

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İnteg ral Transformasyonları

Yüksek Lisans Tezi

Saeid Shagholi

1991

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

matema
29.000 TL

İNTEGRAL TRANSFORMASYONLARI

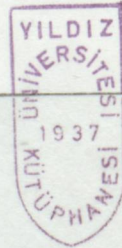
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAT.MÜH.SAEİD SHAGHOLİ

İSTANBUL 1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot R 209
: 85
Alındığı Yer : ..Fen. Bilimleri. Ens.
Tarih : ..18.03.1992.....
Fatura :
Fiyatı : ..20.000.-TL.....
Ayniyat No : ..1/1.....
Kayıt No : ..48.202.....
UDC : ..510.....
Ek :

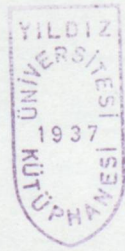




YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL TRANSFORMASYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAT.MÜH.SAEİD SHAGHOLİ



İSTANBUL 1991

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

Sayfa No:

1. Fourier Transformasyonu	1
1.1. Fourier Transformasyonu Özellikleri	1
1.2. Bir Fonksiyonun Elavetinin Fourier Transformasyonu	3
1.3. Fourier Sinüsü Transformasyonu	4
1.4. Fourier Sinüsü Transformasyonu	5
1.5. Sinüs ve Cosinus Fonksiyonlarının Elavetlerinin Fourier Transformasyonu	6

TEŞEKKÜR

Bu tezimin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Tahir ŞİŞMAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

BÖLÜM 2

2. Laplace Transformasyonu	11
2.1. Birel Tutarlıdan Potansiyel	12
2.2. Laplace Transformasyonu Özellikleri	13
2.3. İntegral Laplace Transformasyonu	14
2.4. İntegral Laplace Transformasyonu	15
2.5. Üçüncü Derece ve Üçüncü Derece	16
2.6. Genel Potansiyel	17
2.7. Periyodik Potansiyellere Laplace Transformasyonu	17
2.8. Laplace Transformasyonu Tutarlılık Diferansiyel Denklemleri Üzerine	17
2.9. İntegral Denklemler	18
2.10. İki Kelli Laplace Transformasyonu	20
2.11. Sıralı Laplace Transformasyonu	22
2.12. Hilbert Transformasyonu	24

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

Sayfa No:

1. Fourier Transformasyonu	1
1.1. Fourier Transformasyonun özellikleri	1
1.2. Bir Fonksiyonun Türevlerinin Fourier Transformasyonu	3
1.3. Fourier Cosinus Transformasyonu	4
1.4. Fourier Sinüs Transformasyonu	5
1.5. Sinüs ve Cosinus Fonksiyonlarının Türevlerinin Fourier Transformasyonu	6
1.6. Rezidü Teoremi Yardımıyla Fourier Transformasyonu	7
1.7. Fourier Transformasyonun Yardımıyla Sabit Katsayılı 2.Yanlı Lineer Diferansiyel Denklemin Çözümü	7
1.8. Convolution İntegrali	8
1.9. Parseval Teoremi	9
1.10. Katlı Fourier Transformasyonu	10

BÖLÜM 2

2. Laplace Transformasyonu	11
2.1. Üstel mertebeden Fonksiyon	11
2.2. Laplace Transformasyonun Özellikleri	11
2.3. Türevin Laplace Transformasyonu	12
2.4. İntegralin Laplace Transformasyonu	12
2.5. t ile Çarpma ve Bölme	13
2.6. Error Fonksiyonu	13
2.7. Periyodik Fonksiyonların Laplace Transformasyonu	17
2.8. Laplace Transformasyonun Yardımıyla Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	17
2.9. İntegral Denklemler	18
2.10. İki Katlı Laplace Transformasyonu	20
2.11. Stieltjes Transformasyonu	22
2.12. Hilbert Transformasyonu	24

BÖLÜM 3	50
3.1. Mellin Transformasyonu	27
3.2. Türevin Mellin Transformasyonu	29
3.3. İntegralin Mellin Transformasyonu	30
3.4. Mellin Transformasyonu için Convolution Teoremi	30
3.5. Bessel Fonksiyonu	32
BÖLÜM 4	79

4.1. Hankel Transformasyonu ,	36
4.2. Bazı Fonksiyonların Hankel Transformasyonu	36
4.3. Bazı Üstel Fonksiyonların Hankel Transformasyonu	39
4.4. Hankel Transformasyonu ile Mellin Transformasyonunun Arasındaki İlişkisi	41
4.5. Hankel Transformasyonu için Parseval Özdeşliği	42
4.6. Türevin Hankel Transformasyonu	42

BÖLÜM 5	
5.1. Kontorovich-Lebedev Transformasyonu	44
5.2. Kontorovich-Lebedev Transformasyonunun inversi	44
5.3. Kontorovich-Lebedev Transformasyonu için Parseval Özdeşliği	45

BÖLÜM 6	
6.1. Legendre Diferansiyel Denklemi	47

BÖLÜM 7	
7. Sonlu Transformasyonlar	49
7.1. Sonlu Fourier Cosinüs Transformasyonu	49
7.2. Sonlu Fourier Cosinüs Transformasyonunun İncersi	49

7.3. Sonlu Fourier Sinüs Transformasyonu ,	50
7.4. Sonlu Fourier Sinüs Transformasyonunun İncersi. . .	50
7.5. $f(x,y)$ Fonksiyonun Sonlu Fourier Sinüs ve Cosinüs Transformasyonu	54
7.6. Sonlu Fourier Transformasyonun Uygulanması	58
7.7. Sonlu Sturm-Liouville Transformasyonu.	59
7.8. Genelleştirilmiş Sonlu Fourier Transformasyonu . .	64
7.9. Sonlu Hankel Transformasyonları.	68
7.10. Sonlu Legendre Transformasyonu	79

Lebedev Integral Transformasyonları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Örnek olarak Dalgı denkleminin genel çözümü Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu ile çözümlenmiştir.

ÖNSÖZ

İntegral Transformasyonlarını incelememizdeki amaç, Matematik, Fizik ve diğer Mühendislik problemlerinin çözüm-
lenmesinde sıkca kullanılmasıdır.

Bu tezde Fourier, Laplace, Mellin, Hankel, Kontorovich-
Lebedev İntegral Transformasyonları detaylı bir şekilde incelen-
miştir.

Örnek olarakda Dalga denkleminin genel çözümü Sonlu
Fourier Sinüs transformasyonu ile çözümlenmiştir.

1- Fourier Dönüşümleri:

PREFACE

Our aim at concerning with Integral transforms is that they are widely used in solving problems in Mathematics, physics and other Engineering branches.

In this thesis, Fourier, Laplace, Mellin, Hankel, Kontorovich-Lebedev and Finite transforms are gathered and investigated in detail.

As an example, by means of finite sine transform the general solution of the wave equation was been found.

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi t} d\xi$$

olarak yazılır, veya $\mathcal{F}^{-1}[f(t); \xi] = f(t)$ şeklinde gösteririz.

Çoğu zamanda $\xi = \frac{x}{l}$ alınıp, burada $\tau = \frac{1}{2\pi}$ olduğundan $\xi = (2\pi)f$ kullanılır.

1.1. Fourier Transformasyonunun Özellikleri:

1.1.1. Lineerlik özelliği:

$$\mathcal{F}[f_1(t); x] = f_1(x), \quad \text{ise,}$$

$$\mathcal{F}[f_2(t); x] = f_2(x)$$

$$\mathcal{F}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t); x] = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (1.K1)$$

1- Fourier Dönüşümleri:

1.1. Periyodik olmayan bir $f(x)$ fonksiyonunun, fourier integrali,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iu\xi} du$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Şimdi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iu\xi} du = F(\xi)$$

dersek, Fourier Dönüşümü,

$$F(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\xi t} dt$$

elde edilir. Bunu $F(\xi) = \mathcal{F}[f(t); \xi]$ şeklinde gösteririz. inversi ise,

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-i\xi t} d\xi$$

olarak yazılır, veya $\mathcal{F}^*[f(t); \xi] = f(t)$ şeklinde gösteririz.

Çoğu zamanda $\xi = \frac{\pi}{T}$ alınır. Burada $T = \frac{1}{2f}$ olduğundan $\xi = (2\pi)f$ kullanılır.

1.1. Fourier Transformasyonun özellikleri:

1.1.1. Lineerlik özelliği;

Eğer, $\mathcal{F}[F_1(\xi); x] = f_1(x)$, ise,

$$\mathcal{F}[F_2(\xi); x] = f_2(x)$$

$$\mathcal{F}[c_1 F_1(\xi) + c_2 F_2(\xi); x] = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (1.1.1)$$

olur,

1.1.2. Simetrik Özelliği;

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(t); \xi] \quad \text{ise,}$$

$$\mathcal{F}[F(t); \xi] = (2\pi)^{+1} f(-\xi) \quad (1.1.2)$$

elde edilir.

1.1.3. Değişim Özelliği;

$a \neq 0$ reel bir sayı olmak üzere,

$$F(\xi) = \mathcal{F}[f(t); \xi]$$

ise,

$$\mathcal{F}[f(at); \xi] = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t); \xi/a] \quad (1.1.3)$$

aynı şekilde,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{i\lambda t} f(t); \xi] &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} e^{i\lambda t} dt \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(\xi + \lambda)t} dt \\ \mathcal{F}[e^{i\lambda t} f(t); \xi] &= \mathcal{F}[f(t); \xi + \lambda] \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

olur.

1.1.4. Öteleme Özelliği;

Eğer $F(\xi) = \mathcal{F}[f(t); \xi]$ ise,

$$\mathcal{F}[f(t - a); \xi] = e^{i\xi a} \mathcal{F}[f(t); \xi] \quad (1.1.5)$$

olur. Benzer şekilde,

$$F^{-1} [F(\xi); t] = f(t)$$

ise,

$$F^{-1} [F(\xi - k); t] = e^{-ikt} f(t) \quad (1.1.6)$$

elde edilir.

1.2. Bir Fonksiyonun Türevlerinin Fourier Transformasyonu:

Eğer $f(t)$ fonksiyonu sürekli ve n defa türevi alınabilir, ayrıca,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = 0$$

ise, bu takdirde,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t); \xi] = (-i\xi)^n \mathcal{F}[f(t); \xi] \quad (1.2.1)$$

dir. İspatlanması gereken,

$$\mathcal{F}[f'(t); \xi] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{i\xi t} dt$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} [f(t) e^{i\xi t}]_{-\infty}^{\infty} - i\xi (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dt$$

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

olduğundan

$$\mathcal{F}[f'(t); \xi] = -i\xi \mathcal{F}[f(t); \xi]$$

elde edilir. Devam edilirse,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t); \xi] = (-i\xi)^n \mathcal{F}[f(t); \xi]$$

olur.

Fenzer şekilde eğer $t^m f(t)$ fonksiyonu integral edilebilir-se, bu durumda

$$F^{(m)}(\xi) = i^m \mathcal{F}[t^m f(t); \xi]$$

dir. (1.2.2)

1.3. Fourier Cosinüs Transformasyonu:

$f(t)$ fonksiyonu sadece reel ve pozitif değerler için tanımlı ise, biz yeni bir $f_+(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi düşünebiliriz. Şöyle ki,

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0, \\ f(-t), & t < 0, \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Bu durumda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_+(t) e^{i\xi t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dt + \int_{-\infty}^0 f(-t) e^{i\xi t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}\} dt$$

dir. O halde

$$\mathcal{F}[f_+(t); \xi] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\xi t) dt.$$

Böylece Fourier Cosinüs transformasyonu,

$$F_c(\xi) \equiv \mathcal{F}_c[f(t); \xi] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\xi t) dt \quad (1.3.1)$$

şeklini alır. Bunun inversi ise,

1.3. Sinüs ve Cosinüs Fonksiyonlarının Türevlerinin Fourier Transformasyonu:

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} F_s(\xi) \cos(\xi t) d\xi \quad (1.3.2)$$

elde edilir.

1.4. Fourier Sinüs Transformasyonu:

Benzer şekilde, eğer $(0, \infty)$ aralığında $f_-(t)$ fonksiyonu ele alırsak, şöyle ki,

$$f_-(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ -f(-t), & t < 0, \end{cases}$$

ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_-(t) e^{i\xi t} dt &= \int_0^{\infty} f(t) e^{i\xi t} dt - \int_{-\infty}^0 f(-t) e^{i\xi t} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) \{e^{i\xi t} - e^{-i\xi t}\} dt \\ &= 2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt \end{aligned}$$

elde edilir ki buna Fourier Sinüs Transformasyonu denir ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$F_s(\xi) \equiv \mathcal{F}_s[f(t); \xi] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt \quad (1.4.1)$$

inversi ise,

$$f(t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} F_s(\xi) \sin(\xi t) d\xi, \quad (t > 0) \quad (1.4.2)$$

elde edilir.

1.5. Sinüs ve Cosinüs Fonksiyonlarının Türevlerinin Fourier Transformasyonu:

biz $f'(t)$ 'nin Fourier Sinüs Transformasyonunu kullanabiliriz. Diğer taraftan eğer $f'(0)$ belli ve $f(0)$ belli $f(t)$ fonksiyonunun türevinin Fourier Transformasyonu,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_c[f'(t); \xi] &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f'(t) \cos(\xi t) dt \\ &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} f(0) + \xi \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt \\ \mathcal{F}_c[f'(t); \xi] &= -(2/\pi)^{\frac{1}{2}} f(0) + \xi \mathcal{F}_s[f(t); \xi]\end{aligned}\quad (1.5.1)$$

olur. Benzer biçimde $f(t)$ 'nin 2. türevi,

$$\mathcal{F}_c[f''(t); \xi] = -(2/\pi)^{\frac{1}{2}} f'(0) - \xi^2 \mathcal{F}_c[f(t); \xi] \quad (1.5.2)$$

şeklinde elde edilir. Aynı şekilde $f(t)$ 'nin türevinin F.S. transformasyonu,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s[f'(t); \xi] &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\xi t) dt \\ \mathcal{F}_s[f'(t); \xi] &= -\xi \mathcal{F}_c[f(t); \xi]\end{aligned}\quad (1.5.3)$$

sonucu elde edilir. Benzer biçimde $f(t)$ 'nin 2. türevi F.S.T.,

$$\mathcal{F}_s[f''(t); \xi] = (2/\pi)^{\frac{1}{2}} \xi f(0) - \xi^2 \mathcal{F}_s[f(t); \xi] \quad (1.5.4)$$

elde edilir.

Eğer $f'(0)=0$ ise,

$$\mathcal{F}_c[f''(t); \xi] = -\xi^2 \mathcal{F}_c[f(t); \xi] \quad (1.5.5)$$

olup, eğer $f(0)=0$ ise,

$$\mathcal{F}_s[f''(t); \xi] = -\xi^2 \mathcal{F}_s[f(t); \xi] \quad (1.5.6)$$

elde edilecektir.

Sonuç olarak, bir problemin çözülmesinde eğer $f(o)$ verilip, $f'(o)$ verilmemiş ise, biz $f''(t)$ 'nin Fourier Sinüs Transformasyonunu kullanabiliriz. Diğer taraftan eğer $f'(o)$ belli ve $f(o)$ belli değil ise, bu sefer $f''(t)$ 'nin Fourier Cosinüs Transformasyonunu kullanabiliriz.

1.6. Reziđü Teoremi Yardımıyla Fourier Transformasyonu:

$f(Z)$ kompleks fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın,

1) $f(Z)$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlu singuler noktalarına (yarım çember içinde) sahipse,

2) $f(Z)$, her yerde analitik, $b_1, b_2, \dots, b_n$ reel eksen üzerinde basit kutup noktaları ise,

3) $z \rightarrow \infty$ için $zf(z)e^{i\xi z} \rightarrow 0$ giderse,

bu durumda $e^{i\xi z}f(z)$, fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında integre edersek,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x} dx = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \text{res}\{f(b_s)\} \cdot e^{i\xi b_s} + \sum_{s=1}^n \text{res}\{f(a_s)\} e^{i\xi a_s},$$

elde edilir. Böylece Fourier Transformasyonu Reziđüler yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\mathcal{F}[f(x); \xi] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} i \left\{ \sum_{s=1}^n \text{res}\{f(a_s)\} e^{i\xi a_s} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \text{res}\{f(b_s)\} e^{i\xi b_s} \right\},$$

($\xi > 0$).

1.7. Fourier Transformasyonun Yardımıyla Sabit Katsayılı

2.Yanlı Lineer Diferansiyel Denklemin Çözümü:

$$a_1 y^n + a_2 y^{n-1} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

Lineer Dif.Denklemine gözönüne alalım.(1) eşitliğide her

iki tarafa Fourier Transformasyonu uygularsak, ayrıca,

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t); \xi] = (-i\xi)^n \mathcal{F}[f(t); \xi] \quad (2)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\mathcal{F}[y(x); \xi] = Y(\xi) \quad (3)$$

şeklinde gösterirsek, (1) eşitliği (2) ve (3) den yararlanarak

$$\mathcal{F}[a_1 y^{(n)}(x); \xi] + \mathcal{F}[a_2 y^{(n-1)}(x); \xi] + \dots + \mathcal{F}[a_n y(x); \xi] = \mathcal{F}[f(x); \xi]$$

$$a_1 (-i\xi)^n Y(\xi) + a_2 (-i\xi)^{n-1} Y(\xi) + \dots + a_n Y(\xi) = F_1(\xi)$$

$$Y(\xi) = \frac{F_1(\xi)}{a_1 (-i\xi)^n + a_2 (-i\xi)^{n-1} + \dots + a_n} \quad (1.7.1)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Şimdi her iki tarafa Fourier invers Transformasyonu hesaplırsak,

$$\mathcal{F}^{-1}[Y(\xi); x] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F_1(\xi)}{a_1 (-i\xi)^n + a_2 (-i\xi)^{n-1} + \dots + a_n}\right] \quad (1.7.2)$$

$$\Rightarrow y(x) = F(x)$$

şeklinde özel çözümü elde edilecektir. Ancak bu diferansiyel denklem sadece belirli şartlar altında çözülebilecektir.

