

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Banach Cebirlerinin Genel İncelenmesi

Ayşe Kara

Yüksek Lisans Tezi

209
77

Mat.

T.C.
YILDIZ UNIVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

10000 TL

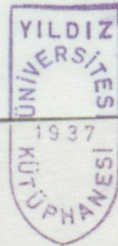
BANACH CEBİRLERİNİN
GENEL İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ARŞ.GÖR. AYŞE KARA

İSTANBUL - 1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209
77
Alındığı Yer :...Fen Bilimleri Ens.....
Tarih :...17.03.1992.....
Fatura :.....
Fiyatı :...10.000.-TL.....
Ayniyat No :...1/1.....
Kayıt No :...48193.....
UDC :...510.....
Ek :.....



T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOINDIRILAN

BÖLÜM I

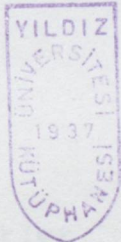
Sayfa

BANACH CEBİRLERİNİN ELEMANLAR TEORİSİ

1.1. Tanımlar	1
1.2. Tersinir Elemanlar	2
1.3. İdealler ve Homomorfizmalar	7
1.4. Solun Üzayları ve Solun Cebirleri	8
1.5. Solun Normaları	9
1.6. Uygulamalar	12

BANACH CEBİRLERİNİN
GENEL İNCELENMESİ

2.1. İyileştirme Teoremi ve Çeşitli	17
2.2. Maximal İdealler Üzerine	18
2.3. Çirkekler	21
2.4. Simetrik Cebirler	24
2.5. Topolojik İdealler	26
2.6. Kuvvetler ve Tekirler	27
2.7. Değişkenli B^* -Cebirleri	28
2.8. Tekirler	31
2.9. L^* -Cebirleri	32



YÜKSEK LİSANS TEZİ
ARŞ.GÖR. AYŞE KARA

BÖLÜM II

BİR BANACH CEBİRİNDE KUVVETLİ VE SAĞLI KUVVETLER

3.1. Bir Banach Cebirinde Kuvvetli ve Sağlı Kuvvetler I	34
3.2. Bir Banach Cebirinde Kuvvetli ve Sağlı Kuvvetler II	37

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Hamit AVCI 'ya teşekkür ve saygılarımı sunarım. Tezimin yazılım aşamasında bana yardımcı olan arkadaşlarım Uzman Recep AKKAYA ve Arş.Gör. Necmi ENGİN 'e de teşekkür ederim.

ÖZET

Banach cebirlerinin genel incelenmesi adı altında yaptığım bu çalışmayı üç bölümde ayırdım.

Birinci bölümde, Banach cebirlerinin elemanter teorisini ele aldım ve bu çerçevede konuyla ilgili tanımlar ve teoremler yanında bazı önemli kavramlara da yer verdim.

İkinci bölümde ise değişmeli Banach cebirlerini inceledim. Bu başlık altında Gelfand teorisinin ilk esaslarına yer verdim. Bu arada Kabuklar ve Çekirdekler, değişmeli B^* -cebirleri, Tıkızlamalar ve L^∞ cebiri de ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde de J.F. Rennison tarafından yapılmış olan "Bir Banach Cebirinde Merkezliğe Bağlı Koşullar" [2] ve "Bir Banach Cebirinde Merkezliğe Bağlı Koşullar II" [3] adlı çalışmaları birlikte ele aldım ve bunlar arasındaki birbirini tamamlayan kavramlara yer verdim.

SUMMARY

I seperated to this study which is named as General Examination of Banach Algebras in three parts.

In the first part, I began to work on Elemantary Theory of Banach Algebras and from this viewpoint I brought about theorems & definitions connected with the subject and also some important concepts.

In the second part, I examineted Commutative Banach Algebras. I brought about basic principles of Gelfand Theory under this title. At the same time also Hulls & Kernals, Commutative B^* -Algebras, Compactness' and L^∞ Algebra were began to work. In the third part, I began to work studies together that are named as Conditions Related to Centrarity in a Banach Algebra [2] and Conditions Related to Centrarity in a Banach Algebra [3] which is done by J.F. Rennison; and I brought about concepts that are connected with these studies.

BÖLÜM I

BANACH CEBİRLERİNİN ELEMANTER TEORİSİ

Banach cebirlerinin elemanter teorisi incelenmeden önce bazı tanımları verelim.

1.1. Tanımlar

A, kompleks cisim üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere birleşme ve çarpımın dağılma özeliği tanımlı ise, yani;

(i) $x, y, z \in A$ için,

$$x(yz) = (xy)z$$

$$(x+y)z = xz+yz$$

$$x(y+z) = xy+xz$$

(1)

(ii) $x, y \in A$ ve α kompleks değeri için,

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$$

(2)

olacak şekilde skaler çarpıma bağlı ise A 'ya bir kompleks cebir denir.

A 'yı normlu bir lineer uzay içine götüren ve

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in A)$$

(3)

eşitsizliğini sağlayan A 'da tanımlı bir norm varsa, o zaman A normlu bir kompleks cebir adını alır.

Buna ek olarak, eğer A bu norma bağlı tam bir metrik uzay yani Banach uzayı ise, A 'ya bir Banach cebiri denir.

(3) eşitsizliği çarpımı sürekli bir işlem yapar. Bu da eğer $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ ise, o zaman (3) eşitsizliğinden ve

$$x_n y_n - xy = x_n y_n - x y_n + x y_n - xy = (x_n - x) y_n + x (y_n - y)$$

(4)

eşitliğinden $x_n y_n \rightarrow xy$ olması demektir.

A 'nın değişme özeliğini taşıması yani, her $x, y \in A$ için $xy = yx$ olması gerekmez. Bununla birlikte, $xe = ex = x$ ($x \in A$) olacak şekilde A 'nın bir e birim elemanına sahip olduğunu kabul edeceğiz.

(3) eşitsizliğinden $\|e\| \geq 1$ olduğu ve e 'nin en fazla bir tane olabileceği ($e' = e'e = e$) kolayca görülür. Ayrıca $\|e\| = 1$ olduğunu kabul edeceğiz.

Eğer x , A 'da bir terse sahipse yani, $x^{-1}x = xx^{-1} = e$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in A$ elemanı varsa, $x \in A$ elemanına tersinir denir. Yine, hiç bir $x \in A$ elemanının birden fazla tersinin olmadığı kolayca görülür.

Eğer x ve y A 'da tersinir ise, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ olduğundan, x^{-1} ve xy 'de tersinirdir. Bu nedenle tersinir elemanlar çarpmaya göre bir grup oluştururlar.

$x \in A$ için $x - \lambda e$ tersinir olmayacak şekilde tüm λ kompleks sayılarının kümesine x elemanının izgesi (spectrum) denir. Burada x elemanının izgesini $\sigma(x)$ simgesiyle göstereceğiz.

Banach cebirlerinin teorisi bir yandan cebirsel özellikler ve diğer yandan topolojik özellikler arasındaki bir çok etkileşimi kapsar. Ayrıca Banach cebirleri ve holomorfik fonksiyonlar arasında yakın ilişkiler vardır. $\sigma(x)$ 'in hiçbir yerde boş olmadığı temel gerçeğinin en kolay ispatı tam fonksiyonlarla ilgili Liouville teoremine dayanır ve spektral yarıçap formülü kuvvet serileri hakkındaki teoremlerden doğal olarak çıkar. Bu da kompleks Banach cebirlerini gündeme getirir.

1.2. Tersinir Elemanlar

Bu kısımda, A e birimli bir kompleks Banach cebirini ve G A nın tüm tersinir elemanlarının kümesini gösterecektir.

1.2.1. Teorem : Eğer $x \in A$ ve $\|x\| < 1$ ise, o taktirde $e+x \in G$

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (1)$$

ve

$$\|(e+x)^{-1} - e + x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|} \quad (2)$$

dir.

İspat : $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ ($x, y \in A$) eşitsizliğinden

$\|x^n\| \leq \|x\|^n$ dir. Eğer

$$S_N = e - x + x^2 - \dots + (-1)^N x^N \quad (3)$$

ise, $\{S_N\}$ 'in A 'da bir Cauchy dizisi olduğu sonucu çıkar. Ohalde (1) 'deki seri (A 'nın normuna göre) bir $y \in A$ elemanına yakınsar. Çarpım sürekli ve

$$(e+x)S_N = e + (-1)^N x^{N+1} = S_N(e+x) \quad (4)$$

olduğundan, $(e+x)y = e = y(e+x)$ olduğu görülür. Bu da (1) 'i verir.

(2) eşitsizliği,

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|} \quad (5)$$

nin sonucu olarak çıkar.

1.2.2. Teorem : $x \in G$, $\|x^{-1}\| = 1/\alpha$, $h \in A$ ve $\|h\| = \beta < \alpha$ olduğunu varsayalım. O takdirde $x+h \in G$ ve

$$\left\| (x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} \right\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)} \quad (6)$$

dir.

İspat : $\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\| \|h\| = 1/\alpha \beta = \beta/\alpha$ dir.

$\beta < \alpha$ ise $\beta/\alpha < 1$ dir. O halde Teorem 1.2.1.'den dolayı $e+x^{-1}h \in G$ dir ve

$$x+h = xe+eh = xe+xx^{-1}h = x(e+x^{-1}h)$$

olduğundan $x+h \in G$ dir. Dolayısıyla $(x+h)^{-1} = (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} (x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} &= (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} \\ &= [(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1} \end{aligned}$$

dir. Teorem 1.2.1. 'deki (2) eşitsizliğinde x yerine $x^{-1}h$ konursa

$$\begin{aligned} \left\| (e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h \right\| &\leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|} \leq \frac{\|x^{-1}\|^2 \|h\|^2}{1-\|x^{-1}\| \|h\|} \\ &= \frac{1/\alpha^2 \beta^2}{1-1/\alpha \beta} = \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \left\| (x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} \right\| &= \left\| [(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)} \|x^{-1}\| = \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

bulunur.

1.2.3. Sonuç : G açık bir kümedir ve $x \rightarrow x^{-1}$ tasviri G 'den G üzerine bir homeomorfizmadır.

Çünkü, $x \in G$ ve $\|h\| \rightarrow 0$ ise, $\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \rightarrow 0$ olmasını gerektirir. Böylece, $x \rightarrow x^{-1}$ sürekli olup, açıkça G 'yi G üzerine tasvir eder ve tersi olduğunu bir homeomorfizmadır.

1.2.4. Sonuç : Her $x \in A$ için $\sigma(x)$ tıkmaz ve $\lambda \in \sigma(x)$ ise

$$|\lambda| \leq \|x\| \quad \text{dir.}$$

Çünkü, $|\lambda| > \|x\|$ ise, o zaman Teorem 1.2.1. 'den dolayı $e - \lambda^{-1}x \in G$ dir ve aynı şekilde $x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x)$ 'den doğrudur. O halde $\lambda \notin \sigma(x)$ dir. $\sigma(x)$ 'in kapalı olduğunu ispatlamak için ancak ve ancak eğer $x - \lambda e \notin G$ ise,

- (a) $\lambda \in \sigma(x)$ dir,
- (b) Sonuç 1.2.3. 'den dolayı G 'nin tümleyenini A 'nın kapalı bir alt kümesidir, ve
- (c) $\lambda \rightarrow x - \lambda e$ tasviri kompleks düzlemin A içine sürekli bir tasviri olduğunu görmek yeterlidir.

1.2.5. Teorem : ϕ A üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyonel ve $x \in A$ olsun ve,

$$f(\lambda) = \phi[(x - \lambda e)^{-1}] \quad (\lambda \notin \sigma(x)) \quad (7)$$

tanımlansın. O takdirde f , $\sigma(x)$ 'in tümleyeninde holomorftır ve $\lambda \rightarrow \infty$ iken $f(\lambda) \rightarrow 0$ dir.

İspat : $\lambda \notin \sigma(x)$ olsun. x 'in yerine $x - \lambda e$ ve h 'nin yerine $(\lambda - \Gamma)e$ alarak Teorem 1.2.2. 'yi uygulayalım. λ 'ya yeter derecede yakın olan her Γ için,

$$\|(x - \Gamma e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \Gamma)(x - \lambda e)^{-2}\| \leq C |\Gamma - \lambda|^2 \quad (8)$$

olacak şekilde x ve λ 'ya bağlı bir C sabiti vardır. Böylece, $\Gamma \rightarrow \lambda$ iken,

$$\frac{(x - \Gamma e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\Gamma - \lambda} \rightarrow (x - \lambda e)^{-2} \quad (9)$$

dir ve eğer ϕ 'yi (9) 'un her iki tarafına uygularsak ϕ 'nin sürekliliği ve lineerliğinden,

$$\frac{f(\Gamma) - f(\lambda)}{\Gamma - \lambda} \rightarrow \phi[(x - \lambda e)^{-2}] \quad (10)$$

dir. Böylece f türetilebilirdir ve dolayısıyla $\sigma(x)$ dışında holomorfiktir.

Sonuç olarak, $\lambda \rightarrow \infty$ iken G 'deki evirtim (inversion) tasvirinin sürekliliğinden,

$$\lambda f(\lambda) = \phi[\lambda(x-\lambda e)^{-1}] = \phi[(x/\lambda - e)^{-1}] \rightarrow \phi(-e) \quad (11)$$

dir.

1.2.6. Teorem (Gelfand-Mazur) : Eğer A , içinde sıfır olmayan her bir elemanın tersinir olduğu birimli bir kompleks Banach cebiri ise, o takdirde A (kompleks cisme izometrik olarak izomorfik) kompleks cisimdir.

içinde sıfır olmayan her bir elemanın tersinir olduğu bir cebire Bölme cebiri denir. Burada, A 'nın değişmeliliğinin hipotezin bir parçası olmadığını, sonucun bir parçası olduğunu belirtelim.

İspat : Eğer $x \in A$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise, $x-\lambda_1 e$ ve $x-\lambda_2 e$ elemanlarından en az biri tersinir olmalıdır. Çünkü, bunların herikisi de sıfır olamaz. Burada $\sigma(x)$ tam olarak bir noktadan oluşur. Örneğin; $x \in A$ için $\lambda(x)$ dir. $x-\lambda(x)e$ tersinir olmadığından, sıfır olmalıdır. Böylece $x=\lambda(x)e$ dir. Bu nedenle $x \rightarrow \lambda(x)$ tasviri A 'nın kompleks cisim üzerine bir izomorfizmasıdır. Ayrıca bu tasvir bir izometridir. Çünkü, her $x \in A$ için

$$|\lambda(x)| = \| \lambda(x)e \| = \| x \|$$

şeklindedir.

