

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

0-1 Mat. ve Elem. 0 ve 1. Olan
Dete. Maks. Araştırı

Yüksek Lisans Tezi

Hülya Burhanzade

1990

99
92

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

10.000

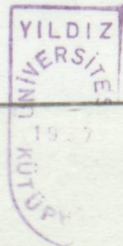
$\{0,1\}$ - MATRİSLERİ
VE
ELEMENLARI 0 VE 1 LER OLAN
DETERMINATLARIN
MAKSİMİZASYONUNUN
ARAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ARŞ.GÖR.HULYA BURHANZADE

İSTANBUL - 1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209
92
Alındığı Yer :...Fen.Bilimleri.Ens.....
Tarih :...18.03.1992.....
Fatura :.....
Fiyatı :...10.000.-TL.....
Ayniyat No :...1/1.....
Kayıt No :...48209.....
UDC :...510.....
Ek :



$\{0,1\}$ - MATRİSLERİ
VE
ELEMENLARI 0 VE 1 LER OLAN
DETERMINATLARIN
MAKSİMİZASYONUNUN
ARAŞTIRILMASI



YÜKSEK LİSANS TEZİ
ARŞ.GÖR.HULYA BURHANZADE

İSTANBUL - 1990

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO

ÖZET.....	1
SÖZGÖZÜ.....	11
BÖLÜM I.....	
1. Değerlendirme.....	1
1.1. Sistem.....	1
1.2. Değerlendirme.....	1
1.3. Değerlendirme.....	1
1.4. Değerlendirme.....	1
1.5. Değerlendirme.....	2
1.6. Değerlendirme.....	2
1.7. Değerlendirme.....	3
1.8. Değerlendirme.....	4
1.9. Değerlendirme.....	4
1.10. Değerlendirme.....	4
1.11. Değerlendirme.....	5
BÖLÜM II.....	
II. 0.1 - Matrisler.....	8
Tez 11.1.....	8
Tez 11.2.....	9
Tez 11.3.....	9
Tez 11.4.....	13
Tez 11.5.....	13
Tez 11.6.....	16
Tez 11.7.....	16
Tez 11.8.....	17
Tez 11.9.....	17

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemiyen sayın hocam
Prof.Dr.Erol BALKANAY'a teşekkürlerimi borç bilirim .

Arş.Gör. Hülya BURHANZADE

İ Ç İ N D E K İ L E R

SAYFA NO

	SAYFA NO
ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II

BÖLÜM I

I. Ön Tanımlar.....	1
I.1. Sistem.....	1
I.2. Küme Sistemi.....	1
I.3. Çoklu Graf-Graf.....	1
I.4. İki Kısımlı Graf.....	2
I.5. Çakışım Matrisi.....	2
I.6. Alt Sistem.....	3
I.7. Alt Graf.....	4
I.8. Farklı Temsilciler Listesi (LDR).....	4
I.9. Latin Dikdörtgen.....	4
I.10. Latin Kare.....	4
I.11. Kümelerin Bağımsızlığı.....	5

BÖLÜM II

II. 0,1 - Matrisleri.....	8
Tanım II.1.....	8
Tanım II.2.....	9
Tanım II.3.....	9
Önerme II.1.....	12
Önerme II.2.....	12
Önerme II.3.....	13
Tanım II.4.....	13
Önerme II.4.....	13
Teorem II.1.....	14
Sonuç II.1.....	16
Sonuç II.2.....	17
Sonuç II.3.....	17

Tanım II.5.....	18
Önerme II.5.....	18
BÖLÜM III	
III. $n \neq 0 \pmod{4}$ Olmak Üzere $n \times n \{-1,1\}$, Matrisleriyle İlgili 0,1 Determinantlarının Maksimizasyonu....	20
III.1. Yöntem.....	20
III.2. John Williamson Yöntemi.....	25
Tanım III.2.1.....	26
Tanım III.2.2.....	28
Lemma III.2.1.....	30
III.2.1. Esas İşlem.....	30
a- D_5 in Bulunuşu.....	32
b- D_6 nın Bulunuşu.....	36
c- Δ_{4n} İçin Bir Değerin Bulunuşu.....	39
d- Δ_8, Δ_9 ve Δ_{10} 'un Değerlerinin Bulunuşu	41
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ.....	46

S Ö Z E T

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde konuyla ilgili ön tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde $\{0,1\}$ -matrisleri ve özellikleri ayrıntılarıyla incelenmiş ayrıca $\{0,1\}$ -matrislerinin graflar ve dizaynlarla ilişkileri araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde de elemanları ± 1 ler olan K_n matrislerinden elemanları 0 ve 1 ler olan maksimum determinantın elde edilişi incelenmiştir.

BÖLÜM I

S U M M A R Y

This study consists of three chapters.

Chapter I contains a preliminary definitions.

In the chapter II we studied about $\{0,1\}$ -matrices.

In the third chapter we have studied on the determinants of matrices K_n which a special matrice and whose elements are ± 1 's. I also examined matrices K_n and I have found out and come up with a result in which the determinant of it has a maximum value.

1.3. Çoklu Graf-Graf:

Blok seviyeliği 2 olan bir sisteme bir çoklu graf denir. Eğer bu çoklu graf aynı zamanda bir küme sistemiyse, bir graf olarak adlandırılır.

Graflara bir örnek verilerek:



Şekil 1.1.

P, Q, R, S ve T noktaları tepelerdir. Tepeleri birbirine bağlayan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ve 8 kenarları da ayrıtlardır. Bütün diyagrama bu graf denir. Şekil 1.1, 3 tepeli ve 8 ayrıtlı bir graftır.

BÖLÜM I

1.1. İki Kısımlı Graf: ÖN TANIMLAR

Bir G grafinin tepe-kümeleri V_1 ve V_2 gibi iki ayrık kümeye bölünebilir. Eğer G grafinin her ayrıtı V_1 ve V_2 kümeleri arasında bir kenardır, o zaman G grafi iki kısımlı graf olduğu söylenir. Bu iki kısımlı graf (V_1, V_2, E) ile gösterilir.

I.1. Sistem:

V ve E ayrık kümeler ve $f: E \rightarrow P(V)$ olmak üzere $\Lambda = (V, f, E)$ bir sistem adını alır. Burada E nin elemanlarına Λ nın blokları ve V nin elemanlarına da Λ nın tepeleri (noktaları) denir. Eğer $x \in f(e)$ ise e bloğunun x tepesini içine aldığını veya x ve e nin birbirleriyle çakışım durumunda olduğunu söyleriz. Bir e bloğunun büyüklüğü, $|f(e)|$ doğal sayıdır.

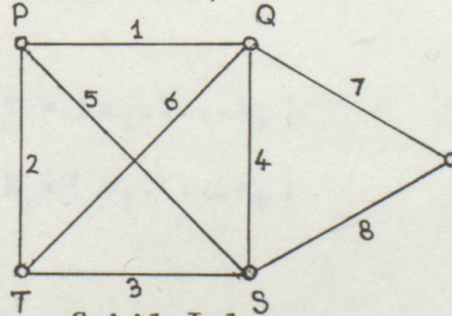
I.2. Küme Sistemi:

Eğer $\Lambda = (V, f, E)$ bir sistem ve f bir (1-1) tasvir ise o zaman Λ ya bir küme sistemi denir.

I.3. Çoklu Graf-Graf:

Blok genişliği 2 olan bir sisteme bir çoklu graf denir. Eğer bu çoklu graf aynı zamanda bir küme sistemiyse, bir graf olarak adlandırılır.

Graflara bir örnek verirsek,



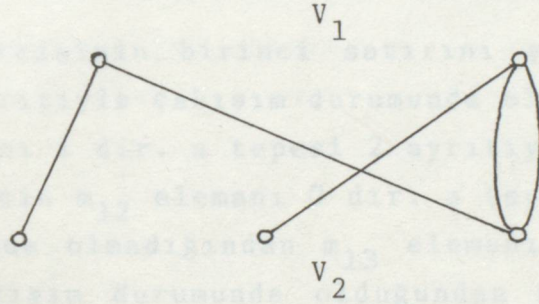
Şekil 1.1.

P,Q,R,S ve T noktaları tepelerdir. Tepeleri birbirine bağlayan 1,2,3,4,5,6,7, ve 8 hatları da ayrıtlardır. Bütün diyagrama ise graf denir. Şekil I.1, 5 tepeli ve 8 ayrıtlı bir graftır.

I.4. İki Kısımlı Graf:

Bir G grafının tepe-kümesinin V_1 ve V_2 gibi iki ayrık kümeye bölündüğünü varsayalım. Öyle ki G nin her ayrıtı, V_1 in bir tepesini V_2 nin bir tepesiyle birleştirsın. O zaman G nin bir iki kısımlı graf olduğu söylenir. Bu iki kısımlı grafı $G(V_1, V_2)$ ile gösteririz.

İki kısımlı grafa bir örnek verirsek,



Şekil I.2.