1.8. Convolution İntegrali:

$f(t)$ ve $g(t)$, sürekli ve integral edilebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$f \circ g = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du \quad (1.8.1)$$

integralini Convolution İntegrali denir.

Biz genellikle Fourier İvers fonksiyonunu bulmak için, Convolution İntegrali kullanacağız.

1.8.1. Convolution Özellikleri:

1. Değişme Özelliği

$$f \circ g = g \circ f. \quad (1.8.2)$$

2. Birleşme Özelliği

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad (1.8.3)$$

(1.8.3) özelliğinde yararlanarak,

$$(f \circ g) \circ h = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u-v)h(v) du dv$$

$$\mathcal{F}[f \circ g; \xi] = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} dt (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u) du$$

ise, bu durumda,

$$\mathcal{F}[f \circ g; \xi] = F(\xi)G(\xi) \quad (1.8.4)$$

elde edilecektir.

Benzer biçimde,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[F_1(\xi) ; t \right] = f_1(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[F_2(\xi) ; t \right] = f_2(t)$$

ise, bu takdirde,

$$\mathcal{F}^{-1} \left[F_1(\xi) \circ F_2(\xi) ; t \right] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} f_1(t) \cdot f_2(t) \quad (1.8.5)$$

elde edilir.

1.9. Parseval Teoremi:

$f(t)$ Reel bir fonksiyon ve de bunun Fourier Transformasyonu, $F(\xi) = \mathcal{F}[f(t); \xi]$ ise, bu durumda

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.9.1)$$

olacaktır. Bu teoremi Fourier sinüs ve Fourier cosinüs transformasyonları için de kullanılabılır. Şöyleki,

$$\int_0^{\infty} |F_s(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{\infty} |F_c(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{\infty} |f(u)|^2 du \quad (1.9.2)$$

olur.

1.10. Katlı Fourier Transformasyonu:

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun n -değişkenli bir fonksiyon ise, bunun Fourier Transformasyonun

$$F_{(n)}(\xi) = \mathcal{F}_{(n)}[f(\mathbf{x}); \mathbf{x} \rightarrow \xi]$$

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n = (\mathbf{x} \cdot \xi) \quad (2.1.1)$$

$$F_{(n)}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{E_n} f(\mathbf{x}) e^{i(\xi \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x}$$

(1.10.1)

şeklinde elde edilecektir. Benzer şekilde, $F_{(n)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ olmak üzere n -değişkenli bir Fourier Transformasyonunu inversi ise,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{F}^{-1}[F_{(1)}(\xi_1, x_2, \dots, x_n); \xi_1 \rightarrow x_1]$$

$$= \mathcal{F}[F_{(1)}(\xi_1, x_2, \dots, x_n); \xi_1 \rightarrow -x_1]$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{E_n} F_{(n)}(\xi) e^{-i(\xi \cdot \mathbf{x})} d\xi \quad (1.10.2)$$

şeklinde olacaktır.

2. Laplace Transformasyonu:

2.1. Üstel Mertebeden Fonksiyon:

$t > T$ olmak üzere, α ve M pozitif iki sayı olmak üzere, eğer $|f(t) \cdot e^{-\alpha t}| < M$ olacak şekilde bir α değerini bulunabiliyorsa, $f(t)$ fonksiyonu üstel mertebeden fonksiyondur denir. Yani $|f(t)| e^{-\alpha t} < M \Rightarrow f(t) < M e^{\alpha t}$ eşitsizliğini sağlıyor ise, $f(t)$ fonksiyonunun üstel mertebeden fonksiyondur denir.

Eğer $f(t)$ fonksiyonunun $t > 0$ olmak üzere parça parça sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon ise, bunun Laplace Transformasyonu,

$$\mathcal{L}[f(t); p] = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.1.1)$$

olarak tanımlıyoruz.

2.2. Laplace Transformasyonun Özellikleri:

1) Lineerlik Özelliği:

Eğer $\mathcal{L}[f_1(t); p] = \bar{f}_1(p)$, $\mathcal{L}[f_2(t); p] = \bar{f}_2(p)$ iseler,

$$\mathcal{L}[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t); p] = C_1 \mathcal{L}[f_1(t); p] + C_2 \mathcal{L}[f_2(t); p] \quad (2.2.1)$$

2) Ölçek Değişim Özelliği:

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t); p] \quad \text{ise,}$$

$$\mathcal{L}[f(bt); p] = b^{-1} \mathcal{L}[f(t); p/b], \quad (b > 0). \quad (2.2.2)$$

3) I.Öteleme Özelliği

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t); p] \text{ ise,} \quad (2.4.1)$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t); p] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p+a)t} dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t); p] = \mathcal{L}[f(t); p + a] \text{ dir.} \quad (2.2.3)$$

II.Öteleme Özelliği:

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t); p] \text{ ise,}$$

$$\mathcal{L}[f(t)H(t-a); p] = \int_a^{\infty} e^{-pt}f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-p(u+a)}f(u+a) du$$

$$\mathcal{L}[f(t)H(t-a); p] = e^{-pa}\mathcal{L}[f(t+a); p] \text{ dir.} \quad (2.2.4)$$

(Burada $u(t-a)$ fonksiyonu, ötelenmiş birim basamak fonksiyonudur.)

2.3. Türevin Laplace Transformasyonu:

$f(t)$ fonksiyonunun parça parça sürekli ve üstel mertebeden olmak üzere,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t); p] = p^n \bar{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (2.3.1)$$

şeklinde elde edilir.

2.4. İntegralin Laplace Transformasyonu:

$f(t)$ fonksiyonunun parçalı sürekli ve üstel mertebeden bir fonksiyon olmak üzere ve de,

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t); p] \text{ ise,}$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du; p\right] = p^{-1}\bar{f}(p) \quad \text{dir.} \quad (2.4.1)$$

2.5. I.t ile çarpma:

$f(t)$ fonksiyonunun parçalı sürekli ve üstel mertebeden ve de,

$$\mathcal{L}[f(t); p] = \bar{f}(p) \quad \text{ise,}$$

bu durumda,

$$\mathcal{L}[t^n f(t); p] = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p) \quad \text{dir.} \quad (2.5.1)$$

II.t ile bölme:

$f(t)$ 'nin parçalı sürekli ve üstel mertebeden ve de,

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t); p] \quad \text{ise,}$$

$$\mathcal{L}[t^{-1} f(t); p] = \int_p^\infty \bar{f}(u_1) du_1 \quad \text{dur.} \quad (2.5.2)$$

2.6. Error Fonksiyonu:

Bir çok fiziksel problemlerinin çözmesinde, matematik teknikleri uygulandığı zaman, biz $\text{Erf}(z)$ fonksiyonu ile karşılaşırız. Error fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (2.6.1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
1 - \text{Erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt
\end{aligned}$$

yeni bir integral elde edilirki buna $\text{Erfc}(Z)$ denilir. Kısaca

$$\text{Erfc}(z) = 1 - \text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{dir. (2.6.2)}$$

Basit dönüşümlerle aşağıdaki denklemleri basitce elde edilebilir.

$$\int_0^x e^{-au^2} du = \frac{1}{2}(\pi/a)^{\frac{1}{2}} \text{Erf}(xa^{\frac{1}{2}}) \quad (2.6.3)$$

$$\int_x^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{2}(\pi/a)^{\frac{1}{2}} \text{Erfc}(xa^{\frac{1}{2}}) \quad (2.6.4)$$

(2.6.2)'den,

$$\mathcal{L}[f(t)\text{Erfc}\{g(t)\}; p] = \mathcal{L}[f(t); p] - \mathcal{L}[f(t)\text{Erf}\{g(t)\}; p] \quad (2.6.5)$$

hemen görülebilir.

$\text{Erfc}\{g(t)\}$ fonksiyonunun, Laplace Transformasyonu,

$$\mathcal{L}[\text{Erfc}\{g(t)\}; p] = \frac{1}{p} - \mathcal{L}[\text{Erf}\{g(t)\}; p] \quad (2.6.6)$$

şeklinde elde edilir.

$$\frac{1}{4}t^2 + pt = \left(\frac{1}{2}t + p\right)^2 - p^2$$

olduğundan,

$$\mathcal{L}[e^{-\frac{1}{4}t^2}; p] = e^{p^2} \int_0^\infty e^{-(p+\frac{1}{2}t)^2} dt$$

yazılabilir. $u = p + \frac{1}{2}t$, değişken dönüştürülmesi yapılırken,

$$2 \int_p^\infty e^{-u^2} du = \pi^{\frac{1}{2}} \text{Erfc}(p)$$

veya

$$\mathcal{L}[e^{-\frac{1}{4}t^2}; p] = \pi^{\frac{1}{2}} e^{p^2} \text{Erfc}(p) \quad (2.6.7)$$

elde edilecektir.

Şimdi (2.6.7) denklemi ile (2.2.2) denkleminden dolayı,

$$\mathcal{L}[e^{-\frac{1}{4}b^2t^2}; p] = \pi^{\frac{1}{2}} b^{-1} e^{p^2/b^2} \text{Erfc}(p/b), \quad (b > 0) \quad (2.6.8)$$

denklemi bulunabilir.

$\text{Erf}(t)$ 'nin Laplace transformasyonu ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{Erf}t; p] &= \int_0^\infty e^{-pt} dt \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} du \int_u^\infty e^{-pt} dt \\ &= \frac{2}{p\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 - pu} du. \end{aligned}$$

olup buradan $u^2 + pu = (u + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}p^2$ dönüşümü

yaparsak,

$$e^{\frac{1}{4}p^2} \int_0^\infty e^{-(u+\frac{1}{2}p)^2} du = e^{\frac{1}{4}p^2} \int_{\frac{1}{2}p}^\infty e^{-u^2} du$$

şeklini alır. Böylece $\text{Erf}(t)$ 'nin L.T.

$$\mathcal{L}[\text{Erf}t; p] = p^{-1} e^{\frac{1}{4}p^2} \text{Erfc}(\frac{1}{2}p) \quad (2.6.9)$$

elde edilir.

(2.2.2)'den dolayı,

$$\mathcal{L}[\text{Erf}(bt); p] = p^{-1} e^{\frac{1}{2}p^2/b^2} \text{Erfc}(\frac{1}{2}p/b) \quad (2.6.10)$$

yazılabilir.

Açıktır ki, b yerinde $1/(2a)$ yazarsak, (2.6.10) denklemi aşağıdaki şekli alır,

$$\mathcal{L}\left[\text{Erf}\left(\frac{t}{2a}\right); p\right] = p^{-1} e^{a^2 p^2} \text{Erfc}(ap) \quad (2.6.11)$$

(2.6.5)'den dolayı,

$$\mathcal{L}\left[\text{Erfc}\left(\frac{t}{2a}\right); p\right] = \frac{1}{p} \left\{ 1 - e^{a^2 p^2} \text{Erfc}(ap) \right\} \quad (2.6.12)$$

denklemi bulunabilir.

Benzer biçimde,

$$\mathcal{L}[\text{Erf}(t^{\frac{1}{2}}); p] = p^{-1} (p + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6.13)$$

olur. Şimdi yine (2.2.2)'den

$$\mathcal{L}[\text{Erf}(b^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}); p] = b^{\frac{1}{2}} p^{-1} (p + b)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6.14)$$

olur. Bu son ifade ile (2.2.3) denklemlerinin birlikte,

$$\mathcal{L}[e^{bt} \text{Erf}(b^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}); p] = b^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{1}{2}} (p - b)^{-1} \quad (2.6.15)$$

elde edilecektir.

(2.6.15) ile (2.6.5)'den dolayı,

$$\mathcal{L}[e^{bt} \text{Erfc}(b^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}); p] = (p - b)^{-1} (1 - bp^{-\frac{1}{2}}) = p^{-\frac{1}{2}} (p^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^{-1} \quad (2.6.16)$$

bulunur. Ayrıca,

$$\mathcal{L}[\text{Erfc}(at^{-\frac{1}{2}}); p] = p^{-1} e^{-2a\sqrt{p}} \quad (2.6.17)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Not:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 u^2 - b^2 u^{-2}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-2ab} \quad \text{dir.}$$

2.7. Periyodik Fonksiyonların Laplace Transformasyonu:

$f(t)$ fonksiyonunda t 'yerine $t+T$ yazıldığı zaman,

$$f(t+T) = f(t)$$

fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T 'ye fonksiyonun periyodu denilir.

Bu durumda T periyodlu bir $f(t)$ fonksiyonun Laplace Transformasyonu,

$$\mathcal{L}[f(t); p] = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(u) e^{-pu} du \quad (2.7.1)$$

şeklinde hesaplanır.

2.8. Laplace Transformasyonun Yardımıyla Diferansiyel Denklemlerinin Çözümü:

2.8.1. Lineer Diferansiyel Denklemini gözönüne alalım,

$$y' + P(t)y = Q(t).$$

Her iki tarafın e^{-pt} ile çarpıp 0 'dan ∞ 'a kadar integral edilirse,

$$\int_0^{\infty} y' e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} P(t) y e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} Q(t) e^{-pt} dt$$

elde edilir.

(2.1.1) ve (2.3.1) denklemlerinden,

$$\mathcal{L}[y'(t); p] + \mathcal{L}[y(t)P(t); p] = \mathcal{L}[Q(t); p]$$

$$p Y(p) - y(0) + Y(p) P(p) = Q(p)$$

Buradan $Y(p) = \frac{y(0)+Q(p)}{p+P(p)}$ olur.

Şimdi her iki tarafını Laplace invers transformasyonu hesaplırsak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} [Y(p); t] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{y(0)}{p+P(p)} ; t \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q(p)}{p+P(p)} ; t \right] \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{y(0)}{p+P(p)} ; t \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q(p)}{p+P(p)} ; t \right]\end{aligned}$$

(2.8.1)

sonucu elde ederiz. Benzer şekilde hareket edersek n. dereceden Lineer Diferansiyel Denklemlerinin Laplace Transformasyonun yardımıyla çözebiliriz. Şunu da unutmayalım ki, (2.3.1) denklemini kulanırken $f(0), f'(0), \dots, f^{n-1}(0)$, yani başlangıç koşulları bilmemiz şarttır.

2.9. İntegral Denklemler:

Volterra integral denklemini ele alalım. Eğer $k(x, t)$ çekirdek fonksiyon, $t-x$ şeklinde ise, yani,

$$\int_0^t f(x)K(t-x) dx = g(t), \quad (t > 0), \quad g(0) = 0 \quad (2.9.1)$$

ise, bu durumda yukarıdaki denkleminin her iki tarafını Laplace Transformasyonu uygulanıp, Conolution teoremininden yararlanarak,

$$\bar{f}(p)\bar{K}(p) = \bar{g}(p) \quad (1) \quad (2.9.6)$$

denklemini elde edilir. Burada $\bar{f}(p) = \bar{g}(p)/\bar{K}(p)$ şeklinde

yazılabilir. Bazen $\mathcal{L}^{-1}[1/\bar{K}(p); x]$ bulunmayabilir. Böyle

durumlarda $\mathcal{L}^{-1}[1/p\bar{K}(p); x]$ bulunuyorsa, biz (1)' denklemini

$$\bar{f}(p) = p\bar{g}(p)\bar{L}(p) \quad (2)$$

şeklinde yazıp,

$$\bar{L}(p) = [p\bar{K}(p)]^{-1}$$

şeklinde hesaplarız.

Şimdi (2)'den

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x g(t) L(x-t) dt$$

veya,

$$f(x) = \int_0^x g'(t) L(x-t) dt \quad (2.9.2)$$

elde edilir. Buna benzer,

$$\int_0^t \frac{f(x) dx}{(t-x)^\alpha} = g(t), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad g(0) = 0 \quad (2.9.3)$$

integral denkleminin çözümü,

$$f(x) = \pi^{-1} \sin(\pi\alpha) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (2.9.4)$$

veya,

$$f(x) = \pi^{-1} \sin(\pi\alpha) \int_0^x \frac{g'(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (2.9.5)$$

elde edilebilir. Benzer yollardan hareket ederek aşağıda bazı integral denklemlerinin çözümünü verebiliriz.

$$\int_a^t \frac{f(x) dx}{\{\phi(t) - \phi(x)\}^\alpha} = g(t), \quad a < t < b, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.9.6)$$

Çözümü,

$$f(x) = \pi^{-1} \sin(\pi\alpha) \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\phi'(t)g(t) dt}{\{\phi(x) - \phi(t)\}^{1-\alpha}} \quad (2.9.7)$$

olur.

$$\int_t^b \frac{f(x) dx}{\{\phi(x) - \phi(t)\}^\alpha} = g(t), \quad a < t < b, \quad (2.9.8)$$

Çözümü ise,

$$f(x) = -\pi^{-1} \sin(\pi\alpha) \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\phi'(t)g(t) dt}{\{\phi(t) - \phi(x)\}^{1-\alpha}} \quad \text{dır.} \quad (2.9.9)$$

2.10. İki Katlı Laplace Transformasyonu:

xy-düzleminde pozitif kısımda, iki değişkenli bir $f(x,y)$ fonksiyonunun iki katlı Laplace Transformasyonu aşağıdaki gibi,

$$\bar{f}(p,q) = \mathcal{L}_2[f(x,y);(p,q)] = \mathcal{L}[\mathcal{L}\{f(x,y);x \rightarrow p\};y \rightarrow q] \quad (2.10.1)$$

tanımlıyoruz. Bunun iki katlı integral ile gösterirsek,

(2.10.1) denklemi,

$$\bar{f}(p,q) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) e^{-(px+qy)} dx dy \quad (2.10.2)$$

şeklini alır. Hemen görülüyor ki,

$$\mathcal{L}_2[f(ax,by);(p,q)] = (ab)^{-1} \bar{f}(p/a,q/b), \quad (a > 0, b > 0) \text{ olur.} \quad (2.10.3)$$

Ayrıca,

$$\mathcal{L}_2[f(ax)g(by);(p,q)] = (ab)^{-1} \bar{f}(p/a) \bar{g}(q/b), \quad (a > 0, b > 0) \quad (2.10.4)$$

elde edecektir. Burada, $\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(x);p]$ ve $\bar{g}(q) = \mathcal{L}[g(y);q]$ dir.