1.2.7. Tanım : Herhangi bir $x \in A$ için $\sigma(x)$ 'i kapsayan orjin merkezli en küçük kapalı diskin yarıçapına x 'in spektral yarıçapı denir ve burada $\rho(x) = \sup\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(x) \}$ şeklinde göstereceğiz.

Bazen buna x 'in spektral normu da denir.

1.2.8. Teorem (Spektral Yarıçap Formülü) : A e birimli kompleks bir Banach cebiri olmak üzere her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| x^n \|^{1/n} = \rho(x) \quad (12)$$

dir.

İspat : $x \in A$ ve n pozitif bir tamsayı, λ kompleks bir sayı olsun ve $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$ kabul edelim.

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} e) \quad (13)$$

elde edilir. $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$ ile (13) 'un her iki tarafı çarpılarak $x - \lambda e$ 'nin tersinir olduğu görülür ve böylece $\lambda \notin \sigma(x)$ dir. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma(x)$ ise, $n = 1, 2, 3, \dots$ için $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ dir. Sonuç 1.2.4. 'den dolayı $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ dir ve bundan dolayı $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$ dir. Buradan da

$$\rho(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x^n\|^{1/n} \quad (14)$$

elde edilir.

Eğer $|\lambda| > \|x\|$ ise,

$$(\lambda e - x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n = e \quad (15)$$

olduğu kolayca görülür. Bu nedenle yukarıdaki seri $-(x - \lambda e)^{-1}$ dir. ϕ , A üzerine sınırlı linner bir fonksiyon olsun ve Teorem 1.2.5 'deki gibi f tanımlansın. (15) 'den

$$f(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \lambda^{-n-1} \quad (16)$$

açılımı $|\lambda| > \|x\|$ olacak şekilde her λ için geçerlidir. Teorem 1.2.5. 'den dolayı f $\sigma(x)$ dışında holomorfik olup, dolayısıyla $\{\lambda: |\lambda| > \rho(x)\}$ kümesi içinde yer alır. Eğer $|\lambda| > \rho(x)$ ise (16) kuvvet serisinin yakınsadığı sonucu çıkar. Özel olarak, A üzerindeki her sınırlı lineer ϕ fonksiyoneli için

$$\sup_n |\phi(\lambda^{-n} x^n)| < \infty \quad (|\lambda| > \rho(x)) \quad (17)$$

elde edilir.

A 'nın herhangi bir elemanının normunun A 'nın dual uzayı üzerindeki bir lineer fonksiyonelin normu ile aynı olduğu Hahn-Banach Teoreminin bir sonucudur.

(17) eşitsizliği her ϕ için geçerli olduğundan, burada Banach-Steinhaus Teoremi uygulanabilir ve $|\lambda| > \rho(x)$ olmak üzere her bir λ 'ya

$$\|\lambda^{-n} x^n\| \leq C(\lambda) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

olacak şekilde bir reel $C(\lambda)$ sayısının karşılık geldiği sonucuna varılır. (18) 'in her iki tarafın $|\lambda|^n$ ile çarpıp, n-inci kökünü alalım.

Eğer $|\lambda| > \rho(x)$ ise,

$$\|x^n\|^{1/n} \leq |\lambda| [C(\lambda)]^{1/n} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (19)$$

elde edilir ve böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \quad (20)$$

bulunur. (14) ve (20) 'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x^n\|^{1/n} \quad \text{olup,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x) \quad \text{sonucu çıkar.}$$

1.2.9. Uyarı : A 'nın bir elemanı A 'da tersinir olsa da olmasa da sadece cebirsel bir özelliktir. Böylece $\rho(x)$ 'ın izgesi ve aynı şekilde $\rho(x)$ spektral yarıçapı A 'nın cebirsel yapısı cinsinden tanımlanır. Öte yandan, önceki teoremden yer alan limit, A 'nın metrik özelliklerine dayanır.

Tamamen farklı yollarla ortaya çıkan iki niceliğin eşitliğini iddia etmek bu teoremin dikkate değer özelliklerinden biridir.

1.2.10. Örnek : $C(T)$, T birim dairesi üzerindeki tüm sürekli kompleks fonksiyonların cebiri olsun (noktasal toplama ve çarpma ve supremum norm ile) ve A, F U 'da holomorfik olacak şekilde U birim diskinin kaplamı üzerinde sürekli bir F fonksiyonuna genişletilebilen tüm $f \in C(T)$ 'lerin kümesi olsun. A 'nın $C(T)$ 'nin bir altceberi olduğu kolayca görülür. Eğer $f_n \in A$ ise ve $\{f_n\}$, T üzerinde düzgün yakınsarsa, Maksimum Modül Teoremi $\{f_n\}$ dizisinin U 'nun kaplamı üzerine düzgün yakınsamasını gerektirir. Bu da A 'nın $C(T)$ 'nin kapalı bir altceberi olduğunu ve dolayısıyla A 'nın kendisinin bir Banach cebiri olduğunu gösterir.

1.3 idealler ve Homomorfizmalar

Bu kısımda sadece değişmeli cebirlerle ilgileneceğiz.

1.3.1. Tanım : I değişmeli kompleks bir A cebirinin altkümesi olmak üzere eğer,

- (a) I, A 'nın bir alt uzayı (vektör uzayı anlamında) ise,
- (b) $x \in A$ ve $y \in I$ olduğunda $xy \in I$ ise I 'ya bir idealdir denir.

Eğer $I \neq A$ ise I öz idealdir. Maksimal idealler herhangi daha büyük öz idealler tarafından kapsanmayan öz ideallerdir. Hiç bir öz idealin tersinir bir eleman kapsamadığını belirtelim.

B diğer bir kompleks cebir olmak üzere, A 'nın B içine bir Φ tasvirine, eğer Φ aynı zamanda çarpımı koruyan lineer bir tasvir, yani,

her $x, y \in A$ için $\Phi(x) \cdot \Phi(y) = \Phi(xy)$ ise,

bir homomorfizmadır denir. Φ 'nin çekirdeği (yada sıfır uzayı) $\Phi(x)=0$ olacak şekilde tüm $x \in A$ elemanlarının kümesidir. Bir homomorfizmanın çekirdeğinin bir ideal olduğunu yine belirtelim.

1.3.2. Teorem : Eğer A birimli değişmeli kompleks bir cebir ise, A 'nın her öz ideali bir maksimal ideal tarafından kapsanır. Eğer buna ek olarak A bir Banach cebiri ise, A 'nın her maksimal ideali kapalıdır.

İspat : Birinci kısım Housdorff Maksimallik ilkesinin hemen hemen doğrudan bir sonucudur (ve herhangi bir birimli değişmeli halkada geçerlidir). I, A 'nın bir öz ideali olsun.

I 'yı kapsayan (küme kapsamıyla) A 'nın tüm öz ideallerinin topluluğu kısmi sıralı ve $\mathcal{M}, \mathcal{P}$ 'nin bir maksimal lineer sıralı alttopluluğu $\mathcal{Q}$ içindeki ideallerinin birleşimi olsun. O takdirde $\mathcal{M}$ bir ideal (ideallerin lineer sıralı bir topluluğunun birleşimi olduğundan), $I \subset M$ ve $M \not\subset A$ dır. Çünkü, A 'nın birimini kapsayan $\mathcal{P}$ 'nin üyesi yoktur. $\mathcal{Q}$ 'nun maksimalliğinden M A 'nın bir maksimal ideali olur.

Eğer A bir Banach cebiri ise, M 'nin $\bar{M}$ kaplamı aynı zamanda bir idealdir. M, A 'nın hiç bir tersinir elemanını kapsamadığından ve tüm tersinir elemanların kümesi açık olduğundan $\bar{M} \not\subset A$ elde edilir ve bundan dolayı M 'nin maksimalliği $\bar{M} = M$ olduğunu gösterir.

1.4. Bölüm Uzayları ve Bölüm Cebirleri

J 'nin bir A vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu varsayalım ve her $x \in A$ ile

$$\Phi(x) = x+J = \{ x+y : y \in J \} \quad (21)$$

eşkümesini birleştirelim. Eğer $x_1 - x_2 \in J$ ise, o takdirde

$$\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \text{ dir. } x_1 - x_2 \notin J \text{ ise, } \Phi(x_1) \cap \Phi(x_2) = \emptyset \text{ dir.}$$

J 'nin tüm eşkümelerinin kümesini A/J ile göstereceğiz ve eğer $x, y \in A$ ve λ skalerleri için;

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(x+y), \quad \lambda \Phi(x) = \Phi(\lambda x) \quad (22)$$

tanımlanırsa, bir vektör uzayı olur.

J bir vektör uzayı olduğunda (22) işlemleri iyi tanımlıdır. Bu anlamda eğer;

$$\Phi(x) = \Phi(x') \text{ ve } \Phi(y) = \Phi(y') \text{ ise, o takdirde}$$

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(x') + \Phi(y'), \quad \lambda\Phi(x) = \lambda\Phi(x') \quad (23)$$

dir. Aynı zamanda Φ , A 'nın A/J 'nin sıfır elemanı $\Phi(0)=J$ dir. Aşağıda, A 'nın sadece bir vektör uzayı olmadığı fakat değişmeli bir cebir olduğu ve J 'nin A 'nın bir öz ideali olduğunu kabul edeceğiz. Eğer;

$$x'-x \in J \text{ ve } y'-y \in J \text{ ise,}$$

$$x'y'-xy = (x'-x)y'+x(y'-y)$$

eşitliği $x'y'-xy \in J$ olduğunu gösterir. Bu nedenle çarpma aynı tarzda A/J de tanımlanabilir:

$$\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(xy) \quad (x,y \in A) \quad \text{dır.}$$

Bu durumda A/J bir cebirdir ve Φ , A 'nın çekirdeği J olan A/J üzerine bir homomorfizmadır.

Eğer A bir e birim elemanına sahipse, o takdirde $\Phi(e)$ A/J 'nin birimidir ve, ancak ve ancak J bir maksimal ideal ise A/J bir cisimdir.

Bunu görmek için $x \in A$ ve $x \notin J$ varsayalım ve

$$I = \{ax+y : a \in A, y \in J\} \quad \text{olsun.}$$

$x \in I$ olduğundan I, J 'yi öz olarak kapsayan A 'da bir idealdir. Eğer J maksimal ise, $I = A$ olup, bir $a \in A$ ve $y \in J$ için $ax+y = e$ dir. O halde $\Phi(a)\Phi(x) = \Phi(e)$ olup, bu da A/J bir cisim olacak şekilde A/J 'nin her sıfır olmayan elemanının tersinir olduğunu ifade eder. Eğer J maksimal değilse, $I \neq A$ olacak şekilde x yukarıdaki gibi seçilebilir. Böylece $e \notin I$ 'dır. O takdirde $\Phi(x)$, A/J 'de tersinir değildir.

1.5. Bölüm Normları

A 'nın normlu bir lineer uzay, J 'nin A 'nın kapalı bir alt uzayı ve $\Phi(x) = x+J$ 'nin yukarıdaki gibi olduğunu varsayalım.

$$\|\Phi(x)\| = \inf \{ \|x+y\| : y \in J \} \quad (24)$$

tanımlansın.

Burada $\|\Phi(x)\|$ 'nin, $\Phi(x)$ eşkümesi için yer alan elemanların normunun en büyük alt sınırı olduğunu belirtelim.

Bu da tıpkı x 'den J 'ye uzaklık gibidir. (24) ifadesiyle A/J de tanımlı norma A/J 'nin bölüm normu diyeceğiz. A/J aşağıdaki özellikleri taşır:

- (i) A/J normlu lineer bir uzaydır.
- (ii) Eğer A bir Banach uzayı ise, A/J 'de öyledir.
- (iii) Eğer A değişmeli bir Banach cebiri ve J kapalı bir öz ideal ise o takdirde A/J değişmeli bir Banach cebiridir.

Bu özellikler kolayca gerçekleşir:

Eğer $x \in J$ ise, $\|\Phi(x)\| = 0$ dır. $x \notin J$ ise, J 'nin kapalı olduğu gerçeği $\|\Phi(x)\| > 0$ 'ı gerektirir.

$\|\lambda \Phi(x)\| = |\lambda| \|\Phi(x)\|$ olduğu açıktır. Eğer $x_1, x_2 \in A$ ve $\epsilon > 0$ ise;

$$\|x_1 + y_1\| < \|\Phi(x_1)\| + \epsilon \quad (i=1,2) \quad (25)$$

olacak şekilde $y_1, y_2 \in J$ vardır. O halde,

$$\|\Phi(x_1 + x_2)\| \leq \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| < \|\Phi(x_1)\| + \|\Phi(x_2)\| + 2\epsilon$$

üçgen eşitsizliğini verir ve (i) 'yi ispatlar.

A 'nın tam ve $\{\Phi(x_n)\}$ 'nin A/J 'de bir Cauchy dizisi olduğunu varsayalım.

$\|\Phi(x_{n_1}) - \Phi(x_{n_1+1})\| < 2^{-1} \quad (i=1,2,3,\dots)$ olan bir alt dizi ve $z_1 - x_{n_1} \in J$ ve $\|z_1 - x_{n_1+1}\| < 2^{-1}$ olacak şekilde z_1 elemanları vardır. Böylece $\{z_1\}$, A 'da bir Cauchy dizisidir ve A tam olduğundan $\|z_1 - z\| \rightarrow 0$ koşulunu sağlayan $z \in A$ vardır.

$\Phi(x_{n_1})$ 'nin A/J 'de $\Phi(z)$ 'e yakınsadığı sonucu çıkar. Oysa bir Cauchy dizisi yakınsak bir alt diziye sahipse, o takdirde tüm dizi yakınsaktır. Böylece A/J tam olup, dolayısıyla (ii) ispatlanmış olur.

