YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İki Boyutlu Laplace Denkleminin Kullanım Yerleri

Figen Torunbalcı

Yüksek Lisans Tezi

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU LAPLACE DENKLEMİNİN KULLANIM YERLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARAŞ.GÖR. FÜGEN TORUNBALCI

İSTANBUL - 1987

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU LAPLACE DENKLEMİNİN KULLANIM YERLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARAŞ.GÖR. FÜGEN TORUNBALCI

İSTANBUL - 1987

TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten, çalışmalarım sırasında teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Doç. Yaşar ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında yardım ve emeğini esirgemeyen kardeşim Araştırma Görevlisi Necdet TORUNBALCI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bilim ve tekniğin gelişmesinde önemli katkısı olan Kısmi ve Adi Diferansiyel Denklemler bugün Mühendisliğin bütün branşlarında ele alınmakta olup, bu konuda çok değişik şekilde çalışmalar yapılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer eliptik bir denklem olan Lalace denklemi de bu alanlarda çok kullanılan kısmi bir diferansiyel denklemdir.

İki değişkenli

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.31)$$

Laplace denkleminin tarafımdan incelenmesi iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde genel olarak ikinci mertebeden Lineer kısmi diferansiyel denklemler ele alınmış olup, bu denklemlerin tanımı, kanonik forma indirgenmesi ve sınıflandırılması üzerinde durularak üç tipe ayrıldığı gösterilmiştir. Hiperbolik, Parabolik ve Eliptik olarak üç tipten oluşan bu denklemlerden özellikle eliptik olanı üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde ise bir eliptik denklem olan ve bu tezin konusunu oluşturan Laplace denklemi incelenmiştir. İki boyutlu olarak ele alınan Laplace denkleminin oluşumu, fiziksel olaylarda kullanımı, kartezyen koordinatlardaki ifadesi ele alınarak Sınır-Değer Problemleri olarak adlandırılabilen problemin çözümleri incelenmiştir. Analitik çözüm ve değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözümler de araştırılmıştır.

Ayrıca bu bölümde aynı zamanda potansiyel denklem olarak da adlandırılan Laplace denkleminin bir dikdörtgen üzerinde, bir slot üzerinde ve bir disk üzerinde başlangıç koşullarıyla birlikte çözümleri de verilmiştir.

SUMMARY

In the mathematization of the problems of pure and applied sciences and those of engineering ordinary and partial differential equations have been forming the most indispensable means. On the other side broadness and difficulties involved have made the mathematical discipline of differential equations the most favorite subject of mathematicians of our century. Never the less going on research involving differential equations does not seem to come to end in sight.

Focus of my thesis is the Laplace's Equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.31)$$

In the first part second-order linear partial differential equations are taken into consideration, in general: their definitions, reduction to their canonical forms, their classification as hyperbolic, parabolic and elliptic types are outlined. Finally some examples of the elliptic types are shortly considered.

In the second chapter elliptic type equation of (2.31) has been studied, its definition, expression in the Cartesion form, applications in the classical physics are treated closely, solutions with various boundary values are studied. Analytical solutions are obtained theis and solutions by means of the method of separations of variables are also studied.

Moreover in this main chapter, Laplace's equation (also called "potential equation") over a region of the type of a rectangle, of a slot and of a disc are considered, their solutions are studied.

BÖLÜM : I

İKİNCİ MERTEBEDEN DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

1.1. TANIM

$$A(x,y)U_{xx} + B(x,y)U_{xy} + C(x,y)U_{yy} + D(x,y)U_x + E(x,y)U_y + F(x,y)U = G(x,y) \quad (1.1)$$

diferansiyel denklemine ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer kısmi deferansiyel denklemi denilir.

Burada A,B,C,D,E,F x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonlarıdır.

1.2. KANONİK FORMA İNDİRGEME

(1.1) denklemi

$$Ax^2 + Bxy + C\,y^2 + DE + EF + G = 0 \quad (1.2)$$

kuadratik yüzeylerinin denklemlerine benzetilebilir.

(1.2) denklemi analitik geometri derslerinden bilindiği gibi

$\Delta = B^2 - 4AC > 0$ ise Hiperbolik

$\Delta = B^2 - 4AC = 0$ ise Parabolik (1.3)

$\Delta = B^2 - 4AC < 0$ ise Eliptik

olarak sınıflandırılır.

Benzer şekilde (1.1) diferansiyel denklemi (1.3) bağıntılarına göre hiperbolik, parabolik, eliptik olarak adlandırılırlar ve uygun dönüşümle kanonik denilen şekillere indirgenebilirler.

Gerçekten x ve y bağımsız değişkenlerinin

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \tag{1.4}$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım ve

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0 \tag{1.5}$$

olduğunu varsayalım. Buna göre Z(x,y) fonksiyonu $Z^*(\xi.\eta)$ şekline dönüşür.

Şimdi (1.1) denklemindeki U_x, U_y, U_{xx}, U_{xy}, U_{yy} kısmi türevlerini ξ ve η cinsinden hesaplayalım.

$$U_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x$$

$$U_y = U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + U_{\eta\eta} \eta_x^2 + U_\xi . \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx}$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + U_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta \eta_{xy}$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2U_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + U_{\eta\eta} \eta_y^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy}$$

Bu türevler (1.1) denklemine götürülürse

$$(A(x,y)\xi_x^2 + B(x,y)\xi_x\xi_y + C(x,y)\xi_y^2)\,U_{\xi\xi} +$$
$$(2A(x,y)\xi_x\eta_x + B(x,y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C(x,y)\xi_y\eta_y)\,U\xi\eta +$$
$$(A(x,y)\eta_x^2 + B(x,y)\eta_x\eta_y + C(x,y)\eta_y^2)\,U_{\eta\eta} +$$
$$(A(x,y)\xi_{xx} + B(x,y)\xi_{xy} + C(x,y)U\xi\xi + D(x,y)\xi_x + E(x,y)\xi_y)\,U\xi +$$
$$(A(x,y)\eta_{xx} + B(x,y)\eta_{xy} + C(x,y)\eta_{yy} + D(x,y)\eta_x + E(x,y)\eta_y)\,U\eta +$$
$$F(x,y)\,U = G(\xi,\eta) \tag{1.6}$$

bulunur.

$$A^* = A(x,y)\xi_x^2 + B(x,y)\xi_x\xi_y + C(x,y)\xi_y^2$$
$$B^* = 2A(x,y)\xi_x\eta_x + B(x,y)(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C(x,y)\xi_y\eta_y$$
$$C^* = A(x,y)\eta_x^2 + B(x,y)\eta_x\eta_y + C(x,y)\eta_y^2$$
$$H^* = A(x,y)\xi_{xx} + B(x,y)\xi_{xy} + C(x,y)\,U\xi\xi + D(x,y)\xi_x + E(x,y)\xi_y$$
$$+A(x,y)\eta_{xx} + B(x,y)\eta_{xy} + C(x,y)\eta_{yy} + D(x,y)\eta_x$$
$$+E(x,y)\eta_y + F(x,y) - G(x,y)$$

olarak alınırsa (1.6) denklemi

$$A^* U_{\xi\xi} + B^* U_{\xi\eta} + C^* U_{\eta\eta} = H^*(\xi,\eta,U,\,,U\xi\,,U\eta) \tag{1.7}$$

şeklini alır. Şimdi (1.7) diferansiyel denklemini en basit şekle getirecek şekilde ξ ve η'yı seçelim. Üç hal gözönüne alınabilir.

I. ξ ve η'yı $A^* = 0$, $B^* = 0$ olacak şekilde seçelim.

$$A(x,y)\,\xi_x^2 + B(x,y)\xi_x\eta_y + C(x,y)\xi_y^2 = 0$$
$$A(x,y)\,\eta_x^2 + B(x,y)\eta_x\eta_y + C(x,y)\eta_y^2 = 0$$

yazılır.

$$A(x,y)f_x^2 + B(x,y)f_x f_y + C(x,y)f_y^2 = 0 \tag{1.8}$$

bağıntısını gözönüne alalım. $f_x = \xi_x$ konursa birinci, $f_x = \eta_x$ konursa ikinci bağıntı elde edilir.

$$f(x,y) = C$$

alınırsa

$$f_x d_x + f_y d_y = 0$$

olur. Buradan

$$\frac{f_x}{f_y} = -\frac{dy}{dx} \qquad (1.9)$$

bulunur (1.8) bağıntısının heriki tarafı f_y^2 ile bölünürse

$$A(x,y)\left(\frac{fx}{fy}\right)^2 + B(x,y)\left(\frac{fx}{fy}\right) + C(x,y) = 0$$

bulunur. Bu bağıntıda (1.9) ifadesini yazarsak,

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B(x,y)\frac{dy}{dx} \quad C(x,y) = 0 \qquad (1.10)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \qquad (1.11)$$

olarak çözülür. Bu ifade düzenlenip integre edilirse

$$y = \varphi_1 (x) + C_1$$

$$y = \varphi_2 (x) + C_2$$

veya

$$y - \varphi_1(x) = C_1$$

$$y - \varphi_2(x) = C_2$$

bulunur.

$$\xi(x,y) = C_1 = \xi$$

$$\eta(x,y) = C_2 = \eta \qquad (1.12)$$

olsun. $\xi = C_1$, $\eta = C_2$ eğrilerine karakteristik eğriler denilir. (Şekil 1) Böylece (1.4) dönüşümlerinin şekli belirlenmiş olur.

Şimdi $\Delta = B^2 - 4AC$ diskirminatının pozitif, negatif ve sıfır olduğu halleri inceleyelim.

a) $B^2 - 4AC > 0$ ise

Bu şart sağlandığı zaman (1.10) denkleminin birbirinden farklı iki gerçel kökü mevcut olur.