$\mathcal{L}(x)$ Fonksiyonun iki katlı Laplace Transformasyonu

$$\mathcal{L}_2[f(x);(p,q)] = q^{-1} \bar{f}(p) \quad (2.10.5)$$

olduğu açıktır.

$f(x+y)$ fonksiyonunu iki katlı Laplace Transformasyonunu bulabilmek için,

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$$

değişken dönüştürmesini yaparak, buradan,

$$dx dy = \frac{1}{2} d\xi d\eta$$

olup,

$$\mathcal{L}_2[f(x+y);(p,q)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(\xi) d\xi \int_{-\xi}^\xi e^{-\frac{1}{2}(p+q)\xi - \frac{1}{2}(p-q)\eta} d\eta$$

şekline dönüşür. Böylece $f(x+y)$ iki katlı L.T.

$$\mathcal{L}_2[f(x+y);(p,q)] = \frac{1}{p-q} [\bar{f}(q) - \bar{f}(p)] \quad (2.10.6)$$

elde edilir.

$f(x-y)$ fonksiyonun iki L.T. farklı biçimde hesaplanır.

Şöyle ki, eğer $f(u)$ fonksiyonunun u 'ya göre çift bir fonksiyon ise, bu durumda

$$\mathcal{L}_2[f(x-y);(p,q)] = \frac{1}{p+q} [\bar{f}(p) + \bar{f}(q)] \quad (2.10.7)$$

olur. Eğer $f(u)$ fonksiyonunun u 'ya göre tek bir fonksiyon ise, bu durumda,

$$\mathcal{L}_2[f(x-y);(p,q)] = \frac{1}{p+q} [\bar{f}(p) - \bar{f}(q)] \quad (2.10.8)$$

olur.

Aşağıda bazı özel fonksiyonlarının iki L.T. verebiliriz,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2[f(x)H(x-y);(p,q)] &= \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx \int_0^x e^{-qy} dy \\ &= \frac{1}{q} \int_0^\infty f(x) \{e^{-px} - e^{-(p+q)x}\} dx \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2[f(x)H(x-y);(p,q)] = \frac{1}{q} \{\bar{f}(p) - \bar{f}(p+q)\} \quad (2.10.9)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2[f(x)H(y-x);(p,q)] &= \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx \int_x^\infty e^{-qy} dy \\ &= \frac{1}{q} \int_0^\infty f(x)e^{-(p+q)x} dx\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2[f(x)H(y-x);(p,q)] = \frac{1}{q} \bar{f}(p+q) \quad (2.10.10)$$

olur. Buna benzer,

$$\mathcal{L}_2[f(x)H(x+y);(p,q)] = \frac{1}{q} \bar{f}(p) \quad (2.10.11)$$

elde edilirki, (2.10.5) denkleminin sonucudur.

(2.10.6) denkleminde $f(x)=1$, $\bar{f}(p) = p^{-1}$ alınırsa,

$$\mathcal{L}_2[H(x-y);(p,q)] = \frac{1}{p(p+q)} \quad (2.10.12)$$

elde edilecektir.

2.11. Stieltjes Transformasyonu:

$f(x)$ fonksiyonun Laplace Transformasyonu,

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(x);p] \quad \text{olduğunu biliyoruz. Şimdi } \bar{f}(p)$$

fonksiyonun Laplace Transformasyonunu hesaplırsak,

$$\mathcal{L}[\bar{f}(p);y] = \int_0^\infty e^{-py} dp \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx$$

olur.

$$\int_0^\infty e^{-px-py} dp = \frac{1}{x+y}$$

olduğundan,

$$\mathcal{L}[\mathcal{L}\{f(x);p\};y] = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} dx$$

elde edilir. İşte son ifadenin Stieltjes Transformasyonu olup aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\bar{f}_2(y) \equiv \mathcal{S}[f(x);y] = \int_0^{\infty} \frac{f(x) dx}{x+y} \quad (2.11.1)$$

Örnek olarak aşağıda bazı fonksiyonlarının Stieltjes Transformasyonu verilebilir.

$$\frac{x}{x+y} = 1 - \frac{y}{x+y} \quad \text{olduğundan,}$$

$$\mathcal{S}[xf(x);y] = \int_0^{\infty} f(x) dx - y\bar{f}_2(y) \quad (2.11.2)$$

benzer biçimde,

$$\frac{1}{(x+a)(x+y)} = \frac{1}{a-y} \left[\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+a} \right] \quad \text{olduğundan,}$$

$$\mathcal{S}\left[\frac{f(x)}{x+a};y\right] = \frac{1}{a-y} [\bar{f}_2(y) - \bar{f}_2(a)] \quad \text{olur. (2.11.3)}$$

$t=ax$ değişken dönüştürmesi yapılırsa,

$$\mathcal{S}[f(ax);y] = \bar{f}_2(ay), \quad (a > 0) \quad (2.11.4)$$

elde edilebilir. Benzer şekilde $x = u^{-1}$ alınırken,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-1}f(x^{-1}) dx}{x+y} = \int_0^{\infty} \frac{f(u) du}{1+yu}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\mathcal{S}[x^{-1}f(x^{-1});y] = y^{-1}\bar{f}_2(y^{-1}) \quad (2.11.5)$$

bulunur.

(2.11.4) ile (2.11.5)'den,

$$\mathcal{S}[x^{-1}f(a/x);y] = y^{-1}\bar{f}_2(a/y) \quad (2.11.6)$$

elde edebiliriz.

$x = u^2$ alınır,

$$\mathcal{S}[f(x^{\frac{1}{2}});y] = 2 \int_0^{\infty} \frac{uf(u) du}{u^2 + y}$$

yazılabilir.

$$\frac{2u}{u^2 + y} = \frac{1}{u + iy^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{u - iy^{\frac{1}{2}}}$$

olduğundan

$$\mathcal{S}[f(x^{\frac{1}{2}});y] = \bar{f}_2(iy^{\frac{1}{2}}) + \bar{f}_2(-iy^{\frac{1}{2}}) \quad (2.11.7)$$

elde edilir.

2.11.1. Türevin Stieltjes Transformasyonu

Kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{f'(x) dx}{x + y} = \left[\frac{f(x)}{x + y} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{f(x) dx}{(x + y)^2}$$

olduğunu kolayca görülebilir. Buna göre,

$$\mathcal{S}[f'(x);y] = -y^{-1}f(0) - \frac{d\bar{f}_2}{dy} \quad (2.12.1)$$

denklemini elde edilebilir.

2.12. Hilbert Transformasyonu:

Stieltjes transformasyonuna benzer Hilbert transformasyonu-
dur. Hilbert Transformasyonu aşağıdaki gibi,

$$\bar{f}_H(x) \equiv \mathcal{H}[f(t);x] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{t - x} \quad (2.12.1)$$

tanımlıyoruz. Burada x reel olup, integral Cauchy prensip-
lerine uyar.

Eğer $x > 0$ ise,

$$\bar{f}_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{t - x} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{f(t) dt}{t - x}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, Hilbert Transformasyonu,

$$\bar{f}_H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{t + xe^{i\pi}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{t + xe^{-i\pi}} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(-t) dt}{t - x}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(t); x] &= (2\pi)^{-1} \mathcal{S}[f(t); xe^{i\pi}] + (2\pi)^{-1} \mathcal{S}[f(t); xe^{-i\pi}] \\ &\quad - \pi^{-1} \mathcal{S}[f(-t); x] \quad (x > 0) \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

şeklini alır. Benzer yoluyla,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(t); x] &= \pi^{-1} \mathcal{S}[f(t); -x] - (2\pi)^{-1} \mathcal{S}[f(-t); |x|e^{i\pi}] \\ &\quad - (2\pi)^{-1} \mathcal{S}[f(-t); |x|e^{-i\pi}] \quad (x < 0) \end{aligned} \quad (2.12.3)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Aşağıda bazı fonksiyonlarının, Hilbert transformasyonunu verelim. Buna göre,

$$\mathcal{H}[f(a + t); x] = \mathcal{H}[f(t); x + a] \quad (2.12.4)$$

$$\mathcal{H}[f(at); x] = \mathcal{H}[f(t); ax], \quad (a > 0) \quad (2.12.5)$$

$$\mathcal{H}[f(-at); x] = -\mathcal{H}[f(t); -ax], \quad (a > 0) \quad (2.12.6)$$

$$\mathcal{H}[f'(t); x] = \frac{d}{dx} \bar{f}_H(x) \quad (2.12.7)$$

3.1. Mellin Transformasyonu:

$$\mathcal{H}[f(t);x] = x\bar{f}_H(x) + \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (2.12.8)$$

Hilbert transformasyonu inversi ise, $\mathcal{H}^{-1} = -\mathcal{H}$ şeklinde yazılabilir.

tenimlerin $x = u/a$ dönüşümü uygulanırsa, bu durumda,

$$\int_0^{\infty} f(ax)x^{s-1} dx = a^{-s} \int_0^{\infty} f(u)u^{s-1} du$$

elde edilir. O halde,

$$\mathcal{H}[f(ax);s] = a^{-s} f^*(s) \quad (3.1.1.)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}[x^a f(x);s] = f^*(s+a) \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Eğer $a > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[f(x^a);s] &= \int_0^{\infty} f(x^a)x^{s-1} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(u)u^{a(s-1)/a} \left(\frac{1}{a} u^{1/a-1} du \right) \end{aligned}$$

olur ki, burada şu sonucu elde edilebiliriz,

$$\mathcal{H}[f(x^a);s] = a^{-s} f^*(s/a), \quad (a > 0) \text{ dir.} \quad (3.1.3)$$

Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}[x^{-1} f(x^{-1});s] = f^*(1-s) \text{ olur.} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d}{ds} x^{s-1} = (\log x) x^{s-1}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\mathcal{H}[\log x f(x);s] = \frac{d}{ds} f^*(s) \quad (3.1.5)$$

denklemini yazabiliriz.

3.1. Mellin Transformasyonu:

Mellin Transformasyonu aşağıdaki gibi,

$$f^*(s) \equiv \mathcal{M}[f(x);s] = \int_0^\infty f(x)x^{s-1} dx$$

tanımlanır. $x = u/a$ dönüşümü uygulanırsa, bu durumda,

$$\int_0^\infty f(ax)x^{s-1} dx = a^{-s} \int_0^\infty f(u)u^{s-1} du$$

elde edilir. O halde,

$$\mathcal{M}[f(ax);s] = a^{-s}f^*(s) \quad (3.1.1.)$$

olur. Benzer şekilde,

$$\mathcal{M}[x^a f(x);s] = f^*(s+a) \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Eğer $a > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[f(x^a);s] &= \int_0^\infty f(x^a)x^{s-1} dx \\ &= \int_0^\infty f(u)u^{s/a-1/a} \left(\frac{1}{a} u^{1/a-1} du \right) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

olur ki, burada şu sonucu elde edilebilirki,

$$\mathcal{M}[f(x^a);s] = a^{-1}f^*(s/a), \quad (a > 0) \text{ dir.} \quad (3.1.3)$$

Benzer metoduyla,

$$\mathcal{M}[x^{-1}f(x^{-1});s] = f^*(1-s) \text{ olur.} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d}{ds} x^{s-1} = (\log x)x^{s-1}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$\mathcal{M}[\log x f(x);s] = \frac{d}{ds} f^*(s) \quad (3.1.5)$$

denklemini yazabiliriz.

$\Gamma(n+1)$ fonksiyonun,

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n!$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\beta(m, s)$ fonksiyonun

$$\int_0^1 (1-u)^{m-1} u^{s-1} du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(s)}{\Gamma(m+s)}, \quad \text{Re } s > 0, \quad \text{Re } m > 0$$

olup $u = x/(1+x)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{(1+x)^{m+s}} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(s)}{\Gamma(m+s)}$$

denklemini elde ederiz. Buna göre,

$$\mathcal{M}[(1+x)^{-a}; s] = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)}, \quad 0 < \text{Re } s < \text{Re } a \quad (3.1.6)$$

sonucu elde edilir. Eğer $s=1$ alınırsa, bu durumda,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad 0 < \text{Re } s < 1$$

olup,

$$\mathcal{M}[(1+x)^{-1}; s] = \pi \operatorname{cosec}(\pi s), \quad 0 < \text{Re } s < 1 \quad (3.1.7)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1.3) denklemi ile (3.1.6) denkleminin birleştirirsek,

$$\mathcal{M}[(1+x^a)^{-b}; s] = \frac{\Gamma(s/a)\Gamma(b-s/a)}{a\Gamma(b)}, \quad 0 < \text{Re } s < \text{Re } ab \quad (3.1.8)$$

olduğunu bulabiliriz. $b=1$ alınırsa, yukarıdaki denklem,

$$\mathcal{M}[(1+x^a)^{-1}; s] = \frac{\pi}{a} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi s}{a}\right), \quad 0 < \text{Re } s < \text{Re } a \quad (3.1.9)$$

Eğer $f(z)$ fonksiyonunun $z=a_1, \dots, a_n$ 'de kutup noktalarına sahipse, bu durumda Mellin Transformasyonun Rezidü Teoremine göre,

$$\mathcal{M}[f(x); s] = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \sum_{r=1}^n \operatorname{res} \phi(a_r) \quad (3.1.10)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.2. Türevin ve İntegralin Mellin Transformasyonu:

$f'(x)$ fonksiyonunun Mellin transformasyonu,

$$\mathcal{M}[f'(x);s] = \int_0^\infty f'(x)x^{s-1} dx$$

olduğunu biliyoruz. Kısmi integrasyonu uygulanırsa,

$$\mathcal{M}[f'(x);s] = -(s-1)f^*(s-1), \quad (3.2.1)$$

elde edilecektir. Devam edilirse, $f^{(n)}(x)$ 'in M.T.

$$\mathcal{M}[f^{(n)}(x);s] = (-1)^n \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} f^*(s-n) \quad (3.2.1)$$

elde edilir.

$x f'(x)$ fonksiyonunu ele alalım Bunun Mellin transformasyonu,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[x f'(x);s] &= \int_0^\infty f'(x)x^{s-1} dx \\ &= -(s-1)f^*(s) \end{aligned}$$

$$= \mathcal{M}[f'(x);s+1] \quad (3.2.2)$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathcal{M}\left[\left(x \frac{d}{dx}\right) f(x);s\right] = -s f^*(s) \quad (3.2.3)$$

ve de,

$$\mathcal{M}\left[\left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x);s\right] = (-s)^n f^*(s) \quad (3.2.4)$$

denklemleri yazılabilir. Ayrıca,

$$\mathcal{M}[x^n f^{(n)}(x);s] = (-1)^n \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(s)} f^*(s) \quad (3.2.5)$$

olduğu kolayca görülebilir. Örnek olarak

(3.2.4)' de $n=2$ alınır,

$$\mathcal{M}\left[x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x \frac{df}{dx};s\right] = s^2 f^*(s) \quad (3.2.6)$$

elde edilir.

3.3. İntegralin Mellin Transformasyonu:

$f(x)$ fonksiyonunun Mellin Transformasyonu olan,

$$\mathcal{M}[f(x);s] = -(s-1)\mathcal{M}\left[\int_0^x f(u) du; s-1\right] \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer s yerinde $s+1$ yazılacak olursa bu durumda (3.3.1) denklemini,

$$\mathcal{M}\left[\int_0^x f(u) du; s\right] = -\frac{1}{s}f^*(s+1) \quad (3.3.2)$$

şeklini alır ki, buna integralin Mellin Transformasyonu olur. Tekrar edilirse,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left[\int_0^x dy \int_0^y f(u) du; s\right] &= -\frac{1}{s}\mathcal{M}\left[\int_0^y f(u) du; s+1\right] \\ &= -\frac{1}{s}\left\{-\frac{1}{s+1}f^*(s+2)\right\} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

denklemini elde edebiliriz. Benzer şekilde,

$$\mathcal{M}[f(x);s] = (s-1)\mathcal{M}\left[\int_x^\infty f(u) du; s-1\right] \quad (3.3.4)$$

olup, s yerine $s+1$ yazılırsa, (3.3.4) denklemi

$$\mathcal{M}\left[\int_x^\infty f(u) du; s\right] = \frac{1}{s}f^*(s+1) \quad (3.3.5)$$

şeklinde ifade edilir.

