ mevcuttur.

$$f(x) = \frac{d}{dx} J(\tau) = \frac{d}{d\tau} J(\tau) \frac{d\tau}{dx} = J(\tau) \cdot \frac{dx}{d\tau} = \frac{J(\tau)}{2\pi i e^{2\pi i \tau}} \text{ dur.}$$

f , D de analitik olduğundan sıfır yöresinde Laurent açılımı vardır. Bu D de her bir x için mutlak yakınsaktır.

$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n).x^n$ x yerine $e^{2\pi i \tau}$ yazıldığında $J(\tau)$ nun (11) denklemindeki mutlak yakınsak fourier açılımının var olduğunu görürüz. $n \geq 2$ için $a_{-n}=0$, $a_{-1}=12^{-3}$ olduğunda 12^3 , $J(\tau)$ nun fourier açılımının katsayı tamsayılarıdır. Bunu yapmakla ilk olarak $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ ve $\Delta(\tau)$ nun fourier açılımlarını belirlemiş oluruz.

1.14 $g_2(\tau)$ ve $g_3(\tau)$ nun FOURİER AÇILIMI

Her bir $\sum_{(m,n) \neq (0,0)} (m+n\tau)^{-k}$ Eisenstein serileri τ nun 1 periyodlu bir periyodik fonksiyonudur. Bilhassa $g_2(\tau)$ ve $g_3(\tau)$ da 1 periyodlu ile periyodik fonksiyonlardır. Bu kısımda açıkça Fourier katsayılarını belirleyelim.

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^4}, \quad g_3(\tau) = 140 \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^6} \text{ olduğunu hatıralayalım.}$$

Bunlar m ve n üzerinde çift serilerdir. İlk önce

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4}$ ve $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6}$ daha basit serileri için fourier açılımlarını elde edelim.

Lemma 3; $n > 0$ ve $\tau \in H$ için Fourier açılımı

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^3 \cdot e^{2\pi i n \tau} \text{ ve } \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^5 \cdot e^{2\pi i n \tau} \text{ dur.}$$

İspat: Kotanjantın kısmi kesirlerine ayırma ile başlayalım.

$$\pi \cot \tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m} \right), \quad x = e^{2\pi i \tau} \quad \text{olsun}$$

$\tau \in H$ iken $|x| < 1$ olduğundan

$$\pi \cot \tau = \pi \frac{\cos \pi \tau}{\sin \pi \tau} = \pi i \cdot \frac{e^{2\pi i \tau} + 1}{e^{2\pi i \tau} - 1} = \pi i \frac{x+1}{x-1} = -\pi i \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right)$$

$$= -\pi i \left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} x^r \right) = -\pi i \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} x^r \right) \quad \text{bulunur.}$$

Başka bir deyişle $\tau \in H$ iken

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m} \right) = -\pi i \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i r \tau} \right) \text{ dur.}$$

Tekrar türev alınırsa

$$-\frac{1}{\tau^2} - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^2} = -(2\pi i)^2 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r \cdot e^{2\pi i r \tau} \quad (12)$$

$$-3! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^4} = -(2\pi i)^4 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^3 \cdot e^{2\pi i r \tau}$$

$$-5! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^6} = -(2\pi i)^6 \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^5 \cdot e^{2\pi i r \tau}$$

τ yerine $n\tau$ yazılarak Lemma 3 elde edilir.

Teorem 1.18: $\tau \in H$ iken $\mathcal{G}_{\alpha}(k) = \sum_{d|k} d^{\alpha}$ olmak üzere

fourier açılımları

$$g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3} \left\{ 1 + 240 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_3(k) \cdot e^{2\pi i k \tau} \right\}$$

$$g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{3} \left\{ 1 - 504 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_5(k) \cdot e^{2\pi i k \tau} \right\} \text{ dur.}$$

İspat: $x = e^{2\pi i \tau}$ iken

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^4} = 60 \left\{ \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+\tau)^4} + \frac{1}{(m-n\tau)^4} \right) \right\}$$

$$= 60 \left\{ 2\zeta(4) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+\tau)^4} \right\}$$

$$= 60 \left\{ \frac{2\pi^4}{90} + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 \cdot x^{nr} \right\} \text{ yazarız.}$$

çift toplamda nr sabit iken $g_2(\tau)$ açılımı için bu terimleri hep birlikte toplayalım $g_3(\tau)$ için formül benzer şekilde ispat edilebilir.

1.15 $\Delta(\tau)$ VE $J(\tau)$ NUN FOURIER AÇILIMI

$\tau \in H$ iken $\tau(1)=1$ ve $\tau(2) = -24$ ile $\tau(n)$ katsayıları tamsayıdır. Fourier açılımı

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot e^{2\pi i \tau} \text{ dur.}$$

Not: $\tau(n)$ aritmetik fonksiyonuna Ramano'nun Tau fonksiyonu denir.

İspat: $x = e^{2\pi i \tau}$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) \cdot x^n$ ve $B = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) \cdot x^n$ olsun.

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} \{ (1+240A)^3 - (1-504B)^2 \}$$

olduğundan A ve B tamsayı katlarıdır ve

$$\begin{aligned} (1+240A)^3 - (1-504B)^2 &= 1+720A + 3(240)^2A^2 + (240)^3A^3 - 1 \\ &\quad + 1008B - (504)^2B^2 \\ &= 12^2(5A+7B) + 12^3(100A^2-147B^2+8000A^3) \end{aligned}$$

$$\text{Fakat } 5d^3+7d^5 \equiv d^3(5+7d^2) \equiv d^3(d^2-1) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$d^3(1-d^2) \equiv 0 \pmod{4}$$

Öyle ise $5d^3+7d^5 \equiv 0 \pmod{12}$ dir.

Bu yüzden $(1+240A)^3 - (1-504B)^2$ 'nin kuvvet serilerinin açılımında her bir katsayının bir elemanı 12^3 'tür.

Öyle ki $\tau(n)$ tamsayılar olduğundan

$$\Delta(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} \{ 12^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i \tau} \} = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot e^{2\pi i \tau} \text{ dur}$$

x 'in katsayıları $12^2(5+7)$, $\tau(1)=1$ 'dir.

Benzer şekilde $\tau(2) = -24$ bulunur.

Teorem 1.20 $\tau \in H$ iken $C(n)$ tamsayıları ile fourier açılımı

$$12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i \tau} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} C(n) \cdot e^{2\pi i n \tau} \text{ dur.}$$

İspat: x 'in tamsayı kuvvetlerinde her bir kuvvet seriler için I yazmak uygundur. $x=e^{2\pi i \tau}$ olduğundan

$$g_2^3(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} (1+240x + I)^3 = \frac{64\pi^{12}}{27} (1+720x + I)$$

$$\Delta(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} \{12^3 x (1-24x + I)\} \text{ dır. Bu yüzden}$$

$$J(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)} = \frac{1+720x + I}{12^3 x (1-24x + I)} = \frac{1}{12^3 x} (1+720x + I) \cdot (1+24x + I)$$

$C(n)$ tamsayıları ile

$$12^3 J(\tau) = \frac{1}{x} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} C(n) \cdot x^n \text{ . dir.}$$

Not: $C(n)$ katsayıları $n \leq 100$ için hesaplandığında 1916'da ilk 7'sini Berwick, 1939'da ilk 24'ünü Zuckerman ve 1953'de ilk 100'ünü Wijngaerden hesaplamıştır. burada ilk birkaçı vardır.

$$C(0) = 744$$

$$C(1) = 196, 884$$

$$C(2) = 21, 493, 760$$

$$C(3) = 864, 299, 970$$

$$C(4) = 20, 245, 856, 256$$

$$C(5) = 333, 202, 640, 600$$

$$C(6) = 4, 252, 023, 300, 096$$

$$C(7) = 44, 656, 994, 071, 935$$

$$C(8) = 401, 490, 886, 656, 000$$

$C(n)$ tamsayıları ilginç aritmetiksel özellikleri olan bir sayıdır. 1942'de D.H. Lehmer ispat etmiştir.

$$(n+1) \cdot C(n) \equiv 0 \pmod{24} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{için}$$

1949 de Joseph Lehner farklı çeşitlerin bölünebilir özelliğini keşfetti.

$$C(5n) = 0 \bmod 25$$

$$C(7n) = 0 \bmod 7$$

$$C(11n) = 0 \bmod 11$$

5, 7 ve 11'in daha çok kuvvetleri için denkleğini de keşfetti; 2 ve 3 asal sayıları için benzer sonuçlar buldu.