(1.7) denkleminde A^* ve C^* ifadelerini sıfır yapacak şekilde ξ η bağımsız değişkenleri belirtilebilir. Bu takdirde

$$B^* U_{\xi\eta} = H^*(\xi,\eta,\ U,\ U_\xi,\ U_\eta) \tag{1.13}$$

veya

$$U_{\xi\eta} = \frac{H^*}{B^*} = H_1(\xi,\eta,\ U,\ U\xi,\ U\eta) \tag{1.14}$$

bulunur. (1.14) ifadesine hiperbolik diferansiyel denklemin 1. Kanonik Formu denilir.

Hiperbolik diferansiyel denkleminin ikinci kanonik formunu elde etmek için

$$\xi + \eta = \alpha$$
$$\xi - \eta = \beta$$

değişken dönüştürmesi yapılır, U_ξ, U_η kismi türevler hesaplanırsa

$$U_\xi = U_\alpha + U_\beta \tag{1.15}$$
$$U_\eta = U_\alpha - U_\beta$$

bulunur. Hiperbolik diferansiyel denklemin birinci kanonik formunda bulunan $U_{\xi\eta}$ kısmi türevi hesaplanırsa

$$U_{\xi\eta} = (U_{\alpha\alpha} + U_{\alpha\beta})\alpha\eta + (U_{\beta\alpha} + U_{\beta\beta})\beta_\eta$$
$$U_{\xi\eta} = U_{\alpha\alpha}\ U_{\alpha\beta} - (U_{\beta\alpha} + U_{\beta\beta})$$
$$U_{\xi\eta} = U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} \tag{1.16}$$

elde edilir (1.16) bağıntısı (1.14) bağıntısına götürülürse

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\frac{\alpha+\beta}{2}\ \frac{\alpha-\beta}{2}, U, U_\alpha, U_\beta, U_\alpha - U_\beta) \qquad (1.17)$$

diferansiyel denklemi veya

$$U_{\alpha\alpha} - U_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta) \qquad (1.18)$$

elde edilir. (1.18) ifadesine hiperbolik diferansiyel denklemin ikinci kanonik formu denir.

b) $B^2 - 4AC = 0$ ise

Bu halde (1.10) denkleminin iki katlı kökü vardır.

$$B^2 - 4AC = 0 \text{ ise } B = \pm 2\sqrt{AC} \qquad (1.19)$$

olur.

(1.7) denkleminde $A^* = 0$ seçilir ve (1.19) bağıntısı gözönüne alınırsa

$$A^* = A\xi_x^2 + 2\sqrt{AC}\ \xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0$$

veya

$$A^* = (\sqrt{A}\ \xi_x + \sqrt{C}\xi_y)^2 = 0$$

yazılır. Buradan

$$\sqrt{A}\ \xi_x + \sqrt{C}\ \xi_y = 0 \qquad (1.20)$$

bulunur. B^* eşitliğinde $B = 2\sqrt{AC}$ yazılırsa

$$B^* = 2(A\xi_x\eta_x + \sqrt{AC}\xi_x\xi_y + \sqrt{AC}\ \xi_y\eta_x + C\xi_y\eta_y)$$

$$B^* = 2(\sqrt{A}(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)\eta_x + \sqrt{C}\ (\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)\ \eta_y)$$

$$B^* = 2(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y)(\sqrt{A}\ \eta_x + \sqrt{C}\ \eta_y) \qquad (1.21)$$

olur. (1.20) ve (1.21) bağıntıları gözönüne alınırsa $B^* = 0$ olur. Buna göre

$$C^* U_{\eta\eta} = H^* (\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$$

veya

$$U_{\eta\eta} = \frac{H^*}{C^*} = H_2 (\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \qquad (1.22)$$

bulunur. (1.22) ifadesine parabolik diferansiyel denklemin Kanonik Formu denir.

c) $B^2 - 4AC < 0$ ise

Bu halde (1.10) denkleminin karmaşık iki kökü vardır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} i \qquad (1.23)$$

(1.23) adi diferansiyel denklemi integre edilir ve

$$\alpha + i\beta = C_1$$

$$\alpha - i\beta = C_2$$

bulunur.Ve

$$\alpha = \frac{1}{2} (\xi + \eta)$$

$$\beta = \frac{1}{2i} (\xi - \eta)$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta) \qquad (1.24)$$

elde edilir. (1.24) ifadesine eliptik difarensiyel denklemin Kanonik Formu denilir.

Üç kanonik formda incelenen hiperbolik, parabolik ve eliptik diferansiyel denklemleri şu isimlerle de kullanılır.

Bir boyutlu dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

olup

$$U_{\xi\eta} = 0$$

kanonik formuna getirilebilir ve hiperboliktir.

Bir boyutlu difüzyon denklemi

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial Z}{\partial y} .$$

kanonik formdadır ve paraboliktir.

İki boyutlu harmonik denklem

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$$

kanonik formda olup ve eliptiktir. Bu denkleme Laplace denklemi denir.

1.3. ÖRNEKLER

1) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = x^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ denklemini kanonik forma indirgeyelim.

Bu halde $A=1$, $B=0$, $C=-x^2$ dir.

(1.10) denkleminin kökleri $\pm x$ dir ve (1.11) denklemi

$\dfrac{dy}{dx} \pm x = 0$ olur.

$$\xi = y + \frac{1}{2}x^2 , \quad \eta = y - \frac{1}{2}x^2$$

alabiliriz. O zaman

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{4(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{\partial U}{\partial\xi}\right)$$

kanonik formuna indirgenir.

2) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ denklemini kanonik forma indirgeyelim.

Bu halde $A=1$, $B=2$, $C=1$'dir.

(1.10) denklemine karşılık olarak

$$1 + 2\alpha + \alpha^2 = 0$$

ile (b) halidir. Böylece $\lambda=-1$'e sahip oluruz.

$$\xi = x - y, \quad \eta = x + y$$

alabiliriz. O zaman

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} = 0$$

kanonik formuna indirgenir.

3) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ denklemini kanonik forma indirgeyelim.

Bu halde (1.10) denkleminin kökleri $\lambda_1 = ix$, $\lambda_2=-ix$'dir.

$$\xi = iy + \frac{1}{2}x^2, \quad \eta = -iy + \frac{1}{2}x^2$$

ve

$$\alpha = \frac{1}{2} x^2 \quad , \quad \beta = y$$

alabiliriz. O zaman

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\alpha \beta^2} = - \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha}$$

kanonik formuna indirgenir.

BÖLÜM II

LAPLACE DENKLEMİ

2.1. TANIM

Matematiksel fizikte rastlanılan örneklerden eliptik tipe ait olan Laplace denklemi,

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \ldots) \qquad (2.1)$$

dır. Laplace denkleminde ortaya çıkan ϕ fonksiyonu çoğu zaman bir potansiyel fonksiyondur. Bu bakımdan (2) denklemine potansiyel denklemi adı da verilir. Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlara genel olarak harmonik fonksiyonlar denilir.

Bir örnekle Laplace denkleminin bir eliptik denklem olduğunu gösterelim.

$$xU_{xx} + U_{yy} = x^2$$

kısmi türevli diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Ve cinsini tayin edelim.

$$\Delta = B^2 - 4AC = 0 - 4x = -4x$$

1. hal: x > 0 kabul edelim. Yani eliptik halini gözönüne alalım.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{0 \pm \sqrt{-4x}}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 2\sqrt{x}\,i}{2x} = \pm \frac{i}{\sqrt{x}}$$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{i}{\sqrt{x}}$ ve $\frac{dy}{dx} = \frac{i}{\sqrt{x}}$ adi diferansiyel denklemleri çözülürse

$$y = -2i\sqrt{x} + C_1$$
$$y = 2i\sqrt{x} + C_2$$

bulunur.

$$y + 2i\sqrt{x} = C_1 = \xi$$
$$y - 2i\sqrt{x} = C_2 = \eta$$

alınırsa

$$\xi = \alpha + i\beta$$
$$\eta = \alpha - i\beta$$

veya

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta)$$

$$\beta = \frac{1}{2i}(\xi-\eta)$$

elde edilir.

$$U_x = U_\beta \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$U_{xx} = \frac{1}{x}\left(U_{\beta\beta} - \frac{1}{2\sqrt{x}} U_\beta\right)$$

$$U_y = U_\alpha$$
$$U_{yy} = U_{\alpha\alpha}$$

hesaplanan değerleri verilen denklemde yerine yazılırsa

$$x.\frac{1}{x}\left(U_{\beta\beta}-\frac{1}{2\sqrt{x}}U_{\beta}\right)+U_{\alpha\alpha}=x^2$$

$$U_{\beta\beta}-\frac{1}{2\sqrt{x}}U_{\beta}+U_{\alpha\alpha}=x^2$$

$$U_{\alpha\alpha}+U_{\beta\beta}=\frac{1}{2\sqrt{x}}U_{\beta}+x^2$$

elde edilir. Bulunan bu son bağıntı eliptik diferansiyel denklemin kanonik formudur.

2. Hal $x < 0$ ise yani $\Delta = -4x > 0$ hiperbolik halidir.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{0\pm\sqrt{-4x}}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{-x}}{x}=\pm\frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{-x}} \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{-x}}$$ adi diferansiyel

denklemleri çözülürse.

$$y=-2\sqrt{-x}-C_1$$

$$y=2\sqrt{-x}-C_2$$

bulunur.

$$y+2\sqrt{-x}=C_1=\xi$$

$$y-2\sqrt{-x}=C_2=\eta$$

alınırsa ve ξ_x, ξ_y, η_x, η_y türevleri hesaplanırsa

$$\xi_x=\frac{-1}{\sqrt{-x}}, \quad \xi_y=1$$

$$\eta_x=\frac{1}{\sqrt{-x}}, \quad \eta_y=1$$

elde edilir.

$$U_x = U_\xi \frac{-1}{\sqrt{-x}} + U_\eta \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

$$U_{xx} = U_{\xi\xi} \frac{-1}{x} + 2U_{\xi\eta} \frac{1}{x} - U_{\eta\eta} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} (U_\eta - U_\xi)(-x)^{-3/2}$$

$$U_y = U_\xi + U_\eta$$

$$U_{yy} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}$$

hesaplanan değerleri verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa

$$4U_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(U_\eta - U_\xi)(-x)(-x)^{-3/2} = x^2$$

$$4U_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(U_\eta - U_\xi)(-x)^{-1/2} + x^2$$

$$U_{\xi\eta} = \frac{1}{8}(U_\eta - U_\xi)(-x)^{-1/2} + \frac{x^2}{4}$$

bulunur. Burada x değerleri ξ ve η cinsinden yazarsak

$$U_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(U_\eta - U_\xi) \frac{1}{(\xi-\eta)} + \frac{(\xi-\eta)^4}{1024}$$

elde edilir. Bu son bağıntı verilen diferansiyel denklemin kanonik formudur.