(iii) 'yi ispatlamak için $x_1, x_2 \in A$ ve $\epsilon > 0$ seçelim ve (25) geçerli olacak şekilde $y_1, y_2 \in J$ seçelim.

$$\|\Phi(x_1 x_2)\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\| \|x_2 + y_2\|$$

olacak şekilde $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \in x_1 x_2 + J$ olduğunu belirtelim. Buna göre (25) ifadesi,

$$\|\Phi(x_1 x_2)\| \leq \|\Phi(x_1)\| \|\Phi(x_2)\| \quad (26)$$

eşitsizliğini gerektirir.

Sonuç olarak, eğer e , A 'nın birim elemanı ise, (26) 'da $x_1 \neq J$ ve $x_2 = e$ alındığı zaman $\|\Phi(e)\| \geq 1$ elde edilir. Oysa $e \in \Phi(e)$ dir ve bölüm normunun tanımı $\|\Phi(e)\| \leq \|e\| = 1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\|\Phi(e)\| = 1$ olup, böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu temelleri elde ettikten sonra, değişmeli Banach cebirleriyle ilgili bazı anahtar gerçekleri elde edebiliriz.

Daha önceki gibi A 'nın e birim elemanlı değişmeli kompleks bir Banach cebiri olduğunu varsayalım. A 'nın tüm kompleks homomorfizmalarının Δ kümesini A ile birleştirelim. Bunlar A 'nın kompleks cisim üzerine homomorfizmalarıdır yada farklı bir terminoloji ile, özdeş olarak sıfır olmayan, A üzerinde çarpımsal lineer fonksiyonellerdir.

1.5.1. Teorem : Aşağıdaki bağıntılar geçerlidir :

- (i) A 'nın her maksimal M ideali bir $h \in \Delta$ 'nın çekirdeğidir.
- (ii) Ancak ve ancak bir $h \in \Delta$ için $h(x) = \lambda$ ise $\lambda \in \sigma(x)$ dir.
- (iii) Ancak ve ancak her $h \in \Delta$ için $h(x) \neq 0$ ise x , A 'da tersinirdir.
- (IV) Her $x \in A$ ve $h \in \Delta$ için $h(x) \in \sigma(x)$ dir.
- (V) Her $x \in A$ ve $h \in \Delta$ için $|h(x)| \leq \Phi(x) \leq \|x\|$ dir.

İspat : Eğer M , A 'nın bir maksimal ideali ise o takdirde; A/M bir cisimdir ve M kapalı olduğundan (Teorem 1.3.2.) A/M bir Banach cebiridir. Teorem 1.2.6. 'dan dolayı A/M 'nin kompleks cisim üzerine bir j izomorfizması vardır. Φ , çekirdeği M olan A 'nın A/M üzerine homomorfizması olmak üzere eğer $h = j \circ \Phi$ ise o takdirde $h \in \Delta$ ve h 'in çekirdeği M 'dir. Böylece (i) ispatlanmış olur.

Eğer $\lambda \in \sigma(x)$ ise o zaman $x - \lambda e$ tersinir değildir. O halde $y \in A$ olmak üzere tüm $(x - \lambda e)y$ elemanlarının kümesi, Teorem 1.3.2 'den dolayı bir maksimal ideal içinde yer alan A 'nın bir öz idealidir.

- (i) özeliği $h(x - \lambda e) = 0$ olacak şekilde bir $h \in A$ 'ın var olduğunu gösterir. $h(e) = 1$ olduğundan, $h(x) = \lambda$ dir.

Öte yandan, $\lambda \notin \sigma(x)$ ise, o takdirde bir $y \in \Delta$ için $h(x - \lambda e)h(y) = 1$ sonucu çıkar ve dolayısıyla $h(x - \lambda e) \neq 0$ veya $h(x) \neq \lambda$ dir. Böylece (ii) özeliği de ispatlanmış olur.

Ancak ve ancak $\lambda \in \sigma(x)$ ise, x tersinir olduğundan (iii) özeliği (ii) 'den çıkar.

Son olarak, (IV) ve (V) (ii) 'nin doğrudan sonuçlarıdır. (V) özeliği, bir lineer fonksiyonel olarak h 'nin normunun en fazla bir olmasını gerektirir. Özel olarak, her bir $h \in \Delta$ süreklidir.

1.6. Uygulamalar

Hiçbir cebirsel kavram içermeyen fakat Banach cebiri teknikleriyle ispatlanabilen, teoremlerin bazı örneklerini verelim.

1.6.1. Teorem : $A(U)$, U 'ya kısıtlamaları holomorfik olan U açık birim diskinin $\bar{U}$ kaplamı üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların kümesi olsun. $f_1, \dots, f_n$ 'nin, $\forall z \in \bar{U}$ için;

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0 \quad (27)$$

olacak şekilde $A(U)$ 'nun elemanları olduğunu varsayalım. O takdirde;

$$\sum_{i=1}^n f_i(z) g_i(z) = 1 \quad (z \in \bar{U}) \quad (28)$$

olacak şekilde $g_1, \dots, g_n \in A(U)$ vardır.

İspat : Holomorfik fonksiyonların toplamları, çarpımları ve düzgün limitleri holomorfik olduğundan, $A(U)$ supremum normlu bir Banach cebiridir. Tüm $\sum f_i g_i$ fonksiyonların J kümesi, g_i ler $A(U)$ 'nun keyfi elemanları olmak üzere $A(U)$ 'nun bir idealidir. J 'nin $A(U)$ 'nun 1 birim elemanını içerdiğini ispatlamak gerekir. Teorem 1.3.2. 'den dolayı bu ancak ve ancak $J = A(U)$ 'nin hiçbir maksimal ideali içinde değilse gerçekleşir. Teorem 1.5.1. (i) 'den dolayı, $\forall i$ ($1 \leq i \leq n$) için $h(f_i) = 0$ olacak şekilde $A(U)$ 'nun kompleks cisim üzerine hiçbir h homomorfizmasının var olmadığını ispatlamak yeterlidir.

Önce bu homomorfizmaları belirleyelim. Polinomların $A(U)$ 'nun yoğun bir alt kümesi şeklinde olduğunu belirtelim. $f \in A(U)$ ve $\epsilon > 0$ varsayalım. $f, \bar{U}$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan her $z \in \bar{U}$ için $|f(z) - f(rz)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $r < 1$ vardır. Eğer $|rz| < 1$ ise $f(rz)$ 'in genişlemesi z 'nin kuvvetlerinde yakınsar. O halde $z \in \bar{U}$ için $f(rz)$ 'e düzgün yakınsar ve bu istenilen yaklaşımı verir.

$h, A(U)$ 'nun bir kompleks homomorfizması olsun. $f_0(z) = z$ alalım. O takdirde $f_0 \in A(U)$ dur. $\sigma(f_0) = \bar{U}$ olduğu açıktır. Teorem 1.5.1. (IV) 'den dolayı $h(f_0) = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \bar{U}$ vardır. O halde $n = 1, 2, 3, \dots$ için $h(f^n_0) = \alpha^n = f^n_0(\alpha)$ dır ve dolayısıyla her P polinomu için $h(P) = p(\alpha)$ dır. h sürekli olduğundan ve polinomlar $A(U)$ içinde yoğun olduklarından $\forall f \in A(U)$ için $h(f) = f(\alpha)$ sonucu çıkar.

(27) hipotezi en az bir i ($1 \leq i \leq n$) damgası için $|f_i(\alpha)| > 0$ olmasını gerektirir. Böylece $h(f_i) \neq 0$ dır.

Her bir $h \in \Delta$ 'ye $h(f_1) \neq 0$ olacak şekilde verilen f_1 fonksiyonlarının en az birinin karşılık geldiği gösterilmiş oldu ve bu da yukarıda belirttiğimiz gibi teoremi ispatlamaya yeterlidir.

1.6.2 Not : Bir önceki ispatta $A(U)$ 'nun tüm maksimal ideallerini de belirledik. Çünkü herbiri bir $h \in \Delta$ 'nin çekirdeğidir: Eğer $\alpha \in \bar{U}$ ise ve eğer $M_\alpha, f(\alpha) = 0$ olacak şekilde tüm $f \in A(U)$ 'ların kümesi ise o takdirde $M_\alpha, A(U)$ 'nun bir maksimal idealidir ve $A(U)$ 'nun tüm maksimal idealleri bu tarzda elde edilir.

$A(U)$ 'ya genellikle disk cebiri denir. $A(U)$ 'nun elemanlarının T birim daireye kısıtlamaları $C(T)$ 'nin kapalı bir alt cebirini oluşturur. $A, C(T)$ 'nin bir maksimal altcebiridir. Daha açık olarak, eğer $A \subset C(T)$ ve $B, C(T)$ 'nin kapalı bir altcebirini ise (supremum norma bağlı), o takdirde ya $B = A$ veya $B = C(T)$ dir. A kesin olarak

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 \quad (n = -1, -2, -3, \dots) \quad (29)$$

olduğu bu $f \in C(T)$ 'lerden oluşur. O halde yukarıda adı geçen maksimallik teoremi bir yaklaşım teoremi olarak ifade edilebilir :

1.6.3. Teorem : $g \in C(T)$ ve bir $n < 0$ için $\hat{g}(n) \neq 0$ olduğunu varsayalım. O takdirde her $f \in C(T)$ 'e ve her $\epsilon > 0$ 'a

$$|f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^N P_n(e^{i\theta}) g^n(e^{i\theta})| < \epsilon \quad (e^{i\theta} \in T) \quad (30)$$

$$\text{olacak şekilde } P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{n,k} e^{ik\theta} \quad (n = 0, \dots, N) \quad (31)$$

polinomları karşılık gelir.

$$\text{ispat : } B, \sum_{n=0}^N P_n g^n \quad (32)$$

şeklindeki tüm fonksiyonlar kümesinin $C = C(T)$ 'deki kaplamı olsun.

Teorem, $B = C$ olduğunu iddia ediyor. $B \neq C$ kabul edelim. Tüm (32) fonksiyonlarının kümesi (burada N sabit değildir) bir kompleks cebirdir.

ifadesini verir. Bu da teoremin hipotezine aykırıdır.

I. Bölümün sonunda Wiener 'a ait aşağıdaki teoremi verelim :

$$1.6.4. \text{ Teorem : } f(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad (37)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \quad \text{ve her reel } \theta \text{ için } f(e^{i\theta}) \neq 0 \quad \text{varsayalım.}$$

O taktirde $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ olmak koşulu ile

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad (38)$$

dir.

$$\text{Ispat : } A, \|f\| = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| \quad (39)$$

normlu (37) 'yi sağlayan birim daire üzerinde tüm kompleks f fonksiyonlarının uzayı olsun. A 'nın bir Banach uzayı olduğu açıktır. Gerçekten, A sayma ölçümüne göre integre edilebilir tamsayılar üzerindeki tüm kompleks fonksiyonların l^1 uzayına izometrik olarak izomorfiktir. Oysa A aynı zamanda noktasal çarpım altında değişmeli bir Banach cebiridir. Çünkü, $g \in A$ ve $g(e^{i\theta}) = \sum b_n e^{in\theta}$ ise, o taktirde

$$f(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) = \sum_n \left(\sum_k c_{n-k} b_k \right) e^{in\theta}$$

dir ve dolayısıyla

$$\|fg\| = \sum_n \left| \sum_k c_{n-k} b_k \right| \leq \sum_k |b_k| \sum_n |c_{n-k}| = \|f\| \|g\|$$

dir.

Ayrıca 1 fonksiyonu A 'nın birimidir ve $\|1\| = 1$ dir. $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ alalım. O taktirde $f_0 \in A$, $1/f_0 \in A$ ve $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $\|f_0^n\| = 1$ dir. Eğer $h \in A$ 'nın herhangi bir kompleks homomorfizması ve $h(f_0) = \lambda$ ise, $\|h\| \leq 1$ gerçeği

$$|\lambda^n| = |(f_0^n)| \leq \|f_0^n\| = 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gerektirir. O halde $|\lambda| = 1$ dir. Başka bir deyişle her bir h 'a $h(f_0) = e^{i\alpha}$ olacak şekilde bir $e^{i\alpha} \in T$ noktası karşılık gelir. Böylece, $h(f_0^n) = e^{in\alpha} = f_0^n(e^{i\alpha})$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (40) dir.

Eğer f (37) ile verilirse o taktirde $f = \sum c_n f_n$ dir.
Bu seri A 'da yakınsar ve h A üzerinde lineer sürekli bir fonksiyonel olduğundan (40) 'dan

$h(f) = f(e^{i\alpha})$ ($f \in A$) elde edilir.

Hipotezimiz, f 'in T 'nin hiçbir noktasında değersiz olmadığını dolayısıyla f 'in A 'nın herhangi bir kompleks homomorfizmasının çekirdeğinde bulunmadığını ifade eder ve burada Teorem 1.5.1. f 'in A 'da tersinir olmasını gerektirir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

BÖLÜM II

DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİ

Bu bölümde değişmeli Banach cebirlerinin Gelfand teorisinin ilk esaslarından bahsedeceğiz.

Bir Banach cebirinin aynı zamanda birleşmeli bir cebir olan kompleks bir A Banach uzayıdır. Bu uzayda çarpma ve normun

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\| \quad (f, g \in A)$$

eşitsizliği ile bağlı olduğu I. Bölümde söylenmişti. Ayrıca bu bölümde elemanları x ve y ler olarak değil de f ve g ler olarak alacağız.

Eğer her $f, g \in A$ için $fg = gf$ ise, A Banach cebiri değişmelidir. Eğer $\|1\| = 1$ ve her $f \in A$ için $1f = f1$ olacak şekilde $1 \in A$ elemanı varsa, A Banach cebiri bir özdeşliğe sahiptir.

Bu bölümde sadece özdeşlikli değişmeli Banach cebirleriyle ilgileneceğiz ve A 'nın özdeşlikli değişmeli bir Banach cebiri olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca bu bölümde A 'nın tersinir elemanlarının bir ailesini de A^{-1} ile göstereceğiz.

2.1 izge (spectrum) ve Çözen

2.1.1 TEOREM : Herhangi bir $f \in A$ için f 'in izgesi kompleks düzlemin boş olmayan tıkkız bir alt kümesidir. $(\lambda - f)^{-1}$ fonksiyonu f 'in çözenine ait olan λ için, λ 'nın analitikliğine bağlıdır.