1932'de Petersson $C(n)$ için

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } C(n) \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2} n^{3/4}} \text{ gibi bir asimtotik formül keşfetti.}$$

1938'de Rademache ile bu formül bağımsız olarak yeniden keşfedildi. D.H. Lehmer ve diğerleri ile $\Delta(\tau)$ 'nin Fourier açılımında $\tau(n)$ katsayıları geniş bir cetvel halinde bulunmuştur.

$$\tau(1) = 1$$

$$\tau(6) = -6048$$

$$\tau(2) = -24$$

$$\tau(7) = -16744$$

$$\tau(3) = 252$$

$$\tau(8) = 84480$$

$$\tau(4) = -1472$$

$$\tau(9) = -113643$$

$$\tau(5) = 4830$$

$$\tau(10) = -115920$$

$\forall n \tau(n) \neq 0$ için Lehmer düzenlemiştir ve $\tau(n)$ ile denklik değerlerinin çalışması $\forall n < 2149\ 286\ 39999$ için yapılmıştır.

I. BÖLÜME AİT ÖRNEKLER

1) ω_2/ω_1 ve ω_2'/ω_1' oranları reel olmayan (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') kompleks sayı çiftleri verilmiş olsun. $(\omega_1, \omega_2), (\omega_1', \omega_2')$ çiftlerinin periyodlarının aynı kümesini üretmesi için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
 olacak şekilde 2x2 boyutlu $\det = 1$ olan $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ matrisinin almasıdır.

İspat $\omega_2/\omega_1, \omega_2'/\omega_1'$ oranları reel olmayan (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') periyod çiftlerini düşünelim. kabulden

$$\begin{bmatrix} \omega_1 = d\omega_1 + c\omega_2 \\ \omega_2 = b\omega_1 + a\omega_2 \end{bmatrix} \quad * \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{matrisinin } \det=1 \text{ oluşunu kullanalım}$$

* denklemini sırasıyla $-b, d$ ile çarpalım.

$$-b\omega_1' = -bd\omega_1 - bc\omega_2$$

$$d\omega_2' = db\omega_1 + da\omega_2$$

$$d\omega_2' - b\omega_1' = da\omega_2 - bc\omega_2 = (ad-bc)\omega_2 = 1 \cdot \omega_2 = \omega_2$$

$$\omega_2 = d\omega_2' - b\omega_1' \quad (1) \text{ hesaplanır.}$$

Yine * denklemini sırasıyla $a, -c$ ile çarpalım.

$$a\omega_1' = ad\omega_1 + ac\omega_2$$

$$-c\omega_2' = -cb\omega_1 + ca\omega_2$$

$$a\omega_1' - c\omega_2' = da\omega_1 - cb\omega_1 = (ad-bc)\omega_1 = \omega_1$$

$$\omega_1 = a\omega_1' - c\omega_2' \quad (2) \text{ hesaplanır.}$$

(1) ve (2)'den (ω_1, ω_2) ve (ω_1', ω_2') kompleks sayı çiftleri periyodların aynı bir kümesini üretirler.

2. $[P'(z)]^2 = 4P^3(z) - 60 G_4 P(z) - 140 G_6$ dir.

Eğer $z = \frac{\omega_1}{2}$ $z = \frac{\omega_2}{2}$ $z = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ise $P''(z) = 0$ 'dir.

$$P''(z) = 6P^2(z) - \frac{1}{2} g_2 = 2 (P(z) - e_2) (P(z) - e_3)$$

olup

$$e_1 = P\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \quad e_2 = P\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \quad \text{ve} \quad e_3 = P\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

olduğundan

$$P''\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 2 \left(P\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_2\right) \left(P\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - e_3\right) = 2(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)$$

$$P''\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 2 (e_2 - e_2) (e_2 - e_3) = 0 \quad \text{ve}$$

$$P''\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = 2(e_3 - e_2) (e_3 - e_3) = 0$$

olarak hesaplanır.

3. f ve g periyodların aynı kümesine sahip iki eliptik fonksiyon olsun.

$$P[f(z), g(z)] = C$$

olacak şekilde özdeş olarak sıfır olmayan bir $P(x,y)$ Polinomu vardır. İspatlayın

[c sabittir, f ve g 'ye bağlı, fakat z 'ye bağlı değildir]

İspat: $P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(z-q)^2} - \frac{1}{q^2}$ olduğunu biliyoruz. burada p eliptik

fonksiyonunu z ve g 'ya bağlı olarak düşünersek

$$P(z,q) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(z-q)^2} - \frac{1}{q^2} \text{ ' dir.}$$

Burada $z = f$ $q = g$ dönüşümü uygularsak

$$p(f,g) = \frac{1}{f^2} + \sum_{\substack{g \neq 0}} \frac{1}{(f-g)^2} - \frac{1}{g^2}$$

denklemini elde edilir.

P fonk'unda f ve g koymakla elde edilen değer bize bir sabit değerini verir. Ve bunu C ile gösterebiliriz.

$P(f,g) = C$ ile gösterilebilir.

4. $P(u) = P(v)$ olması için gerek ve yeter koşul $u-v$ veya $u+v$ 'nin p 'nin bir periyodu olmasıdır.

İspat: $P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(z-q)^2} - \frac{1}{q^2}$ olduğunu biliyoruz.

Buradan

$$\left. \begin{aligned} P(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{q^2} \\ P(v) &= \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(v-q)^2} - \frac{1}{q^2} \end{aligned} \right\} (*) \text{ eşitlikleri yazılabilir.}$$

$P(u) = P(v)$ kabul edelim. Buradan $P(u) - P(v) = 0$ 'dır.

(*) eşitliklerinin farkını alalım.

$$P(u) - P(v) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{(v-q)^2} = 0 \text{ dır.}$$

Bu eşitliğin sıfıra eşit olması için $u=v$ ya da

$u = -v$ olması gerekir.

$$u = v \text{ için } P(u) - P(v) = 0$$

$$u = -v \text{ için } P(u) - P(v) = 0$$

$[P(-v) = P(v)]$ P çift fonksiyon

$$\text{Buradan } u = v \Rightarrow u - v = 0$$

$$u = -v \Rightarrow u + v = 0 \text{ eşitlikleri elde edilir.}$$

$$\left. \begin{aligned} P(z) &= P(z+0) = P(z+u+v) \\ P(z) &= P(z+0) = P(z+u+v) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Bu eşitlikler $u-v$ ya da $u+v$ 'nin $P(z)$ 'nin bir periyodu olduğunu gösterir.

Tersine ispat için

$P(z) = P(z+u+v)$ olsun Yani $u-v$ ya da $u+v$ 'yi

$P(z) = P(z+u+v)$ $P(z)$ nin bir periyodu kabul edelim.

Bu durumda $P(z+u+v)-P(z)=0$ olmalıdır.

Bu fark yazılırsa

$$P(z+u+v) - P(z) = \frac{1}{(z+u+v)^2} - \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(z+u+v-q)^2} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{(z-q)^2} + \frac{1}{q^2} = 0$$

olmalıdır

$z=-v$ dönüşümü uygulayalım.

$$\underbrace{P(-v+u+v)}_{P(u)} - \underbrace{P(-v)}_{P(v)} = \frac{1}{(-v+u+v)^2} - \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(-v+u+v-q)^2} - \frac{1}{(v-q)^2} = 0$$

$$P(u) - P(v) = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{(v-q)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{q^2} = \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(v-q)^2} - \frac{1}{q^2}$$

$$P(u) = P(v) \text{ bulunur}$$

Aynı işlemi $z=v$ dönüşümü ile uygulayalım.

$P(z+u-v) - P(z) = 0$ kabul etmiştik

$$P(v+u-v) - P(v) = \frac{1}{(v+u-v)^2} - \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(v+u-v-q)^2} - \frac{1}{(v-q)^2} = 0$$

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{(v-q)^2} = 0 \text{ bulunur.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{u^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(u-q)^2} - \frac{1}{q^2}}_{P(u)} = \underbrace{\frac{1}{v^2} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ q \in \Omega}} \frac{1}{(v-q)^2} - \frac{1}{q^2}}_{P(v)} \text{ bulunur.}$$

ispatlanması gereken budur.

2. MODÜLER GRUP VE MODÜLER FONKSİYONLAR

2.1. MOBIUS DÖNÜŞÜMÜ

Bir önceki bölümde unimodüler dönüşümlerle karşılaşmıştık. $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$ denklemi $ad - bc = 1$ olmak üzere a, b, c, d ler tamsayıdır. Bu bölümde transformasyonları (dönüşümleri) daha ayrıntılı ve unimodüler dönüşümler altında invaryant olan $J(\tau)$ fonksiyonunu inceleyeceğiz.

a, b, c, d ler keyfi kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = (az+b)/(az+d) \quad (1)$$

daha genel dönüşümlerle çalışalım.