2.2. LAPLACE DENKLEMİNİN KULLANILDIĞI FİZİKSEL OLAYLAR

(a) YERÇEKİMİ

(i) Çekici bir maddenin içinde ve dışında çekme kuvveti $\vec{F}$, yerçekimi potansiyeli adı verilen ϕ harmonik fonksiyonuna

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\phi \tag{2.2}$$

eşitliği ile bağlıdır.

(ii) Boşlukta $\emptyset$ fonksiyonu $\nabla^2\emptyset = 0$ Laplace denklemini sağlar.

(iii) Çekici maddenin ρ yoğunluğuna sahip olduğu bir yerde $\emptyset$ potansiyeli Poisson denklemini sağlar:

$$\nabla^2 \emptyset = -4\pi\rho \tag{2.3}$$

(iv) Çekici maddenin bir yüzey üzerine dağılmış olması halinde $\emptyset$ potansiyeli yüzeyin iki tarafında $\emptyset_1$ ve $\emptyset_2$ gibi farklı değerler alır. Yüzey üzerinde bu iki fonksiyon

$$\emptyset_1 = \emptyset_2 , \quad \frac{\partial \emptyset_2}{\partial n} - \frac{\partial \emptyset_1}{\partial n} = 4\pi\sigma \tag{2.4}$$

şartlarına uygundur. Burada σ çekici maddenin yüzeysel yoğunluğunu, n de yüzeyin 1 numaralı bölgeden 2 numaralı bölgeye doğru yöneltilmiş normalini göstermektedir.

(v) İzole edilmiş kütlenin bulunduğu yerler dışında $\emptyset$ fonksiyonunda singülerite mevcut olamaz.

(b) İDEAL BİR AKIŞKANIN İRROTASYONEL HAREKETİ

(i) İdeal bir akışkanın irrotasyonel hareketinde q hızı, hız potansiyeli denilen $\emptyset$ fonksiyonuna

$$\vec{q} = \mathrm{grad}\emptyset \tag{2.5}$$

eşitliği ile bağlıdır.

(ii) Kaynak ve kuyu olmayan akışkanın bütün noktalarında $\emptyset$ fonksiyonu $\nabla^2\emptyset=0$ Laplace denklemini sağlar.

(iii) Akışkan, üzerindeki tipik bir p noktasında $\vec{U}$ hızı ile hareket halinde bulunan bir rijid yüzey temasta bulunuyorsa,

$$(\vec{q} - \vec{U}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{2.6}$$

olur. Burada $\vec{n}$, p noktasındaki normalinin doğrultusudur. Böylece ϕ nin gerçeklemesi gereken şart, yüzeyin her noktasında

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -(U.n) \quad \text{dir.} \tag{2.7}$$

(iv) Eğer akışkan sonsuzda sukunette ise $\phi \rightarrow 0$ dır. Fakat z yönünde bir düzgün V hızı varsa $\phi \rightarrow 0$ şartının yerini $z \rightarrow \infty$ için

$$\phi \sim -Vz \tag{2.8}$$

şartı alır.

(v) ϕ fonksiyonu kaynak ve kuyu haricinde singüleritelere sahip değildir.

(c) ELEKTROSTATİK

(i) $\vec{E}$ elektrik vektörü, ϕ elektrostatik potansiyeli olmak üzere,

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\phi \tag{2.9}$$

bağıntısı ile ifade edilebilir.

(ii) ϕ potansiyeli boş uzayda

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Laplace denklemini sağlar.

(iii) Elektrik yüklerinin mevcut olması halinde ϕ fonksiyonu

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \tag{2.10}$$

poisson denklemini sağlar.

Burada ρ elektrik yük yoğunluğudur.

(iv) ϕ fonksiyonu her iletkende sabittir.

(v) $\vec{n}$, iletkene dıştan çizilen normal ise bu iletkenin her noktasında

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -4\pi\sigma \tag{2.11}$$

dır. Burada σ iletken üzerinde yüzeysel elektrik yük yoğunluğudur. Bu yüzden iletken üzerinde toplam yük

$$-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \phi}{\partial n}\, dS \tag{2.12}$$

dir. İntegral iletken yüzeyi üzerinden alınır.

(iv) Sonlu yük sistemi ile sonsuzda $\phi \rightarrow 0$ olur. Fakat bir z doğrultusunda bir düzgün $\vec{E}_o$ alanı mevcut ise, z için

$$\phi \sim \vec{E}_o z \tag{2.13}$$

dir.

(vii) İzole yüklerin bulunduğu yerler hariç, ϕ fonksiyonu singüleriteye sahip değildir. Bir q yükünün yakınında $\phi - q/r$ sonlu bir değere sahiptir. Benzer şekilde boşlukta bir m momentinin bir ikiz kutbu civarında $\phi - (m.r)/r^3$ sonludur.

(d) DİELEKTRİK

k dielktrik sabitini göstermek üzere, bir dielektriğin mevcut olması halinde ϕ potansiyeli aşağıdaki şartları sağlar:

(i) Yük var ise

$$\mathrm{div}(k.\mathrm{grad}\phi) = -4\pi\rho \tag{2.14}$$

veya k sabit olduğu takdirde

$$k\,\nabla^2 \phi = -4\pi\rho \tag{2.15}$$

poisson denklemini gerçekler.

(ii) Bir yüzey boyunca temas halinde bulunan iki ortam halinde, bu yüzeyin iki tarafında ϕ potansiyeli ϕ_1, ϕ_2 iki şekil alır, fakat yüzey üzerinde

$$\phi_1 = \phi_2, \quad K_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = K_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \qquad (2.16)$$

dir.

(iii) Bir iletken yüzey üzerinde

$$K \frac{\partial \phi}{\partial n} = -4\pi\sigma \qquad (2.17)$$

dir.

(e) MAGNETOSTATİK

(i) Manyetik vektör alanı $\vec{H}$, ϕ magnetostatik potansiyeli olmak üzere

$$\vec{H} = -\operatorname{grad}\phi \qquad (2.18)$$

bağıntısı ile ifade edilebilir.

(ii) Magnetik geçirgenliğe μ denirse

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = 0 \qquad (2.19)$$

dır. Eğer μ sabit kalırsa bu denklem

$$\nabla^2 \phi = 0$$

denklemine dönüşür.

(iii) Ani ortam değişikliğinde,

$$\phi_1 = \phi_2 \ , \ \mu_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \qquad (2.20)$$

dir.

(iv) Bir z doğrultusunda sabit bir $\vec{H}_o$ alanı varsa $z \rightarrow \infty$ iken

$$\phi \sim - H_o z \quad (2.21)$$

e sahip oluruz.

(v) Boşlukta bir $\vec{m}$ momentli magnet civarında ϕ-$(\vec{m}.\vec{r})/r^3$ sonludur. Burada r magnet merkezinden itibaren ölçülen uzaklıktır.

(f) KARARLI AKIMLAR

(i) $\vec{j}$ iletken akım vektörü, ϕ potansiyel fonksiyonu ile

$$\vec{J} = - \sigma \mathrm{grad}\phi \quad (2.22)$$

ile ifade edilebilir. Burada σ iletkenliği göstermektedir.

(ii) ϕ fonksiyonu

$$\mathrm{div}(\mu \mathrm{grad}\phi) = 0 \quad (2.23)$$

denklemini veya σ nın sabit olması

$$\nabla^2 \phi = 0$$

denklemini sağlar

(iii) Belirli bir potansiyelde yük sağlayan bir bataryadaki elektrot yüzeyinde ϕ sabittir.

Elektrotta kalan toplam akım i ise

$$i = - \int \sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad (2.24)$$

dir.

(iv) İletken ve yalıtkan arasındaki sınırda veya boşlukta akım mevcut değildir. Bu yüzden

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad (2.25)$$

dır.

(g) BİR AKIŞKAN ÜZERİNDE YÜZEYSEL DALGALAR

Yerçekimi etkisinde bulunan bir ideal akışkanın küçük genlikli dalga hareketlerinin ϕ hız potansiyeli aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\nabla^2 \phi = 0$

dir.

(ii) Serbest yüzey üzerinde

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{dir.} \qquad (2.26)$$

(iii) Sabit kenarlar üzerinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad (2.27)$$

dır.

(h) KARARLI ISININ AKIMI

Isının kararlı akımlı iletim teorisinde, ϕ sıcaklığı zamanla değişmez ve aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $\operatorname{div}\,(K \operatorname{grad}\phi) = 0$ (2.28)

dır. Burada K ısı iletkenliğini gösterir.

Ortamın heryerinde K sabit ise

$\nabla^2 \phi = 0$

Laplace denklemi sağlanır.

(ii) Sınır boyunca ısı akışı mevcut ise

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad (2.29)$$

dır.

(iii) Sabit bir ϕ_0 sıcaklığında yüzeyden ortama radyasyon geçtiğinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + h(\phi - \phi_o) \tag{2.30}$$

dır. Burada h bir sabittir.

