

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ortogonal Polinomlar

Yüksek Lisans Tezi

Ahmet Spor

1991

209

88

18.000 TL

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORTAGONAL POLİNOMLAR

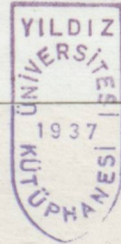
YÜKSEK LİSANS TEZİ

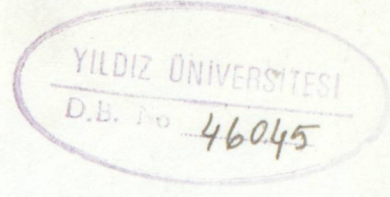
AHMET SPOR

İSTANBUL 1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209
88
Alındığı Yer : Fen Bilimleri Ens.
Tarih : 18.03.1992
Fatura : -
Fiyatı : 15.000.-TL
Ayniyat No : 1/1
Kayıt No : 48205
UDC : 510
Ek :





YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ö Z E T

Geçmiş yıllarda ortogonal polinomlar alanında çok büyük ilerlemeler kaydedilmiştir ve analizin önemli bölümlerinde anlatılmıştır. Ortogonal polinomlar, diferansiyel teorilerinde ve integral denklemlerde sıkça karşımıza çıkar. Ayrıca önemli interpolasyon problemlerinde ve mekanik alan hesaplamalarında uygulanır.

ORTAGONAL POLİNOMLAR

Bu çalışmada ortogonal polinomların bazı özellikleri ve bunlardan Legendre ve Tchebychev polinomları, Legendre polinomlarının bazı özellikleri ve Legendre diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Ayrıca son kısma bazı ortogonal polinomların tablosu verilmiştir.

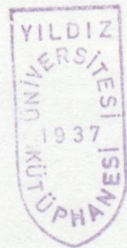
Bu çalışmada Yildiz Üniversitesi'nde görev yapan değerli hocam sayın Prof. Yapar Özdemir'e teşekkürlerimi sunarım.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 1991

AHMET SPOR

1991



İSTANBUL 1991

Ö Z E T

Geçmiş yıllarda ortagonal polinomlar alanında çok büyük ilerlemeler kaydedilmiştir ve analizin önemli bölümlerinde anlatılmıştır. Ortagonal polinomlar, diferansiyel teorilerinde ve integral denklemlerde sıkça karşımıza çıkar. Ayrıca önemli interpolasyon problemlerinde ve mekanik alan hesaplamalarında uygulanır.

Bu çalışmada ortagonal polinomların bazı özellikleri ve bunlardan Legendre ve Tchebycheff polinomları, Legendre polinomlarının bazı özellikleri ve Legendre diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Ayrıca son kısımda bazı ortagonal polinomların tablosu verilmiştir.

Bu çalışmamda büyük yardımlarını gördüğüm değerli hocam sayın Prof.Yaşar Özdemir'e teşekkürlerimi sunarım.

HAZİRAN 1991

AHMET SPOR

S U M M A R Y

Recent years have seen a great deal of progress in the field of orthogonal polynomials, and related to important branchess of analysis. Orthogonal polynomials occasionally occur in the theories of differantial and integral equations. Also orthogonal polynomials are applied to important problems of interpolation and mechanical quadrature.

In this study some properties of orthogonal polynomials and Legendre and Tchebycheff polynomials of these and some properties of Legendre polynomials and Legendre differantial equation have been related.

In addition, in the end of study, table of some orthogonal polynomials have been given.

JUNE 1991

AHMET SPOR

ORTAGONAL POLİNOMLAR

1.1. Ortogonal Fonksiyonlar

$w(x)$ $a < x < b$ aralığında tanımlı, reel, pozitif bir fonksiyon olarak alın. $f(x)$ ve $g(x)$ aynı aralıkta tanımlanmış iki reel fonksiyon olsunlar. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı

ORTAGONAL POLİNOMLAR

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. İntegrasyon aralığı sonlu olabilir. Her durumda $(f, f) \geq 0$ ve $(f, f) = 0$ ise $f(x) = 0$ dır. $(f, g) = 0$ ise f ve g ortogonaldır.

1.1. Ortogonal Polinomlar.....1

1.2. Ortogonal Polinomlar İçin Varlık Teoremi.....2

1.3. Ortogonal Polinomların Özellikleri.....6

1.4. Doğuran Fonksiyonlar.....8

2.1. Legendre Polinomları.....10

2.2. Legendre Polinomlarının Özellikleri.....13

3. Ortogonalite.....16

4. Legendre Diferansiyel Denklemleri.....17

5. Tchebycheff Polinomları.....20

6.1. Ortogonal Polinomların Diğer Kümeleri.....24

6.2. Ortogonal Polinomlar Tablosu.....25

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b w(x) f(x)^2 dx \quad (1.2)$$

olarak tanımlanır. Eğer $f(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli ise, ancak ve ancak $\|f\| = 0$ ise $f(x) = 0$ dır. Bir fonksiyonun normu belirlenen aralık ve ağırlık fonksiyonuna bağlıdır.

Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımı sıfır ise, yani,

$$(f, g) = 0 \quad (1.3)$$

ise f ve g fonksiyonları (a,b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır denir. Özel bir durumda $w(x) = 1$ için fonksiyonlara (a,b) aralığında basit ortogonaldır denir.

Bir $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi, eğer fonksiyonlar ikigeçerli ortogonal ise, yani,

$$(f_m, f_n) = 0, \quad m \neq n \quad (1.4)$$

ORTAGONAL POLİNOMLAR

1.1 Ortogonal Fonksiyonlar

$w(x)$ $a < x < b$ aralığında tanımlı, reel, pozitif bir fonksiyon olarak alınsın. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları da aynı aralıkta tanımlanmış iki reel fonksiyon olsunlar. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. İntegrasyon aralığı sonsuz olabilir. Her durumda (1.1) integrali mevcut olacak şekilde f, g ve w fonksiyonlarının var olduğu kabul edilir.

$$(f,g) = (g,f) \quad (1.2a)$$

$$(f,g+h) = (f,g) + (f,h) \quad (1.2b)$$

ve

$$(cf,g) = c(f,g) \quad (1.2c)$$

oldukları kolayca gösterilebilir. Burada c reel sabittir. (f,g) sembolü, ne ağırlık fonksiyonunu ne de istenen aralığı göstermez.

$f(x)$ fonksiyonunun kendisiyle iç çarpımı

$$(f,f) = \int_a^b w(x)[f(x)]^2 dx$$

şeklinde olup $a < x < b$ için $w(x) > 0$ olduğundan pozitiftir. $f(x)$ fonksiyonunun normu da $\|f\|$ şeklinde gösterilir ve

$$\|f\| = (f,f) = \left(\int_a^b w(x)[f(x)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (1.3)$$

olarak tanımlanır. Eger $f(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli ise, ancak ve ancak $f(x) \equiv 0$ ise fonksiyonun normu sıfırdır. Bir fonksiyonun normunun belirtilen aralık ve ağırlık fonksiyonuna bağımlı olduğuna dikkat edilmelidir.