Şekil I.2 den de görüldüğü gibi, G nin her bir ayrıtı V_1 'in bir tepesini V_2 nin bir tepesiyle birleştirmiştir.

I.5. Çakışım Matrisi:

Bir (V, f, E) sistemindeki V ve E nin indislenmesi sonucunda,

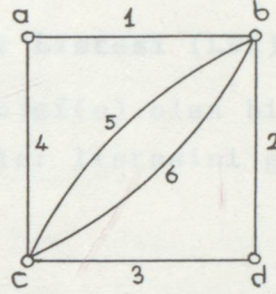
$$V = \{x_1, \dots, x_v\},$$

$$E = \{e_1, \dots, e_b\}$$

olsun. Eğer $x_i \in f(e_j)$ ise (i,j) -elemanı 1 olan $v \times b$ mertebeli M matrisi oluşturulur. Aksi taktirde (i,j) -elemanı 0 dır. M ye de (V,f,E) sisteminin çakışım matrisi denir.

Örnek I.5.1:

Aşağıda verilen G grafına göre M çakışım matrisini bulalım.



Şekil I.3.

M çakışım matrisinin birinci satırını şu şekilde buluruz: a tepesi 1 ayrıtıyla çakışım durumunda olduğundan M matrisinin m_{11} elemanı 1 dir. a tepesi 2 ayrıtıyla çakışım durumunda olmadığı için m_{12} elemanı 0 dır. a tepesi 3 ayrıtıyla çakışım durumunda olmadığından m_{13} elemanı 0 dır. a tepesi 4 ayrıtıyla çakışım durumunda olduğundan m_{14} elemanı 1 dir. a tepesi 5 ve 6 ayrıtlarıyla da çakışım durumunda olmadığından m_{15} ve m_{16} elemanları 0 dır. M çakışım matrisinin diğer elemanları da aynı şekilde bulunur.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

I.6. Alt Sistem

Eğer $W \subseteq V, F \subseteq E$ ve bütün $e \in F$ için

$$g(e) = f(e) \subseteq \omega$$

oluyorsa, $\Omega=(W,g,F)$ sistemine, $\Lambda=(V,f,E)$ sisteminin alt sistemi denir.

I.7. Alt Graf:

Λ bir sistem ise, bunun graf olan bir Γ alt sistemine, Λ nın bir alt grafi denir.

I.8. Farklı Temsilciler Listesi (LDR):

Bütün $e \in E$ için $\lambda(e) \neq f(e)$ olan bir $\lambda: E \rightarrow V$, (1-1) tasviri, Λ için farklı temsilciler listesini gösterir.

I.9. Latin Dikdörtgen:

Bir takım sembollerden oluşan r satırlı, s sütunlu bir dikdörtgensel dizilişte, her bir sembol, her bir satırda en fazla bir defa, her bir sütunda da en fazla bir defa ortaya çıkıyorsa, bu dizilişe bir rxs -Latin dikdörtgen adı verilir.

Örnek I.9.1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Bir 3×5 Latin dikdörtgenini gösterir.

I.10. Latin Kare:

n tane sembolün bir $n \times n$ -Latin dikdörtgenine n . mertebeden bir Latin kare denir.

Örnek I.10.1.

1	2	3	4	5
2	4	1	5	3
3	5	2	1	4
4	3	5	2	1
5	1	4	3	2

Bir 5x5 Latin kareyi gösterir.

I.11. Kümelerin Bağımsızlığı:

Bir grafi (V, ϵ) ile gösterelim. Aşağıda gösterildiği gibi $V \cup \epsilon$ üzerine simetri ve yansıma bağıntısını uygulayalım.

$$x_1, x_2 \in V \text{ ve } E_1, E_2 \in \epsilon \text{ için,}$$

1^o) $x_1 \in E_1$ ise E_1 ile x_1 çakışım durumundadır.

2^o) $x_1 = x_2$ yada $\{x_1, x_2\} \in \epsilon$ ise x_2 ile x_1 çakışım durumundadır.

3^o) $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ ise E_2 ile E_1 çakışım durumundadır.

Pozitif değerli her bir tepe veya ayrıt S nin elemanı-
la çakışım durumundaysa, $S \subseteq V \cup \epsilon$ kümesine söylendikleri sı-
rayla tepe-örten küme veya ayrıt-örten küme denir.

S kümesinin $(S \subseteq V \cup \epsilon)$ hiç bir farklı ikili elemanı ça-
kışım durumunda değilse, S kümesi bağımsızdır denir. Bağım-
sız kümelerin alt kümeleri de bağımsızdır. Bir bağımsız-tepe
kümesi (aynı zamanda "internally stable set" diye de adlan-
dırılır.) V nin bir bağımsız alt kümesidir.

Γ bir alt sistem olmak üzere, Γ da bir en büyük tepe-
kümesinin kardinalitesi Γ nin tepe-bağımsızlığı sayısı

(veya "internal stability") olarak adlandırılır ve bu $\alpha_0(\Gamma)$ ile veya daha basit olarak α_0 ile gösterilir. Bir bağımsız ayırıt kümesi de benzer olarak tanımlanmıştır ve ayırıt-bağımsızlığı sayısı $\alpha_1(\Gamma)$ ile veya basit olarak α_1 ile gösterilir.

$N:P(V) \rightarrow P(V)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

Herbir $U \in P(V)$ için,

$$N(U) = \{ \text{Bazı } x \in U \text{ için, } y \in V + U : \{x, y\} \in E \}$$

dır.

$$B = (\{V_1, V_2\}, E)$$

iki kısımlı graf olsun. Eğer $U \subseteq V_1$ veya $U \subseteq V_2$ ise U nun eksikliği veya yetersizliği

$$\delta(U) = |U| - |N(U)|$$

tamsayısı ile tanımlanmaktadır.

$$\delta_i(B) = \max \{ \delta(U) : U \subseteq V_i \} \quad (i=1,2)$$

şeklinde tanımlanır. Bunu kısaca δ_i ile gösteririz.

Madem ki $\delta(\emptyset) = 0$, herhangi bir iki kısımlı graf için $\delta_i \geq 0$ dır. Öyle bir $U \subseteq V_i$ alt kümesi için $\delta(U) = \delta_i(B)$ ise U ya bir kritik küme denir. Bir $\epsilon' \subseteq E$ bağımsız kümesi matching olarak adlandırılır. Eğer $i=1,2$ için $U_i \subseteq V_i$ ise bir ϵ' matchingi için

(a) $|\epsilon'| = |U_1|$ ve

(b) ϵ' deki her bir ayırıt, U_1 ve U_2 deki bir tepe ile çakışım durumundaysa,

ϵ' matchingi U_1 in U_2 içine bir matchingdir. Kısaca " U_1 in matchingi" dediğimiz zaman " U_1 in V_2 içine bir matchingini" anlayacağız.

Burada "esas matching" teoremini ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem I.1:

$B = (\{V_1, V_2\}, \epsilon)$ iki kısımlı grafında

$$\alpha_1(B) = |V_1| - \delta_1(B) = |V_2| - \delta_2(B)$$

dir.

BÖLÜM II

{0,1}-MATRİSLERİ

{0,1}-Matrisleri, Graf teori ve Dizayn teoride önemli rol oynarlar. Bu nedenle bu bölümde {0,1}-matrislerinin özellikleri incelenecektir.

Tanım II.1:

Elemanları 0 ve 1 lerden oluşan matrise {0,1}-matrisi denir. $r \times s$ mertebeli bir {0,1}-matrisi $M = [m_{ij}]$ ile gösterilir ve M nin bir sırasıyla da bir satırı veya bir sütunu ifade edilir.

$m_{ij}=1$ ise M nin i . satır ve j . sütunu çakışım durumundadır denir. i . ve j . satırın iç çarpımı

$$\sum_{k=1}^s m_{ik} m_{jk} > 0$$

ise bu iki satır çakışım durumundadır. Böylece,

$$k \in \{1, \dots, s\} \text{ için } m_{ik} = 1 = m_{jk}$$

dır. Benzer olarak iki sütunun iç çarpımı pozitif ise bu iki sütunun çakışık olduğunu söyleriz.

Bir $r \times s$ mertebeli M matrisinde, r satır sayısı ve s sütun sayısı olmak üzere M matrisinin sıraları toplamını

$$\Pi(M) = r+s$$

ile gösteririz.

Tanım II.2:

Bir $\Lambda=(V,f,E)$ sisteminin çakışım matrisi M olmak üzere

$$MM^* = A = [a_{ij}]$$

matrisine Λ nın tepe-tepe çakışım matrisi denir. Bu matris bir $\{0,1\}$ -matristir.

V kümesi,

$$V = \{x_1, \dots, x_r\}$$

şeklinde indislenmiş olabilir. Öyleki,

$$i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ için}$$

$$a_{ij} = |\{e \in E: \{x_i, x_j\} \subseteq f(e)\}| = |f^*(x_i) \cap f^*(x_j)|$$

dir.

Tanım II.3:

(V,f,E) sisteminin çakışım matrisi M ise

$$M^*M = H = [h_{ij}]$$

matrisine blok-blok çakışım matrisi denir.

