YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lineer Fark Denk. ve Hip.. Denk. Gen. Durum

Yüksek Lisans Tezi

Meral Tosun

1990

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE HİPERGEOMETRİK DENKLEMİN GENEL DURUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ. GÖR. MERAL TOSUN

İSTANBUL - 1990

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER FARK DENKLEMLERİ VE HİPERGEOMETRİK DENKLEMİN GENEL DURUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ. GÖR. MERAL TOSUN

TEZİ YÖNETEN

PROF. YAVUZ AKSOY

İSTANBUL - 1990

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I - LİNEER FARK DENKLEMLERİ

TANIM -1
TANIM -2
TANIM -3 Toplamanın Tanımı

1.1 SABİT KATSAYILI HOMOJEN FARK DENKLEMLERİ
1.Durum : Köklerin reel ve birbirinden farklı olması hali
2.Durum : Katlı kök olması hali
3.Durum : Bazı köklerin kompleks hali
1.2 LİNEER BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLER
Teorem -1
Teorem -2
1.3 HOMOJEN OLMAYAN LİNEER FARK DENKLEMLERİ
1.3.1 Özel Çözüm Bulma Yöntemleri
a- Belirsiz Katsayılar Yöntemi
b- Özel Operatör Yöntemi
c- Parametrelerin Değişimi Yöntemi
d- Mertebe Düşürme Yöntemi
e- Genel Fonksiyonlar Yöntemi
1.4 DEĞİŞKEN KATSAYILI LINEER FARK DENKLEMLERI
1- Çarpanlara Ayırma
2- Parametrelerin Değişimi
3- Genel Fonksiyonlar

BÖLÜM II - BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEMLER
GAMA FONKSİYONU

2.1 HOMOJEN DENKLEMLER
2.2 GAMA FONKSİYONU
2.3 GAMA FONKSİYONUNUN UYGULAMALARI
ALLIED FONKSİYONLARI
2.4 BİRİNCİ MERTEBEDEN GENEL DENKLEM

BÖLÜM III- HİPERGEOMETRİK DENKLEMLER
GENEL DURUM

3.1 Hipergeometrik Fark Denklemi
3.2 Formel Kuvvet Seri Çözümleri
3.3 Matris Kullanımı
3.4 Integral ve Seri Çözümleri
3.5 İndirgenebilir Denklemler

KAYNAKÇA

ÖZET

Lineer Fark denklemleri ile ilgili önemli gelişmeler 1920 yılından sonra olmuştur. Bir çok alanda uygulaması olan bu konu, Lineer diferansiyel denklemlerle ilgili çalışmalardan sonra ihmal edilmiştir. Bu nedenle çoğu problem hala çözüm aşamasındadır.

Bu konuda çalışan Nörlund, Carmichael, Birkhoff, Poincare, Lineer homogen Fark denklemlerinin analitik çözümlerinin varlığını ve bu denklemlerin özelliklerini değişik yollarla ispatlamışlardır.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde Farklar ile ilgili tanımlar ve Fark denklemlerinin genel çözümleri verilmiştir.

İkinci bölüm, I. mertebeden Fark denklemi olan Gama fonksiyonlarını içermektedir.

Üçüncü bölüm, Lineer katsayılı II. mertebeden Lineer homogen denklem olan Hipergeometrik Fark denkleminin genel durumunu içerir. Bu bölümde Fark denklemlerinin Hipergeometrik seriler şeklinde de çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir.

SUMMARY

Some important developments has been gained related to linear difference equations since 1920. This subject having many applications in many field, has been neglected after the studies connected with linear differansiel equations. Therefore many problems are still under invetigetion.

Nörlund, Carmichael, Birkhoff, Poincare have studied on this subject. They have proved the existence of the analitical solution of the linear homogen difference equations and the properties of this equations with different ways.

This work consist of three sections. In the first, the identifications connected with difference and the general solutions of difference equations have been given.

The second section contains Gamma funtion that is difference equation of the first order.

The third section contains general case of Hypergeometric difference equation that is linear homogen of the second order with linear coefficients.

BÖLUM I

TANIM-1

x bağımsız değişken, y bağımlı değişken olmak üzere x, y değişkenlerini ve bağımlı değişkenin Δy, $\Delta^2 y, \ldots, \Delta^n y$ gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

n-nci mertebeden genel lineer fark denklemi $a_0(x)\neq 0$ olmak üzere

(1) $a_0(x)y(x+n)+a_1y(x+n-1)+\ldots+a_n(x)y(x) = b(x)$

şeklinde yazılır.

TANIM-2

Fonksiyonun tanım bölgesindeki bir noktadan hareket ederek bölgenin diğer bir noktasına geçişte fonksiyonun değerinin değişmesine o fonksiyonun farkı denir.

y verilen bir fonksiyon ve h herhangi bir sabit olduğunda Δy 'ye y'nin ilk farkı denir ve

$$\Delta y(x) = y(x+h)-y(x)$$

ile gösterilir. y(x)'in ikinci farkı

$$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y(x)) = y(x+2h)-2y(x+h)+y(x)$$

şeklindedir. Benzer şekilde devam edilirse n-nci fark

$$\Delta^n y(x) = y(x+nh)-ny(x+nh-1)+\frac{n(n-1)}{2}y(x+nh-2)-\ldots+(-1)^n y(x)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler h=1 için düzenlenirse

$$y(x+1) = y(x)+\Delta y(x)$$

$$y(x+2) = y(x)+2\Delta y(x)+\Delta^2 y(x)$$

....

$$y(x+n) = y(x)+n\Delta y(x)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y(x)+\ldots+\Delta^n y(x)$$

elde edilir ve bu denklemler (1) denkleminde yerleştirilirse

(2) $a_0(x)\Delta^n y(x)+a_1(x)\Delta^{n-1}y(x)+\ldots+a_n(x)y(x) = b(x)$

denklemi elde edilir.

(1) ya da buna eşit olan (2) denklemi gibi bir tek denklem yerine $y_i(x)$ fonksiyonları ile kurulan bir sistem ile çalışmak daha kolaydır. $y_1(x+1), y_2(x+1), \ldots, y_n(x+1)$ fark denklemini oluşturan fonksiyonlar ve $i=1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$(3) \qquad y_i(x+1) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(x) + b_i(x)$$

şeklindeki ifade fark denklemini oluşturan $y_i(x)$ fonksiyonu ile kurulmuş bir sistemi temsil eder. Bu sistemde a_{ij} sabit katsayı; $b_i(x)$, x'in herhangi bir fonksiyonu ve $y_j(x)$ ise

$$y_j(x) = y(x+j) = y(x) + n\Delta y(x) + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 y(x) + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-j+1)}{j!}\Delta^j y(x) + \ldots + \Delta^n y(x)$$

anlamında kullanılmıştır. Bu şekilde düzenlenen sistemin lineer olma özelliğinin yanısıra denklem ve bilinmeyen sayısı birbirine eşitir. Burada $i=1,2,\ldots,n$, sistemdeki fonksiyonların sayısını; $j=1,2,\ldots,n$ ise sistemdeki denklem sayısını belirlemektedir. Bu sistem (1) denklemine denktir ve çoğu zaman bir tek denklemden daha kullanışlıdır.

<u>TANIM-3</u> Toplamanın tanımı:

$y(x)$ fonksiyonu verildiğinde $\Delta y(x)$ farkının nasıl bulunabileceği yukarıda açıklandı. Fonksiyonun farkı, yani $\Delta y(x)$ bilindiğinde $y(x)$'in nasıl bulunabileceğini araştıralım. Bunun için

$$(4) \qquad y(x+1) - y(x) = \phi(x)$$

denklemi gözönüne alınsın. Burada $\phi(x)$, $\Delta y(x)$ farkını temsil eder. "Δ" ile gosterilen fark operatorünün tersi $\int$ operatorü ile gösterilirse (4) denkleminin bir çözümü

$$(5) \qquad y(x) = \int \phi(x)$$

olarak yazılabilir. Bu işleme "toplama" denir; integrasyona paraleldir ve bu nedenle " sonlu integrasyon " da denilebilir. (5) denklemi, $dy/dx = \phi(x)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olan $\int \phi(x)dx$ ile aynı anlamdadır ve (4) denkleminin bir çözümüdür. Aşağıda toplamanın birkaç örneği verilmiştir; sağ taraftaki ifadelerin farkları alınarak kolayca ispatlanabilir.

$$\sum 1 = x \quad ; \quad \sum x = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$\sum \binom{x}{n} = \binom{x}{n+1} \quad ; \quad \sum a^x = \frac{a^x}{a-1}$$

1.1. SABİT KATSAYILI HOMOJEN FARK DENKLEMLERİ

(2) $a_0(x)\Delta^n y(x)+a_1(x)\Delta^{n-1}y(x)+...+a_n(x)y(x) = b(x)$

n. mertebeden lineer fark denklemi;

(6) $[a_0(x)\Delta^n+a_1(x)\Delta^{n-1}+...+a_n(x)]y(x) = b(x)$

şeklinde de yazılabilir; ya da $\Phi(\Delta)$ lineer operatör ve

$$\Phi(\Delta) = a_0(x)\Delta^n+a_1(x)\Delta^{n-1}+...+a_n(x)$$

olmak üzere

(7) $\Phi(\Delta)y(x) = b(x)$

şeklinde ifade edilebilir.