Eger $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının iç çarpımı sıfır ise, yani,

$$(f,g) = 0. \quad (1.4)$$

ise o zaman $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır denir. Özel bir durumda $w(x) = 1$ iken fonksiyonlara (a,b) aralığında basit ortogonaldır denir.

Bir $(f_n(x))$ fonksiyonlar dizisi, eğer fonksiyonlar ikişerli ortogonal ise, yani,

$$(f_m, f_n) = 0, \quad m \neq n \quad (1.5)$$

ise fonksiyonların ortogonal bir kümesi (veya ortogonal fonksiyonların bir kümesi) olarak adlandırılır.

$\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, polinomlar dizisine de polinomların basit bir kümesi denir. Burada $\phi_n(x)$ polinomları n . derecedendir. Or-

tagonal polinomların bu kümeleri farklı yollardan ortaya çıkar. Belirli şartlar altında, verilen herhangi bir aralıkta ve bu aralık üzerindeki pozitif bir ağırlık fonksiyonuna uygun ortogonal polinomların bir kümesinin mevcut olduğu gösterilecektir. Aynı zamanda ortogonal kümenin polinomlarının, bir parametre içeren diferansiyel denklemler ailesinin çözümleri olarak ortaya çıktığı görülür.

Matematiksel fiziğin bazı sınır değer problemlerinin çözümlerini bulmak için Fourier serileri ve Ortogonal fonksiyonlar bilgisinden yararlanılır.

1.2 Ortogonal Polinomlar İçin Varlık Teoremi

İleriki konularda, verilen bir aralıkta ve bir pozitif ağırlık fonksiyonuna uygun olan ortogonal polinomların bir kümesinin varlığı gösterilecektir. Bununla birlikte ilk önce teoremin ispatında gerekli olacak polinomların bazı özellikleri çıkarılmalıdır.

Teorem 1. $\{\phi_n(x)\}$ polinomlarının basit bir kümesi olsun ve $Q_m(x)$ de keyfi m dereceli keyfi bir polinom olsun. O takdirde $Q_m(x) = \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ polinomlarının lineer kombinasyonudur.

ispat. Teoremin ispatı tümevarım metoduyla gösterilecektir. Eğer $Q_0(x)$ herhangi bir sabit ise (yani, sıfır dereceli bir polinom ise) ve eğer $C = Q_0 / \phi_0$ ise, o zaman $Q_0(x) = C\phi_0(x)$ olur. Böylece teorem $m = 0$ için doğrudur. k pozitif tamsayı olmak üzere teorem $m \leq k$ doğru olduğu varsayıлып $m = k+1$ için doğruluğu gösterilmelidir. $Q_{k+1}(x)$,

$$Q_{k+1}(x) = A_{k+1}x^{k+1} + A_kx^k + \dots + A_0$$

şeklinde $k+1$ dereceli bir polinom olsun. Burada $A_{k+1} \neq 0$ dir.

$a_{k+1} \neq 0$ olmak üzere

$$\phi_{k+1} = a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \dots + a_0$$

alınsın.

Eğer $C_{k+1} = A_{k+1} / a_{k+1}$ olarak seçilirse o zaman

$Q_{k+1}(x) - C_{k+1}\phi_{k+1}(x)$ polinomu, k dan küçük veya eşit dereceli bir polinomdur. Hipotezden,

$$Q_{k+1}(x) - C_{k+1} \phi_{k+1}(x) = C_0 \phi_0(x) + C_1 \phi_1(x) + \dots + C_k \phi_k(x)$$

veya

$$Q_{k+1}(x) = \sum_{j=0}^{k+1} C_j \phi_j(x)$$

elde edilir. Böylece teorem $m \leq k$ için doğru ise $m = k+1$ içinde doğrudur. $m = 0$ için doğru olduğundan her pozitif m tamsayısı içinde doğrudur.

Teorem 2. $\{\phi_n(x)\}$ ortagonal polinomlarının bir kümesi ancak ve ancak her pozitif n tamsayısı için

$$(\phi_n, x^m) = \int_a^b w(x) \phi_n(x) x^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.6)$$

ise $a < x < b$ aralığında $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortagonal bir kümedir.

ispat. İlk Önce (1.6) şartı kabul edilirse $\phi_n(x)$ in ortagonal olduğu gösterilmelidir. $n > m$ olmak üzere $\phi_n(x)$ ve $\phi_m(x)$ iki farklı polinomlar olsunlar ve

$$\phi_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$$

olarak alınsın. O zaman

$$(\phi_n, \phi_m) = a_m (\phi_n, x^m) + a_{m-1} (\phi_n, x^{m-1}) + \dots + a_0 (\phi_n, 1) = 0$$

dir. Böylece polinomlar ortagonaldirler. Şimdide $\phi_n(x)$ polinomlar kümesi ortagonal ise (1.6) şartının sağlandığı gösterilecektir. n ve m , $0 \leq m \leq n$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsun. Teorem 1 den,

$$x^m = C_0 \phi_0(x) + C_1 \phi_1(x) + \dots + C_m \phi_m(x) \quad (1.11)$$

olacak şekilde $C_0, C_1, \dots, C_m$ sabitleri mevcuttur. O takdirde

$$(\phi_n, x^m) = C_0 (\phi_n, \phi_0) + C_1 (\phi_n, \phi_1) + \dots + C_m (\phi_n, \phi_m) = 0$$

dir. Böylece (1.6) şartı sağlanır.

Teorem 3. $w(x)$ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında pozitif ve sürekli olsun. Aynı zamanda $w(x)$ fonksiyonu

$$M_n = \int_a^b w(x) x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

göstermek için $\Delta_n = 0$ kabul edilsin. Bu kabulün bir çelişki meydana getireceği gösterilecektir. Eğer (1.10) sistemindeki C_n ler sıfır ise, sonuç olarak homojen sistem sıfıra eşit olan bir determinanta sahiptir ve bu yüzden trivial olmayan bir çözümü vardır. Bu $\leq n-1$ dereceli bir $Q_{n-1}(x)$ polinomunun mevcut olduğunu

ve

$$(Q_{n-1}, x^m) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.12)$$

olacak şekilde sıfıra özdeş olmadığını ifade eder. Bu da $Q_{n-1}(x)$ polinomu $\leq n-1$ dereceli her polinoma ortogonaldır demektir. Özellikle kendisine ortogonal olmalıdır, öyle ki;

$$(Q_{n-1}, Q_{n-1}) = \int_a^b w(x) [Q_{n-1}(x)]^2 dx = 0$$

dir. Ancak bu $w(x)$ $a < x < b$ için pozitif olduğundan mümkün değildir. Bu nedenle $\Delta_n = 0$ kabulü yanlıştır, yani $\Delta_n \neq 0$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Gerçekten teorem 3 sonlu sayıdaki her ortogonal polinomlar kümesini kurmak için bize bir metod verir. Örneğin, $0 < x < 1$ aralığında