(1) denklemi $z=\infty$ ve $z= -d/c$ hariç $C^* = CU\{\infty\}$ genişletilmiş kompleks sayılar sisteminde $\forall z$ için $f(z)$ tanımlıdır. f in tanımı bütün C^* üzerine $f(-d/c) = \infty, f(\infty) = a/c$ yi tanımlayarak genişletelim. Öncelikle

$$f(w) - f(z) = \frac{(ad-bc)(w-z)}{(cw+d)(cz+d)} \quad (2)$$

denklemi $ad-bc = 0$ iken f in sabit olduğunu gösterir. Bu dejenere durumdan kaçınmak için $ad - bc \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Böyle bir rasyonel fonksiyona "*Mobius dönüşümü*" denir. $z=-d/c$ basit kutbu hariç C^* üzerinde her yerde analitiktir.

(2) denklemi ile gösterilen her Mobius dönüşümü C^* üzerinde 1-1'dir.

$f(z)$ 'nin terimleri z için (1) denkleminin çözümüdür.

$$\text{Öyle ki: } f: C^* \rightarrow C^* \quad z = \frac{df(z) - b}{-cf(z) + a} \quad \text{dır.}$$

f analitik olduğundan her bir noktada $f'(z) \neq 0$ dır. Bu yüzden f fonksiyonu $z= -d/c$ kutbu hariç her yerde komformdur.

Mobius dönüşümleri daireleri dairelere dönüştürür. (Doğrular; dairenin özel bir durumu gibi gözönüne alınır.) Bunu ispat etmek için A ve C reel olmak üzere

$$Az + \overline{Bz} + Bz + C = 0 \quad (3)$$

denklemini gözönüne alalım. Daire üzerindeki herhangi noktalar $A \neq 0$ koşulunu yerine getirecek şekilde bir denklem sağlar (3)'de z yerine $aw + b/cw + d$ yazılarak benzer şekilde $A'w + \overline{B'w} + \overline{B}w + C' = 0$ eşitliğini elde ederiz.

Burada A' ve C' reeldirler. Dolayısıyla her mobius dönüşümü bir daire veya doğruyu bir daireye veya doğruya dönüştürür.

Sıfırdan farklı sabit her a, b, c, d katsayıları ile çarpılan bir mobius dönüşümü değişmez aynı kalır. Bu yüzden $ad-bc=1$ kabul etmekle genelde bir kaybımız yoktur. (1) denklemindeki her mobius dönüşümü $ad-bc=1$ olacak şekilde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibi 2×2 'lik matrislerle ifade edilebilir. O zaman $\det A = ad - bc = 1$ dir. Eğer A ve B matrisleri, f ve g gibi mobius dönüşümleri ile gösterilirse AB çarpım matrisi $f \circ g$ bileşkesi ile ifade edilir. Burada $f \circ g(z) = f(g(z))$ dir.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matrisi dönüşümü ile $f(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$ ifade edilir. Ve f in

tersi olan $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ yı $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ters matrisi ile ifade edebiliriz. Böylece tüm mobius dönüşümlerinin kümesi $ad - bc = 1$ olan bir grup formundadır.

Bu bölüm a, b, c, d katsayıları tamsayı iken önemli bir alt grup ile ilgilidir.

2.2. Γ Modüler Grubu

a, b, c, d ler tamsayı ve $ad-bc = 1$ olmak üzere $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ formundaki bütün mobius dönüşümlerin kümesine "**modüler grup**" denir. Ve Γ ile gösterilir. Bu grup $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere $\det A = 1$ olacak şekilde 2×2 'lik tamsayı matrislerle ifade edilebilir ve ayrıca her bir matris bunun negatifiyle özdeştir. Dolayısıyla A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil eder. Genelde matris ve dönüşümü aralarında ayırım yapmayacağız. Yani eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ise $A \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ dir. Bu ilk teorem $T \cdot \tau = \tau + 1$ ve $S \cdot \tau = -1/\tau$ dönüşümleri ile Γ nın oluşturulduğunu gösterir.

Teorem 2.1: Γ modüler grubu $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ve $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile oluşur. Γ daki her A

$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots S T^{n_k}$ şeklinde açıklanabilir.

n_i tamsayılardır ve bu gösteriliş tek değildir.

İspat: Önce özel bir $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}$ problemini gözönüne alalım. A yı S ve T kuvvetlerini çarpımı olarak açıklayacağız. $S^2=I$ olduğundan S in birinci kuvveti aşağıda göz önüne alınan matris çarpımını meydana getirir.

$$A \cdot T^n = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4n+9 \\ 11 & 11n+25 \end{pmatrix} \text{ ilk olan}$$

değişmeden kalır. n in uygun bir seçimi ile $|11n+25| < 11$ alabiliriz.

Örneğin $n=-2$ alalım $11n+25=3$ ve $A.T^{-2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$ olur. Böylece T nin uygun bir kuvveti ile A yı çarparak $|d| < |c|$ koşulunu sağlayan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini alalım. Bu kez bulduğumuz bu ifadeyi S ile sağdan çarpalım.

$$(4) A.T^{-2} . S = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}$$

Bu işlemde iki kolon yerleştirir ve ikinci kolonun işareti de değiştirilir, tekrar T nin uygun bir kuvvet ile çarpıldığında bu bize $|d| < |c|$ olacak şekilde bir matris verir. Bu durumda ya T^4 yada T^3 ü kullanabiliriz. T^4 ü seçerek

$$A.T^{-2}.S.T^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bu ifadeyi } S \text{ ile sağdan çarparak}$$

bu ifadeyi S ile sağdan çarparak

$$A.T^{-2}.S.T^4.S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi T^3 ile çarpalım.

$$A.T^{-2}.S.T^4.S.T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S \text{ elde edilir.}$$

A için çözüm $A = ST^{-3} ST^{-4} ST^2$ bulunur.

Bu durumda $|d| < |C|$ koşulunu sağlayan T nin kuvveti birden fazladır. İspat için şunlar yeterlidir.

$c \geq 0$ olacak şekilde Γ da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dir.

C üzerinde tümevarım uygulanırsa $C = 0$ ise $ad=1$ 'dir. Öyle ise $a = d = \pm 1$ olur ve $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}$ Böylece A , T 'nin bir kuvvetidir. $c = 1$ ise $ad-b=1$ iken $b=ad-1$ olur. Ve

$$A = \begin{pmatrix} a & ad-1 \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^a.S.T^d \text{ olur.}$$

Teoremin herhangi $c \geq 1$ için sol taraftaki elemanlar $< c$ olacak şekildeki bütün A matrisleri için ispatlandığını kabul edelim. $ad-bc=1$ olduğundan $(c, d) = 1$ asaldırlar. c ve d ye bölme algoritması uygulanırsa $d = cq+r$ $0 < r < c$ olur. O zaman

$$A.T^{-q} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix}$$

$$A.T^{-a}.S = \begin{pmatrix} a & -aq+b \\ c & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aq+b & -a \\ r & -c \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

hipotezden dolayı son matrisi S ve T 'nin kuvvetlerinin çarpımıdır. Öyle ise A da böyledir. Bu ispat tamamlanır.

Lemma 1: Oranları reel olmayan ω_1' ve ω_2' verilsin. $\Omega = \{m \omega_1' + n \omega_2'; m, n \text{ tamsayı}\}$ olsun $ad-bc=1$ iken $\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}$ gibi (ω_1', ω_2') ye denk esas çifti vardır. Ve $|\omega_2| \geq |\omega_1|$, $|\omega_1 + \omega_2| \geq |\omega_2|$, $|\omega_1 - \omega_2| \geq |\omega_2|$ dir.

İSPAT: Orjinden artan uzaklıklara göre Ω nın elamanlarını bir dizi oluşturacak şekilde sıralayalım. Ve bunu $\Omega = \{0, w_1, w_2, \dots\}$ diyelim. $|w_n| = |w_{n+1}|$ ise $0 < |w_1| \leq |w_2| \leq \dots$ ve $\arg w_n < \arg w_{n+1}$ dir. $\omega = \omega_1$ ve ω_2, ω_1 in katı olmayacak şekilde bu dizinin ilk elemanı olsun. O zaman köşeleri $0, \omega_1, \omega_2$ olan üçgen köşeler hariç Ω nın hiçbir elemanını içermez. Böylece (ω_1, ω_2) , Ω kümesinde bir esas çifti. Bu yüzden $\begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix}$ olacak şekilde $ad-bc = \pm 1$ olan a, b, c, d tamsayıları vardır. $ad-bc = -1$ ise $c \rightarrow -c$, $d \rightarrow -d$, $\omega_1 \rightarrow -\omega_1$ alındığında aynı eşitlik elde edilir. Çünkü ω_1, ω_2 seçtiğimiz yoldan dolayı $|\omega_2| \geq |\omega_1|$ ve $|\omega_1 + \omega_2| \geq |\omega_2|$ dir. ω_1, ω_2 ler Ω da periyod olduklarından dizide ω_2 den sonra yer alırlar.