3.4. Mellin Transformasyonu için Convolution Teoremi:

Eğer $f^*(s)$ ve $g^*(s)$ sırasıyla, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Mellin Transformasyonu ise, bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(x)g(x)x^{s-1} dx &= \int_0^{\infty} g(x)x^{s-1} dx \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(z)x^{-z} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(z) dz \int_0^{\infty} g(x)x^{s-z-1} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(z)g^*(s-z) dz
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\mathcal{M}[f(x)g(x);s] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(z)g^*(s-z) dz \quad (3.4.1)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{-1}[f^*(s)g^*(s);x] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)x^{-s} ds \int_0^{\infty} g(u)u^{s-1} du \\
&= \int_0^{\infty} g(u) \frac{du}{u} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)(x/u)^{-s} ds \\
&= \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{u}\right) g(u) \frac{du}{u} \quad (3.4.2)
\end{aligned}$$

Mellin transformasyonunun inversi elde edilecektir.

Bessel Fonksiyonu

Bessel denklemi ikinci mertebeden lineer bir denklem olup en genel şekilde,

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} - \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right) y = 0 \quad (1)$$

olarak yazılır. Burada v kompleks bir katsayı, z ise kompleks bir değişkendir.

Bu denklemin genel çözümü ise,

$$y(z) = A y_1(z) + B y_2(z) \quad (2)$$

şeklinde yazılır.

$y_1(z)$ fonksiyonunu seriye göre açılıp iki kez türev alırsak ve (1)'de koyarsak,

$$y_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{(z/2)^2}{1!(n+1)!} + \frac{(z/2)^4}{2!(n+2)!} - \dots + \frac{(-1)^r (z/2)^{2r}}{r!(n+1) \dots (n+r)} \right]$$

elde edilir ki, buna Bessel Fonksiyonu adı verilir ve kısaca aşağıdaki gibi yazılır,

$$J_v(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{1}{2}t\right)^{v+2r}}{r! \Gamma(r+v+1)} \quad (3)$$

3.5. Bessel Fonksiyonun Laplace Transformasyonu:

(3)' denkleminde yararlanarak,

$$\mathcal{L}[t^v J_v(t); p] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2^{-v-2r}}{r! \Gamma(r+v+1)} \mathcal{L}[t^{2v+2r}; p] \quad (3.5.1)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^v; p] &= \int_0^{\infty} t^v e^{-pt} dt = p^{-v-1} \int_0^{\infty} u^v e^{-u} du \\ &= p^{-v-1} \Gamma(v+1) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(r + v + 1)} \mathcal{L}[t^{2v+2r}; p] &= \frac{\Gamma(2v + 2r + 1)}{\Gamma(r + v + 1)} p^{-2v-2r-1} \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2v+2r} \Gamma(v + r + \frac{1}{2}) p^{-2v-2r-1} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda ($\text{Re } p > 0, v > -\frac{1}{2}$), olmak üzere (3.5.1) denklemi,

$$\mathcal{L}[t^v J_v(t); p] = 2^v \pi^{-\frac{1}{2}} p^{-2v-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v + \frac{1}{2} + r)}{r!} (-p^{-2})^r \quad (3.5.3)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$(1-x)^{-\alpha}$ fonksiyonunu seriye göre açılırsa,

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{r! \Gamma(\alpha)} x^r, \quad |x| < 1$$

$$v > -\frac{1}{2}, |p| > 1, \quad \text{olmak üzere yukarıdaki}$$

seri

$\Gamma(v + \frac{1}{2})(1 + p^{-2})^{-v-\frac{1}{2}}$,ye eşit olur. Buna göre,

$$\mathcal{L}[t^v J_v(t); p] = \frac{2^v \Gamma(v + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} (p^2 + 1)^{-v-\frac{1}{2}}, \quad \text{Re } p > 1 \quad (3.5.4)$$

olarak yazılabilir.

$v=0$ için (3.5.4) denklemi,

$$\mathcal{L}[J_0(t); p] = (p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{Re } p > 1 \quad (3.5.5)$$

olduğu açıktır.

Eğer $\text{Re } p > a > 0$ ise, (2.2.2)'den yararlanarak,

$$\mathcal{L}[t^v J_v(at); p] = \frac{(2a)^v \Gamma(v + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(p^2 + a^2)^{v+\frac{1}{2}}}, \quad v > -\frac{1}{2} \quad (3.5.6)$$

elde edilecektir. Buna göre,

$$\mathcal{L}[J_0(at); p] = (p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.5.7)$$

olduğu hemen görülür.

Eğer $a=1$ alınırsa (3.5.6) denkleminde yararlanarak

$$\mathcal{L}[t^{v+1} J_v(t); p] = \frac{2^{v+1} p \Gamma(v + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(p^2 + 1)^{v+\frac{1}{2}}}, \quad (\operatorname{Re} p > 1) \quad (3.5.8)$$

şeklinde bulunabilir.

Genel bir sonuç olarak,

$$\mathcal{L}[t^{v+1} J_v(at); p] = \frac{2^{v+1} a^v p \Gamma(v + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(p^2 + a^2)^{v+\frac{1}{2}}}, \quad (\operatorname{Re} p > a > 0) \quad (3.5.9)$$

ve özel durumu için

$$\mathcal{L}[t J_0(at); p] = p(p^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (\operatorname{Re} p > a > 0) \quad (3.5.10)$$

yazılabilir.

Birinci tür Bessel fonksiyonu aşağıdaki şekilde

$$t^{\frac{1}{2}} J_v(2t^{\frac{1}{2}}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r t^{v+r}}{r! \Gamma(v + r + 1)}$$

Eğer $\operatorname{Re} p > 0$ ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\frac{1}{2}} J_v(2t^{\frac{1}{2}}); p] &= p^{-v-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1/p)^r}{r!} \\ &= p^{-v-1} e^{-1/p} \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

elde edilir. Bundan faydalanarak,

$$\mathcal{L}[t^{\frac{1}{2}} J_v(2\sqrt{at}); p] = a^{\frac{1}{2}} p^{-v-1} e^{-a/p} \quad a > 0 \quad (3.5.12)$$

yazılabilir.

Özel bir durum için,

$$\mathcal{L}[J_0(2\sqrt{at}); p] = \frac{1}{p} e^{-a/p}, \quad (a > 0, \operatorname{Re} p > 0) \quad (3.5.13)$$

elde edilebilir.

4.1. Hankel Transformasyonu:

Hankel transformasyonu genelde Bessel fonksiyonun üzerine ve silindirik koordinatlara geçmekle elde edilir.

Hankel transformasyonu aşağıdaki gibi,

$$\mathcal{H}_v[f(x); \xi] = \int_0^\infty x f(x) J_v(x\xi) dx \quad (4.1.1)$$

tanımlayabiliriz. Buna göre

$$\mathcal{H}_v[f(ax); \xi] = \int_0^\infty xf(ax) J_v(x\xi) dx, \quad (a > 0) \quad (4.1.2)$$

olup, $\rho = ax$ dönüşümü yapılırsa, bu durumda (4.1.2) denkleminin sağ taraftaki

$$\frac{1}{a^2} \int_0^\infty \rho f(\rho) J_v(\rho\xi/a) d\rho \quad (4.2.3)$$

şeklini alır. Buna göre

$$\mathcal{H}_v[f(a\rho); \xi] = a^{-2} \mathcal{H}_v[f(\rho); \xi/a] \quad (4.1.3)$$

denklemini elde edilir.

4.2. Bazı fonksiyonların Hankel Transformasyonu

$\mu > \nu \geq 0$ olmak üzere, $(H(a-x))$ ötelenmiş birim basamak fonksiyonu)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu[x^\nu(a^2 - x^2)^{\mu-\nu-1} H(a-x); \xi] \\ = \int_0^a x^{\nu+1} (a^2 - x^2)^{\mu-\nu-1} J_\nu(x\xi) dx \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}\xi)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(r + \nu + 1)} \int_0^a x^{2\nu+2r+1} (a^2 - x^2)^{\mu-\nu-1} dx \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\int_0^a x^{2v+2r+1} (a^2 - x^2)^{\mu-v-1} dx = \frac{1}{2} a^{2\mu+2r} \frac{\Gamma(r+v+1)\Gamma(\mu-v)}{\Gamma(r+\mu+1)}$$

olup, buna göre,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_v[x^v(a^2 - x^2)^{\mu-v-1} H(a-x); \xi] \\ = 2^{\mu-v-1} \Gamma(\mu-v) a^\mu \xi^{v-\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}\xi a)^{\mu+2r}}{r! \Gamma(r+\mu+1)} \end{aligned}$$

(4.2.2)

elde edilir.

Bessel fonksiyonundan yararlanarak (4.2.2) denklemi,

$$\mathcal{H}_v[x^v(a^2 - x^2)^{\mu-v-1} H(a-x); \xi] = 2^{\mu-v-1} \Gamma(\mu-v) a^\mu \xi^{v-\mu} J_\mu(\xi a)$$

(4.2.3)

olarak da ifade edilebilir.

Şimdi Hankel inversiyon teoremini kullanarak, eğer $\mu > v \geq 0$ ise,

$$2^{\mu-v-1} \Gamma(\mu-v) a^\mu \mathcal{H}_v[\xi^{v-\mu} J_\mu(\xi a); x] = x^v (a^2 - x^2)^{\mu-v-1} H(a-x)$$

(4.2.4)

sonucu elde edebiliriz. Buradan alternatif bir sonuç olarak

$$\mathcal{H}_v[x^{v-\mu} J_\mu(ax); \xi] = \frac{\xi^v (a^2 - \xi^2)^{\mu-v-1}}{2^{\mu-v-1} \Gamma(\mu-v) a^\mu} H(a-\xi)$$

(4.2.5)

yazılabilir.

Eğer $a > 0, \mu > v \geq 0$ ise, bu durumda,

$$\int_0^\infty x^{1-\mu+v} J_\mu(ax) J_v(\xi x) dx = \frac{\xi^v (a^2 - \xi^2)^{\mu-v-1}}{2^{\mu-v-1} \Gamma(\mu-v) a^\mu} H(a-\xi)$$

(4.2.6)

olduğu yazılabilir.

Şimdi (4.2.3)'te $\mu = \nu + 1$ yazıp (4.2.5)'ten yararlanarak

$$\mathcal{H}_\nu[x^\nu H(a-x); \xi] = \frac{a^{\nu+1}}{\xi} J_{\nu+1}(\xi a), \quad a > 0 \quad (4.2.7)$$

$$\mathcal{H}_\nu[x^{-1} J_{\nu+1}(ax); \xi] = \frac{\xi^\nu}{a^{\nu+1}} H(a-\xi), \quad a > 0 \quad (4.2.8)$$

sonuçlarına varılabilir.

Aynı denkleminde benzer şekilde $\mu = \nu + \frac{1}{2}$ koyarsak,

$$\mathcal{H}_\nu \left[\frac{x^\nu H(a-x)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}; \xi \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} a^{\nu+\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(\xi a) \quad (4.2.9)$$

$$\mathcal{H}_\nu[x^{-\frac{1}{2}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(ax); \xi] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi^\nu H(a-\xi)}{a^{\nu+\frac{1}{2}} \sqrt{(a^2-\xi^2)}} \quad a > 0, \nu \geq 0 \quad (4.2.10)$$

denklemlerini elde ederiz.

(4.2.8) denkleminde $\nu = 0$ koyarsak ve de (4.2.10) denkleminden faydalanarak,

$$\mathcal{H}_0[x^{-1} J_1(ax); \xi] = \frac{H(a-\xi)}{a}, \quad (a > 0) \quad (4.2.11)$$

$$\mathcal{H}_0[x^{-1} \sin(ax); \xi] = \frac{H(a-\xi)}{\sqrt{(a^2-\xi^2)}}, \quad (a > 0) \quad (4.2.12)$$

denklemleri yazılabilir.

Benzer şekilde (4.2.10)'da $\nu = \frac{1}{2}$ alınırsa,

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} J_1(ax) J_{\frac{1}{2}}(x\xi) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\xi^{\frac{1}{2}} H(a-\xi)}{a \sqrt{(a^2-\xi^2)}} \quad (4.2.13)$$

elde edilir.

(4.2.11) denklemi integral şekilde de yazılabilir.

Şöyle ki,

$$\int_0^\infty J_1(ax) J_0(\xi x) dx = \frac{H(a-\xi)}{a} \quad (4.2.14)$$

Simdi,

$$\int_0^a J_1(ax) da = \frac{1 - J_0(ax)}{x}$$

$$\int_0^a \frac{H(a - \xi)}{a} da = H(a - \xi) \log \left(\frac{a}{\xi} \right)$$

integrallerinden faydalanarak, (4.2.14)'den

$$\int_0^\infty \frac{1 - J_0(ax)}{x} J_0(\xi x) dx = H(a - \xi) \log \left(\frac{a}{\xi} \right)$$

veya,

$$\mathcal{H}_0[x^{-2}\{1 - J_0(ax)\}; \xi] = H(a - \xi) \log \left(\frac{a}{\xi} \right) \quad (4.2.15)$$

şeklinde elde edilir.

4.3. Bazı Üstel Fonksiyonlarının Hankel Transformasyonu:

Hankel Transformasyonun tanımına göre,

$$\mathcal{H}_v[e^{-px}f(x); \xi] = \int_0^\infty \{xf(x)J_v(\xi x)\}e^{-px} dx$$

şeklinde olup buna göre,

$$\mathcal{H}_v[e^{-px}f(x); \xi] = \mathcal{L}[xf(x)J_v(\xi x); p] \quad (4.3.1.)$$

yazılabilir.

$v > -1$ olmak üzere, (3.5.6) ve (3.5.8)'den aşağıdaki denklemlerini yazabiliriz.

$$\mathcal{H}_v[x^{v-1}e^{-px}; \xi] = \frac{2^v \xi^v \Gamma(v + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(p^2 + \xi^2)^{v+\frac{1}{2}}} \quad (4.3.2)$$

$$\mathcal{H}_v[x^v e^{-px}; \xi] = \frac{2^{v+1} \xi^v p \Gamma(v + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(p^2 + \xi^2)^{v+\frac{3}{2}}} \quad (4.3.3)$$

$$\mathcal{H}_v[x^{-1}e^{-px};\xi] = \frac{1}{\sqrt{(p^2 + \xi^2)}} \left\{ \frac{\xi}{p + \sqrt{(p^2 + \xi^2)}} \right\}^v \quad (4.3.4)$$

$$\mathcal{H}_v[e^{-px};\xi] = \frac{p + v\sqrt{(p^2 + \xi^2)}}{(p^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\xi}{p + \sqrt{(p^2 + \xi^2)}} \right\}^v \quad (4.3.5)$$

Benzer şekilde,

$$\mathcal{H}_v[e^{-\frac{1}{4}px^2}f(x);\xi] = \int_0^\infty xf(x)e^{-\frac{1}{4}px^2}J_v(x\xi) dx$$

olarak yazılabilir. Buna göre $u = \frac{1}{4}x^2$ dönüşümü yapılırsa, yukarıdaki integral

$$2 \int_0^\infty f(2u^{\frac{1}{2}})J_v(2\xi u^{\frac{1}{2}})e^{-pu} du$$

şekline dönüşür. Buna göre,

$$\mathcal{H}_v[e^{-\frac{1}{4}px^2}f(x);\xi] = 2\mathcal{L}[f(2\sqrt{x})J_v(2\xi\sqrt{x});p] \quad (4.3.6)$$

olarak yazılabilir.

$f(x) = x^v$ seçersek, (4.3.6) denklemini

$$\mathcal{H}_v[x^ve^{-\frac{1}{4}px^2};\xi] = 2^{v+1}\mathcal{L}[x^{\frac{1}{2}}J_v(2\xi\sqrt{x});p] \quad (4.3.7)$$

olarak ifade edilir.

(3.5.12)'den faydalanarak,

$$\mathcal{H}_v[x^ve^{-\frac{1}{4}px^2};\xi] = \frac{2^{v+1}\xi^v}{p^{v+1}} e^{-\xi^2/p} \quad (4.3.8)$$

olup $\frac{1}{4} p = \frac{1}{a^2}$ alınır, bu durumda (4.3.8) denklemi,

$$\mathcal{H}_v[x^ve^{-x^2/a^2};\xi] = (\frac{1}{2}a^2)^{v+1}\xi^ve^{-\frac{1}{4}\xi^2a^2} \quad (4.3.9)$$

şekline dönüşür. Özel bir durum için $a^2=2$ alınırsa, bu durumda,

$$\mathcal{H}_v[x^v e^{-\frac{1}{2}x^2}; \xi] = \xi^v e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (4.3.10)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.3.6)'da $f(x)=x^{-1}$ yazılırsa,

$$\mathcal{H}_v[x^{-1} e^{-\frac{1}{2}px^2}; \xi] = \mathcal{L}[x^{-\frac{1}{2}} J_v(2\xi\sqrt{x}); p] \quad (4.3.11)$$

bulunur.

4.4. Hankel Transformasyonu İle Mellin Transformasyonunun Arasındaki ilişkisi:

Hankel transformasyonunun tanımına göre,

$$\mathcal{H}_v[x^{s-2}f(x); \xi] = \int_0^\infty x^{s-1}f(x)J_v(\xi x) dx$$

olup integralini bir Mellin transformasyonu olduğu şekilde düşünülürse, bu durumda yukarıdaki denklemi

$$\mathcal{H}_v[x^{s-2}f(x); \xi] = \mathcal{M}[f(x)J_v(\xi x); s] \quad (4.4.1)$$

şeklinde yazılabilir.