$$w(x) = \sqrt{x}$$

ağırlık fonksiyonuna uygun olan kümenin ilk bir kaç ortogonal polinomlarını kuralım. Eğer $\phi_0(x) = 1$ ve $\phi_n(x)$ deki x^n nin katsayıları

tek olarak seçilirse, o zaman polinomlar tek bir şekilde belirlenir. $\phi_1(x)$ ve $\phi_2(x)$ polinomları

$$\phi_1(x) = x + a, \quad \phi_2(x) = x^2 + bx + c$$

şeklinde dirler. a sabiti

$$(\phi_1, 1) = \int_0^1 \sqrt{x} (x + a) dx = 0$$

eşitliğinden bulunur. Buradan $a = -3/5$ ve

$$\phi_1(x) = x - \frac{3}{5}$$

olur. b ve c sabitleri de

$$(\phi_2, 1) = \int_0^1 \sqrt{x} (x^2 + bx + c) dx = 0$$

$$(\phi_2, x) = \int_0^1 x^{3/2} (x^2 + bx + c) dx = 0$$

eşitliklerinden

$$b = -10/9, \quad c = 5/21$$

olarak bulunur ve böylece

$$\phi_2(x) = x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{5}{21}$$

olur. Bu metod zahmetlidir ve keyfi n. dereceden ϕ_n polinomu için genel bir formül vermez.

1.3 Ortogonal Polinomların Bazı Özellikleri

Bu kısımda, $w(x)$ ağırlık fonksiyonunun $a < x < b$ aralığında sürekli ve pozitif olduğu ve

$$M_n = \int_a^b w(x)x^n dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

integrallerinin mevcut olduğu varsayılacaktır.

Teorem 4. $\{\phi_n(x)\}$ ortogonal polinomların bir kümesi ve $Q_m(x)$ de keyfi m. dereceden keyfi bir polinom olsunlar. O zaman

$$Q_m(x) = C_0\phi_0(x) + C_1\phi_1(x) + \dots + C_m\phi_m(x) \quad (1.13)$$

şeklinde olacaktır. Burada

$$C_k = \frac{(Q_m, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (1.14)$$

şeklindedir.

ispat. Teorem 1 den

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^m C_i \phi_i(x)$$

olacak şekilde C_i sabitlerinin var olduğu biliniyor. Bu eşitliğin her iki yanını ϕ_k , $0 < k < m$ olacak şekilde keyfi bir tamsayı olmak üzere, $w(x)\phi_k(x)$ ile çarparak ve a dan b ye integre ederek,

$$(Q_m, \phi_k) = C_0(\phi_0, \phi_k) + C_1(\phi_1, \phi_k) + \dots + C_m(\phi_m, \phi_k)$$

elde edilir. $(\phi_i, \phi_k) = 0$ ($i \neq k$ iken) olduğundan,

$$(Q_m, \phi_k) = C_k(\phi_k, \phi_k) = C_k \|\phi_k\|^2$$

olur. $\|\phi_k\| \neq 0$ olduğundan C_k için çözülürse (1.14) formülü bulunur.

Teorem 5. Ortogonal kümenin $\phi_n(x)$ polinomları

$$x\phi_n(x) = A_n \phi_{n+1}(x) + B_n \phi_n(x) + C_n \phi_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.15)$$

şeklindeki rekürans bağıntısını sağlar. Burada A_n, B_n, C_n sabitleri n 'ye bağlı sabitlerdir.

ispat. $x\phi_n(x)$ $n+1$ dereceli bir polinom olduğundan Teorem 4 den

$$x\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} \phi_k(x),$$

elde edilir. Burada

$$a_{n,k} = \frac{(\phi_n, x\phi_k)}{\|\phi_k\|^2} = \frac{(x\phi_n, \phi_k)}{\|\phi_k\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n+1$$

şeklinde dir. $x\phi_k(x)$ $k+1$ dereceli bir polinom olduğundan, $(k+1 < n)$, $a_{n,k} = 0$ bulunur. $A_n = a_{n+1,n}$, $B_n = a_{n,n}$ ve $C_n = a_{n-1,n}$ olarak

(1.15) bağıntısı bulunur. A_n nin sıfır olamayacağı açıktır. Eğer sıfır olsaydı (1.15) bağıntısının sağ tarafı $\leq n$ dereceli bir polinom olacaktı. Ayrıca C_n nin de sıfır olamayacağı açıkça görülür.

Teorem 6. Ortogonal kümenin n . dereceden bir ϕ_n polinomu n farklı reel köke sahiptir. Bu köklerin hepsi $a < x < b$ aralığındadır.

ispat. $\phi_0(x)$ polinomu sıfırdan farklı bir sabittir ve kökü yoktur. $n > 0$ için,

$$(\phi_n, 1) = \int_a^b w(x) \phi_n(x) dx = 0$$

bulunur. $a < x < b$ aralığında $w(x) > 0$ olduğundan, $\phi_n(x)$ bu aralıkta en az bir noktada işaret değiştirir. $x_1, x_2, \dots, x_m$, $\phi_n(x)$ in işaret değiştirdiği $a < x < b$ aralığındaki noktalar olsunlar. O zaman $m \leq n$ için $\phi_n(x)$ en fazla n farklı köke sahip olabilir. $m < n$ olduğu varsayalım. Aynı zamanda,

$$\psi_m(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$$

polinomu her bir $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarında işaret değiştirir. Böylece $\phi_n(x)\psi_m(x)$ çarpımı $a < x < b$ aralığındaki her x için işaret değiştirmez. Fakat $\psi_m(x)$ m . dereceden bir polinom olduğundan, $m < n$ olmak üzere,

$$(\phi_n, \psi_m) = \int_a^b w(x) \phi_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad (1.20)$$

olur. Bu ise mümkün değildir. Yani $m = n$ olmalıdır. Böylece $\phi_n(x)$ $a < x < b$ aralığında n farklı noktada işaret değiştirir, yani $\phi_n(x)$ bu aralıkta n farklı reel köke sahiptir.

1.4 Doğuran Fonksiyonlar

İki değişkenli bir $F(x, t)$ fonksiyonu $n \geq 0$ olmak üzere $(f_n(x))$ fonksiyonlar kümesine göre

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n \quad (1.16)$$

ise doğuran fonksiyonlar olarak adlandırılır. Ayrıca $f_n(x)$ fonksiyonlarına da $F(x, t)$ fonksiyonu tarafından doğurulan fonksiyonlar denir. (1.16) denklemiindeki serinin her x ve t için yakınsak olması gerekmez. Yalnız serinin $|t| < r$ için ve bazı I aralığındaki x için yakınsaklığı gerekecektir.

Doğuran fonksiyonlar, bir çok önemli ortogonal polinomların kümeleri için bilinir. Bu durumlarda, doğuran fonksiyon, kümenin bazı önemli özelliklerini çıkarmak için uygun bir metod sağlar. Bir sonraki kısımda Legendre polinomları olarak bilinen polinomlar kümesi için bir yöntem açıklanacaktır. Bunu yapmak için aşağıdaki iki teoreme gerek vardır.