(2),(6) ya da (7) denklemlerinde $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)$ katsayıları birer sabit ise bu denklemlere n. mertebeden sabit katsayılı **lineer fark denklemi** denir. Eğer $b(x)=0$ ise bu denklemler homojen denklem adını alır. Katsayıların sabit ve $b(x)=0$ koşullarının herikisinin birden varolması halinde bu denklemlere, sabit katsayılı homojen fark denklemi denir. Bu tipteki denklemlerin çözümleri $y(x)=r^x$ şeklindedir. Bu çözüm;

$$a_0(x)y(x+n)+a_1y(x+n-1)+...+a_n(x)y(x) = 0$$

denkleminde yerleştirilirse

(8) $a_0r^{n+x}+a_1r^{n+x-1}+...+a_nr^x = 0$

ya da

$$(a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n)r^x = 0$$

elde edilir. Eğer r,

(9) $\Phi(r) = a_0r^n+a_1r^{n-1}+...+a_n = 0$

karateristik denkleminin bir çözümü ise (7) denkleminin bir çözümünün de r^x şeklinde olduğu görülür.(9) denklemi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ gibi n-köke sahiptir. (7) denkleminin $r_1^x, r_2^x, \ldots, r_n^x$ köklerinin durumları ve bunlara ait çözümlerin nasıl yazılacağı aşağıda gösterilmiştir.

I. DURUM : Köklerin reel ve birbirinden farklı olması hali

$r_1 \neq r_2 \neq \ldots \neq r_n \in R$ ise $r_1^x, r_2^x, \ldots, r_n^x$ köklerinin hepsi denklemi sağlayacağından c_i 'ler keyfi sabit olmak üzere

$$y(x) = c_1 r_1^x + c_2 r_2^x + \ldots + c_n r_n^x$$

ifadesi (8) denkleminin bir çözümüdür. Örneğin,

$$y(x+2) - 6y(x+1) + 8y(x) = 0$$

fark denkleminin genel çözümünü bulalım. $y(x) = r^x$ olsun.

$$r^{x+2} - 6r^{x+1} + 8r^x = 0 \quad \text{ya da} \quad r^x(r^2 - 6r + 8) = 0$$

elde edilir. $r_1 = 2$, $r_2 = 4$ köklerinden iki çözüm 2^x ve 4^x olur. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere genel çözüm

$$y(x) = c_1 2^x + c_2 4^x$$

şeklinde bulunur.

II. DURUM : Katlı kök olması hali

Eğer $\Phi(r)$ karakteritik denkleminin köklerinden biri örneğin r_1, iki katlı kök ise (8) denkleminin çözümü

$$(c_1 + c_2 x) r_1^x$$

şeklindedir. Eğer r_1 m katlı ise çözüm

$$(c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + \ldots + x^{m-1} c_m) r_1^x$$

şeklindedir. Örneğin,

$$y(x+2) - 4y(x+1) + 4y(x) = 0.$$

denkleminin kökleri çakışık ve $r_1 = r_2 = 2$ dir. $y(x) = r^x = 2^x$ bir çözümdür. Buna göre genel çözüm

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) 2^x$$

şeklinde yazılır.

III. DURUM : Bazı köklerin kompleks olması hali

Eğer karakteristik denklem eşlenik kompleks köklere sahipse çözüm reel olarak ifade edilebilir. Yani ,

$$r_1=\alpha+\beta i \quad \text{ve} \quad r_2=\alpha-\beta i$$

ise c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere çözüm

$$c_1(\alpha+\beta i)^x+c_2(\alpha-\beta i)^x$$

ile ifade edilir. Buradan

$$\mu^x(K_1\cos x\theta + K_2\sin x\theta)$$

ile reel formdaki çözüm bulunur. Basit bir örnek, iki önce gelen terimlerin toplamı yazılarak elde edilen Fibonacci sayıları ile verilebilir.

$$y(x+2)-y(x+1)-y(x) = 0$$

denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2-r-1 = 0$$

ve kökleri

$$r_{1,2}= \frac{1}{2}\,(1\pm\sqrt{5})$$

dir.

Genel çözüm

$$y(x) = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x$$

olarak elde edilir. c_1 ve c_2 , Fibonacci sayıları olan $y(0)=0$, $y(1)=1$ gerçeğinden bulunmuştur:

$$c_1= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad c_2= -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Buradan serinin genel terimi ,

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$$

şeklindedir.

1.2.LİNEER BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLER

$$A_1y_1(x)+A_2y_2(x)+...+A_ny_n(x) = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olan n-tane $A_1,A_2,...,A_n$ sabiti varsa $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ fonksiyonlarına lineer bağımsız fonksiyonlar denir.

TEOREM 1 : $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ çözümlerinin lineer bağlı olması için gerek ve yeter koşul

$$D(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) & \dots & y_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1(x+n-1) & y_2(x+n-1) & \dots & y_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

determinantının sıfıra özdeş olmasıdır. Bu determinanta Casorati determinantı denir ;lineer diferansiyel denklemlerdeki Wronskian determinantı ile aynı işlevi görür.

TEOREM 1 : Eğer $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ fonksiyonları

$$(10) \qquad \left[a_0\Delta^n+a_1\Delta^{n-1}+...+a_n\right]y(x) = 0$$

denkleminin n-tane lineer bağımsız çözümü ise genel çözüm

$$y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)$$

şeklindedir ve diğer çözümler bu çözümün özel durumlarıdır.

1.3. HOMOJEN OLMAYAN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

(2) lineer fark denklemini sabit katsayılı homojen olmayan denklem olarak gözönüne alalım. Homojen denklemin genel çözümü $y_G(x)$ ile özel çözümü de $y_O(x)$ ile gösterilirse denklemin genel çözümü

$$y(x) = y_O(x)+y_G(x)$$

ile gösterilir.

1.3.1. ÖZEL ÇÖZÜM BULMA YÖNTEMLERİ

a-) Belirsiz Katsayılar Yöntemi : $b(x)$ 'ın sahip olduğu şekle karşılık gelen özel çözümler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. $A,B,A_0,A_1,...$ katsayıları birer sabittir.

b(x)	özel çözüm
β^x	$A\beta^x$
$\sin\alpha x$ ya da $\cos\alpha x$	$A\cos\alpha x+B\sin\alpha x$
m. dereceden $P(x)$ polinomu	$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m$
$\beta^x P(x)$	$\beta^x(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m)$
$\beta^x\sin\alpha x$ ya da $\beta^x\cos\alpha x$	$\beta^x(A\cos\alpha x+B\sin\alpha x)$

$y_{k+2}-6y_{k+1}+8y_k = 3k^2+2-5.3^k$ örneğini inceleyelim. Homogen kısmın genel çözümü

$$y(x) = c_1 2^k+c_2 4^k$$

şeklindedir. Denklemin ikinci yanına karşılık gelen özel çözüm

$$y_o(x) = A_1k^2+A_2k+A_3+A_4 3^k$$

şeklinde yazılır. Özel çözüm denklemde yerleştirilir ve iki taraftaki aynı k 'lı terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$y_o(x) = k^2 + \frac{8}{3}k + \frac{44}{9} +5.3^k$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 2^k+c_2 4^k+k^2+ \frac{8}{3}k + \frac{44}{9} +5.3^k$$

şeklinde bulunur.

b-) Özel Operatör Yöntemi: Herhangi bir lineer fark denkleminin

(7) $\quad \Phi(\Delta)y(x) = b(x)$

şeklinde yazılabileceği görülmüştü.

(11) $\quad \dfrac{1}{\Phi(\Delta)}b(x) = U \quad ; \quad \Phi(\Delta)U = b(x)$

bağıntısıyla $1/\Phi(\Delta)$ operatörünü tanımlayalım. Burada $1/\Phi(\Delta)$, $\Phi(\Delta)$ nın tersidir ve U keyfi bir sabit değildir. O halde U, (7) denkleminin özel çözümüdür

Problem çözümünde aşağıdaki tablodan yararlanılır :

1. $\dfrac{1}{\Phi(\Delta)}\beta^x = \dfrac{\beta^x}{\Phi(\beta)}$, $\Phi(\beta)\neq 0$
2. $\dfrac{1}{\Phi(\Delta)}\sin ax$ ya da $\dfrac{1}{\Phi(\Delta)}\cos ax$ $\cos ax = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin ax = \dfrac{e^{iax}-e^{-iax}}{2}$ yazılır ve 1. durum kullanılır.
3. $\dfrac{1}{\Phi(\Delta)}P(x) = (b_0+b_1\Delta+\dots+b_m\Delta^m+\dots)P(x)$ $\Delta^{m+1}P(x)=0$ olduğundan ifade Δ^m ' e kadar yazılır.
4. $\dfrac{1}{\Phi(\Delta)}\beta^x P(x) = \beta^x \dfrac{1}{\Phi(\beta\Delta)}P(x)$ ve 3. durum kullanılır.

Örneğin ,

$$y(x+2)-2y(x+1)+5y(x) = 2.3^x-4.7^x$$

denklemini inceleyelim. Homojen kısmının genel çözümü ,

$$y(x) = 5^{x/2}(c_1\cos x\theta+c_2\sin x\theta)$$

olarak bulunur. İkinci tarafa karşılık gelen özel çözümü bulmak için denklem

$$(\Delta^2-2\Delta+5)y(x) = 2.3^x-4.7^x$$

şeklinde düzenlenir. Buradan ,

$$\frac{1}{\Delta^2-2\Delta+5}(2.3^x-4.7^x) = 2.\frac{1}{\Delta^2-2\Delta+5}.3^x-4.\frac{1}{\Delta^2-2\Delta+5}.7^x$$

$$=2.\frac{1}{3^2-2(3)+5}.3^x-4.\frac{1}{7^2-2(7)+5}.7^x$$

$$=\frac{1}{4}.3^x-\frac{1}{10}.7^x$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü

$$y(x) = 5^{x/2}(c_1\cos x\theta + c_2\sin x\theta) + \frac{1}{4}.3^x - \frac{1}{10}.7^x$$

şeklinde bulunur.

c-) Parametrelerin değişimi yöntemi :