2.3. KUTUPSAL KOORDİNATLARDA LAPLACE DENKLEMİ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2.31}$$

Laplace denklemini gözönüne alalım. Ve

$$x = r.\mathrm{Cos}\theta, \; y = r.\mathrm{Sin}\theta \tag{2.32}$$

değişken dönüşümünü yapalım.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\;, \; \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

$$U(x,y) = U(r.\mathrm{Cos}\theta,\, r.\mathrm{Sin}\theta) = V(r.\theta) \tag{2.33}$$

yazılabilir. (2.33) bağıntısından x ve y bağımsız değişkenlerine göre ikinci mertebeden türevler alınırsa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \mathrm{Cos}^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2\mathrm{Sin}\theta\,\mathrm{Cos}\theta}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial r} - \frac{\mathrm{Sin}^2\theta}{r^2}\,.\,\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{Sin}^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta}{r^2}\,\frac{\partial V}{\partial\theta} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \mathrm{Sin}^2\theta\,\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta}{r}\,\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial r} + \frac{\mathrm{Cos}^2\theta}{r^2}\,.\,\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{Cos}^2\theta}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{2\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\theta}{r^2}\,\frac{\partial V}{\partial\theta} \tag{2.35}$$

bulunur (2.34) ve (2.35) türevleri (2.31) bağıntısına götürülürse

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \qquad (2.36)$$

sonucuna varılır.

2.4. LAPLACE DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Belirli fiziksel fonksiyonların tartışılması, analitik formunu aradığımız $\emptyset$ fonksiyonun V bölgesinin belirli bir bölgesi içinde Laplace denklemini sağlamasına ek olarak aynı zamanda bu bölgenin S sınırı üzerinde belirli şartları sağ - lamasını da gerektirir.

Böyle bir $\emptyset$ fonksiyonunun bulunmasını gerektiren herhangi bir problem Laplace denklemi için bir sınır değer problemi olarak isimlendirilir.

Laplace denklemi için Dirchlet ve Neumann isimleri ile bilinen iki esas tip sınır değer problemi vardır.

2.4.1. İÇ DİRİCHLET PROBLEMİ

Belirli bir V bölgesinin S sınırı üzerinde tanımlanan sürekli bir fonksiyon f olmak üzere,

S üzerinde

$$\emptyset = f$$

ve V içinde

$$\nabla^2 \emptyset = 0$$

koşullarını sağlayan $\emptyset(x, y, z)$ fonksiyonunun aranması problemine iç Dirichlet problemi denilir.

2.4.2. DIŞ DİRİCHLET PROBLEMİ

f fonksiyonu basit bir şekilde birleştirilmiş sonlu bir V bölgesinin S sınırı üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon ise

V dışında

$$\nabla^2 \phi = 0$$

ve S üzerinde

$$\phi = f$$

koşullarını sağlayan bir $\phi(x,y,z)$ fonksiyonunun aranması problemine dış Dirichlet problemi denilir.

Örneğin, yüzeyin herbir noktası, tayin edilmiş belirli bir sıcaklıkta tutulduğu zamanki kararlı durumda, cismin içindeki sıcaklığın dağılımının bulunması bir iç Dirichlet problemidir.

Yüzey potansiyeli belirlenmiş bir cismin dışındaki potansiyel dağılımının saptanması ise bir dış Dirchlet problemidir.

İkinci tip sınır değer problemi Neumann adıyla anılır.

2.4.3. İÇ NEUMANN PROBLEMİ

Eğer f sonlu V bölgesinin S sınırının her bir noktasında tek tek tanımlanan sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

V içinde

$$\nabla^2 \phi = 0$$

ve S üzerinde $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = f$

olacak şekilde bir $\phi(x,y,z)$ fonksiyonunun aranması problemine iç Neumann problemi denir.

2.4.4. DIŞ NEUMANN PROBLEMİ

Eğer f sınırlandırılmış basit bir şekilde belirtilmiş V bölgesinin S sınırının herbir noktasında tanımlanan sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

V dışında

$$\nabla^2 \phi = 0$$

ve S üzerinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f$$

olacak şekilde bir $\phi(x,y,z)$ fonksiyonunun aranması problemine dış Neumann problemi denir.

İç Neumann probleminin çözümünün varlığı için gerekli şartı kolayca sağlayabiliriz.

Gauss Teoremi

$$\int_S a_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} \, dr \tag{2.37}$$

de $\vec{a} = \operatorname{grad} \phi$, $a_n = \dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ konulursa

$$\int_V \nabla^2 \phi \, dr = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dS \tag{2.38}$$

bulunur. Şimdi sınır üzerinde

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f(p), \quad p \in S \tag{2.39}$$

alınırsa

$$\int_V \nabla^2 \phi \, dr = \int_S f(p) \, dS \tag{2.40}$$

olur. Böylece $\nabla^2 \phi = 0$ ise S sınırı üzerinde f fonksiyonunun sıfır olması problemin çözümünün varlığı için gerek şart olduğunu gösterir ve

$$\int_S f(p)\, dS = 0 \qquad (2.41)$$

bulunur.

2.5. İKİ DEĞİŞKENLİ LAPLACE DENKLEMİ

İki değişkenli Laplace denklemi

$$\nabla^2 U(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.31)$$

şeklindedir. (2.31) demkleminin çözümü olan ve harmonik fonksiyon adını taşıyan bir $U=U(x,y)$ fonksiyonunun aşağıdaki şartları gerçeklediğini varsayacağız.

1°) $U(x,y)$ fonksiyonu bir D bölgesinin her noktasında kendisi ve ilk iki mertebeden türevleri süreklidirler (Regüler).

2°) D bölgesinin her noktasında bu fonksiyon (2.31) denklemini gerçeklemektedir.

Bu iki şartı sağlayan her $U(x,y)$ fonksiyonu harmonik fonksiyon adını taşıyacaktır.

İki değişkenli harmonik fonksiyonların kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla da ilgisi vardır. Gerçekten,

$$f(z) = U(x,y) + i\nu(x,y) \qquad (2.42)$$

analitik bir fonksiyon olduğuna göre

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial \nu}{\partial x} \qquad (2.43)$$

olduğundan,

$$\nabla^2 U = 0 \ , \ \nabla^2 \nu = 0$$

olur. Buna göre bir analitik fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları harmonik fonksiyonlardır.

2.6. LAPLACE DENKLEMİNİN ELEMANTER ÇÖZÜMLERİ

xoy düzleminde M(x,y); N(a,b) noktaları verildiğine göre

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{2.44}$$

uzaklığının lagoritması Laplace denkleminin bir çözümüdür.

$$U = \mathrm{Log}r \tag{2.5}$$

logr fonksiyonu (x,y) veya (a,b) çiftlerine göre simetrik olduğundan, bu sayılardan herhangi birine göre türevi de bir harmonik fonksiyondur. Bundan başka M, N doğrultusu ile ψ açısı yapan bir doğrultuyu L denir. Lnr'nin bu L doğrultusuna göre türevi de bir harmonik fonksiyondur.

2.7. ÇEMBER İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN ÇÖZÜLMESİ

Oxy düzleminde, orijin merkezli R yarıçaplı bir daire ve çevresi üzerinde verilen bir fonksiyon $f(\psi)$ olsunlar (ψ kutupsal açıdır).

Dairenin çevresi üzerinde,

$$U\big|_{r=R} = f(\psi) \tag{2.46}$$

değerini alan ve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.31)$$

Laplace denklemini dairenin içerisinde ve üzerinde gerçekleyen, daire içinde sürekli olan bir $U(r.\ \psi)$ fonksiyonu bulmak istenir. Problemi kutupsal koordinatlarla çözeceğiz. O zaman (2.31) denklemi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0 \qquad (2.36)$$

veya

$$r^2\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r\ \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0 \qquad (2.47)$$

şeklinde yazılır.

$$U = \phi(\psi).R(r) \qquad (2.48)$$

koyarak değişkenlerin ayrılması yöntemiyle çözüm arayalım: (2.48) ve (2.47) bağıntısına götürerek,

$$r^2\phi(\psi).R''(r)+r\phi(\psi).R'(r)+\phi''(\psi).R(r)= 0 \qquad (2.49)$$

veya

$$\frac{\phi''(\psi)}{\phi(\psi)} = -\ \frac{r^2R''(r)\ + r(R'(r)}{R(r)} = -k^2 \qquad (2.50)$$

elde edilir. Bu denklemin birinci yanı r'ye bağımlı olmadığı gibi, ikinci yanı da ψ 'ye bağımlı değildir. Buna göre sabit bir sayıya eşittirler. Bu sabiti $-k^2$ ile gösteriyoruz. Böylece (2.50) eşitliği iki denklem verir:

$$\phi''(\psi) + k^2\ \phi(\psi) = 0 \qquad (2.51)$$

$$r^2R''(r) + r\ R'(r) - k^2\ R(r) = 0 \qquad (2.52)$$

(2.51) denkleminin genel çözümü

$$\phi = A\text{Cos}k\psi + B\ \text{Sin}k\psi \qquad (2.53)$$

olacaktır.

(2.52) denkleminin $R(r) = r^m$ şeklindeki çözümünü arıyalım: $R(r) = r^m$ yi (2.52)'ye götürerek

$$r^2\, m(m-1)r^{m-2} - r.mr^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

veya

$$m^2 - k^2 = 0$$

elde edilir. r^k ve r^{-k} gibi birbirinden Lineer bağımsız iki özel çözüm yazabiliriz (2.52) denkleminin genel çözümü

$$R = C\, r^k + D\, r^{-k} \qquad (2.54)$$

olacaktır. (2.53) ve (2.54) ifadelerini (2.48) bağıntısına götürelim:

$$U_k = (A_k \mathrm{Cos}k\psi + B_k \mathrm{Sin}k\psi)\,(C_k r^k - D_k r^{-k}) \qquad (2.55)$$

(2.55) denklemi,sıfırdan farklı olmak üzere, k'nın bütün değerleri için (2.47) denkleminin çözümü olacaktır. Eğer k = 0 ise (2.51) ve (2.52) denklemleri

$$\emptyset'' = 0 \;,\quad rR'' + R'(r) = 0$$

ve buna göre

$$U_o = (A_o + B_o\psi)(C_o + D_o \ln r) \qquad (2.56)$$

yazılırlar.