Teorem 7. $f(u)$ fonksiyonu

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad |u| < R \quad (1.17)$$

kuvvet serisine açılımı ile $u = 0$ da analitik olsun. $g(z)$ fonksiyonu da $g(0) = 0$ ile $z = 0$ da analitik olsun.

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < r, \quad (1.18)$$

ve $|z| < r$ için $|g(z)| < R$ olduğu varsayılınsın. O zaman $F(z) = f[g(z)]$ fonksiyonu $z = 0$ da analitiktir ve $|z| < r$ için kuvvet serisine açılımı

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (1.19)$$

şeklinde olur. Ayrıca, $F(z)$ için (1.19) serisi, (1.18) serisi u 'ya göre (1.17) serisinde yerine koyularak ve z 'nin benzer kuvvetlerini içeren terimleri toplanarak bulunabilir.

$F(x, t)$ fonksiyonunun bir I aralığında her x için $t = 0$ da t ye

göre analitik olduğu kabul edilsin, Öyleki

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n, \quad |t| < r, \quad x \in I \quad (1.20)$$

olsun. Bu takdirde adi kuvvet serilerinin türevinden

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x)t^{n-1}, \quad |t| < r, \quad x \in I \quad (1.21)$$

elde edilir. Şimdi aşağıdaki soru karşımıza çıkar: $\partial F(x,t)/\partial x$ türevinin mevcut olduğu varsayımı, ne zaman doğrudur?

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)t^n \quad ? \quad (1.22)$$

(1.20) serisinin x 'e göre terim terim türevi için bir dizi yeterli şartlar aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 8. $F(x,t)$ ve $\partial F(x,t)/\partial x$ bir $x \in I$ için $t = 0$ da analitik olsun. Öyleki $|t| < r$ ve $x \in I$ için

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n \quad (1.24)$$

olsun. Ayrıca $F(x,t)$ 'nin her mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun ve $|t| < r$ ve $x \in I$ için sürekli olsun. O takdirde $f'_n(x)$ türevleri vardır ve $x \in I$ ve $n \geq 0$ için $g_n(x) = f'_n(x)$ dir.

ispat. $F(x,t)$ 'nin kısmi türevleri hakkındaki süreklilik varsayımı türev sırasının önemli olmadığını ifade eder. Böylece

$$\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial^3 F(x,t)}{\partial t^2 \partial x} = \frac{\partial^3 F(x,t)}{\partial x \partial t^2}$$

v.s. olur. Şimdi (1.23) denkleminde

$$f_n(x) = n! \left[\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial t^n} \right]_{t=0}$$

ve (1.24) dekleminde

$$g_n(x) = n! \left[\frac{\partial^{n+1} F(x,t)}{\partial t^n \partial x} \right]_{t=0}$$

elde edilir. O takdirde $f'_n(x)$ türevi mevcut ve

$$f_n'(x) = n! \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^n F(x, t)}{\partial t^n} \right]_{t=0} = n! \left[\frac{\partial^{n+1} F(x, t)}{\partial t^n \partial x} \right]_{t=0} = g_n(x)$$

dir.

2.1 Legendre Polinomları

Burada

$$F(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \quad (2.1)$$

fonksiyonu ile üretilen fonksiyonlar kümesi ele alınacaktır. $F(x, t)$ nin t 'nin kuvvetlerine göre açılımını bulmak için ilk önce

$$F(x, t) = (1 - u)^{-1/2} \quad (2.2)$$

yazılır, burada

$$u(x, t) = (2xt - t^2) \quad (2.3)$$

dir.

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - m + 1)}{m!} z^m \quad (2.4)$$

binom serisi, $|z| < 1$ için ve her α reel sayısı için yakınsaktır. (α negatif olmayan bir tamsayı ise, seri her z için sonlu ve yakınsaktır.) O takdirde

$$F(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2} - 1\right)\left(\frac{-1}{2} - 2\right) \dots \left(\frac{-1}{2} - m + 1\right)(-u)^m}{m!}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2m - 1)}{2^m m!} u^m \quad (2.5)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{2^{2m} m!} u^m$$

dir. Her zaman $|u| = |2xt - t^2|$ birden daha küçüktür. Özellikle açılım, $|x| \leq 1$ ve $|t| \leq \sqrt{2} - 1$ iken tanımlıdır. Öyleyse

$$|u| \leq 2|x||t| + |t^2| < 1.$$

dir.

(2.5) denklemindeki $u^m = (2xt - t^2)^m$ niceliklerinden herbiri t 'ye göre

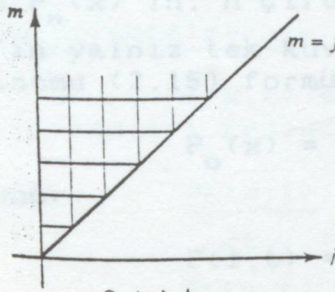
$$u^m = \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j m! (2x)^{m-j}}{j!(m-j)!} t^{m+j} \quad (2.6)$$

her x ve t için tanımlı olan sonlu kuvvet serisine açılabilir. Buradan $|x| \leq 1$ ve $|t| < \sqrt{2} - 1$ için

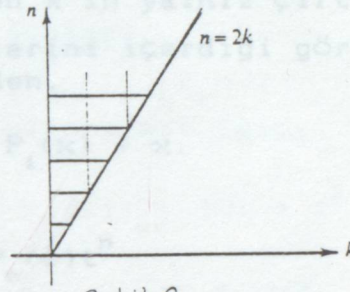
$$F(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j (2m)! (2x)^{m-j}}{2^{2m} m! j! (m-j)!} \right] t^{m+j} \quad (2.7)$$

olur. Teorem 7 ye göre, $F(x, t)$, $t = 0$ da t 'ye göre analitiktir ve $|x| \leq 1$ ve $|t| < \sqrt{2} - 1$ için t 'ye göre Maclaurin serisiyle gösterilebilir.

Maclaurin serisi, (2.5) deki terimleri t 'nin benzer kuvvetleri ile toplamakla bulunabilir. Bunu yapmak için Şekil 1 deki gibi bir düzlemde, j ve m dikdörtgensel koordinatları göz önüne alınsın.



Şekil 1.



Şekil 2.

Değerler

$$0 \leq j \leq m, \quad m \geq 0. \quad (2.8)$$

eşitsizlikleri yardımıyla belirlenen jm düzlem bölgesindeki tamsayı koordinatlı noktalara uygun (2.7) serisindeki m ve j indisleri ile alınır. Bu bölge Şekil 1 de gösterilmiştir. Eğer

$$k = j, \quad n = m + j \quad (2.9a)$$

$$j = k, \quad m = n - k, \quad (2.9b)$$

denklemleri yardımıyla yeni k ve n indisleri alınır. kn düzlemindeki uygun bölge,

$$0 \leq k \leq n - k, \quad n - k \geq 0, \quad (2.10)$$

eşitsizlikleri ile veya buna denk

$$0 \leq k \leq n/2, \quad n \geq 0 \quad (2.11)$$

eşitsizlikleri ile belirlenir. Bu bölge Şekil 2 de gösterilmiştir.