(7) $\Phi(\Delta)y(x) = b(x)$

denkleminin homojen kısmının genel çözümü

(12) $y(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$

şeklindedir. Burada c_i 'ler yerine x 'in fonksiyonlarından oluşan $c_i(x)$ 'ler alınırsa

$$y(x) = c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+\ldots+c_n(x)y_n(x)$$

elde edilir. $c_1(x),c_2(x),\ldots,c_n(x)$ 'leri belirlemek için x yerine $x+1$ konulursa ve

$$c_k(x+1) = c_k(x)+\Delta c_k(x)$$

yazılırsa

$$y(x+1) = c_1(x)y_1(x+1)+c_2(x)y_2(x+1)+\ldots+c_n(x)y_n(x+1)$$
$$+\left[\Delta c_1(x)y_1(x+1)+\Delta c_2(x)y_2(x+1)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+1)\right]$$

elde edilir. c 'ler ,parantez içindeki ifade sıfıra eşit olacak şekilde seçilsin. Tekrar x yerine x+1 konulursa

$$y(x+2) = c_1(x)y_1(x+2)+c_2(x)y_2(x+2)+\ldots+c_n(x)y_n(x+2)$$
$$+\left[\Delta c_1(x)y_1(x+2)+\Delta c_2(x)y_2(x+2)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+2)\right]$$

yazılır ve yine parantez içindeki ifade sıfır olacak şekilde c 'lerin seçimi yapılır. Benzer şekilde devam edilirse

$$y(x+n) = c_1(x)y_1(x+n)+c_2(x)y_2(x+n)+\ldots+c_n(x)y_n(x+n)$$
$$+\left[\Delta c_1(x)y_1(x+n)+\Delta c_2(x)y_2(x+n)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+n)\right]$$

elde edilir. Bu n+1 denklem sırasıyla $a_0(x), a_1(x),\ldots,a_n(x)$ ile çarpılıp toplanırsa ve $y_1(x),y_2(x),\ldots y_n(x)$ 'lerin homojen denklemin çözümleri olduğu düşünülürse

$$b(x)=a_n(x)\left[\Delta c_1(x)y_1(x+n)+\Delta c_2(x)y_2(x+n)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+n)\right]$$

denklemi elde edilir. Δc 'leri belirlemek için aşağıdakı n denklem sistemi kurulur.

$$\Delta c_1(x)y_1(x+1)+\Delta c_2(x)y_2(x+1)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+1)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta c_1(x)y_1(x+n-1)+\Delta c_2(x)y_2(x+n-1)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+n-1)=0$$

$$\Delta c_1(x)y_1(x+n)+\Delta c_2(x)y_2(x+n)+\ldots+\Delta c_n(x)y_n(x+n)=\frac{b(x)}{a_n(x)}$$

y 'ler bir temel sistem formunda olduğu için katsayılar determinantı $D(x+1)$, sıfır değildır. $D(x+1)$ 'in k-nıncı kolonundaki son elemanın kofaktörü $M_{nk}(x)$ olduğunda

$$\Delta c_k(x)=\frac{M_{nk}(x)}{D(x+1)}\cdot\frac{b(x)}{a_n(x)}$$

şeklinde $\Delta c_1(x),\Delta c_2(x),\ldots,\Delta c_n(x)$ 'ler tek tek belirlenebilir. $(k=1,2,\ldots,n)$ Bulunan bu değerler (12) denkleminde yerleştirilirse (1) denkleminin bir çözümü olarak

$$(13)\qquad y(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)\int\frac{M_{nk}(x)}{D(x+1)}\cdot\frac{b(x)}{a_n(x)}$$

elde edilir. Bu yöntemin bır örneği olarak

$$y(x+2)-7y(x+1)+6y(x)=x$$

denkleminin gözönüne alınsın. 1 ve 6^x bu denklemin lineer bağımsız çözümleridir. Casorati determinantından ;

$$D(x+1)=\begin{vmatrix}1 & 6^{x+1}\\ 1 & 6^{x+2}\end{vmatrix}=30.6^x$$

$$M_{21}(x)=-6^{x+1}\quad,\quad M_{22}(x)=1$$

bulunur.

$$y(x)=\int\frac{-x6^{x+1}}{30.6^x}+6^x\int\frac{x}{30.6^x}$$

$$= -\frac{1}{5}\sum x + \frac{6^x}{30}\sum \frac{x}{6^x}$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\frac{x(x-1)}{2} + \frac{6^x}{30}\left(-\frac{30x+6}{25.6^x}\right)$$

$$= -\frac{x^2}{10} + \frac{3x}{50} - \frac{1}{125}$$

Homojen olmayan denklemin genel çözümü, homojen denklemin genel çözümü ile herhangi bir özel çözümünün toplanmasıyla bulunur. $\delta(x)$, (1) denkleminin bir özel çözümü ve $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ keyfi periyodik fonksiyonlar ise genel çözüm ;

(14) $\quad y(x) = \delta(x)+p_1(x)y_1(x)+\dots+p_n(x)y_n(x)$

şeklindedir. Yukarıdaki örneğin en genel çözümünün

$$p_1(x)+6^x p_2(x)-\frac{x^2}{10}+\frac{3x}{50}-\frac{1}{125}$$

şeklinde olduğu görülür.

d-) Mertebe düşürme yöntemi : Eğer n. mertebe denklemin

$$(\Delta-r_1)(\Delta-r_2)\dots(\Delta-r_n)y(x)=b(x)$$

şeklinde yazıldığı ve $z(x)$ ' in

$$z(x)=(\Delta-r_2)\dots(\Delta-r_n)y(x)$$

olduğu duşünülürse

$$(\Delta-r_1)z(x)=b(x)$$

birinci mertebe denklemi elde edilir. Bu denklem

$$z(x)=r_1^x\ \Delta^{-1}\left(\frac{b(x)}{r_1^{x+1}}\right)=r_1^x\sum_{p=1}^{x-1}\frac{b(p)}{r_1^{p+1}}+c_1r_1^x$$

çözümüne sahiptir. Örneğin ,

$$y(x+2)-5y(x+1)+6y(x)=x^2$$

denklemini inceleyelim. Denklemi;

$$(\Delta-3)(\Delta-2)y(x)=x^2$$

şeklinde yazalım ve $z(x)=(\Delta-2)y(x)$ kabul edelim. O takdırde denklem

$$(\Delta-3)z(x)=x^2$$

şeklinde yazılır.Çözüm ,

$$z(x)=3^x\Delta^{-1}\left(\frac{x^2}{3^{x+1}}\right)+c_1 3^x=c_1 3^x-\frac{1}{2}(x^2+x+1)$$

şeklındedir. O halde

$$y(x)=2^x\Delta^{-1}\left(\frac{c_1 3^x-½(x^2+x+1)}{3^{x+1}}\right)+c_2 2^x$$

$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}+c_2 2^x+c_3 3^x$$

elde edilir.

e-)Genel fonksiyonlar yöntemi : $y(x)$ 'ın genel fonksıyonu

$$G(t)=\sum_{x=0}^{\infty} y(x)t^x$$

şeklinde tanımlanır. Verilen bir denklemın çözümunu bulurken bu yöntemin nasıl uygulandığını bir örnek üzerinde inceleyım :

$$y(x+2)-3y(x+1)+2y(x)=0 \quad ; \quad y(0)=2 \quad \text{ve} \quad y(1)=3$$

fark denklemı verilsin. Bu denklem t^x ile çarpılır ve 0 'dan ∞ 'a toplam alınırsa

$$\sum_{x=0}^{\infty} y(x+2)t^x-3\sum_{x=0}^{\infty} y(x+1)t^x+2\sum_{x=0}^{\infty} y(x)t^x = 0$$

elde edilir; yani

$$\left[y(2)+y(3)t+y(4)t^2+\ldots\right]-3\left[y(1)+y(2)t+y(3)t^2+\ldots\right]$$
$$+2\left[y(0)+y(1)t+y(2)t^2+\ldots\right]=0$$

bulunur. $G(t)$ fonksiyonu cinsinden

$$\frac{G(t)-y(0)-y(1)t}{t^2} - 3\left(\frac{G(t)-y(0)}{t}\right) + 2G(t) = 0$$

şeklinde yazılır. Burada $y(0)=2$, $y(1)=3$ değerleri konursa

$$G(t) = \frac{2-3t}{1-3t+2t^2} = \frac{2-3t}{(1-t)(1-2t)}$$

$$\Longrightarrow \quad G(t) = \sum_{x=0}^{\infty} (1+2^x)t^x$$

ve buradan denklemi sağlayan

$$y(x) = 1+2^x$$

çözümü bulunur.

1.4. DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Birinci mertebeden değişken katsayılı herhangi bir lineer denklem

(15) $\quad y(x+1)-A(x)y(x)=b(x)$

ya da

$$(\Delta - A(x))y(x) = b(x)$$

şeklindedir ve her zaman çözülebilir. c keyfi bir sabıt olmak üzere homojen kısmın genel çözümü

$$y(x+1)-A(x)y(x)=0$$

$$\Longrightarrow y(x)=A(x-1)y(x-1)$$

$$\Longrightarrow y(x)=c_1A(1)A(2)\ldots A(x-1)$$

şeklinde bulunur. Parametrelerin değişiminden c_1 yerine x 'in fonksiyonu olan $K(x)$ yazılıp denklemde yerleştirilir ve iki taraf $A(1)A(2)\ldots A(x)$ ile bölünürse

$$K(x) = \Delta^{-1}\left(\frac{b(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x)}\right)$$

bulunur ve $y(x)$ çözümü yeniden düzenlenirse

$$(16)\quad y(x)=A(1)A(2)\ldots A(x-1)\Delta^{-1}\left(\frac{b(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x)}\right)$$

$$=A(1)A(2)\ldots A(x-1)\sum_{p=1}^{x-1}\frac{bp}{A(1)A(2)\ldots A(p)}$$

$$+cA(1)A(2)\ldots A(x-1)$$

olarak bulunur. Burada c, keyfi sabittir.
Aynı çözüm, verilen denklem

$$u(x)=\frac{1}{A(1)A(2)\ldots A(x)}$$

çarpanı ile çarpılarak bulunabilir; yani

$$\frac{y(x+1)}{A(1)A(2)\ldots A(x)}-\frac{y(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x-1)}=-\frac{b(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x)}$$

ya da

$$\Delta\left(\frac{y(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x-1)}\right)=\frac{b(x)}{A(1)A(2)\ldots A(x)}$$

yazılır ve buradan (16) elde edilir.
İkinci mertebeden ya da daha yüksek mertebeden değişken katsayılı bir lineer fark denkleminin her zaman açık bir çözümü bulunamaz. Böyle durumlarda özel yöntemler kullanılır. Bu yöntemler aşağıda verilmiştir.