E kümesi,

$$E = \{e_1, \dots, e_s\}$$

şeklinde indislenmiş olabilir. Öyleki,

$$i, j \in \{1, \dots, s\} \text{ için}$$

$$h_{ij} = |f(e_i) \cap f(e_j)| = |\{x \in V: \{e_i, e_j\} \subseteq f^*(x)\}|$$

dir.

$$V = \{x_1, \dots, x_r\} \text{ ve } E = \{e_1, \dots, e_s\}$$



olmak üzere $\Gamma=(V,\epsilon)$ bir graf olsun. Bu indislemeye uygun Γ nin çakışım matrisi $M=[m_{ij}]$ olsun. O zaman Γ nin $A=MM^*$ tepe-tepe çakışım matrisine karşı gelen a_{ij} elemanı,

$$a_{ij} = \begin{cases} \rho(x_i) , & \text{eğer } i=j \text{ ise} \\ 0 , & \text{eğer } i \neq j \text{ ve } \{x_i, x_j\} \notin \epsilon , \\ 1 , & \text{eğer } i \neq j \text{ ve } \{x_i, x_j\} \in \epsilon \end{cases}$$

dir. Bundan başka,

$$\rho(x_i) = \sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} a_{ji}$$

dir.

Γ nin blok-blok çakışım matrisinde, köşegen elemanlarının hepsi 2 dir ve diğer elemanların herbiri 0 veya 1 dir. M , bir $\{0,1\}$ -matrisi ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

- (a) MM^* ın köşegende olmayan elemanları 0 veya 1 dir.
- (b) M^*M nin köşegende olmayan elemanları 0 veya 1 dir.
- (c) M matrisi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde hiç bir 2×2 alt matrisine sahip değildir.

Bu ifadelerden birinin varlığı öbürlerinin de var olmasını gerektirir.

$$|V_i|=r_i \text{ olmak üzere } \Gamma=(\{V_1, V_2\}, \epsilon)$$

iki kısımlı grafını düşünelim. Onun (tepe-ayrıt) çakışım matrisleri, $(V_1 \cup V_2, \epsilon)$ küme sisteminin çakışım matrisleridir. Onların Şekil II.1 formunda olduğunu varsayalım. Burada

$r_i \times |\epsilon|$ mertebeli M_i alt matrisi, her bir sütununda tam bir tane 1'e ve herbir satırında en fazla r_j ($j \neq i$) tane 1'e sahiptir.

$$\begin{matrix} & & \epsilon \\ & & \left[\begin{array}{c} M_1 \\ \hline M_2 \end{array} \right] \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & & \end{matrix}$$

Şekil II.1.

Diğer taraftan, Γ nin tepe-tepe çakışım matrisi Şekil II.2 formundadır. Burada D_i köşegen matristir ve köşegeni, V_i ($i=1,2$) tepelerinin değerini gösterir. Ayrıca M , $r_1 \times r_2$ mertebeli bir $\{0,1\}$ -matrisidir.

$$\begin{matrix} & V_1 & & V_2 \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc} D_1 & & & M \\ \hline M^* & & & D_2 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Şekil II.2

M nin Γ iki kısımlı grafi için bir sistemin çakışım matrisi olduğuna dikkat edelim. Yalnız M , Γ nin karakterize edilmesine imkan tanır. Gerçekten, sadece ayrıtların çıkarılmasıyla K_{r_1, r_2} den meydana gelmiş Γ nin bütün alt graflarının kümesi ile tüm $r_1 \times r_2$ mertebeli $\{0,1\}$ -matrislerinin kümesi arasında doğal bir özdeşleşme vardır. Graf teorideki parametrelerin $\{0,1\}$ -matrisiyle bağlantıları sonucunda aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

- 1-) $\alpha_o(M) = \max(\{r_1, r_2\} \cup \{\Pi(L) : L, M \text{ nin bir sıfır alt matrisidir}\})$.

2-) $\alpha_1(M) = M$ de 1 lerle donatılmış konumların en geniş kümesinin kardinalitesidir. Burada bu parametre "devre-rank" olarak adlandırılır(1).

3-) $\beta_{01}(M) = M$ nin satır ve sütunlarının öyle bir kümesidir ki, bir 1'in bulunduğu her durum kümedeki bir sıra ile çakışım durumundadır. Ayrıca bu özelliği taşıyan kümelerin en küçüğünün kardinalitesi $\beta_{01}(M)$ ile gösterilir.

4-) $\beta_{01}(M) = M$ de 1 lerin bulunduğu konumlarla oluşturulan bir en küçük kümenin kardinalitesidir. Her sıra (satır veya sütun) üzerinde en az 1 tane 1 bulunur.

Γ iki kısımlı grafının bir ayrılmış tepesi, onun tepe-tepe çakışım matrisinin herbirinde, 0 ların bir satırına veya sütununa karşı gelir.

Önerme II.1:

Bir M , r_1, r_2 mertebeli $\{0,1\}$ -matrisinin her bir satır veya sütununda bir tane 1 varsa, o zaman her satır veya sütun üzerinde en az bir tane 1 in bulunduğu durumdaki bir en küçük kümenin kardinalitesi $\alpha_0(M)$ ye eşittir ve

$$\alpha_0(M) + \alpha_1(M) = \Pi(M)$$

dır. Buradaki Π sembolü yukarda $\alpha_1(M)$ in tanımındaki gibidir.

Önerme II.2:

Bir M , $\{0,1\}$ -matrisi için,

$$\alpha_0(M) + \beta_{01}(M) = \Pi(M)$$

dir ve eğer M nin her bir satır veya sütununda bir tane 1 varsa o zaman

(1) Ryser, H.J.1963 Combinatorial Mathematics. Carus Math. Monograph.No.14. New York; Wiley.

$$\alpha_1(M) + \beta_{10}(M) = \Pi(M)$$

dir.

Önerme II.3:

$r_1 \leq r_2$ olmak üzere $r_1 \times r_2$ mertebeli herhangi bir $\{0,1\}$ -matrisi verilsin. Ancak ve ancak her $n \times r_2$ mertebeli alt matris, sıfırların oluşturduğu en fazla $r_2 - n$ ($n=1, \dots, r_2$) sütuna sahipse, herhangi ikisinin çakışık olmadığı 1 lerin bulunduğu r_1 tane konum vardır.

Tanım II.4:

Herhangi bir tamlık bölgesi üzerinde bir $r \times s$ mertebeli matris $M = [m_{ij}]$ olsun. Eğer $r \leq s$ ise, M nin değişmezliği (permanent)

$$\text{perm}(M) = \sum_{\varphi} m_{1,\varphi(1)} \cdots m_{r,\varphi(r)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada toplam

$$\varphi: \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$$

üzerine alınmıştır.

$\text{per}(M)$, $s!/(s-r)!$ tane çarpımın toplamıdır. Eğer $r=s$ ise o zaman $\text{perm}(M)$, M nin işaretlenmemiş determinantı olarak düşünülebilir.

Önerme II.4:

$|E| \leq |V|$ olmak üzere $\Lambda = (V, f, E)$ bir sistem ve $\Gamma = (\{E, V\}, \epsilon)$ da Λ nın iki kısımlı grafi olsun ve M de Λ nın bir çakışım matrisi olsun. Bu durumda $\text{perm}(M)$, Λ nın LDR lerinin sayısına ve de Γ daki E nin matchinglerinin sayısına eşittir.

Teorem II.1:

$q \in \mathbb{N} + \{0\}$ olsun. $\Lambda = (V, f, E)$ sistemi için,

$$D \subseteq E \Rightarrow |D| \leq \left| \bigcup_{e \in D} f(e) \right| \quad \text{II.1}$$

olsun. Ayrıca bütün blokların en az q büyüklüğünde olduğunu kabul edelim. LDR lerin Λ tarafından kabul edilen sayısı en azından

- (a) Eğer $q < E$ ise $q!$
- (b) Eğer $|E| \leq q$ ise $q! / (q - |E|)!$

dır (1).

İspat II.1:

Bu ispat (2) den adapte olmuştur. İspata $|E|$ üzerinde genelleştirmeye başlıyalım. Eğer $E = \{e\}$ ise o zaman $|E| \leq q$ ve Λ nın kabul ettiği, LDR ler tam $|f(e)|$ dir. Burada istenildiği gibi

$$|f(e)| \geq q = q! / (q-1)!$$

dir. Tümevarım hipotezi, m den daha az bloklu bütün sistemler için teoremin doğru kabul edilmesidir. $|E| = m$ kabul edelim. (II.1) hali iki duruma ayrılabilir.