Herhangi bir α reel sayısı için, $N \leq \alpha$ olacak şekilde en büyük N tamsayısını göstermek için $[\alpha]$ sembolü kullanılır. Örneğin,

$$[5/4] = 1, \quad [\pi] = 3, \quad [-5/2] = -2$$

m ve j tamsayılar iken n ve k da tamsayı olduklarından,

$$0 \leq k \leq \left[\frac{n}{2} \right] \quad (2.12)$$

yeni n ve k indisleri elde edilir.

Eğer (2.9b) formülü yardımıyla (1.7) serisindeki yeni n ve k indisleri ele alınır ve t 'nin benzer kuvvetleri toplanırsa,

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{2^n (n-k)! k! (n-2k)!} \right] t^n \quad (2.13)$$

$|x| \leq 1$ ve $|t| < \sqrt{2} - 1$ için bulunur.

Yukarıdaki seride t^n nin katsayısı n . dereceden x 'in bir polinomudur ve $P_n(x)$ sembolü ile gösterilir. O takdirde

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n, \quad (2.14)$$

olur, burada

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)! x^{n-2k}}{2^n (n-k)! k! (n-2k)!} \quad (2.15)$$

dir. $P_n(x)$ polinomlarına Legendre polinomları denir.

Bu polinomların bir kaç Özelliği kolaylıkla bulunur. (2.15) formülünden $P_n(x)$ 'in, n çift iken x 'in yalnız çift kuvvetlerini, n tek iken x 'in yalnız tek kuvvetlerini içerdiği görülür. İlk iki Legendre polinomu (2.15) formülünden,

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x. \quad (2.16)$$

olarak bulunur.

$$F(1,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n \quad (2.17)$$

ve ayrıca

$$F(1,t) = (1 - 2t + t^2)^{-1/2} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad (2.18)$$

olduğundan t 'nin benzer kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırmakla

$$P_n(1) = 1 \quad (2.19)$$

olduğu görülür.

Legendre polinomları için alternatif bir formül

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (2.20)$$

Rodrigues formülüdür. Bu formülün geçerliliğini göstermek için $(x^2 - 1)^n$ fonksiyonu binom serisine açılsın,

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k! (n-k)!} x^{2n-2k} \quad (2.21)$$

ve n kez türetilsin.

$$\frac{d^n}{dx^n} x^r = \begin{cases} \frac{r!}{(n-r)!}, & n \leq r \\ 0, & n > r \end{cases}$$

olduğundan,

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n! (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k} \quad (2.22)$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki ifade (2.15) formülündeki ifade ile karşılaştırılırsa,

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = 2^n n! P_n(x).$$

olduğu görülür.

2.2 Legendre Polinomlarının Özellikleri

$$F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} \quad (2.23)$$

doğuran fonksiyonları Legendre polinomları için,

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = (x - t)(1 - 2xt + t^2)^{-3/2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = t(1 - 2xt + t^2)^{-3/2} \quad (2.25)$$

birinci kısmi türevlere sahiptir. (2.23) ve (2.24) formüllerinden

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial F}{\partial t} = (x - t)F \quad (2.26)$$

olur.

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} \quad (2.27)$$

serileri (2.26) denkleminde yerlerine konursa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n+1} \\ = x \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^{n+1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

bulunur. İndisleri değiştirmekle bu denklem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} - 2x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(x)t^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)P_{n-2}(x)t^{n-1} \\ = x \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}(x)t^{n-1} \end{aligned}$$

veya

$$[P_1(x) - xP_0(x)] + \sum_{n=2}^{\infty} [nP_n(x) - x(2n-1)P_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x)]t^{n-1} = 0 \quad (2.33)$$

olarak yazılabilir. Sonuç olarak Legendre polinomları

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.29)$$

tam rekürans bağıntısını sağlamalıdır. $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = x$ olduğu biliniyor, bu bağıntı daha yüksek mertebeden polinomların hesabında kullanılır ve ilk bir kaç Legendre polinomları

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= 1/2(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= 1/2(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= 1/8(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= 1/8(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

olarak bulunur. (2.23) ve (2.24) formüllerinden $F(x,t)$ doğuran fonksiyonu aynı zamanda

$$(x-t) \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} - t \frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

kısmi diferansiyel denklemini sağlar. $F(x,t)$, teorem 8'in hipotezini sağladığından

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n, \quad |x| < 1, |t| < \sqrt{2}-1 \quad (2.32)$$

elde edilir. Bu seri ve (2.27)'nin ilk serisi (2.31) denkleminde yerine konursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP'_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n = 0,$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P'_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n = 0$$

yada

$$xP'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x)]t^n = 0$$

bulunur. Böylece Legendre polinomları,

$$xP'_n(x) = P'_{n-1}(x) + nP_n(x), \quad n \geq 1. \quad (2.33)$$

diferansiyel rekürans bağıntısını sağlar. (2.29) ve (2.33) rekürans bağıntıları yalnız $P_n(x)$ ve onun türevlerini içeren bir denklemin çıkarılmasında kullanılırlar. (2.29) rekürans bağıntısının türevi

$$nP'_n(x) = (2n-1)xP'_{n-1}(x) + (2n-1)P'_{n-1}(x) - (n-1)P'_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (2.34)$$

bağıntısını verir. (2.33) formülünden

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \quad n \geq 1. \quad (2.35)$$

ve

$$\begin{aligned} P'_{n-2}(x) &= xP'_{n-1}(x) - (n-1)P'_{n-1}(x) \\ &= x^2P'_n(x) - nxP_n(x) - (n-1)P'_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

elde edilir. $P'_{n-1}(x)$ ve $P'_{n-2}(x)$ için bu ifadeler (3.34) de yerlerine konarak ve sadeleştirerek,

$$P'_n(x) = x^2P'_n(x) - nxP_n(x) + nP'_{n-1}(x), \quad n \geq 2. \quad (2.37)$$

bulunur. Bu denklem türetilerek,

$$P''_n(x) = x^2P''_n(x) + (2-n)xP'_n(x) - nP_n(x) + nP'_{n-1}(x) \quad (2.38)$$

elde edilir. ((3.34) formülünü kullanarak ve $P'_{n-1}(x)$ 'i çıkararak,

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (2.39)$$

bulunur. Bu denklem $n \geq 2$ için geçerlidir. Bununla birlikte, $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = x$ olduğundan dolayı, aynı zamanda $n = 0$ ve $n = 1$ içinde geçerlidir.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (2.40)$$

diferansiyel denklemi α . mertebeden Legendre denklemi olarak bilinir. Açık olarak α negatif olmayan bir n tamsayısı olduğunda $P_n(x)$, denklemin bir çözümüdür. (2.40) diferansiyel denklemi

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (2.41)$$

şeklinde yazılabilir.

