

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONSOL BİR KİRİŞTEKİ DALGA YAYILIMI**

İnş. Müh. Aykut ESKİN

**FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)**

**Tez Jürisi : Prof. Dr. Faruk YÜKSELER (YTÜ)**

**Tez Jürisi : Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)**

**İSTANBUL, 2007**

## İÇİNDEKİLER

|   | Sayfa |
|---|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....   | iv    |
| KISALTIMA LİSTESİ .....   | v     |
| ŞEKİL LİSTESİ .....   | vi    |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....   | ix    |
| ÖNSÖZ.....  | x     |
| ÖZET .....  | xi    |
| ABSTRACT .....  | xii   |
| 1. GİRİŞ.....   | 1     |
| 1.1 Konuya İlişkin Çalışmalar .....   | 1     |
| 1.2 Çalışmanın Amacı .....  | 2     |
| 2. PROBLEMİN TANITIMI .....   | 4     |
| 3. HAREKET DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE<br>ÇIKARILMASI .....       | 6     |
| 3.1 Klasik Dinamik Rijitlik Matrisinin Kullanımıyla Frekans Alanında Çözüm..... | 6     |
| 3.2 Zaman Tanım Alanında Doğrudan Çözüm .....                                   | 6     |
| 3.2.1 Hareket Denklemine Çözümü İçin Akış Diyagramı .....                       | 8     |
| 3.2.1.1 Başlangıç Hesaplamaları .....   | 8     |
| 3.2.1.2 Her Bir $t = t_{i+1}$ Zaman Adımı İçin Hesaplamalar .....               | 8     |
| 4. HAREKET DENKLEMLERİNİN SPEKTRAL ELEMAN YÖNTEMİYLE<br>ÇIKARILMASI .....       | 9     |
| 5. SAYISAL HESAPLAMALAR.....  | 15    |
| 5.1 Spektral Dinamik Rijitlik Matrisi Kullanılarak Sayısal Hesaplamalar .....   | 15    |
| 5.2 Klasik Dinamik Rijitlik Matrisi Kullanılarak Sayısal Hesaplamalar .....     | 17    |
| 5.3 Zaman Tanım Alanında Doğrudan Çözüm ile Sayısal Hesaplamalar .....          | 19    |
| 5.4 Sonuçlar .....  | 35    |
| KAYNAKLAR.....  | 37    |
| EKLER .....   | 39    |
| Ek 1 Dalga Tanımı ve Kiriş Eğilmesi Durumunda Dalgalar .....                    | 40    |

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| Ek 1.1  | Giriş .....  | 40  |
| Ek 1.2  | Dalga Hareketi Kavramının Tanıtımı – Elastik Sürekli Ortam Bakış Açısı.....                            | 42  |
| Ek 1.3  | Çoklu, Ayrık, Kütle–Yay–Sönümleyici Osilatör Kavramlarının Tanıtımı –<br>Makroskopik Bakış Açısı ..... | 47  |
| Ek 1.4  | Doğal Frekanslar, Titreşim Modları, Zorlanmış Titreşimler ve Rezonans<br>Kavramlarının Tanıtımı .....  | 49  |
| Ek 1.5  | Sürekli Sistemler–Yay, Çubuk ve Plaklardaki Dalga Tiplerinin İncelenmesi .....                         | 52  |
| Ek 2    | Sayısal Fourier ve Ters Fourier Dönüşümleri .....  | 69  |
| Ek 2.1  | Fourier Dönüşümü Hakkında Özet Bilgiler.....   | 69  |
| Ek 2.2  | Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri .....   | 69  |
| Ek 2.3  | Ayrık Fourier Dönüşümü.....  | 71  |
| Ek 2.4  | Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemi.....   | 71  |
| Ek 2.5  | Kompleks Fourier Serisi .....  | 72  |
| Ek 2.6  | Sürekli Fourier Dönüşümü ve Kompleks Fourier Serisi Arasındaki İlişki .....                            | 74  |
| Ek 2.7  | Ayrık Fourier Dönüşüm Formülleri .....   | 75  |
| Ek 2.8  | Katlama Frekansı .....   | 76  |
| Ek 2.9  | Ayrık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Son Şekli .....  | 76  |
| Ek 2.10 | Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemli Bir Özelliği.....   | 77  |
| Ek 2.11 | Ayrık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Kompakt Formu.....   | 78  |
| Ek 2.12 | Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol.....  | 78  |
| Ek 2.13 | Ters Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol.....   | 79  |
| Ek 2.14 | FFT Algoritması (Hızlı Fourier Dönüşüm Algoritması) .....  | 80  |
| Ek 3    | Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı .....                                      | 81  |
| Ek 3.1  | Tek Serbestlik Dereceli Sönümsüz Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı.....                              | 81  |
| Ek 3.2  | Viskoz Sönümlü Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı                             | 86  |
| Ek 3.3  | Kompleks Frekans Cevabı.....   | 93  |
| Ek 4    | Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Periyodik Tahrike Cevabı.....                                      | 98  |
| Ek 4.1  | Periyodik Tahrike Cevap – Gerçek Fourier Serileri.....   | 98  |
| Ek 4.2  | Periyodik Tahrike Cevap – Kompleks Fourier Serileri .....  | 104 |
| Ek 4.3  | Periyodik Olmayan Tahrike Cevap – Fourier İntegrali .....  | 111 |
| Ek 4.4  | Kompleks Frekans Cevabı ile Birim İmpuls Cevabı İlişkisi .....   | 115 |
| Ek 4.5  | Ayrık Fourier Dönüşümleri (DFT) ve Hızlı Fourier Dönüşümleri (FFT).....                                | 116 |
|         | ÖZGEÇMİŞ.....  | 119 |

## SİMGE LİSTESİ

|               |  |
|---------------|--|
| $A$           | Kesit Alanı                              |
| $b$           | Kesit genişliği                          |
| $c$           | Dalga hızı                               |
| $c_g$         | Grup hızı                                |
| $c_v$         | Viskoz sönüm katsayısı                   |
| $h$           | Kesit yüksekliği                         |
| $E_1$         | Kiriş ana malzemesinin elastisite modülü |
| $E_2$         | Farklı elemanın elastisite modülü        |
| $F(t)$        | Dış yük fonksiyonu                       |
| $I$           | Atalet momenti                           |
| $k$           | Dalga sayısı                             |
| $k_s$         | Yay rijitliği                            |
| $L$           | Kiriş boyu                               |
| $M$           | Moment                                   |
| $q(x)$        | Yayıllı yük                              |
| $V$           | Kesme kuvveti                            |
| $w$           | Zaman tanım alanında yer değiştirme      |
| $\bar{w}$     | Frekans tanım alanında yer değiştirme    |
| $\varepsilon$ | Şekil değiştirme                         |
| $\rho$        | Birim hacim kütlesi                      |
| $\eta$        | Poisson oranı                            |
| $\omega$      | Açısal frekans                           |
| $[C]$         | Sönüm matrisi                            |
| $[K]$         | Rijitlik matrisi                         |
| $[\bar{K}]$   | Klasik dinamik rijitlik matrisi          |
| $[\hat{K}]$   | Etkili rijitlik matrisi                  |
| $[M]$         | Kütle matrisi                            |

## **KISALTMA LİSTESİ**

|      |   |
|------|---|
| BEM  | Boundary Element Method, Sınır Eleman Metodu          |
| DFT  | Discrete Fourier Transform, Ayrık Fourier Dönüşümü    |
| EBKT | Euler – Bernoulli Kiriş Teorisi                       |
| FD   | Fourier Dönüşümü                                      |
| FDM  | Finite Difference Method, Sonlu Farklar Metodu        |
| FEM  | Finite Element Method, Sonlu Eleman Metodu            |
| FFT  | Fast Fourier Transform, Hızlı Fourier Dönüşümü        |
| SEM  | Spectral Element Method, Spektral Eleman Metodu       |
| MSLM | Mass-Spring Lattice Models, Kütle-Yay Kafes Modelleri |
| TFD  | Ters Fourier Dönüşümü                                 |
| TSD  | Tek Serbestlik Dereceli                               |

## ŞEKİL LİSTESİ

|               | Sayfa   |
|---------------|---|
| Şekil 2.1     | Ankastre mesnetli konsol kiriş..... 4   |
| Şekil 2.2     | Zaman tanım alanında uyarıcı darbe yükünün şekli ..... 5  |
| Şekil 5.1     | Zaman tanım alanındaki yük fonksiyonu..... 15   |
| Şekil 5.2(a)  | Frekans tanım alanındaki yük fonksiyonu (Yükün Fourier dönüşümü)..... 16  |
| Şekil 5.2(b)  | Frekans tanım alanındaki yer değiştirme ..... 16  |
| Şekil 5.2(c)  | Zaman tanım alanındaki yer değiştirme..... 17   |
| Şekil 5.3(a)  | Frekans tanım alanındaki yük fonksiyonu (Yükün Fourier dönüşümü)..... 18  |
| Şekil 5.3(b)  | Frekans tanım alanındaki yer değiştirme ..... 18  |
| Şekil 5.3(c)  | Zaman tanım alanındaki yer değiştirme..... 19   |
| Şekil 5.4     | Zaman tanım alanındaki yer değiştirme..... 20   |
| Şekil 5.5     | ”b” bölgesinin konumuna göre ikincil dalgaların oluşma zamanları. Farklı malzemenin konumu (ankastre mesnete göre) (a) $x=80$ cm ile 100 cm arasında (b) $x=100$ cm ile 120 cm arasında (c) $x=120$ cm ile 140 cm arasında ..... 22 |
| Şekil 5.6     | Eleman yeri - İkincil dalga başlangıç zamanı grafiği ..... 23   |
| Şekil 5.7     | ”b” bölgesinin konumuna göre ikincil dalgaların oluşma zamanları. Farklı malzemenin konumu (ankastre mesnete göre) (a) $x=60$ cm ile 80 cm arasında (b) $x=100$ cm ile 120 cm arasında (c) $x=140$ cm ile 160 cm arasında..... 25   |
| Şekil 5.8     | Eleman yeri – İlk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği . 26  |
| Şekil 5.9     | Farklı elemanın $x=120$ cm de bitmesi durumunda ikincil dalgaların oluşma zamanı (a) $x=100$ cm ile 120 cm arasında (b) $x=80$ cm ile 120 cm arasında (c) $x=60$ cm ile 120 cm arasında (d) $x=40$ cm ile 120 cm arasında..... 28   |
| Şekil 5.10(a) | $E_2 = 2E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği ..... 31  |
| Şekil 5.10(b) | $E_2 = 5E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği ..... 31  |
| Şekil 5.10(c) | $E_2 = 10E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği ..... 32   |
| Şekil 5.10(d) | $E_2 = 20E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği ..... 32   |
| Şekil 5.11(a) | Farklı elemanın $x=160$ cm de bitmesi durumunda farklı $E_2$ değerleri için   |

|               |   |    |
|---------------|---|----|
|               | eleman boyu - $t_{\text{maks genlik}}$ grafiği.....   | 33 |
| Şekil 5.11(b) | Farklı elemanın $x = 140$ cm de bitmesi durumunda farklı $E_2$ değerleri için eleman boyu- $t_{\text{maks genlik}}$ grafiği.....        | 33 |
| Şekil 5.11(c) | Farklı elemanın $x = 120$ cm de bitmesi durumunda farklı $E_2$ değerleri için eleman boyu- $t_{\text{maks genlik}}$ grafiği.....        | 34 |
| Şekil 5.12    | Farklı elemanın boyunun 20 cm olması durumunda $E_2 = 2E_1$ değeri için farklı eleman bitiş yeri- $t_{\text{maks genlik}}$ grafiği..... | 35 |
| Şekil Ek 1.1  | Dalga ve parçacık hızlarının gösterimi .....  | 44 |
| Şekil Ek 1.2  | Basit bir dalga hareketi için zaman değışimleri.....  | 45 |
| Şekil Ek 1.3  | Basit bir dalga hareketi için uzaysal değışimler .....  | 45 |
| Şekil Ek 1.4  | Doğrusal ve doğrusal olmayan yayılım ilişkileri.....  | 46 |
| Şekil Ek 1.5  | Tek Serbestlik Dereceli, Toplu Parametrelili Osilatör.....  | 47 |
| Şekil Ek 1.6  | Titreşen Bir Platform Üzerinde Bulunan Bir İnsan Vücudunun Çoklu, Ayrık Kütle-Yay-Sönümleyici Modeli.....                               | 48 |
| Şekil Ek 1.7  | Gerilmiş Bir Yay İçin İlerleyen ve Duran Dalgaların Şematik Gösterimi.....  | 50 |
| Şekil Ek 1.8  | Esnek, gergin bir kablo parçasının boyuna titreşimleri .....  | 53 |
| Şekil Ek 1.9. | Dalga denklemi çözümünün karakterinin gösterimi .....   | 54 |
| Şekil Ek 1.10 | $x = 0$ noktasında harmonik uyarılmış ve $x = L$ noktasında tutulmuş bir yay için tahrik noktası mekanik özdirenci.....                 | 59 |
| Şekil Ek 1.11 | Enine titreşime maruz bir kiriş elemanında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri .....  | 63 |
| Şekil Ek 1.12 | $x = 0$ noktasında tutulu ve $x = L$ noktasında serbest bir kirişin gösterimi .....   | 65 |
| Şekil Ek 1.13 | Bir ucu tutulu bir ucu serbest bir kiriş için ilk dört eğilme modu şekilleri.....   | 67 |
| Şekil Ek 2.1  | $f(t)$ fonksiyonunun ayrık tanımı .....   | 71 |
| Şekil Ek 2.2  | Fourier serileri.....   | 73 |
| Şekil Ek 2.3  | Yayıllı Fourier sabitleri.....  | 74 |
| Şekil Ek 2.4  | Ayrık Fourier dönüşümünün simetri ve antisimetri özellikleri.....   | 77 |
| Şekil Ek 2.5  | Ayrık $f(t)$ fonksiyon değerleri .....  | 78 |
| Şekil Ek 2.6  | Ayrık $F^F$ değerleri .....   | 79 |
| Şekil Ek 2.7  | $F^F$ 'nin $[0, 2f_c]$ aralığına genişletilmesi.....  | 80 |
| Şekil Ek 3.1  | TSD sönümsüz sistemin harmonik tahriği.....   | 81 |
| Şekil Ek 3.2  | $p(t) = p_0 \sin \Omega t$ ile tahrik edilmiş TSD sönümsüz bir sistemin dinamik büyütme faktörleri.....                                 | 83 |

|               |   |     |
|---------------|---|-----|
| Şekil Ek 3.3  | TSD sisteminin prototipi.....   | 86  |
| Şekil Ek 3.4  | Rezonans durumunda ( $\Omega = \omega_n$ ) $u_p(t)$ 'nin cevabı .....   | 86  |
| Şekil Ek 3.5  | $p, u, \dot{u}$ ve $\ddot{u}$ 'yu temsil eden dönen vektörler .....   | 87  |
| Şekil Ek 3.6  | Kuvvet vektör poligonu .....  | 87  |
| Şekil Ek 3.7  | (a) Çeşitli sönüm miktarları için büyütme çarpanı – frekans oranı grafiği (b) Çeşitli sönüm miktarları için faz açısı – frekans oranı grafiği.....                            | 89  |
| Şekil Ek 3.8  | (a) Çeşitli sönüm çarpanları için büyütme çarpanı – frekans oranı grafiği (logaritmik) (b) Çeşitli sönüm çarpanları için faz açısı – frekans oranı grafiği (logaritmik) ..... | 90  |
| Şekil Ek 3.9  | Dönen vektörler için kompleks vektör notasyonu .....  | 96  |
| Şekil Ek 3.10 | Viskoz sönümlü bir sistemin kararlı hal titreşimi için vektör cevap titreşimi ..  | 97  |
| Şekil Ek 3.11 | Viskoz sönümlü bir sistemin kararlı hal titreşimi için vektör cevap titreşimi ..  | 97  |
| Şekil Ek 4.1  | $T_1$ periyotlu periyodik bir fonksiyon.....  | 98  |
| Şekil Ek 4.2  | Örnek Ek 4.2 ye göre tahrik ve cevap spektrumları.....  | 104 |
| Şekil Ek 4.3  | Periyodik cevap probleminin frekans alanına dönüşüm ile çözümü. ....  | 111 |
| Şekil Ek 4.4  | Süresiz (geçici) cevap probleminin frekans alanına dönüşüm ile çözümü... ..   | 116 |
| Şekil Ek 4.5  | $N = 8$ için $W_N^{mm}$ 'nin periyodik doğası .....   | 118 |

## ÇİZELGE LİSTESİ

|  | Sayfa |
|--|-------|
| Çizelge 5.1 Eleman yeri – İkincil dalga yeri başlangıç zamanı.....   | 23    |
| Çizelge 5.2 Eleman yeri – İlk ikincil dalganın en büyük genliğe ulaşma zamanı.....                                     | 25    |
| Çizelge 5.3(a) $2E_1$ ve $5E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğinin oluşma zamanı .....      | 29    |
| Çizelge 5.3(b) $10E_1$ ve $20E_1$ için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğinin oluşma zamanı .....    | 30    |
| Çizelge 5.4 $E_2 = 2E_1$ için eleman bitiş noktası – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğinin oluşma zamanları ..... | 35    |
| Çizelge Ek 2.1 Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri .....                                       | 70    |

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, hiçbir konuda benden yardımını esirgemeyen ve oldukça büyük sabır gösteren, tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK'e, çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan İnş. Yük. Müh. Mesut ŞİMŞEK'e ve İnş. Yük. Müh. Nihat İLHAN'a ayrıca her zaman desteklerini arkamda hissettiğim aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

## ÖZET

Serbest ucunda darbe yükü etkisindeki iki farklı malzemeden yapılmış konsol bir kirişin serbest ucundaki cevaplar incelenmiştir. Kiriş harmonik bir fonksiyon ve yanal üçgen bir darbe yükünün çarpımı ile uyarılmıştır.

Cevapların incelenmesinde üç yöntem kullanılmıştır. Birinci yöntemde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri oluşturulmuş, daha sonra bu matrisler kullanılarak frekans tanım alanındaki klasik dinamik rijitlik matrisi elde edilmiştir. İkinci yöntemde ise yukarıda sözü edilen sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilmiş olan ve içinde kütle matrisi, sönüm matrisi, rijitlik matrisi, yük vektörü ve bilinmeyen vektörünü bulunduran hareket denklemleri zaman tanım alanında doğrudan integrasyon yöntemlerinden biri olan Newmark yöntemi ile çözülmüştür. Spektral eleman yöntemi diye bilinen üçüncü yöntemde önce bir kiriş parçasının yönetici homojen diferansiyel denklemi için kesin çözüm elde edilmiş, daha sonra bu kesin çözümden faydalanılarak spektral eleman dinamik rijitlik matrisi elde edilmiştir. Birinci ve üçüncü yöntemlerde, yük sayısal Fourier dönüşümü ile frekans tanım alanına dönüştürülmüştür. Daha sonra frekans tanım alanında elde edilen çözümler sayısal ters Fourier dönüşümü kullanılarak zaman tanım alanına dönüştürülmüştür.

Birinci ve üçüncü yöntemlerde sadece rijitlik matrislerinin elde edilmiş yolu farklı olup bunun dışında her iki yöntemde izlenen çözümleme yolu aynıdır: Yani frekans tanım alanında çözüm bulunup zaman tanım alanına ters sayısal Fourier dönüşümü ile geçilir.

Yukarıda sözü edilen üç yöntem için çözüm algoritmaları oluşturulup programlama MATLAB paket programı ile yapılmıştır. Özel durum olan tek malzemeli kiriş için her üç yöntemin sonuçları elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Farklı malzeme durumu için sadece ikinci yöntem kullanılarak sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Sayısal incelemelerde farklı eleman nedeniyle ilave dalgaların ortaya çıktığı görülmüştür. İlave dalgalar ile farklı malzemenin konum ve fiziksel özellikleri arasındaki ilişkiler saptanmaya çalışılmıştır. Bu kapsamda farklı malzemenin konumu ve boyunun tespit edilebildiği gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Konsol bir kirişte dalga yayılımı, ilave dalga, Fourier dönüşümü, spektral eleman yöntemi, zaman tanım alanında doğrudan integrasyon, Newmark Metodu

## ABSTRACT

Responses of the free end of a cantilever beam made of two different materials under the effect of an impact force. The beam was excited by a transverse triangular force impulse modulated by a harmonic motion.

Three methods are used for investigating the responses. Mass, damping and stiffness matrices are obtained by using finite element method and then by using these matrices classical dynamic stiffness matrix is obtained. In the second method, motion equations consisting of mass matrix, damping matrix, stiffness matrix, load vector and unknown vector which are obtained by the finite element method mentioned before are solved in the time domain by using Newmark direct integration scheme. In the third method which is known as spectral element method, governing homogeneous differential equation for a beam part is solved exactly and then by using this solution dynamic stiffness matrix for a spectral element is obtained. The load is transformed into frequency domain numerically by using the discrete Fourier transform technique. Then the solution obtained in the frequency domain is transformed in the time domain numerically by using inverse discrete Fourier transform technique.

In the first and third methods, the only difference is in obtaining the stiffness matrices and apart from that the solution algorithm in the two methods is the same: Namely the solution is obtained in the frequency domain and then it is transformed into the time domain by using inverse discrete Fourier transform technique.

Solution algorithms for the three methods mentioned above are made and they are programmed by using Matlab packet programme. The results of the three methods for the special case, a beam which is made of only one material, are obtained and compared with each other. Only the second method is used for obtaining the numerical solutions of a cantilever beam made of two different materials.

It is seen in the numerical investigations that because of two different materials, additional secondary waves appear between the primary waves. The relations between additional waves and location and physical properties of the additional secondary waves are found. It is proved that the location and length of the different material can be obtained by investigating the additional secondary waves.

**Keywords:** Wave propagation in a cantilever beam, Additional wave, Fourier transform, Spectral element method, Direct time integration, Newmark method.

## 1. GİRİŞ

### 1.1 Konuya İlişkin Çalışmalar

Yıllar boyu yapılan araştırmalar, göz önüne alınan bir parça boyunca oluşan elastik dalga yayılımındaki anormallikleri analiz etmeye dayanmıştır. Hasar tespit sistemleri, malzeme süreksizliklerinin katılardaki elastik dalgaların yayılımını etkilediği gerçeğine dayanmaktadır. Hasara en duyarlı kavram olan dalga frekansları yapının, malzemenin ve hasarın çeşidine bağlıdır. Küçük yorulma hasarlarının belirlenmesi çoğu klasik hasar tespit metotları için zorlu bir görevdir. Küçük hasarların tespitinde geleneksel metotlar etkisiz kalırken bu hesaplarda yüksek frekanslı uyarımlar gerekmektedir. Çözülmüş bir problemin doğruluğu uzaysal sonlu eleman ayrıklaştırmasına bağlıdır. Sonlu elemanların birleştirilmesiyle yüksek titreşim modlarına ulaşılmasının çok karşılan bir durum olduğu aşikârdır çünkü bu şekilde yapısal süreksizlikler aracılığıyla dalga hareketinin etkilerini yakalamak mümkündür (Palacz vd., 2005). Bu durum, çözüm işlemi zaman harcayan tek boyutlu (1D) yapılar için bile bizi büyük boyutlu eşitlikler sistemine götürür.