Çözüm ψ nin periyodik bir fonksiyonu olmalı, zira ψ ve $\psi+2\pi$ ye tekabül eden aynı bir r değeri için aynı çözüme sahip olmalıyız. Gerçekten her defa dairenin aynı bir M noktası sözkonusudur. Bu nedenle (2.56) formülünde $B_o = 0$

olmasının gerektiği aşikârdır.

Sürekli ve sonlu bir çözümü daire içinde arıyalım. O halde, dairenin merkezinde, r= 0 için çözüm sonlu olmalı ve sonuç olarak (2.56) formülünde D = 0 olması gerekir. Ve (2.55) formülünde de D_k = 0 olmalı. Böylece (2.56) nın ikinci yanı A_oC_o çarpımına indirgenir. Biz bunu $\frac{A_o}{2}$ ile gösteriyoruz. Şu halde

$$U_o = \frac{A_o}{2}$$

problemimizin (2.55) şeklindeki çözümlerin bir toplamı şek - lindeki çözümünü arıyoruz. Toplam, ψ nin periyodik fonksiyonu olmalıdır. Eğer toplamın her terimi periyodik fonksiyon olur-sa toplam periyodik olacaktır. Bunun için k tam değerler ol - malıdır. Farzedelim'ki eğer (2.50) eşitliğinin taraflarını k^2 ye eşitlemiş olsaydık, periyodik bir fonksiyon bulmamış olacaktık. Madem ki A,B,C,D keyfi sabitler ve k nın negatif değerleri yeni özel çözümler vermiyorlar. O zaman k'ları

$$k = 1.2.3.4....n$$

pozitif sayıları ile sınırlayabiliriz. Böylece

$$U(r,\psi) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{Cos} n\psi + B_n \mathrm{Sin} n\psi) r^n \qquad (2.57)$$

olur. C_n sabiti A_n ve B_n içerisine yerleştirilmiştir. Şimdi A_n ve B_n sabitlerini (2.46) limit şartlarını gerçekleyecek tarzda seçelim. (2.57) eşitliğine r=R'yi götürerek (2.46) şartı gereğince

$$f(\psi) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \mathrm{Cos} n\psi + B_n \mathrm{Sin} n\psi) R^n \qquad (2.58)$$

elde ediyoruz. (2.58) denkleminin oluşması için $f(\psi)$ fonk-siyonunun $(-\pi,\pi)$ aralığında Fourier serisi halinde bir açı-lımı kabul etmesi A_nR^n, B_nR^n katsayılarının da Fourier kat-sayıları olması gerektirir. Buna göre, A_n ve B_n

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \text{Cosnt}\ dt$$
$$B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \text{Sinnt}\ dt \qquad (2.59)$$

formülleri ile tayin edilmişlerdir. Böylece (2.57) serisi (2.59) formüllerine göre tayin edilmiş katsayılar ile birlikte, eğer r ve ψ ye göre terim terime iki defa türetilebiliyorsa problemimizin çözümü olacaktır. (2.57) formülünü dönüştürelim. (2.59) daki kendi ifadeleri ile A_n ve B_n le yer değiştirerek ve bazı trigonometrik dönüşümler gerçeklenerek

$$U(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\text{Cosn}(t-\psi)\ dt\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \text{Cosn}(t-\psi)\right)dt \qquad (2.60)$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifadeyi dönüştürelim:

$$1+2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \text{Cosn}(t-\psi)\right) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left(e^{in(t-\psi)} + e^{-in(t-\psi)}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\psi)}\right)^n + \left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\psi)}\right)^n\right)$$

$$= 1 + \frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\psi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\psi)}} + \frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\psi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\psi)}}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\text{Cos}(t-\psi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$= \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\ \text{Cos}(t-\psi) + r^2} \qquad (2.61)$$

(2.60) formülünde köşeli parantez içindeki ifadeyi (2.61) ifadesi ile yer değiştirerek

$$U(r,\psi)= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2-2rR\cos(t-\psi)+r^2}\, dt \tag{2.62}$$

elde edilir. (2.62) formülüne Poisson integrali denilir.

Eğer $f(\psi)$ fonksiyonu sürekli olursa (2.62) integrali ile belirlenen $U(r,\psi)$ fonksiyonunun (2.47) denklemini gerçeklediği bu formül çözümlenerek ispatlanır ve $r \to R$ olduğu zaman $U(r,\psi) \to f(\psi)$ olur. Başka bir deyişle $U(r,\psi)$, daire için Dirichlet probleminin çözümüdür.

2.8. BİR DİKDÖRTGENDE POTANSİYEL

Matematik fizikte en basit ve en önemli problemlerden biri bir dikdörtgendeki Dirichlet problemidir. Basit bir durumu ele alarak ve sifıra eşit olmayan iki sınır şartı bulunan bir problemi gözönüne alalım:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{2.31}$$

dif denkleminin $0 < x < a$, $o < y < b$ olmak üzere

$$U(x,o) = f_1(x) \tag{2.63}$$

$$U(x,b) = f_2(x) \tag{2.64}$$

$$U(o,y) = 0 \tag{2.65}$$

$$U(a,y) = 0 \tag{2.66}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünü arıyalım.

$$U(x,y) = X(x).Y(y) \tag{2.67}$$

dönüşümü yapılırsa (2.31) denklemi

$$X''Y - XY'' = 0 \tag{2.68}$$

olur. Bu denklem XY ile bölünerek değişkenlerine ayrılırsa

$$\frac{X''}{X} = - \frac{Y''}{Y} \qquad (2.69)$$

elde edilir. (2.63) ve (2.64) homogen dmayan şartları genelde X veya Y üzerindeki şartlar olmayacaktır. Fakat (2.65) ve (2.66) homogen şartları (2.67) bağıntısına götürülürse

$$U(o,y) = X(o).Y(y) = 0 \qquad (2.70)$$
$$U(a.y) = X(a).Y(y) = 0$$

olurlar. Bu son iki bağıntı

$$X(o) = 0, \; X(a) = 0 \qquad (2.71)$$

olmasını gerektirir. (2.69) denkleminin heriki tarafı sabit'e eşit olabilir. Fakat sabitin işareti belli değildir. Önce sabitin pozitif olmasına karşılık μ^2 gibi pozitif bir sabit seçersek (2.69) denklemi iki adi diferansiyel denkleme dönüşür:

$$X'' - \mu^2 X = 0 \qquad (2.72)$$
$$Y'' + \mu^2 Y = 0$$

Bu adi diferansiyel denklemlerin çözümleri

$$X = A\text{Cosh } \mu x + B\sinh\mu x \qquad (2.73)$$
$$Y = C\text{Cos } \mu y + D\sin \mu y$$

dir. X(x) fonksiyonunun, (2.71) bağıntısının sınır şartlarını sağlaması için hem A, hemde B sıfır olmalıdır.

Bu bakımdan sabitin negatif olmasına karşılık $-\lambda^2$ gibi negatif bir sabit seçersek (2.69) denkleminden,

$$X'' + \lambda^2 Y = 0 \qquad (2.74)$$
$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \qquad (2.75)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden birincisi sınır şartları boyunca bir eigen değer problemi olarak tanımlanabilir. Bu eigen değer probleminin çözümü,

$$X_n(x) = \text{Sin}\,\lambda_n x$$
$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad (2.76)$$

dir. X_n ile kullanılacak Y fonksiyonları

$$Y_n = a_n\,\text{Cosh}\,\lambda_n y + b_n\,\text{Sinh}\,\lambda_n y$$

şeklindedir. a_n ve b_n keyfi sabitleri moment içindir. (2.65) ve (2.66) homogen şartları sağlayan, $X_n Y_n$ çarpımının (2.31) potansiyel denkleminin çözümü olduğu görülür. Bu fonksiyonların bir toplamı da aynı şartları ve denklemi sağlar. Böylece U(x,y) fonksiyonu

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,\text{Cosh}\,\lambda_n y + b_n\,\text{Sinh}\,\lambda_n y)\,\text{Sin}\lambda_n x \quad (2.77)$$

formuna sahip olur.

(2.63) ve (2.64) homogen olmayan sınır şartları denklemi henüz sağlamamaktadır. Eğer U (2.77) formunda olursa (2.63) sınır şartları

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x),\ o < x < a \quad (2.78)$$

olur. Şimdi Fourier serisinde bir problem tanımlayalım. a_n, $f_1(x)$ in Fourier katsayıları olmaladır. Buna göre,

$$a_n = \frac{2}{a}\int_o^a f_1(x)\,\text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \qquad (2.79)$$

yazılır. İkinci sınır şartının $o < x < a$ olmak üzere

$$U(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,\text{Cosh}\lambda_n b + b_n\,\text{Sinh}\lambda_n b)\,\text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f_2(x) \qquad (2.80)$$

olduğu anlaşılır. Bu da bir Fourier Serisinde problemdir. Fakat basit değildir.

$$a_n \text{ Cosh } \lambda_n b + b_n \text{ Sinh } \lambda_n b$$

sabiti f_2 nin n ninci Fourier Sinüs katsayısıdır. a_n blindiğine göre b_n aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$a_n \text{ Cosh } \lambda_n b+b_n \text{ Sinh } \lambda_n b= \frac{2}{a} \int_o^a f_2(x)\text{Sin } \lambda_n x \, dx=C_n$$

$$b_n= \frac{C_n-a_n \text{ Cosh}\lambda_n b}{\text{Sinh } \lambda_n b} \quad (2.81)$$

olur. Eğer b_n nin bu değeri (2.77) denklemine götürülürse

$$U(x,y)= \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_n \frac{\text{Sinh } (n\pi y/a)}{\text{Sinh } (n\pi b/a)} + a_n \left(\text{Cosh}(\frac{n\pi y}{a})\right.$$

$$\left. - \frac{\text{Cosh } (n\pi b/a)}{\text{Sinh } (n\pi b/a)} \text{ Sinh } (\frac{n\pi y}{a})\right) \text{ Sin}(\frac{n\pi x}{a}) \} \quad (2.82)$$

çözümü elde edilir.