3. Ortogonalite

$-1 < x < 1$ aralığında basit ortogonal olan Legendre polinomları (2.41) diferansiyel denkleminde elde edilebilir. Eğer m ve n negatif olmayan farklı tamsayılar ise,

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P_n'(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.1)$$

ve

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P_m'(x)] + m(m+1)P_m(x) = 0. \quad (3.2)$$

olur. İlk denklemin $P_m(x)$ ile, ikinci denklemin $P_n(x)$ ile çarpılarak ve farkını alarak,

$$[n(n+1) - m(m+1)]P_m(x)P_n(x) \quad (3.3)$$

$$= P_n(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_m'(x)] - P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_n'(x)]$$

bulunur. Bu denklem

$$(n-m)(n+m+1)P_m(x)P_n(x) = \frac{d}{dx} \{ (1-x^2) [P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] \} \quad (3.4)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denklemin her iki yanını -1 den 1 'e kadar x 'e göre integre edilirse,

$$(n-m)(n+m+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \{ (1-x^2) [P_n(x)P_m'(x) - P_m(x)P_n'(x)] \}_{-1}^1 = 0. \quad (3.5)$$

elde edilir. $m \neq n$ olduğundan,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0. \quad (3.6)$$

olur. İlerde

$$C_n = \|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx. \quad (3.7)$$

nicelikleri için bir formül çıkarılacaktır. (2.29) rekürans bağıntısından,

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \quad n \geq 2 \quad (3.8)$$

bulunur. Bundan dolayı

$$C_n = \int_{-1}^1 P_n(x) \left[\frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) \right] dx, \quad (3.9)$$

ve (3.6) ortagonallik Özelliğinden dolayı,

$$C_n = \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 x P_n(x) P_{n-1}(x) dx, \quad n \geq 2. \quad (3.10)$$

olur. (2.29) rekürans bağıntısından aynı zamanda,

$$x P_n(x) = \frac{1}{2n-1} [(n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)], \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

elde edilir. Bu ifadeyi $x P_n(x)$ için (3.10) formülünde yerine koyarak ve (3.6) ortagonallik Özelliğini kullanarak,

$$C_n = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 [P_{n-1}(x)]^2 dx, \quad (3.12)$$

veya

$$C_n = \frac{2n-1}{2n+1} C_{n-1}, \quad n \geq 2. \quad (3.13)$$

bulunur. $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = x$ olduğundan,

$$C_n = \int_{-1}^1 dx = 2, \quad C_n = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.13) formülünü kullanılarak,

$$C_2 = \frac{3}{5} C_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$C_3 = \frac{5}{7} C_2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{7}$$

bulunur. Matematiksel tümevarımla,

$$C_n = \frac{2}{2n+1}, \quad n \geq 0. \quad (3.15)$$

olduğu kolayca görülür.

4. Legendre Diferensiyel Denklemini

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \alpha(\alpha+1)y = 0 \quad (4.1)$$

diferensiyel deklemini α . mertebeden Legendre denklemini olarak bilinir. Burada α reel sabittir. Genelliği bozmaksızın $\alpha \geq -1/2$ kabul edilebilir. Eğer $\alpha = -1/2$ için $\beta = -\alpha - 1$ alınabiliyorsa, o takdirde $\alpha(\alpha + 1) = \beta(\beta + 1)$ olur, burda $\beta > -1/2$ dir.

α negatif olmayan bir n tamsayısı iken, n . dereceden $P_n(x)$ Legendre polinomu, (4.1) dekleminin bir çözümüdür. Şimdi genel α için diferansiyel denklem ele alınacaktır.

Legendre denklemini $x = 1$ ve $x = -1$ de düzgün tekil noktalara sahiptir. Eğer $t = 1 - x$ değişken dönüştürmesi yapılırsa $x = 1$ noktası $t = 0$ noktasına karşılık gelir ve diferensiyel denklem,

$$t(2 - t) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2(1 - t) \frac{dy}{dt} + \alpha(\alpha + 1)y = 0. \quad (4.2)$$

olur. Bu denklemin $t = 0$ da düzgün tekil bir noktası vardır. İki bağımsız çözüm,

$$u_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + m)][(-\alpha)(1 - \alpha) \dots (m - 1 - \alpha)]}{2^m (m!)^2} t^m \quad (4.3)$$

$$u_2 = u_1 \log t + \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m. \quad (4.4)$$

olarak bulunur. x değişkenine göre bu çözümler,

$$u_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + m)][(-\alpha)(1 - \alpha) \dots (m - 1 - \alpha)]}{2^m (m!)^2} (1 - x)^m \quad (4.5)$$

$$u_2(x) = u_1(x) \log(1 - x) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (1 - x)^m. \quad (4.6)$$

şeklinde olur.

$u_1(x)$ fonksiyonu her α için $x = 1$ de 1 değerini alır. α tamsayı olmadığı zaman, $u_1(x)$ için seri sonsuz ve $|x - 1| < 2$ için yakınsaktır. α negatif olmayan bir n tam sayısı iken, (4.5) serisi sonlu ve $u_1(x)$ n . dereceden bir polinomdur. $\alpha = n$ iken Legendre denkleminin başka polinomal çözümü yoktur, ve böylece

$$P_n(x) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{[(n + 1)(n + 2) \dots (n + m)][(-n)(1 - n) \dots (m - 1 - n)]}{2^m (m!)^2} (1 - x)^m \quad (4.7)$$

veya

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (m + n)!}{2^m (m!)^2 (n - m)!} (1 - x)^m. \quad (4.8)$$

olur.

$u_2(x)$ çözümü, $x \rightarrow 1$ iken her α için sonsuz olur. α tamsayı değilse $x \rightarrow -1$ iken $u_1(x)$ çözümünün sonsuz olduğu gösterilebilir. O takdirde Legendre denklemi, yalnız, α , bir n tamsayısı iken $x = 1$ ve $x = -1$ de sonlu olan bir çözümü vardır. Bu durumda, yalnız $x = 1$ ve $x = -1$ de sonlu olan çözümler $P_n(x)$ 'in katsayılarıdır.

Eğer n . dereceden Legendre polinomunun tanımındaki gibi (4.8) seri çözümü alınır, bir rekürans bağıntısı bulmak için Teorem 5 kullanılabilir. Bu teoreme göre,

$$xP_n'(x) = A_n P_{n+1}'(x) + B_n P_n'(x) + C_n P_{n-1}'(x)$$

veya

$$A_n P_{n+1}(x) + (1-x)P_n'(x) + (B_n - 1)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1. \quad (4.9)$$

olacak şekilde A_n , B_n ve C_n sabitleri mevcuttur.

$(1-x)^{n+1}$, $(1-x)^n$ ve $(1-x)^0$ katsayılarını karşılaştırmakla ve bazı hesaplamalardan sonra,

$$A_n = \frac{n+1}{2n+1}, \quad B_n = 0, \quad C_n = \frac{n}{2n+1}$$

bulunur ve buradan rekürans bağıntısı

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n'(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (4.10)$$

olur. Bu bağıntının doğuran fonksiyondan elde edilen (2.29) bağıntısına denk olduğu görülür.