1-Çarpanlara Ayırma: Bu yöntem kullanılırken fark denklemi

$$(\Delta-A(x))(\Delta-B(x))\ldots(\Delta-U(x))y(x)=b(x)$$

şeklinde yazılır ve sonra mertebe düşürme yöntemi uygulanır. Bu yöntemi,

$$y(x+2)-(x+2)y(x+1)+xy(x)=x$$

örneği üzerinde inceleyelim.

$$(\Delta-A(x))(\Delta-B(x))y(x)=x \qquad (1)$$

olarak yazılsın.

$$(\Delta-A(x))(y(x+1)-B(x)y(x))=y(x+2)-(A(x)+B(x+1))y(x+1)$$

$$+A(x)B(x)y(x)$$

ve buradan $A(x)=1$, $B(x)=x$ bulunur.

$$(\Delta-1)(\Delta-x)y(x)=x \qquad (2)$$

denkleminde $z(x)=(\Delta-x)y(x)$ olsun. (2) denklemi,

$$z(x)=\Delta^{-1}x=\Delta^{-1}x^{(1)}=\frac{x^{(2)}}{2}+c_1$$

çözümune sahip

$$(\Delta-1)z(x)=x$$

şeklini alır. O halde

$$z(x)=(\Delta-x)y(x)=\frac{x^{(2)}}{2}+c_1=\frac{1}{2}x(x-1)+c_1$$

bulunur.

$$y(x)=1.2.\ \ldots\ .(x-1)\Delta^{-1}\left[\frac{1/2.x(x-1)+c_1}{1.2.\ \ldots\ .x}\right]$$

$$=(x-1)!\Delta^{-1}\left[\frac{1/2.x(x-1)+c_1}{x!}\right]$$

ya da

$$y(x)=(x-1)!\sum_{p=1}^{x-1}\left[\frac{1/2.p(p-1)+c_1}{p!}\right]+c_2(x-1)!$$

$$=\frac{(x-1)!}{2}\sum_{p=1}^{x-1}\frac{p(p-1)}{p!}+c_1(x-1)!\sum_{p=1}^{x-1}\frac{1}{p!}+c_2(x-1)!$$

çözümü elde edilir.

2- Parametrelerin değişimi
3- Genel fonksiyonlar

2-yöntemi, homojen olmayan denklemin homojen kısmının genel çözümü bilindiğinde kullanılır. Yukarıdaki iki yöntemle numerik örnek çözülürken sabit katsayılı denklemlerdekine benzer işlemler yapılır.

4- Seri çözümleri : Bu yöntemde çözüm,

$$y(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}c_p(x)^{(p)}$$

şeklındekı serı olarak kabul edilir. Burada $p<0$ için $c_p=0$ 'dır.

$$(x+1)y(x+2)-(3x+2)y(x+1)+(2x-1)y(x)=0$$

denkleminin çözümünü bu yöntemle bulmaya çalışalım. Denklemi

$$(x+1)\Delta^2 y(x)-x\Delta y(x)-2y(x)=0 \qquad (1)$$

şeklinde yazalım. Çözümün, $p=-1,-2,\ldots$ için $c_p=0$ olmak üzere

$$y(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p x^{(p)} \qquad (2)$$

şeklinde olduğu kabul edilsin. (2) 'den

$$\Delta y(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} pc_p x^{(p-1)} \qquad (3)$$

$$\Delta^2 y(x)=\sum_{p=-\infty}^{\infty} p(p-1)c_p x^{(p-2)} \qquad (4)$$

elde edilir. (2),(3) ve (4) denklemde yerleştirilir ve

$$xx^{(m)}=x^{(m+1)}+mx^{(m)}$$

kullanılırsa

$$\sum p(p-1)c_p\left[x^{(p-1)}+(p-2)x^{(p-2)}\right]+\sum p(p-1)c_p x^{(p-2)}$$

$$-\sum pc_p\left[x^{(p)}+(p-1)x^{(p-1)}\right]-\sum 2c_p x^{(p)}=0 \qquad (5)$$

bulunur ve $x^{(p)}$ nın katsayıları paranteze alınırsa

$$\sum\{(p+2)(p+1)^2c_{p+2}-(p+2)c_p\}x^{(p)}=0$$

elde edilir. $x^{(p)}$ nin katsayısı sıfır olmalıdır; yani

$$(p+2)(p+1)^2c_{p+2}-(p+2)c_p=0$$

$$(p+1)^2c_{p+2}-c_p=0$$

olmalıdır. (6) eşitliğinde $p=0,1,2,\ldots$ konursa

$$c_2=\frac{c_0}{1^2}, \quad c_3=\frac{c_1}{2^2}, \quad c_4=\frac{c_2}{3^2}=\frac{c_0}{1^2.3^2}, \quad c_5=\frac{c_3}{4^2}=\frac{c_1}{2^2.4^2}$$

elde edilir ve (2) çözümü

$$y(x)=c_0\left[1+\frac{x^{(2)}}{1^2}+\frac{x^{(4)}}{1^2.3^2}+\frac{x^{(6)}}{1^2.3^2.5^2}+\ldots\right]$$

$$+\left[x^{(1)}+\frac{x^{(3)}}{2^2.4^2}+\frac{x^{(5)}}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\right]$$

şeklinde elde edilir.

BÖLÜM II

BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEMLER

GAMA FONKSİYONU

2.1. HOMOJEN DENKLEMLER

$r(x)$ bir rasyonel fonksiyon olduğunda

$$y(x+1)-r(x)y(x) = 0 \tag{1}$$

homojen lineer denklemi gözönüne alınsın. y_1 ve y_2 çözümler ise bu çözümlerin oranları

$$\frac{y_1(x+1)}{y_2(x+1)} = \frac{r(x)y_1(x)}{r(x)y_2(x)} = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

şeklindedir. (1) denkleminden

$$\begin{aligned} y(x) &= r(x-1)y(x-1) \\ &= r(x-1)r(x-2)y(x-2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= r(x-1)\ldots r(x-n)y(x-n) \qquad (2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{r(x)}\,y(x+1) \\ &= \frac{1}{r(x)}\,\frac{1}{r(x+1)}\,y(x+2) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{1}{r(x)}\cdot\frac{1}{r(x+1)}\ldots\frac{1}{r(x+n)}\,y(x+n+1) \qquad (3) \end{aligned}$$

şeklindedir. n sonsuza giderken iki sembolik çözüm

$$y_1(x) = \prod_{n=1}^{\infty} r(x-n) \qquad\qquad y_2(x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r(x+n)} \tag{4}$$

olur.

(1) denklemini sağlayan $1/x$ cinsinden bir kuvvet serisi bulalım:

μ bir tamsayı ve $c_0 \neq 0$ olduğunda $r(x)$ rasyonel fonksiyonu

$$(5) \qquad r(x) = x^{\mu}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right)$$

şeklinde yazılabilir. $r(x)$ rasyonel fonksiyonu, (1) denkleminde yerleştirilirse denklemi gerçeklemediği görülür. Bu nedenle uygun üstel çarpanlar kullanılarak

$$y(x) = x^{ax} b^{x} x^{d}\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \ldots\right)$$

elde edilir.

$$y(x+1) = (x+1)^{a(x+1)} b^{x+1} (x+1)^{d}\left(s_0 + \frac{s_1}{x+1} + \frac{s_2}{(x+2)^2} + \ldots\right)$$

$$(x+1)^{a(x+1)} = (x+1)^{a} . (x+1)^{ax}$$

$$= (x+1)^{a} . x^{ax} . \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{ax}$$

$$= (x+1)^{a} . x^{ax} . e^{ax\log(1+1/x)}$$

$$= (x+1)^{a} . x^{ax} . e^{ax\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \ldots\right)}$$

$$(6) \qquad = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a} . x^{ax+a} . e^{a} . \left[1 - \frac{a}{2x} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{a^2}{8} + \frac{a}{3}\right) - \ldots\right]$$

Elde edilen ifadeler (1) denkleminde yerleştirilirse

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{a} . x^{ax+a} . e^{a}\left[1 - \frac{a}{2x} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{a^2}{8} + \frac{a}{3}\right) - \ldots\right]$$

$$b^{x+1}(x+1)^{d}\left[s_0 + \frac{s_1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} + \ldots\right]$$

$$= x^{\mu}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots\right) x^{ax} b^{x} x^{d}\left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \ldots\right)$$

elde edilir ve her iki taraftan $x^{ax} b^x x^d$ çarpanı yokedilirse

$$b x^{a} e^{a} \left(1 - \frac{a}{2x} + \dots \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{a+d} \left[s_0 + \frac{s_1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-1} + \dots \right]$$

$$= x^{\mu} \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots \right) \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \dots \right)$$

elde edilir. Her iki taraf $1/x$ 'in kuvvet serisi olarak yazılır ve aynı kuvvetlerin katsayıları eşitlenirse

$$a = \mu \ , \ b e^{a} s_0 = c_0 s_0$$

$$b e^{a} \left(\frac{a s_0}{2} + d s_0 + s_1 \right) = c_1 s_0 + c_0 s_1 \ , \ \text{v.b}$$