(Kompleks bir λ sayısı, eğer $\lambda - f$ tersinir ise, $f \in A$ 'nın çözeni içindedir. Aksi halde λ , f 'in izgesi içinde yer alır.)

İspat : Buradaki "analitik" sözcüğünün anlamı, "yakınsak bir kuvvet serisi ile yerel olarak ifade edilebilir.", demektir. Gerçekte vektör-değerli fonksiyonların analitikliğinin düşünülebilen herhangi iki tanımı çakışır.

Eğer $|\lambda| > \|f\|$ ise, $\sum_{n=0}^{\infty} f^n / \lambda^{n+1}$ serisi sonsuzda analitik

olan bir $g(\lambda)$ fonksiyonuna yakınsar. Doğrudan bir hesaplama, $g(\lambda)(\lambda - f) = 1$ yani $g(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$ olduğunu gösterir. O halde $\sigma(f)$, $\|f\|$ yarıçaplı kapalı disk içinde yer alır. λ_0 'ın çözeninin elemanı olduğunu varsayalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - f)^{-(n+1)} \quad \text{serisi,}$$

$\{ |\lambda - \lambda_0| < 1/\|(\lambda_0 - f)^{-1}\| \}$ diskinde analitik olan bir $h(\lambda)$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca doğrudan bir hesaplama, $h(\lambda) = (\lambda - f)^{-1}$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak f 'in çözeni açıktır ve $(\lambda - f)^{-1}$ ifadesi f 'in çözeni üzerinde analitiktir.

A üzerindeki her sürekli lineer L fonksiyoneli için $L(\lambda - f)^{-1}$ f 'in çözeni üzerinde λ 'nın analitik bir fonksiyonu olup, sonsuzda değersizdir. Eğer $\sigma(f)$ boş olsaydı, o zaman $L((\lambda - f)^{-1})$ ifadesi Liouville teoreminden dolayı özdeş olarak sıfır olurdu ve Hahn-Banach teoreminden dolayı $(\lambda - f)^{-1}$ özdeş olarak sıfır olurdu. Oysa, bu olanaksızdır. Bu da $\sigma(f)$ 'in boş olmadığını gösterir. Böylece, teorem ispatlanmış olur.

2.1.2. Sonuç : Eğer λ , f 'in çözeninin elemanı ise ve $\delta(\lambda, \sigma(f))$ ifadesi 'dan $\sigma(f)$ 'e uzaklık ise, o taktirde

$$\delta(\lambda, \sigma(f)) \geq 1/\|(\lambda - f)^{-1}\|$$

dir.

2.2. Maksimal ideal Uzayı

A 'nın bir J ideali A 'nın başka hiçbir öz idealinde yer almazken $J \neq A$ ise, maksimaldir. A 'nın maksimal ideallerinin kümesine A 'nın maksimal ideal uzayı diyeceğiz ve M_A simgesiyle göstereceğiz.

2.2.1. Teorem : Eğer J A 'nın bir maksimal ideali ise, o taktirde A/J kompleks sayılar cismine izometrik olarak izomorfiktir.

ispat : A 'nın her maksimal idealinin kapalı olduğunu I. Bölümdeki Teorem 1.3.2. 'den biliyoruz.

J A 'nın bir maksimal ideali olsun. J kapalı olduğundan, A/J

$$\|f+J\| = \inf \{ \|f+g\| : g \in J \}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

$$\|fg+J\| \leq \|f+J\| \|g+J\| \quad (f, g \in A)$$

olduğunu göstermek kolaydır.

Böylece A/J değişmeli bir Banach cebiri olur. Her $g \in J$ için $\|1+g\| \geq 1$ olduğundan, $\|1+J\| = 1$ dir. Sonuç olarak, $1+J$ ifadesi A/J için bir özdeşliktir.

I. Bölümdeki Teorem 1.2.6. 'dan dolayı, A/J kompleks sayılar cismine izometrik olarak izomorfiktir. Bu da ispatı tamamlar.

J 'nin A 'da bir maksimal ideal olduğunu varsayalım. $A \rightarrow A/J$ izdüşümü J çekirdekli bir cebir homomorfizmasıdır. I. Bölümdeki Teorem 1.2.6., A/J 'yi kompleks cisimle özdeşlemeye olanak sağlar. Dolayısıyla J , sıfır olmayan kompleks değerli bir O homomorfizmasının çekirdeğidir. Eğer $f \in A$ ise, o zaman $f+J = \lambda+J$ yani $f-\lambda \in J$ olacak şekilde kesin olarak tek λ kompleks sayısı olarak $\phi(f)$ tanımlanabilir.

Karşıt olarak, eğer ϕ A 'nın sıfır olmayan kompleks değerli bir homomorfizması ise ve A_ϕ ϕ 'nin çekirdeği ise, o zaman A/A_ϕ bir cisimdir ve dolayısıyla A_ϕ A 'da bir maksimal idealdir.

O halde aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

2.2.2. Teorem : $\phi \rightarrow A_\phi$ eşlemesi, ϕ 'nin çekirdeği A_ϕ A 'daki maksimal idealler ve A 'nın sıfır olmayan kompleks-değerli homomorfizmalarının bir bire-bir ve üzerine eşlemesidir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem M_A için bir topoloji tanımlamamıza olanak verecek. ϕ 'nin sürekliliği hakkındaki iddia Teorem 2.2.1. 'in sonucu olarak çıkar. Çünkü, lineer fonksiyoneller ancak ve ancak çekirdekleri kapalı ise süreklidir.

2.2.3. Yardımcı Teorem : ϕ , A 'nın sıfır olmayan kompleks-değerli bir homomorfizması olsun. Bu taktirde ϕ süreklidır ve

$$\|\phi\| = 1 = \phi(1) \text{ dir.}$$

İspat : $\phi(1)^2 = \phi(1)$ olduğundan ya $\phi(1) = 1$ ya da $\phi(1) = 0$ dir. İkinci hali gözönüne almayacağız. Aksi taktirde ϕ özdeş olarak sıfır olurdu. O halde $\phi(1) = 1$ dir.

Eğer $f \in A$ ve $|\lambda| > \|f\|$ ise, o taktirde $\lambda - f$ tersinirdir. $\phi(\lambda - f)\phi((\lambda - f)^{-1}) = \phi(1) = 1$ bağıntısından, $\phi(\lambda - f) \neq 0$ ya da $\phi(f) \neq \lambda$ elde edilir. Sonuç olarak $|\phi(f)| \leq \|f\|$ çıkar. Bu her $f \in A$ için doğru olduğundan ϕ sürekli olmalıdır ve $\|\phi\| \leq 1$ dir. $\phi(1) = 1$ olduğundan, $\|\phi\| = 1$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3. M_A 'yı A 'nın A^* eşlenik uzayının birim küresinin bir alt kümesi ile özdeşlemeye olanak verir. M_A 'nın topolojisini zayıf-yıldız topolojisi olarak tanımlar. Burada M_A A^* 'dan elde edilir.

Başka bir deyişle, M_A 'daki bir $\{\phi_\alpha\}$ ağı ancak ve ancak her $f \in A$ için $\phi_\alpha(f) \rightarrow \phi(f)$ ise ϕ 'ye yakınsar. $\Psi \in M_A$ 'nın açık komşuluklarının bir tabanı

$$N(\Psi; f_1, \dots, f_n; \varepsilon) = \{ \phi \in M_A : |\phi(f_j) - \Psi(f_j)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n \}$$

şeklindeki kümelerle verilir. Burada $\varepsilon > 0$, n pozitif bir tamsayı ve $f_1, \dots, f_n \in A$ dir.

2.2.4. Teorem : A 'nın maksimal ideal uzayı M_A , tıkkız bir Hausdorff uzayıdır.

İspat : $\phi(1) = 1$ koşulunu sağlayan homomorfizmanın zayıf-yıldız limiti yine sıfır olmayan bir homomorfizmadır. O halde M_A A^* 'ın birim yuvarının zayıf-yıldız kapalı bir alt kümesidir. Alaoglu Teoreminden dolayı A^* 'ın birim yuvarı zayıf-yıldız tıkkızdır. Sonuç olarak, M_A tıkkızdır. $\hat{f}(\phi) = \phi(f)$ şeklinde tanımlı M_A üzerinde kompleks değerli f fonksiyonu, $f \in A$ 'nın Gelfand dönüşümüdür.

2.2.5. Teorem : Gelfand dönüşümü A 'nın, M_A üzerinde sürekli fonksiyonların bir $\hat{A}$ cebiri üzerine bir homomorfizmasıdır. $\hat{A}$ cebiri M_A 'nın noktalarını ayırır ve $\hat{A}$ sabitleri içerir. Gelfand dönüşümü norm-azalandır :

$$\|\hat{f}\|_{M_A} \leq \|f\| \quad (f \in A)$$

İspat : $f \rightarrow \hat{f}$ 'nın bir cebir homomorfizması olduğu hemen gerçekleşir. M_A 'nın topolojisinin tanımından her bir $\hat{f} \in \hat{A}$ 'nın M_A üzerinde sürekli olduğu açıktır. Her $\phi \in M_A$ için $\|\phi\| = 1$ olduğundan, her $f \in A$ için $|\hat{f}(\phi)| \leq \|f\|$ olduğu sonucu çıkar. O halde,

$$\|\hat{f}\|_{M_A} \leq \|f\| \quad \text{dir.}$$

A 'nın özdeşliğinin Gelfand dönüşümü, M_A üzerinde bire özdeş olan fonksiyondur. O halde, $\hat{A}$ sabitleri içerir.

Eğer her $f \in A$ için $\hat{f}(\phi_1) = \hat{f}(\phi_2)$ ise, o taktirde her $f \in A$ için $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ ve $\phi_1 = \phi_2$ dir. O halde, $\hat{A}$ M_A 'nın noktalarını ayırır.

2.2.6. Teorem : Eğer $f \in A$ ise, o zaman f 'in $\sigma(f)$ izgesi M_A üzerinde $\hat{f}$ 'in $\hat{f}(M_A)$ değer kümesi ile çakışır.

İspat : $\lambda \in \sigma(f)$ olduğunu varsayalım. Buna göre $\lambda - f$ tersinir değildir. Dolayısıyla $(\lambda - f)A$ ifadesi bir öz idealdir. I. Bölümdeki Teorem 1.3.2.'den dolayı, $\lambda - f$ 'i içeren maksimal bir J ideali vardır. Eğer $J \neq A$ 'nın çekirdeği ise, o taktirde $\phi(\lambda - f) = 0$ ve $\hat{f}(\phi) = \lambda$ dir. O halde $\lambda \in \hat{f}(M_A)$ dir.

Karşıt olarak $\lambda \in \hat{f}(M_A)$ olduğunu varsayalım. $\hat{f}(\phi) = \lambda$ olacak şekilde $\phi \in M_A$ seçelim. Buna göre $\phi(\lambda - f) = 0$ olup, dolayısıyla $\lambda - f$ tersinir değildir ve $\lambda \in \sigma(f)$ dir.

2.3. Örnekler

2.3.1. Örnek : Tıkız bir X Housdorff uzayı üzerinde sürekli kompleks değerli fonksiyonların $C(X)$ cebiri olağan

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad f \in C(X)$$

supremum normu ile bir Banach cebiridir.

Her $x \in X$, $f \in C(X)$ için $\phi_x(f) = f(x)$ şeklinde tanımlı $\phi_x \in M_{C(X)}$ değerlendirme homomorfizmasını belirler.

2.3.2. Teorem : Her $\phi \in M_{C(X)}$, bir $x \in X$ noktasında ϕ_x değerlendirme homomorfizmasıdır.

İspat : $\phi \in M_{C(X)}$ 'in her bir ϕ_x , $x \in X$ 'den farklı olduğunu varsayalım. O takdirde her $x \in X$ için $\phi(f_x) = 0$ olurken $f_x(x) \neq 0$ olacak şekilde $f_x \in C(X)$ vardır. Buna göre, $|f_x|^2$ x 'in bir komşuluğunda pozitif ve

$$\phi(|f_x|^2) = \phi(f_x)\phi(\overline{f_x}) = 0 \quad \text{dır.}$$

$|f_{x_1}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2 = g$ X üzerinde pozitif olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in X$ seçelim. O takdirde $g \in C(X)$ 'de tersinidir.

Bu da teoremi kanıtlayan $\phi(g) \neq 0$ 'a aykırıdır.

Bu teorem X ve $M_{C(X)}$ 'in homeomorfik olduğunu gösterir. Özel olarak X uzayı $C(X)$ 'in Banach cebiri yapısıyla tamamen belirlidir.

2.3.3. Örnek : Sabitleri içeren $C(X)$ 'in herhangi bir düzgün kapalı A altcebi yine supremum normlu değişmeli bir Banach cebiridir. Eğer A X 'in noktalarını ayırırsa, $x \rightarrow \phi_x$ eşlemesi M_A 'nın kapalı bir alt kümesi olarak X 'in bir gömmesidir.

Aşağıdaki özel hal, X 'e ait olmayan nasıl maksimal ideallerin meydana gelebileceğini gösterir.

Burada Δ kompleks düzlemde $\{ |z| \leq 1 \}$ kapalı birim diski gösterecek. Birim diskin $b\Delta$ sınırı $\{ |z| = 1 \}$ birim çemberdir. z 'deki polinomlarla $b\Delta$ üzerinde düzgün yaklaşabilen $C(b\Delta)$ 'daki fonksiyonların alt cebiri $P(b\Delta)$ ile göstereceğiz.

Bir $f \in C(b\Delta)$ fonksiyonunun k . Fourier katsayısı

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{b\Delta} f(z) z^{-k-1} dz$$

ile verilir. Fejer 'in teoreminden dolayı, f

$$\sigma_n = (f_0 + \dots + f_n) / (n+1)$$

fonksiyonlarının düzgün limitidir. Burada

$$f_m = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-m}^m c_k z^k, \quad z = e^{i\theta} \text{ dir.}$$

Eğer bir $f \in C(b\Delta)$ fonksiyonunun negatif Fourier katsayıları yoksa, o taktirde f_m ve σ_n z 'de polinomlardır. Böylece $f \in P(b\Delta)$ dir. Ayrıca, σ_n polinomları maksimum modül ilkesinden dolayı Δ üzerinde, iç Δ üzerinde analitik olan f 'in Δ 'ya sürekli bir f genişlemesine düzgün yakınsar.