Durum 1:

$$\emptyset \subset D \subset E \Rightarrow |D| < \left| \bigcup_{e \in D} f(e) \right|$$

dir. $e_0 \in E$ alalım. Mademki

$$|f(e_0)| \geq q \geq 1,$$

-
- (1) Hall, M.Jr. 1948. Distinct representatives of subsets. Bull.Amer.Math.Soc.54, s.922-926.
 - (2) Mann, H.B. and Ryser, H.J. 1953. Systems of distinct representatives, Amer, Math. 60, s.397-401.

o halde $x_0 \in f(e_0)$ alalım. $E' = E + \{e_0\}$ ve $V' = V + \{x_0\}$ olsun ve alt sistem $\Lambda' = (V', f', E')$ şeklindedir. Burada bütün $e \in E'$ için,

$$f'(e) = f(e) \cap V'$$

dur. Eğer $D \subseteq E'$ ise o zaman

$$|D| \leq \left| \bigcup_{e \in D} f(e) \right| - 1 \leq \left| \bigcup_{e \in D} f'(e) \right|$$

kabul edilir. Yani Λ' , (II.1) durumunu sağlar. Ancak ve ancak $q-1 < |E'|$ ise $q < |E|$ dir. Tümevarım hipoteziyle,

1^o) $q < |E| \Rightarrow \Lambda'$, LDR leri en az $(q-1)!$

2^o) $q \geq |E| \Rightarrow \Lambda'$, LDR leri en az

$$\frac{(q-1)!}{[(q-1)-|E'|]!} = \frac{(q-1)!}{(q-|E|)!}$$

olarak kabul ettiği bulunur.

Λ' 'nın her bir λ' LDR si

$$\lambda(e) = \begin{cases} \text{Eğer } e \in E' \text{ ise, } \lambda'(e) \\ \text{Eğer } e = e_0 \text{ ise, } x_0 \end{cases}$$

la verilmiş, Λ nın bir tek λ LDR sine karşı gelir.

Durum 2:

Boş olmayan öyle bir $D \subseteq E$ vardır ki,

$$|D| = \left| \bigcup_{e \in D} f(e) \right|$$

dir.

Bu durumda bütün $e \in D$ için,

$$q \leq |f(e)| \leq |D| < |E|$$

dir. Tüme varım hipoteziyle, Λ_D alt sistem LDR leri en az $q!$ dir. Diğer alt sistem $\Theta=(\omega, g, E+D)$ şeklindedir. Burada

$$W = V + \bigcup_{e \in D}$$

dir. Bütün $e \in E+D$ ler için $g(e)=f(e) \cap W$ dır.

Θ nun (II.1) durumunu sağladığını gösterdik. $A \subseteq E+D$ için $|A| > \left| \bigcup_{e \in A} g(e) \right|$ olduğunu kabul edelim. Madem ki $D \cap A = \emptyset$, çeşitli kabullerle,

$$\left| \bigcup_{e \in D+A} f(e) \right| \leq \left| \bigcup_{e \in D} f(e) \right| + \left| \bigcup_{e \in A} f(e) \right|$$

$$< |D| + |A| = |D+A|$$

elde edebiliriz. Bu da, Λ nın (II.1) durumunu sağladığı kabulüne aykırıdır.

Madem ki Θ , (II.1) i sağlar, o halde q nun yerine 1 koyduğumuzda teoremin hipotezi sağlanır. Tümevarımla Θ , en az bir λ_1 LDR si kabul eder. Λ_D için bir LDR, λ_0 olsun ve

$$\lambda : E \rightarrow V$$

$$\lambda(e) = \begin{cases} \text{Eğer } e \in D & \text{ise } \lambda_0(e) \\ \text{Eğer } e \in E+D & \text{ise } \lambda_1(e) \end{cases}$$

ile tanımlansın. Λ_D ve Θ ayrık tepe kümeleri, λ bir (1-1) tasvir olduğundan λ , Λ nın bir LDR sidir. Λ_D nin LDR leri en az $q!$ olduğundan Λ nın ki de öyledir.

Sonuç II.1:

Eğer $1 \leq r < s$ ise, s sembol üzerinde bir $r \times s$ Latin dikdörtgenini, bir $(r+1) \times s$ Latin dikdörtgene genişletme yollarının sayısı en azından $(s-r)!$ dir (1).

(1) Hall, M.Jr. 1967 Combinatorial Theory Walthom Mass: Blaisdell.

Sonuç II.2:

$\Gamma = (\{V_1, V_2\}, \epsilon)$ bir iki kısımlı graf olsun. $q \in \mathbb{N}$ alalım ve bütün $x \in V$ ler için $\rho(x) \geq q$ kabul edelim. Eğer Γ, V_1 in bir matchingi olarak kabul ediliyorsa, o zaman böyle matchinglerin sayısı en az

(a) Eğer $q < |V_1|$ ise $q!$

(b) Eğer $q \geq |V_1|$ ise $q!/(q - |V_1|)!$

dir.

Bir tamlik bölgesi üzerinde bir rxs mertebeli $A = [a_{ij}]$ matrisinin i. satır toplamı

$$\rho_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad \text{dir.}$$

ve j. sütun toplamı

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} \quad \text{dir.}$$

Eğer bütün i, j ler için $\rho_i = \rho_j$ ($\sigma_i = \sigma_j$ ise söylendikleri sırayla) ise satır-toplamlarının sabit (sütun-toplamlarının sabit) olduğunu söyleriz.

Sonuç II.3:

rxs mertebeli $\{0,1\}$ -matrisi M olsun ve M nin satır-toplamları için bir en alt sınır $q \in \mathbb{N} + \{0\}$ olsun. Eğer $\text{perm}(M) \neq 0$ ise o zaman

$$\text{perm}(M) \geq \begin{cases} \text{Eğer } q < r \text{ ise } q! \\ \text{Eğer } q \geq r \text{ ise } q!/(q-r)! \end{cases}$$

dir.

Tanım II.5:

$PP^* = I_r$ olacak şekilde bir rxs mertebeli $\{0,1\}$ -matrisine P permütasyon matrisi denir. Burada

$$I_r = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

r mertebeli birim matrisi ifade eder. Eğer P bir rxs mertebeli permütasyon matrisi ise o zaman $r \leq s$ dir. Bundan başka, ancak ve ancak bütün satır ve sütun toplamaları 1 ise $r=s$ dir. Buradan açık olarak görüldüğü gibi $\text{perm}(P)=1$ dir.

Önerme II.5:

A , rxs mertebeli bir sıfır olmayan matris olsun. A nın elemanları $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ cismindeki negatif olmayan elemanlardır. $r \leq s$ alalım ve A nın satır-toplamaları ve sütun-toplamalarının sabit olduğunu kabul edelim.

$$A = \sum_{i=1}^n c_i P_i$$

olacak şekilde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ pozitif elemanları ile rxs mertebeli $P_1, \dots, P_n$ permütasyon matrisleri vardır.

İspat:

Bütün satır-toplamalarını ρ ya eşit ve bütün sütun-toplamalarını σ ya eşit alalım.

Eğer $r < s$ ise, her bir elemanı 1'e eşit $(s-r)xs$ mertebeli matris J olsun. A' arttırılmış matrisini düşünelim.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ \hline \frac{\rho}{s} J \end{bmatrix}$$

Bu matris aynı zamanda elemanları $\mathbb{F}$ 'in negatif olmayan elemanlarından olma özelliğindedir. Madem ki,

$$\sum_{i,j} a_{ij} = r \rho = s \sigma,$$

A'nun sütun toplamlarının hepsi

$$\sigma + (s-r) \rho / s = \frac{r \rho}{s} + \rho - \frac{r \rho}{s} = \rho$$

ya eşittir. Yani bütün satır veya sütun toplamları ρ ya eşittir. Eğer önerme A' için doğruysa o zaman A için de doğrudur. A yı bütün satır veya sütun toplamları ρ ya eşit olan $r \times r$ mertebeli bir matris olarak kabul edebiliriz.

A nın hiç bir ikilisi çakışık olmayan pozitif elemanlardan oluşmuş durumdaki bir r -kümesi olduğunu söyleriz. Böyle değilse (1) yardımıyla aşağıdaki şekilde söyleriz: A da pozitif bir elemanın bulunduğu her durumda çakışık olan, p satırları ve q sütunlarıyla $p+q < r$ olan, A nın r den daha az sıralarının kümesi olduğunu söyleriz. Buradan

$$r \rho = \sum_{i,j} a_{i,j} \leq (p+q) \rho < r \rho$$

olur bu da çelişik olduğundan yanlıştır. Az önce söylenen r -kümesindekiyle aynı konumda olan 1 ler ve diğer elemanları 0 lar olan, $r \times r$ mertebeli matris P_1 olsun. O zaman P_1 permütasyon matrisidir. Bu r durumlarının birinde konmuş olan, A nın elemanlarının en küçüğü c_1 olsun. Burdan $c_1 > 0$ ve $A - c_1 P_1$ aynı zamanda bir $r \times r$ mertebeli bir matristir. Bu matrisin elemanları $\mathbb{F}$ 'nin negatif olmayan elemanlarıdır ve $\rho - c_1$ satır veya sütun-toplamları sabittir.

Madem ki $A - c_1 P_1$, A dan daha fazla 0 lara sahip, o zaman bu işlem sonlu adım sonunda bitmek zorundadır.