Bu eşitlikler $a, b, d, \frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}, \dots$ niceliklerini hesaplamaya yardım eder; yani,

$$a = \mu \qquad b = c_0 e^{-\mu}$$

$$d = \frac{c_1}{c_0} - \frac{\mu}{2} \ , \ \frac{s_1}{s_0} = \frac{c_1}{2c_0} \frac{c_1}{c_0} - 1 - \frac{c_2}{c_0} + \frac{\mu}{12} \ , \text{v.b}$$

s_0 keyfidir. s_k/s_0 'dan denklem

$$b e^{a} \left[s_{k+1} - k s_k + s_k \left(- \frac{a}{2} + a + d \right) + \dots \right] = c_0 s_{k+1} + c_1 s_k + \dots$$

elde edilir ve eğer a, b ve d değerleri yerine konursa s_k ve $-kc_0$ olur. Böylece serinin tüm katsayıları keyfi sabit çarpanından bağımsız ve tek olarak hesaplanır. Buradan (1) denklemi,

$$(7) \qquad S(x) = x^{\mu x} c_0^{x} e^{-\mu x} x^{c_1 \frac{1}{c_0} - \frac{\mu}{2}} \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \dots \right)$$

serisi ile sağlanır. Bu seri $|x| > R$ için yakınsıyorsa $S(x)$,bu bölgede (1) denkleminin analitik bir çözümünü gösterir. (1) denkleminin iki analitik çözümünü bulalım:

$T(x)$, $S(x)$ 'in ilk k teriminin toplamını ifade etsin; yani $a(x)$, üstel çarpanların çarpımını ve $S_k(x)$, (7) 'deki kuvvet serisinin ilk k teriminin toplamını göstermek üzere

$$T(x) = a(x)S_k(x)$$

elde edilir. $T(x)$, x 'in büyük değerleri için (1) denkleminin bir yaklaşık çözümü gibi kabul edilebilir.

$$S(x) = a(x)\left[S_k(x) + \frac{S_k}{x^k} + \frac{\sigma(x)}{x^{k+1}} \right]$$

olmak üzere

$$\frac{T(x+1)}{T(x)} : \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{a(x+1)S_k(x+1)}{a(x)S_k(x)} \cdot \frac{a(x)\left[S_k(x) + \frac{S_k}{x^k} + \frac{\sigma(x)}{x^{k+1}} \right]}{a(x+1)\left[S_k(x+1) + \frac{S_k}{(x+1)^k} + \frac{\sigma(x+1)}{(x+1)^{k+1}} \right]}$$

$$= \frac{S_k(x+1)\left[S_k(x) + \frac{S_k}{x^k} + \frac{\sigma(x)}{x^{k+1}} \right]}{S_k(x)\left[S_k(x+1) + \frac{S_k}{(x+1)^k} + \frac{\sigma(x+1)}{(x+1)^{k+1}} \right]}$$

yazılabilir. Bu ifadenin payı ve paydası $S_k(x)S_k(x+1)$ ile bölünürse,

$$\frac{T(x+1)}{T(x)} : \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{1 + \frac{S_k}{S_k(x)x^k} + \frac{\sigma(x)}{S_k(x)x^{k+1}}}{1 + \frac{S_k}{S_k(x+1)(x+1)^k} + \frac{\sigma(x+1)}{S_k(x+1)(x+1)^{k+1}}}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\sigma(x)}{S_k(x)} = \sigma'(x) \ , \quad \frac{\sigma(x+1)}{Sk(x+1)} = \sigma''(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\sigma'(x) - \sigma''(x)}{x^{k+1}} = \frac{\theta(x)}{x^{k+1}}$$

alınırsa

$$\frac{T(x+1)}{T(x)} : \frac{S(x+1)}{S(x)} = \frac{1 + \frac{S_k}{S_k(x)x^k} + \frac{\sigma'(x)}{x^{k+1}}}{1 + \frac{S_k}{S_k x^k} + \frac{\sigma''(x)}{x^{k+1}}}$$

olduğu görülür.

$\dfrac{S(x+1)}{S(x)}$, (5) denklemi ile verilen r(x)' e formel olarak eşittir. Buradan

$$\frac{T(x+1)}{T(x)} = r(x)\left[1+\frac{\theta(x)}{x^{k+1}}\right]$$

yazılabilir. O halde T(x), x' in büyük değerleri için (1) denkleminin bir çözümüdür denir.
(2) ve (3) denklemlerinde y(x-n) ve y(x+n+1) yerine T(x-n) ve T(x+n+1) konulursa:

$$(9) \quad y(x) = r(x-1)r(x-2)\ldots r(x-n)T(x-n)$$

$$(10) \quad y(x) = \frac{1}{r(x)}\,\frac{1}{r(x+1)}\cdots\frac{1}{r(x+n)}\,T(x+n+1)$$

Bu denklemlerde n değeri x 'e göre büyük ise iki yaklaşık çözüm bulunur. Yaklaşım, n arttıkça yani $n \to \infty$ için daha büyük olacağından

$$(11) \quad \begin{cases} h(x) = \lim\limits_{n\,\infty} \dfrac{1}{r(x)}\,\dfrac{1}{r(x+1)}\cdots\dfrac{1}{r(x+n)}\,T(x+n+1) \\[2ex] g(x) = \lim\limits_{n\,\infty} r(x-1)r(x-2)\ldots r(x-n)T(x-n) \end{cases}$$

elde edilir. Eğer bu limitler mevcutsa h(x) ve g(x), (1) denkleminin çözümleridir.

TEOREM 1- (1) $y(x+1)-r(x)y(x)=0$

lineer homojen fark denklemi,

$$S(x) = x^{\mu x}\, c_0^{\,x}\, e^{-\mu x}\, x^{\frac{c_1}{c_0}-\frac{\mu}{2}} \left(s_0 + \frac{s_1}{x} + \ldots\right)$$

serisi ile formel olarak sağlanır. S(x) 'in ilk k teriminin toplamı T(x) ile gösterilirse (1) denkleminin, (10) ile verilen h(x) ve g(x) gibi iki analitik çözümü vardır.
h(x) ve g(x) çözümlerine sırasıyla "ilk esas çözüm" ve "ikinci esas çözüm" denir.

2.2. GAMA FONKSİYONU

(1) tıpindekı denklemlerın özel durumlarından birı

$$(12) \quad y(x+1)=xy(x)$$

şeklindedir. Eğer G(x), bu denklemın bir çözumu ıse (1) denklemı G(x) cinsinden çözülebilir. Eğer r(x),

$$r(x)=c_0 \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_m)}$$

şeklinde yazılırsa (1) denklemi,

$$(13) \quad y(x)=c_0^x \frac{G(x-\alpha_1)G(x-\alpha_2)\dots G(x-\alpha_m)}{G(x-\beta_1)G(x-\beta_2)\dots G(x-\beta_m)}$$

çözümü ile gerçeklenir. (1) denkleminin genel çözümü, keyfi bir periyodik fonksiyonla (13) çözümü çarpılarak bulunur.

(12) denkleminin ilk esas çözümüne "gama fonksıyonu" denir ve $\Gamma(x)$ ıle gösterilir. Bu fonksiyon Euler tarafından Analiz' de ortaya çıkarılmıştır. Gama fonksıyonu, ya bir sonsuz çarpım ya da sonlu bir integral olarak tanımlanır.

Sonsuz çarpım olarak

$$(14) \quad \Gamma(x)=\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\dots(x+n-1)}$$

şeklınde ifade edilir. Bu sonsuz çarpım aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$(15) \quad \Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(x+n)}=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

$\Gamma(1)=1$ olduğu için n herhangı bır tamsayı olmak üzere (12) denkleminden

$$\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1 \quad , \quad \Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2 \quad , \quad \dots \quad , \quad \Gamma(n+1)=n!$$

olduğu görulür.
(12) denkleminın ikinci esas çözümü $\overline{\Gamma}$ ile gösterılsin. $\Gamma(x)$ ve $\overline{\Gamma}(x)$ çozümlerinın ıkisı de (12) denklemini sağladığı için oranları bir penyodik fonksiyondur; yanı

$$\frac{\Gamma(x)}{\overline{\Gamma}(x)} = p(x)$$

şeklindedir. Burada $p(x)$ periyodik fonksiyonu, $e^{2\pi i x}$ 'in rasyonel fonksiyonudur. $\Gamma(x)$ ile $\overline{\Gamma}(x)$ arasında

$$(16) \quad \overline{\Gamma}(x)=(1-e^{2\pi i x})\Gamma(x)$$

bağıntısı vardır.
Gama fonksiyonu Euler tarafından bulunan

$$(17) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)= \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

bağıntısıyla trigonometrik fonksiyonlarla birleştirilmiştir. Bu bağıntının elde edilebilmesi için (12) denkleminden

$$\Gamma(1-x)=x\Gamma(-x)$$

elde edilir. $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(-x)$, (15) sonsuz çarpımı şeklinde yazılırsa

$$(18) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}$$

elde edilir. Bu eşitlik ile sonsuz çarpım olarak yazılan

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

ifadesi arasındaki ilişki (17) denklemini verir. (17) denkleminde $x=½$ için $\Gamma(½)=\sqrt{\pi}$ nümerik sonucu bulunur.

$\sin\pi x$, $e^{\pi i x}$ cinsinden gösterilirse (17) denklemi,

$$(19) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)= \frac{-2\pi i e^{\pi i x}}{1-e^{2\pi i x}}$$

şeklinde yazılabilir; bu eşitlik ile (16) denklemi, $\overline{\Gamma}(x)$ 'in diğer gösterilişlerini verir:

$$(20) \qquad \bar{\Gamma}(x)= \frac{-2\pi i e^{2\pi i x}}{\Gamma(1-x)}$$

Gama fonksiyonu "Gauss çarpım teoremi" olarak bilinen

$$(21) \qquad \Gamma(nx)= \frac{n^{nx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

bağıntısını gerçekler; bu bağıntı $\Gamma(x)$ 'in nümerik hesabında kullanılır.

Yukarıdaki sonsuz çarpım ifadelerine ek olarak gama fonksiyonu, sonlu bir intgral olarak

$$(22) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin;

$$I = \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^3}\, dy$$

integralinin gama fonksiyonu ile çözümü

$$I = \frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

şeklindedir.