Son birkaç yıldır elastik dalga yayılımı için birçok nümerik algoritma ve teknik geliştirilmiştir. Bu teknikler sonlu farklar metodu (FDM) (Hackbush, 1985; Orkisz, 1989), sonlu eleman metodu (FEM) (Zienkiewicz, 1989; Reddy, 1993), sınır eleman metodu (BEM) (Brebbia vd., 1984), spektral eleman metodu (SEM) (Patera, 1984; Doyle, 1997; Palacz vd., 2005) ve kütle-yay kafes modelleri (MSLM) (Delsanto vd., 1998). Dalga etkileşiminin hasar ile modellenmesi literatürde nispeten daha az yer bulmuştur. Dalga etkileşimi problemleriyle ilgili çoğu uygulama sonlu elemanlar tabanlı yaklaşımlardır (Staszewski, 2005).

Spektral analiz, dinamik çözümü farklı frekanslardaki çözüm serileriyle temsil eden bir metottur (Lakshmanan vd., 1997). Spektral eleman metodu bu çözümleri dinamik rijitlik ilişkileri olarak tekrar formüle ederek sonlu eleman metoduna benzer bir tarz ile uygulanabilir kılar. Spektral eleman metodu birçok kullanışlı özelliğe sahiptir. Başlangıç özellikleri kesin olarak belirlendikten sonra geniş alanları modellemek için az sayıda eleman gerekir. Genelleştirilmiş düğüm noktalarına sadece yapısal süreksizliklerin olduğu yerlerde ihtiyaç vardır. Farklı kalınlık ve malzeme özelliklerine sahip birçok spektral eleman birleşerek bir yapıyı modelleyebilir. Uygulanan herhangi bir yük için çözüm genelleştirilmiş yer değiştirmeler cinsinden elde edilir. Bu işlemlere birincil işlemler adı verilirse daha sonra herhangi bir uygulanan kuvvet için hız, ivme, şekil değiştirme ve gerilme hesapları göreceli olarak maliyeti daha düşük olan ikincil işlemlerle bulunabilir. Spektral eleman metodu bir

yapının frekans cevap fonksiyonunu doğrudan hesaplar ve bu yolla elde edilen ilave bilgi serbest titreşime dayalı modal metotlar ile doğrudan integrasyona dayalı zaman tanım alanı metotları arasındaki boşlukta bir köprü oluşturur (Doyle, 1997). Spektral elemanlar ayrıca kuvvetlerin belirlenmesi gibi ters problemlerin çözümünde de kullanılır. Sonuç olarak, çözülecek ana problem son derece küçüktür ve verilerden bağımsız bir tarzda çok kez tekrarlanabilir. Bu durum spektral eleman metodunun bilgisayarlarda çözülebilen en uygun metot olmasını sağlar.

Literatürde belirtilen iki farklı spektral eleman yaklaşımını ayırt etmek gereklidir. Bunlardan ilki hızlı Fourier dönüşümleri (FFT) tabanlı diğeri ise zaman tanım alanı tabanlı metottur.

FFT tabanlı birçok frekans tanım alanı metodu arasında, spektral eleman metodu (SEM) dalga yayılımını modellemesi için en etkin sayısal araçtır. Çubuk, kiriş ve plakların hasarsız spektral modelleri Doyle (1997) tarafından incelenmiştir. Doyle (1997), kitabında hızlı ayırık Fourier dönüşümleri kullanarak spektral analiz ile yapılarıdaki dalga yayılımını incelemiştir. Özellikle kirişler için spektral rijitlik matrislerini oluşturmuş ve klasik dinamik rijitlik matrisi ile spektral rijitlik matrisini karşılaştırmıştır. Ayrıca enine ve boyuna dalga yayılımıyla ilgili örnek çözümler sunmuştur. Çatlak bir kiriş elemanının spektral modelinin incelemesi Palacz vd. (2002) tarafından sunulmuştur. Sunulan bu model çatlağın kesin yerini belirlemede dalga yayılımının kullanılmasına olanak verir. Çatlamış bir spektral Bernoulli-Euler kirişi ise Krawczuk (2002) tarafından spektral eleman yöntemi ile incelenmiştir. Sonlu elemanlar metoduyla modellenen, çatlak içeren bir Timoshenko kirişinin modeli ise Krawczuk (1992) tarafından oluşturulmuştur. Yanal açık ve ilerlemeyen bir çatlak içeren sonlu spektral Timoshenko kiriş elemanı Krawczuk (2002) tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada çatlağın yerini ve boyutunu belirlemede modal analiz yöntemleri uygulanmıştır. Kudela vd. (2006), Patera (1984) tarafından belirtilen ikinci yaklaşıma ait bir çalışmayı spektral sonlu elemanlar (zaman tanım alanı metodu) ile modelleyerek tek boyutlu yapılarıdaki dalga yayılımını incelemiştir. Nümerik analizler sonucu elde edilen sonuçlar klasik sonlu eleman yaklaşımıyla elde edilen deneysel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Ostachowicz vd. (2003) kiriş tipi yapılarıdaki küçük tabakalanmaları belirlemede kullanılacak bir dalga yayılımı metodu sunmuştur. Göz önüne alınan kiriş spektral sonlu elemanlar ile modellenmiştir.

## 1.2 Çalışmanın Amacı

Çalışmada serbest ucunda darbe yükü etkisindeki iki farklı malzemedeki yapılmış konsol bir kirişin serbest ucundaki cevapları incelenecek, farklı malzemenin konumunun ve fiziksel

özelliklerinin, farklı malzeme olması durumunda ortaya çıkan ilave dalgaları nasıl etkilediği, konum ve fiziksel özelliklerle ortaya çıkan ilave dalgalar arasında hangi ilişkiler olduğu belirlenmeye çalışılacaktır.

Dalga yayılımının incelenebilmesi için sonlu elemanlar yöntemi ve spektral eleman yöntemi kullanılacaktır. Bilindiği gibi spektral eleman yönteminde bilinmeyen sayısını minimuma indirmek mümkün olmaktadır.

Sonlu elemanlar yöntemi zaman tanım alanında, doğrudan integrasyon yöntemlerinden biri olan Newmark Metodu ile birlikte kullanılarak problem incelenecektir. Bu yol en sade ve en doğrudan yoldur. Bunun yanında, yine sonlu elemanlar yönteminin kullanımıyla, frekans tanım alanında klasik dinamik rijitlik matrisi elde edilerek, dönüşüm yöntemlerinden biri olan sayısal Fourier dönüşümü ve sayısal ters Fourier dönüşümü ile birlikte ele alınan probleme ilişkin çözüm bağıntıları elde edilecektir. Ayrıca, bir diğer çözüm yolu olarak bilinmeyen sayısını minimuma indirgeyen spektral eleman yöntemi ile ilgili bağıntılar çıkarılacak, spektral eleman yönteminin kullanımı için gereksinim duyulan dönüşüm yöntemlerinden biri olan sayısal Fourier dönüşümü ve sayısal ters Fourier dönüşümünün kullanımıyla problemin nasıl incelenebileceği irdelenecektir.

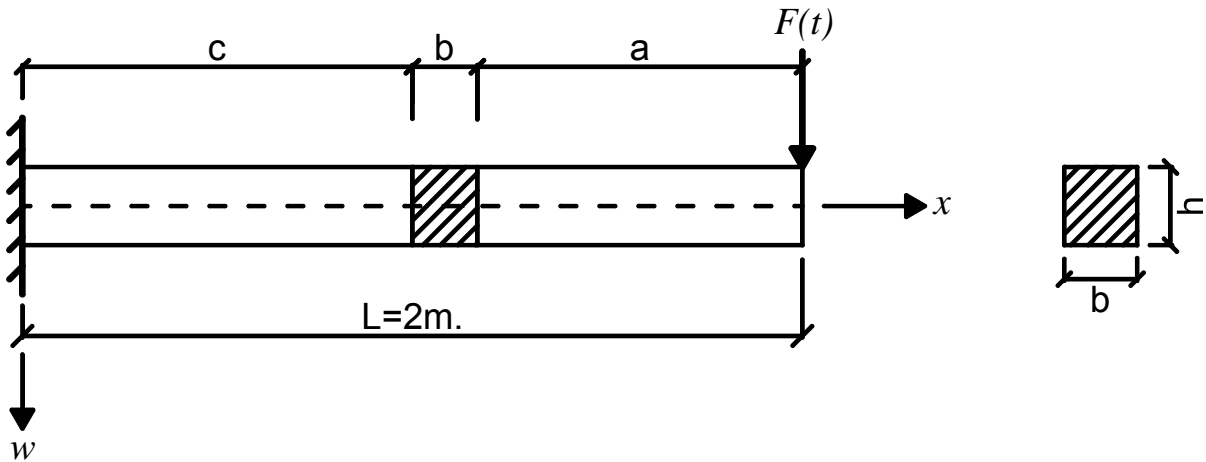
Spektral eleman yöntemi ile sadece bir adet çözüm yapılacak ve bu çözüm sonlu elemanlar yöntemiyle zaman tanım alanında yapılan çözümle karşılaştırılacaktır. Göz önüne alınan problem için her iki çözüm de çok iyi bir uyum içinde olduklarından daha doğrudan çözüm verdiği için sayısal sonuçlar sadece sonlu elemanlar yöntemi ile birlikte zaman tanım alanında doğrudan integrasyon yöntemlerinden biri olan Newmark metodunun kullanımıyla incelenecektir.

Frekans tanım alanında sonlu elemanlar yönteminin kullanımıyla elde edilen yöntemin çözüm mantığı spektral eleman yöntemi ile yapılan çözüm mantığının aynısı olup bu yöntemin kullanımı durumunda çözüme doğrudan olma, açıklık ve kolaylık gibi özellikler getirmemekte, ayrıca spektral elemana göre bilinmeyen sayısı da, aynı zaman tanım alanındaki çözüm gibi, çok fazla olmaktadır. Bu nedenle klasik dinamik rijitlik matrisinin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla frekans tanım alanında elde edilmesi ve dönüşümler ve ters dönüşümlerle problemin çözümüne ait bağıntılar verilecek ve fakat sayısal çözümler bu çözüm yolu ile gerçekleştirilmeyecektir.

## 2. PROBLEMİN TANITIMI

Bu çalışmada, serbest ucunda darbe yükü etkisi olan homojen olmayan bir konsol kirişteki dalga yayılımı ve yansıması incelenmiştir. Homojen olmama durumu, belirli bir kısımdaki kiriş malzemesinin elastik özelliklerinin diğer kısımlarından farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Kiriş malzemesi viskoelastik olarak dikkate alınmış malzeme için Kelvin–Voigt modeli kullanılmıştır.

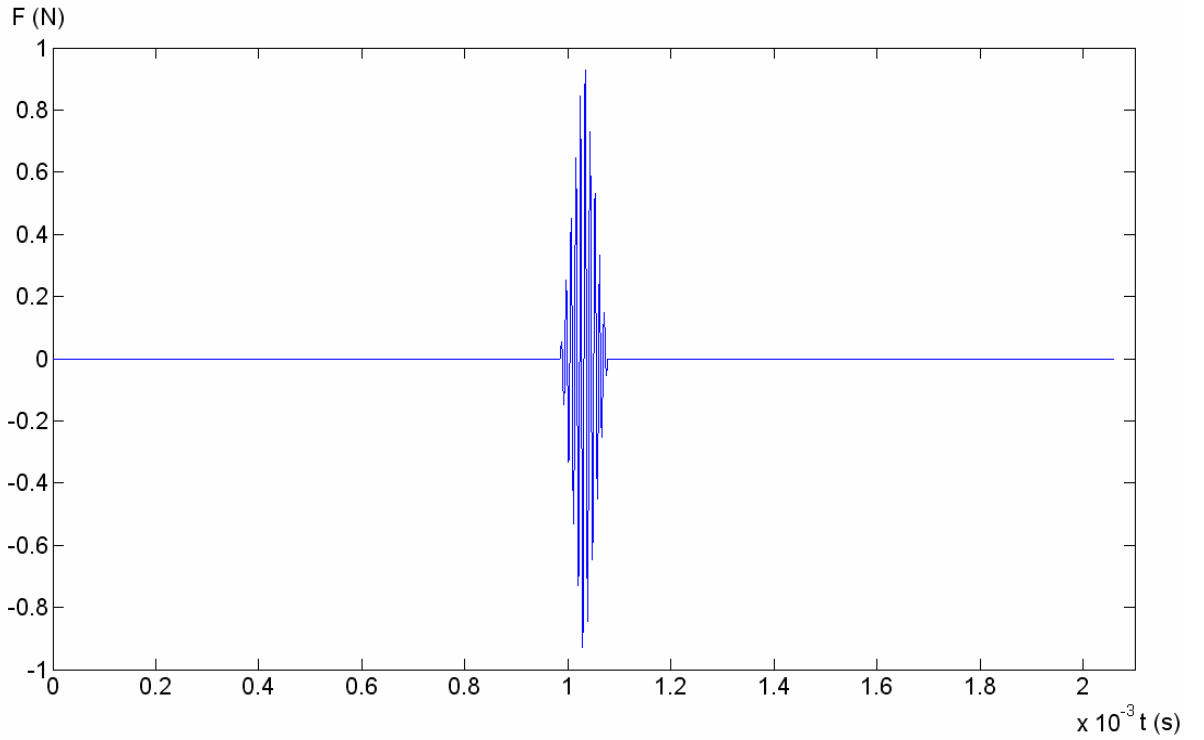
Çalışmada darbe yükünün etkideği uçta cevaplar (yer değiştirme, hız veya ivme) ölçülerek, homojen olmayan kısmın fiziksel özelliklerinin ve boyutunun söz konusu uçtaki cevaplar üzerindeki etkileri araştırılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ve Lagrange eşitlikleri kullanılarak problem, cebrik eşitlikler sistemine indirgenerek zaman tanım alanında doğrudan çözüm yöntemi olan Newmark metodu ile çözülmüştür. Ele alınan sistemin çözümü Bernoulli–Euler kiriş teorisine dayanılarak yapılmıştır. Bu amaçla açıklığı  $L = 2m.$ , kesit yüksekliği  $h = 0,04m.$  ve kesit genişliği  $b = 0,02m.$  olan bir ucundan ankastre mesnetli konsol bir kiriş Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Bu kiriş ikisi aynı biri farklı elastisite modülüne (E) sahip 3 bölümden oluşmaktadır. a ve c bölgelerinin elastisite modülleri  $E_1 = 72.7e9 N/m^2$  olarak alınmıştır. Birim hacmin kütlesi her bölümde birbirine eşit değerde olup  $\rho = 2700 kg/m^3$  olarak alınmıştır. Kiriş sonlu elemanlarla detaylı bir analiz yapılması ve rahat bölümlenmesi için 100 parçaya bölünmüştür. Bu durumda her bir elemanın uzunluğu 2 cm olmaktadır. Kirişin serbest ucunda  $t = 0,0925 \times 10^{-3} sn$  (0.0925ms) süresince etki eden bir  $F(t)$  darbe yükü bulunmaktadır. Yanal darbe yükü Şekil 2.2 de görülen üçgen



Şekil 2.1 Ankastre mesnetli konsol kiriş

bir yük (signal) ile bu üçgen yükün etkime süresinin 1/10 u periyoda sahip bir sinüs dalgasının çarpımıdır. (Ostachowicz ve diğ.)

Problemde, b bölgesinin çeşitli fiziksel ve geometrik özelliklerinin yükün bulunduğu uçtaki cevaplar üzerinde etkisini incelemek için b bölgesinin fiziksel özellikleri ve uzunluğu değiştirilmiştir. Değiştirilen büyüklükler elastisite modülü, farklı malzemenin konumunu belirleyen başlangıç ve bitiş yeridir. Farklı malzemenin uzunluğu başlangıç ve bitiş koordinatlarının farkı olarak alınmıştır.



Şekil 2.2 Zaman tanım alanında uyarıcı darbe yükünün şekli

### 3. HAREKET DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ÇIKARILMASI

#### 3.1 Klasik Dinamik Rijitlik Matrisinin Kullanımıyla Frekans Alanında Çözüm

Sonlu elemanlardan oluşan bir sistemin lineer dinamik cevabını belirleyen hareket denklemi bilinmekte olup Kocatürk vd.(2005) tarafından (3.1) eşitliğinde verilmiştir.

$$[K]\{w\} + [C]\{\dot{w}\} + [M]\{\ddot{w}\} = \{F\} \quad (3.1)$$

Burada  $[K]$ ,  $[C]$  ve  $[M]$  sırasıyla rijitlik, sönüm ve kütle matrisleri,  $\{F\}$  dış yük vektörü,  $\{w\}$ ,  $\{\dot{w}\}$  ve  $\{\ddot{w}\}$  ise sırasıyla yer değiştirme, hız ve ivme vektörleridir. (3.2) eşitliğinde gösterildiği gibi yer değiştirme uzay ve zaman bağımlı olarak bileşenlerine (değişkenlerine) ayrıştırılmış olsun:

$$\{w\} = \{\bar{w}\} \cdot e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Yer değiştirme ifadesinin gerekli türevleri alınarak (3.2) ifadesi ve türevleri (3.1) de yerine konursa izleyen (3.3) eşitliği elde edilir.

$$[K]\{\bar{w}\} \cdot e^{i\omega t} + i\omega[C]\{\bar{w}\} \cdot e^{i\omega t} - \omega^2[M]\{\bar{w}\} \cdot e^{i\omega t} = \{\bar{F}\} \cdot e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

Gerekli sadeleştirmelerden sonra (3.3) ifadesi izleyen formu alır:

$$[K] + i\omega[C] - \omega^2[M] \{\bar{w}\} = \{\bar{F}\} \rightarrow [\bar{K}]\{\bar{w}\} = \{\bar{F}\} \quad (3.4)$$

Burada  $[\bar{K}]$  ifadesi klasik dinamik rijitlik matrisidir.

#### 3.2 Zaman Tanım Alanında Doğrudan Çözüm

$$[K]\{w(t)\} + [C]\{\dot{w}(t)\} + [M]\{\ddot{w}(t)\} = \{F(t)\} \quad (3.5)$$

Burada  $\{w(t)\} = \{A(t), B(t), C(t), \alpha_i(t)\}^T$ ,  $[K]$  sistem rijitlik matrisi,  $[C]$  sönüm matrisi,  $[M]$  kütle matrisi,  $\{F(t)\}$  zamana bağlı olan yük vektörüdür. (3.5) ile verilen hareket denklemindeki matrislerin boyutu EBKT için  $(2N + 3) \times (2N + 3)$  dür.

(3.5) eşitliği ile verilmiş olan hareket denklemi zaman tanım alanında (adım-adım)

Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle çözülmüştür. Ortalama ivme yönteminde kullanılan parametreler aşağıda verilmiştir:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta); \quad a_7 = \delta \Delta t \quad (3.6)$$

Burada  $\delta = 0.5$ ,  $\alpha = 0.25$  dir. Ortalama ivme yöntemi kullanılarak (3.5) ile verilen doğrusal diferansiyel denklem sistemi izleyen şekilde doğrusal bir cebrik denklem sistemine indirgenir:

$$[\hat{K}] \{w\}_{i+1} = \{\hat{F}\}_{i, i+1} \quad (3.7)$$

Burada  $i+1$  alt indisi  $t = t_{i+1}$  zamanını göstermektedir.  $[\hat{K}]$  etkili rijitlik matrisi,  $\{\hat{F}\}_{i, i+1}$  etkili yük vektörüdür ve izleyen şekilde verilmektedir:

$$[\hat{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C] \quad (3.8)$$

$$\{\hat{F}\}_{i, i+1} = \{F\}_{i+1} + [M] (a_0 \{w\}_i + a_2 \{\dot{w}\}_i + a_3 \{\ddot{w}\}_i) + [C] (a_1 \{w\}_i + a_4 \{\dot{w}\}_i + a_5 \{\ddot{w}\}_i) \quad (3.9)$$

(3.7) ile verilmiş olan denklem doğrusal bir cebrik denklem sistemi olup,  $t = t_{i+1}$  anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü  $\{w\}_{i+1}$  izleyen şekilde bulunur:

$$\{w\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i, i+1} \quad (3.10)$$

$t = t_{i+1}$  anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü bulunduğunda, aynı andaki genelleştirilmiş ivme  $\{\ddot{w}\}$  ve hız vektörü  $\{\dot{w}\}$  ise izleyen şekilde elde edilir:

$$\{\ddot{w}\}_{i+1} = a_0 (\{w\}_{i+1} - \{w\}_i) - a_2 \{\dot{w}\}_i - a_3 \{\ddot{w}\}_i \quad (3.11)$$

$$\{\dot{w}\}_{i+1} = \{\dot{w}\}_i + a_6 \{\ddot{w}\}_i + a_7 \{\ddot{w}\}_{i+1} \quad (3.12)$$

( $i+1$ ). zaman adımında elde edilen yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki zaman adımının başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler ( $i+2$ ). zaman adımı için tekrarlanır. Hareket denkleminin çözüm aşamalarını daha iyi kavrayabilmek için izleyen akış diyagramı verilmiştir.

### 3.2.1 Hareket Denkleminin Çözümü İçin Akış Diyagramı

#### 3.2.1.1 Başlangıç Hesaplamaları

- 1)  $[K]$ ,  $[C]$  ve  $[M]$  matrisleri hesaplanır.
- 2) Newmark'ın ortalama ivme yöntemi için gerekli parametreler seçilir.
- 3) Etkili rijitlik matrisi  $[\hat{K}]$  hesaplanır.

$$[\hat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (3.13)$$

- 4)  $\Delta t$  zaman adımı seçilir.
- 5) Başlangıç koşulları belirlenir. Söz konusu kiriş, darbe yükü etkileden önce sükûnette olduğu için başlangıç yer değiştirmesi, ivmesi ve hızı sıfırdır. Başlangıç koşulları izleyen şekildedir:

$$\{w\} = 0, \{\dot{w}\} = 0, \{\ddot{w}\} = 0 \quad (3.14)$$

#### 3.2.1.2 Her Bir $t = t_{i+1}$ Zaman Adımı İçin Hesaplamalar

- 1) Yük vektörü  $\{F\}$  ve etkili yük vektörü  $\{\hat{F}\}$  hesaplanır.

$$\{\hat{F}\}_{i,i+1} = \{F\}_{i+1} + [M](a_0\{w\}_i + a_2\{\dot{w}\}_i + a_3\{\ddot{w}\}_i) + [C](a_1\{w\}_i + a_4\{\dot{w}\}_i + a_5\{\ddot{w}\}_i) \quad (3.15)$$

- 2)  $t = t_{i+1}$  anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme vektörü  $\{w\}_{i+1}$  hesaplanır.

$$\{w\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i,i+1} \quad (3.16)$$

- 3)  $t = t_{i+1}$  anındaki genelleştirilmiş ivme ve hızlar hesaplanır.

$$\{\ddot{w}\}_{i+1} = a_0(\{w\}_{i+1} - \{w\}_i) - a_2\{\dot{w}\}_i - a_3\{\ddot{w}\}_i \quad (3.17)$$

$$\{\dot{w}\}_{i+1} = \{\dot{w}\}_i + a_6\{\ddot{w}\}_i + a_7\{\ddot{w}\}_{i+1} \quad (3.18)$$

$(i+1)$ . zaman adımında elde edilen genelleştirilmiş yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki adımın başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler tekrarlanır.