Legendre polinomları, aynı zamanda sabit çarpanlar hariç $-1 < x < 1$ aralığında $w(x) = 1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olan $\{\phi_n(x)\}$ polinomları gibi tanımlanmıştır. $\phi_n(x)$ ile sağlanan (2.39) diferansiyel denklemi, ortogonalite şartından aşağıdaki gibi çıkarılabilir:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \phi_n(x) \right] Q(x) dx, \quad (4.11)$$

olsun. Burada $Q(x)$ $(n-1)$ den küçük veya eşit dereceli bir polinomdur. Kısmi integrasyon ile

$$I = \left[(1-x^2) \phi_n'(x) Q(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-x^2) \phi_n'(x) Q'(x) dx,$$

olur, burada integrali alınan kısım sifıra eşittir. Tekrar kısmi integrasyon ile

$$I = - \left[(1-x^2) \phi_n(x) Q'(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \phi_n(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) Q'(x) \right] dx.$$

bulunur. Yine integrali alınan kısım sifıra eşittir ve

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)Q'(x)]$$

ifadesi (n-1) den küçük veya eşit dereceden bir polinom olduğundan $I = 0$ elde edilir.

(4.11) formülünde integral içindeki

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)\phi'_n(x)]$$

ifadesi, n. dereceden bir polinom olduğundan ve n den küçük her polinoma ortagonal olduğundan, $\phi_n(x)$ 'in sabit çarpanı olmalıdır.

Böylece,

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2)\phi'_n(x)] = A_n \phi_n(x). \quad (4.12)$$

olacak şekilde bir A_n sabiti vardır. Eğer

$$\phi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

yazılırsa ve bu denklemin her iki yanındaki x^n nin katsayıları karşılaştırılırsa $A_n = -n(n+1)$ bulunur, buradan

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} \phi_n(x) \right] + n(n+1)\phi_n(x) = 0 \quad (4.13)$$

olur. Bu n. mertebeden Legendre denklemidir.

Bu yöntem, ağırlık fonksiyonundan diferansiyel denklem bulmak için biraz daha genelleştirilebilir.

5. Tchebycheff Polinomları

$-1 < x < 1$ aralığında,

$$w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1, \quad (4.14)$$

şeklindeki ağırlık fonksiyonuna göre ortagonal olan ortagonal polinomlar dizisi Jacobi polinomları olarak bilinir.

$$\int_{-1}^1 w(x) x^m dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

integrallerinin hepsinin mevcut olması için α ve β sabitlerini sınırlamak gerekir. Legendre polinomları $\alpha = \beta = 0$ halinde Jacobi polinomlarının özel bir sınıfıdır. Burada Jacobi polinomlarının iki özel sınıfı ele alınacaktır. Birinci tür Tchebycheff polinomları $\alpha = \beta = -1/2$ durumuna karşılık gelen

$$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

ağırlık fonksiyonuna sahiptir. İkinci tür Tchebycheff polinomları $\alpha = \beta = 1/2$ durumuna karşılık gelen

$$w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$$

ağırlık fonksiyonuna sahiptir. Bu polinom dizileri için doğuran fonksiyonlar bilinir ve özellikleri Legendre polinomlarında olduğu gibi aynı yolla çıkarılabilir. Bununla birlikte bu yaklaşım kullanılmayacaktır. Buradan, Tchebycheff polinomları ve belirli trigonometrik fonksiyonlar arasında özel bir ilişki üzerine kurulan farklı bir yol izlenecektir.

Lemma. n negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun. O zaman,

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta) \quad (5.2)$$

$$\sin(n+1)\theta = \sin \theta S_n(\cos \theta) \quad (5.3)$$

olacak şekilde n. dereceden $S_n(x)$ ve $T_n(x)$ polinomları vardır.

ispat. DeMoivre teoreminden her negatif olmayan n tamsayısı için

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (5.4)$$

dir. Bu denklemin sağ tarafını, binom teoremini kullanmakla genişleterek,

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \sum_{k=0}^n C(n,k) (i \sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k} \quad (5.5)$$

elde edilir. Burada

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

nicelikleri binom katsayılarıdır. Şimdi (5.5) denklemindeki reel ve imajiner kısımlar eşitlensin. Bu denklemin sağındaki toplamda bulunan reel terimler k'nın çift değerlerine karşılık gelir. $k=2m$, $m = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$, olduğunda

$$(i \sin \theta)^k = (i \sin \theta)^{2m} = (-1)^m (1 - \cos^2 \theta)^m \quad (5.6)$$

olur. (5.5) denklemindeki reel kısımlar eşitlenerek,

$$\cos n\theta = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m C(n, 2m) (1 - \cos^2 \theta)^m (\cos \theta)^{n-2m} \quad (5.7)$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafı, $T_n(x)$ ile gösterilen $(\cos \theta)$ 'ya göre n. dereceden bir polinomdur. O takdirde,

$$\cos n\theta = T_n(\cos \theta) \quad (5.8)$$

olup, burada

$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{n!}{(2m)!(n-2m)!} (1-x^2)^m x^{n-2m}. \quad (5.9)$$

dir.

$$T_n(1) = \cos 0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

olduğu görülmektedir.

(5.5) denkleminin sağındaki toplamda bulunan imajiner terimler k nin tek değerlerine karşılık gelir. $k = 2m + 1$ olduğunda, $m = 0, 1, 2, \dots, [(n-1)/2]$,

$$(i \sin \theta)^k = (i \sin \theta)^{2m+1} = (-1)^m i \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^m$$

olur. (5.5) deki imajiner kısımlar eşitlenerek,

$$\sin n\theta = \sin \theta \sum_{m=0}^{(n-1)/2} (-1)^m C(n, 2m+1) (1 - \cos^2 \theta)^m (\cos \theta)^{n-2m-1} \quad (5.11)$$

elde edilir. Sağdaki toplam $(\cos \theta)$ 'ya göre $(n-1)$. dereceden bir polinomdur ve $S_{n-1}(\cos \theta)$ ile gösterilir. O zaman,

$$\sin n\theta = \sin \theta S_{n-1}(\cos \theta) \quad (5.12)$$

ve

$$\sin(n+1)\theta = \sin \theta S_n(\cos \theta), \quad (5.13)$$

olur. Burada

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n+1)!}{(2m+1)!(n-2m)!} (1-x^2)^m x^{n-2m} \quad (5.14)$$

dir.

$$S_n(1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = n+1. \quad (5.15)$$

olduğuda açıkça görülür.