Teorem 2.2.: $\tau' \in H$ ise $|\tau| \geq 1$, $|\tau+1| \geq |\tau|$ ve $|\tau-1| \geq |\tau|$ olacak şekilde H de Γ altında τ' ye denk bir kompleks τ sayısı vardır.

İspat: $\omega_1' = 1$ ve $\omega_2' = \tau'$ olsun. Ve $\Omega = \{m + n\tau'; m, n \text{ tamsayı}\}$ periyodların kümesine lemma 1 i uygulayalım. O zaman $|\omega_2| \geq |\omega_1|$, $|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_2|$ olan ω_1, ω_2 esas çifti vardır. $\tau = \omega_2/\omega_1$ olsun.

O halde $ad-bc = 1$ ve $|\tau| \geq 1$, $|\tau \pm 1| \geq |\tau|$ iken $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau'$ dür.

Not: H deki $|\tau \pm 1| \geq |\tau|$ koşulunu sağlayan τ lar $|\tau + \bar{\tau}| \leq 1$ koşulunda sağlar.

Teorem 2.3.: $R_\Gamma = \{\tau \in H; |\tau| > 1, |\tau + \bar{\tau}| < 1\}$ açık kümesi Γ için bir esas bölgedir. Bundan başka $A \in \Gamma$ ve R_Γ da herhangi bir τ için $A\tau = \tau'$ ise $A = I$ dır. Diğer bir deyişle yalnız özdeş elemanlar R_Γ da sabit noktalara sahiptirler.

İspat: Teorem 2.2., $\tau' \in H$ ise Γ altında τ' ye denk R_Γ nin kapanışında bir τ noktası vardır. Γ altında, R_Γ nın farklı iki noktasının eşdeğer olmayacağını ispatlayalım. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olmak üzere $\tau' = A\tau$ olsun. İlk önce $c \neq 0$ ve $\tau \in R_\Gamma$ ise $\text{Im}(\tau') < \text{Im}(\tau)$ olduğunu gösterelim.

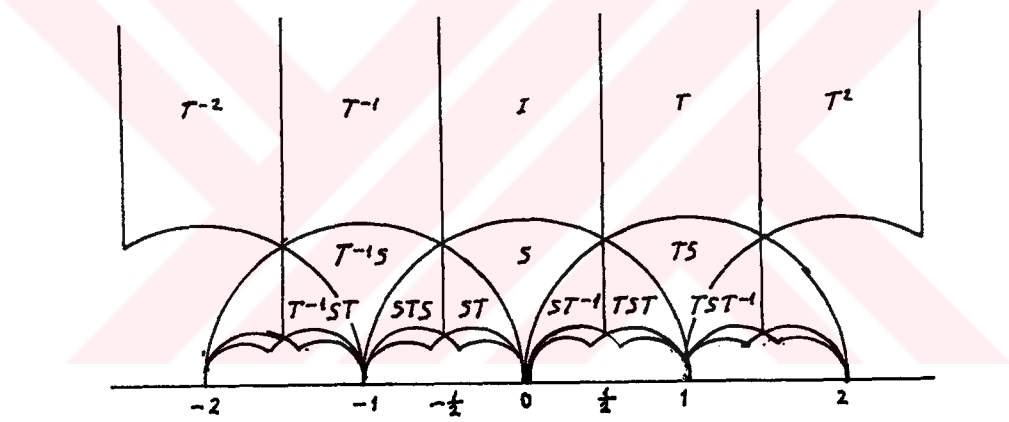
$$\text{Im}(\tau') = \frac{\text{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2} \quad \text{alındığında } \tau \in R_\Gamma \text{ ve } c \neq 0 \text{ ise}$$

$$|c\tau+d|^2 = (c\tau+d)(c\bar{\tau}+d) = c^2.\tau.\bar{\tau} + cd(\tau+\bar{\tau}) + d^2 > c^2 - |cd| + d^2 \text{ dir.}$$

$d = 0$ ise $|c\tau + d|^2 > c^2 \geq 1$ bulunur.

$d \neq 0$ ise $c^2 - |cd| + d^2 = (|c| - |d|)^2 - |cd| \geq |cd| > 1$ olduğundan yine $|c\tau + d|^2 > 1$ bulunur. Bu yüzden $c \neq 0$ $|c\tau + d|^2 > 1$ i gerektirir ve buradan $\text{Im}(\tau') < \text{Im}(\tau)$ dur. Diğer bir deyişle $c \neq 0$ olan Γ nın her A elemanı R_Γ da herbir τ noktasının ordinatını azaltır.

Şimdi τ ve τ' , R_Γ ya ait eşdeğer iki nokta olduğunu varsayalım. O zaman $ad=1$, $a=d=\pm 1$ olduğundan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = T^{\pm b}$ olur. Bu yüzden $c=0$ dır. Fakat τ ve τ' nün her ikisinde R_Γ da olduğundan $b=0$ dır. Böylece $\tau=\tau'$ dır. Bu Γ altında R_Γ nın farklı iki noktasının eşdeğer olmayacağını ispat eder. Sonuçta $A\tau=\tau'$ ise argümanlar aynı olduğundan $c=0$, $a = d = \pm 1$ dir. O halde $A=I$ olur. Bu R_Γ da yalnız özdeş elemanların sabit noktalarının olduğunu ispatlar.



Şekil 2.2

Şekil 2.2, R_Γ esas bölgesini ve onun modüler grup dönüşümü altında görüntüsünü gösterir. Γ nın her bir elemanı daireleri dairelere dönüştürür. (Doğrular, dairelerin özel bir halidir)

R_Γ eğrilerinin sınırları reel eksenine dik dairelerdir.

Γ nın f elemanları altında her $f(R_\Gamma)$ görüntüsü içinde aynı şey doğrudur. Bütün $f(R_\Gamma)$ görüntülerinin kümesi, $f \in \Gamma$, H nin hepsini örter.

2.4. MODÜLER FONKSİYONLAR

Bir f fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlarsa "**modülerdir**" denilir:

1) f, H üst yarı düzlede meromorftur.

2) Γ modüler grubu altında her A için $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $f(A\tau)=f(\tau)$ dur.

3) f , fonksiyonu $f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{(n)} \cdot e^{2\pi i n \tau}$ şeklinde fourier açılımına sahiptir.

1° özelliğinde f , H üst yarı düzlemindeki kutuplar hariç H de analitiktirler.

2° özelliğinde f , Γ nın tüm dönüşümleri altında invaryanttır.

3° özelliğinde f in $\tau=i\infty$ noktasındaki durumunu inceleyen bir kuraldır.

Eğer $x=e^{2\pi i \tau}$ ise 3° deki fovruer serisi x in kuvvetlerinin bir lavrent açılımıdır. f in $i\infty$ daki durumu O civarında bir lavrent açılımı olarak tanımlanmıştır. Eğer $M>0$ ve $a(-M)\neq 0$ ise o zaman f in $i\infty$ daki M mertebeli bir kutbu olduğunu söyleriz. Eğer $M = 0$ ise f , $i\infty$ da analitiktir deriz.

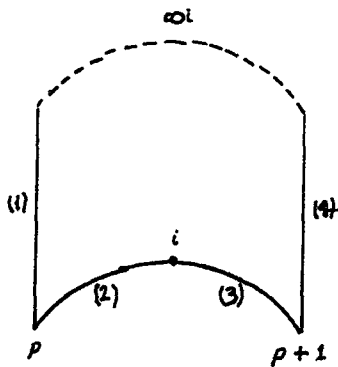
3° koşulu ile f , $i\infty$ da n mertebeli bir kutba sahiptir. J fonksiyonu bir modüler fonksiyondur. Bu fonksiyon bir birinci mertebeden kutbu $i\infty$ olacak şekilde H de analitiktir. Daha sonra her modüler fonksiyonun J nin bir rasyonel fonksiyonlarının aşağıdaki özelliklerine bağlıdır.

Teorem 2.4: f modüler ve eşdeğer olarak sıfırdan farklı ise o zaman R_T esas bölgesinin kapanışında f in sıfırlarının sayısı kutup noktalarının sayısına eşittir.