2.3 GAMA FONKSİYONUNUN UYGULAMALARI

ALLIED FONKSİYONLARI

2.3.1. (1) denkleminin aşikar çözümü:

$$(1) \qquad y(x+1)-r(x)y(x) = 0$$

denkleminin genel çözümünün, (12) denkleminin herhangi bir çözümü cinsinden ifade edilebileceği görüldü. (12) denklemi $\Gamma(x)$ ve $\bar{\Gamma}(x)$ çözümleri tarafından gerçeklendiği için (1) denklemini iki özel çözümü

$$(20) \quad \overline{\Gamma}(x) = \frac{-2\pi i e^{2\pi i x}}{\Gamma(1-x)}$$

Gama fonksiyonu "Gauss çarpım teoremi" olarak bilinen

$$(21) \quad \Gamma(nx) = \frac{n^{nx-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

bağıntısını gerçekler; bu bağıntı $\Gamma(x)$ 'in nümerik hesabında kullanılır.

Yukarıdaki sonsuz çarpım ifadelerine ek olarak gama fonksiyonu, sonlu bir intgral olarak

$$(22) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

şeklinde ifade edilir. Örneğin;

$$I = \int_0^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-y^3} dy$$

integralinin gama fonksiyonu ile çözümü

$$I = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

şeklindedir.

2.3 GAMA FONKSİYONUNUN UYGULAMALARI

ALLİED FONKSİYONLARI

2.3.1. (1) denkleminin aşikar çözümü:

$$(1) \quad y(x+1)-r(x)y(x) = 0$$

denkleminin genel çözümünün, (12) denkleminin herhangi bir çözümü cinsinden ifade edilebileceği görüldü. (12) denklemi $\Gamma(x)$ ve $\overline{\Gamma}(x)$ çözümleri tarafından gerçeklendiği için (1) denklemini iki özel çözümü

$$(23)\qquad y_1(x)=c_0^{x}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\Gamma(x-\alpha_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(x-\beta_k)}\;,\qquad y_2(x)=c_0^{x}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\bar{\Gamma}(x-\alpha_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\bar{\Gamma}(x-\beta_k)}$$

Bunlara sırasıyla birinci ve ikinci esas çözümler denir. Bu çözümler $p(x)$ bir periyodik fonksiyon olduğunda $y_2(x)=p(x)y_1(x)$ bağıntısıyla birleşirler. (16) denkleminden

$$(24)\qquad p(x)=\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-e^{2\pi i(x-\alpha_k)}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-e^{2\pi i(x-\beta_k)}\right)}$$

yazılabilir.

2.3.2. Rasyonel Fonksiyonların Toplamı : $\psi(x)$ fonksiyonu

Toplamın birkaç örneği Bölüm I 'de gözönüne alınmıştı ve bir polinomun toplamımının ondan sonra gelen daha yüksek dereceli diğer bir polinom olduğu görüldü; yani,

$$(25)\qquad \mathcal{S}\,1=x\;,\quad \mathcal{S}\,x=\binom{x}{2}\;,\quad \mathcal{S}\binom{x}{2}=\binom{x}{3}\;,\;\ldots,\quad \mathcal{S}\binom{x}{n}=\binom{x}{n+1}$$

olur. $P(x)$ bir polinom ve $Q(x)$, payı ve paydasından daha küçük dereceli olan bir kesir olsun ve herhangi bir $r(x)=P(x)+Q(x)$ rasyonel fonksiyonu gözönüne alınsın. $Q(x)$, $c/(x-a)^m$ şeklindeki kesirlere parçalanabilir. O halde $\mathcal{S}\,1/(x-a)^m$ ifadesini bulalım.

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

denkleminden logaritmik türev ile

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

bulunur; ya da eğer $\Gamma(x)$ 'in logaritmik türevi $\psi(x)$ ile gösterilirse

$$(26)\qquad \psi(x+1)=\frac{1}{x}+\psi(x)$$

elde edilir. Böylece $\psi(x)$,

$$(4)\quad y(x+1) - y(x) = \frac{1}{x}$$

formundaki

$$(27)\quad y(x+1)-y(x)=\frac{1}{x}$$

fark deklemini sağlar. Toplamanın tanımından

$$\sum \frac{1}{x} = \psi(x)$$

yazılabilir.(26) denkleminin farkı alınırsa

$$\frac{d}{dx}\psi(x+1) = -\frac{1}{x^2} + \frac{d}{dx}\psi(x)$$

elde edilir. Benzer şekilde fark alınarak devam edilirse

$$(28)\quad \sum \frac{1}{(x-\alpha)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\psi(x-\alpha)$$

ve

$$\sum \frac{(-1)^m}{x^{m+1}} = \frac{d^m}{dx^m}\psi(x)$$

bulunur. Eğer (27) denklemini sağlayan $\overline{\Gamma}'(x)/\overline{\Gamma}(x)$ fonksiyonu $\overline{\psi}(x)$ ile gösterilirse bu toplamın diğer değeri aynı şekilde bulunur; yani

$$(29)\quad \sum \frac{1}{(x-\alpha)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\ \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\ \overline{\psi}(x-\alpha)$$

olur. Herhangi bir rasyonel fonksiyonun toplamının analitik ifadesi, (25) ve (28) ya da (29) formülleri kullanılarak kısaltılabilir. (17) Euler bağıntısından $\overline{\psi}(x)$ 'e karşılık gelen

$$\psi(1-x) - \psi(x) = \pi\cot g\pi x$$

bağıntısı bulunur.

2.3.3. Beta fonksiyonu

(30) $$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

fonksiyonuna Beta Fonksiyonu denir. Özelliklerinin büyük bir kısmı tanımdan anlaşılabilir; örneğin $B(x,y)=B(y,x)$ ve

(31) $$\begin{cases} B(x+1,y)= \dfrac{x}{x+y}\, B(x,y) \\ B(x,y+1)= \dfrac{y}{x+y}\, B(x,y) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir. $R(x)$ ve $R(y)$, sırasıyla x ve y 'nin reel kısımlarını göstersin. Beta fonksiyonunun sonlu bir integral olarak ifadesi, $R(x)>0$ için

(32) $$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt$$

şeklinde gösterilir.

2.4. BİRİNCİ MERTEBEDEN GENEL DENKLEM

(33) $$y(x+1) - r_1(x)y(x) = r_2(x)$$

birinci mertebeden rasyonel katsayılı genel lineer fark denklemi, Bölüm I 'deki (13) denkleminden

(34) $$y(x) = y_1(x) \oint \frac{r_2(x)}{y_1(x+1)}$$

çözümüne sahiptir. Burada $y_1(x)$,

(35) $$y(x+1)-r_1(x)y(x) = 0$$

homojen denkleminin bir çözümüdür. (33) denkleminin en genel çözümü, (14) denkleminden

$$y(x) = \delta(x)+ p(x)y_1(x)$$

şeklinde yazılır. Burada $\delta(x)$ bir çözüm ve $p(x)$ keyfi bir periyodik fonksiyondur. (34) denkleminden, (33) denklemini formel olarak sağlayan iki sembolik çözüm

$$y_r(x)=y_1(x)\left[-\frac{r_2(x)}{y_1(x+1)}-\frac{r_2(x+1)}{y_1(x+1)}-\ldots\right]$$

$$y_1(x)=y_1(x)\left[\frac{r_2(x-1)}{y_1(x)}+\frac{r_2(x-2)}{y_1(x-1)}+\ldots\right]$$

bulunur. (35) denklemi kullanılırsa $y_1(x)$ ve $y_r(x)$,

$$y_r(x)=-\frac{r_2(x)}{r_1(x)}-\frac{r_2(x+1)}{r_1(x)r_1(x+1)}-\frac{r_2(x+2)}{r_1(x)r_1(x+1)r_1(x+2)}-\ldots$$

$$y_1(x)=r_2(x-1)+r_1(x-1)r_2(x-2)+r_1(x-1)r_1(x-2)r_2(x-3)+\ldots$$

şeklinde basit olarak bulunur. (1) denklemindeki gibi (33) denklemini formel olarak sağlayan $1/x$ cinsinden bir kuvvet serisi bulunabilir. Eğer

$$r_1(x)=x^{\mu}\left(c_0+\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\ldots\right),\quad (c_0\neq 0)$$

$$r_2(x)=x^{\nu}\left(d_0+\frac{d_1}{x}+\frac{d_2}{x^2}+\ldots\right),\quad (d_0\neq 0)$$

yazılırsa bu seriler, $\mu>0$ ise

$$x^{\nu-\mu}\left(s_0+\frac{s_1}{x}+\frac{s_2}{x^2}+\ldots\right)$$

ve $\mu\leq 0$

$$x^{\nu}\left(s_0+\frac{s_1}{x}+\frac{s_2}{x^2}+\ldots\right)$$

şeklindedir. $\mu=0$, $c_0=1$ durumu bir istisnadır; bunun için x^{ν} yerine $x^{\nu+1}$ çarpanı yazılır.

Birinci mertebeden homojen olmayan fark denklemlerini sağlayan fonksiyonların en ilginç olanı Prym 'in fonksiyonlarıdır:

$$P(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt\quad,\quad Q(x)=\int_1^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Bu fonksiyonlar, daha genel fonksiyonlar olan

$$(36) \qquad P_\sigma(x) = \int_0^\sigma t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad \text{ve} \quad Q_\sigma(x) = \int_0^\sigma t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

fonksiyonlarının $\sigma=1$ için özel durumlarıdır. Burada σ, reel ya da kompleks herhangi bir sabittir. (22) ile yapılan karşılaştırmadan

$$P_\sigma(x) + Q_\sigma(x) = \Gamma(x)$$

olduğu görülür. Bu yüzden $P_\sigma(x)$ ve $Q_\sigma(x)$ fonksiyonlarına bazen tam olmayan gama fonksiyonları denir ve

$$P_\sigma(x+1) - xP_\sigma(x) = -e^{-\sigma}\sigma^x$$

$$Q_\sigma(x+1) - xQ_\sigma(x) = e^{-\sigma}\sigma^x$$

fark denklemlerini ayrı ayrı sağlar. İkisi de ($\Gamma(x)$ gibi)

$$(37) \qquad y(x+2) - (x+\sigma+1)y(x+1) + \sigma x y(x) = 0$$

homojen denkleminin çözümleridir.