C_n ile çarpılan fonksiyonun y=0 da θ ve y=b de 1 olduğuna dikkat edilmelidir. Benzer şekilde a_n ile çarpılan fonksiyon ise y= 0 da 1 ve y=b de 0 dır. Bu son belirtilen fonksiyonu daha kolay yazmanın bir yolu hiperbolik özdeş - likten kolaylıkla bulunabilen

$$\frac{\text{Sinh } \lambda_n (b-y)}{\text{Sinh } \lambda_n b} \quad (2.83)$$

ifadesidir.

Nasıl bir çözüme ulaşıldığını görmek için özel bir örnek alalım ve $f_1 = f_2$ alarak

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a} & o < x < \frac{a}{2} \\ 2(\frac{1-x}{a}) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases} \quad (2.84)$$

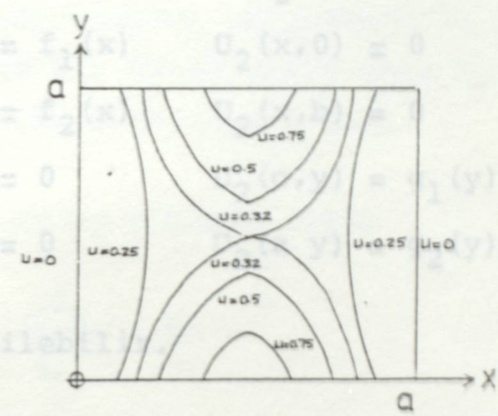
varsayalım.

$$C_n = a_n = \frac{8}{\pi^2}\,\frac{\mathrm{Sin}\,(n\pi/2)}{n^2}$$

dir. Bu sınır şartları için potansiyel denklemin çözümü

$$U(x,y) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Sin}\,(n\pi/2)}{n^2}\left\{\frac{\mathrm{Sinh}\,((n\pi/a)y)+\mathrm{Sinh}\,((n\pi/a)(b-y))}{\mathrm{Sinh}\,((n\pi/a)b)}\right\} . \mathrm{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad (2.85)$$

olur. Şekil 2. U(x,y)= sabit seviye eğrilerinin grafiğidir.



Şekil 2

İki paralel kenar üzerinde homogen şartlara sahip olan bir dikdörtgende Dirichlet probleminin çözümünü inceledik. Genelde, tabiki sınır şartları dikdörtgen bölgenin dört kenarı üzerinde homogen olmayacaktır. Fakat bu daha genel problem, daha önce çözülen problemden birine benzer şekilde iki problem halinde çözülebilir.

Genel problemi gözönüne alalım.

$$\nabla^2 U = 0$$

diferansiyel denkleminin $o < x < a$, $o < y < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} U(x,o) &= f_1(x) \\ U(x,b) &= f_2(x) \\ U(o,y) &= g_1(y) \\ U(a,y) &= g_2(y) \end{aligned} \tag{2.86}$$

koşullarını sağlayan çözümünü arıyalım:

$$U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y) \tag{2.87}$$

olsun. U_1 ve U_2 için sınır şartları

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 U_1 = 0 & \nabla^2 U_2 = 0 \\ U_1(x,o) = f_1(x) & U_2(x,0) = 0 \\ U_1(x,b) = f_2(x) & U_2(x,b) = 0 \\ U_1(o,y) = 0 & U_2(o,y) = g_1(y) \\ U_1(a,y) = 0 & U_2(a\ y) = g_2(y) \end{array} \tag{2.88}$$

olarak belirtilebilir.

$U_1 + U_2$ nin (2.86) denklemleriyle ifade edilen orijinal problemin çözümü olduğu açıktır. Keza U_1 ve U_2 fonksiyonla - rından herbirinin paralel sınırlar üzerinde homogen şartla- ra sahip olduğunu U_1 için zaten saptamıştık.

Diğer fonksiyon ise

$$U_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Sin}(\mu_n y \left(\frac{A_n \operatorname{Sinh} \mu_n x + B_n \operatorname{Sinh} \mu_n (a-x)}{\operatorname{Sinh} \mu_n a} \right) \tag{2.89}$$

formunda olacaktır. Burada $\mu_n = n\pi/b$ ve

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b} \int_o^b g_2(y) \operatorname{Sin} \mu_n y \, d_y \\ B_n &= \frac{2}{b} \int_o^b g_1(y) \operatorname{Sin} \mu_n y \, d_y \end{aligned} \tag{2.90}$$

dir.

U_1 ve U_2 ile ilgili problemlerde değişkenlere ayırma yöntemi uygulanır. Çünkü dikdörtgenin paralel kenarları üzerinde homogen şartlar,

$$U(x,y) = X(x) \, . \, Y(y)$$

dönüşümündeki çarpanlardan biri üzerine dönüştürülebilir.

2.9. BİR SLOT DA POTANSİYEL

Potansiyel denklem ısı ve dalga denklemlerinde olduğu gibi sınırlandırılmamış bölgelerde de çözülebilir. İlgili bölgenin yarım bir düşey şerit veya bir slot olması halinde aşağıdaki problemi gözönüe alalım.

$o < x < a, o < y$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{aligned} U(x,o) &= f(x) \\ U(o,y) &= g_1(y) \\ U(a,y) &= g_2(y) \end{aligned} \tag{2.91}$$

koşullarını sağlayan çözümünü arayalım.

Her zaman olduğu gibi $U(x,y)$ fonksiyonunun $y \to \infty$ iken sınırlı kalmasını isteriz.

Değişken ayırımını yapmak için problemi iki problem haline ayırmalıyız:

$$U(x,y) = U_1(x,y) + U_2(x,y) \tag{2.92}$$

olsun. Çözülen problemi sağlayan, iki probleme ayırabiliriz.

$$o < x < a \quad \text{ve} \quad o < y$$

olmak üzere

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 U_1 = 0 & \nabla^2 U_2 = 0 \\ U_1(x,0) = f(x) & U_2(x,o) = 0 \\ U_1(o,y) = 0 & U_2(o,y) = g_1(y) \\ U_1(a,y) = 0 & U_2(a,y) = g_2(y) \end{array} \qquad (2.93)$$

yazılır. Problemi U_1 için

$$U_1(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \qquad (2.94)$$

formunu kullanarak çözebiliriz.

$$\frac{X''}{X} = - \frac{Y''}{Y} = - \lambda^2 \qquad (2.95$$

olur. Denklem X için,

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad (2.96)$$

dır. Burada λ^2 sabitinin işareti, X(x) çarpanı üzerinde homogen şartlara sahip olan ve x=o, x=a için X(o) = 0, X(a)=0 sınır koşulları ile saptanmıştır.

(y=o boyunca sağlanan şartın keyfi bir fonksiyonla tanımlanan x in fonksiyonlarını gerektirdiğini görürüz)

$X_n(x)$ fonksiyonları ve eigen değerleri

$$X_n(x) = \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$
$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \qquad (2.97)$$

olarak kolaylıkla ifade edilir. Denklem Y için

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, \quad o < y \qquad (2.98)$$

dir. Bu diferansiyel denklemin sağlanmasına ilaveten Y, $y \to \infty$ iken sınırlı kalmalıdır. Denklemin çözümleri $e^{-\lambda y}$ ve $e^{-\lambda y}$ dir. Bunlardan birincisi sınırlandırılmıştır. Böylece

$$Y_n(y) = \exp(-\lambda_n y) \qquad (2.99)$$

dir. Sonuç olarak birinci problemin çözümü

$$U_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Sin}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(\frac{-n\pi y}{a}\right) \qquad (2.100)$$

olarak yazabiliriz. a_n sabitleri y= o daki şarttan saptanır.

İkinci problemin çözümü biraz farklıdır. Tekrar

$$U_2(x,y) = X(x) \,.\, Y(y) \qquad (2.101)$$

çarpım formunda çözümler için Laplace denklemi

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \mu^2 \qquad (2.102)$$

olur. Burada ayrışım sabitinin işaretini birinci haldekinin ters işaretlisi olarak seçtik Y üzerinde istenenler, Y(o)=0 dır ve Y nin $y \to \infty$ için sınırlı kalmasıdır.

$$Y'' + \mu^2 Y = 0 \qquad (2.103)$$

diferansiyel denkleminin bu şartları sağlayan X çözümünün bütün $\mu > o$ için geçerli ve

$$Y(y) = \operatorname{Sin} \mu y \qquad (2.104)$$

şeklinde olduğunu kolayca buluruz. X diferansiyel denkleminin çözümü ise

$$X(x) = A\,\frac{\operatorname{Sinh} \mu x}{\operatorname{Sinh} \mu a} + B\,\frac{\operatorname{Sinh} \mu(a-x)}{\operatorname{Sinh} \mu a} \qquad (2.105)$$

dir. Dikdörtgende Laplace denkleminin çözümünde edindiğimiz tecrübeden dolayı bu özel formu seçtik.

μ sürekli bir parametre olduğundan, elde ettiğimiz çözüm $d\mu$ ile çarpılıp o dan ∞ kadar integre edilirse

$$U_2(x,y)= \int_0^\infty \left(A(\mu) \frac{\text{Sinh } \mu x}{\text{Sinh } \mu a} + B(\mu) \frac{\text{Sinh } \mu(a-x)}{\text{Sinh } \mu a} \right).\text{Sin}\mu y \, d\mu \tag{2.106}$$

elde edilir.