Özel bir durum için,

$$\mathcal{H}_v[x^{s-1}; \xi] = \mathcal{M}[J_v(\xi x); s+1] \quad (4.4.2)$$

elde edilir.

$$\mathcal{M}[x^{-v}J_v(x); s] = \frac{2^{s-v-1}\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\Gamma(v - \frac{1}{2}s + 1)}, \quad 0 < \text{Re } s < 1, \quad v > -\frac{1}{2}$$

ve de

$$\mathcal{M}[J_v(x); s] = \frac{2^{s-1}\Gamma(\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}s + 1)}, \quad -v < s < v+2$$

olduğundan

$$\mathcal{H}_v[x^{s-1}; \xi] = \frac{2^s \Gamma(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2})}{\xi^{s+1} \Gamma(\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2})}, \quad -1 - v < s < 1 + v \quad (4.4.3)$$

yazılabilir.

4.5. Hankel Transformasyonu İçin Parseval Özdeşliği:

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla Hankel transformasyonun v , üzerine $\bar{f}_v(\xi)$ ve $\bar{g}_v(\xi)$ olsun. Bu durumda tanım gereğince

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi \bar{f}_v(\xi) \bar{g}_v(\xi) d\xi &= \int_0^\infty \xi \bar{f}_v(\xi) d\xi \int_0^\infty xg(x) J_v(\xi x) dx \\ &= \int_0^\infty xg(x) dx \int_0^\infty \xi \bar{f}_v(\xi) J_v(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

olur. Buna göre Hankel Transformasyonu Parseval özdeşliği,

$$\int_0^\infty \xi \bar{f}_v(\xi) \bar{g}_v(\xi) d\xi = \int_0^\infty xf(x)g(x) dx \quad (4.5.1)$$

şeklinde elde edilir.

4.6. Türevin Hankel Transformasyonu:

$$\rho^{v-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^{1-v} f(\rho) \} \quad \text{fonksiyonunu ele alalım.}$$

Bunun Hankel transformasyonu ise,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_v \left[\rho^{v-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^{1-v} f(\rho) \}; \xi \right] &= \int_0^\infty \rho^v J_v(\xi \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^{1-v} f(\rho) \} d\rho \\ &= [\rho f(\rho) J_v(\xi \rho)]_0^\infty - \int_0^\infty \rho^{1-v} f(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^v J_v(\xi \rho) \} d\rho \end{aligned}$$

ve de

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{v+1} f(\rho) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{\frac{1}{2}} f(\rho) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^v J_v(\xi \rho) \} = \xi \rho^v J_{v-1}(\xi \rho)$$

olup

$$\mathcal{H}_v \left[\rho^{v-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^{1-v} f(\rho) \}; \xi \right] = -\xi \mathcal{H}_{v-1} [f(\rho); \xi] \quad (4.6.1)$$

elde edilir. Eğer $v = 1$ alınırsa, bu durumda,

$$\mathcal{H}_1 [f'(\rho); \xi] = -\xi \mathcal{H}_0 [f(\rho); \xi] \quad (4.6.2)$$

olur ki buna Türevin H. Transformasyonu denir.

Benzer yolyla,

$$\mathcal{H}_v \left[\rho^{-v-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho^{v+1} f(\rho) \}; \xi \right] = \xi \mathcal{H}_{v+1} [f(\rho); \xi] \quad (4.6.3)$$

olduğu yazılabilir.

Eğer $v = 0$ alınırsa, (4.6.3) denklemi,

$$\mathcal{H}_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \{ \rho f(\rho) \}; \xi \right] = \xi \mathcal{H}_1 [f(\rho); \xi] \quad (4.6.4)$$

şeklinde yazılabilir.

5.2. Kontorovich-Lebedev Transformasyonunun İnnersi:

$f(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ 'in Kontorovich-Lebedev Transformasyonu ise, bu durumda

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi \tau) K_{i\tau}(x) \tilde{f}(\tau) d\tau \quad (5.2.1)$$

olur.

5.1. Kontorovich-Lebedev Transformasyonu: τ in Parseval Özdeşliği:

$f(x)$ fonksiyonunu kontorovich-lebedev transformasyonu $\tilde{f}(\tau)$ olup aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$\mathcal{K}[f(x); \tau] \equiv \tilde{f}(\tau) = \int_0^\infty x^{-1} f(x) K_{it}(x) dx \quad (5.1.1)$$

Burada $K_{it}(x)$ Macdonald fonksiyonu olup,

$$K_{it}(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cos(\tau t) dt \quad (5.1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $f(x)$ fonksiyonunu n değişkenli bir fonksiyon ise, bu durumda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu kontorovich-lebedev transformasyonu,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tau, x_2, \dots, x_n) &= \mathcal{K}[f(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1 \rightarrow \tau] \\ &= \int_0^\infty f(x_1, x_2, \dots, x_n) K_{it}(x_1) dx_1 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

şeklini alır.

5.2. Kontorovich-Lebedev Transformasyonunun İncersi:

$\tilde{f}(\tau)$ fonksiyonunu $f(x)$ 'in kontorovich-Lebedev transformasyonu ise, bu durumda

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi \tau) K_{it}(x) \tilde{f}(\tau) d\tau \quad (5.2.1)$$

olur.

5.3. Kontorovich-Lebedev Transformasyonu için Parseval Özdeşliği:

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonların kontorovich-lebedev transformasyonu,

$$\tilde{f}(\tau) = \mathcal{K}[f(x); \tau], \quad \tilde{g}(\tau) = \mathcal{K}[g(x); \tau]$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(\tau) d\tau &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau \int_0^\infty x^{-1} g(x) K_{i\tau}(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^{-1} g(x) dx \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \tilde{f}(\tau) K_{i\tau}(x) d\tau \\ &= \int_0^\infty x^{-1} f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bunun için Parseval özdeşliği ise,

$$\int_0^\infty x^{-1} f(x) g(x) dx = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \sinh(\pi\tau) \tilde{f}(\tau) \tilde{g}(\tau) d\tau \quad (5.3.1)$$

şeklinde bulunur.

Özel bir durum için,

$$g(x) = x \sin \alpha e^{-x \cos \alpha}, \quad \tilde{g}(\tau) = \frac{\sinh(\alpha\tau)}{\sinh(\pi\tau)}$$

alalım. Bu durumda,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sinh(\alpha\tau) \tilde{f}(\tau) d\tau = \sin \alpha \int_0^\infty e^{-x \cos \alpha} f(x) dx \quad (5.3.2)$$

olur. α 'yı $0^+\epsilon$ ($\alpha \rightarrow 0$) götürülürse,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau \tilde{f}(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \quad (5.3.3)$$

elde edilir.

Eğer,

$$f(x) = e^{-x \cosh t}, \quad \tilde{f}(\tau) = \frac{\pi \cos(\tau t)}{\tau \sinh(\pi\tau)}$$

alınırsa, bu durumda,

6.1. Legendre Diferansiyel Denklemi:

$$2 \int_0^\infty \frac{\cos(\tau t) d\tau}{\sinh(\pi\tau)} = \int_0^\infty e^{-x(1+\cosh t)} dx \quad (5.3.4)$$

elde edilir.

Buradan,

$$\mathcal{F}_c[\operatorname{cosech}(\pi\tau); \tau \rightarrow t] = \frac{1}{2\sqrt{(2\pi)}} \operatorname{sech}^2(\tfrac{1}{2}t) \quad (5.3.5)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$$(1-x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2(1-m)x \frac{dw}{dx} + (v+m)(v-m+1)w = 0 \quad (6.2.2)$$

$\xi = \frac{1-x}{2}$ dönüşümü yapılarak, (6.2.2) denklemi,

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (m+1)(1-2\xi) \frac{dw}{d\xi} + (v-m)(v+m+1)w = 0 \quad (6.2.3)$$

elde edilir.

Şimdi $a=b=v$, $c=m+1$ olsun. Buna göre (6.2.3) denklemi

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 w}{d\xi^2} + [c - (a+b+1)\xi] \frac{dw}{d\xi} - abw = 0 \quad (6.2.4)$$

olar ki, bu da bir hipergeometrik denklemdir.

Buna göre (6.2.3) denkleminin çözümü ise,

$${}_2F_1(m-v, m+v+1; m+1; \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x)$$

olup (6.2.1) denkleminin çözümü.

6.1. Legendre Diferansiyel Denklemi:

Legendre's diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left\{ v(v + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right\} y = 0 \quad (6.2.1)$$

olup sonucu bulmak için y yerine,

$$y = (x^2 - 1)^{+\frac{1}{2}m} w(x)$$

yazalım. Bu durumda (6.2.1) denklemi aşağıdaki şeklini alır.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 w}{dx^2} - 2(1 - m)x \frac{dw}{dx} + (v + m)(v - m + 1)w = 0 \quad (6.2.2)$$

$\xi = \frac{1 - x}{2}$, dönüşümü yapılırsa, (6.2.2) denklemi,

$$\xi(1 - \xi) \frac{d^2 w}{d\xi^2} + (m + 1)(1 - 2\xi) \frac{dw}{d\xi} + (v - m)(v + m + 1)w = 0 \quad (6.2.3)$$

elde edilir.

Şimdi $a = m - v$, $b = m + v + 1$, $c = m + 1$ olsun. Buna göre (6.2.3) denklemi

$$\xi(1 - \xi) \frac{d^2 w}{d\xi^2} + [c - (a + b + 1)\xi] \frac{dw}{d\xi} - abw = 0 \quad (6.2.4)$$

olur ki, bu da bir hipergeometrik denklemdir.

Buna göre (6.2.2) denkleminin çözümü ise,

$${}_2F_1(m - v, m + v + 1; m + 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x),$$

olup (6.2.1) denkleminin çözümü,

$$P_v^m(x) = \frac{\Gamma(v + m + 1)}{2^m \Gamma(m + 1) \Gamma(v - m + 1)} \times \\ \times (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}m} {}_2F_1\left(m - v, m + v + 1; m + 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \quad (6.2.5)$$

olarak elde edilir.

$P_v^m(x)$ fonksiyonuna birinci tür birleştirilmiş Legendre fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer $m=0$ ise, bu durumda Legendre fonksiyonu,

$$P_v(x) = {}_2F_1\left(-v, v + 1; 1; \frac{1 - x}{2}\right) \quad (6.2.6)$$

olarak elde edilir.

Bir çok uygulamalarda m tam sayı ve pozitif olur, ama v olmaz. Bu yüzden

$$\frac{d^m}{dx^m} P_v(x) = \frac{\Gamma(v + m + 1)}{2^m m! \Gamma(v - m + 1)} \times \\ \times {}_2F_1\left(-v + m, v + m + 1; m + 1; \frac{1 - x}{2}\right) \quad (6.2.7)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla eğer m tam sayı ve pozitif ise, (6.2.5) denklemini,

$$P_v^m(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dx^m} P_v(x) \quad (6.2.8)$$

şeklinde yazılabilir.

m yerine $-m$ yazılırsa, bu durumda (6.2.5) denklemi,

$$P_v^{-m}(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{m!} {}_2F_1\left(-v, v + 1; m + 1; \frac{1 - x}{2}\right) \quad (6.2.9)$$

elde edilir. Eğer m tam sayı değilse, bu durumda,

$$P_v^{-m}(x) = \frac{\Gamma(v - m + 1)}{\Gamma(v + m + 1)} P_v^m(x) \quad (6.2.10)$$

elde edilir.

7. Sonlu Transformasyonlar

7.1. Sonlu Fourier Cosinüs Transformasyonu:

$f(x)$ fonksiyonunu $(0, \pi)$ aralığında Fourier Cosinüs Serisine göre açalım,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} a_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

olduğunu biliyoruz. a_n ise,

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

dir. Eğer a_n Fourier kat sayısına, sonlu cosinüs transformasyonu olarak adlandıırırsak, ve de $\bar{f}_c(n)$ notasyonu ile gösterirsek, bu durumda sonlu Fourier Cosinüs transformasyonu,

$$\mathcal{F}_c[f(x); n] = \bar{f}_c(n) = \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (7.1.1)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

7.2. Sonlu Fourier Cosinüs Transformasyonun İncersi:

Eğer $f(n)$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında ve $\bar{f}_c(n)$ fonksiyonunun, $f(n)$ 'in sonlu Fourier cosinüs transformasyonu ise, bu durumda

$$\mathcal{F}_c^{-1}[\bar{f}_c(n); x] = f(x) = \frac{1}{\pi} \bar{f}_c(0) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_c(n) \cos(nx) \quad (7.2.1)$$

dir.

Benzer biçimde, $f(x)$ fonksiyonun $(0, a)$ aralığında sonlu Fourier cosinüs transformasyonu

$$\mathcal{F}_c[f(x); n] = \bar{f}_c(n) = \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \quad (7.2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Basit bir dönüşüm ile bunu elde edebiliriz ki, eğer $f(x)$ fonksiyonu $(0, a)$ aralığında ise, ve de

$\bar{f}_c(n)$ fonksiyonu $f(x)$ 'in Sonlu Fourier Cosinüs transformasyonu ise, bu durumda,

$$f_c^{-1}[f_c(n);x] = f(x) = \frac{1}{a} f_c(0) + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} f_c(n) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (7.2.3)$$

yazılabilir.

7.3. Sonlu Fourier Sinüs Transformasyonu:

$f(x)$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında Fourier Sinüs serisine göre açılımı,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

olup, b_n ise,

$$b_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

dir. Eğer b_n Fourier kat sayısına, Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu olarak adlandırırsak, ve $\bar{f}_s(n)$ notasyonu ile gösterirsek, bu durumda

$$f_s[f(x);n] = \bar{f}_s(n) = \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (7.3.1)$$

olarak Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu elde edilmiş olur.

7.4. Sonlu Fourier Sinüs Transformasyonun İncisi:

Eğer $f(x)$ fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında ise, ve $\bar{f}_s(n)$ fonksiyonunun, $f(x)$ 'in Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu ise, bu durumda,

$$f_s^{-1}[\bar{f}_s(n);x] = f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_s(n) \sin(nx) \quad (7.4.1)$$

olur.

Benzer şekilde $(0,a)$ aralığında Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu,

$$\bar{f}_s(n) = \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad (7.4.2)$$

olup, bunun inversi ise,

$$f_s^{-1}[\bar{f}_s(n); x] = f(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_s(n) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (7.4.3)$$

denklemleri yazılabilir.

Sınır değer problemlerinde, sonlu Fourier transformasyonlarını uygulamak için, önce $f(x)$ 'in $(0,a)$ aralığında aşağıdaki integrallerini,

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x^r} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx, \quad \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x^r} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

açıklamak gerekir.

Bunun için önce $f(x)$ 'in x 'e göre birinci mertebeden kısmi türevinin sonlu Fourier sinüs transformasyonu,

$$\int_0^a \frac{\partial f}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \left[f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \right]_0^a - \frac{n\pi}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx$$

olarak yazılır. n tam sayı olduğundan, $\sin(n\pi x/a)$ $x=a$ ve $x=0$ 'da değeri sifıra eşit olup dolayısıyla

$$f_s \left[\frac{\partial f}{\partial x}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n\pi}{a} \bar{f}_c(n) \quad (7.4.4)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$f_c \left[\frac{\partial f}{\partial x}; x \rightarrow n \right] = (-1)^n f(a) - f(0) + \frac{n\pi}{a} \bar{f}_s(n) \quad (7.4.5)$$

olduğunu kolayca gösterilebilir.

Eğer özel olarak $f(a) = f(0) = 0$ ise, bu durumda

$$f' \left[\frac{\partial f}{\partial x}; x \rightarrow n \right] = \frac{n\pi}{a} \bar{f}_s(n) \quad (7.4.6)$$

elde edilir.

Aynı yoldan hareket ederek, ikinci mertebeden kısmi türevler için,

$$f_s' \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n\pi}{a} f' \left[\frac{\partial f}{\partial x}; x \rightarrow n \right] \quad (7.4.7)$$

olup, (7.4.5)'den

$$f_s' \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \bar{f}_s(n) + \frac{n\pi}{a} [(-1)^{n+1}f(a) + f(0)] \quad (7.4.8)$$

elde edilir.

Özel olarak $f(a)=f(0)=0$ ise, bu durumda

$$f_s' \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \bar{f}_s(n) \quad (7.4.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde,

$$f_c' \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] = (-1)^n f''(a) - f''(0) - \frac{n^2\pi^2}{a^2} \bar{f}_c(n) \quad (7.4.10)$$

elde edilebilir.

Eğer özel olarak $\partial f/\partial x$ nin $x=0, x=a$ da değeri sifıra eşit ise, bu takdirde (7.4.10) denklemi,

$$f_c' \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n^2\pi^2}{a^2} \bar{f}_c(n) \quad (7.4.11)$$

şeklinde elde edilir.

Daha yüksek mertebeden türevler için aynen yaptığımız gibi tekrarlamamız gerekir. Örnek olarak sınır değer probleminin elastisitede analizinde dördüncü türevini bilmemiz gerekir. Bunun için (7.4.9)'da

$\partial^2 f / \partial x^2$ nin $x=0$, $x=a$ ' da değerini sıfır alarak

$$f_s \left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}; x \rightarrow n \right] = -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} f_s \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow n \right] \quad (7.4.12)$$

olup

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x=a} = (f)_{x=0} = (f)_{x=a} = 0$$

dolayısıyla

$$f_s \left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}; x \rightarrow n \right] = \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \bar{f}_s(n) \quad (7.4.13)$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{x=a} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (7.5.1)$$

olup, buradan,

$$f_c \left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}; x \rightarrow n \right] = \frac{n^4 \pi^4}{a^4} \bar{f}_c(n) \quad (7.4.14)$$

elde edilir.

(7.4.8) ve (7.4.9), denklemlerinden iki boyutlu Δ_2

Laplacian operatörü için benzer sonuçları elde edebiliriz.