#### 4. HAREKET DENKLEMLERİNİN SPEKTRAL ELEMAN YÖNTEMİYLE ÇIKARILMASI

Kelvin-Voigt modelinin göz önüne alındığı bir viskoelastik malzeme için bünye ilişkileri izleyen formdadır:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + c\dot{\varepsilon}_x = -Ey \frac{\partial \phi}{\partial x} - cy \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial x} \quad (4.1a)$$

$$\sigma_x = -Ey \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - cy \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (4.1b)$$

Yukarıdaki bünye ilişkileri kullanılarak herhangi bir kesitteki moment ifadesi

$$M = \int_A \left( -Ey^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - cy^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) dA \quad (4.2a)$$

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cI \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (4.2b)$$

şeklini alır. Göz önüne alınan  $\Delta x$  boyundaki bir kiriş parçası için düşey hareket denklemini izleyen şekilde elde edilir:

$$q(x)\Delta x - V + V + \Delta V = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3a)$$

$$q(x)\Delta x + \Delta V = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3b)$$

$$q(x) + \frac{\Delta V}{\Delta x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.3c)$$

Limitte

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x) \quad (4.4)$$

elde edilir.  $\Delta x$  boyundaki parça için, dönme eylemsizliğinin ihmal edilmesi durumundaki dönme hareketi denklemini

$$-M + M + \Delta M + \Delta x(V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta M + \Delta x(V + \Delta V) = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} + V + \Delta V = 0 \quad \rightarrow \Delta V, V \text{ nin yanında ihmal edilirse}$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = -V \quad (4.5)$$

olur. Limitte

$$\frac{dM}{dx} = -V \quad (4.6a)$$

$$\frac{dM}{dx} + V = 0 \quad (4.6b)$$

elde edilir. Yukarıdaki (4.6b) ifadesinin  $x$  e göre bir kere daha türevi alınırsa

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{dV}{dx} = 0 \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada  $\frac{dV}{dx}$ 'in (4.4) formülüyle verilen eşdeğeri yerine konulursa

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x) = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Moment ifadesinin (4.2b) ile verilen eşdeğerinin  $x$  e göre iki kere türevinin alınarak (4.8) de yerine konması

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + cI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x) \quad (4.9)$$

diferansiyel hareket denklemini verir.  $c = \eta E$  tanımlaması yapılırsa (4.9) ifadesi izleyen şekli alır:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x) \quad (4.10)$$

Yayıllı yükün sıfır olması durumundaki homojen diferansiyel denklem izleyen şekildedir:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \eta EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.11)$$

Bu diferansiyel denklemin spektral formda yazılabilmesi için değişkenlerine ayırma yolu ile hareket edilebilmesi için çözüm

$$w(x, t) = \bar{w}(x) e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

formunda alınır ve gerekli ara işlemlerden sonra (4.11) homojen denklemi spektral formda izleyen şekilde elde edilir:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} + \eta i \omega \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} \bar{w} = 0 \quad (4.13a)$$

$$(1 + \eta i \omega) \frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \frac{\rho A \omega^2}{EI} \bar{w} = 0 \quad (4.13b)$$

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \frac{\rho A \omega^2}{(1 + \eta i \omega) EI} \bar{w} = 0 \quad (4.13c)$$

Burada

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{(1 + \eta i \omega) EI}} \quad (4.14)$$

tanımlaması yapılırsa (4.13c) denklemi

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} - \beta^4 \bar{w} = 0 \quad (4.15)$$

olarak elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$\bar{w}(x) = A e^{-i\beta x} + B e^{-\beta x} + C e^{i\beta x} + D e^{\beta x} \quad (4.16a)$$

$$\{\bar{w}\} = \begin{Bmatrix} e^{-i\beta x} & e^{-\beta x} & e^{i\beta x} & e^{\beta x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \{N\}^T \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (4.16b)$$

$$\{N\}^T = \{e^{-i\beta x} \quad e^{-\beta x} \quad e^{i\beta x} \quad e^{\beta x}\} \quad (4.16c)$$

formundadır. Euler-Bernoulli kirişi için yer değiştirmenin  $x$  e göre türevinin dönmeyi verdiği bilinmektedir. Bu durumda (4.16a) ifadesinin  $x$  e göre türevi

$$\phi(x) = \frac{d\hat{w}}{dx} = -i\beta A e^{-i\beta x} - \beta B e^{-\beta x} + i\beta C e^{i\beta x} + \beta D e^{\beta x} \quad (4.17)$$

olarak elde edilir. Yukarıda görülen  $A, B, C, D$  integrasyon sabitleri göz önüne alınan kiriş parçasının uç yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilmek istensin. Bu durumda uç yer değiştirmeleri ile söz konusu sabitle arasında izleyen ilişki elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}(0) \\ \phi(0) \\ \bar{w}(L) \\ \phi(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \phi_1 \\ \bar{w}_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\beta & -\beta & i\beta & \beta \\ e^{-i\beta L} & e^{-\beta L} & e^{i\beta L} & e^{\beta L} \\ -i\beta e^{-i\beta L} & -\beta e^{-\beta L} & i\beta e^{i\beta L} & \beta e^{\beta L} \end{bmatrix}}_{G^{-1}} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Yukarıdaki (4.18) ifadesinde görülen katsayılar matrisi  $[G]^{-1}$  olarak tanımlanırsa, aranan sabitler uç yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = [G] \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \phi_1 \\ \bar{w}_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [G] \{u\} \quad (4.19)$$

(4.19) ifadesi (4.16b) de yerine konulursa

$$\bar{w}(x) = \{N\}^T [G] \{u\} \quad (4.20)$$

elde edilir. Dönme ifadesi ise, bazı ara işlemlerden sonra izleyen formda elde edilir:

$$\phi(x) = \{N\}^T [L][G] \{u\} \quad (4.21a)$$

$$[L] = \text{diag}(-i\beta \quad -\beta \quad i\beta \quad \beta) \quad (4.21b)$$

Dönme eylemsizliğinin ihmal edilmesi durumunda frekans tanım alanındaki kesme kuvvetinin ve momentin

$$\bar{V}(x) = -EI \bar{w}''' ; V(x, t) = \bar{V}(x) e^{i\omega t} \quad (4.22a)$$

$$\bar{M}(x) = -EI \bar{w}'' ; M(x, t) = \bar{M}(x) e^{i\omega t} \quad (4.22b)$$

olduğu bilinmektedir. (4.21a) ifadesinin  $x$  e göre birinci ve ikinci türevleri alınıp sırasıyla (4.22a) ve (4.22b) de yerine konması sonucu kesme kuvveti ve moment ifadeleri izleyen şekilde elde edilir:

$$\bar{V}(x) = -EI \frac{d^2\phi}{dx^2} = -EI \{N''\}^T [L][G]\{u\} \quad (4.23a)$$

$$\bar{M}(x) = -EI \frac{d\phi}{dx} = -EI \{N'\}^T [L][G]\{u\} \quad (4.23b)$$

Uçlardaki kesme kuvvetleri ve momentlerle yine uçlardaki yer değiştirmeler arasında, (4.23a) ve (4.23b) ifadelerinden yararlanılarak izleyen ifade elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \bar{V}(0) \\ -\bar{M}(0) \\ -\bar{V}(L) \\ \bar{M}(L) \end{Bmatrix} = [\partial N][L][G] \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \phi_1 \\ \bar{w}_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = [\hat{K}]\{u\} \quad (4.24a)$$

$$[\partial N] = \begin{bmatrix} -EI \{N''(0)\}^T \\ EI \{N'(0)\}^T \\ EI \{N''(L)\}^T \\ -EI \{N'(L)\}^T \end{bmatrix} \quad (4.24b)$$

$$\left. \begin{aligned} \{N\}^T &= \{e^{-i\beta x} & e^{-\beta x} & e^{i\beta x} & e^{\beta x}\} \\ \{N'\}^T &= \{-i\beta e^{-i\beta x} & -\beta e^{-\beta x} & i\beta e^{i\beta x} & \beta e^{\beta x}\} \\ \{N''\}^T &= \{-\beta^2 e^{-i\beta x} & \beta^2 e^{-\beta x} & -\beta^2 e^{i\beta x} & \beta^2 e^{\beta x}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.24c)$$

$$\left. \begin{aligned} \{N(0)\}^T &= \{1 & 1 & 1 & 1\} \\ \{N'(0)\}^T &= \{-i\beta & -\beta & i\beta & \beta\} \\ \{N''(0)\}^T &= \{-\beta^2 & \beta^2 & -\beta^2 & \beta^2\} \end{aligned} \right\} \quad (4.24d)$$

$$\left. \begin{aligned} \{N(L)\}^T &= \{e^{-i\beta L} & e^{-\beta L} & e^{i\beta L} & e^{\beta L}\} \\ \{N'(L)\}^T &= \{-i\beta e^{-i\beta L} & -\beta e^{-\beta L} & i\beta e^{i\beta L} & \beta e^{\beta L}\} \\ \{N''(L)\}^T &= \{-\beta^2 e^{-i\beta L} & \beta^2 e^{-\beta L} & -\beta^2 e^{i\beta L} & \beta^2 e^{\beta L}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.24e)$$

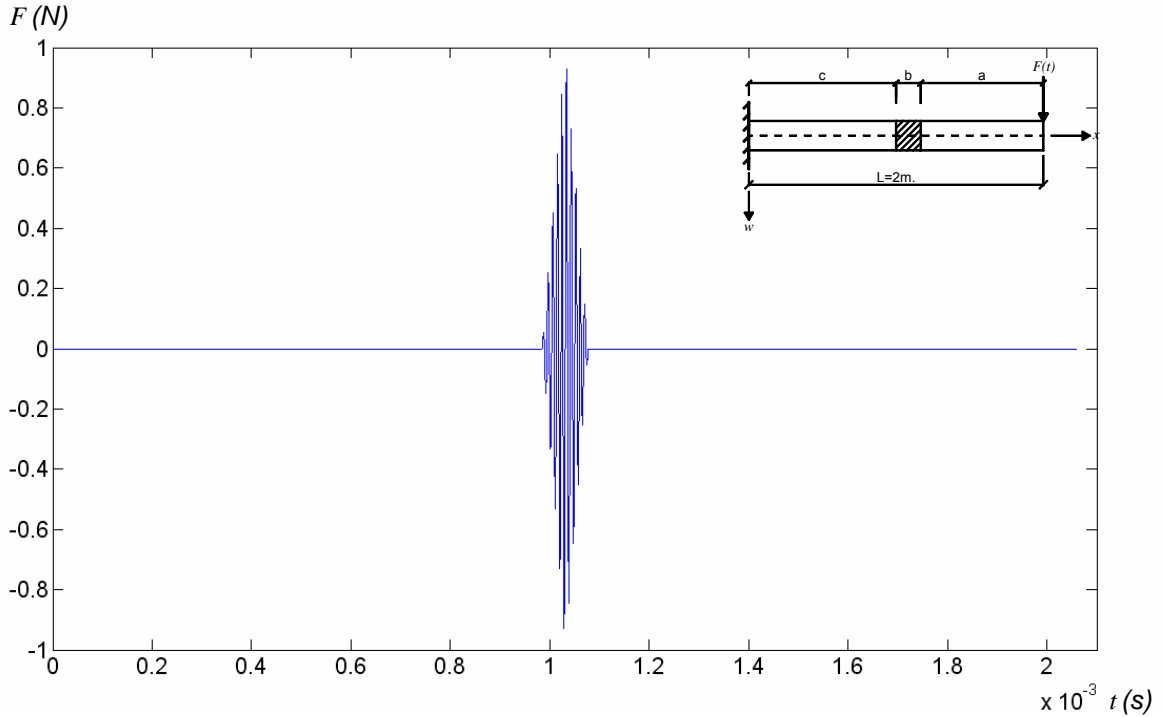
(4.24c-e) ifadelerinin (4.24b) de açık olarak yerine yazılması ve daha sonra (4.24b) nin (4.24a) da yerine yazılması ile izleyen spektral eleman dinamik rijitlik matrisi elde edilir.

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} EI\beta^2 & -EI\beta^2 & EI\beta^2 & -EI\beta^2 \\ -EIi\beta & -EI\beta & EIi\beta & EI\beta \\ -EI\beta^2 e^{-i\beta L} & EI\beta^2 e^{-\beta L} & -EI\beta^2 e^{i\beta L} & EI\beta^2 e^{\beta L} \\ EIi\beta e^{-i\beta L} & EI\beta e^{-\beta L} & -EIi\beta e^{i\beta L} & -EI\beta e^{\beta L} \end{bmatrix} [L][G] = [\partial N][L][G] \quad (4.25)$$

## 5. SAYISAL HESAPLAMALAR

### 5.1 Spektral Dinamik Rijitlik Matrisi Kullanılarak Sayısal Hesaplamalar

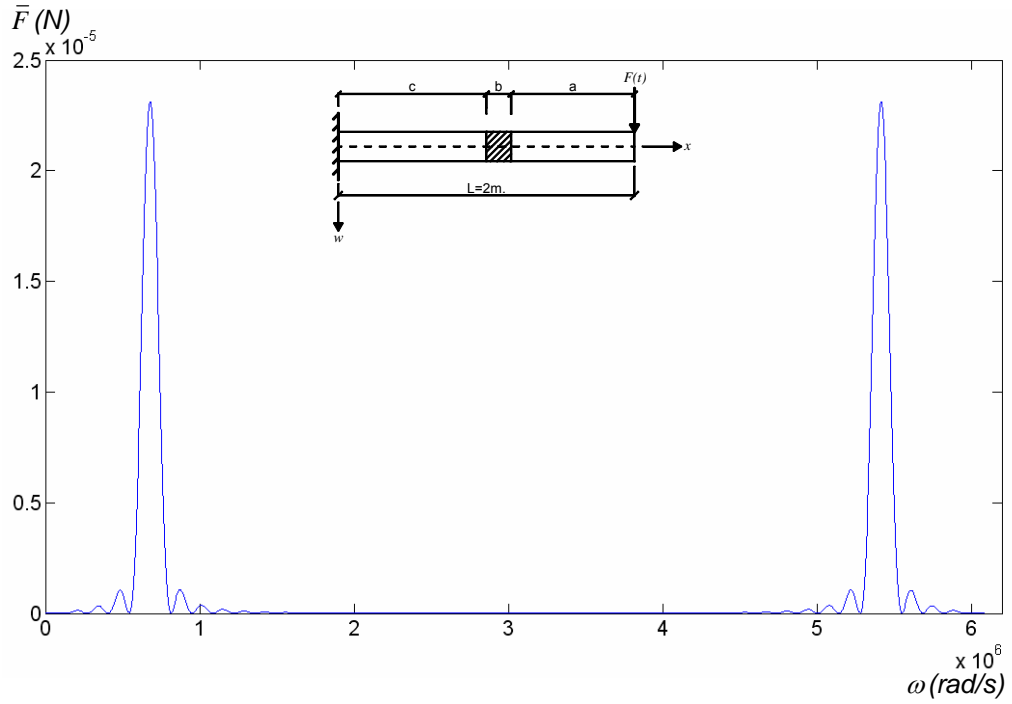
Dördüncü bölümde verilen (4.24a) ifadesi kullanılarak, sonlu elemanlar metodunda yapılan birleştirme işleminde olduğu gibi sisteme ait spektral dinamik rijitlik matrisi elde edilir. Daha sonra Bölüm 2 de belirtilen dış yüklemeler (Şekil 5.1) ile sistem düğüm noktaları arasındaki ilişki kurulur ve bu ilişki sonrası bulunan düğümlerdeki yüke ilişkin büyüklükler frekans tanım alanına dönüşümü yapılır. Frekans tanım alanında elde edilen spektral denklem sisteminin çözümü sonucu frekans tanım alanındaki dönmeler, yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler bulunur. Frekans tanım alanındaki bu büyüklüklerden sayısal ters Fourier çözümü ile zaman tanım alanındaki yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler elde edilebilir.



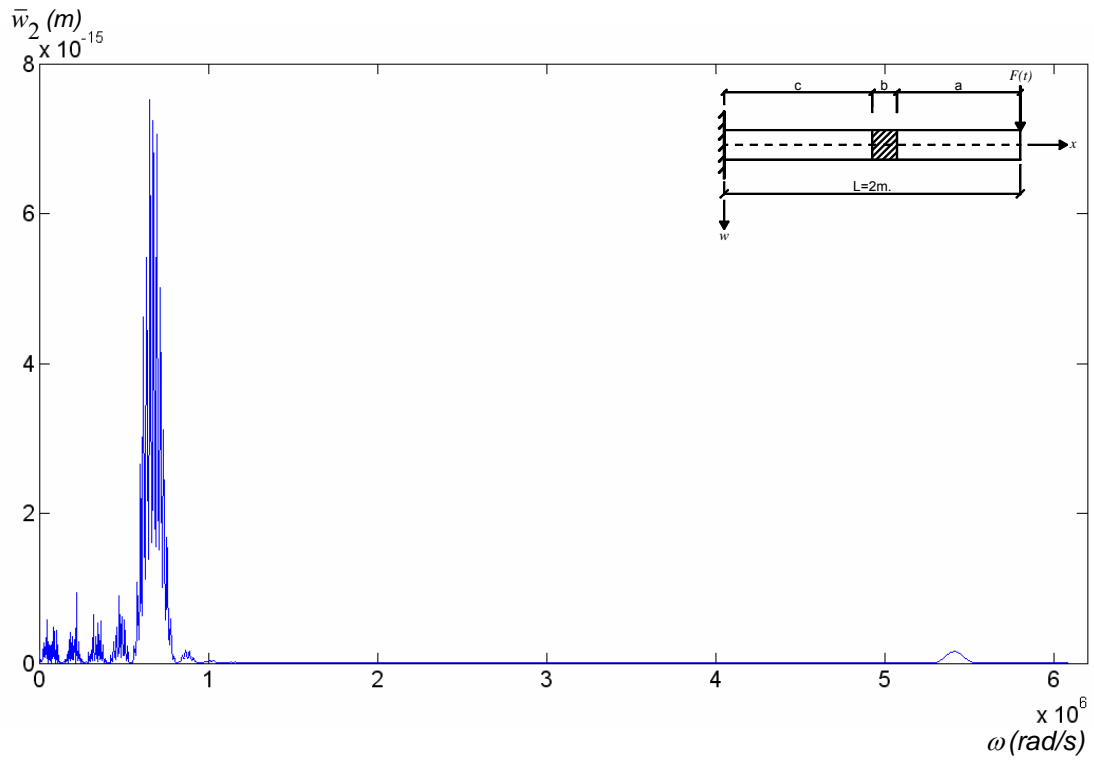
Şekil 5.1 Zaman tanım alanındaki yük fonksiyonu

Zaman tanım alanındaki doğrudan çözümde kiriş için tek malzeme alınarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak için spektral analiz yönteminde de tek malzemeli kiriş göz önüne alınmıştır. Bu durumda bilinmeyen sayısı, ankastre mesnetteki sıfır değerli çökme ve dönme çıkarıldıktan sonra ve düğüm sayısı eleman sayısının bir fazlası olduğundan,  $2 \times (1+1) - 2 = 2$  olmaktadır. Bu durumda frekans tanım alanında çözüm için (4.24) ifadesi doğrudan kullanılmış ve sayısal ters Fourier çözümü ile zaman tanım alanına geçilmiştir. Frekans tanım

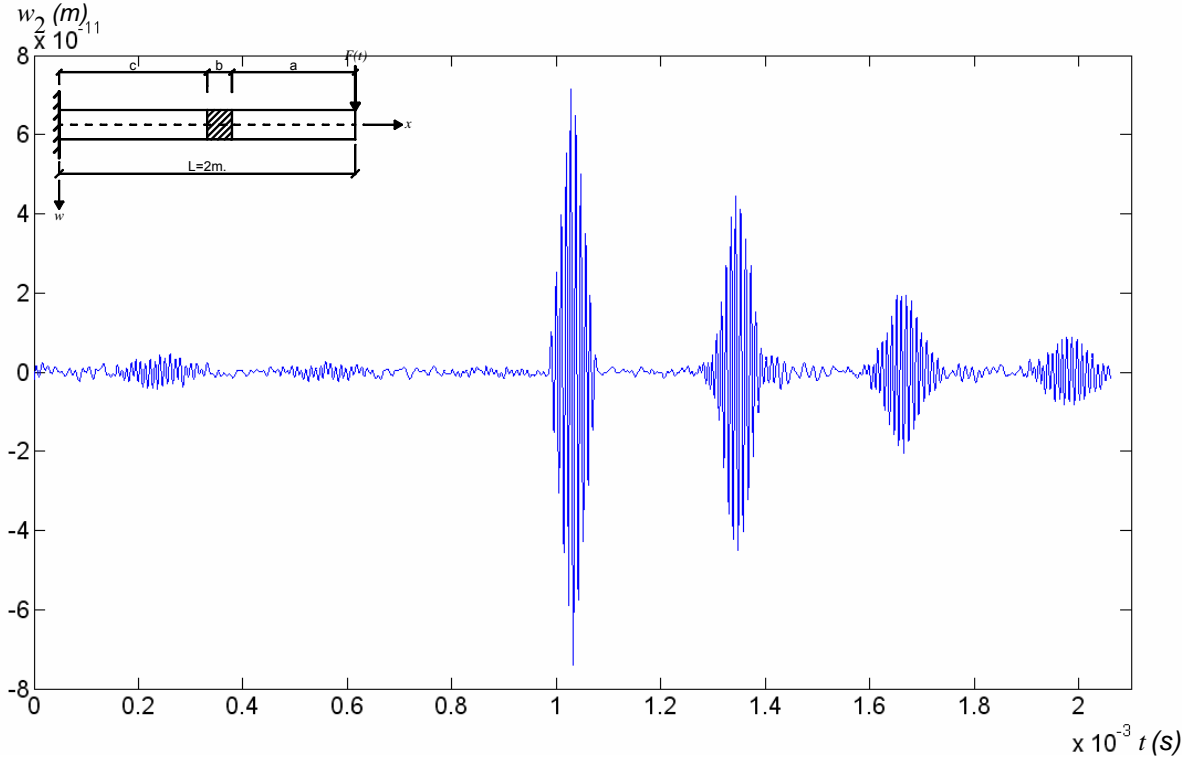
alanındaki yük (Yükün Fourier dönüşümü), frekans tanım alanındaki yer değiştirme ve sayısal ters Fourier dönüşümü ile elde edilen zaman tanım alanındaki yer değiştirme sırasıyla Şekil 5.2(a), Şekil 5.2(b) ve Şekil 5.2(c) de verilmiştir.