(1) Egervary E. On combinatorial properties of matrices. Translated by H.W. Kuhn 1953. Office Naval Res. Logist. Project Rept. Dept. of Math.: Princeton University.

BÖLÜM III

Daha önceki bölümde $\{0,1\}$ -matrisleri incelendi. Bu bölümde,

1. $n=6$ için elemanları $-1 \leq a_{ij} \leq 1$ olan bir determinantın maksimum değerinin 160 olduğu gösterilecek,
2. $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ olmak üzere her bir elemanı ± 1 olan $n \times n$ boyutlu K_n matrisleriyle ilgili, elemanları 0 ve 1 lerden oluşan determinantların, maksimum değerli olanları araştırılacaktır.

III.1. Yöntem:

Elemanlarının hepsi ± 1 lerden oluşan 6. mertebeden bir determinantın değerinin 160 tan büyük olamayacağını ispatlamak istiyoruz. Bu ispatlanırsa a_{ij} elemanları $-1 \leq a_{ij} \leq +1$ şeklinde olan 6. mertebeden bir determinantın da değerinin 160 tan büyük olamayacağı gösterilmiş olur. Zaten asıl amacımız da bu ikinci durumu ispatlamaktır. Önce A determinantının elemanları $-1 \leq a_{ij} \leq 1$ olsun Bu determinanttan, elemanları ± 1 olan yeni bir determinant üretelim. Bu aşağıdaki yolla yapılabilir: A dan üretilen yeni determinant B ile, elemanlar da b_{ij} ile gösterilsin. Doğal olarak a_{ij} nin eşçarpanı A_{ij} , b_{ij} nin eşçarpanı B_{ij} ile gösterilecektir.

- 1) Eğer $-1 < a_{ij} < 1$ ve $A_{ij} > 0$ ise $b_{ij} = +1$
- 2) Eğer $-1 < a_{ij} < 1$ ve $A_{ij} < 0$ ise $b_{ij} = -1$
- 3) Eğer $-1 < a_{ij} < 1$ ve $A_{ij} = 0$ ise $b_{ij} = -1$ veya $+1$
- 4) $a_{ij} = -1$ ise $b_{ij} = -1$
- 5) $a_{ij} = +1$ ise $b_{ij} = +1$

Bu işlemin sonucunda elemanlarının hepsi +1 olan bir determinant elde edilmiş olur.

Problem:

Elemanları +1 lerden oluşan 6. mertebeden bir determinant 2^5 ile tam bölünür.

İspat:

Verilen determinantın birinci satırı diğer satırlara eklenirse, diğer beş satırın elemanlarının hepsi $+1+1=2$ veya $+1-1=0$ haline dönüşür. Bu durumda 2., 3., 4., 5., 6. satırlardaki 2 ortak çarpanı determinantın dışına çıkarılırsa, verilen determinant $2^5 \cdot k$ gibi bir sayıya eşit olmuş olur. İspatlanması gereken de budur.

Hatta yukarıdaki işlem, b_{11} elemanı hariç birinci sütunun diğer elemanlarını sıfır olacak şekilde yapılırsa, asıl determinant, elemanlarının hepsi 0 veya ± 2 olan, 5. mertebeden bir determinanta indirgenir, 2 çarpanları, her satırdan dışarı atılırsa,

$$2^5 \begin{vmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{vmatrix}$$

C

şeklinde 5. mertebeden bir C determinantı elde edilir.

Bunu bir örnekle gösterelim.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2^5 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Buradan da bu determinantın 2^5 ile tam bölündüğü açıkça görülür.

Yine B determinantına dönelim. B nin ilk üç satırındaki 3. mertebeden 20 minör $[(\binom{6}{3})=20]$ determinantına göre, Laplace açılımı ele alınsın. Orantılı sütuna veya satıra sahip olmayan (eğer sahipse determinantın değeri 0 dır.) minörlerin herbiri,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

determinantların satırlarının veya sütunlarının yerlerinin değiştirilmesiyle veya elemanların işaretlerinin değişmesiyle bu determinantlardan meydana gelir. Çünkü üçe üç ve sıfırdan farklı bir determinanti (elemanları $\neq 1$ olmak koşuluyla) biz ancak iki şekilde yazabiliriz. O da yukarıda gösterilen determinantlar gibidir. Diğerleri ise bu iki determinantın satır ve sütunlarının kombinasyonundan elde edilir. Bu yüzden yukardaki determinantlara söylenen işlemler uygulandığında öbür determinantları elde ederiz. Bunlardan farklı olan determinantlar ise sütunları veya satırları orantılı olan determinantlardır. Biliyoruz ki böyle determinantların değeri de 0 dır.

a,b,c,d üç elemanı $\neq 1$ lerden oluşan ve orantılı olmayan sütunları ifade etsin. Eğer determinantın ilk üç satırı aaaabc şeklindeyse, Laplace açılımı $4.4.4=64$ 'ü geçmeyecektir. Bunu bir örnekle gösterelim.

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \text{ olur.}$$

aaabbc durumunda da buna benzer olarak altı tane sıfırdan farklı minör vardır ve Laplace açılımı 96 yı aşamaz.

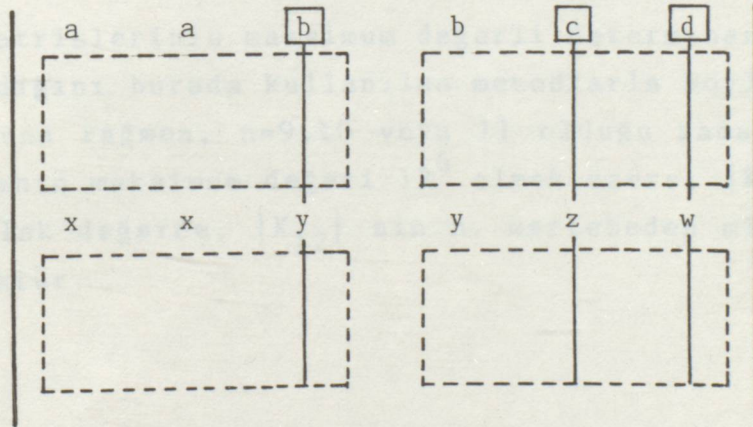
aaabcd durumunda $(1+3.3) \cdot 16=160$ olur. aabbcc durumunda ise açılım 128 olur.

Açılımı 160'a eşit bir determinantla ilgili bir örnek verelim.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 160$$

olur.

Sadece aabbcd durumu kalır. Buradan da aşikar olarak $(4+2.4).16=192$ ye sahip oluruz. Son üç satır xxyyzw düzeninde olduğu zaman ve abc gibi herbiri sıfırdan farklı determinantın, tümleyen minörü xzw gibi sıfırdan farklı bir determinant olduğunda açılımın 192'ye eşit olduğunu söyleriz. Eğer xx sütunu cd sütununun altında değilse, abc veya acd veya bcd gibi sıfırdan farklı olan bir determinant, xx sütununa sahip bir sıfır determinantıyla çarpılmış olacaktır.



$$bcd \rightarrow A_{123}^{356}$$

tümleyeni,

$$A_{456}^{124} \rightarrow xxy$$

olur, ki burada iki sütun (xx sütunu) orantılı olduğundan determinantın değeri sıfırdır.

Eğer xx sütunu, cd sütununun altındaysa o zaman yy sütunu cd sütununun altında değildir ve 192 ye eşit açılım yoktur.

III.2. John Williamson Yöntemi:

Elemanlarının herbirinin mutlak değeri birden büyük olmayan n . mertebeden bir determinantın maksimum değerinin $n^{n/2}$ olduğu Hadamard tarafından ispatlanmıştır (1). Ayrıca eğer determinantın herbir elemanı $\neq 1$ değerine sahipse ve $n=1,2$ veya $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise bu maksimum değerin elde edilebileceği de gösterilmiştir. Amacımız $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ olduğu zaman, her bir elemanı $\neq 1$ değerine sahip K_n matrislerinden, determinantları maksimum olanlarını araştırmaktır. Ayrıca $n=7$ ($n \not\equiv 0 \pmod{4}$) olduğu zaman, böyle bir determinant için maksimum değerin 2^6 ve bu değere sahip sadece bir tip determinant olduğunu göstereceğiz. Son iki bölümde önce $n=4m$ ve sonra $n=9,10$ ve 11 olduğu zaman K_n özel matrislerini bulacağız.

K_n matrislerinin maksimum değerli determinantlara sahip olup olmadığını burada kullanılan metodlarla söylemek imkansızdır. Buna rağmen, $n=9,10$ veya 11 olduğu zaman $|K_{12}|$ determinantının maksimum değeri 12^6 olmak üzere, $|K_n|$ determinantı mutlak değerce, $|K_{12}|$ nin n . mertebeden minörlerinden daha büyüktür.

(1) Jacques Hadamard, "Resolution d'une question relative aux determinants", Bulletin des Sciences Mathematiques, (2), Vol.17, 1893, part 1, pp.240-246.