Söyle ki,

$$\bar{u}_s(n, y) = f_s[u(x, y); x \rightarrow n]$$

$$\bar{u}_c(n, y) = f_c[u(x, y); x \rightarrow n]$$

şeklinde yazarak, (7.4.8)'den dolayı

$$\begin{aligned} & f_s[\Delta_2 u(x, y); x \rightarrow n] \\ &= \frac{n\pi}{a} [(-1)^{n+1} u(a, y) + u(0, y)] + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \bar{u}_s(n, y) \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

ve de (7.4.9)'dan dolayı

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_c[\Delta_2 u(x,y); x \rightarrow n] \\ = (-1)^n u_x(a,y) - u_x(0,y) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) \bar{u}_c(n,y) \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

denklemlerini elde edebiliriz.

7.5. $f(x,y)$ Fonksiyonun Sonlu Fourier Sinüs ve Cosinüs Transformasyonu:

$f(x,y)$ fonksiyonu x ve y olmak üzere, iki değişkenli bir fonksiyon öyle ki, $0 < x < \pi$ ve $0 < y < \pi$ olsun. Bu durumda $f(x,y)$ 'nin sadece x üzerine sonlu Fourier sinüs transformasyonu,

$$\bar{f}_s(m,y) = \mathcal{J}_s[f(x,y); x \rightarrow m] \quad (7.5.1)$$

şeklinde olur. Yukarıdaki denklemi y 'ye göre Sonlu Fourier Sinüs transformasyonu yazacak olursa,

$$\bar{f}_{ss}(m,n) = \mathcal{J}_s[\mathcal{J}_s\{f(x,y); x \rightarrow m\}; y \rightarrow n] \quad (7.5.2)$$

elde edilir ki, bunu açık olarak aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ss}[f(x,y); (x,y) \rightarrow (m,n)] &\equiv \bar{f}_{ss}(m,n) \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi f(x,y) \sin(mx) \sin(ny) dx dy \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

yazılabilir. (7.5.3) denklemi $f(x,y)$ fonksiyonun duble sonlu Fourier Sinüs transformasyonu olarak adlandırılabilir.

İnversi ise, (7.5.1) ve (7.5.2)'den

$$\bar{f}_s(m,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{ss}(m,n) \sin(ny) \quad (7.5.4)$$

dolayısıyla,

$$f(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_s(m,y) \sin(mx) \quad (7.5.5)$$

olarak bulunur.

(7.5.4) ve (7.5.5)' denklemlerinin birleştirdiği takdirde en son invers formülü,

$$\begin{aligned} f_{ss}^{-1}[\bar{f}_{ss}(m,n); (m,n) \rightarrow (x,y)] &\equiv f(x,y) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{ss}(m,n) \sin(mx) \sin(ny) \end{aligned} \quad (7.5.6)$$

olarak elde edilir.

Buraya kadar $f(x,y)$ fonksiyonun (x,y) noktasında sürekli olup $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ aralığında olduğunu farz ettik. Şimdi $f(x,y)$ fonksiyonun $0 < x < a$, $0 < y < a$ aralığında olduğunu düşünelim. Bunun için eğer $f(x,y)$ fonksiyonun double sonlu Fourier sinüs transformasyonu,

$$\begin{aligned} f_{ss}[f(x,y); (x,y) \rightarrow (m,n)] &\equiv f_{ss}(m,n) \\ &= \int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \end{aligned} \quad (7.5.7)$$

yazılabiliyorsa, bu durumda (7.5.7)'nin inversi,

$$\begin{aligned} f_{ss}^{-1}[\bar{f}_{ss}(m,n); (m,n) \rightarrow (x,y)] &\equiv f(x,y) \\ &= \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{ss}(m,n) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

olarak yazılabilir.

Benzer yoluya aşağıdaki çeşitli tiplerden double Fourier transformasyonu yazılabilir, şöyle ki,

$$\bar{f}_{cs}(m,n) \equiv f_{cs}[f(x,y);(x,y) \rightarrow (m,n)] = f_c[f_s\{f(x,y);y \rightarrow n\};x \rightarrow m] \quad (7.5.9)$$

$$\bar{f}_{sc}(m,n) \equiv f_{sc}[f(x,y);(x,y) \rightarrow (m,n)] = f_s[f_c\{f(x,y);y \rightarrow n\};x \rightarrow m] \quad (7.5.10)$$

$$\bar{f}_{cc}(m,n) \equiv f_{cc}[f(x,y);(x,y) \rightarrow (m,n)] = f_c[f_c\{f(x,y);y \rightarrow n\};x \rightarrow m] \quad (7.5.11)$$

Şu tiplerden double sonlu Fourier transformasyonlarının inversini, sonlu sinüs ve cosinüs inversleri gibi kolayca bulunabilir. Örnek olarak (7.5.9) denkleminin inversi,

$$\begin{aligned} f_{cs}^{-1}[\bar{f}_{cs}(m,n);(m,n) \rightarrow (x,y)] &\equiv f(x,y) \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{cs}(0,n) \sin(ny) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{cs}(m,n) \cos(mx) \sin(ny) \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

olarak bulunur.

Bir fonksiyonun kısmi türevlerini double sonlu Fourier transformasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir, şöyle ki, $f(x,y)$ 'nin $0 < x < a$, $0 < y < a$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_s \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; x \rightarrow m \right] &= \frac{m\pi}{a} \{f(0,y) + (-1)^{m+1}f(a,y)\} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} f_s[f(x,y);x \rightarrow m] \end{aligned}$$

olup buradan,

$$f_{ss} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; (x, y) \rightarrow (m, n) \right] = \Theta_1(m, n) - \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \bar{f}_{ss}(m, n)$$

$$\Theta_1(m, n) = \frac{m\pi}{a} \{ f_s[f(0, y); y \rightarrow n] + (-1)^{m+1} f_s[f(a, y); y \rightarrow n] \} \quad (7.5.13)$$

elde edilir. Özel durumlar için eğer,

$$f(0, y) = f(a, y) = 0, \quad 0 < y < b$$

ise, bu durumda (7.5.13) denklemi,

$$f_{ss} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; (x, y) \rightarrow (m, n) \right] = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \bar{f}_{ss}(m, n) \quad (7.5.14)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde yalnız bu kez $\partial^2 f / \partial y^2$ için yazarsak, bu takdirde,

$$f_{ss} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; (x, y) \rightarrow (m, n) \right] = \Theta_2(m, n) - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \bar{f}_{ss}(m, n)$$

$$\Theta_2(m, n) = \frac{n\pi}{b} [f_s[f(x, 0); x \rightarrow m] + (-1)^{n+1} f_s[f(x, b); x \rightarrow m]] \quad (7.5.15)$$

olarak elde edilir.

Yine özel bir durumda eğer,

$$f(x, 0) = f(x, b) = 0, \quad 0 < x < a$$

ise bu durumda (7.5.15) denklemi,

$$f_{ss} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; (x, y) \rightarrow (m, n) \right] = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \bar{f}_{ss}(m, n) \quad (7.5.16)$$

şeklini alır.

Bu sonuçlara göre

$$\begin{aligned} f_{ss}[\Delta_2 f(x, y); (x, y) \rightarrow (m, n)] \\ = \Theta_1(m, n) + \Theta_2(m, n) - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \bar{f}_{ss}(m, n) \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

olduğu kolayca yazılabilir. Özel bir durum için, eğer,

$$f(x,0) = f(x,b) = 0, \quad 0 < x < a$$

$$f(0,y) = f(a,y) = 0, \quad 0 < y < b$$

ise, bu takdirde (7.5.17) denklemini

$$f_{ss}[\Delta_2 f(x,y); (x,y) \rightarrow (m,n)] = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) f_{ss}(m,n) \quad (7.5.18)$$

olarak yazılabilir.

7.6. Sonlu Fourier Transformasyonun Uygulanması:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq a, t > 0 \quad (7.6.1)$$

dalga denklemini gözönüne alalım. Sınır koşulları ise,

$$u(0,t) = u(a,t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.6.2)$$

baştaki koşulları ise,

$$u(x,0) = \frac{4\varepsilon}{a^2} x(a-x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (7.6.3)$$

dir.

(7.6.2) denklemi, Sonlu Sinüs transformasyonunu tanıtmak için uygun olduğunu gösteriyor. Şöyle ki,

$$\bar{u}_s(n,t) = f_s[u(x,t); x \rightarrow n].$$

(7.6.2) denkleminden görülüyor ki, (7.6.1) dalga denklemi,

$\bar{u}_s(n,t)$ transformasyonu için aşağıdaki diferansiyel denk-

lemi,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{a^2} \right) \bar{u}_s(n,t) = 0$$

ile denktir.

(7.6.3) denkleminde görüldüğü gibi, $\bar{u}_s(n,t)$ olmak üzere, baştaki uygun koşullarını

$$\bar{u}_s(n,0) = \frac{8\epsilon a}{\pi^3} \frac{1}{n^3} [1 + (-1)^{n+1}], \quad \frac{\partial \bar{u}_s(n,0)}{\partial t} = 0$$

olarak yazılabilir. Ayrıca Sonlu sinüs transformasyonun çözümü için,

$$\bar{u}_s(n,t) = \frac{8\epsilon a}{\pi^3} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^3} \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \quad \text{dir.}$$

Sonlu sinüs transformasyonun inversinden yararlanarak, sonuçta,

$$u(x,t) = \frac{16\epsilon}{\pi^3} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1)^{-3} \cos\left(\frac{(2r+1)\pi ct}{a}\right) \sin\left(\frac{(2r+1)\pi x}{a}\right)$$

olarak bulunur.

7.7. Sonlu Sturm-Liouville Transformasyonu:

Daha önce Sonlu Fourier sinüs ve cosinüs transformasyonlarından faydalanarak sınırlanmış kapalı bir bölge içinde, basit sınır koşullar altında, bir sınır değer problemini nasıl çözülebileceğinizi gördük. Biraz düşünerek şu sonucu çıkarabiliriz ki, verilen bir sınır değer probleminin (7.6.1) ile (7.6.3) arasındaki koşullar altında, sonlu sinüs transformasyonunun uygulanması çok uygun, basit ve de hızlı olarak çözüme varabiliriz. Nedeni de, bu, $\sin(n\pi x/a)$ fonksiyonları,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \xi^2 z = 0, \quad z(0) = z(a) = 0$$

diferansiyel sisteminin bir öz fonksiyonudur.

Bu da bize şunu gösteriyor ki, farklı tip öz fonksiyonları ve özdeğerleri incelenmesiyle, çeşitli diferansiyel sistemleri üzerinde, sonlu transformasyonları meydana getirilebilir.

Bu düşünce ile hareket ederek, Eringen (1953) ve Churchill (1955) çok genel bir tip sonlu transformasyonlarından, bir teori geliştirdiler. Bu transformasyonu sonlu Sturm-Lioville transformasyonu olarak adlandırılmıştır. Matematiksel ve fiziksel sınır değer problemlerinin özel durumlarda, çözümünü bu transformasyonlara uygulanabiliriz. Eringen metodunun avantajı budur ki, tüm sınır değer problemlerinin analizinde transformasyonu seçmek uygundur.

$f(x)$ fonksiyonu sonlu (a,b) aralığında tanımlı olsun, Bu durumda aşağıdaki sonlu transformasyonu, şöyle ki,

$$\mathcal{T}[f(x);\xi] = \int_a^b p(x)K(x,\xi)f(x) dx \quad (7.7.1)$$

tanımlayalım. Burada $f(x)$ fonksiyonu ortogonal polinomlar teorisi gibi doğal bir ağırlık fonksiyonu anlamına gelir. $K(x, \xi)$ fonksiyonu ise, ξ 'nin her değeri için açık (a,b) aralığında x 'in fonksiyonu olur. Bu da bize $\mathcal{T}$ bir lineer operatör olduğunu gösterir. $K(x, \xi)$ çekirdeğinin formunu bulmak için, $\mathbf{L}z=0$ kendi adjoint diferansiyel denkleminin, çözümlerini arıyalım. Burada $\mathbf{L}$ lineer diferansiyel operatörü

$$\mathbf{L}z = \frac{1}{p(x)} \left\{ \frac{d}{dx} q(x) \frac{dz}{dx} \right\} + r(x)z(x) = 0 \quad (7.7.2)$$

öyle ki $q(x)$ ve $r(x) \in [a,b]$, ve her $x \in [a,b]$ için $q(x)/p(x) > 0$ olarak kabul ediyoruz.

Ayrıca $\mathbf{M}$ ve $\mathbf{N}$ sınır operatörleri,

$$\mathbf{M}f = a_1 f(a) + a_2 f'(a),$$

$$\mathbf{N}f = b_1 f(b) + b_2 f'(b) \quad (7.7.3)$$

şeklinde tanıtalım. Yukarıdaki denklemlerinde a_1, a_2, b_1, b_2 sabitler olmak üzere, a_1, a_2 lerde ve b_1, b_2 sabitlerden en az biri sıfırdan farklı olduğunu kabul ediyoruz.

Kısmi integrasyon formülü uygulanırken eğer $f \in [a, b]$ ise, bu durumda,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{\mathbf{L}f(x); \xi\} &= q(a)[K_x(a, \xi)f(a) - K(a, \xi)f'(a)] \\ &\quad - q(b)[K_x(b, \xi)f(b) - K(b, \xi)f'(b)] \\ &\quad + \int_a^b p(x)f(x)\mathbf{L}K(x, \xi) dx \end{aligned} \quad (7.7.4)$$

olduğu görülebilir.

Şimdi eğer $a_2 \neq 0$ ise,

$$K_x(a, \xi)f(a) - K(a, \xi)f'(a) = a_2^{-1}[f(a)\mathbf{M}K - K(a, \xi)\mathbf{M}f]$$

olup benzer şekilde $b_2 \neq 0$ ise, (7.7.4) denklemini aşağıdaki gibi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\mathbf{L}f(x); \xi] &= \int_a^b p(x)f(x)\mathbf{L}K(x, \xi) dx \\ &\quad + \frac{q(a)}{a_2}[f(a)\mathbf{M}K - K(a, \xi)\mathbf{M}f] \\ &\quad - \frac{q(b)}{b_2}[f(b)\mathbf{N}K - K(b, \xi)\mathbf{N}f] \end{aligned} \quad (7.7.5)$$

dağı uygun bir şekilde yazabiliriz.

Bu yüzden eğer $k(x, \xi)$ çekirdeğini bulabilirsek, öyle ki,

ξ ,

$$(\mathbf{L} - \xi)K(x, \xi) = 0, \quad \mathbf{M}K = \mathbf{N}K = 0 \quad (7.7.6)$$

ise, bu durumda

$$\mathcal{T}[\mathbf{L}f; \xi] = \xi \mathcal{T}[f; \xi] - a_2^{-1}q(a)K(a, \xi)\mathbf{M}f + b_2^{-1}q(b)K(b, \xi)\mathbf{N}f \quad (7.7.7)$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan eğer $a_2 = 0, a_1 \neq 0$ ise,

$$K_x(a, \xi)f(a) - K(a, \xi)f'(a) = a_1^{-1}q(a)[K_x(a, \xi)\mathbf{M}f - f'(a)\mathbf{M}K]$$

olup bu durumda (7.7.7) denkleminin ikinci teriminin

$$a_1^{-1}q(a)K_x(a, \xi)\mathbf{M}f$$

ile yer değiştirilebilir. $b_2 = 0, b_1 \neq 0$ olduğu zaman üçüncü teriminde benzer şekilde yer değiştirmeyi yapılabilir.

(7.7.7) denkleminde eğer $t \notin [a, b]$ ise, o zaman durum değişir. Örnek olarak farz edelim ki, $t \notin [a, b]$, $x=t$, $a < t < b$ noktasında $f'(x)$ 'in $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

Bu durumda $f'(t+) - f'(t-) = j(t)$ olur.

İkinci taraftaki (7.7.7) denkleminin,

$$q(a)[K_x(a, \xi)f(a) - K(a, \xi)f'(a)] - q(t)[K_x(t, \xi)f(t) - K(t, \xi)f'(t-)]$$

$$+ q(t)[K_x(t, \xi)f(t) - K(t, \xi)f'(t+)] - q(b)[K_x(b, \xi)f(b) - K(b, \xi)f'(b)]$$

şeklini alıp, kolayca görülebilir ki, (7.7.3) den dolayı,

$$a_2^{-1}q(a)[f(a)\mathbf{M}K - K(a, \xi)\mathbf{M}f] - b_2^{-1}q(b)[f(b)\mathbf{N}K - K(b, \xi)\mathbf{N}f] - q(t)K(t, \xi)j(t)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla (7.7.7)'nin

$$\mathcal{T}[\mathbf{L}f; \xi] = \xi \mathcal{T}[f; \xi] - a_2^{-1}q(a)K(a, \xi)\mathbf{M}f$$

$$+ b_2^{-1}q(b)K(b, \xi)\mathbf{N}f - q(t)K(t, \xi)j(t)$$

(7.7.8)

şekline dönüşür.

İkinci dereceden lineer diferansiyel denklemler teorisinden dolayı, biliyoruz ki (7.7.2) denkleminde $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ katsayıları belirli koşullar altında, (7.7.6) denkleminde ξ parametresine sonsuz sayıda değerler verilebilir ve her bir değer verildiğinde önemli çözümler elde edilir. Ayrıca bu özfonksiyonlarının kümesi (a, b) aralığında $p(x)$ ağırlık fonksiyonu ile ortogonaldır.