Şekil 5.2(a) Frekans tanım alanındaki yük fonksiyonu (Yükün Fourier dönüşümü)



Şekil 5.2(b) Frekans tanım alanındaki yer değiştirme



Şekil 5.2(c) Zaman tanım alanındaki yer değiştirme

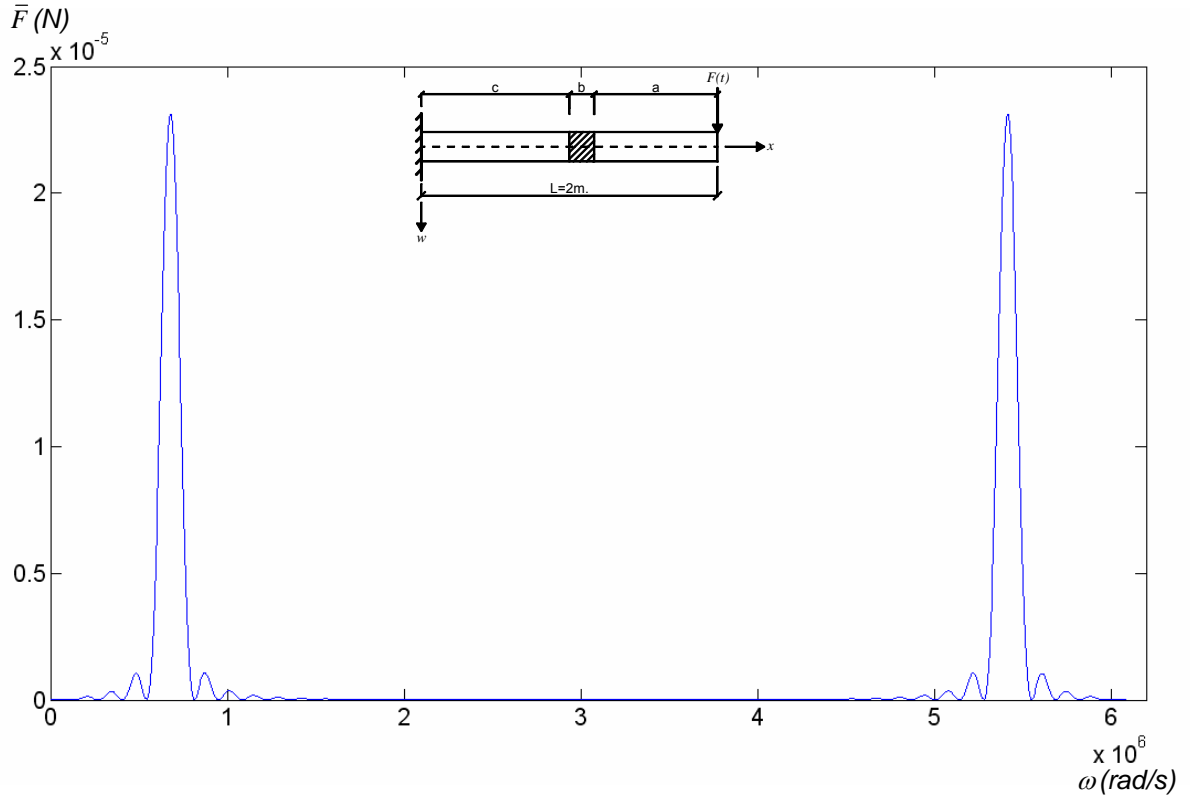
Burada dikkat edilmesi gereken durum, yükün dikkate alınan sürenin tam ortasında etkimesi gerektiğidir. Bu durum Fourier dönüşümlerinin doğası gereği yapılmalıdır.

## 5.2 Klasik Dinamik Rijitlik Matrisi Kullanılarak Sayısal Hesaplamalar

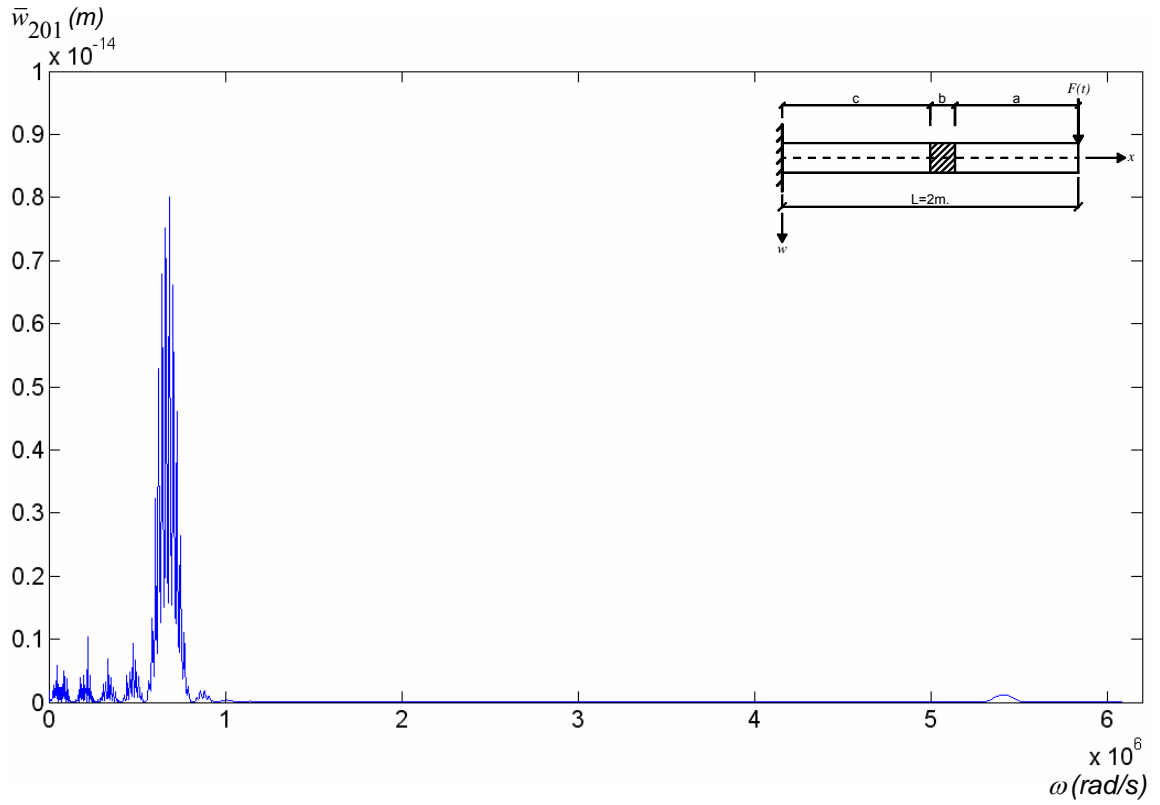
Üçüncü bölümde verilen (3.4) ifadesindeki dış yükün Fourier dönüşümü olan  $\bar{F}$  sayısal Fourier dönüşümü frekans tanım alanında elde edilir. Frekans tanım alanında elde edilen (3.4) denklem sisteminin çözümü sonucu frekans tanım alanındaki dönmeler, yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler bulunur. Frekans tanım alanındaki bu büyüklüklerden sayısal ters Fourier çözümü ile zaman tanım alanındaki yer değiştirmeler, hızlar ve ivmeler elde edilebilir.

Burada zaman tanım alanında doğrudan çözüm ile karşılaştırma amaçlı olarak yapılan çözümde giriş 100 elemana bölünmüştür. Bu durumdaki bilinmeyen sayısı, ankastre mesnetteki sıfır değerli çökme ve dönme çıkarıldıktan sonra ve düğüm sayısı eleman sayısının bir fazlası olduğundan,  $2 \times (100 + 1) - 2 = 200$  olmaktadır.

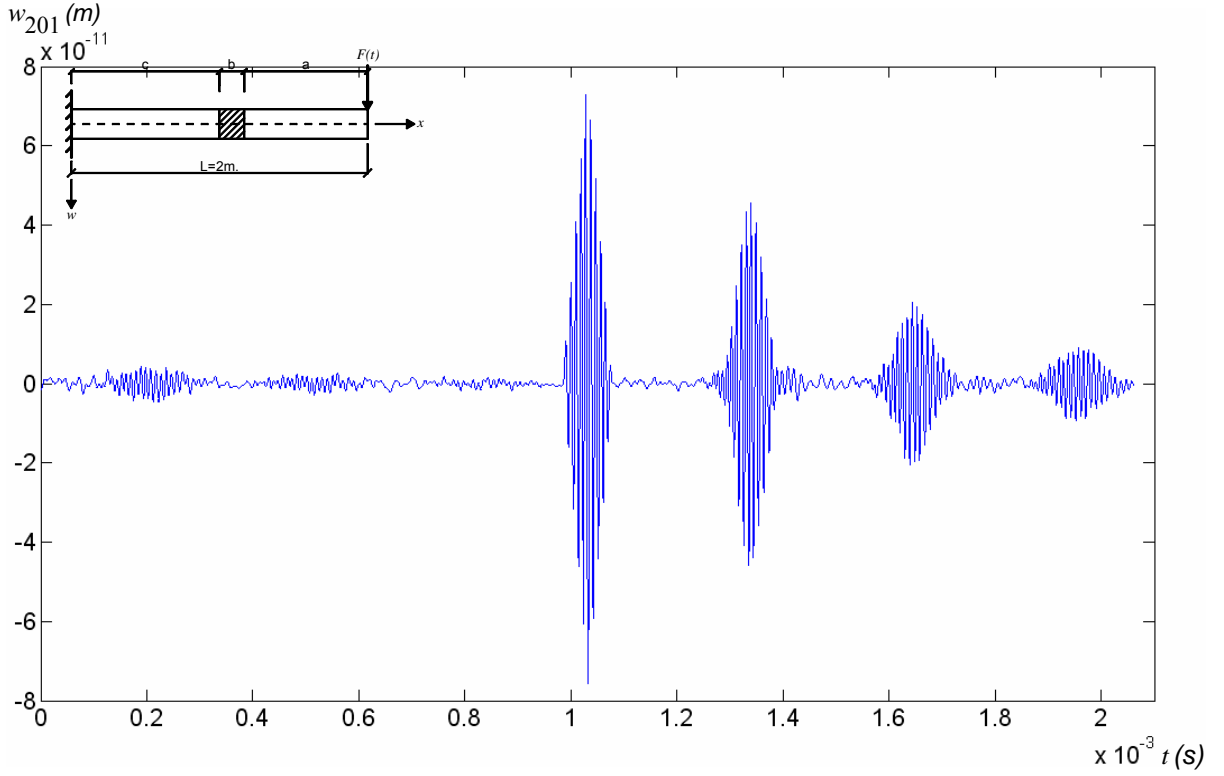
Frekans tanım alanındaki yük (Yükün Fourier dönüşümü), frekans tanım alanındaki yer değiştirme ve sayısal ters Fourier dönüşümü ile elde edilen zaman tanım alanındaki yer değiştirme sırasıyla Şekil 5.3(a), Şekil 5.3(b), Şekil 5.3(c) de verilmiştir.



Şekil 5.3(a) Frekans tanım alanındaki yük fonksiyonu (Yükün Fourier dönüşümü)



Şekil 5.3(b) Frekans tanım alanındaki yer değiştirme



Şekil 5.3(c) Zaman tanım alanındaki yer değiştirme

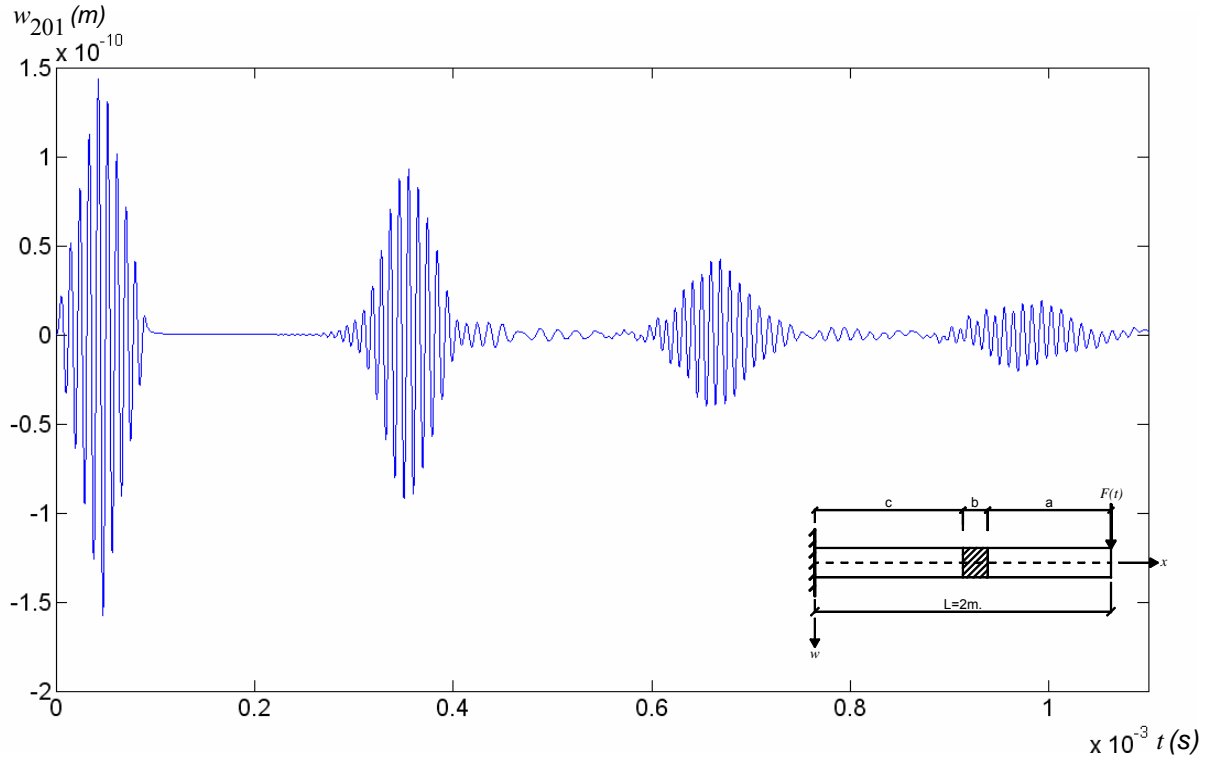
Spektral analizde olduğu gibi burada da yük dikkate alınan sürenin tam ortasında etkilimlidir.

### 5.3 Zaman Tanım Alanında Doğrudan Çözüm ile Sayısal Hesaplamalar

Zaman tanım alanındaki sayısal hesaplamalar Newmark'ın ortalama ivme yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi (3.5) eşitliği ile verilen zamana bağlı diferansiyel denklem sistemi ortalama ivme yöntemi kullanılarak cebrik bir denklem sistemine indirgenmiş olur. Elde edilen bu denklem sistemi çözülerek  $t = t_{i+1}$  anındaki genelleştirilmiş yer değiştirme, hız ve ivme değerleri bulunur. Bulunan bu değerler bir sonraki analiz için başlangıç değerleri olduğundan göz önüne alınan zaman süresince bu işlemler tekrarlanır.

Burada klasik dinamik analiz ve spektral analiz ile karşılaştırma amaçlı olarak yapılan çözümde kiriş tek malzeme olarak alınmış ve klasik dinamik analizde olduğu gibi 100 elemana bölünmüştür. Bu durumdaki bilinmeyen sayısı, ankastre mesnetteki sıfır değerli çökme ve dönme çıkarıldıktan sonra ve düğüm sayısı eleman sayısının bir fazlası olduğundan,  $2 \times (100 + 1) - 2 = 200$  olmaktadır.

Zaman tanım alanındaki yer değiştirme Şekil 5.4 de verilmiştir.



Şekil 5.4 Zaman tanım alanındaki yer değiştirme

Spektral analiz ve klasik dinamik analiz yöntemlerinde yükün etkime anının Fourier dönüşümleri gereği ortada olması gerekirken zaman tanım alanında doğrudan çözüm yönteminde yükün etkime anı başlangıçtadır. Çünkü bu yöntemde bir dönüşüm ve ters dönüşüm yapılmamaktadır.

Hatırlanacağı üzere spektral eleman yönteminde kiriş tek eleman olarak alınmış ve bilinmeyen sayısı minimuma indirgenmiştir. Frekans tanım alanında sonlu elemanlar yönteminin kullanımıyla elde edilen çözüm mantığı ile spektral eleman yöntemi ile elde edilen çözüm mantığı aynı olup bilinmeyen sayısı da spektral elemana göre, aynı zaman tanım alanındaki çözüm gibi, çok fazla olmaktadır. Şekil 5.2(a) ve Şekil 5.3(a) da gösterilen frekans tanım alanındaki yük fonksiyonlarının ikisi de zaman tanım alanındaki yük fonksiyonunun Fourier dönüşümleri oldukları için aynı olacaktır. Şekil 5.2(b) ve Şekil 5.3(b) de gösterilen frekans tanım alanındaki yer değiştirme fonksiyonları ise çok küçük bir fark ile yine üst üste düşmektedir. Görüldüğü üzere her üç analiz yönteminde de çözümler çok iyi bir uyum içindedir. Bu sebeple problemin geri kalan kısmındaki incelemeler daha doğrudan çözüm verdiği için sonlu elemanlar yöntemi ile birlikte zaman tanım alanında doğrudan integrasyon yöntemlerinden biri olan Newmark metodunun kullanımıyla gerçekleştirilecektir.

Analizler aşağıda belirtilen hususlar doğrultusunda ilerlemiştir:

Kiriş 100 adet sonlu elemana bölünmüştür. Bir elemanda 2 düğüm noktası olduğu ve bir düğüm noktasında çökme ve dönme olmak üzere 2 serbestlik derecesi olduğu göz önüne alınırsa sistemdeki toplam serbestlik derecesi  $2 \times (100 + 1) = 202$  olarak belirlenir. Kütle matrisi ise uyumlu kütle matrisi olarak belirlenmiştir. Hatırlanacağı üzere sistemin fiziksel ve geometrik özellikleri Bölüm 2 de belirtilmişti.

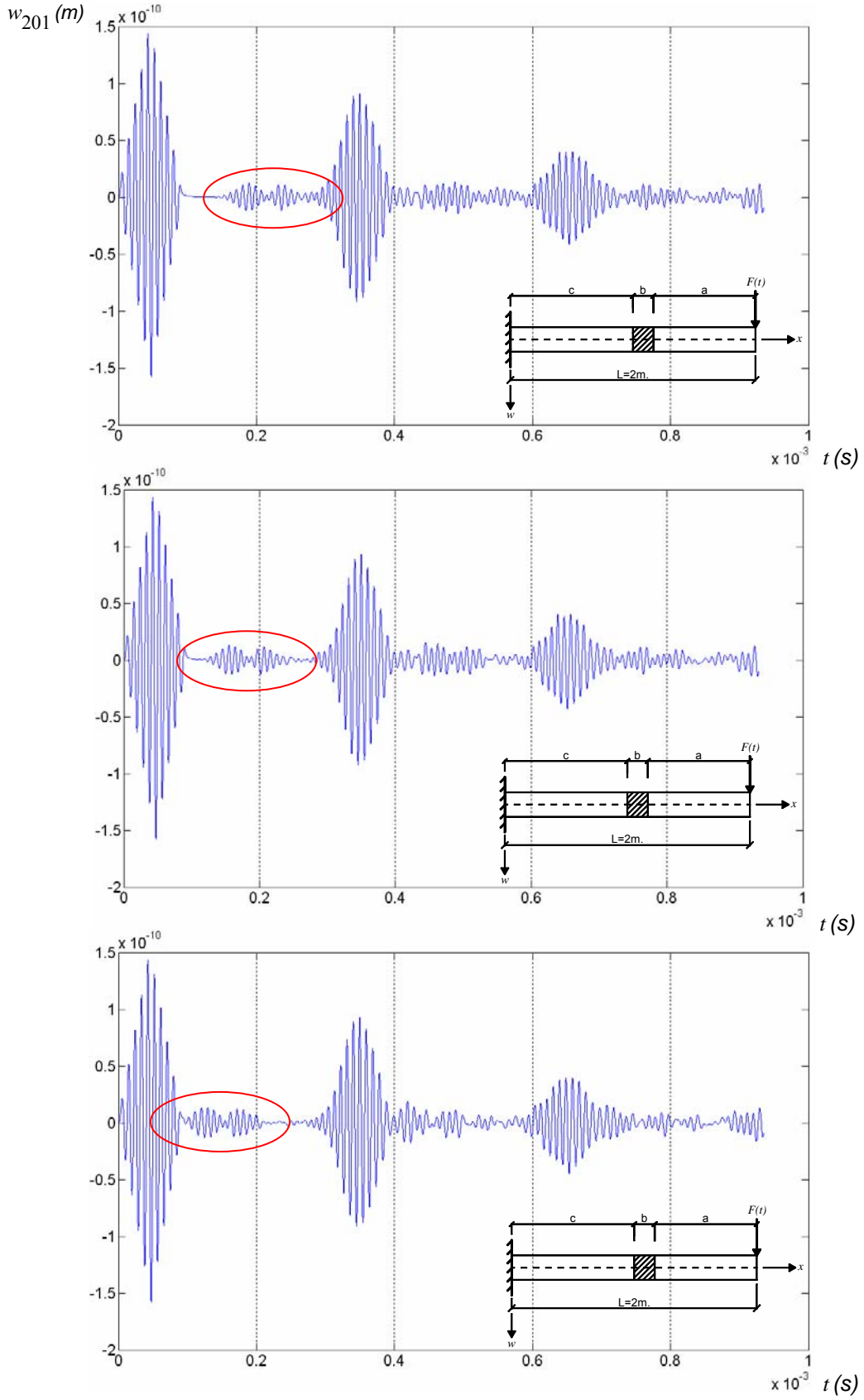
Her bir eleman için yük, rijitlik, kütle ve sönüm matrisleri belirlenir. Bu aşamada eleman koordinat takımındaki serbestlikleri sistem koordinat takımındaki serbestliklere dönüştüren bir indeks vektörü tanımlanmıştır.

Farklı rijitlikte olması istenilen elemanın yeri, boyutu ve elastisite modülü hakkındaki bilgiler girilerek tüm sonlu elemanların rijitlik, kütle ve sönüm matrisleri hesaplanmıştır. Hesaplanan bu eleman matrisleri birleştirilerek tüm sistemin rijitlik, kütle ve sönüm matrisleri elde edilmiştir.

Sınır şartları olan ankastre mesnetteki sıfır değerli çökme ve dönme ile ilişkili satır ve sütunlar sistem matrislerinden çıkarılarak nihai matrisler elde edilmiştir. Bu durumda sistemin serbestlik derecesi 200 e inmiştir.

Bu aşamadan sonra Bölüm 3.2 de belirtilen zaman tanım alanında çözüm yöntemlerinden biri olan Newmark metodu kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır. Etkili rijitlik matrisi ve etkili yük vektörü tanımlamaları yapılarak kuvvetin etkidiği noktadaki ve izlenen zaman aralığı içindeki yer değiştirme, hız ve ivme değerleri birbirini izleyen işlemler sonrası bulunmuştur.

Yapılan ilk araştırmada kirişteki “b” bölgesinin 10 parçadan (20 cm) oluşan sabit bir uzunluğu olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda değişkenler “b” bölgesinin elastisite modülü ( $E_2$ ) ve bu bölgenin başlangıç noktası olacaktır.  $E_2$  değeri  $E_1$  değerinin sırasıyla 1.5, 3, 5, 15 ve 25 katı olacak şekilde seçilerek her bir  $E_2$  değeri için analizler yapılmıştır. Yapılan analizler sonucu elde edilen grafiklerden, dalga yayılımında oluşan ikincil dalgaların oluşma anı belirlenmiştir. Bu durum Şekil 5.5(a)-(b)-(c) de gösterilmiştir.