BÖLÜM III

HİPERGEOMETRİK DENKLEMLER

GENEL DURUM

3.1. HİPERGEOMETRİK FARK DENKLEMİ

Yüksek mertebeli en basit lineer homojen fark denklemi, lineer katsayılı olanlardır. Bu tipin ikinci mertebe denklemi

(1) $(a_2x+b_2)y(x+2)+(a_1x+b_1)y(x+1)+(a_0x+b_0)y(x) = 0$

şeklindedir. Bu denklemin çözümleri,

(2) $$F(\alpha,\beta,\delta,z) = 1+\frac{\alpha\beta}{1.\delta}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\delta(\delta+1)}z^2+\ldots$$

hipergeometrik serisi şeklinde gösterildiği için denkleme hipergeometrik fark denklemi denir. Bu denklemin teorisindeki önemli bir kural

(3) $a_2r^2+a_1r+a_0 = 0$

karakteristik denkleminin r_1 ve r_2 kökleri ile temsil edilir. Burada r_1 ve r_2 sonlu, birbirlerinden bağımsız ve sıfırdan farklı olduğu "genel durum" ile ilgilenilecektir.
(1) denklemini elde etmek için

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3+2 = \frac{b_2}{a_2}$$

$$\beta_1r_2+\beta_2r_1+(\beta_3+1)(r_1+r_2) = -\frac{b_1}{a_2}$$

$$r_1r_2\beta_3 = \frac{b_0}{a_2}$$

denkemleri ile β_1,β_2,β_3 sabitleri tanımlansın. Katsayılar determinantı $r_1r_2(r_1-r_2) \neq 0$ olduğu için bir tek çözüme sahiptir. (3) denkleminden

$$-(r_1+r_2) = \frac{a_1}{a_2} \quad , \quad r_1r_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

bağıntıları elde edilir; yani (1) denklemi,

(4) $(x+\beta_1+\beta_2+\beta_3+2)y(x+2) - [(r_1+r_2)(x+\beta_3+1)+\beta_1 r_2+\beta_2 r_1]y(x+1)$

$$+ r_1 r_2(x+\beta_3)y(x) = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$x+\beta_3 = x'$ ve $y(x'-\beta_3) = f(x')$ olsun; o halde $f(x)$,

(5) $(x+\beta_1+\beta_2+2)y(x+2) - [(r_1+r_2)(x+1)+\beta_1 r_2+\beta_2 r_1]y(x+1)$

$$+ r_1 r_2 x y(x) = 0$$

denkemini sağlar. Bu denklem, genel durum için (1) denknleminin normal formu gibi kabul edilebilir.

3.2. FORMEL KUVVET SERİ ÇÖZÜMLERİ

(5) denklemi $1/x$ cinsinden iki kuvvet serisi ile formel olarak sağlanır. (5) denkleminde,

(6) $$y(x) = c^x x^d \left(s + \frac{s'}{x} + \dots\right)$$

alınır ve $c^x x^d$ ile bölünürse

$$c^2(x+\beta_1+\beta_2+2)\left(1+\frac{2}{x}\right)^d \left[s+\frac{s'}{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1} + \dots\right]$$

$$-c\left[(r_1+r_2)(x+1)+\beta_1 r_2+\beta_2 r_1\right]\left(1+\frac{1}{x}\right)^d$$

$$*\left[s+\frac{s'}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1} + \dots\right] + r_1 r_2 x\left(s+\frac{s'}{x}+\frac{s''}{x^2}+\dots\right) = 0$$

elde edilir. $1/x$ 'in kuvvetlerine genişletilir ve benzer terimlerin katsayıları 0 'a eşitlenirse,

$$c^2-c(r_1+r_2)+r_1 r_2 = 0$$

(7) $$\left[(\beta_1+\beta_2+2)c^2+2c^2 d\right]s+c^2 s'-c(r_1+r_2+\beta_1 r_2+\beta_2 r_1)s-cd(r_1+r_2)s$$

$$-c(r_1+r_2)s'+r_1 r_2 s' = 0 \quad \text{v.b}$$

bulunur. Burada $c = r_1$ ya da r_2, $d = -\beta_1-1$ ya da $-\beta_2-1$,

$$\frac{s_1'}{s_1} = (\beta_1+1)\left(\frac{\beta_2 r_1}{r_2-r_1} - \frac{\beta_1}{2}\right), \quad \frac{s_2'}{s_2} = (\beta_2+1)\left(\frac{\beta_1 r_2}{r_1-r_2} - \frac{\beta_2}{2}\right)$$

v.b. s_1'/s_1 ve s_2'/s_2 , s'/s 'in iki değeridir; s_1 ve s_2 keyfidir. Bütün katsayılar bu şekilde bulunabilir. Eğer önce $c=r_1$, $d= -\beta_1-1$, $s=s_1$ ve daha sonra $c=r_2$, $d= -\beta_2-1$, $s=s_2$ alınırsa

$$(8)\begin{cases} S_1(x)=r_1^x\, x^{-\beta_1-1}\left(s_1+\dfrac{s_1'}{x}+\dfrac{s_1''}{x^2}+\dots\right) \\ S_2(x)=r_2^x\, x^{-\beta_2-1}\left(s_2+\dfrac{s_2'}{x}+\dfrac{s_2''}{x^2}+\dots\right) \end{cases}$$

şeklindeki iki seri bulunur.

3.3. MATRİS KULLANIMI

Genellikle ikinci mertebeden bir tem denklem yerine birinci mertebeden iki denklemli bir sistem ile ilgilenmek tercih edilir. Yüksek mertebeden bir denklem ile birinci mertebeden bir denklem arasındaki benzerlikler matris kullanımı ile bulunur.

(5) denklemine eşit bir sistem değişik yollarla bulunabilir. $y(x)=y_1(x)$, $y(x+1)=y_2(x)$ olmak üzere $y_1(x)$ ve $y_2(x)$

$$(9)\begin{cases} y_1(x+1) = y_2(x) \\ y_2(x) = -\dfrac{r_1r_2x}{(x+\beta_1+\beta_2+2)}.y_1(x)+\dfrac{(r_1+r_2)(x+1)+\beta_1r_2+\beta_2r_1}{x+\beta_1+\beta 2}.y_2(x) \end{cases}$$

sistemini gerçeklerler. Bu sistemin herhangi bir çözümü varsa ilk $y_1(x)=y(x)$ elemanı (5) denkleminin bir çözümünü verir. Eğer $y_{11}(x)$, $y_{21}(x)$ ve $y_{12}(x)$, $y_{22}(x)$ sistemin lineer bağımsız herhangi iki çözümü ise

$$Y(x) = \| y_{ij} \| = \begin{Vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) \end{Vmatrix}$$

matrisine, sistemin bir matris çözümü denir . Sistemdeki y 'lerin katsayıları diğer matrisler şeklindedir:

$$R(x) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{r_1 r_2 x}{(x+\beta_1+\beta_2+2)} & \dfrac{(r_1+r_2)(x+1)+\beta_1 r_2+\beta_2 r_1}{x+\beta_1+\beta_2+2} \end{Vmatrix}$$

Y(x) 'in elemanları ile sağlanan dört denklem, (9) sistemine denk olan bir tek matris denklemi içinde toplanabilir:

$$(10) \qquad Y(x+1) = R(x)Y(x)$$

P(x), elemanları 1 periyodunun periyodik fonksiyonları ve determinantı sıfıra özdeş olmayan bir matris olsun; P(x+1) = P(x) dir. Y(x)P(x), (10) denkleminin bir çözümü ise,

$$Y(x+1)P(x+1) = R(x)Y(x)P(x)$$

elde edilir. $P^{-1}(x)$ ters matrisi ile her iki taraf sağdan çarpılırsa (10) denklemi elde edilir. P(x) 'in elemanları keyfi periyodik fonksiyonlar ise Y(x)P(x) 'e (10) denkleminin genel matris çözümü denir.

3.4. İNTEGRAL VE SERİ ÇÖZÜMLERİ

(5) denkleminin çözümleri, sonsuz seriler ve sonlu integraller cinsinden de bulunabilir. Bunun için

$$(11) \qquad y(x) = \int_a^b t^{x-1}\, v(t)\, dt$$

Laplace dönüşümü kullanılır. (5) denkleminin bir çözümü olan bu integraldeki v(t) fonksiyonunu bulalım:
Kısmi integral alınırsa

$$\int_a^b x t^{x+k-1} v(t)\, dt = [t^{x+k} v(t)]_a^b - \int_a^b t^x \frac{d}{dt}[t^k\, v(t)]\, dt$$

elde edilir. (11) integrali (5) denkleminde yerine konursa ve k = 0,1 ve 2 için bu formül kullanılırsa sağ taraf

$$\int_a^b t^x \left\{ -\frac{d}{dt}\Big[(t-r_1)(t-r_2)v(t) \Big] + v(t)\Big[(\beta_1+\beta_2+2)t-(\beta_1+1)r_2-(\beta_2+1)r_1 \Big] \right\} dt + \Big[t^x (t-r_1)(t-r_2)v(t) \Big]_a^b$$