Tanım III.2.1:

K_n veriliyor. K_n matrisine,

1°) K_n 'in herhangi bir satırının (-1) ile çarpımı,

2°) K_n 'in herhangi iki satırının yer değişimi,

3°) Matrisin transpozésinin alınması,

işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla, K_n , elde edilirse o zaman K_n ve K_n , matrisleri denktir denecektir. Bunu da $K_n \approx K_n$, ile gösteririz.

$K_n \approx K_n$, ise $|K_n|$ ve $|K_n|$ nün mutlak değeri aynıdır. Birinci sütunun herbir elemanı $+1$ değerine ve birinci satırın herbir elemanı birinci hariç olmak üzere -1 değerine sahip olduğu yerde $K_n \approx K_n$ matrisi bulunur. Bundan dolayı K_n in bu özel formda olduğunu düşüneceğiz. K_n in birinci satırındaki terimlerini göz önüne alarak, birinci sütununu $n-1$ sütuna ilave edersek $|K_n| = |P_{n-1}|$ bulunur. Burada P_{n-1} , her bir elemanı 2 veya 0 değerine sahip $n-1$ mertebeli bir matristir. Bundan dolayı,

$$|K_n| = |P_{n-1}| = 2^{n-1} |A_{n-1}| \quad \text{III.2.1}$$

dir. Burada A_{n-1} in her bir elemanı 1 veya 0 değerine sahiptir. Herbir (-1) elemanı yerine 0 elemanının gelmesiyle elde edilen $|K_n|$ determinantının, ilk elemanının ilk minöründen A_{n-1} elde edilir. Bunu konunun daha iyi anlaşılması için bir örnekle gösterelim.

Örnek III.2.1:

$n=4$ için K_4 'ü yazalım. Biliyoruz ki, birinci satır elemanları birinci hariç olmak üzere hepsi -1 dir. Birinci sütun elemanlarının ise hepsi $+1$ dir. Buna göre K_4 'ü yazarsak,

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|K_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|K_4| = |P_3| = 2^3 |A_3|$$

olur.

Bu metodu tersine çevirmek kolaydır. Verilen A_{n-1} için uygun K_n i yazabiliriz. Gene yukarıda verilen örneği düşünelim.

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ idi.}$$

Buradan,

$$K_4 = 2^3 A_3 = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

olarak buluruz. Bu da yukarıdaki örnekteki K_4 ün aynısıdır.

Tanım III.2.2:

A_{n-1} in satırlarının yeniden düzenlenmesiyle veya A_{n-1} in transpozesiyle veya böyle değişikliklerin birbiri ardına gelmesiyle A_{n-1} 'den $A_{n,-1}$ elde edilebiliyorsa, A_{n-1} ve $A_{n,-1}$ denktir deriz ve $A_{n-1} \approx A_{n,-1}$ ile gösteririz.

A_{n-1} ve $A_{n,-1}$ denk ise K_n ve K_n' nün bunlara karşı gelen matrisler olduğu aşıkardır. Fakat bunun tersi doğru değildir. K_n in birinci satırı ve birinci sütunu özel yapıya sahiptir. Eğer K_n' in $(i+1)$. satırını, birinci satıra almak istersek, $(i+1)$. satırdaki (birinci hariç olmak üzere) her bir elemanı -1 olmak zorundadır. Bu da $(i+1)$. satırdaki $+1$ olan elemanların her sütununun, -1 ile çarpılmasıyla elde edilir. Şimdi $(i+1)$. satır orijinal birinci satırın ve birinci satır da orijinal $(i+1)$. satırın aynısıdır. Eğer şimdi birinci ve $(i+1)$. satırlar aralarında yer değiştirirlerse, $K_n \sim K_n'$ matrisine sahip oluruz.

Örnek III.2.2:

Bu anlattıklarımızı yukardaki K_4 örneğinde açıklayalım.

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_3(-1)}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} H_{13}$$

orijinal 3. satır, 1. satırın
orijinal 1. satır, 3. satırın aynısı oldu.

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow K_4, \sim K_4$$

matrisini buluruz.

$A_{n'-1}$ matrisi, K_n ne karşı geldiğinden dolayı, doğrudan doğruya A_{n-1} matrisinden meydana gelebilir. Bu da şu şekilde olur: Değişmemiş i. satır ve sütunun sabit tutulmasıyla, değişmemiş i. satırda 0 olan herhangi bir sütunun sabit tutulmasıyla ve diğer bütün 1 olan elemanların yerine 0 ve 0 olan elemanların yerine 1 gelmesiyle oluşur. Burdan $A_{n'-1}$ nün bulunması için aşağıdaki basit kural elde edilir.

- 1^o) $A_{n'-1}$ 'nün i. satırı A_{n-1} 'in i. satırının aynısıdır.
- 2^o) $i \neq j$ için A_{n-1} 'in i. satırının, j. satıra eklenip ve her bir elemanının mod 2 ye indirgenmesi suretiyle $A_{n'-1}$ 'nün j. satırı bulunur.

$A_{n'-1}$, böyle işlemlerin herbirini takibiyle A_{n-1} den meydana geliyorsa, A_{n-1} ve $A_{n'-1}$ nun semi-equivalent (yarı-denik) olduğunu söyleriz ve bunu $A_{n-1} \sim A_{n'-1}$ ile gösteririz. Eğer A_{n-1} ve $A_{n'-1}$ yarı-denik ise, bunlara karşı gelen K_n ve $K_{n'}$ matrisleri denktir.

Lemma III.2.1:

A_{n-1} in alt matrisi A_{n-2} ve $A_{n-2} \sim A_{n'-2}$ ise, $A_{n'-1} \sim A_{n-1}$ matrisi vardır. $A_{n'-2}$ de alt matristir.

İspat:

A_{n-2} den $A_{n'-2}$ meydana geliyor. Ve A_{n-1} in alt matrisinin A_{n-2} olduğunu biliyoruz. Şu halde A_{n-1} e basit dönüşümlerin uygulanmasıyla $A_{n'-1}$ ü bulunur.

A_{n-1} matrisinin determinantını Δ_{n-1} ile ve A_{n-1} in maksimum değere sahip herhangi bir determinantını da D_{n-1} ile gösterelim. Bizim esas amacımız, D_6 değerinin 9 ve determinantları 2^6 değerine sahip bütün K_7 matrislerinin denk olduğunun ispatıdır.

III.2.1. Esas İşlem:

$A_{n-1} = (a_{ij})$ ve $D_{n-1} = |A_{n-1}|$ olsun. a_{ij} elemanının eş çarpımını A_{ij} ile gösterelim. 0 zaman,

1°) $a_{ij} = 1$ ise $A_{ij} = 0$ veya pozitif

2°) $a_{ij} = 0$ ise $A_{ij} = 0$ veya negatif

olur. Aksi halde D_{n-1} maksimum değere sahip değildir.

Yukardaki K_4 örneğine bu yeni öğrendiğimiz özelliği uygulayalım.

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ idi.}$$

$$a_{11} = 1 \rightarrow A_{11} = 1 \text{ pozitif}$$

$$a_{21} = 0 \rightarrow A_{21} = 0$$

$$a_{31} = 0 \rightarrow A_{31} = -1 \text{ negatif.}$$

$$a_{12} = 0 \rightarrow A_{12} = 0$$

$$a_{22} = 1 \rightarrow A_{22} = 1 \quad \text{pozitif}$$

$$a_{32} = 0 \rightarrow A_{32} = 0$$

$$a_{13} = 1 \rightarrow A_{13} = 0$$

$$a_{23} = 0 \rightarrow A_{23} = 0$$

$$a_{33} = 1 \rightarrow A_{33} = 1 \quad \text{pozitif}$$

olduğundan dolayı D_3 bir maksimum değere sahiptir.