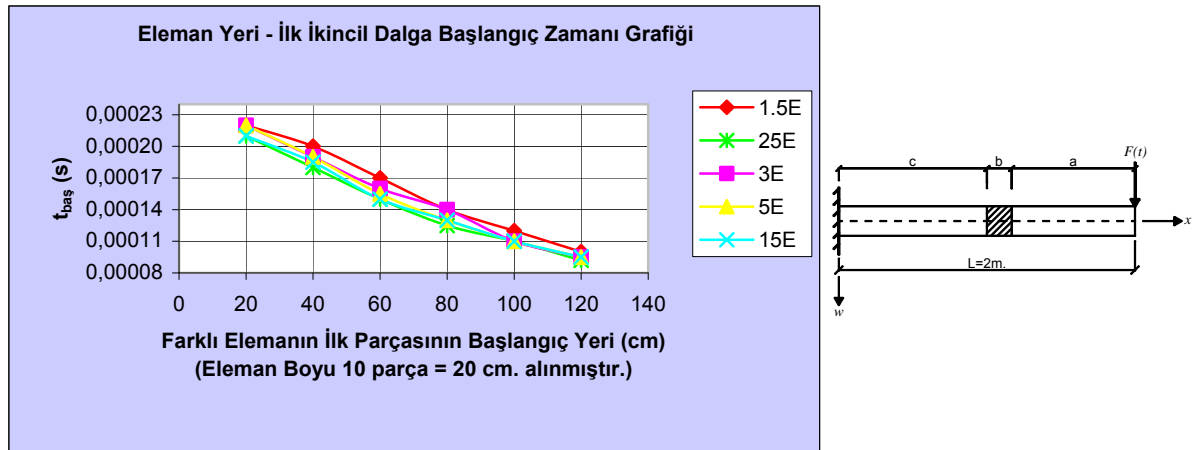
Şekil 5.5 "b" bölgesinin konumuna göre ikincil dalgaların oluşma zamanları. Farklı malzemenin konumu (ankastre mesnete göre) (a)  $x = 80$  cm ile 100 cm arasında (b)  $x = 100$  cm ile 120 cm arasında (c)  $x = 120$  cm ile 140 cm arasında

Burada  $x$  eksenini ankastre mesnetten başlamaktadır. Dolayısıyla “b” bölgesinin başlangıcı ,”b” bölgesi ile “c” bölgesinin kesişim yeri, “b” bölgesinin bitişi ise “b” bölgesi ile “a” bölgesinin kesişim yeri olarak tariflenir. Farklı  $E_2$  değerleri ve eleman başlangıç yerlerine göre ikincil dalgaların başlama anı bilgileri Çizelge 5.1 de verilmiştir.

Çizelge 5.1 Eleman yeri – İkincil dalga yeri başlangıç zamanı

| $E_2=1,5*E_1$   |               | $E_2=3*E_1$     |               | $E_2=5*E_1$     |               | $E_2=15*E_1$    |               | $E_2=25*E_1$    |               |
|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| Eleman Yeri(cm) | $t_{baş}$ (s) | Eleman Yeri(cm) | $t_{baş}$ (s) | Eleman Yeri(cm) | $t_{baş}$ (s) | Eleman Yeri(cm) | $t_{baş}$ (s) | Eleman Yeri(cm) | $t_{baş}$ (s) |
| 0               |               | 0               |               | 0               |               | 0               |               | 0               |               |
| 20              | 2,20E-04      | 20              | 2,20E-04      | 20              | 2,20E-04      | 20              | 2,10E-04      | 20              | 2,10E-04      |
| 40              | 2,00E-04      | 40              | 1,90E-04      | 40              | 1,90E-04      | 40              | 1,85E-04      | 40              | 1,80E-04      |
| 60              | 1,70E-04      | 60              | 1,60E-04      | 60              | 1,55E-04      | 60              | 1,50E-04      | 60              | 1,50E-04      |
| 80              | 1,40E-04      | 80              | 1,40E-04      | 80              | 1,30E-04      | 80              | 1,30E-04      | 80              | 1,25E-04      |
| 100             | 1,20E-04      | 100             | 1,10E-04      | 100             | 1,10E-04      | 100             | 1,10E-04      | 100             | 1,10E-04      |
| 120             | 1,00E-04      | 120             | 9,50E-05      | 120             | 9,50E-05      | 120             | 9,50E-05      | 120             | 9,20E-05      |
| 140             | Girişim var   | 140             | Girişim var   | 140             | Girişim var   | 140             | Girişim var   | 140             | Girişim var   |
| 160             | Girişim var   | 160             | Girişim var   | 160             | Girişim var   | 160             | Girişim var   | 160             | Girişim var   |
| 180             | Girişim var   | 180             | Girişim var   | 180             | Girişim var   | 180             | Girişim var   | 180             | Girişim var   |

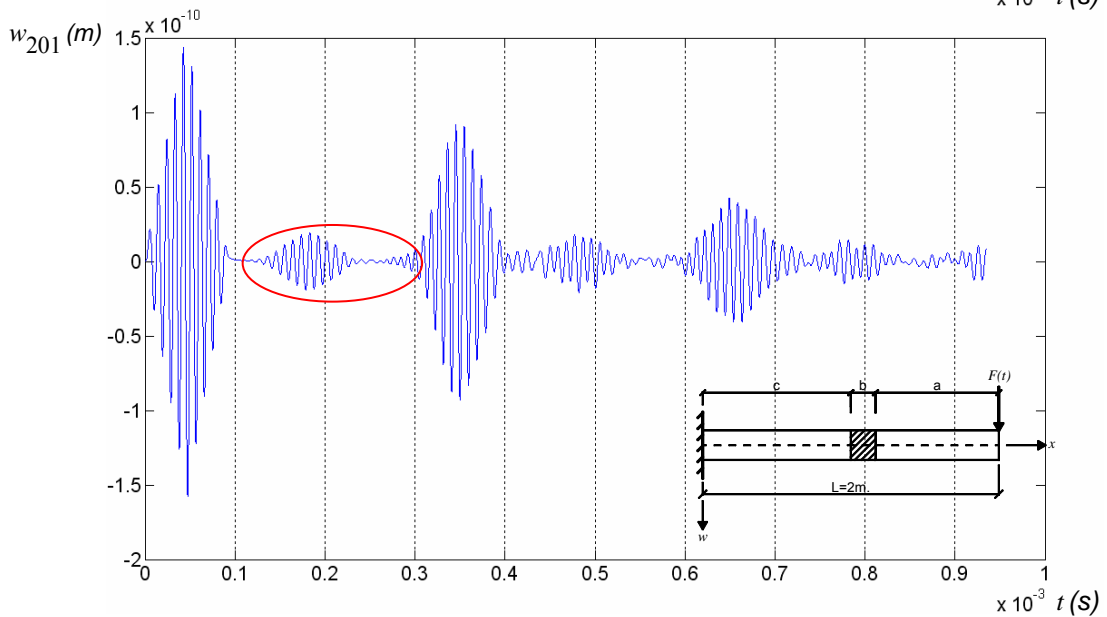
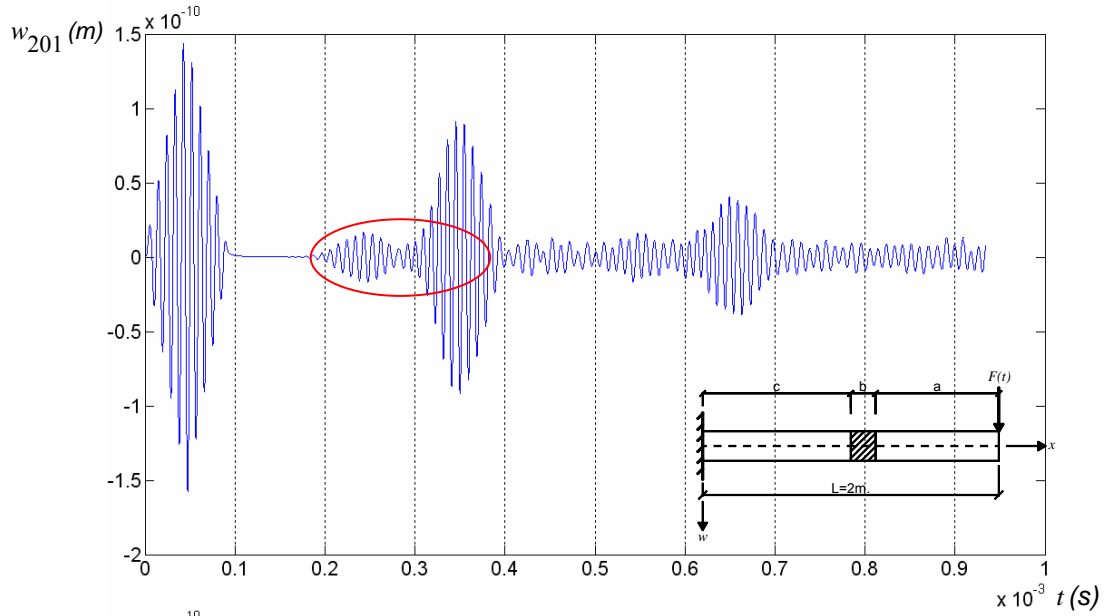
Görüldüğü üzere “b” bölgesi konsol kirişin uç noktasına yaklaştıkça birincil dalgalar ile girişim oluşmuş ve farklı elemanın başlangıcı  $x=140$  cm olduktan sonra okuma yapılamamıştır. İkincil dalgaların oluşması, malzeme sınırlarında dalgaların yansımaları şeklinde açıklanabilir. Şekil 5.5(a)-(b)-(c) de görülen ikincil dalgaların iki adet olduğu görülmektedir. Bu dalgaların ilki “a” bölgesi ile “b” bölgesinin sınırından, ikincisi ise “b” bölgesi ile “c” bölgesi sınırından yansıyan dalgalar olarak yorumlanabilir. Görüldüğü üzere geri dönüş yapan bu dalgalar elemanın yerini belirleyici bir rol oynamıştır. Bu çizelgeyi grafik olarak ifade edersek

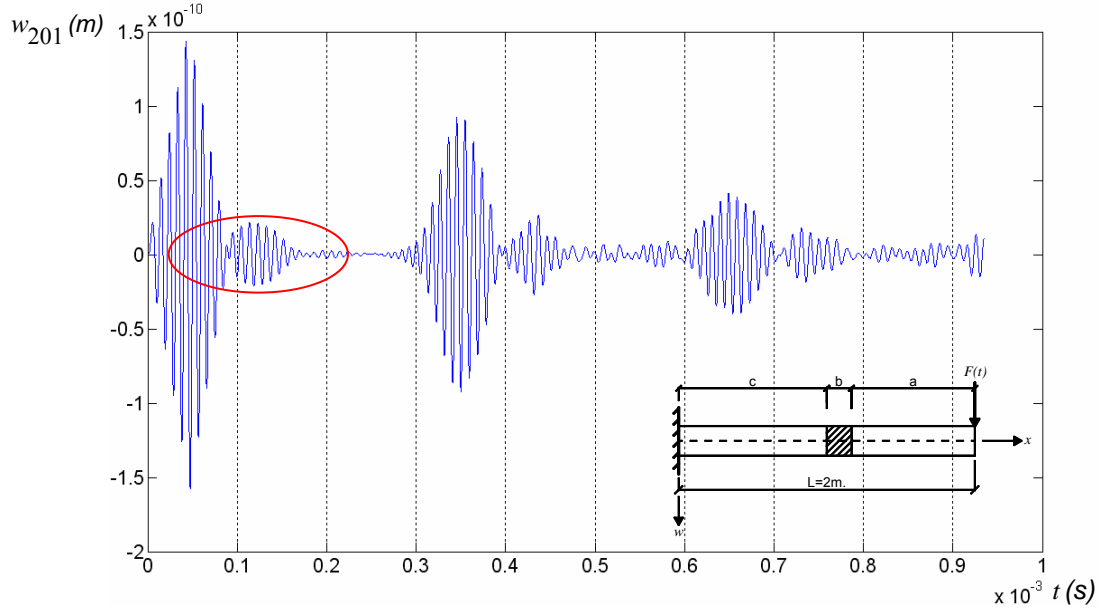


Şekil 5.6 Eleman yeri - İkincil dalga başlangıç zamanı grafiği

Buna göre eleman boyu sabit tutulduğunda ilk ikincil dalganın başlangıç zamanı ve oluşum süresi  $E_2$  değerine göre değişim göstermemektedir. Bu beklenen bir sonuçtur. Şekil 5.6 da görülen farklılıkların okuma hatasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Esas değişim malzemenin bulunduğu yere bağlı olarak oluşmaktadır ve bu değişim beklenen bir sonuç olarak, her  $E_2$  değeri için kendi içinde doğrusaldır.

Benzer şekilde, eleman boyu aynı olup  $E_2$  değeri  $2E_1$ ,  $10E_1$ ,  $15E_1$  ve  $20E_1$  olacak şekilde yapılan ikinci analizde, ikincil dalgaların oluşma anı değerleri yerine bu dalgaların en büyük genlikli kısımlarının oluşma anları dikkate alındığında grafikler Şekil 5.7(a)-(b)-(c) deki gibi elde edilmiştir. Burada ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaştığı anlar farklı  $E_2$  değerleri için Çizelge 5.2 de verilmiştir.



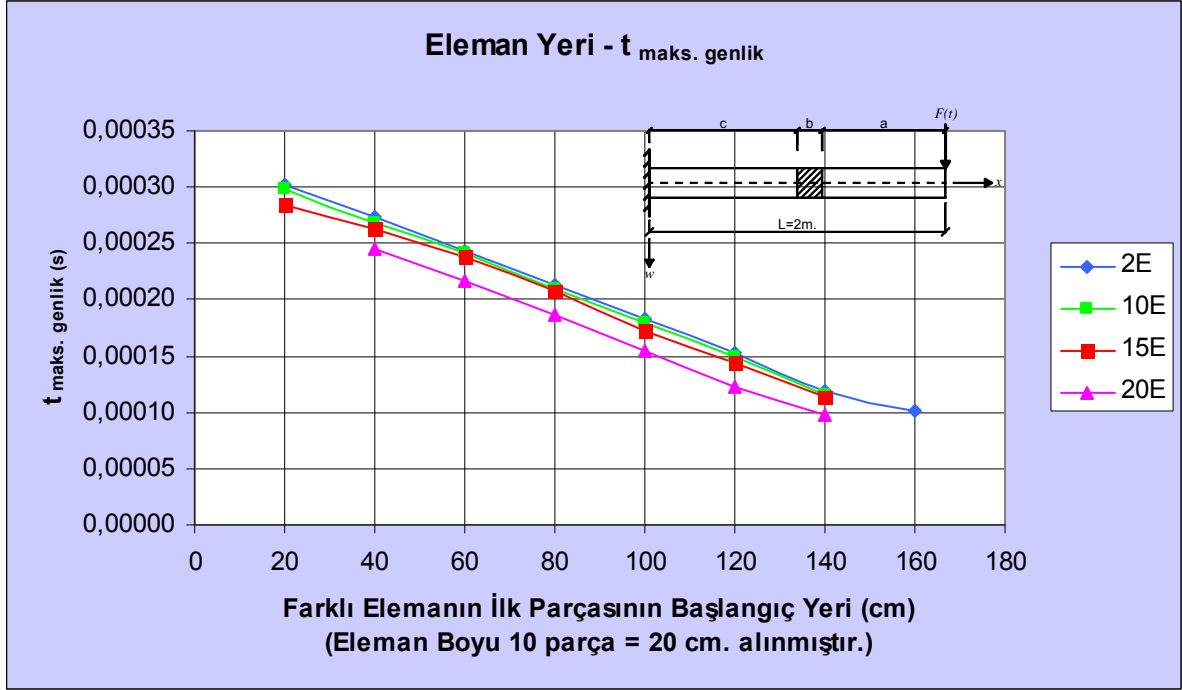


Şekil 5.7 "b" bölgesinin konumuna göre ikincil dalgaların oluşma zamanları. Farklı malzemenin konumu (ankastre mesnete göre) (a)  $x = 60$  cm ile  $80$  cm arasında (b)  $x = 100$  cm ile  $120$  cm arasında (c)  $x = 140$  cm ile  $160$  cm arasında

Çizelge 5.2 Eleman yeri – İlk ikincil dalganın en büyük genliğe ulaşma zamanı

| $E_2=2 \cdot E_1$ |               | $E_2=10 \cdot E_1$ |               | $E_2=15 \cdot E_1$ |               | $E_2=20 \cdot E_1$ |               |
|-------------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| Eleman Yeri (cm)  | $t_{ort}$ (s) | Eleman Yeri (cm)   | $t_{ort}$ (s) | Eleman Yeri (cm)   | $t_{ort}$ (s) | Eleman Yeri (cm)   | $t_{ort}$ (s) |
| 0                 |               | 0                  |               | 0                  |               | 0                  |               |
| 20                | 3,02E-04      | 20                 | 2,99E-04      | 20                 | 2,84E-04      | 20                 |               |
| 40                | 2,73E-04      | 40                 | 2,69E-04      | 40                 | 2,63E-04      | 40                 | 2,46E-04      |
| 60                | 2,43E-04      | 60                 | 2,42E-04      | 60                 | 2,38E-04      | 60                 | 2,16E-04      |
| 80                | 2,13E-04      | 80                 | 2,09E-04      | 80                 | 2,08E-04      | 80                 | 1,86E-04      |
| 100               | 1,83E-04      | 100                | 1,79E-04      | 100                | 1,73E-04      | 100                | 1,55E-04      |
| 120               | 1,53E-04      | 120                | 1,49E-04      | 120                | 1,43E-04      | 120                | 1,22E-04      |
| 140               | 1,19E-04      | 140                | 1,15E-04      | 140                | 1,13E-04      | 140                | 9,75E-05      |
| 160               | 1,02E-04      | 160                |               | 160                |               | 160                |               |
| 180               |               | 180                |               | 180                |               | 180                |               |

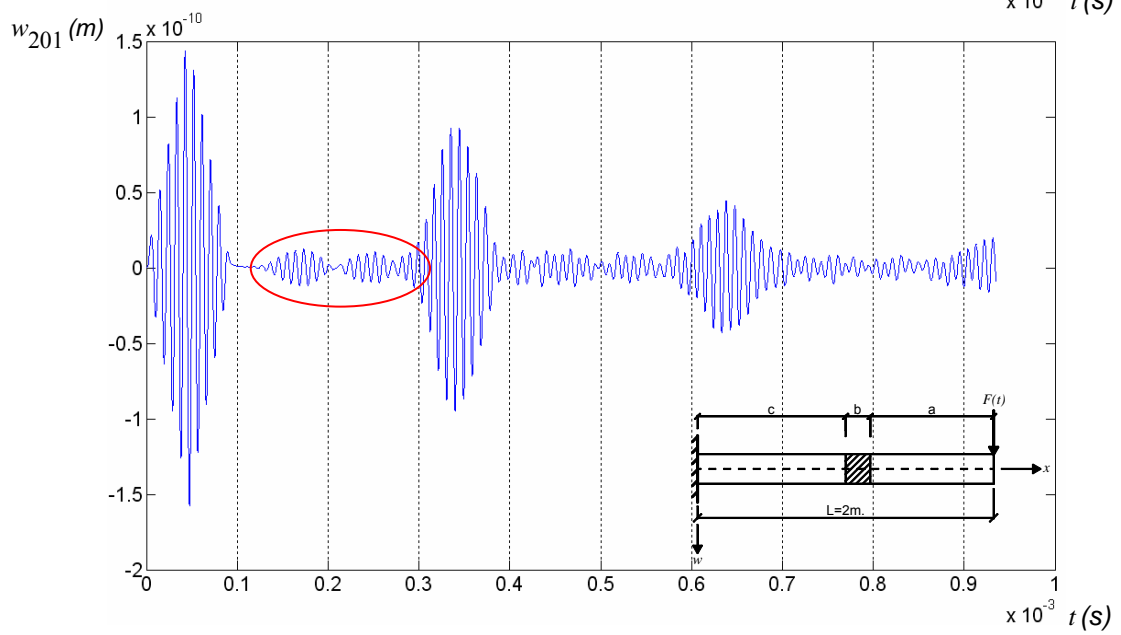
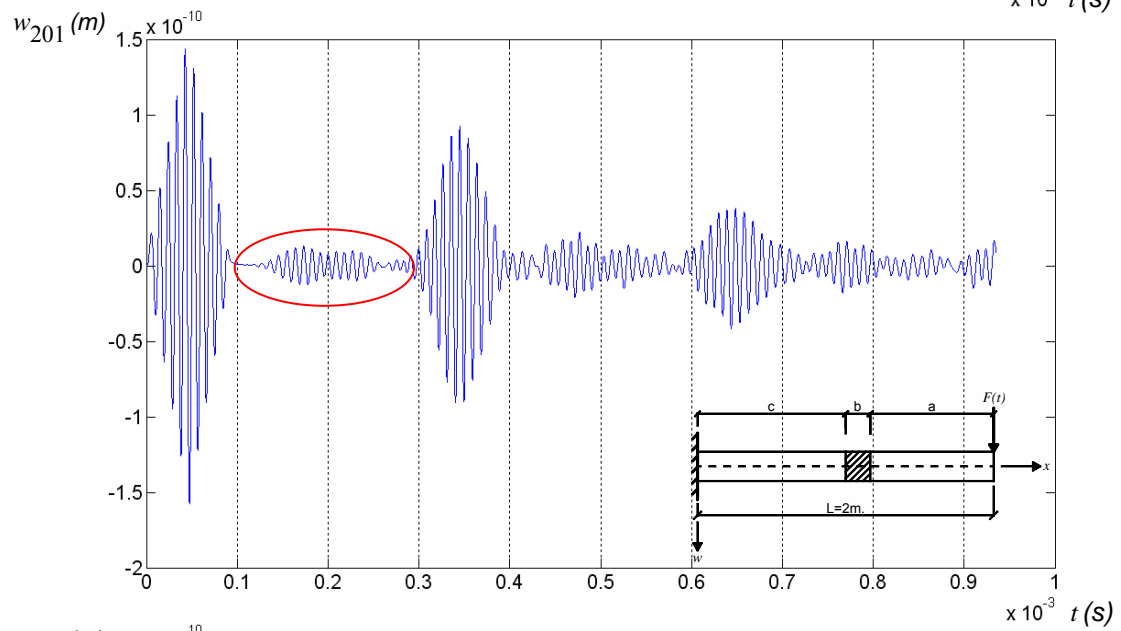
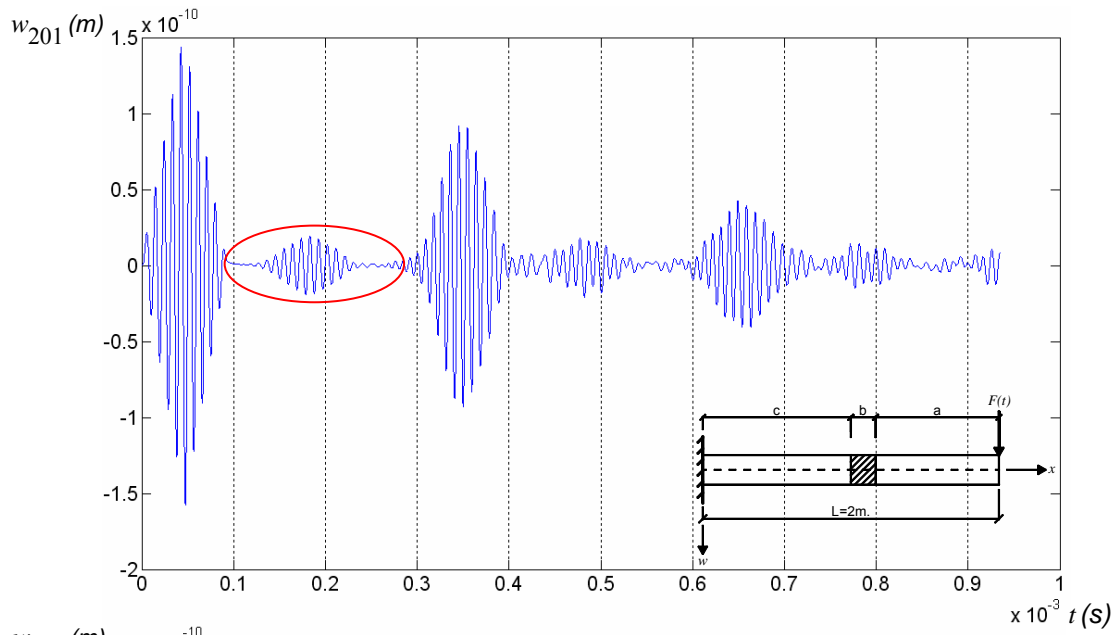
Bir önceki analizde olduğu gibi "b" bölgesi konsol kirişin uç noktasına yaklaştıkça birincil dalgalar ile girişim oluşmuş ve farklı elemanın başlangıcı  $x = 160$  cm olduktan sonra sağlıklı bir okuma yapılamamıştır. Bu çizelgede verilen değerler Şekil 5.8 de grafik olarak gösterilmiştir.