Bu yüzden, eğer Sturm-Liouville probleminde özfonksiyonlarının özdeğerlerini $\phi_n(x)$ ve ξ_n ile gösterirsek, ve de,

$$(L - \xi)\phi = 0, \quad M\phi = N\phi = 0 \quad (7.7.9)$$

ise, bu durumda,

$$\mathcal{T}[f; n] \equiv \tilde{f}_n = \int_a^b p(x)\phi_n(x)f(x) dx \quad (7.7.10)$$

olup, Sonlu transformasyonunda eğer $f \in [a, b]$ ise,

$$\mathcal{T}[Lf; n] = \xi_n \tilde{f}_n + \mu_n Mf + \nu_n Nf \quad (7.7.11)$$

özelliliğine sahiptir. Yukarıdaki denklem

$$\mu_n = \begin{cases} -a_2^{-1}q(a)\phi_n(a), & (a_2 \neq 0) \\ a_1^{-1}q(a)\phi'_n(a), & (a_2 = 0) \end{cases}$$

$$\nu_n = \begin{cases} b_2^{-1}q(b)\phi_n(b), & (b_2 \neq 0) \\ -b_1^{-1}q(b)\phi'_n(b), & (b_2 = 0) \end{cases}$$

şeklindedir.

İnvers formülü ise,

$$\mathcal{T}^{-1}[\tilde{f}_n; x] \equiv f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n \phi_n(x) \quad (7.7.12)$$

(7.7.11) denkleminde eğer $f \notin [a, b]$ ise, o zaman durum değişebilir.

Örnek olarak, daha önce yaptığımız gibi, $f(x) \in [a, b]$ ve $f'(x)$, $t \in (a, b)$ noktası dışında her yerde sürekli olsun. Bu takdirde,

$$\mathcal{T}[\mathbf{L}f; n] = \xi_n \tilde{f}_n + \mu_n \mathbf{M}f + \nu_n \mathbf{N}f - q(t) \phi_n(t) j(t) \quad (7.7.13)$$

olur.

$\mathcal{T}$ transformasyonu ile ilgili başka özel sonuçlar kolayca yazılabilir. Eğer $y(x)$ fonksiyonunu

$$\mathcal{T}[y(x); n] = \xi^{-1} \tilde{f}_n$$

şeklinde tanımlarsak, bu durumda eğer $\mathbf{M}y = \mathbf{N}y = 0$, $\xi_n y_n$, $\mathbf{L}y$ fonksiyonunun transformasyonu olur. Yani $y(x)$ fonksiyonu

$$\mathbf{L}y = f(x), \quad \mathbf{M}y = \mathbf{N}y = 0 \quad (7.7.14)$$

sınır değer probleminin çözümüdür.

Eğer (7.7.14) probleminin çözümü, $\mathbf{L}^{-1}f$ ile gösterirsek, görebilirizki (7.7.13) denklemi aşağıdaki denklemiyle,

$$\mathcal{T}[\mathbf{L}^{-1}f; n] = \xi_n^{-1} \tilde{f}_n \quad (7.7.15)$$

denktir.

7.8. Genelleştirilmiş Sonlu Fourier Transformasyonu:

Daha önceki yöntemlerin kullanılmasını açıklamak için, genelleştirilmiş Sonlu Fourier transformasyonundan başlamak üzere aşağıdaki diferansiyel operatörü,

$$\mathbf{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \xi^2 \quad (7.8.1)$$

gözönüne alalım.

Bunların birinci transformasyonlarının sınır operatörleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}y &= y'(0) \\ \mathbf{N}y &= hy(1) + y'(1) \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

gibidir. $\mathbf{L}y=0$ çözümünün, $\mathbf{M}y=0$ olduğundan

$$y(x) = \cos(\xi_n x) \quad (7.8.3)$$

dir. Bu çözüm için,

$$hy(x) + y'(x) = h \cos(\xi_n x) - \xi_n \sin(\xi_n x)$$

öyle ki $\mathbf{N}y=0$ durumunda, eğer ξ_n ler pozitif kökler olarak seçilmiş ise,

$$\xi \tan \xi = h \quad (7.8.4)$$

đaha iyi bir denklem elde edilir.

Eğer $\mathcal{T}_1 f$ transformasyonu aşağıdaki gibi,

$$f_1^*(n) \equiv \mathcal{T}_1[f(x);n] = \int_0^1 f(x) \cos(\xi_n x) dx \quad (7.8.5)$$

tanımlarsak, öyle ki ξ_n (7.8.5) denkleminin n 'inci merteye-+ den pozitif kökler ise, bu durumda $\mathcal{T}_1$ transformasyonun inversi,

$$\mathcal{T}_1^{-1}[f_1^*(n);x] \equiv f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_1^*(n) \cos(\xi_n x), \quad 0 < x < 1 \quad (7.8.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$c_n^{-1} = \int_0^1 \cos^2(\xi_n x) dx \quad \text{dir.} \quad (7.8.7)$$

Yani,

$$c_n = \frac{2h}{h + \sin^2 \xi_n} \quad (7.8.7)$$

dir.

Diğer taraftan eğer,

$$\mathbf{M}y = y(0) \quad , \quad \mathbf{N}y = hy'(1) + y''(1) \quad (7.8.8)$$

olarak ele alırsak, bu durumda,

$$f_2^*(n) \equiv \mathcal{T}_2[f(x);n] = \int_0^1 f(x) \sin(\xi_n x) dx \quad (7.8.9)$$

transformasyonu tanıtabiliriz. Burada yine ξ_n (7.8.4) denkleminin n'inci mertebeden pozitif köklerdir.

Bunun inversi ise,

$$\mathcal{T}_2^{-1}[f_2^*(n);x] \equiv f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f_2^*(n) \sin(\xi_n x) \quad (7.8.10)$$

öyle ki,

$$d_n = \frac{2h}{h - \sin^2 \xi_n} \quad (7.8.11)$$

dır.

Kısmi integrasyon formülünden yararlanarak,

$$\mathcal{T}_1[f'(x);n] = f(1) \cos \xi_n + \xi_n f_2^*(n) \quad (7.8.12)$$

$$\mathcal{T}_2[f'(x);n] = f(1) \sin \xi_n - \xi_n f_1^*(n) \quad (7.8.13)$$

$f'(x)$ 'in T_1 ve T_2 transformasyonları elde edilir.

Benzer şekilde $f''(x)$ 'in T_1 ve T_2 transformasyonları sırasıyla,

$$\mathcal{T}_1[f''(x);n] = [f'(1) + hf(1)] \cos \xi_n - \xi_n^2 f_1^*(n) \quad (7.8.14)$$

$$\mathcal{T}_2[f''(x);n] = f'(1) \sin \xi_n - f(1) \xi_n \cos \xi_n - \xi_n^2 f_2^*(n) \quad (7.8.15)$$

kolayca bulunur. Ayrıca eğer (7.8.13) denkleminde $f(x)$ 'i,

$$\int_x^1 f(t) dt \quad \text{ile değiştirirsek, bu durumda,}$$

$$\mathcal{T}_2[f(x);n] = \xi_n \mathcal{T}_1 \left[\int_x^1 f(t) dt; n \right] \quad (7.8.16)$$

elde edilir.

Uygulamalarda bu transformasyonların nasıl kullanıldığını bir örnek üzerine gösterelim. Bunun için $u(x,t)$ yay denklemini ele alalım. Denklem aşağıdaki gibi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \quad (7.8.17)$$

olup sınır koşulları ise,

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.8.18)$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + hu(1,t) = 0, \quad t > 0 \quad (7.8.19)$$

ve baştaki koşullar ise,

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (7.8.20)$$

dır. (7.8.18) ve (7.8.19) sınır koşullarına baktığımızda açıktır ki,

$$u_1^*(n,t) = \mathcal{T}_1[u(x,t); x \rightarrow n]$$

transformasyonunu kullanılması daha uygun olur. (7.8.12) denkleminin dolaylı hemen görülüyor ki (7.8.17) denklemi aşağıdaki

$$\frac{du_1^*}{dt} = -\kappa \xi_n^2 u_1^*$$

diferansiyel denklemi ile özdeşdir. Ayrıca, (7.8.20) başkati koşulu ile,

$$u_1^*(n,0) = f_1^*(n)$$

özdeşdir. Bu yüzden bu basit ilk değer probleminin çözümü,

$$u_1^*(n,t) = f_1^*(n) e^{-\kappa \xi_n^2 t}$$

olarak elde edilir. Şimdi $u(x,t)$ 'nin çözümü ise, (7.8.6)

invers formülünü kullanarak,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_1^*(n) e^{-\kappa \xi_n^2 t} \cos(\xi_n x)$$

bulunur.

7.9. Sonlu Hankel Transformasyonları:

(7.7.2) denkleminde

$$p(x) = x, \quad q(x) = x, \quad r(x) = -v^2 x^{-2} \quad (7.9.1)$$

alınırsa, bu durumda

$$\mathbf{L} = \mathcal{B}_v \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{v^2}{x^2} \quad (7.9.2)$$

Lineer operatörü elde edilir ki buna sonlu Hankel transformasyonu adı verilir. Eğer (7.7.6) denkleminde $\xi = -\lambda^2$, yazarsak, bu durumda

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{v^2}{x^2} \right) = 0 \quad (7.9.3)$$

Bessel denklemi elde edilir ki, bunun genel çözümü,

$$\phi(\lambda, x) = c_1(\lambda) J_v(\lambda x) + c_2(\lambda) Y_v(\lambda x) \quad (7.9.4)$$

dir.

Tabi ki λ 'yi her hangi bir sınır değer probleminde **M** ve **N** operatörlerine bağlı uygun değerler verilir.

Şimdi bazı ayrıntılı durumlarını inceleyelim.

Durum (a): $0 \leq x \leq a, \quad \mathbf{N}f = f.$

Bu durumda (7.9.3) denkleminin çözümü

$$\phi_n(x) = J_v(\xi_n x), \quad (v \geq 0) \quad (7.9.5)$$

olması lazım. Burada $\xi_1, \xi_2, \dots$

$$J_v(\xi a) = 0$$

denkleminin pozitif kökleridir.

Bu durumda (7.7.10) transformasyonu

$$\bar{f}_{1,v}(n) \equiv h_{1,v}[f(x);n] = \int_0^a x f(x) J_v(\xi_n x) dx; \quad (7.9.6)$$

şeklini alır ki buna birinci tip sonlu Hankel transformasyonu adı verilir. Birinci tip Bessel fonksiyonunun,

$$\int_0^a x J_v(\xi_m x) J_v(\xi_n x) dx = \frac{1}{2} a^2 \{J_{v+1}(\xi_n a)\}^2 \delta_{mn} \quad (7.9.7)$$

olduğundan, (7.9.6) transformasyonun inversini

$$h_{1,v}^{-1}[\bar{f}_{1,v}(n);x] \equiv f(x) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{1,v}(n) \frac{J_v(\xi_n x)}{[J_{v+1}(\xi_n a)]^2} \quad (7.9.8)$$

şeklinde bulunabilir.

Kısmi integrasyondan görüyoruz ki,

$$h_{1,v}[f'(x);n] = [x f(x) J_v(\xi_n x)]_0^a - \int_0^a f(x) \frac{\partial}{\partial x} \{x J_v(\xi_n x)\} dx \quad \text{dir.}$$

Eğer $v \geq 0$ olduğunu farz edersek, bu durumda $x=0$ noktasında $f(x)$ sonludur, dolayısıyla köşeli parantez içindeki ifade alt sınır için değeri sıfır olur. Aynı şekilde üst sınır için ξ_n seçiminde $f(a)$ sonlu olduğundan değeri sıfır olur, ikinci terim için

$$\frac{\partial}{\partial x} \{x J_v(\xi_n x)\} = \frac{v+1}{2v} \xi_n x J_{v-1}(\xi_n x) - \frac{v-1}{2v} \xi_n x J_{v+1}(\xi_n x), \quad (v \neq 0) \quad (7.9.9)$$

olup dolayısıyla,

$$h_{1,v}[f'(x);n] = \frac{v+1}{2v} \xi_n \bar{f}_{1,v-1}(n) - \frac{v-1}{2v} \xi_n \bar{f}_{1,v+1}(n), \quad (v \neq 0) \quad (7.9.10)$$

bulunur. $v = 0$ olduğundan durum biraz farklı olacaktır. Şöyle ki (7.9.9)'da $v = 0$ ise,

$$\frac{\partial}{\partial x} \{x J_0(\xi_n x)\} = J_0(\xi_n x) - \xi_n x J_1(\xi_n x)$$

olup,

$$h_{1,0}[f'(x);n] = h_{1,0}[x^{-1}f(x);n] - \xi_n h_{1,1}[f(x);n] \quad (7.9.11)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$J_{v-1}(x) - \frac{2v}{x} J_v(x) + J_{v+1}(x) = 0, \quad (v \neq 0) \quad (7.9.12)$$

olduğundan, hemen,

$$h_{1,v}[x^{-1}f(x);n] = \frac{\xi_n}{2v} \{\bar{f}_{1,v-1}(n) + \bar{f}_{1,v+1}(n)\}, \quad (v \neq 0) \quad (7.9.13)$$

bağıntısı yazılabilir.

(7.7.7)' den dolayı,

$$h_{1,v}[\mathcal{B}_v f; n] = -a \xi_n f(a) J'_v(\xi_n a) - \xi_n^2 \bar{f}_{1,v}(n)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada,

$$J'_v(\xi_n a) = -J_{v+1}(\xi_n a) \quad (7.9.14)$$

olduğundan,

$$h_{1,v}[\mathcal{B}_v f; n] = a \xi_n f(a) J_{v+1}(\xi_n a) - \xi_n^2 \bar{f}_{1,v}(n) \quad (7.9.15)$$

olarak elde edilir.

Ayrıca dönüm formülünden dolayı,

$$\frac{d}{dx} \{x^v J_v(x)\} = x^v J_{v-1}(x) \quad (7.9.16)$$

olup, kısmi integrasyon kuralına göre, hemen,

$$h_{1,v}[x^{v-1}f'(x);n] = -\xi_n h_{1,v-1}[x^{v-1}f(x);n], \quad (v > 0) \quad (7.9.17)$$

olarak yazılabilir.

Özel bir durum için, eğer $v = 1$ olarak alınırsa, bu durumda

$$h_{1,1}[f'(x);n] = -\xi_n \bar{f}_{1,0}(n) \quad (7.9.18)$$

elde edilir.

Birinci tip sonlu Hankel transformasyonunun kullanılmasını açıklamak için, yay denkleminin silindirik koordinatlarda, yani,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (t \geq 0, 0 \leq r \leq a) \quad (7.9.19)$$

$\theta(r,t)$ fonksiyonunun çözümünü bulalım.

Burada sınır koşulları,

$$\theta(a,t) = f(t), \quad (t \geq 0) \quad (7.9.20)$$

olup baştaki koşul ise,

$$\theta(r,0) = 0, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (7.9.21)$$

dır.

$$\bar{\theta}_n(t) = h_{1,0}[\theta(r,t);r \rightarrow n]$$

transformasyonu ele alalım. (7.9.19)'den dolayı,

$$h_{1,0} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}; r \rightarrow n \right] = a \xi_n J_1(\xi_n a) f(t) - \xi_n^2 \bar{\theta}_n(t)$$

olup $\bar{\theta}_n(t)$ transformasyonu aşağıdaki diferansiyel denkleme,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa \xi_n^2\right) \theta_n(t) = \kappa a \xi_n J_1(\xi_n a) f(t)$$

karşı gelir. (7.9.21) denkleminde dolaylı görülüyorki

$$\bar{\theta}_n(0) = 0,$$

olur. Buradan hemen,

$$\bar{\theta}_n(t) = \kappa a \xi_n J_1(\xi_n a) c_n(t) \quad (7.9.22)$$

elde edilir. Öyle ki,

$$c_n(t) = \int_0^t f(u) e^{-\kappa \xi_n^2(t-u)} du$$

yazılabilir. (7.9.8) invers denkleminde yararlanarak, (7.9.22) denkleminin,

$$\theta(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \xi_n \frac{J_0(\xi_n r)}{J_1(\xi_n a)}$$

olarak $\theta(r, t)$ fonksiyonu bulunur.

Durum (b): $0 \leq x \leq a$, $\mathbf{N}f = f'(a) + hf(a)$.

Bu durumda yine (7.9.3)'ün çözümü $J_v(\xi_n x)$, ($v \geq 0$), olması gerek, yalnız $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ler

$$\xi_n J'_v(\xi_n a) + h J_v(\xi_n a) = 0 \quad (7.9.23)$$

denkleminin pozitif sıfırlardır ve de ikinci tip sonlu Hankel transformasyonu,

$$\bar{f}_{2,v}(n) \equiv h_{2,v}[f(x); n] = \int_0^a x f(x) J_v(\xi_n x) dx \quad (7.9.24)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ξ_n (7.9.23) denkleminin n'inci pozitif köküdür. Ortogonal durum Bessel Fonksiyonları,

$$\int_0^a x J_v(\xi_m x) J_v(\xi_n x) dx = \frac{1}{2} a^2 \left(1 + \frac{h^2 - v^2/a^2}{\xi_n^2} \right) \{J_v(\xi_n a)\}^2 \delta_{mn} \quad (7.9.25)$$

olduğundan dolayı $h_{2,v}$ invers formülü,

$$h_{2,v}^{-1}[\bar{f}_{2,v}(n); x] \equiv f(x)$$

$$\frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_{2,v}(n) \frac{\xi_n^2 J_v(\xi_n x)}{(\xi_n^2 + h^2 - v^2/a^2) \{J_v(\xi_n a)\}^2} \quad (7.9.26)$$

olacak şekilde bulunur.