Eğer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} q & \varepsilon \\ \delta' & A_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{ise,}$$

burada $\varepsilon, (e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ satır vektörü ve δ' de, $(d_1, d_2, \dots, d_{n-1})$ satır vektörünün transpozesidir.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} q & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ d_1 & & & & \\ d_2 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & A_{n-1} \\ d_{n-1} & & & & \end{vmatrix}$$

Determinant açılımından,

$$\Delta_n = q |A_{n-1}| - d_1 \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{1j} - d_2 \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{2j} - \dots - d_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} e_j A_{n-1,j}$$

$|A_{n-1}| = D_{n-1}$ olduğunu biliyoruz.

$$\Delta_n = q D_{n-1} - \sum_{i,j}^{n-1} d_i e_j A_{ij} \text{ olur.}$$

Her d_i, e_j ya 1 ya da 0 değerine sahip olduğundan

$$\Delta_n = q D_{n-1} - \Sigma' A_{ij} \text{ dir.} \quad \text{III.2.2}$$

Burada $\Sigma' A_{ij}$, A'nın alt matrislerinin bütün elemanlarının A_{ij} kofaktörlerinin toplamıdır. Bu alt matris d_i 'nin 1 değerine sahip satır ve e_j 'nin 1 değerine sahip sütunlarını içine alan A'nın satırlarından meydana gelmiştir (Diğerleri 0 olduğundan onları almıyoruz). Eğer $q=1$ ise, $\Sigma' A_{ij}$ negatif minimum değere sahip olduğu zaman, Δ_n mutlak değerce en büyük değere sahip olacaktır. $q=0$ ise, $\Sigma' A_{ij}$ pozitif maksimum değere sahip olduğu zaman, Δ_n mutlak değerce en büyük değere sahip olacaktır.

n 'in küçük değerlerinde, Δ_n 'in mutlak değerini maksimum yapmak için, A'nın hangi alt matrisini seçeceğimizi kolayca gösterebiliriz. Bu metodu uygulamaya $n=3$ ile başlayalım.

a. D_5 'in Bulunuşu:

$D_2=1$ olduğu açıktır. Denk olmayan iki tane A_2 ve A_2' matrisi vardır ve bunların determinantlarının değeri 1 dir. Bu matrisler şunlardır.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } A_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Madem ki $A_2 \sim A_2'$, determinantının maksimum değeri 4 olan sadece bir çeşit K_3 matrisi vardır ($K_3=2^2 |A_2|=4$). Herhangi bir $\Delta_3 > 0$, ilk minör olarak D_2 yi içine alır. Lemma 1 sonucundan dolayı D_3 ü bulurken sadece $D_2=|A_2|$ olduğu durumu düşünürüz. Çünkü D_2 nin her elemanının eş çarpanı 0 veya pozitifdir. (III.2.2) de $q=0$ ve

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ buluruz.}$$

Bundan dolayı $D_3=2$ dir ve K_4 matrisinin bir tek tipi için maksimum değeri 16 olan, K_4 ün determinantı vardır.

D_4 bir ilk minör olarak D_3 ü içeriyorsa, A_4 bir alt matris içine alır, bu

$$A_3' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dür.}$$

A_3 matrisinin eş çarpanlarının matrisi

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

B_3 ün herhangi alt matrisinin elemanlarının toplamı, b_{13} matrisi için minimumdur ve B_3 matrisi içinde bir maksimumdur. Bundan dolayı (III.2.2) yardımıyla iki tane

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$A_4' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini buluruz. b_{13} minimum olduğundan $q=1$ olarak alıyoruz, b_{13} 'e göre A_4 matrisini yazdığımızdan e_1 ve $d_1=1$ olur. Diğer e ve d ler 0 dır. A_4 'ünde ise B_3 maksimum olduğundan $q=0$ dır. B_3 matrisini aldığımızdan bütün e ve d ler 1 dir. Bunların determinantlarının mutlak değeri 3 dür. A_4 , denk değil A_4' olduğu halde $A_4 \sim A_4'$ dür ve K_5 matrisinin bir tek tipi vardır.

$\Delta_4 \geq 3$ ve ilk minör olarak D_3 ü içermiyorsa, içinde üç taneden az 1 olan satır yoktur. Bunun imkansız olduğu da kolayca görülür. Bundan dolayı $D_4=3$ ve K_5 matrisinin bir tek tipi için K_5 'in determinantının maksimum değeri 48 dir.

D_5 'i bulmak için, eğer D_5 , bir D_4 ilk minörünü içerirse, Lemma 1 yardımıyla A_5 'in A_4 veya A_4' ye denk bir A_4'' alt matrisini içerdiğini düşünürüz.

Biz

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini seçiyoruz.

Bu matrisin eş çarpanlarının matrisi ise,

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

B_4 'ün herhangi alt matrislerinin elemanlarının toplamı bir -2 minimum değerine sahiptir.

$$b_{14} \text{ ve } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{14} \\ b_{21} & b_{24} \end{bmatrix}$$

alt matrislerinde olduğu gibi.

Bu alt matrisin elemanlarının toplamı bir 4 maksimum değerine de sahiptir. (III.2.2) ile

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$A_5' = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 1 & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini buluruz. Bunların determinantları 5 maksimum değerine sahiptir. A_5 denk değil A_5' olduğu halde, $A_5 \sim A_5'$ dür ve K_6 matrisinin bir tek tipi vardır. (Gerçekten A_5 in birbirine denk olamayan üç tipi vardır. Bunların determinantlarının değeri 5 tir. Bu A_4 ve A_4' matrislerinin her ikisinin düşünülmesiyle gösterilir.)

$\Delta_5 \geq 5$ ve 3 mutlak değerli bir ilk minör içermiyorsa, Δ_5 , (11000) satırına sahip olmayabilir. Ya da

$$(\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ veya } (\beta) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde iki satıra sahip değildir. Çünkü herhangi bir şekilde (1000-1) satırlı bir determinanta sahip olacaktır. Böyle bir determinant herbir satırında üç tane 1 olan en az dört satır içermek zorundadır. Bu satırların ikisi α tipinde olmak zorundadır. Bundan dolayı $D_5=5$ ve bir tek çeşit K_6 matrisi vardır. Bunun determinantının maksimum değeri 160 dır.

b. D_6 nın Bulunuşu:

$\Delta_6 = |A_6|$ olsun. Bu ilk minör olarak D_5 i içerir. Bütün denk olmayan A_6 ları bulmak için, bütün denk olmayan A_5 leri düşünmeliyiz. Bütün denk olmayan K_7 leri bulmak için sadece bir tek A_5 i düşüneceğiz.

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

seçelim ve bu matrisin eş çarpanlarını

$$B_5 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

B_5 'in herhangi alt matrisinin elemanlarının toplamı bir -4 minimum değerine sahiptir. Bu alt matrisler

$$(b_{23} \ b_{24}) \text{ ve } \begin{bmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \text{ dür.}$$

Ayrıca bu toplam bir 8 maksimum değerine sahiptir. Bu yüzden Δ_6 bir 9 maksimum değerine sahiptir. $[\Delta_6=1.5-(-4)=9]$ ve bu

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$A'_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan bulunmuştur.

A_6 denk değil A'_6 fakat $A_6 \sim A'_6$ bu sebepten bir çeşit K_7 matrisi vardır (Buna rağmen beş tane denk olmayan A_6 matrisi vardır. Bunların determinantları 9 maksimum değerine sahiptir.)

Eğer Δ_6 , D_5 'i bir minör olarak içermiyorsa ve $\Delta_6 \geq 9$ ise Δ_6 , sadece iki tane bir olan bir satırı veya aşağıdaki şekilde iki satırı içeremez.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ayrıca Δ_6 , aşağıdaki tipteki iki satırı veya herbir satırında üç tane 1 ile sütununda üç tane 1'i olan, üç satırı içermesin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eğer Δ_6 , beş tane 1'i olan bir satırı içeriyorsa ve son elemanı 0 ise, son kolondaki diğer herbir eleman 1 olmak zorundadır. Bundan dolayı Δ_6 , üç tane 1'i olan iki satıra ve ayrıca dört tane 1'i olan iki satıra sahiptir ve altı tane satırın meydana gelmesi imkansızdır.

Eğer Δ_6 beş tane 1'i olan bir satırı içermiyorsa, Δ_6 en fazla dört tane 1'i içeren aşağıdaki şekildeki üç satıra

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve üç tane 1'i içeren aşağıdaki şekildeki dört satıra

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sahip olabilir.

Ayrıca Δ_6 için iki mümkün durum vardır,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

dır.

Her ikisinin de değeri $\sqrt{8}$ dir. Bundan dolayı $D_6=9$ dur ve K_7 matrisinin bir tek tipi için K_7 'nin determinantının maksimum değeri 2^6 dur.

$D_6=9$ oluşu iki nedenden dolayı ilginçtir.

1^o) Hadamard teoremiyle verilen mümkün değerden uzak oluşudur. Bu teoremle

$$|K_7| = m2^6 < 7^{7/2}$$

ve m 'nin olabileceği en büyük değer 14'dür.

2^o) Bir H_8 Hadamard matrisi, determinantının maksimum değeri 8^4 olan bir K_8 matrisidir (1). Çünkü H_8 'in bütün elemanları için genel bir faktörden başka ortogonaldir de $|H_8|$ 'in her bir ilk minörü $\sqrt{8^4/8}=\sqrt{8^3}$ değerine sahiptir. Bundan dolayı $|H_8|$ 'in herhangi bir ilk minörü, (III.2.1) yardımıyla bulunur. Bir Δ_6 değeri $8^3/2^6=8$ dir. Ayrıca bir $|H_8|$ Hadamard determinantının hiç bir ilk minörü mümkün olan en büyük değere sahip değildir.

c. Δ_{4n} İçin Bir Değerin Bulunuşu:

Eğer A bir H_{4n} Hadamard matrisinden (III.2.1) yardımıyla meydana gelen matris ise,

(1) Monthly (April, 1946), Vol.53, pp.200-223, Problem E 680.

$$K_n = P_{n-1} = 2^{n-1} |A_{n-1}| \text{ ve}$$

n mertebeli matrisin maksimum değeri $n^{n/2}$ den

$$H_{4n} = (4n)^{\frac{4n}{2}} = (4n)^{2n}$$

$$H_{4n} = 2^{4n-1} |A_{4n-1}|$$

$$(4n)^{2n} = 2^{4n-1} \Delta_{4n-1}$$

$$\Delta_{4n-1} = |A| = (4n)^{2n} / 2^{4n-1}$$

olur.