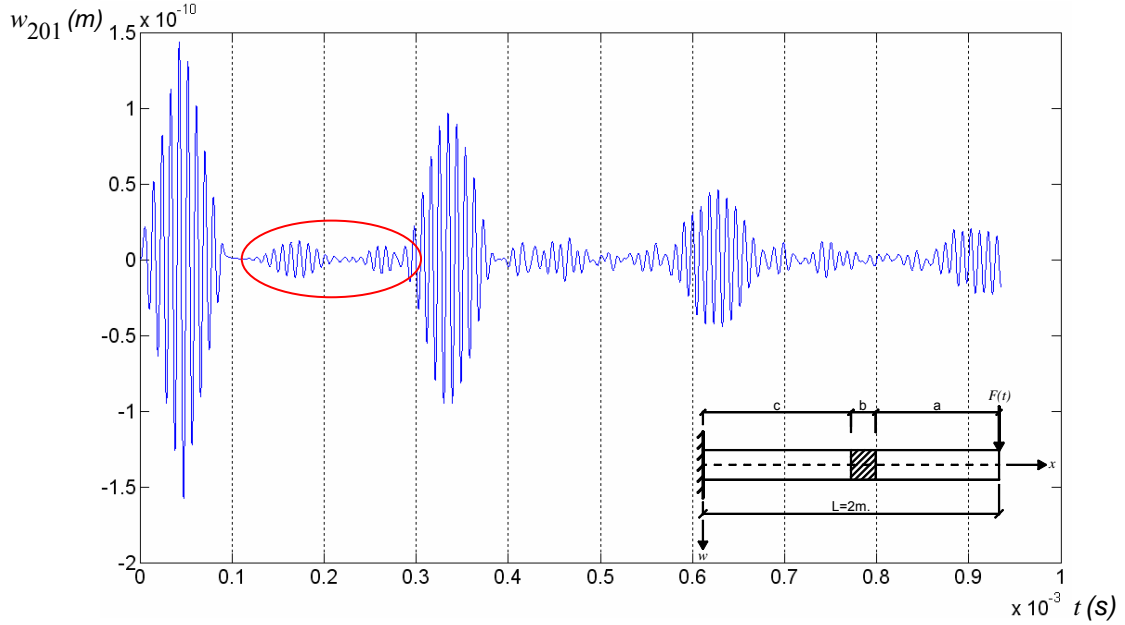


Şekil 5.8 Eleman yeri – İlk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği

Aynı bir önceki analizde olduğu gibi her bir  $E_2$  değeri için ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanlarının “b” bölgesinin elastisite modülü ile ilgili olmadığı görülmektedir. En büyük genliğe ulaşma zamanları dikkate alındığında daha doğrusal bir grafik elde edilmiştir. Sonuç olarak ilk incelemede olduğu gibi ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma anları “b” bölgesinin konumuna bağlı olarak değişmektedir.

Üçüncü araştırmada ise önceki analizlerde sabit uzunluğa sahip “b” bölgesinin uzunluğu ve dolayısıyla bitiş yeri değiştirilerek  $E_2$  değerinin  $2E_1$ ,  $5E_1$ ,  $10E_1$  ve  $20E_1$  olması durumunda ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaştıkları anlar incelenecektir. Yapılan analizlerde  $E_2 = 2E_1$  durumu için ortaya çıkan dalga yayılımları Şekil 5.9 (a)-(b)-(c)-(d) de verilmiştir.





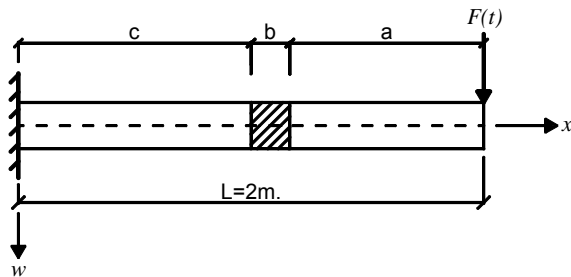
Şekil 5.9 Farklı elemanın  $x = 120$  cm de bitmesi durumunda ikincil dalgaların oluşma zamanı  
 (a)  $x = 100$  cm ile 120 cm arasında (b)  $x = 80$  cm ile 120 cm arasında  
 (c)  $x = 60$  cm ile 120 cm arasında (d)  $x = 40$  cm ile 120 cm arasında

$E_2 = 2E_1$  durumu için elde edilen bu analiz grafikleri incelendiğinde “b” bölgesinin bitiş yeri değişmediğinde ilk ikincil dalğanın maksimum genliğe ulaştığı zamanın değişmediği görülmektedir. Ayrıca “b” bölgesinin uzunluğu arttıkça Şekil 5.9(c) ve Şekil 5.9(d) de açıkça görüldüğü gibi ikincil dalgalar da kendi içinde ayrılmaya başlamaktadırlar. Bu durum daha önce de belirtildiği gibi “b” bölgesinin “a” ve “c” bölgeleriyle olan sınırlarından geri yansıyan dalgaları temsil etmektedir. Yani ikincil dalgaların kendi aralarında oluşan mesafenin tespit edilmesi bu bölgenin uzunluğu hakkında bize fikir verebilir.

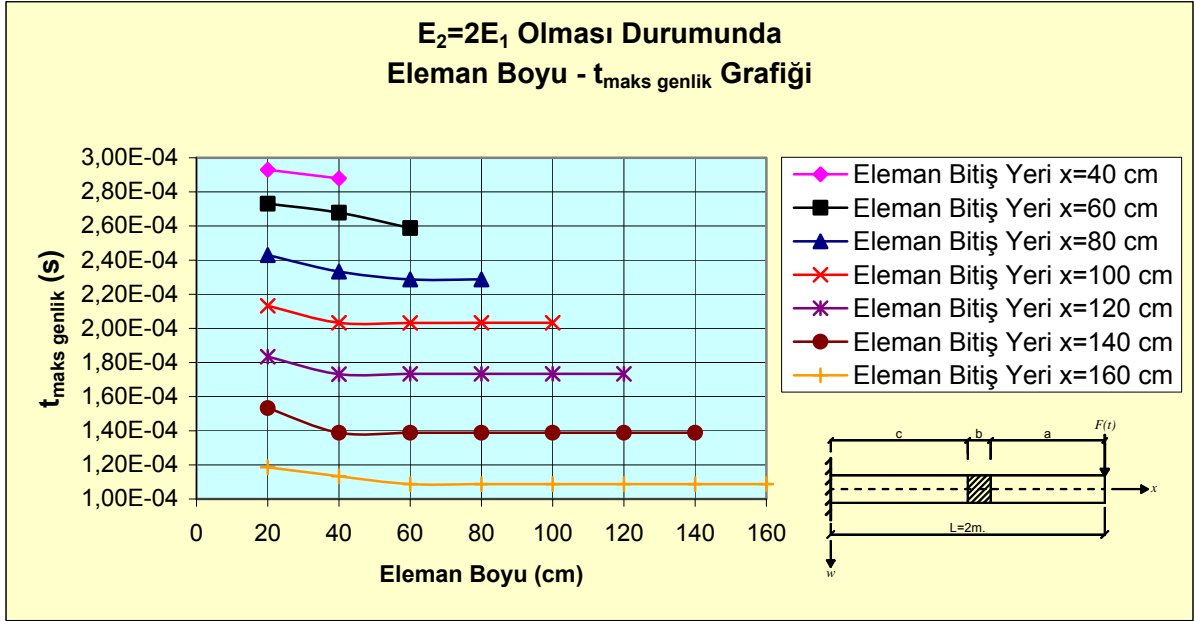
Benzer şekilde diğer  $E_2$  değerleri için de analizler yapılmış ve bunlarda da Şekil 5.9 da verilen grafiklere benzer grafikler elde edilmiştir. Bu grafiklerde okunan değerler ise Çizelge 5.3(a)-(b) de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Çizelge 5.3(a)-(b) de aynı olan değerlerin daha kolay ayırt edilebilmesi için farklı renkler kullanılmıştır. Elde edilen tüm bu değerler birleştirilerek Şekil 5.10 da verilen grafikler elde edilmiştir.

Çizelge 5.3(a)  $2E_1$  ve  $5E_1$  için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğinin oluşma zamanı

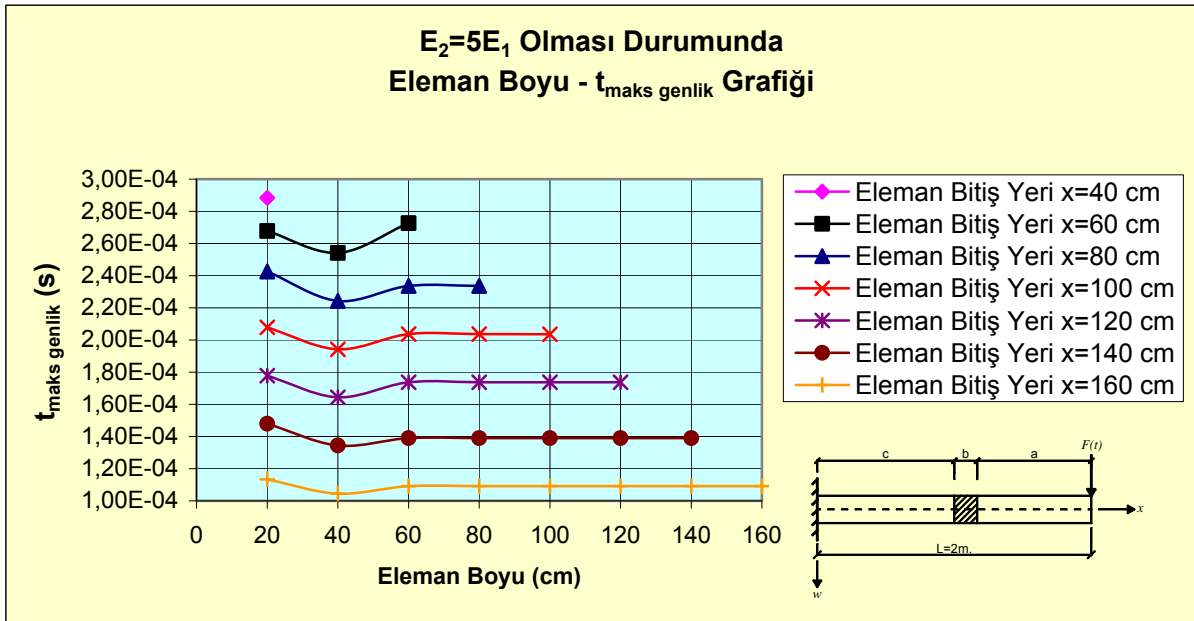
| "b" Bölgesi Bitiş Yeri |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|------------------------|------------------|------------------------------|------------------|------------------------------|------------------|------------------------------|------------------|------------------------------|
|                        | 20               |                              | 30               |                              | 40               |                              | 50               |                              |
|                        | Eleman Boyu (cm) | $t_{\text{maks genlik}} (s)$ | Eleman Boyu (cm) | $t_{\text{maks genlik}} (s)$ | Eleman Boyu (cm) | $t_{\text{maks genlik}} (s)$ | Eleman Boyu (cm) | $t_{\text{maks genlik}} (s)$ |
| $2E_1$                 | 20               | 2,930E-04                    | 20               | 2,731E-04                    | 20               | 2,430E-04                    | 20               | 2,132E-04                    |
|                        | 40               | 2,879E-04                    | 40               | 2,678E-04                    | 40               | 2,333E-04                    | 40               | 2,033E-04                    |
|                        |                  |                              | 60               | 2,588E-04                    | 60               | 2,287E-04                    | 60               | 2,032E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              | 80               | 2,287E-04                    | 80               | 2,033E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              | 100              | 2,033E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
| $5E_1$                 | 20               | 2,884E-04                    | 20               | 2,678E-04                    | 20               | 2,426E-04                    | 20               | 2,079E-04                    |
|                        | 40               |                              | 40               | 2,541E-04                    | 40               | 2,243E-04                    | 40               | 1,943E-04                    |
|                        |                  |                              | 60               | 2,726E-04                    | 60               | 2,336E-04                    | 60               | 2,037E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              | 80               | 2,336E-04                    | 80               | 2,037E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              | 100              | 2,036E-04                    |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |
|                        |                  |                              |                  |                              |                  |                              |                  |                              |



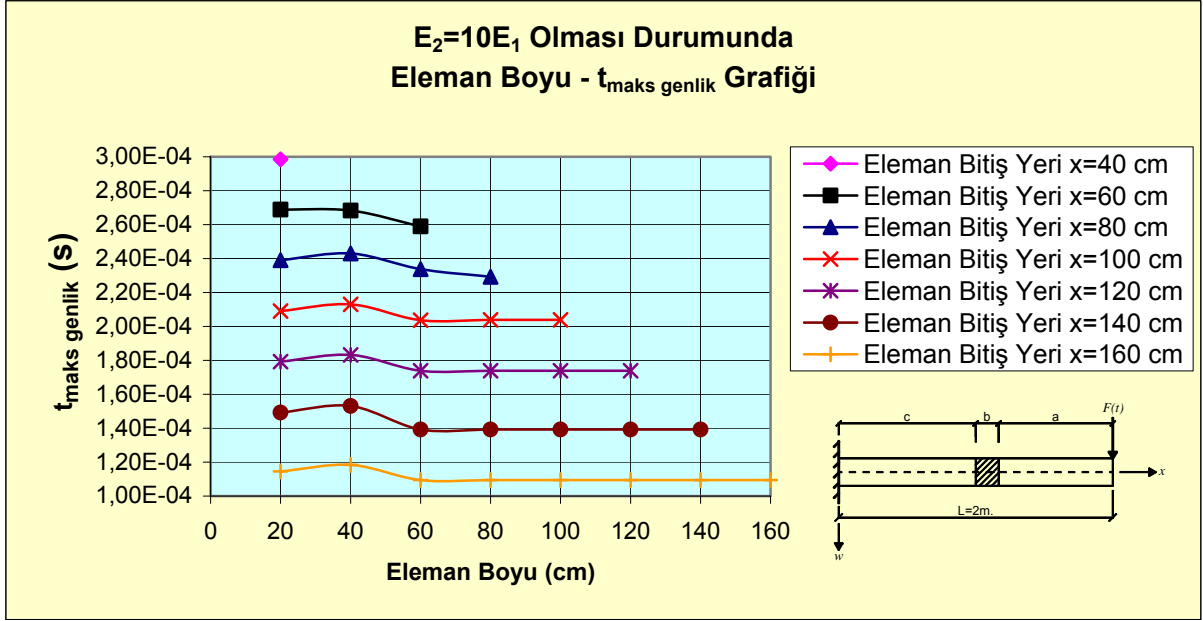




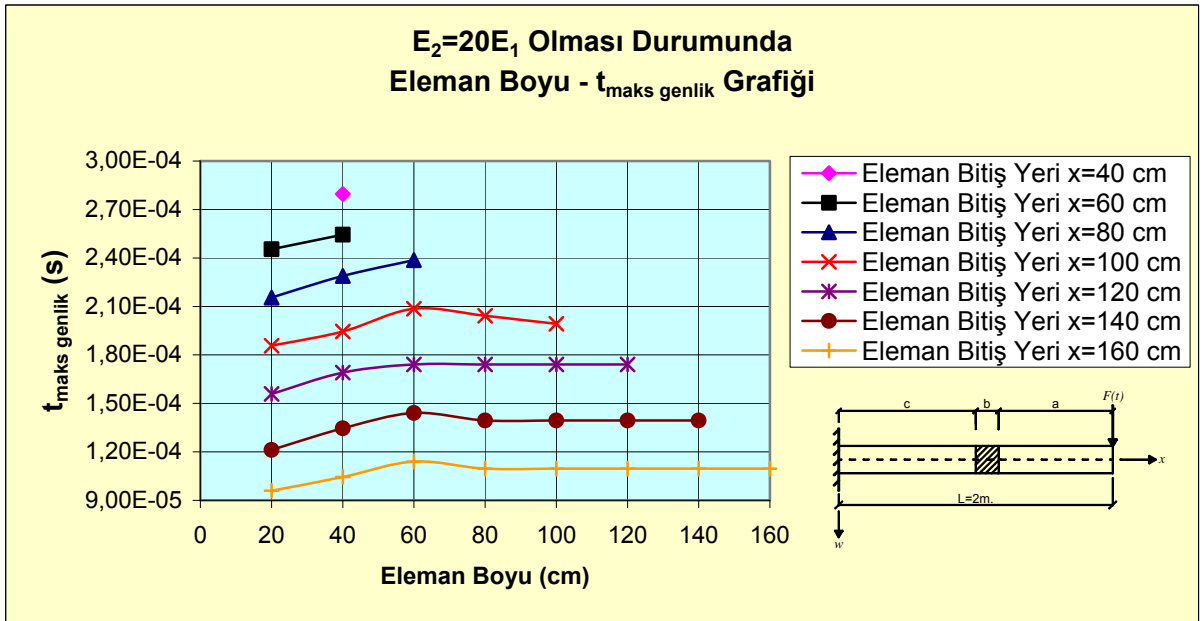
Şekil 5.10(a)  $E_2 = 2E_1$  için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği



Şekil 5.10(b)  $E_2 = 5E_1$  için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği



Şekil 5.10(c)  $E_2 = 10E_1$  için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği

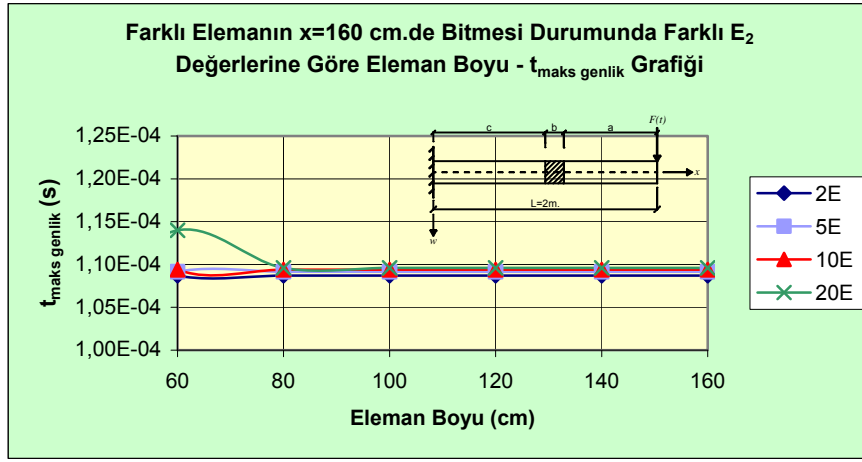


Şekil 5.10(d)  $E_2 = 20E_1$  için eleman boyu – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğe ulaşma zamanı grafiği

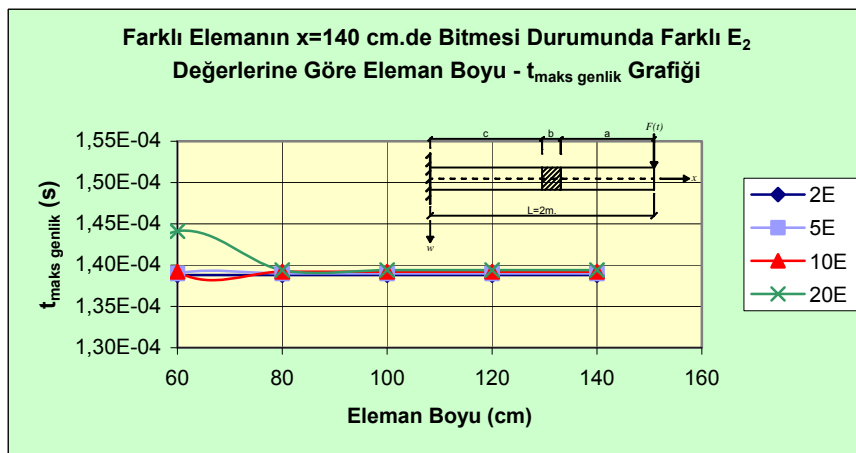
Belirli  $E_2/E_1$  değerleri için “b” bölgesinin bitişi yeri sabit olduğunda ilk ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaştığı anlar farklı elemanın boyu 60 cm olana kadar küçük değişiklikler

gösterse de bu değişikliklerin okuma hatalarından kaynaklandığı düşünülmektedir. Farklı elemanın boyu 60 cm yi geçince ilk ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaştığı anlar değişiklik göstermemektedir. Yani ilk ikincil dalganın maksimum genliğe ulaşma anı, farklı elemanın  $E$  sinin ve boyunun değişimiyle değişmemektedir. Bu durumda “b” bölgesinin bitiş noktası, ikincil dalganın maksimum genliğe ulaşma anı belirlenerek belirli bir ana malzeme  $E$  si ( $E_1$ ) için kolaylıkla elde edilebilir.

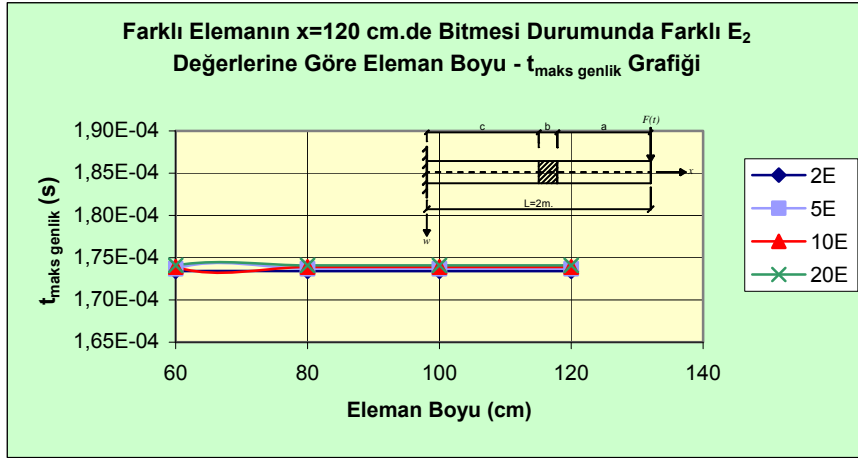
“b” bölgesinin her bir bitiş noktası için de farklı ( $E_2$ ) değerleri için eleman boyu- $t_{\text{maks genlik}}$  grafikleri çizilirse aynı sonuçlara buradan da ulaşılabilir. Bu amaçla Şekil 5.11(a)-(b)-(c) de bu grafikler verilmiştir.