Teorem 9. $\{T_n(x)\}$ polinom kümesi $-1 < x < 1$ aralığında, $(1-x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. $\{S_n(x)\}$ polinom kümesinde aynı aralıkta, $(1-x^2)^{1/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Ayrıca,

$$\|T_0\|^2 = \pi, \quad \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{ve} \quad \|S_n\|^2 = \frac{\pi}{2},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$, dir.

ispat. İlk önce

$$(T_m, T_n) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx. \quad (5.16)$$

ifadeleri gözönüne alınsın. $0 < \theta < \pi$ olmak üzere $x = \cos\theta$ değişken dönüşürmesi yaparak

$$(T_m, T_n) = \int_0^\pi T_m(\cos\theta) T_n(\cos\theta) d\theta \quad (5.17)$$

elde edilir. (5.7) özelliğinden dolayı

$$(T_m, T_n) = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta \quad (5.18)$$

olur. Doğrudan integrasyonla,

$$(T_m, T_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

olur. $S_n(x)$ polinomları için yine $x = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} (S_m, S_n) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} S_m(x) S_n(x) dx \\ &= \int_0^\pi \sin^2\theta S_m(\cos\theta) S_n(\cos\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.12) formülünden dolayı,

$$(S_m, S_n) = \int_0^\pi \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta d\theta \quad (5.21)$$

yazılabilir. Doğrudan integrasyonla

$$(S_m, S_n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \end{cases} \quad (5.22)$$

olur.

Burada birinci ve ikinci tür Tchebycheff polinomları sırasıyla $\{S_n(x)\}$ ve $\{T_n(x)\}$ polinomları olarak tanımlanacaktır. Birinci tür polinomlar Teorem 5'e göre

$$xT_n(x) = A T_{n+1}(x) + B T_n(x) + C T_{n-1}(x) \quad (5.23)$$

şeklindeki rekürans bağıntısını sağlamalıdır. $x = \cos\theta$ dönüşümü yaparak ve (5.8) özelliğini kullanarak, bu bağıntı

$$\cos n\theta \cos\theta = A_n \cos(n+1)\theta + B_n \cos n\theta + C_n \cos(n-1)\theta$$

şeklinde yazılabilir. Bu trigonometrik özdeşlikten, $A_n = C_n = 1/2$, $B_n = 0$ olduğu görülür. Buradan birinci tür Tchebycheff polinomları

$$2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (5.24)$$

rekürans bağıntısını sağlar. Benzer şekilde ikinci tür Tchebycheff polinomlarında

$$2xS_n(x) = S_{n+1}(x) + S_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (5.25)$$

rekürans bağıntısını sağlar. $\cos n\theta$ fonksiyonu

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + n^2 y = 0 \quad (5.26)$$

diferansiyel denklemini sağladığından dolayı $x = \cos\theta$ değişken dönüştürmesi, $T_n(x)$ ile sağlanan bir diferansiyel denkleme götürür.

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = - \frac{dy}{dx} \sin\theta$$

ve

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \sin^2\theta - \frac{dy}{dx} \cos\theta = (1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx},$$

olduğundan bu diferansiyel denklem

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0 \quad (5.27)$$

olur. $S_n(x)$ polinomunun

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + n(n+2)y = 0 \quad (5.28)$$

diferansiyel denklemini sağladığı kolayca gösterilir.

6.1 Ortogonal Polinomların Diğer Kümeleri

Jacobi polinomlarına ilaveten, ortogonal polinomların diğer i-

ki kümesi Laguerre ve Hermite polinomlarıdır. Her iki kümede ortagonallikten sonsuz aralıklı kümelerdir. $L_n(x)$ Laguerre polinomları $0 < x < \infty$ aralığında $w(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortagonaldır. $H_n(x)$ Hermite polinomları da $-\infty < x < \infty$ aralığında

$w(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortagonaldır.

Aşağıdaki tabloda bunların bazı temel özellikleri ve daha önce bahsedilen ortogonal polinomların dizileri listelenmiştir. Bu özelliklerin çıkarılması burada gösterilmemiştir.

6.2 Ortogonal Polinomlar Tablosu

1. Legendre Polinomları

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

- (a) Aralık : $-1 < x < 1$.
- (b) Ağırlık fonksiyonu : $w(x) = 1$.
- (c) Doğuran fonksiyon :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

- (d) Rekürans bağıntısı :

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2}(x) \quad (n > 2)$$

- (e) Diferansiyel denklem :

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

- (f) Rodrigues formülü :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

- (g) Norm :

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (n \geq 0)$$

2. Birinci Tür Tchebycheff Polinomları

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n! x^{n-2k} (x^2 - 1)^k}{(2k)! (n-2k)!} \cos(ncos^{-1}x)$$

- (a) Aralık : $-1 < x < 1$.
 (b) Ağırlık fonksiyonu : $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$
 (c) Doğuran fonksiyon :

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n$$

- (d) Rekürans bağıntısı :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

- (e) Diferansiyel denklem :

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

- (f) Norm :

$$\|T_n\|^2 = \int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \end{cases}$$

3. İkinci Tür Tchebycheff Polinomları

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n+1)! x^{n-2k} (x^2 - 1)^k}{(2k+1)!(n-2k)!} = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (a) Aralık : $-1 < x < 1$
 (b) Ağırlık fonksiyonu : $w(x) = (1 - x^2)^{1/2}$
 (c) Doğuran fonksiyon :

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) t^n$$

- (d) Rekürans bağıntısı :

$$S_n(x) = 2xS_{n-1}(x) - S_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

- (e) Diferansiyel denklem :

$$(1 - x^2)S_n''(x) - 3xS_n'(x) + n(n+2)S_n(x) = 0$$

- (f) Norm :

$$\|S_n\|^2 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} [S_n(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}, \quad (n \geq 0)$$

4. Laguerre polinomları

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n! x^k}{(k!)^2 (n-k)!}$$

(a) Aralık : $0 < x < \infty$

(b) Ağırlık fonksiyonu : $w(x) = e^{-x}$

(c) Doğuran fonksiyon :

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$$

(d) Rekürans bağıntısı :

$$nL_n(x) = (2n-1-x)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x) \quad n \geq 2$$

(e) Diferansiyel denklem :

$$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$$

(f) Rodrigues formülü :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

(g) Norm :

$$\|L_n\|^2 = \int_0^{\infty} e^{-x} [L_n(x)]^2 dx = 1 \quad (n \geq 0)$$

5. Hermite polinomları

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{k! (n-2k)!}$$

(a) Aralık : $-\infty < x < \infty$

(b) Ağırlık fonksiyonu : $w(x) = e^{-x^2}$

(c) Doğuran fonksiyon :

$$\exp(2xt - t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

(d) Rekürans bağıntısı :

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \quad (n \geq 2)$$

(e) Diferansiyel denklem :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

(f) Rodrigues formülü :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

(g) Norm :

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (n \geq 0).$$

1- Introduction to Ordinary Differential Equations

2- Special Functions

E. M. Whittaker

3- Orthogonal Polynomials

Gabor Szegő

K A Y N A K L A R

1-2 Introduction to Ordinary Differential Equations

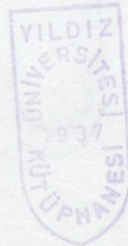
Albert L. Rabenstein.

2- Special Functions

E. D. Rainville.

3- Orthogonal Polynomials

Gabor Szegő.



Ö Z G E Ç M İ Ş

1966 yılında Elazığ'da doğdum. İlk okulu ve orta okulu Elazığ'da, liseyi İstanbul'da tamamladım. 1989 yılında Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Halen aynı Üniversitenin Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında Araştırma Görevlisiyim.