Δ_{4n-1} 'in herbir satırında, $2n$ tane 1 olan eleman ve $2n-1$ tane 0 olan eleman vardır. Aynı zamanda bir 1 elemanının eş çarpanı n^{2n-1} ve her bir 0 elemanının eş çarpanı $-n^{2n-1}$ dir.

$$\Delta_{4n-1} = \begin{vmatrix} \overbrace{1 \ 1 \ \dots \ 1}^{2n \text{ tane } 1} & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{2n-1 \text{ tane } 0} \\ \dots & \dots \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 & 1 \ 1 \ \dots \ 1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \overbrace{n^{2n-1} \ n^{2n-1} \ \dots \ n^{2n-1}}^{2n} & \overbrace{-n^{2n-1} \ -n^{2n-1} \ \dots \ -n^{2n-1}}^{2n-1} \\ \dots & \dots \\ n^{2n-1} \ n^{2n-1} \ \dots \ n^{2n-1} & -n^{2n-1} \ -n^{2n-1} \ \dots \ -n^{2n-1} \end{bmatrix}$$

Bundan dolayı eğer B, A'nın adjugate matrisi ise, B'nin bütün elemanlarının toplamı,

$$\begin{aligned} & 4_{n-1} [2n(n^{2n-1}) + (2n-1)(-n^{2n-1})] \\ &= 4_{n-1} [2(n \cdot n^{2n-1}) - 2(n \cdot n^{2n-1}) + n^{2n-1}] \\ &= (4n-1) n^{2n-1} \end{aligned}$$

dir. ve (III.2.2) yardımıyla $(4n-1)n^{2n-1}$ değerli bir Δ_{4n} bulunur. Bunu daha genişletirsek, şöyleki A'nın herhangi iki satırında, her iki elemanı da 0 olan tam $n-1$ sütun ve bir elemanı 1 olan $2n$ sütun vardır. Bundan dolayı, $(4n-3)$ satır ve $(3n-1)$ sütundan oluşan B'nin bir alt matrisi vardır. Bu alt matrisin elemanlarının toplamı

$$[3(n-1)+2n] n^{2n-1} \text{ dir.}$$

Ayrıca bir

$$\Delta_{4n} = (5n-3)n^{2n-1} \quad (\text{III.2.3})$$

vardır.

B matrisinin araştırmasında, $n=2,3$ veya 4 olduğu zaman, Δ_{4n} 'in herbir değeri (III.2.3) eşitliğiyle verilenden daha büyük değildir. Fakat $n=5$ olduğu zaman Δ_{20} 'nin değeri 25×5^9 olarak bulundu.

d. Δ_8, Δ_9 ve Δ_{10} 'un Değerlerinin Bulunuşu:

$n=2$ olduğu zaman,

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

bulunur. Δ_8 'in değeri 56 dır. B matrisine karşı gelen,

$$\begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{16} \\ b_{23} & b_{24} & b_{26} \end{bmatrix}$$

alt matrisinde elemanların toplamının -60 olduğu hesaplanır. Bundan dolayı bu alt matris, mertebesi 9 olan bir A matrisinin, (III.2.2) eşitliğiyle, bulunmasında kullanılırsa, $|A| = 116$ olur. $a_{33} = 1$ iken onun eş çarpanının değeri -4 dür. Eğer C, a_{33} elemanı yerine 0 gelmesiyle A dan oluşturulan bir matris ise $|C| = 120$ dir ve C'nin adjugatindeki bütün elemanlarının toplamı 264 dür. Bundan dolayı determinant

$$\Delta_{10} = \begin{vmatrix} 0 & X \\ X' & C \end{vmatrix}$$

dir. Burada X, 9 tane 1'i içeren bir satırı ve X' de 9 tane 1'i içeren bir sütunu gösterir. Δ_8 , Δ_9 ve Δ_{10} determinantları sırasıyla 56, 120 ve 264 değerindedir. Bu sayılar Hadamard teoremiyle verilen maksimum değerlerden çok uzaktır. Bu değerler sırasıyla 76, 195 ve 521 dir. Fakat D_5 'in değeri 5 dir, 6 değildir ve D_6 nın değeri 9 dur, 14 değildir. Hadamard teoremiyle verilen maksimanın her zaman elde edilemeyeceğini biliyoruz.

Mademki $(4n)^{-1/2} H_{4n}$ bir ortogonal matristir ve ortogonal matrisin her bir minörü o minörü tümleyen, minörün mutlak değerine eşittir.

$$\Delta_{4n-m-1} = n^{2n-m} \Delta_{m-1} \quad \text{III.2.4}$$

dir.

Burada Δ_j , H_{4n} 'in j+i mertebeli bir minöründen (III.2.1) eşitliğiyle bulunmuştur. Δ_j 'nin maksimum değerleri, $|H_{12}|$ nin minörlerinden bulundu. Bunlar,

$\Delta_{10}=243$, $\Delta_9=81$, $\Delta_8=27$, $\Delta_7=18$ ve $\Delta_6=9$ dur. Bu değerler, sonucu hariç olmak üzere önce bulunan değerlerden daha küçüktür. Ayrıca $|H_{12}|$, 2^6 maksimum değerli 7. mertebeden bir minör içerir. Fakat maksimum değerli, 7. mertebeden daha büyük mertebeli, bir minör içermez.

Gerçekten, $n > 2$ ise (III.2.4) ile Δ_{4n-4} için n^{2n-3} değeri, (III.2.3) ile verilen $(5n-8)(n-1)^{2n-3}$ değerinden daha küçüktür ve Δ_{4n-5} için $2n^{2n-4}$ değeri $D_{4n-5}=2(n-1)^{2n-1}$ den çok daha küçüktür. Son karşılaştırma $4n$ ve $4n-4$ mertebeli Hadamard matrisinin varlığının, varsayılmasına dayanır. Maalesef ki şu anda bunun doğru olup olmadığını bilmiyoruz (1), (2).

Math. Soc., 34, 1943.

HALK, M.Jr., Combinatorial Theory, Wilham Mass: Blaisdell, 1967.

JACQUES, H., Resolution d'une Question Relative aux Determinants, Bulletin des Mathematiques (2), Vol. 17, 1893.

MANW, H.B. and KIRBY, H. L., Studies of Distinct Submatrices, Amer. Math. Soc., 1963.

PALEY, R.E.A.C., On Orthogonal Matrices, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, Vol. 12, 1933.

-
- (1) R.E.A.C Paley, On Orthogonal Matrices, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, Vol.12,1933,pp.311-320.
 - (2) John Williamson, Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares, Duke Math. Journal, Vol.11, 1944 pp.65-81.

K A Y N A K L A R

EGARVARY, E., On Combinatorial Properties of Matrices,
Translated by H.W.Kuhn 1953.

GRAVER, J.E. and WATKINS, M.E., Combinatorics with Emphasis
on the Theory of Graphs, 1977.

HALL, M.Jr., Distinct Representatives of Subsets, Bull.Amer.
Math.Soc. 54, 1948.

HALL, M.Jr., Combinatorial Theory, Waltham Mass:Blaisdell,
1967.

JACQUES, H., Resolution d'une Question Relative aux Determi-
nants, Bulletin des Sciences Mathematiques (2), Vol.17,
1893.

MANN, H.B. and RYSER, H.J., Systems of Distinct Representati-
ves, Amer.Math.60, 1953.

PALEY, R.E.A.C., On Ortogonal Matrices Journal of Mathematics
and Physics. Massachusetts Institute of Technology Vol.
12, 1933.

PALL, G., A Maximal Determinant, Monthly, Vol.53, 1946.

RYSER, H.J., Combinatorial Mathematics, Carus Math.
Monograph No.14, New York:Wiley, 1963.

WILLIAMSON, J., Determinants Whose Elements are 0 and 1, Monthly, Vol.53, 1946.

WILLIAMSON, J., Hadamard Determinant Theorem, Monthly, Vol. 53., 1945.

WILLIAMSON, J., Hadamard's Determinant Theorem and The Sum of Four Squares, Duke Math. Journal, Vol.11, 1944.

WILSON, R.J., Introduction to Graph Theory, Longman Scientific and Technical, 1985.



Ö Z G E Ç M İ Ş

Doğduğu yer ve yıl : İstanbul, 10.8.1964
İlk Öğrenim : Kültür Koleji
Orta Öğrenim : Kültür Koleji
Çavuşoğlu Koleji
Yüksek Öğrenim : Yıldız Üniversitesi Mühendislik
Fakültesi Matematik Mühendisliği
Bölümü
Görevi : Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Matematik Bölümü Cebir
ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı
Araştırma Görevlisi
Medeni Hali : Bekar