$x = o$ ve $x = a$ da homogen olmayan sınır şartları eğer

$$U_2(o,y) = \int_0^\infty B(\mu) \text{ Sin } \mu y d\mu = g_1(y), \quad o < y \tag{2.107}$$

$$U_2(a,y) = \int_0^\infty A(\mu) \text{ Sin}\mu y d\mu = g_2(y) \quad o < y \tag{2.108}$$

ise sağlanır.

Açık olarak bu iki denklem Fourier integral problemleri olduğundan $A(\mu)$ ve $B(\mu)$ katsayılarının nasıl saptanacağı bilinir.

Laplace denklemi bir şerit ($o < x < a$, $-\infty < y < \infty$), dörttebir düzlem ($o < x$, $o < y$) veya bir yarı düzlem ($o < x$, $-\infty < y < \infty$) üzerinde de çözülebilir.

Her sınır çizgisi boyunca, bir sınır şartı konur ve çözümün gözönüne alınan bölgenin sınır kısımlarında sınırlı kalması istenir. Genelde bir Fourier integrali bu çözümde kullanılır. Çünkü ayrışım sabiti burada ikinci problem de olduğu gibi sürekli bir parametredir.

2.10. BİR DİSK DE POTANSİYEL

$x^2 + y^2 < c^2$ dairesel diskinde potansiyel denklemini çözmek istersek doğal olarak $o < r < c$ ile tanımlanan diskte r, θ kutupsal koordinatları kullanmak doğaldır.

Disk üzerinde Dirichlet problemi

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} = 0 \quad o < r < c \quad -\pi < \theta \leq \pi \qquad (2.109)$$

$$\nu(c,\theta) = f(\theta), \qquad -\pi < \theta \leq \pi \qquad (2.110)$$

dir. Çünkü gerçekte θ ve $\theta + 2\pi$ aynı açıyı gösterdiği için θ, $-\pi$ den π ye kadar olan aralık için sınırlanır. Ancak kullanmakta olduğumuz mantığa göre $\theta = \pi$ bir sınır değildir. Çünkü sınır bu noktada ν yi etkilemez. Yanlış sınır tanımlamanın ν de ve türevlerinde bir süreksizliğe sebep olmayacağını göstermek için

$$\nu(r,\pi) = \nu(r,-\pi) \qquad o < r < c \qquad (2.111)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \theta}(r,\pi) = \frac{\partial \nu}{\partial \theta}(r,-\pi) \qquad o < r < c \qquad (2.112)$$

denklemlerini yazalım.

Sıralı bir şekilde θ yı herhangi bir değer olarak kabul edebiliriz. Fakat $\nu(r,\theta)$ ve $f(\theta)$ yı 2π periyodlu, θ yı da periyodik olarak kabul etmemiz gerekir.

$$\nu(r,\theta) = R(r)\ \Theta(\theta) \qquad (2.113)$$

kabul ederek değişkenlere ayırabiliriz. Potansiyel denklem

$$\frac{1}{r}(rR')\ \Theta + \frac{1}{r^2} R\ \Theta'' = 0 \qquad (2.114)$$

olur. Bu denklem $R\,\Theta/r^2$ ile bölünürse

$$\frac{r(rR')'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0 \qquad (2.115)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılır. Açık olarak iki sınır şartının çözümlerin bir lineer kombinezonu ile sağlanması gerekecektir. Bu yüzden $\Theta''/\Theta = -\lambda^2$ seçeriz. (2.111) ve (2.112) şartları Θ üzerindeki şartlar olacaktır. R ve Θ fonksiyonları için özel problemler

$$\Theta'' + \lambda^2\,\Theta = 0 \qquad -\pi < \Theta < \iota \qquad (2.116)$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \qquad (2.117)$$

$$O'(-\pi) = \Theta'(\pi) \qquad (2.118)$$

$$r(rR')' - \lambda^2 R = 0 \qquad o < r < c \qquad (2.119)$$

dir. (2.116) denklemindeki çözümlerin hepsi

$$\Theta(\theta) = A\,\mathrm{Cos}\,\lambda\theta + B\,\mathrm{Sin}\,\lambda\theta \qquad (2.120)$$

formuna sahiptir. (2.120) denklemindeki Θ fonksiyonu yerine (2.117) ve (2.118) denklemlerini yazarsak ve Sinüs ve Cosinüs özelliklerini kullanırsak

$$A\,\mathrm{Cos}\,\lambda\pi - B\,\sin\,\lambda\pi = A\,\mathrm{Cos}\,\lambda\pi + B\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi \qquad (2.121)$$

$$\lambda A\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi + \lambda B\,\mathrm{Cos}\,\lambda\pi = -\lambda A\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi + \lambda B\mathrm{Cos}\,\lambda\pi \qquad (2.122)$$

elde ederiz. Basit bir işlemden sonra

$$B\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi = 0 \qquad (2.123)$$

$$\lambda A\,\mathrm{Sin}\,\lambda\pi = 0 \qquad (2.124)$$

şekline indirgenir. Hem A hemde B sıfır olmamalıdır. Bu durumda Θ sıfır olacaktır. Böylece

$\lambda = 0 \qquad \Theta = 1$

$\lambda = 1,2,.. \quad \Theta = \mathrm{Cos}\,\lambda\theta$ veya $\mathrm{Sin}\,\lambda\theta$

olasılıkları mevcut olur.

Şimdi $\lambda^2 = 0$ eigen değerini $\Theta = 1$ eigen fonksiyonuna ve $\lambda_n^{\ 2} = n^2$ $(n=1,2,3,\ldots)$ eigen değerlerinin iki bağımsız eigen fonksiyonu olan $\mathrm{Cos}n\Theta$ ve $\mathrm{Sin}n\Theta$ ya karşı geldiğini bulduk. Değişkenlere ayrılması sonucunda R için elde edilecek denklem,

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0, \quad o < r < c \tag{2.125}$$

olur. (2.125) Diferansiyel denklemi Cauchy-Euler diferansiyel denklemidir. Ve $R(r) = r^\alpha$ şeklindeki çözümlere sahiptir. Burada α bir sabittir.

$$R = r^\alpha$$

$$R' = \alpha r^{\alpha-1}$$

$$R'' = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

değerlerini (2.125) denkleminde yerine yazarsak

$$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2)r^\alpha = 0, \quad o < r < c \tag{2.126}$$

denklemi elde edilir. r^α sıfır olmadığından, parantez içindeki sabit çarpan sıfır olmalıdır. Yani $\alpha = \pm\, n$ olmalıdır.

Diferansiyel denklemin genel çözümü r^n ve r^{-n} nin bir kombinezonudur. Ancak son belirtilen durumda r sıfıra yaklaştıkta sınırsızlaşır. Bu yüzden $R_n(r) = r^n$ kabul ederek bu çözümden vazgeçeriz.

$n = 0$ özel halinde iki çözüm sabit fonksiyon 1 ve lnr dir.

Logr den $r = 0$ için $-\infty$ olduğundan vazgeçilir.

Şimdi çözümü birleştirmiz oluyoruz.

$$r^o . 1 = 1, \quad r^n \mathrm{Cos}n\Theta, \quad r^n \mathrm{Sin}n\Theta$$

fonksiyonlarının hepsi Laplace denkleminin çözümleridir. Bu yüzden bu çözümlerin genel bir lineer kombinezonu da bir çözüm olacaktır. Böylece $v(r,\Theta)$

$$\nu(r.\theta) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \operatorname{Cos}n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n \operatorname{Sin}n\theta \qquad (2.127)$$

formuna sahip olabilir. r=c gerçek sınırında, sınır şartı

$$\nu(c,\theta) = a_o + \Sigma c^n (a_n \operatorname{Cos}n\theta + b_n \operatorname{Sin}n\theta) = f(\theta)$$
$$\pi - < \theta \leq \pi \qquad (2.128)$$

olur. (2.128) eşitliği

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi c^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{Cos}n\theta \, d\theta \qquad (2.129)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi C^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \operatorname{Sin}n\theta \, d\theta$$

formüllerini almak suretiyle çözülebilen bir Fourier Serisi problemidir. Böylece Laplace denkleminin çözümünü (2.127) denklemi formunda elde ettik. f(r,θ) fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini görebiliriz. Özellikle

$$\nu(0,\theta) = a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(c,\theta)\, d\theta \qquad (2.130)$$

yı elde ederiz. Bu bir diskin merkezindeki Laplace denkleminin çözümünü diskin kenarlarındaki değerlerin ortalamasına eşit olduğunu gösterir. Aynı zamanda o ve c arasındaki herhangi bir r için

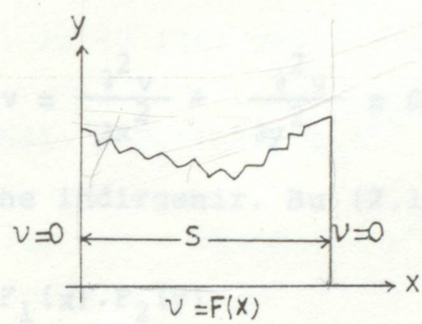
$$\nu(0,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(r,\theta)\, d\theta \qquad (2.131)$$

denklemini de göstermek kolaydır. Potansiyel denklemin çözümlerinin bu karakteristiği, ortalama değer özelliği olarak isimlendirilir. Ortalama değer özelliği maksimum prensibini ispatlamak için yalnızca bir adımdır. Fonksiyon sabit olmadıkça bir fonksiyonun ortalama değeri minimum ve maksimum arasındadır. Ortalama değer maksimum veya minimuma eşit de olamaz.

2.11. DÜZGÜN İKİ BOYUTLU ISI AKIŞI

Basit bir iki boyutlu durumda Laplace denkleminin çözümünü göstermek için aşağıdaki problemi gözönüne alalım:

$x = o$, $x = s$; $y = o$, $y = \infty$ doğrularıyla sınırlanan ince bir plak kabul edelim. (Şekil 3).