Karşıt olarak, eğer $f \in C(b\Delta)$, iç Δ üzerinde analitik olarak Δ ya sürekli genişletilebilirse o taktirde Cauchy teoreminden dolayı f 'in negatif Fourier katsayıları yoktur. Özel olarak, herhangi bir $f \in P(b\Delta)$ 'nın negatif Fourier katsayıları yoktur.

Bu da bir $f \in C(b\Delta)$ için aşağıdaki uç iddianın eşdeğer olduğunu gösterir :

- (*) $f \in P(b\Delta)$
- (**) f iç Δ üzerinde analitik olarak Δ 'ya sürekli genişler.
- (***) f 'in negatif Fourier katsayıları yoktur.

Her $\lambda \in \Delta$, λ 'da $P(b\Delta)$ 'daki fonksiyonları analitik genişlemelerinin değerlendirilmesi ile elde edilmiş $P(b\Delta)$ 'nın bir ϕ_λ homomorfizmasını belirler. $\lambda \rightarrow \phi_\lambda$ eşlemesi Δ 'yı $M_{P(b\Delta)}$ 'nın kapalı bir alt kümesi olarak gömer. Δ 'yı $M_{P(b\Delta)}$ 'daki gömülmüş görüntüsü ile özdeşlemek adet olmuştur.

$\phi \in M_{P(b\Delta)}$ 'yı keyfi varsayalım. $\lambda = \phi(z)$ olsun. Burada z koordinat fonksiyonudur. $\|z\|_{b\Delta} = 1$ olduğundan, $|\lambda| \leq 1$ yani $\lambda \in \Delta$ elde edilir. Aynı zamanda, tüm p polinomları için $\phi(p(z)) = p(\lambda) = \phi_\lambda(p)$ dir. Polinomlar $P(b\Delta)$ 'da yoğun olduklarından, ϕ ϕ_λ ile çakışır.

Sonuç olarak, $P(b\Delta)$ 'nın maksimal ideal uzayı Δ ile çakışır. $f \in P(b\Delta)$ 'nın f Gelfand dönüşümü iç Δ üzerinde analitik olan f in Δ 'ya sürekli genişlemesidir.

2.3.4. Örnek : Bir n tamsayısı için $C^{(n)}[0,1]$ ifadesi, n kere sürekli türetilen $[0,1]$ aralığında sürekli kompleks-değerli fonksiyonların vektör uzayını göstermiş olsun. $C^{(n)}[0,1]$ uzayı, noktasal çarpımlı ve;

$$\|f\|_{C^{(n)}} = \sum_{k=0}^n \sup_{0 \leq t \leq 1} |f^{(k)}(t)| \quad \text{normlu bir Banach cebiridir.}$$

$C^{(n)}[0,1]$ 'in maksimal ideal uzayı $[0,1]$ dir.

2.3.5. Örnek : $0 < \alpha \leq 1$ için $Lip_{\alpha}[0,1]$ ifadesi α mertebeli bir Lipschitz koşulunu sağlayan $[0,1]$ üzerinde sürekli kompleks-değerli fonksiyonların kümesi olsun. $Lip_{\alpha}[0,1]$ 'deki norm

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| + \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^{\alpha}}$$

şeklinde tanımlıdır. $Lip_{\alpha}[0,1]$ uzayı, çarpımlı fonksiyonların olağan noktasal çarpımı olan bir Banach cebiridir. $Lip_{\alpha}[0,1]$ in maksimal ideal uzayı $[0,1]$ dir.

2.3.6. Örnek : l^1 , $\|a\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ normu sonlu olan,

iki-kuyruklu $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ dizilerinin kümesi olsun. Eğer $a, b \in l^1$ ise, a ve b 'nin $c = a * b$ girişimi (convolution)

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k$$

şeklinde tanımlıdır. Çarpma olarak girişim ile l^1 değişmeli bir Banach cebiridir.

$\varepsilon_n \in l^1$, n . girişi ve diğer girişleri sıfır olan dizi olsun. O taktirde ε_n , l^1 için bir özdeşliktir. Her $a \in l^1$,

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varepsilon_n \quad \text{şeklinde } l^1 \quad \text{'de yakınsayan seriyi ifade}$$

edebilir. Burada $-\infty < n, k < \infty$ için $\varepsilon_n * \varepsilon_k = \varepsilon_{n+k}$ dir. Özellikle her bir ε_n tersinirdir ve $\varepsilon_n^{-1} = \varepsilon_{-n}$ tersine sahiptir. Bundan başka $\varepsilon_n = (\varepsilon_1)^n$, $-\infty < n < \infty$ dur. Böylece $a \in l^1$ için ifade

$$a = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varepsilon_1^n$$

olur. Özellikle ε_1 ve ε_1^{-1} l^1 'i doğurur.

Birim modüllü her kompleks λ sayısı için l^1 üzerinde sürekli lineer $\phi_{\lambda} \in M_{l^1}^*$ olacak şekilde ϕ_{λ} 'nin l^1 üzerinde çarpımsal olduğu gerçekleşir.

$\phi \in M_{1,1}$ keyfi olsun. Buna göre $|\phi(\varepsilon_1)| \leq \|\varepsilon_1\| = 1$ ve

$$\frac{1}{|\phi(\varepsilon_1)|} = |\phi(-\varepsilon_1)| \leq \|\varepsilon_{-1}\| = 1 \text{ dir.}$$

Böylece $O(\varepsilon_1) = \lambda$ birim modüle sahiptir. $\phi, 1^1$ 'in ε_1 ve ε_{-1} üreteçleri üzerinde ϕ_λ ile çakıştığından, $\phi = \phi_\lambda$ dir.

Bu da 1^1 'in maksimal ideal uzayının $b\Delta$ $a \in 1^1$ 'in Gelfond dönüşümü;

$$d(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

fonksiyonudur. Gelfand dönüşümünün $\hat{1}^1$ cebiri, mutlak yakınsak Fourier serisine sahip olan $b\Delta$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar ailesidir.

2.3.7. Örnek : H bir Hilbert uzayı ve $B(H)$, H üzerinde sürekli lineer operatörler cebiri olsun. O taktirde $B(H)$

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1 \}$$

normu ile bir Banach cebidir. $B(H)$ cebiri bir özdeşliğe (özdeşlik operatörüne) sahiptir. Apaçık haller dışında, $B(H)$ değişmeli olan bazı özel altcebirleri vardır. Bu da örneğin, bir tek operatörle üretilmiş $B(H)$ 'in herhangi bir altcebirini kapsar.

2.4. Shilov Sınırı

Eğer her $\hat{f} \in \hat{A}$ fonksiyonu E üzerinde maksimum modüller kabul ederse, M_A 'nın bir E altkümesi A için bir sınırdır.

2.4.1. Yardımcı Teorem : $f_1, \dots, f_n \in A$ ve V, M_A 'nın

$$V = \{ \psi : |\hat{f}_j(\psi)| < 1, 1 \leq j \leq n \}$$

şeklinde tanımlı temel açık kümesi olsun. Ya V, A için her sınıra rastlar ya da $E \setminus A$ için kapalı bir sınır olduğu zaman $E \setminus V$ A için kapalı bir sınırdır.

İspat : $E \setminus V$ A için bir sınır olmayacak şekilde A için kapalı bir E sınırının var olduğunu varsayalım. V 'nin A için her sınıra rastladığını göstermeliyiz.

$\|\hat{f}\|_{E \setminus V} < 1$ olurken $\|\hat{f}\|_{M_A} = 1$ olacak şekilde $f \in A$ seçelim. f yerine uygun bir f^m kuvvetinin konulması ile, $E \setminus V$ üzerinde $|\hat{f}_j| < 1$ kabul edilebilir.

V üzerinde de $|\hat{f}| < 1$ olduğundan, E üzerinde ve dolayısıyla M_A üzerinde $|\hat{f}| < 1$ elde edilir. Üzerinde $\hat{f}$ 'in maksimum 1 modülüne vardığı kümenin V içinde yer aldığı sonucu çıkar. Böylece V, A için her sınıra rastlar. Bu da Yardımcı Teoremi ispatlar.

Aşağıdaki teorem Shilov 'a aittir.

2.4.2. Teorem : A için tüm kapalı sınırların kesişimi A için bir sınırdır.

İspat : ∂_A , A için tüm kapalı sınırların kesişimi olsun. Ancak ve ancak ϕ 'nin her U komşuluğu için, üzerinde $\hat{f}$ 'nin maksimum modüle vardığı küme U içinde olacak şekilde $f \in A$ varsa, açıkça $\phi \in \partial_A$ dır.

$f \in A$ 'nin ∂_A üzerinde $|\hat{f}| < 1$ koşulunu sağladığını varsayalım. M_A üzerinde $|\hat{f}| < 1$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $\phi \in M_A$, $|\hat{f}(\phi)| \geq 1$ koşulunu sağlarsa, o zaman M_A 'da ϕ 'nin bir temel açık komşuluğu vardır ki bu A için bir kapalı sınırdan ayrıktır.

$V_1, \dots, V_k$ tıkkız $\{ |\hat{f}| \geq 1 \}$ kümesini örten böyle temel komşuluklar olsun. Yardımcı Teorem 2.4.1. 'den dolayı

$$M_A \setminus \bigcup_{j=1}^k V_j$$

A için bir sınırdır. Bu sınır üzerinde $|\hat{f}| < 1$ olduğundan, M_A üzerinde $|\hat{f}| < 1$ elde edilir. Bu da teoremi ispatlar.

A için tüm kapalı sınırların kesişimine A 'nın Shilov sınırındanır ve burada ∂_A simgesiyle göstereceğiz. Bu sınır A 'nın en küçük kapalı sınırdır.

Maksimum modül ilkesinden dolayı, $b \in \Delta$ çemberi $P(\Delta)$ için bir sınırdır. Eğer $\lambda \in b \in \Delta$ ise, $1 + \lambda z$ fonksiyonu yalnız $z = \lambda$ 'da maksimum modül kabul eder. O halde $b \in \Delta$, $P(\Delta)$ için herhangi bir sınır içinde bulunmalıdır. Böylece, $P(\Delta)$ 'nın Shilov sınırı Δ 'nın topolojik sınırıdır.

2.4.3. Teorem : Eğer $f \in A$ ise, o zaman $\hat{f}(\partial_A)$, $\hat{f}(M_A)$ 'nin topolojik sınırını içerir.

İspat : $\hat{f}(\phi)$, $\hat{f}(\partial_A)$ 'dan pozitif bir δ uzaklığında olurken $\hat{f}(\phi) \in \hat{f}(M_A)$ olacak şekilde $\phi \in M_A$ 'nin var olduğunu varsayalım.

$|\lambda - \hat{f}(\phi)| < \delta/2$ olurken $\lambda \in \hat{f}(M_A)$ olacak şekilde kompleks bir λ sayısı seçelim. $\lambda - f$ tersinirdir.

$g = (\lambda - f)^{-1}$ olsun. O taktirde $\hat{g} = 1/(\lambda - \hat{f})$ dir. $\psi \in \partial_A$ için $|\hat{g}(\psi)| \leq 2/\delta$ olduğundan, $\|\hat{g}\|_{M_A} \leq 2/\delta$ elde edilir. Bununla birlikte $|\hat{g}(\phi)| > 2/\delta$ dir. Bu gelişki teoremi kurar.

2.5. Temel Teorem

Bu kısımda, belirli analitik fonksiyonların Banach cebiri elemanlarına uygulanmasına ait temel bir teoremin ispatını veriyoruz.

2.5.1. Teorem : $f \in A$ olsun. $h, \hat{f}(M_A) = \sigma(f)$ 'nin bir komsuluğunda tanımlı ve analitik olan kompleks-değerli bir fonksiyon olsun. O taktirde $\hat{g} = h \circ \hat{f}$ olacak şekilde $g \in A$ vardır.

İspat : Cauchy integral formülü, $\sigma(f)$ 'i çevreleyen uygun bir Γ çevresi için ,

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(z)}{z - z_0} dz \quad (z_0 \in \sigma(f))$$

olduğunu ifade eder.

$$g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(z)(z - f)^{-1} dz$$

tanımlayalım. Integral bir bayağı Riemann integrali olarak vardır.

Sonlu Riemann toplamaları ile integrali yaklaştırarak

$$\phi(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(z)(z - \phi(f))^{-1} dz = h(\phi(f)) \quad (\phi \in M_A)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, $\hat{g} = h \circ \hat{f}$ dir.

I. Bölümdeki Teorem 1.2.8. (Spektral Yarıçap Formülü) 'i de gözönüne alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz :

2.5.2. Sonuç : $f \rightarrow \hat{f}$ Gelfand dönüşümü ancak ve ancak her $f \in A$ için $\|f^2\| = \|f\|^2$ ise, bir izometridir.

İspat : Eğer $f \rightarrow \hat{f}$ bir izometri ise, o zaman

$$\|f^2\| = \|\hat{f}^2\| = \|\hat{f}\|_{M_A}^2 = \|f\|^2 \quad \text{dir.}$$

Karşıt olarak, eğer her $f \in A$ için $\|f^2\| = \|f\|^2$ ise, o taktirde her $n \geq 1$ için $\|f^{2^n}\| = \|f\|^{2^n}$ dir. Böylece,

$$\|f\| = \|f^{2^n}\|^{1/2^n} = \|\hat{f}\|_{M_A}$$

elde edilir.

2.6. Kabuklar ve Çekirdekler

J A 'da bir ideal olmak üzere J 'yi içeren, M_A 'daki maksimal ideallerin kümesine J 'nin kabuğu denir. Başka bir deyişle, J nin kabuğu her $f \in J$ için $\phi(f) = 0$ olacak şekilde tüm $\phi \in M_A$ 'lardan oluşur. Açıkça J 'nin kabuğu M_A 'nın kapalı bir alt kümesidir.

2.6.1. Teorem: J , A 'da kapalı bir ideal ve B , J 'nin ve özdeşliğin lineer gereni (spanı) olsun. O takdirde B , A 'nın kapalı bir altcebridir ve M_B , J 'nin kabuğunun bir noktaya özdeşlenmesiyle M_A 'dan elde edilir.