Not: Bu teorem sadece R_T nın sınır noktalarında uygun koşullarda geçerlidir. Hepsinden önce ρ , i , $\rho+1$ ve $i\infty$ köşelerinde kesişen dört kenarın birleşimi olarak R_T nın sıfırlarını gözönüne alalım. Burada $\rho = e^{2\pi i/3}$ tür. Kenarlar (1),(4) ve (2),(3) eşdeğer çiftlerinden meydana gelir. Eğer f in kenarlar üzerindeki bir noktada sıfır veya kutbu varsa o zaman yine eşdeğer kenarlar üzerindeki eşdeğer noktalarda bir sıfıra yada kutba sahiptir.

Sadece (1) veya (2) kenarları üzerindeki noktalar R_T ya ait olarak alınacaktır. ρ köşesindeki sıfır veya kutubun mertebesi 3 ile bölünebilir. i deki mertebe 2 ile bölünebilir. $i\infty$ daki mertebe $x=e^{2\pi i \tau}$ değişkeni ile verilen $x=0$ daki kutbu veya sıfırlarının mertebesidir.

İspat:

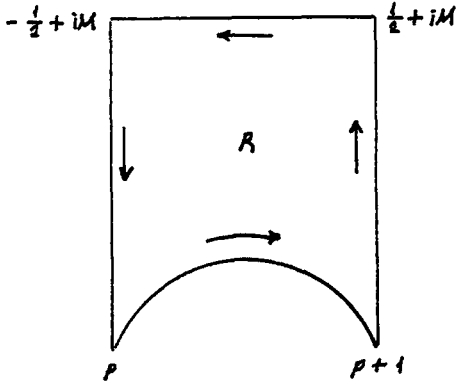


(Şekil 2.3)

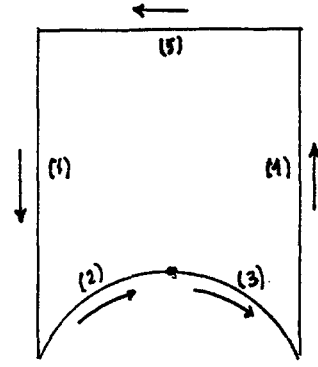
Öncelikle R_T nın sınırının sonlu bir parçası üzerinde f in sıfıra veya kutba sahip olmadığını varsayalım. R_T yı bir yatay çizgi ile keselim $\text{Im}(\tau) = M$ burada $M > 0$ dır. f in bütün sıfırları ve kutupları kesilmiş bölgenin içinde kalacak şekilde geniş alınmıştır. (Bu bölgeye R diyeceğiz) (Eğer f in R_T da sonsuz sayıda kutbu varsa onlar $i\infty$ da bir yığılma noktasına sahiptirler bu ise (3°) koşuluna aykırıdır. Benzer olarak f eşdeğer, sıfırdan farklı olduğundan f in R_T daki sıfırlarının sayısı sonsuz olamaz)

∂R kesilmiş bölgenin sınırlarını gösterebiliriz P ve N, R nin içindeki f in sırasıyla kutuplarının ve sıfırlarının sayısını gösterebiliriz.

$$N-P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \{ \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4 + \int_5 \} \quad \text{vardır.}$$



Şekil 2.4



Şekil 2.5

Şekil 2.5 de görüldüğü gibi yol 5 parçaya ayrılmıştır

(1) ve (4) boyunca alınan integraller periyodiklikten dolayı sadeleşir.

(2) ve (3) boyunca alınan integraller periyodiklikten dolayı sadeleşir.

(3) üzerinde $u = S(\tau) = -1/\tau$ veya $\tau = S^{-1}u = S(u)$ dur.

$f[S(u)] = f(u)$, $f[S(u)] S'(u) = f(u)$ olduğundan integraller değişmez.

$$\text{Öyle ise } \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d(\tau) = \frac{f'[S(u)] S'(u) du}{f[S(u)]} = \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad \text{dur.}$$

$$\text{Böylece } N-P = \frac{1}{2\pi i} \int_5 \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau \quad \text{kalır.}$$

Bu integrali $x = e^{2\pi i \tau}$ olarak x düzlemine dönüştürelim. Yatay kısımda τ değişkeni $\tau = u + iM$ $-1/2 \leq u \leq 1/2$, $x = e^{2\pi i(u+iM)} = e^{-2\pi i M} \cdot e^{2\pi i u}$ dur. Öyle ise negatif yönde $x=0$ civarında $e^{-2\pi i M}$ yarıçaplı bir K dairesi etrafında x , birkez değişir. Bu üst kısım üzerindeki noktalar K nin içindedir. O halde f in K da sıfır ve kutupları $x=0$ da mümkün olanlar hariç, yoktur.

$$f'(\tau) = F'(x) \frac{dx}{d\tau} \quad \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{F'(x)}{F(x)} dx \quad \text{ile fourier açılımı bize}$$

$$f(\tau) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \dots = F(x) \quad \text{i verir. Buradan}$$

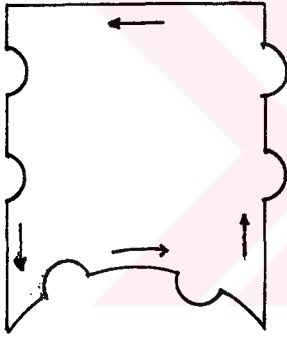
$$N-P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F'(x)}{F(x)} dx = -(N_F - P_F) = P_F - N_F \text{ dir.}$$

N_F ve P_F , K içindeki sıfır ve kutupların sayıdır. $x=0$ da m . mertebeden bir kutbu varsa o zaman $M > 0$, $N_F = 0$, $P_F = m$ öyle ise

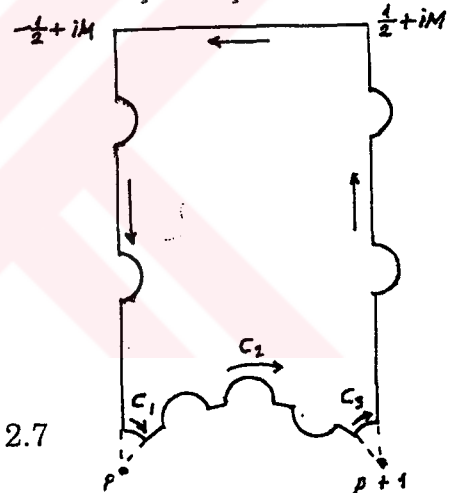
$$P_F - N_F = m \text{ ve } N = P + m \text{ dir.}$$

Bu yüzden f , R_T da ∞ değerini aldığı kadar sıfır değerini de alır. $x = 0$ da n . mertebeden bir sıfırı varsa $m = -n$, $P_F = 0$, $N_F = n$ olduğundan $N+n=P$ dir. Yine f , R_T da ∞ değerini aldığı kadar sıfır değerini de alır.

Eğer f in R_T nın sınırının sonlu bir kısmında sıfır ve kutbu yoksa bu teoremi ispatlar. Eğer f in köşeler dışında bir kenarda sıfır ve kutbu yoksa R nin içindeki sıfır ve kutupları kapsayan integrasyon yolunu Şekil 2.6 da gösterildiği gibi yeniden ele alacağız. Eşdeğer kenarlar boyunca integralleri sadeleştirmiştik.



Şekil 2.6



Şekil 2.7

R_T nın kapanışına ait olarak gözönüne alınan eşdeğer sıfır veya kutup noktalarında yalnız biri bizim için uygun olduğundan sadece yeni sıfır ve kutuplarının her bir çiftinin bir elemanı yeni bölge içindedir. Ve önceki gibi ispatlanır.