$h_{2,v}$ operatörünün özellikleri benzer yoluyla aynen $h_{1,v}$ gibi kurulabilir. Bunun için, aşağıdaki ilişkilerini yazılabilir, şöyle ki,

$$h_{2,v}[f'(x); n] = af(a)J_v(\xi_n a) + \frac{v+1}{2v} \xi_n \bar{f}_{2,v-1}(n) - \frac{v-1}{2v} \xi_n \bar{f}_{2,v+1}(n) \quad (7.9.27)$$

$$h_{2,0}[f'(x); n] = af(a)J_0(\xi_n a) + h_{2,0}[x^{-1}f(x); n] - \xi_n \bar{f}_{2,1}(n) \quad (7.9.28)$$

$$h_{2,v}[x^{-1}f(x); n] = \frac{\xi_n}{2v} \{\bar{f}_{1,v-1}(n) + \bar{f}_{1,v+1}(n)\}, \quad (v > 0) \quad (7.9.29)$$

$$h_{2,v}[x^{v-1}f'(x); n] = a^v J_v(\xi_n a) f(a) - \xi_n h_{2,v-1}[x^{v-1}f(x); n], \quad (v > 0) \quad (7.9.30)$$

$$h_{2,v}[\mathcal{B}_v f; n] = -\xi_n^2 \bar{f}_{2,v}(n) + a J_v(\xi_n a) \{f'(a) + hf(a)\} \quad (7.9.31)$$

İkinci tip sonlu Hankel transformasyonunun kullanılmasını açıklamak için (7.9.19) denkleminin çözümünü bulalım. Yalnız bu kez sınır koşulları,

$$\frac{\partial \theta(a, t)}{\partial r} + h\theta(a, t) = 0, \quad (t \geq 0) \quad (7.9.32)$$

$$\theta(r, 0) = f(r), \quad (0 \leq r \leq a) \quad (7.9.33)$$

olur. Eğer, aşağıdaki transformasyonu,

$$\bar{\theta}_n(t) = \mathcal{H}_{2,0}[\theta(r, t); r \rightarrow n]$$

olarak tanımlarsak, o zaman (7.9.31) ve (7.9.32) den dolayı görüyoruz ki,

$$\mathcal{H}_{2,0} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}; r \rightarrow n \right] = -\xi_n^2 \bar{\theta}_n$$

dolayısıyla $\bar{\theta}_n$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa \xi_n^2 \right) \bar{\theta}_n(t) = 0$$

diferansiyel denkleminin karşı gelir. Ayrıca (7.9.33)'den dolayı,

$$\bar{\theta}_n(0) = \bar{f}_{2,0}(n) \equiv \mathcal{H}_{2,0}[f(r); n]$$

dolayısıyla,

$$\bar{\theta}_n(t) = \bar{f}_{2,0}(n) e^{-\kappa \xi_n^2 t}$$

olarak bulunur. Bu yüzden $\theta(r, t)$ fonksiyonu,

$$\theta(r, t) = \mathcal{H}_{2,0}^{-1}[\bar{f}_{2,0}(n) e^{-\kappa \xi_n^2 t}; n \rightarrow r]$$

şeklinde yazılması gerekir. (7.9.26)' denkleminde $\nu = 0$ alınırsa, görüldüğü gibi yukarıdaki denklem,

$$\theta(r, t) = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 J_\nu(\xi_n r)}{(\xi_n^2 + h^2) [J_\nu(\xi_n a)]^2} e^{-\kappa \xi_n^2 t} \int_0^a u f(u) J_\nu(\xi_n u) du$$

ile özdeşdir.

Durum (c): $a \leq x \leq b$, $\mathbf{M}f = f(a)$, $\mathbf{N}f = f(b)$.

Bu durumda (7.9.3) denkleminin çözümü,

$$\phi_n(x) = J_v(\xi_n x) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x) \quad (7.9.34)$$

olması gerek, öyle ki ξ_n aşağıdaki denkleminin

$$J_v(\xi_n b) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n b) = 0 \quad (7.9.35)$$

bir köküdür. Bunun için üçüncü tip sonlu Hankel transformasyonu,

$$\begin{aligned} \bar{f}_{3,v}(n) &\equiv h_{3,v}[f(x); n] \\ &= \int_a^b x f(x) [J_v(\xi_n x) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)] dx \end{aligned} \quad (7.9.36)$$

denklemleri ile tanımlıyoruz. (7.9.34) denkleminde $\phi_m(x)$ fonksiyonu için,

$$\int_a^b x \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \frac{2}{\pi^2 \xi_n^2} \frac{\{J_v(\xi_n a)\}^2 - \{J_v(\xi_n b)\}^2}{\{J_v(\xi_n b)\}^2} \delta_{mn}$$

yazılabileceğinden dolayı, $h_{3,v}$ operatörü için invers teoremi,

$$\begin{aligned} h_{3,v}^{-1}[\bar{f}_{3,v}(n); x] &\equiv f(x) = \frac{1}{2} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 J_v^2(\xi_n b) \bar{f}_{3,v}(n)}{\{J_v(\xi_n a)\}^2 - \{J_v(\xi_n b)\}^2} \times \\ &\times [J_v(\xi_n x) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)] \end{aligned} \quad (7.9.37)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca (7.7.7)'den dolayı,

$$h_{3,v}[\mathcal{B}_v f(x); n] = \frac{2 J_v(\xi_n a)}{\pi J_v(\xi_n b)} f(b) - \frac{2}{\pi} f(a) - \xi_n^2 \bar{f}_{3,v}(n) \quad (7.9.38)$$

şeklinde çok kullanılan bir ilişki bulunabilir.

Durum (δ): $a \leq x \leq b$, $\mathbf{M}f = f'(a)$, $\mathbf{N}f = f(b)$.

(7.9.3) 'ün uygun çözüm,

$$\phi_n(x) = J_v(\xi_n x) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x) \quad (7.9.39)$$

öyle ki, ξ_n ,

$$J_v(\xi_n b) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n b) = 0 \quad (7.9.40)$$

denkleminin bir köküdür.

(7.9.39) ile (7.9.40) denklemlerinden, tanımlanan $\phi_n(x)$ fonksiyonunu,

$$\int_a^b x \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \frac{2}{\pi^2 \xi_n^2} \left[\frac{\{J'_v(\xi_n a)\}^2}{\{J_v(\xi_n b)\}^2} - \left(1 - \frac{v^2}{\xi_n^2 a^2}\right) \right] \delta_{mn}$$

olduğunu kolayca gösterilebilir. Bu yüzden dördüncü tip sonlu Hankel transformasyonun $h_{4,v}$ operatörü, öyle ki,

$$h_{4,v}[f(x); n] \equiv \bar{f}_{4,v}(n)$$

$$\int_a^b x f(x) [J_v(\xi_n x) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)] dx$$

(7.9.41)

olan inversi,

$$f(x) \equiv h_{4,v}^{-1}[\bar{f}_{4,v}(n); x]$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 \{J_v(\xi_n b)\}^2 \bar{f}_{4,v}(n)}{\{J'_v(\xi_n a)\}^2 - (1 - v^2/\xi_n^2 a^2) \{J_v(\xi_n b)\}^2} \times$$

$$\times [J_v(\xi_n x) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)]$$

(7.9.42)

elde edilir. Burada ξ_n (7.9.40) denkleminin n'inci pozitif köküdür.

Bu durumda (7.7.7) denkleminin

$$h_{4,v}[\mathcal{B}_v f(x); n] = -\xi_n^2 \bar{f}_{4,v}(n) - \frac{2}{\pi \xi_n} f'(a) + \frac{2 J'_v(\xi_n a)}{\pi J_v(\xi_n b)} f(b) \quad (7.9.43)$$

şeklini alır.

$$\text{Durum (e):} \quad a \leq x \leq b, \quad \mathbf{M}f = f(a), \quad \mathbf{N}f = f(b).$$

Bu durum, son duruma çok benzerdir. Onun için, beşinci tip sonlu Hankel transformasyonun,

$$\begin{aligned} h_{5,v}[f(x); n] &\equiv \bar{f}_{5,v}(n) \\ &= \int_a^b x f(x) [J_v(\xi_n x) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)] dx \end{aligned} \quad (7.9.44)$$

şeklini alır. Burada ξ_n ,

$$J_v(\xi_n a) Y'_v(\xi_n b) - J'_v(\xi_n b) Y_v(\xi_n a) = 0 \quad (7.9.45)$$

denkleminin n'inci kökü olur. İnversi ise,

$$\begin{aligned} h_{5,v}^{-1}[\bar{f}_{5,v}(n); x] &\equiv f(x) \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 \{J_v(\xi_n a)\}^2 \bar{f}_{5,v}(n)}{(1 - v^2/\xi_n^2 b^2) \{J_v(\xi_n a)\}^2 - \{J'_v(\xi_n b)\}^2} \times \\ &\quad \times [J_v(\xi_n x) Y_v(\xi_n a) - J_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)] \end{aligned} \quad (7.9.46)$$

olarak yazılabilir.

(7.9.43) denklemi gibi,

$$h_{5,v}[\mathcal{B}_v f(x); n] = -\xi_n^2 \bar{f}_{5,v}(n) + \frac{2}{\pi \xi_n} f'(b) - \frac{2 J'_v(\xi_n b)}{\pi J_v(\xi_n a)} f(a) \quad (7.9.47)$$

ifadesi yazılabilir.

Durum (f): $a \leq x \leq b$, $\mathbf{M}f = f'(a)$, $\mathbf{N}f = f'(b)$.

Bu durum için uygun özfonksiyon,

$$\phi_n(x) = J_v(\xi_n x) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x) \quad (7.9.48)$$

olarak yazılır. ξ_n ise,

$$J'_v(\xi_n b) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y'_v(\xi_n b) = 0 \quad (7.9.49)$$

denkleminin n'inci pozitif köküdür. Dolayısıyla, altınca tip sonlu Hankel transformasyonu,

$$\begin{aligned} h_{6,v}[f(x); n] &\equiv \bar{f}_{6,v}(n) \\ &= \int_a^b x f(x) \{J_v(\xi_n x) Y'_v(\xi_n a) - J'_v(\xi_n a) Y_v(\xi_n x)\} dx \end{aligned} \quad (7.9.50)$$

şeklinde yazılır. Daha önce yapıldığı gibi, yine

$$\begin{aligned} \int_a^b x \phi_m(x) \phi_n(x) dx \\ = \frac{2}{\pi^2 \xi_n^2} \delta_{mn} \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{\xi_n^2 b^2}\right) \left[\frac{J'_v(\xi_n a)}{J'_v(\xi_n b)}\right]^2 - \left(1 - \frac{v^2}{\xi_n^2 a^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

olduğuna göre, altınca tip sonlu Hankel transformasyonun inversi,

$$\begin{aligned} h_{6,v}^{-1}[\bar{f}_{6,v}(n); x] &\equiv f(x) \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{J'_v(\xi_n b)\}^2 \bar{f}_{6,v}(n) \phi_n(x)}{(1 - v^2/\xi_n^2 b^2) \{J'_v(\xi_n a)\}^2 - (1 - v^2/\xi_n^2 a^2) \{J'_v(\xi_n b)\}^2} \end{aligned} \quad (7.9.51)$$

şeklinde elde edilir.

7.10. Sonlu Legendre Transformasyonu:

İlk defa Tranter (1951) ve Churchill (1954) tarafından aşağıdaki gibi,

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx}, \quad -1 \leq x \leq 1$$

diferansiyel operatörün üzerine sonlu transformasyonları ortaya konmuştur. Burada uygun özfonksiyonları, $p_n(x)$ ' Legendre polinomlarıdır. ξ de 7-2'de gördüğümüz gibi $\xi = -n(n+1)$ ($n=0,1,\dots,k$)'dir.

Sonlu Legendre transformasyonu,

$$\bar{f}_n(n) \equiv \ell[f(x);n] = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (7.10.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, olduğundan,

$$\bar{f}_n(0) = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (7.10.2)$$

$$\bar{f}_n(1) = \int_{-1}^1 x f(x) dx. \quad (7.10.3)$$

Özel durumları hemen elde edilebilir. Ayrıca,

$$\ell[f'(x);0] = f(1) - f(-1) \quad (7.10.4)$$

$$\ell[f'(x);1] = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (7.10.5)$$

kolayca bulunabilir.

(7.10.5)'de $f(x)$ yerinde $f'(x)$ yazıp (7.10.4) denklemini kullanarak, $-x = (-1)^n P_n(x)$, olduğundan,

$$\ell[f''(x);1] = f''(1) + f''(-1) - f(1) + f(-1) \quad (7.10.6)$$

denklemini bulunabilir.

İyi tanımlı ortogonal özelliği, Legendre polinomları için,

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (7.10.7)$$

olduğundan dolayı,

$$\ell[P_m(x);n] = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn} \quad (7.10.8)$$

formunda yazılabilir.

Eğer $m=0$ olarak alınırsa, c sabit olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \ell[c;0] &= 2c, \\ \ell[c;n] &= 0, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (7.10.9)$$

özellikleri yazılabilir.

İnvers formülü ise,

$$\ell^{-1}[\tilde{f}_l(n);x] = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) \tilde{f}_l(n) P_n(x) \quad (7.10.10)$$

şeklinde olur.

Sonlu Legendre transformasyonun diğer özel işlemleri, Legendre polinomunun temel işlemlerinden beren çıkartılabilir. Örnek olarak,

$$\ell[f(-x);n] = \int_{-1}^1 f(-x)P_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x)P_n(-x) dx$$

yazıp $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, olduğundan,

$$\ell[f(-x);n] = (-1)^n \bar{f}_l(n) \quad (7.10.11)$$

olarak elde edilir. Alternatif formunda genelde

$$\ell^{-1}[(-1)^n \bar{f}_l(n);x] = f(-x) \quad (7.10.12)$$

daha çok kullanılan bir sonuçtur.

Ayrıca, (7.7.7) denkleminde dolayı,

$$\ell \left[\frac{d}{dx} (1-x^2) f'(x); n \right] = -n(n+1) \bar{f}_l(n) \quad (7.10.13)$$

sonucu, $x = \pm 1$ noktasında $(1-x^2)f'(x)$ ve $(1-x^2)f''(x)$ almamak koşuluyla elde edilebilir.

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)$$

rekürans bağıntısından, hemen,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) P_n(x) dx &= (2n+1)^{-1} [g(x) \{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\}]_{-1}^1 \\ &\quad - (2n+1)^{-1} \int_{-1}^1 g'(x) \{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\} dx \end{aligned}$$

denklemini yazılabilir. Yani,

$$\ell[g(x);n] = (2n+1)^{-1} \{ \ell[g'(x);n-1] - \ell[g'(x);n+1] \} \quad (7.10.14)$$

olur.

Genel olarak

$$\ell \left[\int_{-1}^x f(t) dt; n \right] = (2n+1)^{-1} \{ \bar{f}_l(n-1) - \bar{f}_l(n+1) \} \quad (7.10.15)$$

yazılabilir.

(7.10.14) denklemini tekrarlanarak ve de (7.10.4) ile (7.10.5) denklemlerinden faydalanarak, aşağıdaki denklemleri

$$\ell[f'(x); 2m] = f(1) - f(-1) - \sum_{r=0}^{m-1} (4m - 4r - 1) \bar{f}_l(2m - 2r - 1) \quad (7.10.16)$$

$$\ell[f'(x); 2m + 1] = f(1) + f(-1) - \sum_{r=0}^m (4m - 4r + 1) \bar{f}_l(2m - 2r). \quad (7.10.17)$$

bulunabilir.

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

rekuranse bağıntısından hemen,

$$\ell[xf(x); n] = (2n + 1)^{-1} \{ (n + 1) \bar{f}_l(n + 1) + n \bar{f}_l(n) \} \quad (7.10.18)$$

sonucu çıkartılabilir. Bunu tekrarlarlarken aşağıdaki bağıntı,

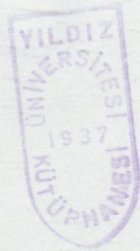
$$\begin{aligned} \ell[x^2 f(x); n] &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{(2n + 1)(2n + 3)} \bar{f}_l(n + 2) + \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n - 1)(2n + 3)} \bar{f}_l(n) \\ &+ \frac{n(n - 1)}{(2n - 1)(2n + 1)} \bar{f}_l(n - 2) \end{aligned}$$

bulunabilir.

(7.10.19)

KAYNAKLAR

1. The Use of Integral Transforms
(Lan N.Sneddon).
2. Discrete ve Fast Fourier Transformasyonu
(Prof.Dr.Akın TAŞDİZEN, Doçentlik tezi).
3. Bessel Fonksiyonları ve Fourier-Bessel açılımı
(Doç.Dr.Mücella Koçer, Yeterlilik çalışması).
4. Operasyonel Hesap dersleri (Prof.Yaşar Özdemir).
5. Finit Hankel Transforms (Sneddon)
6. Fourier Transforms (Sneddon)
7. İntegral Transforms in Mathematical Physics (C.J.Tranter)
8. On the Finite Hilbert Transformation (F.G.Tricomi)
9. İntegral Transforms (J.W.Miles)
10. The Laplace Transform (F.D.Murnaghan)
11. On a Generalization of Bessel Functions (M.N.Olevskii)



ÖZGEÇMİŞ

1960 İran/Tahran doğumluyum. İlk, orta ve lise öğrenimi Tahran'da, matematik ve fizik bölümü üzerinde tamamladım. 1985 yılında Yıldız Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümüne girmeye hak kazandım. 1989 yılında Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne matematik mühendisliği anabilim dalı olarak yüksek lisansa başladım ve halen devam etmekteyim.

Mat.Müh.SAEİD SHAGHOLİ