şeklini alır. a ile b, integre edilmiş taraf sıfır olacak şekilde seçilmiş ise ve integral sıfıra özdeş ise bu ifade de sıfıra eşittir.
İntegral sıfıra eşitlenir ve sadeleştirilirse v(t) 'nin

$$v(t) = (t-r_1)^{\beta_1} (t-r_2)^{\beta_2}$$

şeklinde bir çözüm olduğu ve

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta_1}{t-r_1} + \frac{\beta_2}{t-r_2}$$

diferansiyel denklemini sağladığı görülür. a ve b,

$$(12) \qquad \Big[t^x(t-r_1)^{\beta_1+1} + (t-r_2)^{\beta_2+1} \Big]_a^b = 0$$

olacak şekilde seçilirse (5) denklemi,

$$(13) \qquad y(x) = \int_a^b t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1} (t-r_2)^{\beta_2} dt$$

integrali ile gerçeklenir.
Parantez içindeki ifadeler, $R(x)>0$ ise $t=0$ da; $R(\beta_1)>-1$ ise $t=r_1$ de; $R(\beta_2)>-1$ ise $t=r_2$ de; $R(x+\beta_1+\beta_2)<-2$ ise $t=\infty$ da sıfıra eşittir. a ve b yerine bu 4 durumdan herhangi ikisi alınırsa (5) denkleminin, x,β_1,β_2 üzerindeki belli şartlar altında gerçeklenen (13) formundaki 6 çözüm bulunur:

$$
(14)\left\{
\begin{aligned}
h_1(x) &= \int_0^{r_1} t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(x)>0\ ,R(\beta_1)>-1]\\
h_2(x) &= \int_0^{r_2} (t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(x)>0\ ,\ R(\beta_2)-1]\\
g_1(x) &= \int_\infty^{r_1} t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(x+\beta_1+\beta_2)<0\ ,\ R(\beta_1)>-1]\\
g_2(x) &= \int_\infty^{r_2} t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(x+\beta_1+\beta_2)<0\ ,\ R(\beta_2)>-1]\\
l(x) &= \int_{r_2}^{r_1} t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(\beta_1)-1\ ,\ R(\beta_2)>-1]\\
m(x) &= \int_0^{\infty} t^{x-1}(t-r_1)^{\beta_1}(t-r_2)^{\beta_2}\,dt \qquad [R(x)>0\ ,\ R(x+\beta_1+\beta_2)<0]
\end{aligned}
\right.
$$

(5) fark denkleminin, hipergeometrik seriye dayanarak hipergeometrik diferansiyel denklemlerdeki 24 seriye benzer şekilde 24 çözümü bulunur. (14) integral çözümleri kullanılarak $x = r_2/r_1$ olmak üzere aşağıdaki seri çözümleri elde edilir:

$$
(15)\quad h_1(x)\begin{cases}
(a)\ (-r_1)^{\beta_1}(r_1-r_2)^{\beta_2}\ r_1^{x}B(x,\beta_1+1) \\
\qquad \ast F\left(\beta_1+1,\ -\beta_2,\ x+\beta_1+1,\ \dfrac{1}{1-\chi}\right), \\[2ex]
(b)\ (-r_1)^{\beta_1}(-r_2)^{\beta_2}\left(\dfrac{r_1r_2}{r_2-r_1}\right)^{x}B(x,\beta_1+1) \\
\qquad \ast F\left(x,\ x+\beta_1+\beta_2+1,\ x+\beta_1+1,\ \dfrac{1}{\chi}\right), \\[2ex]
(c)\ (-r_1)^{\beta_1}(-r_2)^{\beta_2}\ r_1^{x}\ B(x,\beta_1+1) \\
\qquad \ast F\left(x,\ -\beta_2,\ x+\beta_1+1,\ \dfrac{1}{\chi}\right), \\[2ex]
(d)\ -r_2^{-\beta_1-1}(r_1-r_2)^{\beta_1+\beta_2+1}\ r_1^{x+\beta_1}\ B(x,\beta_1+1) \\
\qquad \ast F\left(x+\beta_1+\beta_2+1,\ \beta_1+1,\ x+\beta_1+1,\ \dfrac{1}{\chi}\right);
\end{cases}
$$

$$
(16)\quad h_2(x)\begin{cases}
(a)\ (-r_2)^{\beta_2}(r_2-r_1)^{\beta_1}\ r_2^{x}B(x,\beta_2+1) \\
\qquad \ast F\left(\beta_2+1,\ -\beta_1,\ x+\beta_2+1,\ \dfrac{\chi}{\chi-1}\right), \\[2ex]
(b)\ (-r_1)^{\beta_1}(-r_2)^{\beta_2}\left(\dfrac{r_1r_2}{r_1-r_2}\right)^{x}B(x,\beta_2+1) \\
\qquad \ast F\left(x,\ x+\beta_1+\beta_2+1,\ x+\beta_2+1,\ \dfrac{\chi}{\chi-1}\right), \\[2ex]
(c)\ (-r_1)^{\beta_1}(-r_2)^{\beta_2}\ r_2^{x}\ B(x,\beta_2+1) \\
\qquad \ast F\left(x,\ -\beta_1,\ x+\beta_2+1,\ \chi\right), \\[2ex]
(d)\ -r_1^{-\beta_2-1}(r_2-r_1)^{\beta_1+\beta_2+1}\ r_2^{x+\beta_2}\ B(x,\beta_2+1) \\
\qquad \ast F\left(x+\beta_1+\beta_2+1,\ \beta_2+1,\ x+\beta_2+1,\ \chi\right);
\end{cases}
$$

$$
(17)\quad g_1(x) \begin{cases}
(a)\ -(r_1-r_2)^{\beta_2}\, r_1^{x+\beta_1}\, B(\beta_1+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(\beta_1+1,\ -\beta_2,\ 1-x-\beta_2,\ \dfrac{x}{x-1}\right), \\
(b)\ -(r_1-r_2)^{x+\beta_1+\beta_2}\, B(\beta_1+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(1-x,\ -x-\beta_1-\beta_2,\ 1-x-\beta_2,\ \dfrac{x}{x-1}\right), \\
(c)\ -(r_1-r_2)^{\beta_1+\beta_2+1}\, B(\beta_1+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(1-x,\ \beta_1+1,\ 1-x-\beta_2,\ x\right) \\
(d)\ -r_1^{x+\beta_1+\beta_2}\, B(\beta_1+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(-x-\beta_1-\beta_2,\ -\beta_2,\ 1-x-\beta_2,\ x\right)\ ;
\end{cases}
$$

$$
(18)\quad g_2(x) \begin{cases}
(a)\ -(r_2-r_1)^{\beta_1}\, r_2^{x+\beta_2}\, B(\beta_2+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(\beta_2+1,\ -\beta_1,\ 1-x-\beta_1,\ \dfrac{1}{1-x}\right), \\
(b)\ -(r_2-r_1)^{x+\beta_1+\beta_2}\, B(\beta_2+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(1-x,\ -x-\beta_1-\beta_2,\ 1-x-\beta_1,\ \dfrac{1}{1-x}\right), \\
(c)\ -(r_2-r_1)^{\beta_1+\beta_2+1}\, r_2^{x-1}\, B(\beta_2+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(1-x,\ \beta_2+1,\ 1-x-\beta_1,\ \dfrac{1}{x}\right), \\
(d)\ -r_2^{x+\beta_1+\beta_2}\, B(\beta_2+1,-x-\beta_1-\beta_2) \\
\qquad * F\left(-x-\beta_1-\beta_2,\ -\beta_1,\ 1-x-\beta_1,\ \dfrac{1}{x}\right)\ ;
\end{cases}
$$

$l(x)$ ve $m(x)$ çözümleri için de aynı şekilde 4 'er ifade bulunur.

3.5. İNDİRGENEBİLİR DENKLEMLER

Sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemi, daha düşük mertebeli benzer bir denklem ile ortak bir çözüme sahipse denkleme indirgenebilirdir denir. Bu tanıma göre; bir hipergeometrik fark denkleminin, Bölüm II 'de çalıştığımız birinci mertebeden

(1) $y(x+1) - r(x)y(x) = 0$ $[r(x)$ rasyonel$]$

denklemini sağlayan bir $y(x)$ çözümü varsa bu hipergeometrik fark denklemi indirgenebilirdir.
(5) denkleminin indirgenebilir olması için gerek yeter koşul β_1 ya da β_2 'nin bir tamsayı olmasıdır.
Bir indirgenebilir denklemin temel çözüm formları (15)-(18) denklemlerinden bulunabilir. Eğer β_1, sıfır ya da pozitif bir tamsayı ise $h_2(x)$ ve $g_2(x)$ çözümleri sırasıyla

$$r_2^x \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_1+2)} R(x) \quad , \quad r_2^x \frac{\Gamma(-x-\beta_1-\beta_2)}{\Gamma(1-x-\beta_1)} R'(x)$$

şeklindedir. Burada $R(x)$ ve $R'(x)$, rasyonel fonksiyonlardır.
Eğer β_1, negatif bir tamsayı ise (15a) 'dan

$$h_1'(x)=r_1^x \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta_1+1)} R(x)$$

olduğu görülür. β_2 bir tamsayı olduğunda da benzer sonuçlar bulunur.

β_1 pozitif bir tamsayı ya da β_2 negatif bir tamsayı ise $h_2(x)$ ve $g_2(x)$ çözümleri yukarıdaki (1) denklemini gerçekler. Aynı şekilde β_1 negatif tamsayı ya da β_2 pozitif bir tamsayı ise $h_1(x)$ ve $g_1(x)$ çözümleri de bu denklemi gerçekler. Diğer esas çözümler, bu tipteki birinci mertebeden herhangi bir denklemi genellikle gerçeklemezler.

Eğer β_1 ve β_2 'nin her ikisi de pozitif tamsayı ya da her ikisi de negatif tamsayı ise bütün esas çözümler (1) denklemini gerçekler; bu durumda denkleme tam indirgenebilir denklem denir.

$$(x+3)y(x+2) - (x+3)y(x+1) - 2xy(x) = 0$$

denkleminden

$$r_1 = 2 \ , \ r_2 = -1 \ , \ \beta_1 = 0 \ , \ \beta_2 = 1$$

bulunur. Bu denklemin esas çözümleri,

$$h_1(x) = g_1(x) = \frac{2^x(3x+1)}{x(x+1)}$$

$$h_2(x) = g_2(x) = \frac{(-1)^x}{x(x+1)}$$

şeklindedir.

KAYNAKÇA

BATCHELDER M.Paul, AN INTRODUCTION TO LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS, NEW YORK, 1927

SPIEGEL R.Murray, SCHAUM'S OUTLINE SERIES (Finite Differences and Difference Equations)

ÇAĞAL Behiç, SAYISAL ANALİZ, İSTANBUL, 1989