İspat: J 'nin bir öz ideal olduğunu kabul edelim. Bir Banach uzayının sonlu boyutlu bir altuzayı ve kapalı bir altuzayın toplamı kapalı olduğundan, B , A 'nın kapalı bir alt cebridir. Aynı zamanda J , B 'de maksimal idealdir.

Her $\phi \in M_A$ için, $\tau(\phi)$ ϕ 'nin B 'ye kısıtlaması olsun. O takdirde, M_A 'nın M_B içine sürekli bir tasvirdir. Açıkça, ancak ve ancak $\phi \in J$ 'nin kabuğuna ait ise, $\tau(\phi)$ B 'nin maksimal J idealidir. Dolayısıyla τ , J 'nin kabuğu dışında bire-birdir.

$\psi \in M_A$ 'nın maksimal J idealinden farklı olduğunu varsayalım. O takdirde $\psi(f) = 1$ olacak şekilde $f \in J$ vardır. $g \in A$ için $\phi(g) = \psi(gf)$ tanımlansın. O takdirde, ϕ lineerdir ve $\phi(1) = 1$ dir. Eğer $g_1, g_2 \in A$ ise, o zaman $\phi(g_1 g_2) = \psi(g_1 g_2 f) = \psi(g_1 g_2 f^2) = \psi(g_1 f) \psi(g_2 f) = \phi(g_1) \phi(g_2)$ dir. O halde $\phi \in M_A$ dir. Açıkça $\tau(\phi) = \psi$ olur. Bu da τ 'nın M_A 'yı M_B üzerine tasvir ettiğini gösterir.

Böylece τ , J 'nin kabuğunun bir noktaya özdeşlenmesi ile, M_A uzayının M_B üzerine sürekli bir bire-bir tasvirini belirler. Bu tasvir o zaman bir homeomorfizma olacaktır. Bu da teoremi ispatlar.

2.6.2. Teorem : J , A 'da kapalı bir ideal olsun. O taktirde A/J bölüm cebirinin maksimal ideal uzayı J 'nin kabuğudur.

İspat : $A \longrightarrow A/J$ bölüm tasvirinin o devrik dönüşümü

$$\phi(\psi)(f) = \psi(f+J) \quad (f \in A, \psi \in M_{A/J})$$

ile tanımlıdır. ϕ 'nın istenilen homeomorfizma olduğu kolayca görülür.

E , M_A 'nın bir alt kümesi olsun. E 'nin çekirdeği, E 'nin noktalarına karşılık gelen maksimal ideallerin kesişimi olup, $\text{Çek}(E)$ ile göstereceğiz. Başka bir deyişle $\text{Çek}(E)$, $\hat{f} \in E$ üzerinde değersiz olacak şekilde $f \in A$ 'nın kümesidir. Açıkça $\text{Çek}(E)$ A 'da kapalı bir idealdir. M_A 'nın bir E alt kümesi, eğer E A 'daki bir idealin kabuğu ise, bir kabuktur.

Kabukların sonlu birleşimleri kabuklardır ve kabukların keyfi kesişimleri kabuklardır. Dolayısıyla kabuklar M_A için bir topolojinin kapalı alt kümeleri olarak alınabilirler (Kabuk-Çekirdek Topolojisi). Kabuk-çekirdek topolojisinde M_A 'nın bir F alt kümesinin kaplamı $\text{Çek}(F)$ 'nin kabuğudur. Bir $\phi \in M_A$ noktası, ancak ve ancak $\phi(f) \neq 0$ iken f üzerinde değersiz olacak şekilde bir $f \in A$ varsa, F 'nin kabuk-çekirdek kaplamına ait olmaz.

Kabuk-çekirdek topolojisi M_A 'nın olağan topolojisinden daha küçük olağan bir T_1 -topolojisidir (noktalar kapalıdır). Kabuk-çekirdek topolojisi, ancak ve ancak kabuk-çekirdek topolojisi ve M_A 'nın olağan topolojisi çakışırsa, bir Hausdorff topolojisidir. Bu, ancak ve ancak M_A 'nın her kapalı alt kümesi bir kabuk ise, meydana gelir. Yine bu, ancak ve ancak $\hat{A}$ M_A üzerinde düzenli ise, yani M_A 'nın her kapalı E alt kümesi ve her $\phi \in M_A \setminus E$ için $\hat{f} \in E$ üzerinde değersiz olurken $\hat{f}(\phi) \neq 0$ olacak şekilde $f \in A$ varsa gerçekleşir. Eğer bir A Banach cebiri bu eşdeğer özelliklerinden birine sahip ise, A 'ya düzenli bir Banach cebiri denir. Düzenli Banach cebirinin örnekleri $L^1(G)$ grup cebirleri vasıtası ile verilmiştir.

2.6.3. Teorem : Eğer A düzenli bir Banach uzayı ise, o zaman $\hat{A}$ M_A üzerinde normaldir. Yani M_A 'nın E ve F gibi tıkkız ayrık alt kümelerinin her çifti için E üzerinde $\hat{f} = 0$ ve F üzerinde $\hat{f} = 1$ olacak şekilde bir $f \in A$ vardır.

İspat : $\phi \in A$ olsun. Öncelikle ϕ 'nin bir komşuluğunda $\hat{g} = 1$ olurken, E üzerinde $\hat{g} = 0$ olacak şekilde $g \in A$ 'yı bulalım. $\hat{h}(\phi) = 1$ olacak şekilde $h \in \text{Çek}(E)$ seçelim.

$$W = \{ \psi \in M_A : |\hat{h}(\psi)| \geq 1/2 \}$$

kümesi E 'ye rastlamayan, ϕ 'nin tıkkız bir komşuluğudur.

J , $E \cup W$ 'nin çekirdeği olsun. Hipotez gereği J 'nin kabuğu $E \cup W$ dir. Teorem 2.6.2. 'den dolayı, A/J 'nin maksimal ideal uzayı $E \cup W$ 'dir.

$H = h + J$ eşkümüsi, W üzerinde $\hat{H} \geq 1/2$ iken E üzerinde $\hat{H} = 0$ 'ı sağlar. $z = 0$ 'ın bir komşuluğunda 0 ve $\{ |z| \geq 1/2 \}$ 'ın bir komşuluğunda 1 olarak tanımlanmış kompleks düzlem üzerindeki θ

fonksiyonu H 'nin izgesinin bir komşuluğunda analitiktir. Teorem 2.5.1. 'den dolayı, $G = \theta \circ H$ olacak şekilde $G = g + J \in A/J$ vardır. Yani E üzerinde $\hat{g} = 0$ ve W üzerinde $\hat{g} = 1$ olacak şekilde $g \in A$ vardır.

F 'in tıkkızlığı gereği $F \subseteq \bigcup_{j=1}^n W_j$, E üzerinde $\hat{g}_j = 0$ ve W_j üzerinde $\hat{g}_j = 1$ olacak şekilde M_A 'nin $W_1, \dots, W_n$ alt kümeleri ve $g_1, \dots, g_n \in A$ bulunabilir.

Burada $g_1 + g_2 - g_1 g_2$ 'nin Gelfand dönüşümü E üzerinde sıfır ve $W_1 \cup W_2$ üzerinde 1 dir. Bu tarzda devam ederek $W_1 \cup \dots \cup W_n$ üzerinde $\hat{f} = 1$ olurken E üzerinde $\hat{f} = 0$ olacak şekilde $f \in A$ elde edilir. Böttlece teorem ispatlanmış olur.

2.7. Değişmeli B^* -Cebirleri

Bu kısımda X tıkkız bir Hausdorff uzayı olmak üzere $C(X)$ cebirlerini aksiyomatize edeceğiz. Bunun için, bir f fonksiyonunu onun kompleks $\bar{f}$ eşleniği içine gönderen kompleks eşlenikleme operatörünün soyut bir açıklamasını vereceğiz.

A 'nın bir dürevi (üs alma) aşağıdaki özellikleri sağlayan A dan A 'ya bir $f \rightarrow f^*$ operatörüdür :

- (i) $f^{**} = f$,
- (ii) $(f+g)^* = f^* + g^*$,
- (iii) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$,
- (iv) $(fg)^* = f^* g^*$.

Burada $f, g \in A$ ve λ kompleks sayıdır.

$f \in A$ olmak üzere $\|f^* f\|^2 = \|f\|^4$ koşulunu sağlayan bir $f \rightarrow f^*$ dürevi ile değişmeli bir A Banach cebirine değişmeli bir B^* - cebiri denir.

2.7.1. Yardımcı Teorem : Eğer $f \rightarrow f^*$ A 'nın bir dürevi ise, o zaman $1^* = 1$ dir.

İspat : $1^* = 1$ $1^* = 1^{**} 1^* = (1^* 1)^* = 1^{**} = 1$ dir.

2.7.2. Yardımcı Teorem : Eğer A değişmeli bir B^* -cebiri ve $f \in A$ ise, o zaman $\|f^2\| = \|f\|^2$ ve $\|f\| = \|f^*\|$ dir.

İspat : $\|f^2\|^2 = \|(f^2)^* f^2\| = \|(f^* f)^* (f^* f)\| = \|f^* f\|^2$

$= \|f\|^4$ olup, dolayısıyla $\|f^2\| = \|f\|^2$ dir. Ayrıca

$\|f\|^2 = \|f^* f\| = \|f^{**} f^*\| = \|f^*\|^2$ olup, dolayısıyla

$\|f\| = \|f^*\|$ dir.

2.7.3. Yardımcı Teorem : A değişmeli bir B^* -cebiri olmak üzere eğer $f \in A$ $f^* = f^{-1}$ koşulunu sağlarsa, o zaman $\|f\| = 1$ dir. Eğer $g \in A$ $g^* = g$ koşulunu sağlarsa, o zaman g reeldir.

İspat : $f^* = f^{-1}$ olduğunu varsayalım. O takdirde aynı zamanda $(f^{-1})^* = f$ dir. Böylece $1 = \|f^* f\| = \|f\|^2$ ve $1 = \|(f^{-1})^* f^{-1}\| = \|f^{-1}\|^2$ dir. $\sigma(f)$ ve $\sigma(f^{-1})$ 'nin her ikisinin de Δ birim diski içinde bulunduğu sonucu çıkar.

Bu sadece her $\lambda \in \sigma(f)$ için $|\lambda| = 1$ olduğunda meydana gelir. Yani $\hat{f}$ birim modüle sahipse gerçekleşir.

Eğer h herhangi bir Banach cebirinin elemanı ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \text{ serisi } \hat{e^h} = e^{\hat{h}} \text{ koşulunu sağlayan bir } e^h$$

elemanına yakınsar. e^h tersinirdir ve e^{-h} tersine sahiptir.

$h \rightarrow h^*$ dürevi Yardımcı Teorem 2.7.2. 'den dolayı süreklidir. Sonuç olarak $h \in A$ için,

$$(e^h)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h^*)^n}{n!} = e^{h^*}$$

dir.

Bu kez de $g^* = g$ olduğunu varsayalım. $f = e^{ig}$ alalım. O takdirde $f^* = e^{-ig} = e^{-ig} = f^{-1}$ dir. Yardımcı Teoremin ilk yarısından, $\sigma(f)$ birim çemberin bir alt kümesidir. O halde $\sigma(g)$ reel olmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

2.7.4. Teorem (Gelfand-Naimark Teoremi) : A değişmeli bir B^* -cebiri olsun. O takdirde Gelfand dönüşümü

$$\hat{f}^* = \overline{\hat{f}} \quad (f \in A)$$

koşulunu sağlayan $C(M_A)$ ve A 'nın bir izometrik izomorfizmasıdır.

Teoremin önemli kısmı, Gelfand dönüşümünün dürevi kompleks eşlenik içine taşınmasıdır.

İspat : Sonuç 2.5.2. ve Yardımcı Teorem 2.7.2. 'den dolayı Gelfand dönüşümü A 'nın $C(M_A)$ 'nin kapalı bir $\hat{A}$ alt cebiri üzerine bir izometrisidir.

Eğer $f \in A$ ise, $g = (f+f^*)/2$ ve $h = (f-f^*)/2i$ olsun. Buna göre $f = g+ih$, $g = g^*$ ve $h = h^*$ dir.

Böylece $\hat{f}^* = \hat{g}^* - i\hat{h}^* = \hat{g} - i\hat{h} = \hat{f}$ elde edilir.

Bu formül özellikle, $\hat{f} \in \hat{A}$ ise, o zaman $\hat{f}$ 'in $\overline{\hat{f}}$ kompleks eşleniğininde $\hat{A}$ 'nın elemanı olduğunu gösterir. $\hat{A}$, sabitleri içerdiğinden ve $\hat{A}$, M_A 'nın noktalarını ayırdığından, Stone-Weierstrass teoreminden dolayı $\hat{A} \subset C(M_A)$ ile çakışmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

2.8. Tıkızlamalar

S bir topolojik uzay olmak üzere $CB(S)$, S üzerinde sınırlı sürekli kompleks-değerli fonksiyonların cebirini gösterebilir. $CB(S)$ cebiri,

$$\|f\|_S = \sup_{s \in S} |f(s)|$$

normu ve $f^* = \overline{f}$ dürevi ile değişmeli bir B^* -cebiridir.

S üzerindeki fonksiyonların bir $\mathcal{F}$ ailesi, $f \in \mathcal{F}$ olduğunda $\overline{f} \in \mathcal{F}$ ise, özeşleniktir. $s \neq t \in S$ 'in elemanı olduğunda $f(s) \neq f(t)$ olacak şekilde $f \in \mathcal{F}$ varsa, $\mathcal{F}$ ailesi ayırgandır.

Tıkız bir X Hausdorff uzayı ve S 'in X 'in yoğun bir $\gamma(S)$ alt kümesi üzerine sürekli bir bire-bir γ tasviri, S topolojik uzayının bir tıkızlamasıdır.

S 'in her X tıkızlaması, sabitleri içeren yani $C(X)$ 'in S 'e kısıtlaması olan $CB(S)$ 'in kapalı ayırgan özeşlenik bir A alt cebirini belirler.