Eğer f in p veya i köşesinde bir sıfır veya kutbu varsa şekil 2.7 deki gibi gösterilen yeni açık yollarla integrasyon yolunun başka bir şeklini alabiliriz. Aynı düşünceyle $x = 0$, $x = e^{2\pi i \tau}$ yakınında laurent açılımında x^{-m} , x in en küçük kuvveti ile

$$N-P = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{c_1} + \int_{c_3} + \int_{c_2} + \int_{1/2+iM}^{-1/2+iM} \right\} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{c_1} + \int_{c_3} + \int_{c_2} \right\} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau + m \quad \text{buluruz.}$$

ρ köşesi yakınında $f(\tau) = (\tau - \rho)^k \cdot g(\tau)$, $g(\rho) \neq 0$ yazarız. Eğer f in ρ da bir sıfırı varsa k üssü pozitifdir. Ve f in ρ da bir kutbu varsa negatiftir. C_1 yolunda r sabit ve α , r ye bağlı olmak üzere $\tau - \rho = r e^{i\theta}$ yazılır. Buradan $\alpha \leq \theta \leq \pi/2$ için

$$\frac{f(\tau)}{f(\tau)} = \frac{k}{\tau - \rho} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \quad \text{ve} \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \text{ile}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pi/2}^{\alpha} \left(\frac{k}{r \cdot e^{i\theta}} + \frac{g'(\rho + r \cdot e^{i\theta})}{g(\rho + r \cdot e^{i\theta})} \right) r \cdot e^{i\theta} \cdot i \cdot d\theta$$

$$= \frac{-k\alpha'}{2\pi} + \frac{r}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \left(\frac{g'(\rho + r \cdot e^{i\theta})}{g(\rho + r \cdot e^{i\theta})} \right) d\theta \quad \text{dır.}$$

$r \rightarrow 0$ a giderken son terim sıfır olacağından integral sınırlıdır.

$$\alpha' \rightarrow \pi/3, \quad r \rightarrow 0 \quad \text{iken} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{-k}{6} \quad \text{dır.}$$

$h(i) \neq 0$ iken $f(\tau) = (\tau - i)^l h(\tau)$,

$$\text{Benzer şekilde} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{-k}{6} \quad \text{öyle ise}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{c_1} + \int_{c_3} \right) \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{-k}{3}$$

Aynı şekilde i köşesi yakınında $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_2} \frac{f(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{\ell}{2}$ olur. Böylece

$N - P = m - \frac{k}{3} - \frac{\ell}{2}$ formülünü elde ederiz. Eğer f , $x = 0$ da bir kutba sahip ise ve ρ ve i deki sıfırlar m , k ve ℓ pozitif olduğundan $N + \frac{k}{3} + \frac{\ell}{2} = P + m$ dir.

Soldaki eleman R_T kapanışında f lerin sıfır sayılarını (dikeylerde birleşen toplamalarla) ve sağdaki eleman kutupların sayısını belirler.

Eğer f in $x = 0$ da n . mertebeden bir sıfırı varsa $m = -n$ ve denklem $N + n + \frac{k}{3} + \frac{\ell}{2} = P$ olur. Benzer şekilde f , ρ da bir kutba sahip ise veya i deki $k/3$ veya $\ell/2$ ye karşılık gelen terim negatif ise P ile eşdeğerdir. Bu ispatlı tamamlar.

Teorem 2.5: Eğer f modüler ve sabit olmayan bir fonksiyon ise her $c \in \mathbb{C}$ için $f-c$ fonksiyonunun R_T daki sıfırlarının sayısına eşittir.

İspat: $f - c$ ye teorem uygulanır.

Teorem 2.6: Eğer $f \in H$ üst yarı düzleminde modüler ve sınırlı fonksiyon ise sabittir.

İspat: f sınırlı olduğundan onun bir değeri atılır ve f sabit olur.

2.5 J NİN ÖZEL DEĞERİ

Teorem 2.7: R_T kapanışında J fonksiyonu her değeri tam bir kez alır. Özellikle tepelerde $J(\rho) = 0$, $J(i) = 1$ olur. $i\infty$ da tek katlı bir kutbu vardır ve ρ da bir üç katlı sıfırı $\tau = i$ de $J(\tau)-1$, bir iki katlı sıfırı vardır.

İspat: İlk önce $g_2(\rho) = 0$ ve $g_3(i) = 0$ olduğunu kanıtlarız.

$\rho^3 = 1$ ve $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{60} g_2(\rho) &= \sum_{m,n} \frac{1}{(m+np)^4} = \sum_{m,n} \frac{1}{(m\rho^3+np)^4} = \frac{1}{\rho^4} \sum_{m,n} \frac{1}{(m\rho^2+n)^4} \\ &= \frac{1}{\rho} \sum_{m,n} \frac{1}{(n-m-m\rho)^4} = \frac{1}{\rho} \sum_{M,N} \frac{1}{(N+Mp)^4} = \frac{1}{60\rho} g_2(\rho) \end{aligned}$$

böylece $g_2(\rho) = 0$ dır

benzer bir düşünceyle $g_3(i) = 0$ olduğunu gösteririz. Bu yüzden

$$J(\rho) = \frac{g_2^3(\rho)}{\Delta(\rho)} = 0 \quad \text{ve} \quad J(i) = \frac{g_2^3(i)}{g_2^3(i)} = 1 \quad \text{dir.}$$

2.6 J NİN RASYONEL FONKSİYONLARI OLARAK MODÜLER FONKSİYONLAR

Teorem 2.8: J nin her bir rasyonel fonksiyonu bir modüler fonksiyondur. Buna mukabil her modüler fonksiyonu J nin bir rasyonel fonksiyonu olarak gösterilebilir.

İspat: İlk kısım açıktır. İkinci kısmın ispatı için f in $z_1, \dots, z_n$ sıfırları ve

$$12^3 \cdot J(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} C(n) \cdot x^n, \quad x = e^{2\pi i \tau}$$

$J(iv)$ nin reel olduğunu gösterir.

$v \rightarrow \infty$ iken $J(i) = 1$ ve $J(iv) \rightarrow \infty$ olduğu için imajiner eksenlerin oranı $1 \leq v < +\infty$ reel ekseninde $1 \leq J(\tau) < \infty$ olarak düzenlenir. R_T nin sol sınırı üzerinde $\tau = -1/2 + iv$ buradan $x = e^{2\pi i \tau} = e^{-2\pi v} \cdot e^{-\pi i} = -e^{-2\pi v} < 0$ dır.

Büyük v , küçük x için $J(-1/2 + iv) < 0$ dır. Öyleki J , $u = -1/2$ doğrusunu negatif reel eksen üzerine dönüştürür. Buradan $J(\rho) = 0$ ve $J(\infty) = 0$ olur.

R_T nin sol sınırı $-\infty < J(\tau) \leq 0$ doğrusu üzerine dönüşür. R_T nin sınırları, solda uzanan R_T nin içindeki saat yönünün tersindeki noktaların içinden geçtiği için imajiner noktalar, imajiner düzlemdeki reel eksen üzerine uzanır.

Son olarak J nin imajiner eksene simetrik noktalarda eşlenik değerler aldığını görürüz ki bu $J(\tau) = \overline{J(-\tau)}$ dir. Bunu görmek için $\tau = u + iv$ yazalım ve buradan

$$x = e^{2\pi i \tau} = e^{2\pi i(u+iv)} = e^{-2\pi v} \cdot e^{2\pi i u} \quad \text{ve}$$

$$\overline{x} = e^{-2\pi v} \cdot e^{-2\pi i u} = e^{2\pi i(-u+iv)} = e^{-2\pi i \tau} \quad \text{dir.}$$

Böylece τ ve $-\bar{\tau}$, x ve $\bar{x}$ eşlenik noktalarına eşlenir. Fakat J için fourier serisi reel katsayılar alır. $J(\tau)$ ve $J(-\bar{\tau})$ kompleks eşleniklerdir. Özellikle $\tau\bar{\tau} = 1$ dairesel yayı üzerinde $-\bar{\tau} = \frac{1}{\tau}$ buradan $J(-\tau) = J(-\frac{1}{\tau}) = J(\tau)$ dur. Öyle ise bu yay üzerinde reeldir.

2.8 EISENSTEIN SERİLERİ İÇİN İNVERSİYON PROBLEMİNE UYGULAMA

Weierstrassın eliptik fonksiyon teorisinde ω_1 ve ω_2 peryodları g_2 ve g_3 invariantlarını

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^4}$$

$$g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^6}$$

eşitliklerine göre belirler.

Esas problem g_2 ve g_3 invariantlarının verilen sabit değerleri alıp olmayacaklarına karar vermektedir. (Yalnız $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ gerek koşuluna bağlı olarak)

Bu Eisenstein serileri için inversiyon problemi olarak adlandırılır. (4) Eşitlikleri g_2 ve g_3 ün terimlerinde ω_1 ve ω_2 için çözdüğümüzde aşağıdaki teoremin bu çözümü verdiği görülür.

Teorem 2.9: Verilen a_2 ve a_3 kompleks sayıları için

$a_2^3 - 27a_3^2 \neq 0$ olsun. O halde oranları reel olmayan ω_1 ve ω_2 kompleks sayıları vardır.