Şekil 3

$y = o$ kenarının sıcaklığını zamanla sabit ve $F(x)$ fonk - siyonu ile verildiğini düşünelim. Diğer kenarlardaki sıcaklıklar daima sıfır olsun. Plağın diğer yüzeylerinden ısının kaçamadığını ve başlangıç şartlarının etkisinin sona erdiğini kabul edeceğiz.

Sıcaklık her yerde zamandan bağımsız olsun. Plağın içindeki sıcaklığı saptamayı isteyelim. Problem düzgün iki boyutlu ısı akışlarından biridir.

Homogen bir katı içindeki sıcaklık dağılması ν fonksiyonunun

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = h^2 \nabla^2 \nu \qquad (2.132)$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Burada h^2 maddenin dağılımıdır ve bir sabittir. Hipoteze göre ν sıcaklığı t zamanına bağlı olmadığından

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0 \qquad (2.133)$$

elde edilir. Gerçekten

$$\begin{matrix} \nu=0 & \nu=0 & \nu=0 & \nu=F(x) \\ x=0 & x=s & y=\infty & y=0 \end{matrix} \qquad (2.134)$$

dır. Böylece (2.132) denklemi (2.134) sınır şartlarını sağlıyacak

$$\nabla^2 \nu = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.135)$$

denklemine indirgenir. Bu (2.135) denklemini çözmek için

$$\nu = F_1(x).F_2(y) \qquad (2.136)$$

formunda bir çözüm ararız. Burada $F_1(x)$ sadece x in, $F_2(y)$ sadece y nin fonksiyonudur.

(2.135) ve (2.136) bağıntılarından

$$\frac{1}{F_1(x)} \frac{d^2F_1}{dx^2} = - \frac{1}{F_2(y)} \frac{d^2F_2}{dy^2} \qquad (2.137)$$

elde edilir.

Şimdi x deki bir değişiklik sağ tarafı,, y deki bir değişiklik sol tarafı değiştirmeyecektir. Bu yüzden (2.137) ifadesinin heriki tarafı da x ve y den bağımsız olmalı yani bir sabite eşit olmalıdır. $-k^2$ gibi bir sabiti kullanalım. (2.137) denklemi iki denkleme ayrılır.

$$\frac{d^2F_1}{dx^2} = - k^2F_1 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2F_2}{dy^2} = k^2F_2 \qquad (2.138)$$

Değişkenlerin ayrılması metodu diye isimlendirilen (2.138) denklemleri sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir. Ve çözümleri

$$F_1 = C_1 \operatorname{Cos} kx + C_2 \operatorname{Sin} kx$$
$$F_2 = C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky} \qquad (2.139)$$

dir. Burada C_i $(i=1,2,3,4)$ keyfi sabitlerdir.

(2.139) ve (2.136) bağıntılarından

$$\nu = (C_1 \operatorname{Cos} kx + C_2 \operatorname{Sin} kx)(C_3 e^{ky} + C_4 e^{-ky})$$

$$= e^{-ky}(A \operatorname{Cos} kx + B \operatorname{Sin} kx) + e^{ky}(M \operatorname{Cos} kx + N \operatorname{Sin} kx) \qquad (2.140)$$

elde ederiz. Burada A,B,M,N keyfi sabitlerdir.

Şimdi bu çözümün (2.134) sınır şartlarını sağladığını gösterilim. İlk durumda y sonsuz iken sıcaklık sıfırdır. Böylece

$$M = N = 0 \qquad (2.141)$$

elde edilir.

Şimdi $x = o$ için $\nu = o$ dan dolayı çözümde bir Cosinüslü terime sahip olamayız. Buradan $A = 0$ dır.

$x = s$ de y nin bütün pozitif değerleri için $\nu = o$ dır. Böylece

$$B \operatorname{Sin} ks = 0 \qquad (2.142)$$

olur. Aşikar olmayan bir çözüm ise $B \neq 0$ dır. Bu durumda

$$\operatorname{Sin} ks = 0 \qquad (2.143)$$

dır. Bu denklem k nın mümkün değerlerini sağlar. Bu değerler

$$k=\frac{m\pi}{s} \quad m=0,1,2,... \tag{2.144}$$

dir. m nin herbir değerine karşılık bir çözüm vardır.

$$\nu_m = B_m e^{-m\pi y/s} \; \text{Sin} \; \frac{m\pi x}{s} \tag{2.145}$$

Burada B_m keyfi bir sabittir. (2.145) tipinin mümkün bütün çözümlerinin toplamını alırsak

$$\nu= \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-m\pi y/s} \; \text{Sin} \; \frac{m\pi x}{s} \tag{2.146}$$

çözümü elde edilir.

Şimdi, yalnız y=o da ν=F(x) şartını sağlamak gerekir. (2.146) da y=o yazılırsa,

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \text{Sin} \; \frac{m\pi x}{s} \tag{2.147}$$

elde edilir. Bu ν için half-range Sinüs serisidir. B_m katsayıları

$$B_m = \frac{2}{s} \int_o^s F(x).\text{Sin} \; \frac{m\pi x}{s} \, dx \tag{2.148}$$

denklemiyle verilir. (2.146) da B_m katsayılarının bu değeri yazılırsa çözüm olarak

$$\nu= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{s} e^{-m\pi y/s} \; \text{Sin} \; \frac{m\pi x}{s} \int_o^s F(x) \; \text{Sin} \frac{m\pi x}{s} dx \tag{2.149}$$

elde edilir.

2.11.1. SONLU BİR PLAKTA ISI DAĞILIMI

İki boyutlu ısının düzgün akışında incelediğimiz problemi biraz genişleterek Şekil 4'deki plağın içindeki sıcaklığın dağılımını gözönüne alalım:

Sınır şartları:

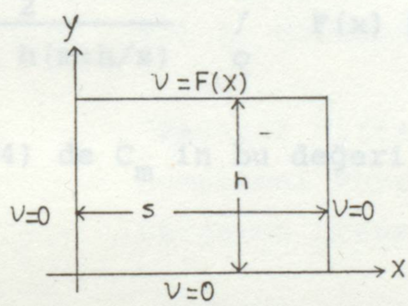
$$\begin{array}{llll} \nu = o & \nu = o & \nu = o & \nu = F(x) \\ x = o & y = o & x = s & y = h \end{array} \qquad (2.150)$$

sınır şartlarına göre (2.140) çözümünde herhangi bir Cosinüslü terimin mevcut olamadığı ve k nın mümkün değerlerinin (2.144) denklemleriyle verildiği görülür. Böylece

$$\nu_m = e^{-m\pi y/s} B_m \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} + e^{m\pi y/s} N_m \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s}$$

$$= (e^{-m\pi y/s} B_m + e^{m\pi y/s} N_m) \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} \qquad (2.151)$$

elde edilir.



Şekil 4

Şimdi y = o, ν = o da da $o \leq x \leq s$ için

$$B_m + N_m = 0 \quad \text{veya} \quad B_m = - N_m \qquad (2.152$$

olur. Çözümü

$$\nu_m = C_m \operatorname{Sin} h \frac{m\pi y}{s} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} \qquad (2.153)$$

formunda yazabiliriz. Burada C_m keyfi bir sabittir. m nin mümkün bütün değerlerini toplayarak

$$v= \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{Sin} h \frac{m\pi y}{s} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} \tag{2.154}$$

elde edilir.

Şimdi $y = h$ için

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{Sin} h \frac{m\pi h}{s} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} \tag{2.155}$$

elde edilir. Bu F(x) için bir half-range sinüs açılımıdır. Böylece

$$C_m \operatorname{Sin} h \frac{m\pi h}{s} = \frac{2}{s} \int_o^s F(x) \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} dx \tag{2.156}$$

veya

$$C_m = \frac{2}{S.\operatorname{Sin} h(m\pi h/s)} \int_o^s F(x) \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} dx \tag{2.157}$$

bulunur. (2.154) de C_m in bu değeri yazılırsa problemin çözümü olarak

$$v= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{S.\operatorname{Sinh} \frac{m\pi h}{s}} \left(\int_o^s F(x) \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} dx\right) \operatorname{Sinh} \frac{m\pi y}{s} . \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{s} \tag{2.158}$$

sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

DAVİD, L. POWERS. "Boundary Value Problems", (1972), Academic Press. New York - London.

PİPES.& HARVILL. "Applied Mathematics for Engineers and Physicists". Mc Graw-Hill Book Comp., London-Tokyo (1970).

DENNEMEYER, R. "Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems" Mc-Graw-Hill Book Comp.

TYCHONOV, A.N., SAMARSKI, A.A. "Partial Differential Equations of Mathematical Physics" Vol I. Holden-Day, 1964.

SOBOLEV, S.L. "Partial Differential Equations of Mathematical Physics., Elmsford, N.Y. Pergamon Press, 1965.

PISKOUNOV, N. "Calcul Differentiel Et Integral" Tome II, 1972.

ÖZDEMİR, Y. "Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler Ders Notları".

SNEDDON, N. IAN. "Elements of Partial Differential Equations", Mc Graw-Hill Book Company.Inc.(1957).

TEZ YAZARININ ÖZGEÇMİŞİ

Fügen TORUNBALCI 1957 yılında Bursa'da doğdu. İlk öğrenimini Polatlı Gümüşlü İlkokulu, orta öğrenimini Tekirdağ Namık Kemal Lisesi'nde yaptı. 1975 yılında Ankara Fen Fakültesi, Matematik Lisans'dan 1980 haziran döneminde mezun oldu. Bir süre Kamu Sektöründe çalıştıktan sonra 1985-1986 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Yüksek Lisans Sınavını kazanarak öğrenime başladı.

1986 yılında Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen görevine devam etmektedir.