Karşıt olarak A 'nın, sabitleri içeren $CB(S)$ 'nin kapalı ayırgan özeşlenik bir alt cebiri olduğunu varsayalım. O taktirde A , $CB(S)$ 'in bir B^* -cebiridir. Teorem 2.7.4. Gelfand-Naimark teoreminden, A , $C(M_A)$ 'ya izometrik olarak izomorfiktir.

Her $s \in S$ elemanı s 'de $f \in A$ için

$$\hat{f}(\gamma(s)) = f(s)$$

şeklinde tanımlı $\gamma(s)$ değerlendirme homomorfizmasını belirler.

S 'den M_A içine γ fonksiyonu, M_A 'nın topolojisinin tanımı gereği süreklidir. A , S 'nin noktalarını ayırdığından, γ bire-birdir.

Eğer $g \in C(M_A)$ ve g $\gamma(S)$ üzerinde sıfır ise, o taktirde g , S üzerinde özdeş olarak sıfır fonksiyonunun Gelfand dönüşümü olup, dolayısıyla $g = 0$ dir. O halde $\gamma(S)$ M_A 'da yoğundur.

M_A 'nın S 'in bir tıkızlaması olduğu sonucu çıkar. Bu da aşağıdaki teoremi ispatlar.

2.8.1. Teorem : S bir topolojik uzay olmak üzere, S 'in X tıkkızlaması ve sabitleri içeren $CB(S)$ 'in kapalı ayırğan özeşlenik A alt cebirleri arasında biyektif bir eşleme vardır. X tıkkızlaması ile birleşmiş A cebiri $CB(S)$ 'deki fonksiyonlardan oluşur ki bu sürekli olarak X 'e genişler. A ile birleşmiş X tıkkızlaması A 'nın maksimal ideal uzayıdır.

Bir örnek olarak, $\mathbb{R}$ reel eksen ve A ,

$$f(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{i a_j t}$$

şeklinde trigonometrik polinomların $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün limitlerinin cebiri olsun. Burada a_j 'ler reel ve c_j 'ler kompleks değerlerdir. A cebiri değışmeli bir B^* -cebiridir. Meydana gelen tıkkızlama reel eksenin Bohr Tıkkızlaması adını alır. Bu, tıkkız bir topolojik grubun yapısını verebilir. Reel sayılar yoğun bir alt grup olarak gömülmüş olur. Oysa $\mathbb{R}$ 'in gömmesi bir homeomorfizma değildir.

2.8.2. Teorem : S bir topolojik uzay ve A , sabitleri içeren $CB(S)$ 'in kapalı ayırğan özeşlenik bir alt cebiri olsun.

$\gamma : S \rightarrow M_A$ kanonik gömmesi ancak ve ancak aşağıdaki koşulların biri sağlanırsa bir homeomorfizmadır :

(i) S 'in kapalı herbir F alt kümesi ve $s \in S \setminus F$ için, $f|_F = 1$ olurken $f(s) = 0$ olacak şekilde bir $f \in A$ fonksiyonu vardır.

(ii) S 'in kapalı herbir F alt kümesi ve $s \in S \setminus F$ için $f(s) \neq f(F)$ olacak şekilde bir $f \in A$ fonksiyonu vardır.

İspat : $A = C(M_A)$ gerçeğinden dolayı (i) ve (ii) koşullarının herbiri ancak ve ancak S 'in tüm kapalı F alt kümeleri ve $s \in S \setminus F$ için $\gamma(s)$, M_A 'da $\gamma(F)$ 'in kaplamına ait değilse, meydana gelir. Bu, ancak ve ancak S 'in herbir kapalı F alt kümesi için $\gamma(S \setminus F)$, $\gamma(S)$ ve M_A 'nın açık $M_A \setminus \gamma(F)$ alt kümesinin kesişimi ise, gerçekleşir. Yine bu, ancak ve ancak γ^{-1} sürekli ise, meydana gelir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Topolojik bir S uzayı, eğer S 'in her kapalı F alt kümesi ve $s \in S \setminus F$ için $f|_F = 1$ olurken $f(s) = 0$ olacak şekilde S üzerinde sürekli kompleks-değerli bir f fonksiyonu varsa, tümel düzenlidir. Eğer S tümel düzenli bir Hausdorff uzayı ise, o zaman Teorem 2.8.2., $A = CB(S)$ cebirine uygulanır. Bu bizi aşağıdaki teoreme götürür.

2.8.3. Teorem (Stone-Cech Teoremi) : S tümel düzenli bir Hausdorff uzayı olsun. O taktirde S , X 'in yoğun bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde tıkkız bir X Hausdorff uzayı vardır ve S üzerinde her sınırlı sürekli kompleks-değerli fonksiyon X 'e sürekli olarak genişler.

2.9. L^∞ Cebiri

S bir küme ve Σ S 'in alt kümelerinin bir σ -cebiri olsun. Γ , (S, Σ) üzerinde bir olasılık ölçümü olsun. Yani $\Gamma(S) = 1$ olacak şekilde (S, Σ) üzerinde pozitif bir ölçümdür.

$L^\infty(\Gamma)$ Banach uzayı, noktasal çarpımlı ve $f^* = \overline{f}$ ($f \in L^\infty(\Gamma)$) dürevi ile değişmeli bir B^* -cebiridir.

Gelfand-Naimark teoreminden dolayı, $L^\infty(\Gamma)$, $C(Y)$ 'ye izometrik izomorfiktir. Burada Y , $L^\infty(\Gamma)$ 'nun maksimal ideal uzayıdır.

$$\hat{f} \rightarrow \int f d\Gamma, \quad f \in L^\infty(\Gamma)$$

fonksiyoneli $C(Y)$ üzerinde sürekli bir fonksiyoneldir. Riesz temsil teoreminden dolayı,

$$\int f d\Gamma = \int \hat{f} d\hat{\Gamma}, \quad f \in L^\infty(\Gamma)$$

olacak şekilde Y üzerinde düzenli bir $\hat{\Gamma}$ Borel ölçümü vardır.

$L^\infty(\hat{\Gamma}) = L^\infty(\Gamma)$ yani $L^\infty(\hat{\Gamma}) = C(Y)$ olduğunu göstermek istiyoruz.

χ_E , $E \in \Sigma$ 'nin karakteristik fonksiyonunu belirtsin. $\chi_E^2 = \chi_E$ olduğundan, Gelfand dönüşümü $\hat{\chi}_E^2 = \hat{\chi}_E$ koşulunu sağlar. O halde $\hat{\chi}_E$, Y 'nin kapalı ya da açık bir U_E alt kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Karşıt olarak eğer U , Y 'nin bir kapaç alt kümesi ise, onun karakteristik fonksiyonu süreklidir ve dolayısıyla $\chi \in L^\infty(\Gamma)$ 'nın dönüşümü olmalıdır. $\chi^2 = \chi$ olduğundan $\chi^2 = \chi$ ve bir $E \in \Sigma$ için $\chi = \chi_E$ elde edilir. O halde Y 'nin her kapaç U alt kümesi bir $E \in \Sigma$ için U_E şeklindedir.

BÖLÜM III

BİR BANACH CEBİRİNDE MERKEZLİĞE BAĞLI KOŞULLAR

3.1. Bir Banach Cebirinde Merkezliğe Bağlı Koşullar I

Bu kısımda A , $\mathbb{C}$ kompleks cismi üzerindeki birimli bir Banach cebirini gösterecektir.

3.1.1. Tanım : $a \in A$ elemanının her $x \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\|x(\lambda - a)\| \leq \|(\lambda - a)x\| \quad (1)$$

koşulunu sağladığını kabul edelim. O takdirde a , A 'nın merkezinde yer alır.

Eğer, bir $K \geq 1$, her $x \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\|x(\lambda - a)\| \leq K \|(\lambda - a)x\| \quad (2)$$

ise, bir $a \in A$ elemanına merkezimsidir denir.

Merkezimsi elemanlar genellikle merkez değildirler.

3.1.2. Notasyon : $a \in A$ için, a 'nın A 'daki izgesi $\sigma_A(a)$ olarak yazılacak ve çözen küme, onun tümleyeni, $\rho_A(a)$ ile gösterilecek. A 'nın merkezi $Z(A)$ olarak kullanılacaktır. Herhangi bir X Banach uzayı için $L(X)$, X üzerinde tüm sürekli lineer operatörlerin cebiri olacaktır. $K \geq 1$ için,

$$Q(K, A) = \{ a \in A : \|x(\lambda - a)\| \leq K \|(\lambda - a)x\|, \text{ her } x \in A, \lambda \in \mathbb{C} \}$$

$$Q(A) = \bigcup_{K \geq 1} Q(K, A)$$

yazılacaktır. Böylece, $Q(A)$ merkezimsi elemanların kümesidir.

(1) eşitsizliği sadece $\rho_A(a)$ 'da λ 'nın değerleri için kullanılır ve sonuçların çoğunda sadece λ 'nın bu değerlerini içerir. Bundan dolayı, $K \geq 1$ için

$$Q_\sigma(K, A) = \{ a \in A : \|x(\lambda - A)\| \leq K \|(\lambda - a)x\|, \text{ her } x \in A, \lambda \in \rho_A(a) \}$$

$$Q_\sigma(A) = \bigcup_{K \geq 1} Q_\sigma(K, A)$$

yazılır ve $Q_\sigma(A)$ 'nın elemanlarına σ - merkezimsi denir. Ancak ve ancak her $x \in A$, $\lambda \in \rho_A(a)$ için ,

$$\|(\lambda - A)^{-1}x(\lambda - a)\| \leq K \|x\|$$

ise, $a \in Q_\sigma(K, A)$ olduğunu belirtelim.

ilgili cebir eğer belirtilmişse, o zaman genellikle (a) , $Q_\sigma(K)$, vb... yazacağız.

Böylece $Z(A) \subseteq Q(A) \subseteq Q_\sigma(A)$ dir.

3.1.3. Yardımcı Teorem : $a \in Q_\sigma(K)$ ve D_a a 'ya karşılık gelen iç türev olsun. O taktirde her $x \in A$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \rho(a)$ için,

$$\|(\lambda_1 - a)^{-1}(\lambda_2 - a)^{-1} \dots (\lambda_n - a)^{-1} D_a^n x\| \leq (K+1)^n \|x\|$$

dir.

İspat : İspat n üzerinde tümevarımla yapılır.

$n=1$ için

$$(\lambda - a)^{-1} D_a x = (\lambda - a)^{-1} x (\lambda - a) - x$$

dir.

Sonucun $n \geq 1$ için ispatlanmış olduğunu ve $x \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \rho(a)$ olduğunu varsayalım. Çünkü, $i=1, 2, \dots, n$ için a $(\lambda_i - a)^{-1}$ ile yer değiştirir. Tümevarım hipotezi gereği

$$\begin{aligned} & \|(\lambda_1 - a)^{-1} (\lambda_2 - a)^{-1} \dots (\lambda_{n+1} - a)^{-1} D_a^{n+1} x\| \\ &= \|(\lambda_{n+1} - a)^{-1} D_a ((\lambda_1 - a)^{-1} (\lambda_2 - a)^{-1} \dots (\lambda_n - a)^{-1} D_a^n x)\| \\ &\leq (K+1) \|(\lambda_1 - a)^{-1} (\lambda_2 - a)^{-1} \dots (\lambda_n - a)^{-1} D_a^n x\| \\ &\leq (K+1)^{n+1} \|x\| \end{aligned}$$

dir. Böylece, tümevarımla ispatlanmış olur.

3.1.4. Teorem : a 'nın σ -merkezimsi olduğunu ve $\pi : A \rightarrow L(X)$ in $\sigma_{L(X)}(\pi a)$, $\sigma_A(a)$ 'nın sınırına rastlayacak şekilde X Banach uzayı üzerinde A 'nın indirgenemez bir tasviri olduğunu varsayalım. O takdirde πa bir skaler operatördür.

İspat : X , $x \in A$ ve $\zeta \in X$ için $x\zeta = \pi(x)\zeta$ şeklinde sol indirgenemez bir A -modül gibi kabul edilsin. Johnson 'un bir sonucundan dolayı, $C \geq 0$ sabiti, her $x \in A$ ve $\zeta \in X$ için

$$\|x\zeta\| \leq C \|x\| \|\zeta\|$$

olacak şekilde π doğrudan süreklidir. Eğer $a \in Q_\sigma(K)$ ise, o taktirde Yardımcı Teorem 3.1.3. 'den dolayı, her $x \in A$, $\zeta \in X$ ve $\lambda \in \rho(a)$ için

$$\|(\lambda - a)^{-1} D_a x \zeta\| \leq C(K+1) \|x\| \|\zeta\| \text{ dir}$$

Y , her $\lambda \in \rho(a)$ için $(\lambda - a)^{-1} \zeta$ sınırlı olacak şekilde X 'in lineer bir alt uzayıdır. Ve, her $x \in A$ ve $\zeta \in X$ için $D_a x \zeta \in Y$ dir. Üstelik, herhangi bir $b \in A$ ve $\zeta \in Y$ için Y bir alt-modül olacak şekilde

$\rho(a)$ 'daki her λ için
 $(\lambda-a)^{-1}b = (\lambda-a)^{-1}b(\lambda-a)(\lambda-a)^{-1}$ 'in sınırlı kaldığı görülür.

Çünkü $\sigma_{L(X)}(\pi a)$, $\sigma_A(a)$ 'nın sınırına rastlar,

$(\lambda-\pi a)^{-1}$ her $\lambda \in \rho_A(a)$ için $L(X)$ 'de sınırlı değildir ve dolayısıyla düzgün sınırlılık teoreminden dolayı $Y \neq X$ dir. π nin indirgenemezliğinden dolayı, her $x \in A$ ve $\exists x \in X$ için $Y=0$ dir ve dolayısıyla $D_{A \times X} \{x\} = 0$ olur. Başka bir deyişle πa $\pi(a)$ 'da merkezdir ve dolayısıyla πa skaler bir operatördür.

3.1.5. Sonuç : A 'nın bir X Banach uzayı için $L(X)$ 'in indirgenemez bir alt cebir olduğunu varsayalım. O taktirde A 'nın her bir σ -merkezimsi elemanı skalerdir.