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = a_2 \quad \text{ve}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = a_3 \quad \text{tür.}$$

İspat: Üç durumu gözönüne alalım.

$$(1) a_2 = 0$$

$$(2) a_3 = 0$$

$$(3) a_2 a_3 = 0$$

1° durum için; eğer $a_2 = 0$ ise $a_3 \neq 0$ dır. $a_2^3 - 27a_3^2 \neq 0$ dan ω_1 herhangi bir kompleks sayı olmak üzere $\omega_1^6 = \frac{g_3(1, \rho)}{a_3}$ ve $\omega_2 = \rho \omega_1$ olsun. Burada $\rho = e^{2\pi i/3}$ tür. $g_3(1, \rho) \neq 0$ olduğunuda biliyoruz.

$$g_2(1, \rho) = 0 \text{ ve } \Delta(1, \rho) = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0 \text{ dır. Buradan}$$

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = g_2(\omega_1, \omega_1 \rho) = \frac{1}{\omega_1^4} g_2(1, \rho) = 0 = a_2 \text{ ve}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = g_3(\omega_1, \omega_1 \rho) = \frac{1}{\omega_1^6} g_3(1, \rho) = a_3 \text{ olur.}$$

2°. durum için; eğer $a_3 = 0$ ise $a_2 \neq 0$ dır ve ω_1 sağlarız $\omega_1^4 = \frac{g_2(1, i)}{a_2}$ ve $\omega_2 = i \omega_1$ olur. Buradan

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = g_2(\omega_1, i \omega_1) = \frac{1}{\omega_1^4} g_2(1, i) = a_2 \text{ ve}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = g_3(\omega_1, i \omega_1) = \frac{1}{\omega_1^6} g_3(1, i) = 0 = a_3 \text{ tür.}$$

3° durum için; $a_2 \neq 0$ ve $a_3 \neq 0$ olsun. $\text{Im}(\tau) > 0$ olan bir τ kompleks sayısı seçelim, $J(\tau) = \frac{a_2^3}{a_2^3 - 27a_3^2}$ ve $J(\tau) \neq 0$ olduğundan $a_2 \neq 0$ dır. ve

$$\frac{J(\tau) - 1}{J(\tau)} = \frac{27 a_3^2}{a_2^3} \quad \text{gibidir.} \quad (5)$$

Bu τ seçimi için $\omega_1^2 = \frac{a_2^2}{a_3^2} \cdot \frac{g_3(1,\tau)}{g_2(1,\tau)}$ yu sağlar. Ve $\omega_2 = \tau \omega_1$ olur.

Buradan

$$\frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{\omega_1^{-4} \cdot g_2(1, \tau)}{\omega_1^{-6} \cdot g_3(1, \tau)} = \omega_1^2 \cdot \frac{g_2(1, \tau)}{g_3(1, \tau)} = \frac{a_2}{a_3} \quad \text{öyleki}$$

$$g_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{a_3}{a_2} g_2(\omega_1, \omega_2) \quad (6)$$

$$\frac{J(\tau) - 1}{J(\tau)} = \frac{27 g_3^2(\omega_1, \omega_2)}{g_2^3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{27 (a_3/a_2)^2 \cdot g_2^2(\omega_1, \omega_2)}{g_2^3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{27 a_3^2}{a_2^2 \cdot g_2(\omega_1, \omega_2)}$$

alınarak (5) denklemini ile karşılaştırıldığında $g_2(\omega_1, \omega_2) = a_2$ olduğunu ve bu yüzden (6) ile $g_3(\omega_1, \omega_2) = a_3$ olduğunu buluruz. Bu ispat tamamlanmış olur.

2.9. PİCARD TEOREMİNE UYGULAMA

J modüler fonksiyonu kompleks düzlem üzerinde Pıcard'ın ünlü teoreminin kısa bir ispatını göstermek için kullanılabilir.

Teorem 2.10: Her sabit olmayan tam fonksiyon bir kompleks değer hariç her değerini alır.

Not: Örnek olarak $f(z) = e^z$ üstel fonksiyonu 0 değerini almaz.

İspat: f , (a ve b) gibi 2 değerini almayan bir tam fonksiyon olarak düşünelim. $a \neq b$ ve f in sabit olduğunu gösterelim. $a \neq b$ $g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$ olsun. O halde g tamdır. Ve 0 ve 1 değerini almaz.

H üst yarı düzlemi Γ dönüşümleri altında R_Γ nın esas bölgesinin görüntüsüyle örtülüdür. Buradan J , R_Γ yı kompleks düzleme dönüştürdüğünden J , H üst yarı düzlemini 0, 1, ∞ dallanma noktalarını sonsuz yapraklı Riemann yüzeyini R_Γ ya dönüştürür. Buradan $J'(\tau) \neq 0$ dir. Eğer $\tau \neq \rho$ veya $\tau \neq i$ ise $J'(\rho) = J'(i) = 0$ dir. Her J^{-1} in tek değerli dalı $J(\rho) = 0$, $J(i) = 1$ ve $J(\infty) = \infty$ hariç her yerde lokal analiktir. J^{-1} in her tek değerli dalı için bileşke fonksiyon

$$h(z) = J^{-1} [g(z)]$$

tek değerli fonksiyon elemanıdır. Burada $g(z)$ asla 0 ve 1 olmadığından her sonlu z de analiktir. Bu yüzden h her sonlu z düzleminde keyfi süreklidir.

Monodramy teoreminden her z düzleminde h nin sürekliliği tek değerli analitik bir fonksiyon olarak vardır. Böylece $h(z) = e^{ih(z)}$ de tam bir fonksiyondur.

Fakat $h(z) \in H$ olduğundan $\text{Im}(z) > 0$ dir. Öyle ise $|h(z)| = e^{-\text{Im}(z)} < 1$ dir.

Bu yüzden h , Liouville Teoremine göre bir sınırlı tam fonksiyondur. Sabit olmalıdır.

Fakat g sabit olduğundan $g(z) = J[h(z)]$ dir. O halde h de sabittir.

$f(z) = a + (b-a) g(z)$ olduğundan f sabittir.



Bölüm 2: Modüler fonksiyonlara ait örnekler

$$1^{\circ) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \quad ad - bc = 1$$

$$A(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$\text{Süstitüsyonlar } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\tau) = \tau + 1 \quad S(\tau) = \frac{-1}{\tau}$$

a) $A = S$ ile hesaplanırsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olup } |A| = 1 \text{ dir.}$$

b) $A = ST$ ile hesaplanırsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ olup } |A| = 1 \text{ dir.}$$

2) $(ST)^n = I$ olması için gerekli en küçük n tamsayısı nedir?

$n = 1$ için

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}$$

$n = 2$ için

$$(ST)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$n = 3$ için

$$(ST)^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur Buradan

$(ST)^n = I$ eşitliğini sağlayan en küçük n tamsayısı 3 dür.

$$3^{\circ}) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |A| = 1, A^{-1}(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

olmak üzere i 'yi sabit bırakan tüm A matristerini belirleyin.

Burada i 'yi sabit bırakan tüm A matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} ai & b \\ c & -di \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -ai & b \\ c & di \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a & -bi \\ ci & d \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a & bi \\ -ci & d \end{bmatrix} \quad |A| = ad - bc = 1$$

biçimindedir.

$$4^{\circ}) A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad |A| = 1 \quad A(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

olmak üzere $g = e^{2\pi i/3}$ ü sabit bırakan tüm A matrislerini belirleyin.

Çözüm: A matrislerini bulmadan önce

$$\rho = e^{2\pi i/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \cos 120 + i \sin 120 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

yazabiliriz.

Şimdi A matrisleri yazılırsa

$$A = \begin{bmatrix} a \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & b \\ c & d \left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$|A| = ad \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3}{4} \right) - bc = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & b \\ c & d \left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$|A| = ad \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3}{4} \right) - bc = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a & d \left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ c \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & d \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3}{4} \right) = ad - bc = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a & d \left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ c \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) & d \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$|A| = ad - bc \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3}{4} \right) = ad - bc = 1 \quad \text{şeklindedir.}$$



Soru:

$J(i) = 1$ ve $J(\frac{\pm 1 + \sqrt{3} i}{2}) = 0$ olduğundan gösteriniz.

Buradan $J(\tau)$, Klein 'nin modüler $J(\tau)$ fonksiyonudur.

Cevap:

a) $J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$ olduğu bilinmektedir.

$J(\tau) = J(i) \Rightarrow \tau = i$ dir.

$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ (ω_1 ve ω_2 oranları reel olayan iki period)

$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \omega_2 = i \cdot \omega_1$

$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$ idi.

$P(z)$ fonksiyonu bağlı bulunduğu z ve ω sembollerini kullanarak,

$\omega = m \omega_1 + n \omega_2$ olduğundan

$P(z; \omega_1, \omega_2)$ şeklinde yazabiliriz.

$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{(\lambda z - (m\lambda \omega_1 + n\lambda \omega_2))^2} - \frac{1}{(m\lambda \omega_1 + n\lambda \omega_2)^2} \right]$

$= \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{\lambda^2 (z - \omega)^2} - \frac{1}{\lambda^2 \omega^2} \right]$

$= \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{\omega \neq 0} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$

$= \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \right]$

$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot P(z; \omega_1, \omega_2)$

şeklindedir. Bu da $P(z; \omega_1, \omega_2)$ nin homojenliğini gösterir.