Şekil 5.11(a) Farklı elemanın  $x = 160$  cm de bitmesi durumunda farklı  $E_2$  değerleri için eleman boyu -  $t_{\text{maks genlik}}$  grafiği



Şekil 5.11(b) Farklı elemanın  $x = 140$  cm de bitmesi durumunda farklı  $E_2$  değerleri için eleman boyu- $t_{\text{maks genlik}}$  grafiği



Şekil 5.11(c) Farklı elemanın  $x = 120$  cm de bitmesi durumunda farklı  $E_2$  değerleri için eleman boyu- $t_{\text{maks genlik}}$  grafiği

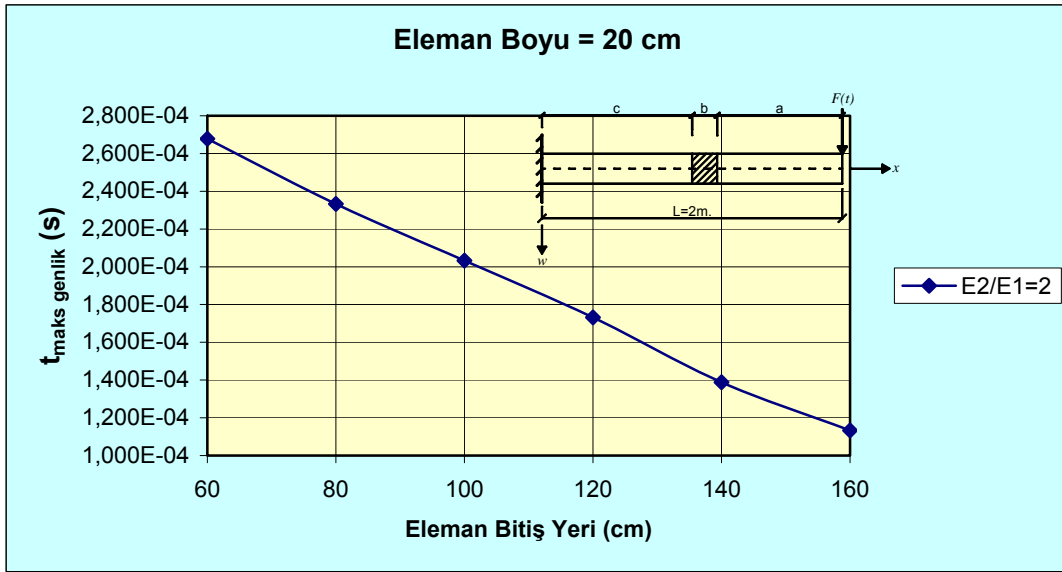
Görüldüğü üzere Şekil 5.11 de verilen grafiklerde de farklı elemanın boyu 60 cm ye ulaştıktan sonra ilk ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaşma süresi  $E_2$  değerine ve eleman boyuna göre değişim göstermemektedir. Yani ikincil dalganın maksimum genliğe ulaştığı zaman belirlendiği takdirde “b” bölgesinin bitiş yeri kolaylıkla belirlenebilir. “b” bölgesinin uzunluğu hakkında ise Şekil 5.9(c) ve Şekil 5.9(d) de gösterildiği gibi ikinci ikincil dalganın incelenmesi yol gösterici bir rol oynar.

$S = V \cdot t$  olduğuna göre ( $V$  sabit olduğunda); “b” bölgesi çok rijit olduğunda, yani bu elemanın elastisite modülü çok büyük olduğunda, birincil ve ikincil dalgalar arasında girişim oluşmaktadır. Bu durumda maksimum genliklerin oluştuğu yer ve zamanı bulmak mümkün olmamaktadır. Bu girişim maksimum genlik değerini bazen azaltıcı bazen artırıcı yönde olabilmektedir.

Dalgaların rijitliği yüksek malzemeler içindeki yayılma hızlarının daha düşük rijitlikli malzemelere göre daha yüksek olduğu bilinmektedir. Bu durumda “b” bölgesinin boyu arttıkça dalga bu bölgede daha hızlı hareket edeceğinden geriye dönüşü de daha hızlı olacaktır. Buna bağlı olarak da darbenin olduğu yerde yapılan ölçümlerde ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaşma zamanlarında bir düşüş beklenir. Bunu belirlemek amacıyla  $E_2/E_1 = 2$  değeri için ve “b” bölgesinin 20 cm olması durumunda bitiş yerine bağlı ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaşma anları Çizelge 5.4 te verilmiştir. Bu çizelgenin grafik gösterimi ise Şekil 5.12 de bulunmaktadır.

Çizelge 5.4  $E_2 = 2E_1$  için eleman bitiş noktası – ilk ikincil dalgaların en büyük genliğinin oluşma zamanları

| Eleman Bitiş Noktası (cm) | $t_{\text{maks genlik}}$ (s) |
|---------------------------|------------------------------|
| 60                        | 2,678E-04                    |
| 80                        | 2,333E-04                    |
| 100                       | 2,033E-04                    |
| 120                       | 1,732E-04                    |
| 140                       | 1,388E-04                    |
| 160                       | 1,133E-04                    |



Şekil 5.12 Farklı elemanın boyunun 20 cm olması durumunda  $E_2 = 2E_1$  değeri için farklı eleman bitiş yeri- $t_{\text{maks genlik}}$  grafiği

$S = V \cdot t$  olduğuna göre, ana malzemede  $V$  sabit olduğundan,  $S$  değiştiğinde  $t$  de buna doğrusal bağımlı olarak değişmektedir.

#### 5.4 Sonuçlar

İlk ikincil dalgaların oluşma ya da en büyük genliğe ulaşma zamanlarının farklı malzemenin  $E$  si ile bir ilişkisi yoktur. Bunu belirleyen faktör farklı elemanın konumudur.

İkincil dalgaların kendi içindeki ayrılmaları durumundan faydalanılarak, yani ikinci ikincil dalga incelenerek farklı malzemenin uzunluğu hakkında bilgi sahibi olunabilir.

Farklı elemanın bitiş yeri sabit alındığında ikincil dalgaların oluşma zamanları malzemenin  $E$  si ve farklı elemanın boyuyla değişmemektedir. Bu durumda farklı elemanın bitiş noktası,

ilk ikincil dalğanın maksimum genliğe ulaşma anı belirlenerek belirli bir ana malzeme  $E$  si için kolaylıkla elde edilebilir.

Farklı elemanın  $E$  si ana malzemenin  $E$  sine göre çok büyük olduğunda oluşan ikincil dalga girişimleri sebebiyle ikincil dalgaların maksimum genliğe ulaştıkları nokta belirlenememektedir. Bu durumda farklı elemanın yeri konusunda bir fikir yürütülememektedir.

Elde edilen bu sonuçlardan yola çıkarak bir yapısal eleman içerisindeki farklı bir malzemenin konumu ve boyutu bu ikincil dalgalar yardımıyla bulunabilir.

**KAYNAKLAR**

Brebbia, C.A., Tells, J.C.F., Wrobel, L.C., (1984), Boundary Element Techniques, Springer, Berlin,

Craig, R.R., (1981), Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods, John Wiley&Sons, Inc., Canada,

Çalım, F.F., (2003), Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi, Doktora Tezi, Adana 2003, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Delsanto, P.P., Mignogna, R.B., (1998), “A Spring Model For The Simulation Of The Ultrasonic Pulses Through Imperfect Contact Interfaces”, Journal of Acoustical Society of America 104: 1-8

Doyle, J.F., (1997), Wave Propagation In Structures, Springer, New York

Hackbush, B., (1985), Multi-Grid Methods and Applications, Springer, Berlin

Kocatürk, T., Demir, C., İlhan,N., Şimşek, M., (2005), “Viskoelastik Nokta Mesnetli Bir Kirişin Sinusoidal Değişen Kuvvet Etkisi Altındaki Kararlı Cevabının İncelenmesi”, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, 12 – 16 Eylül 2005, Hatay

Krawczuk, M., (1992), “Modeling and Identification of Cracks In Truss Constructions”, Finite Element In Analysis and Design 16- 41-50

Krawczuk, M., (2002), “Application Of Spectral Beam Finite Element With A Crack And Iterative Search Technique To Damage Detection”, Finite Element In Analysis and Design 38: 537-548

Krawczuk, M., Palacz, M., Ostachowicz, W., (2002), “The Dynamic Analysis Of A Cracked Timoshenko Beam By The Spectral Element Method”, Journal of Sound and Vibration 264: 1139-1153

Lakshmanan, K.A.,Pines, D.J., (1997), “Detecting Crack Size And Location In Composite Rotorcraft Flexbeams”, Proceedings of The SPIE Smart Structures and Materials 3041: 408-416

Norton, M., Karczub, D., (2003), Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers, Second Edition, Cambridge University Press, 2003

Palacz, M., Krawczuk, M., Ostachowicz, W., (2005), The Spectral Finite Element Model For Analysis of Flexural-Shear Coupled Wave Propagation, Part 1: Laminated Multilayer Composite, Composite Structures 68: 37-44

Orkisz, J., (1998), Finite Difference Method (Part III) Handbook of Computational Solid Mechanics, Springer, Berlin

Ostachowicz, W., Krawczuk, M., Cartmell, M., Gilchrist, M., (2003), "Wave Propagation In Delaminated Beam", Computers and Structures 82:475-483

Patera, A.T., (1984), "A Spectral Element Method For Fluid Dynamics: Laminar Flow In A Channel Expansion", Journal of Computational Physics 54: 468-488

Palacz, M., Krawczuk, M. (2002), "Analysis of Longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method" Computers and Structures 80: 1809-1816

Reddy, J.N., (1993), An Introduction To The Finite Element Method, McGraw-Hill International Editions, Singapore

Staszewski, W.J., (2005), "Ultrasonic/guided Waves For Structural Health Monitoring", Key Engineering Materials 293-294: 49-60

Zienkiewicz, O.C., (1989), The Finite Element Method, McGraw-Hill, London

**EKLER**

- Ek 1 Dalga Tanımı ve Kiriş Eğilmesi Durumunda Dalgalar
- Ek 2 Fourier Dönüşümleri
- Ek 3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı
- Ek 4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Periyodik Tahrike Cevabı

## **Ek 1 Dalga Tanımı ve Kiriş Eğilmesi Durumunda Dalgalar\***

### **Ek 1.1 Giriş**

Ses ve titreşim, dinamik çalışmalarda çoğu zaman ayrı ayrı ele alınmaktadır ve bazı durumlarda birbirleriyle bağlı olduğu unutulmamalıdır. Mesela ikisi de moleküler hareket enerjisinin farklı ortamlarda transferiyle ilgilidir (genellikle sırasıyla akışkan ve katılarda). Burada amaç ses ve titreşimi ayrı ayrı incelemektense tek bir çatı altında toplamaktır. Mühendisler için sesi dalgalar açısından, titreşimi de modlar açısından düşünmek daha uygundur. Ses, titreşim ve ikisi arasındaki etkileşim için temel anlayış birini dalga açısından diğerini de modlar açısından düşündürmektedir.

Burada titreşime maruz mekanik sistemlerin temelleri hem dalga hem de mod kavramları ile incelenecektir. Titreşim (sesin de olduğu gibi) salınım hareketi ile dağılır. Bu salınım hareketinin ortaya çıkması için yapının eylemsizliğe (atalet) ve esnekliğe sahip olması gerekir. Eylemsizlik, yapının içindeki bitişik elemanlara momentumun iletilmesini sağlar ve birim hacmin ağırlığı ile ilgilidir. Esneklik ise yer değiştirmiş bir elemanın denge haline gelmesi için güç sarf etmesi özelliğidir (Bu yüzden titreşim, katılardaki salınım hareketiyle ilişkiliyken ses sıvılardaki salınım hareketiyle ilgilidir.).

Salınım yapan sistemler hem doğrusal hem de doğrusal olmayan olarak ele alınabilir. Doğrusal bir sistem için sebep ve sonuç arasında doğrudan bir ilişki vardır ve süper pozisyon ilkesi geçerlidir. Mesela uygulanan kuvvet tekrarlanırsa verilen cevap da tekrarlanır. Doğrusal olmayan bir sistemde ise sebep ve sonuç arasındaki ilişki orantılı değildir. Burada sistemin özellikleri bağımlı değişkenlere bağlıdır. Örneğin doğrusal olmayan bir sistemin rijitliği onun yer değiştirmesine bağlıdır.

Burada sadece doğrusal diferansiyel eşitlikler ile tanımlanan doğrusal salınımlı sistemler incelenecektir. Doğrusal sistem analizi, salınımlı sistemlerin davranışını salınım genliklerinin sistemin fiziksel boyutlarına göre çok küçük olması durumunda yeterli olarak açıklar. Her durumda; sistem (eylemsizliğe ve esnekliğe sahip olan) başlangıçta ya da sürekli olarak dış kuvvetlerin etkisi altındaysa uyarılmadan önceki haline dönmeye çalışır. 140 dB'e kadar olan ses seviyeleri doğrusal basınç dalgalanmaları ile üretilir. Çoğu mühendislik ve endüstriyel tip ses kaynaklarının (genellikle 140 dB'den düşük) ve birleşik mekanik titreşimlerin bu sebeple doğrusal davranış gösterdikleri varsayılabilir. Bazı tipik örnekler şunlardır: Endüstriyel

---

\* Ek 1, Norton ve Karczub (2003)'den alınmıştır.

makinelere ses ve titreşim karakteristikleri, borulardaki yüksek hızdaki gaz akışlarından elde edilen ses ve titreşimler ve motorlu taşıtlardaki ses ve titreşimler

Doğrusal sistemlerin titreşimleri serbest ve zorlanmış olarak iki gruba ayrılır. Serbest titreşimler sisteme etkiyen herhangi bir dış yük etkisi olmadığında ortaya çıkar. Yani sisteme etkiyen dış yük ortadan kaldırılırsa sistem iç yüklerin etkisi altında titreşir. Serbest titreşime maruz bir sonlu eleman bir veya birçok özel formda titreşecektir. Örnek olarak seçilmiş bir noktada darbe etkisine maruz gerilmiş bir kabloyu ele alalım. Her özel titreşim formuna mod şekli adı verilir ve bu modlar doğal frekans adı verilen sabit bir frekansla titreşir. Bu doğal frekanslar sonlu sistemin kendi özelliğidir ve kütle ve rijitlikle (eylemsizlik ve esneklik) ilgilidir. Sistemin sonsuz olması halinde herhangi bir frekansta serbestçe titreşmesinin ilginç bir durum olduğu da not edilmelidir (Bu nokta ses dalgalarının yayılımı ile ilgilidir.). Diğer taraftan zorlanmış titreşimler dış yüklerin uyarısı ile gerçekleşir. Bu uyarıcı kuvvetler (i) harmonik, (ii) periyodik, (iii) periyodik olmayan (darbe veya anlık etki) veya (iv) rasgele olmak üzere sınıflara ayrılabilir. Zorlanmış titreşimler uyarım frekansında oluşur ve bu frekanslar gelişigüzedir (keyfi). Bu yüzden sistemin doğal frekansından bağımsızdır. Sistemin bir doğal frekansı, uyarım frekansı ile çakışırsa rezonans durumu ortaya çıkar. Doğal frekans, titreşim modları, zorlanmış titreşimler ve rezonans kavramları hem elastik sürekli ortam hem de makroskopik bakış açısıyla burada incelenecektir.

Ses ve titreşim çalışmalarında sönüm kavramı da oldukça önemlidir. Bir sistem içindeki enerji; sürtünme, ısı kayıpları ve diğer dirençler ile dağıtılır. Kararlı haldeki zorlanmış titreşimler özel titreşim genliklerinde muhafaza edilebilir. Çünkü gereken enerji bazı uyarıcı dış kuvvetler tarafından sağlanır. Rezonans durumunda titreşim genliklerini sınırdan tutan sadece sistemin içindeki sönümdür. Katı ve sıvıların her ikisi de sönüme sahiptir ve pratik bir sistemin bir ses ortamına cevabı hem yapısal sönüme hem de akustik yayılma sönümüne bağlıdır.

Sonlu bir elemanın dinamik davranışının makroskopik (modal) analizi, serbestlik derecesi kavramının anlaşılmasını gerektirir. Bir sistemin serbestlik derecesi onun hareketinin tanımlanması için gereken minimum bağımsız koordinatların sayısı olarak tanımlanır. Uzaydaki bağımsız bir parçanın üç serbestlik derecesi vardır. Bir sonlu rijit yapının ise altı serbestlik derecesi vardır. Bunların üçü yerleşim bileşenleri, diğer üçü de yönelmeyi belirleyen açılarıdır. Sürekli bir elastik yapının sonsuz sayıda serbestlik derecesi vardır (Yapıdaki her bir nokta için üç adet). Bir sistemin doğal frekansları ile serbestlik dereceleri arasında birebir bir ilişki vardır. Yani  $p$  serbestlik dereceli bir sistemin  $p$  sayıda doğal frekansı

ve p sayıda titreşim modu vardır. Mesela levha, kabuk ve akustik hacimlerin duyulabilir frekans aralığında binlerce serbestlik derecesi ve buna bağlı olarak o kadar da doğal frekans ve titreşim modu bulunur. Yapıların mekanik titreşimleriyle ilgilenildiğinde yapıların belirli parçalarının rijit olarak kabul edilmesi yoluna sıklıkla başvurulur. Böylece sistem, sonlu sayıda serbestlik derecesine sahip, dinamik olarak eşdeğer bir yapıya indirgenebilir. Bu yüzden birçok mekanik titreşim problemi bir ya da iki serbestlik dereceli bir sisteme indirgenir.

Titreşen sistemlerin zaman cevabının mühendislik tanımı, doğrusal diferansiyel eşitliklerin çeşitli eşdeğer sistemlerin matematik modellerine dayanarak çözülmesiyle elde edilebilir. Sonlu sayıda serbestlik dereceli bir model kullanıldığında sistemden toplu parametrelili sistem olarak bahsedilir. Burada gerçek sistem; rijit kütle, yay ve sönümleyici serileriyle yaklaşıktırılır. Sonsuz sayıda serbestlik dereceli bir model kullanıldığında sistemden sürekli veya dağılı parametrelili olarak bahsedilir. Yapının hareketini yöneten diferansiyel eşitlik toplu parametrelili sistemde olduğu gibi aynıdır. Ancak kütle, sönüm ve rijitlik dağılımları burada sürekli ve böylece eşitliklerin dalga tipi çözümleri elde edilebilir.

### **Ek 1.2 Dalga Hareketi Kavramının Tanıtımı – Elastik Sürekli Ortam Bakış Açısı**

Dalga hareketi, bir parçanın uyarılması ve ona bitişik parçalara çarpmasıyla momentumu onlara iletmesi olarak tanımlanabilir. Çarpışmadan sonra parçacıklar herhangi bir özel yöne ilerlemeden kendi denge konumları etrafında salınım yapar. Yani ortam içinde net bir parçacık iletimi yoktur. Bu uyarım, ortamın karakteristiğine, uyarımın kinematiğine ve ortam üzerinde herhangi bir dış yükün varlığına bağlı olarak belli bir hızda yayılır. Dalga hareketi moleküler ya da parçacıklı modeller kullanılarak da tanımlanabilir. Moleküler model karmaşık ve ilgilenilmesi zor iken, parçacıklı model ses ve titreşim analizlerinde tercih edilir. Parçacık, milyonlarca molekül içererek sürekli bir ortam kabul edilecek kadar büyük, termodinamik ve akustik değişkenleri sabit olacak kadar küçük bir hacim elemanını temsil eder. Katılar kesme ve sıkışma durumlarında enerji depolayabilirler, bu sebeple boyuna dalgalar, eğilme dalgaları, kesme dalgaları ve burulma dalgaları gibi birçok dalga tipi oluşması mümkündür. Diğer taraftan sıvılar sadece sıkışma durumunda enerji depolayabilirler. Dalga hareketi basit olarak potansiyel ve kinetik enerjiler arasındaki bir dengedir. Buradaki potansiyel enerji çeşitli dalga tipleri için değişik formlarda depolanır. Boyuna dalgalar; boyuna şekil değiştirmede, eğilme dalgaları ise eğilme şekil değiştirmesinde potansiyel enerji depolarlar. Bir taş ocağındaki patlama sesi yüzünden sesin atmosferde yayılması, metal bir levhanın eğilme hareketi, akan bir suyun içine taş atılmasından dolayı

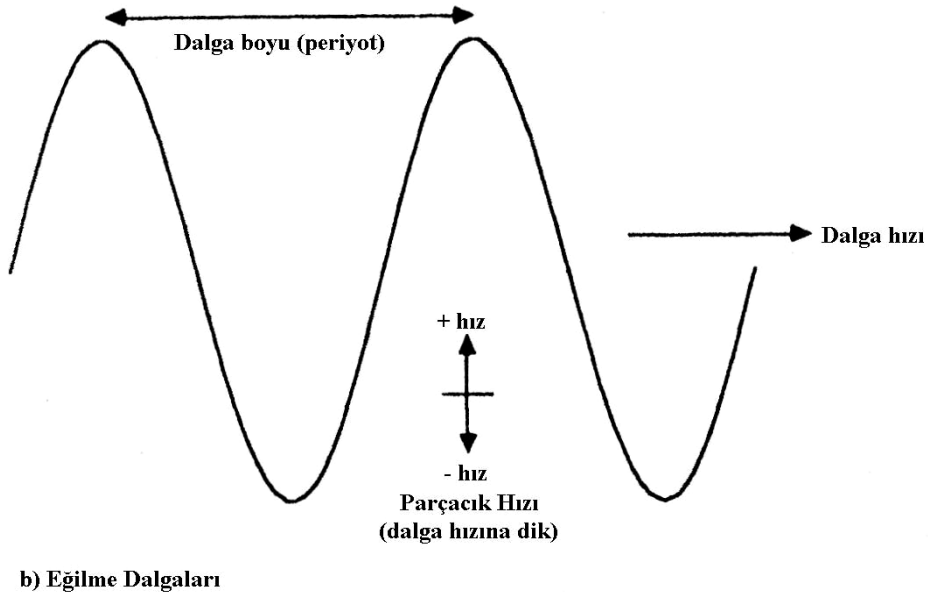
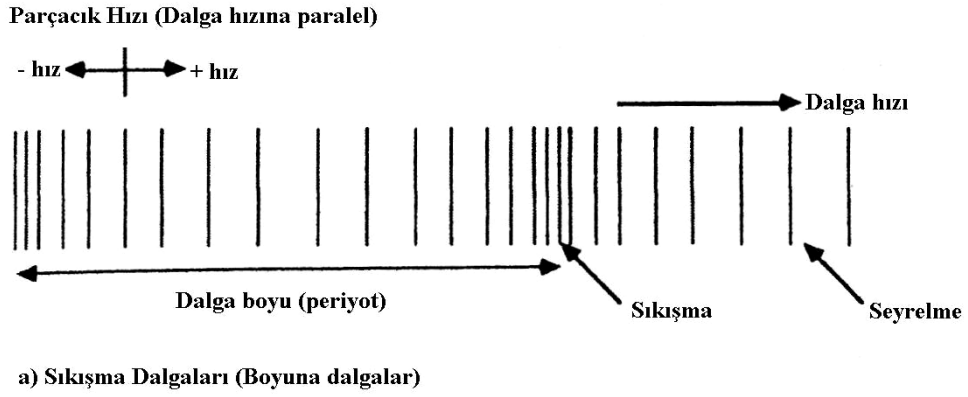
oluşan dalgacıklar dalga hareketine dair bazı temel örneklerdir. Taş ocağındaki patlama sesinin dalgalar halinde ilerlemesi durumunda, oluşan dalgalar hem rüzgâr yönünde hem de rüzgâra ters yönde hareket eder. Aynı şekilde su içindeki dalgacıklar hem akış yönünde hem de akışa ters yönde ilerler. İki örnekte de dalgalar kaynaktan uzağa doğru ve yansıma olmadan yayılırlar. Sonlu metal levha durumu için sınırlardaki dalga yansımalarından dolayı duran dalgalar serisi saptanabilir. Bununla birlikte üç örneğin hepsinde ortamdaki kütle parçacıklarının net bir iletimi yoktur.