İspat : $A \rightarrow L(X)$ kapsama tasviri A 'nın indirgenemez bir tasviridir ve Teorem 3.1.3.'ün spektral koşulu her σ -merkezimsi eleman için sağlanacak şekilde her bir $a \in A$ için $\delta \sigma_A(a) = \sigma_{L(X)}(a)$ dir. ($\delta \sigma_A(a) \subseteq \delta_{L(X)}(a)$ dir.)

$K \subset \mathbb{C}$ 'de tıkkız bir küme olsun ve $\mathcal{F}$, K 'nin tümleyeninin sınırsız bileşeni üzerinde analitik ve sınırlı olan tüm kompleks değerli fonksiyonların sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{F}$ 'in her bir elemanı sabit ise, K 'ya bir Painlevé boş kümesi adı verildiğini belirtelim.

Painlevé boş kümelerinin sınıfı sıfır lineer ölçümlü tüm tıkkız kümeleri kapsar ve sıfır analitik kapasiteli tıkkız kümeleri ile çakışır.

3.1.6. Yardımcı Teorem : Her $p \in P$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\|p\|_{n+1} \leq 2^{n+2} \|(\lambda-v)p(v)\|_n$$

dir.

İspat : (i) $|\lambda| \leq 3 \cdot 2^{-n-2}$ olduğunu varsayalım. Eğer $|\Gamma| = 2^{-n}$ ise, o taktirde

$$|(\lambda-\Gamma)p(\Gamma)| \geq 2^{-n-2} |p(\Gamma)| \quad \text{dir öyle ki}$$

$$\|p\|_{n+1} \leq \|p\|_n \leq 2^{n+2} \|(\lambda-v)p(v)\|_n \quad \text{dir.}$$

(ii) Eğer $|\lambda| \geq 3 \cdot 2^{-n-2}$ ise benzer bir düşünce,

$$\|p\|_{n+1} \leq 2^{n+2} \|(\lambda-v)p(v)\|_{n+1} \leq 2^{n+2} \|(\lambda-v)p(v)\|_n$$

olduğunu ispatlar.

3.1.7. Örnek : k bir doğal sayı olsun. $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$, $u^k \neq 0$, $u^{k+1} = 0$ ve her $x \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|ux\| \leq \|(\lambda-v)x\|$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ 'nin u ve v elemanları ve değişmeli bir $\mathbb{C}$ Banach cebiri vardır.

Kurulması : C_0 , $u^{k+1} = 0$ koşulu ile değişen belirli olmayan u ve v 'de $\mathbb{C}$ üzerindeki tüm polinomların cebiri olsun. Böylece C_0 'ın elemanları $p_0, p_1, \dots, p_k \in P$ olmak üzere

$$x = \sum_{r=0}^k p_r(v)u^r \quad (*) \text{ şeklindedir.}$$

$$\|x\| = \sum_{r=0}^k \|p_r\|_r \text{ yazılarak } C_0 \text{ 'da bir norm verelim. Burada } x$$

(*) 'da verildiği gibidir. $\|1\| = \|u\| = \|v\| = 1$ olduğunu belirtelim. C_0 'da her x ve y için $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ olduğunu gerçeklemek alışılmış bir hesaptır. C bu norm için C_0 'ın bir eksiksizlemesi olsun.

Eğer x (*) 'daki gibi ise ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise o taktirde

$$ux = \sum_{r=0}^{k-1} p_r(v)u^{r+1} \text{ ve } (\lambda - v)x = \sum_{r=0}^k (\lambda - v)p_r(v)u^r \text{ dir öyle ki}$$

teorem 3.1.6. 'dan dolayı,

$$\|ux\| = \sum_{r=0}^{k-1} \|p_r\|_{r+1} \leq \sum_{r=0}^{k-1} 2^{r+2} \|(\lambda - v)p_r(v)\|_r \leq 2^{k+2} \|(\lambda - v)x\|$$

dir. Bu eşitsizlik süreklilikten dolayı C 'de her x için geçerlidir. u yerine $2^{-k-1}u$ koyarak gerekli örnek elde edilir.

3.2. Bir Banach Cebirinde Merkezliğe Bağlı Koşullar II

Bu kısımda, tüm lineer uzaylar ve cebirler, kompleks sayıların $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlanmış olarak alınacaktır. Bir X Banach uzayı verildiğinde, $BL(X)$ X üzerinde tüm sınırlı lineer operatörlerin cebirini gösterecektir.

Aşağıda, bazı örnekler verelim :

3.2.1. Eğer a merkezimsi ise ve $\sigma_A(a)$ sıfır analitik kapasiteye sahip ise (özellikle $\sigma_A(a)$ sayılabilirse), o taktirde $a \in \text{Mer}A$ dir.

3.2.2. Herhangi bir merkezimsi a elemanı için, a 'ya karşılık gelen D_a iç türevi ($D_a x = ax - xa$ koşulu ile A içine A 'nın bir tasviri olarak tanımlanmış) topolojik olarak sıfır güçlüdür, yani $\mu(D_a) = 0$ dir.

3.2.3. Eğer a merkezimsi, $x \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise, o taktirde ancak ve ancak $(\lambda - a)x = 0$ ise $x(\lambda - a) = 0$ dir.

3.2.4. Eğer A , bir X Banach uzayı için $BL(X)$ 'in birimli kapalı bir alt cebiri ise ve A , X üzerinde indirgenemezliği etkiliyorsa, o taktirde A 'nın her merkezimsi elemanı bir skaler operatördür.

3.2.5. Birimli-Olmayan Cebirler : A birim elemansız bir Banach cebiri olsun ve $A^* = C \oplus A$ onun birimleştirmesi olsun.

A üzerinde verilen topolojiyi üreten A^* üzerindeki herhangi bir norm,

$$\|\alpha + x\| = |\alpha| + \|x\| \quad (\alpha \in C, x \in A)$$

ya eşdeğerdir. $a \in Q(K, A)$, $x \in A$, $\alpha, \lambda \in C$ ve $\lambda \notin \sigma_A(a)$ olduğunu varsayalım. O taktirde,

$$\begin{aligned} \|(\alpha + x)(\lambda - a)\| &= |\alpha\lambda| + \|\alpha a - x(\lambda - a)\| \\ &= |\alpha\lambda| + \|\alpha a(\lambda - a)^{-1} - x\| \|\lambda - a\| \\ &\leq |\alpha\lambda| + K \|\lambda - a\| \|\alpha a(\lambda - a)^{-1} - x\| \\ &= |\alpha\lambda| + K \|\alpha a - (\lambda - a)x\| \leq K \|\lambda - a\| \|\alpha + x\| \end{aligned}$$

dır. Çünkü $(\lambda - a)^{-1}a \in A$ dır.

3.2.6. Önerme : a 'nın A 'da merkezimsi olduğunu varsayalım. O taktirde aşağıdaki koşulların ikisinden biri a 'nın A^* 'da merkezimsi olduğunu sağlamaya yeter :

(i) $\sigma_A(a)$ 'nın hiç bir yerde yoğun olmadığı O 'nın bir komşuluğu vardır.

(ii) $a = \lim a_n = \lim u_n$ olacak şekilde A 'da sınırlı bir (u_n) dizisi vardır.

İspat : (i) $a \in Q(K, A)$ olduğunu ve $\sigma_A(a)$ 'nın $\{\lambda \in C : |\lambda| < \delta\}$ da hiç bir yerde yoğun olmadığını varsayalım. Süreklilikten dolayı, 3.1. 'deki (2) eşitsizliği her $|\lambda| \leq \delta$ için geçerlidir. Bununla beraber, $|\lambda| \geq \delta$ için,

$$\begin{aligned} \|\alpha a - x(\lambda - a)\| &\leq |\alpha| \|a\| + K \|\lambda - a\| \|x\| \\ &\leq (K+1) |\alpha| \|a\| + K \|\alpha a - (\lambda - a)x\| \\ &\leq (K+1)\delta^{-1} \|a\| |\alpha\lambda| + K \|\alpha a - (\lambda - a)x\| \end{aligned}$$

eşitsizliği,

$$\|(\alpha + x)(\lambda - a)\| \leq M |\alpha\lambda| + M \|\alpha a - (\lambda - a)x\| = M \|\lambda - a\| \|\alpha + x\|$$

eşitliğini verir. Burada $M = \max(1+(K+1)\delta^{-1}\|a\|, K)$ dir. O halde $a \in Q(M, A^*)$ dir.

(ii) Tüm n 'ler için $\|u_n\| \leq B$ olsun. O taktirde A 'daki tüm x ler, C 'deki ve n doğal sayıları için,

$$\begin{aligned} \|u_n a - x(\lambda - a)\| &= \|\lambda u_n - (u_n + x)(\lambda - a)\| \\ &\leq B |\lambda| + K \|(\lambda - a)(u_n + x)\| \\ &\leq (K+1)B |\lambda| + K \|\lambda u_n - (\lambda - a)(u_n + x)\| \\ &= (K+1)B |\lambda| + K \|a u_n - (\lambda - a)x\| \end{aligned}$$

dir. $n \rightarrow \infty$ giderken, her $\alpha, \lambda \in C$ ve $x \in A$ için

$$\begin{aligned} \|a - x(\lambda - a)\| &\leq (K+1) B |\lambda| + K \|a - (\lambda - a)x\|, \\ \|\alpha a - x(\lambda - a)\| &\leq (K+1) B |\alpha \lambda| + K \|\alpha a - (\lambda - a)x\| \end{aligned}$$

sonucunu verir.

(i) 'deki gibi uygun bir M sabiti için

$$\|(\alpha + x)(\lambda - a)\| \leq M \|(\lambda - a)(\alpha + x)\| \quad \text{elde edildi.}$$

Eğer A sınırlı iki-taraflı bir yaklaşım özdeşliğine sahipse Önerme 3.2.6. (ii) 'nin kesinlikle sağlandığını belirtelim.

3.2.7. Örnek : Bir A Banach cebiri ve A^* 'da merkezimsi olmayan A 'nın merkezimsi bir a elemanı vardır.

Kurulması : $A_0, x = \alpha e + \beta e a + a p(a)$ (1)
tipindeki tüm biçimsel ifadelerin kümesi olsun. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve p $\mathbb{C}$ üzerinde bir polinomdur. $e^2 = e$, $ae = a$ ve $ea^2 = a^2$ tanımlanışıyla A_0 'da birleşmeli bir çarpım ortaya çıkarılsın. e 'nin A_0 cebiri için bir sağ birim olduğunu fakat bir sol birim olmadığını belirtelim.

$$\|x\| = |\alpha| + |\beta| + \sup_{|z| \leq 1} |p(z)| \quad \text{tanımlansın.}$$

$$\text{Her } x_1, x_2 \in A_0 \text{ için } \|x_1 x_2\| \leq M \|x_1\| \|x_2\|$$

olacak şekilde bir M sabitinin var olduğunu göstermek alışılmış bir durumdur ki A_0 'daki bu norm bir cebir norma eşittir. Bunun kontrolü altında,

$$\|e a p(a)\| = |p(0)| + \sup_{|z| \leq 1} |p(z) - p(0)| \leq 3 \sup_{|z| \leq 1} |p(z)|$$

olması için $eap(a) = p(0)ea + a[p(a)-p(0)]$ olması gerektiğini belirtelim. A, bu norma göre A_0 'ın eksiksizlemesi olsun.

Eğer x (1) 'deki gibi ise, o taktirde her $\epsilon \in \mathbb{C}$ için

$$\|(\lambda-a)x\| = |\lambda\alpha| + |\lambda\beta| + \sup_{|z| \leq 1} |(\lambda-z)p(z) - \beta z - \alpha| \quad (2)$$

olacak şekilde

$$(\lambda-a)x = \alpha e + \beta ea + a[(\lambda-a)p(a) - \beta a - \alpha] \text{ eşitliği vardır.}$$

Böylece eğer $|\lambda| \leq 1$ ise (2) içindeki supremum $z = \lambda$ 'daki değerden daha küçük değilken $|\lambda| \geq 1$ ise

$$\|(\lambda-a)x\| \geq |\lambda\beta| + |\lambda\beta + \alpha| \geq |\alpha|$$

olacak şekilde

$$\|(\lambda-a)x\| \geq |\lambda\alpha| \geq |\alpha| \quad (3)$$

$$\text{dır. O halde her } \lambda \in \mathbb{C} \text{ için } \|(\lambda-a)x\| \geq |\alpha| \quad (4)$$

$x(\lambda-a) = (\lambda-a)x + ax - xa$ ve $\|ax-xa\| = \|\alpha a - \alpha ea\| = 2|\alpha|$ dır ve dolayısıyla (4) 'den $\mathbb{C}$ içindeki tüm λ ve A_0 içindeki tüm x 'ler için

$$\|x(\lambda-a)\| \leq \|(\lambda-a)x\| + 2|\alpha| \leq 3\|(\lambda-a)x\|$$

dır.

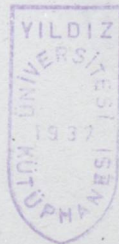
Süreklilikten dolayı, A içindeki tüm x 'ler için geçerlidir. O halde a , A içinde merkezimsidir. Bununla beraber,

$$(e-1)a = ea - a \neq 0 \text{ ve } .$$

$a(e-1) = 0$ olduğundan a 'nın A^* içinde merkezimsi olmadığı açıktır.

KAYNAKLAR

- 1-) GAMELIN, T.W. Uniform Algebras, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1969
- 2-) RENNISON, J.F. Conditions Related to Centrality in a Banach Algebra, J. London Math. Soc. (2), 26 (1982), 155-168
- 3-) RENNISON, J.F. Conditions Related to Centrality in a Banach Algebra II, J. London Math. Soc. (2), 35 (1987), 499-513
- 4-) RUDIN, W. Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill Inc. New York 1982
- 5-) SIMMONS, G.F. Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc Graw-Hill Book Company Inc., Tokyo 1963



ÖZGEÇMİŞ

1966 yılında İstanbul 'da doğdum. İlk öğrenimimi Kültür Koleji 'nde (1972-1977), orta öğrenimimi Özel Çavuşoğlu Lisesi 'nde (1977-1983) ve yüksek öğrenimimi Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 'nde (1983-1988 Şubat) tamamladım. Ocak-1989 'da Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalı 'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım.Halen bu görevimi sürdürmekteyim.