Burada $\lambda = i$ yazarsak

$$P(iz; i \omega_1, i \omega_2) = \frac{1}{i^2} P(z; \omega_1, \omega_2) = -P(z; \omega_1, \omega_2) \text{ olur.} \quad (1)$$

$$\omega_2 = i \omega_1 \text{ idi. } \Rightarrow i \omega_2 = i.i.\omega_1 = -\omega_1 \text{ olur.}$$

$$P(iz; i \omega_1, i \omega_2) = P(iz; i \omega_1, -\omega_1) \text{ olur.}$$

$= P(iz; \omega_2, -\omega_1)$ dir. ω_1 peryot olduğundan $-\omega_1$ de peryottur. Bu ifadede $-\omega_1$ yerine ω_1 yazılırsa

$$P(iz; i \omega_1, i \omega_2) = P(iz; \omega_2, \omega_1) = P(iz; \omega_1, \omega_2) \text{ elde edilir.}$$

Bu son ifade ile (1) ifadesinin sol tarafı aynı olduğundan

$$-P(z; \omega_1, \omega_2) = P(iz; \omega_1, \omega_2) \text{ olur. Buradan da}$$

$$-P(z) = P(iz) \text{ yazılabilir. } P(z)\text{'nin Larent açılım}$$

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + 3 G_4 z^2 + 5 G_6 z^4 + \dots \text{ dır.}$$

$$g_2 = 60 G_4 \Rightarrow G_4 = \frac{g_2}{60} ; g_3 = 140 G_6 \Rightarrow G_6 = \frac{g_3}{140} \text{ yazılırsa}$$

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \text{ olur.} \quad (2)$$

$$P(iz) = -\frac{1}{z^2} - \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \quad (3)$$

$$-P(z) = P(iz) \Rightarrow P(iz) + P(z) = 0 \quad (2) \text{ ve } (3) \text{ burada yerine yazılırsa}$$

$$\left[-\frac{1}{z^2} - \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \right] + \left[\frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \right] = 0$$

Sağ tarafta z^4 lü terim olmadığı için $g_3 = 0$ olmalıdır.

$$g_3 = 0 \text{ ise } J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} \Rightarrow J(i) = \frac{(g_2^3)_i}{(g_2^3)_i} = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\text{b) i) } \frac{1 + \sqrt{3} i}{2} = \lambda \quad \text{diyelim.} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau \quad \text{idi.}$$

$$\tau = \frac{1 + i \sqrt{3}}{2} \quad \text{olduğuna göre} \quad \omega_2 = \lambda \omega_1 \quad \text{dir.}$$

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_2) \quad \text{olur. (a) şikkındaki gibi}$$

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \frac{1}{\lambda^2} P(z; \omega_1, \omega_2) \quad \text{dir. (P(z)'nin homogenliğinden dolayı)}$$

Bu son iki eşitlikten;

$$\begin{aligned} P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) &= \frac{1}{\lambda^2} P(z; \omega_1, \omega_2) \quad \text{yazılır. Ayrıca } \frac{1}{\lambda^2} = -\lambda \quad \text{olduğundan} \\ &= -\lambda \cdot P(z; \omega_1, \lambda \omega_1) \quad \text{olur. (4)} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 = \lambda - 1 \quad \text{olduğundan } \lambda^2 \omega_1 \text{ yerine } \lambda \omega_1 - \omega_1 \text{ yazılabilir.}$$

$$\text{O halde } P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) = P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_1 - \omega_1) \quad \text{olur.}$$

$$= P(\lambda z; \lambda \omega_1 - \omega_1, \lambda \omega_1) \quad \text{dir.}$$

$\lambda \omega_1 - \omega_1 = (\lambda - 1)\omega_1$ peryot olduğundan $(1 - \lambda)\omega_1 = \omega_1 - \lambda \omega_1$ ve dolayısıyla ω_1 de peryottur.

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) = P(\lambda z; \omega_1, \lambda \omega_1) \quad \text{olur.} \quad (5)$$

(4) ve (5) 'den

$$P(\lambda z) = -\lambda P(z) \quad \text{elde ederiz.}$$

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \dots \quad \text{şeklinde P(z) 'nin larent açılımı yazılabilir.}$$

$$P(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \frac{g_2}{20} \lambda^2 z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda^4 z^4 + \dots \quad \lambda^2 = -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2} = -\lambda$$

$$P(\lambda z) = -\lambda \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) z^2 + \frac{g_3}{28} (-\lambda) z^4 + \dots$$

$$P(\lambda z) = -\lambda P(z) \Rightarrow \lambda P(z) + P(\lambda z) = 0 \quad \text{Buradan yerlerine yazarsak}$$

$$\left[\frac{\lambda}{z^2} + \frac{g_2}{20} \lambda z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \right] + \left[-\frac{\lambda}{z^2} - \frac{g_2}{20} \cdot \frac{z^2}{\lambda} - \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \right] = 0$$

Sağ tarafta z^2 'nin katsayısı sıfır olduğundan

$$\frac{g_2}{20} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \equiv 0 \quad \text{dır} \quad \lambda - \frac{1}{\lambda} \neq 0 \quad \text{olduğu için} \quad g_2 = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

$$\text{Bu durumda} \quad J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} \bigg|_{\tau = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad \text{çıkar.}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \lambda \quad \text{diyelim.} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \lambda \omega_1$$

olur. Aynen (i) şıkkındaki gibi düşünerek;

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1)$$

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_2) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot P(z; \omega_1, \omega_2) \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{\lambda} \quad \text{olduğu için}$$

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) = \lambda \cdot P(z; \omega_1, \lambda \omega_1) \quad \text{yazılır.} \quad (6)$$

$$\lambda^2 = -\lambda - 1 \quad \text{olduğundan} \quad \lambda^2 \omega_1 = -\lambda \omega_1 - \omega_1 \quad \text{olur ve}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) &= P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda \omega_1 - \omega_1) \\ &= P(\lambda z; -\lambda \omega_1 - \omega_1, \lambda \omega_1) \\ &= P(\lambda z; -\omega_1 - \lambda \omega_1, \lambda \omega_1) \\ &= P(\lambda z; \omega_1 + \lambda \omega_1, \omega_1) \end{aligned}$$

$$P(\lambda z; \lambda \omega_1, \lambda^2 \omega_1) = P(\lambda z; \omega_1 + \lambda \omega_1) = P(\lambda z; \omega_1, \omega_2) \quad \text{olur.} \quad (7)$$

$$(6) \text{ ve } (7) \text{ den } P(\lambda z) = \lambda P(z) \Rightarrow P(\lambda z) - \lambda P(z) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$$P(\lambda z) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} + \frac{g_2}{20} \lambda^2 z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda^4 z^4 + \dots \quad \text{dir.}$$

$$\lambda P(z) = \frac{\lambda}{z^2} + \frac{g_2}{20} \lambda z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \quad \text{dür.}$$

$$P(\lambda z) - \lambda P(z) = 0 \quad \text{da yerine yazılırsa;}$$

$$\left[\frac{1}{\lambda^2 z^2} + \frac{g_2}{20} \lambda^2 z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda^4 z^4 + \dots \right] + \left[-\frac{\lambda}{z^2} - \frac{g_2}{20} \lambda z^2 - \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \right] \equiv 0$$

$\frac{1}{\lambda^2} = \lambda$ ve $\lambda^2 = \frac{1}{\lambda}$ olduğundan $\lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda$ olur. O zaman

$$\left[\frac{\lambda}{z^2} + \frac{g_2}{20} \cdot \frac{1}{\lambda} z^2 + \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \right] + \left[-\frac{\lambda}{z^2} - \frac{g_2}{20} \lambda z^2 - \frac{g_3}{28} \lambda z^4 + \dots \right] \equiv 0$$

olur.

Sağ tarafta z^2 'li terim olmadığından dolayı

$$\frac{g_2}{20} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right) = 0 \text{ olur.}$$

$\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \right) \neq 0$ olduğu için $g_2 = 0$ dır. O durumda

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} \bigg|_{\tau = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} = 0 \text{ sonucu bulunur.}$$



KAYNAKLAR

- 1- Apostol, Tom., Modular Functions and Drichlet Series in Number Theory, Springer Verlag, New York, 1976.
- 2- San, Necdet., Analitik Fonksyionlar Teorisi II. E.Ü. Fen Fakültesi, Bornova, İzmir, 1977.