Bu noktada, gerçek hayatta karşılaşılan değişken dalga hareketlerini pek çok tekil frekans (harmonik) dalgaları açısından modellemenin matematiksel olarak uygun olacağı vurgulanmalıdır. Bu yüzden buradaki incelemeler bu modellerle alakalı olacaktır. Katı ve sıvılarda karşılaşılan temel dalga tipleri böylece özetlenecektir. İlk olarak; her tip harmonik dalga hareketiyle ilişkili iki tip hız vardır. Bunlar: (i) ortam boyunca yayılan uyarımın hızı (bu hız ortamın özelliğinin, uyarımın kinematiğinin ve ortam üzerindeki herhangi bir dış yükün karakteristiğidir.), (ii) ortam içinde salınım yapan kütle parçacıklarının hızı (bu partiküler hız, salınımı üreten uyarımın genliğinin ölçüsüdür ve titreşimle ve ölçülen ses basıncı düzeyiyle alakalıdır.). Harmonik dalgalarla ilişkili bu iki tip hız gelişigüzel bir serbest yüzeydeki sıkışma (boyuna) ve eğilme dalgaları durumundaki gibi Şekil Ek 1.1 de gösterilmiştir. Boyuna dalgalar için, kütle parçacıklarının ardışık genişleme ve sıkışma alanları mevcuttur ve parçacık ve dalga hızları aynı yöndedir. Havadaki ses dalgalarının ve çubuklardaki boyuna dalgaların yayılımı bu tip dalgalara örnektir. Eğilme (enine) dalgaları için parçacık hızı dalga yayılım yönüne diktir. Yayların, kirişlerin, levhaların ve kabukların eğilme hareketi bu dalga tipine örnektir. Eğilme dalgalarının, ses dalgalarının yayılımına ve yapılarda iletimine katkıda bulunan yegâne yapısal dalga tipi olduğu bilinmektedir. Bunun esas sebebi parçacık hızının ve yapısal yer değiştirmenin Şekil Ek 1.1(b) de gösterildiği gibi dalga yayılım yönüne dik olmasıdır. Bu durum bitişik sıvı parçacıklarının etkin bir uyarımını ortaya çıkarır ve yapı ile sıvı arasında etkin bir enerji alışverişi sonucunu doğurur. Ayrıca eğilme dalga hızının frekansla değiştiği bilinmektedir. Oysa diğer dalga hızı tiplerinde (basınç, burulma vs.) bu durum yoktur.

Herhangi bir dalga hareketi zamanın, uzayın veya her ikisinin de bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Harmonik dalga hareketindeki zaman değişimleri radyan (açısal) frekans ( $\omega$ ) ile ifade edilir. Bu parametre birim zaman artışına göre faz değişimini ifade eder ve

$$\omega = 2\pi/T$$

(Ek 1.1)

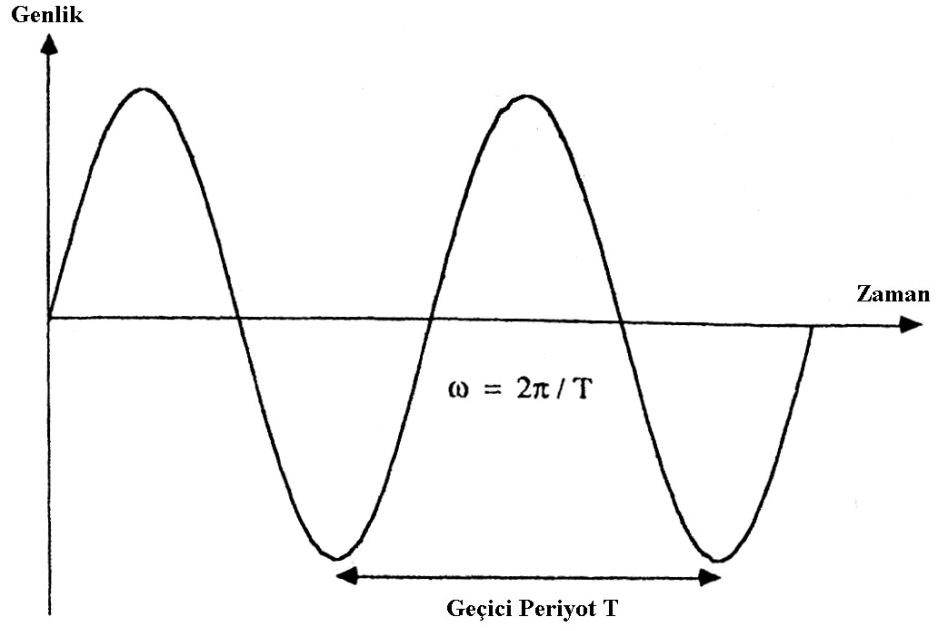


Şekil Ek 1.1 Dalga ve parçacık hızlarının gösterimi

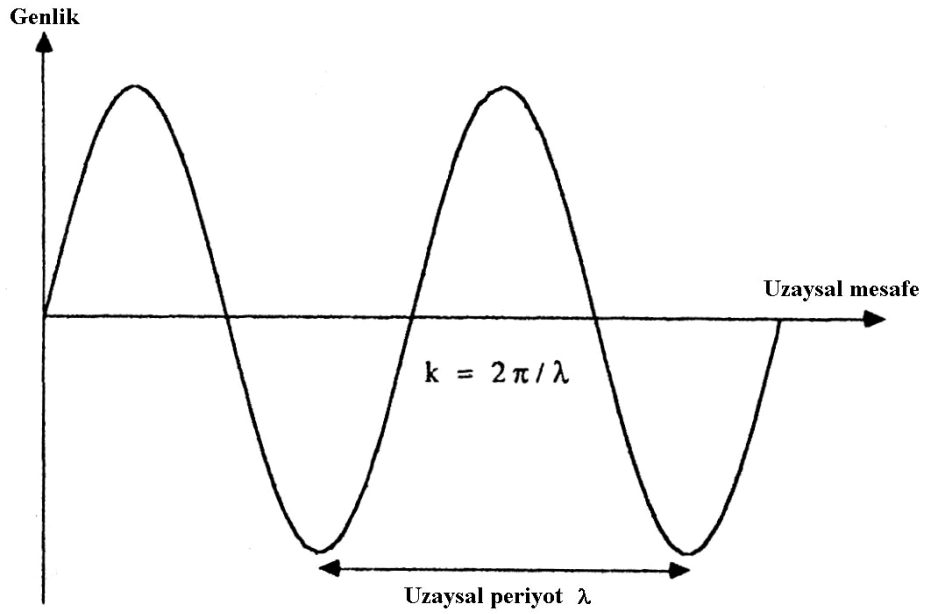
olarak gösterilir. Burada  $T$ , dalga hareketinin geçici (temporal) periyodudur. Aradaki ilişki Şekil Ek 1.2 de gösterilmiştir. Zaman içinde verilen herhangi bir anda bir dalganın fazı, basitçe onun başlangıç konumuyla ilişkili zaman değişimidir. Bu tarz dalga hareketlerindeki uzaysal değişimler birim mesafe artışına göre faz değişimi ile ifade edilir. Bu parametre dalga sayısı olarak adlandırılır ve  $k$  ile gösterilir. Burada

$$k = \omega/c \quad (\text{Ek 1.2})$$

ve  $c$  dalga hızıdır (uyarımın ortam boyunca yayıldığı hız). Bu dalga hızı bazen dalganın faz hızı olarak adlandırılır ve birim zaman artışına göre faz değişiminin birim mesafe artışına göre faz değişimine oranıdır. Harmonik dalga hareketinin uzaysal periyodu onun dalga boyu olarak



Şekil Ek 1.2 Basit bir dalga hareketi için zaman değişimleri



Şekil Ek 1.3 Basit bir dalga hareketi için uzaysal değişimler

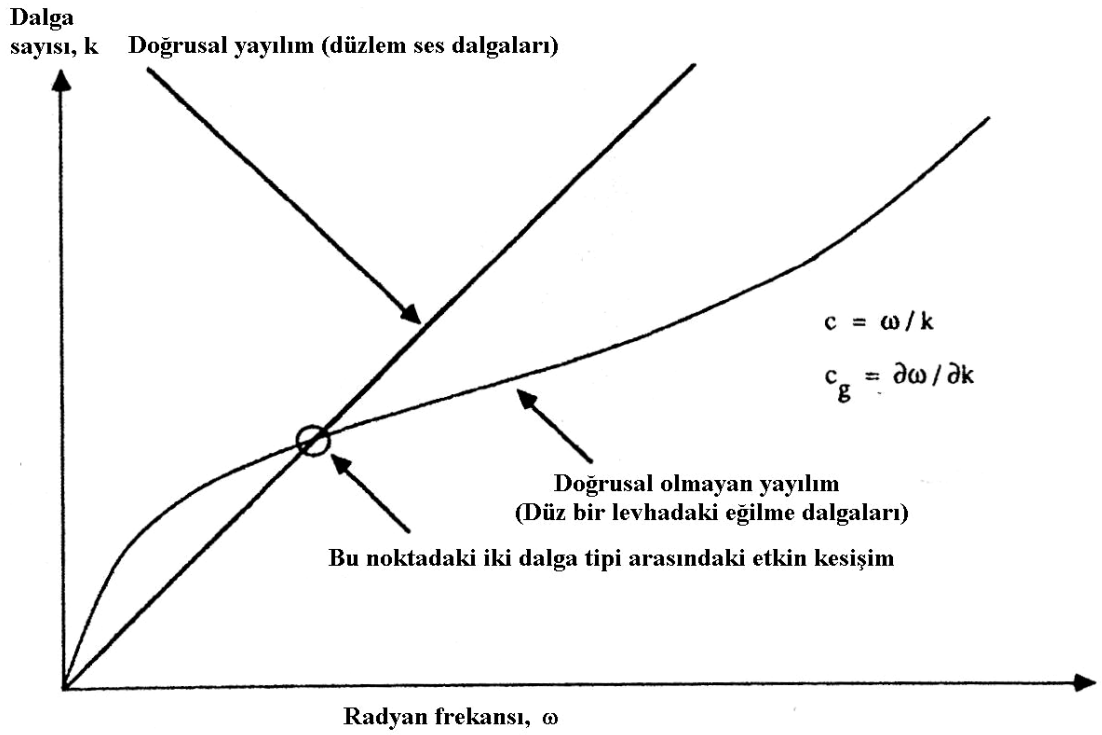
tanımlanır ve  $\lambda$  ile gösterilir. Öyle ki;

$$k = 2\pi / \lambda$$

(Ek 1.3)

olur. Bu ilişki Şekil Ek 1.3 de gösterilmiştir ve açısal frekans  $\omega$  ile dalga sayısı  $k$  arasındaki benzerlik gözlemlenebilir.

Eğer verilen bir ortam için dalga hareketiyle değişen keyfi bir zamanın dalga hızı (birçok harmonik dalganın toplamı),  $c$ , sabit ise  $\omega$  ile  $k$  arasındaki ilişki sabittir ve bu yüzden dağılmamıştır. Yani dalganın uzaysal formu zamanla değişmez. Diğer taraftan dalga hızı,  $c$ , sabit değilse (örneğin frekansla değişim gösteriyorsa) dalganın uzaysal formu zamanla değişir, bu yüzden dağılmıştır. Bu, eğer her bir dalga farklı dalga hızlarında yayılırsa tek frekanslı dalganın dağılmamış, fakat birçok dalganın birleşimi olan bir dalganın dağılmış olduğunu göstermek için göreceli olarak doğru bir çalışmadır. Dağılım ilişkileri farklı dalga tipleri arasındaki etkileşimleri (Yani ses dalgaları ile yapısal dalgalar arasındaki etkileşim) tartışmada çok önemlidir. Bir dalga dağılmamış ise dalga hızı  $c$  sabittir. Bu yüzden  $\partial\omega/\partial k$  (Eşitlik (Ek 1.2) nin eğimi) da sabittir. Bir dalga dağılmış ise hem dalga hızı  $c$  hem de ilgili dağılım ilişkisinin eğimi değişken olur. Bu durum Şekil Ek 1.4 de gösterilmiştir. Dağılım ilişkisinin eğimi grup hızı olarak adlandırılır



Şekil Ek 1.4 Doğrusal ve doğrusal olmayan yayılım ilişkileri

$$c_g = \partial\omega/\partial k$$

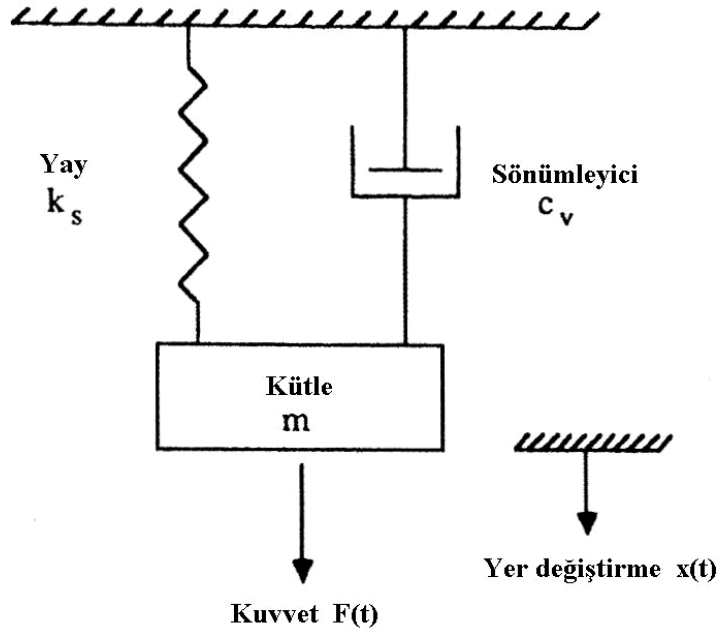
(Ek 1.4)

ve dağılmış dalga tarafından iletilen enerjideki hızı temsil eder. Bu hız hareket eden taşıyıcı bir dalga paketine (birçok harmonik dalganın toplamı olan zaman değişken dalga hareketi) etkiyen genlik fonksiyonundaki hızdır ve büyük fiziksel öneme sahiptir. Katılardaki düzlem

ses dalgaları ve sıkışma (boyuna) dalgaları dağılmamış dalgaların, eğilme (enine) dalgaları ise dağılmış dalgaların tipik örnekleridir. Eğer iki farklı tip dalga hareketinin dağılım ilişkisi keşişirse, aynı frekans, dalga sayısı, dalga boyu ve dalga hızına sahip olurlar. Bu durum çakışma olarak adlandırılır ve iki dalga tipi arasındaki etkin etkileşimi hesaba katar.

### Ek 1.3 Çoklu, Ayrık, Kütle–Yay–Sönümleyici Osilatör Kavramlarının Tanıtımı – Makroskopik Bakış Açısı

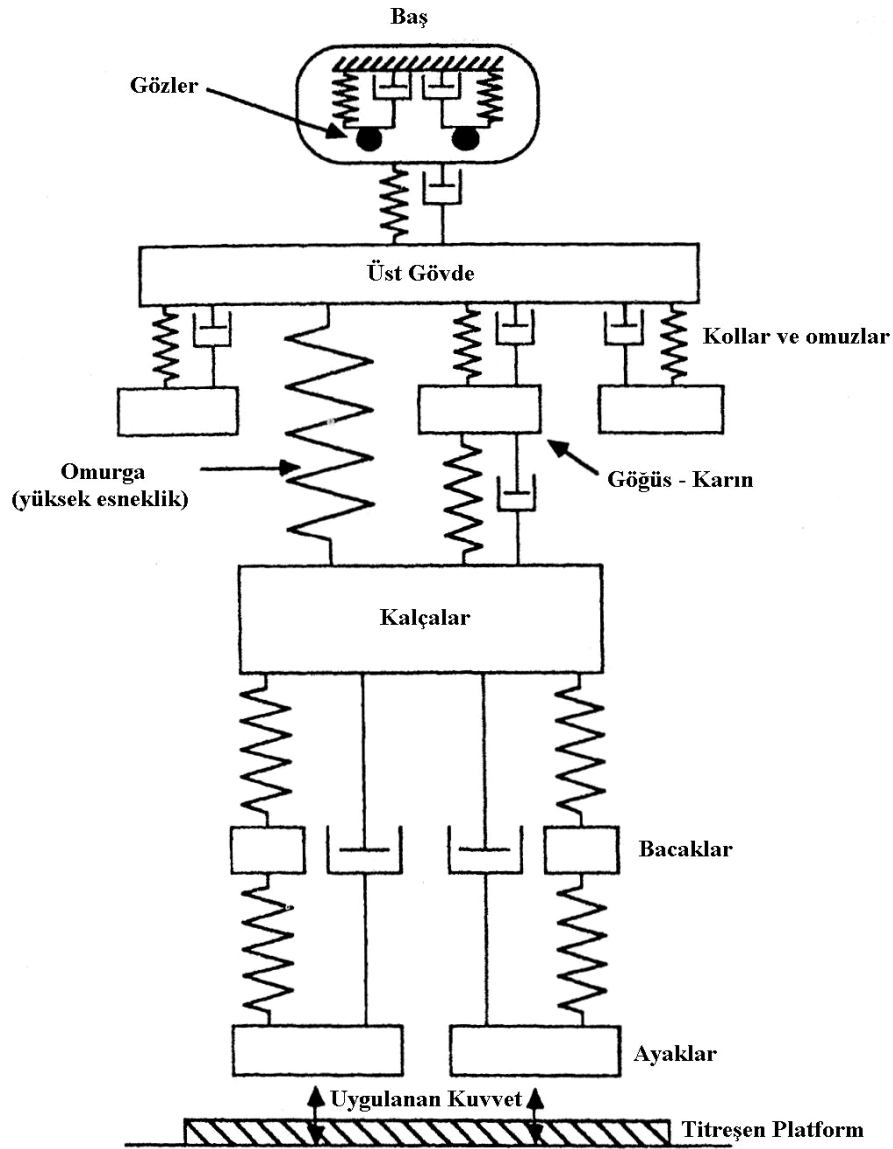
Makine elemanlarının ve yapıların mekanik titreşimleri dikkate alındığında sistemin titreşiminin normal modlarını incelemek için, genellikle ya toplu parametre ya da sürekli parametre yaklaşımlarından biri kullanılır. Mühendisler çoğunlukla yapıların büyük bir kısmında ilk birkaç doğal frekansın hesabıyla ilgilenir ve çoklu, ayrık, kütle-yay-sönümleyici osilatörle makroskopik yaklaşım bu yüzden dalga yaklaşımının tersine daha uygundur. Bir yapının titreşim karakteristiklerini makroskopik yaklaşımla modellerken modeli oluşturan elemanlar bir kütle, yay, sönümleyici ve bir uyarıcı içerir. Tek serbestlik dereceli, toplu parametrelili basit bir osilatör modeli Şekil Ek 1.5 de gösterilmiştir.



Şekil Ek 1.5 Tek Serbestlik Dereceli, Toplu Parametrelili Osilatör

Uyarım kuvveti, neticede kütle ve yayda depolanan, sönümleyicide ise dağıtılan enerjiyi sisteme verir. Kütle,  $m$ , kinetik enerjiyi kazanan ya da kaybeden rijit bir yapı olarak modellenmiştir.  $k_s$  rijitlikli yayın ihmal edilebilir bir kütlesi olduğu varsayılır ve bu yay elastiktir. Yayın uçları arasında göreceli bir yer değiştirme varsa yay kuvveti ortaya çıkar. Sıkışma veya uzama durumunda yapılan iş potansiyel enerjiye çevrilir: Yani yayda depolanan

şekil değiştirme enerjisine dönüştürülür. Yay rijitliğinin ( $k_s$ ) birimi, birim uzamaya karşı gelen kuvvettir. Sönümleyici ( $c_v$ , viskoz sönüm katsayılı) ne kütleye ne de rijitliğe sahiptir. Sönümleyicinin uçları arasında göreceli bir hareket olursa sönüm kuvveti üretilir. Sönümleyici enerjiyi dağıttığından korunumlu değildir. Birçok sönümleyici tipi vardır. Ancak viskoz sönümleyici (yani sönüm kuvveti hızla orantılıdır) en çok kullanılan modeldir. Viskoz sönüm katsayısının ( $c_v$ ) birimi, birim hıza karşı gelen kuvvettir. Diğer sönüm modelleri ise coulomb (kuru-sürtünme) sönümü, histerik sönüm ve hız-kare sönümdür. Örneğin, cisimler üzerindeki dinamik sıvı sürtünmesi hız kare sönümüne yaklaşır (Üssün kesin değeri diğer birkaç değişkene bağlıdır.).



Şekil Ek 1.6 Titreşen Bir Platform Üzerinde Bulunan Bir İnsan Vücudunun Çoklu, Ayrık Kütle-Yay-Sönümleyici Modeli

Tek serbestlik dereceli bir sistemi oluşturan idealize edilmiş elemanlar titreşen bir sistemin temel makroskopik modelini oluşturur. Genel olarak modeller biraz da karmaşıktır ve çoklu, ayrık, kütle-yay-sönümleyici osilatörler içerirler. Ayrıca çeşitli yay bileşenlerinin kütleleri çoğunlukla hesaba katılmak durumundadır (mesela bir sarmal yay hem kütleyle hem de rijitliğe sahiptir.). Çok sayıda sürekli sistemin düşük frekanslı titreşim karakteristiklerine sonlu sayıda toplu parametre ile yaklaşım sağlanabilir. İnsan vücuduna, düşük frekanslı (<200Hz) sarsıntılar ve titreşim etkileri analizleri için, doğrusal, toplu parametrelili bir sistem olarak yaklaşım sağlanabilir. İnsan vücudunun titreşen bir platform üzerindeki basitleştirilmiş çoklu, ayrık, kütle-yay-sönümleyici modeli Şekil Ek 1.6 da gösterilmiştir. İnsan vücudunun çeşitli parçalarının doğal frekansları bu tarz bir model ile tahmin edilebilir. Böylece bir dış kuvvetin ya da titreşimin etkileri analiz edilebilir.

Çoklu, ayrık, kütle-yay-sönümleyici modelleri kavramı, daha yüksek frekanslarda yapıyı sürekli veya dağınık elemanlar cinsinden yeniden modelleyerek sürekli sistemlerin (yani sonsuz sayıda serbestlik derecesi, doğal frekans ve titreşim modları) titreşimlerini analiz etmek için genişletilebilir. Matematiksel olarak problem öncelikle dalga eşitliği açısından oluşturulur ve sonradan modal kütle, rijitlik ve sönüm açısından bir özdeğer problemine genelleştirilir. Böylece toplam cevap, ilgili frekans aralığındaki modal cevapların toplamı olur.

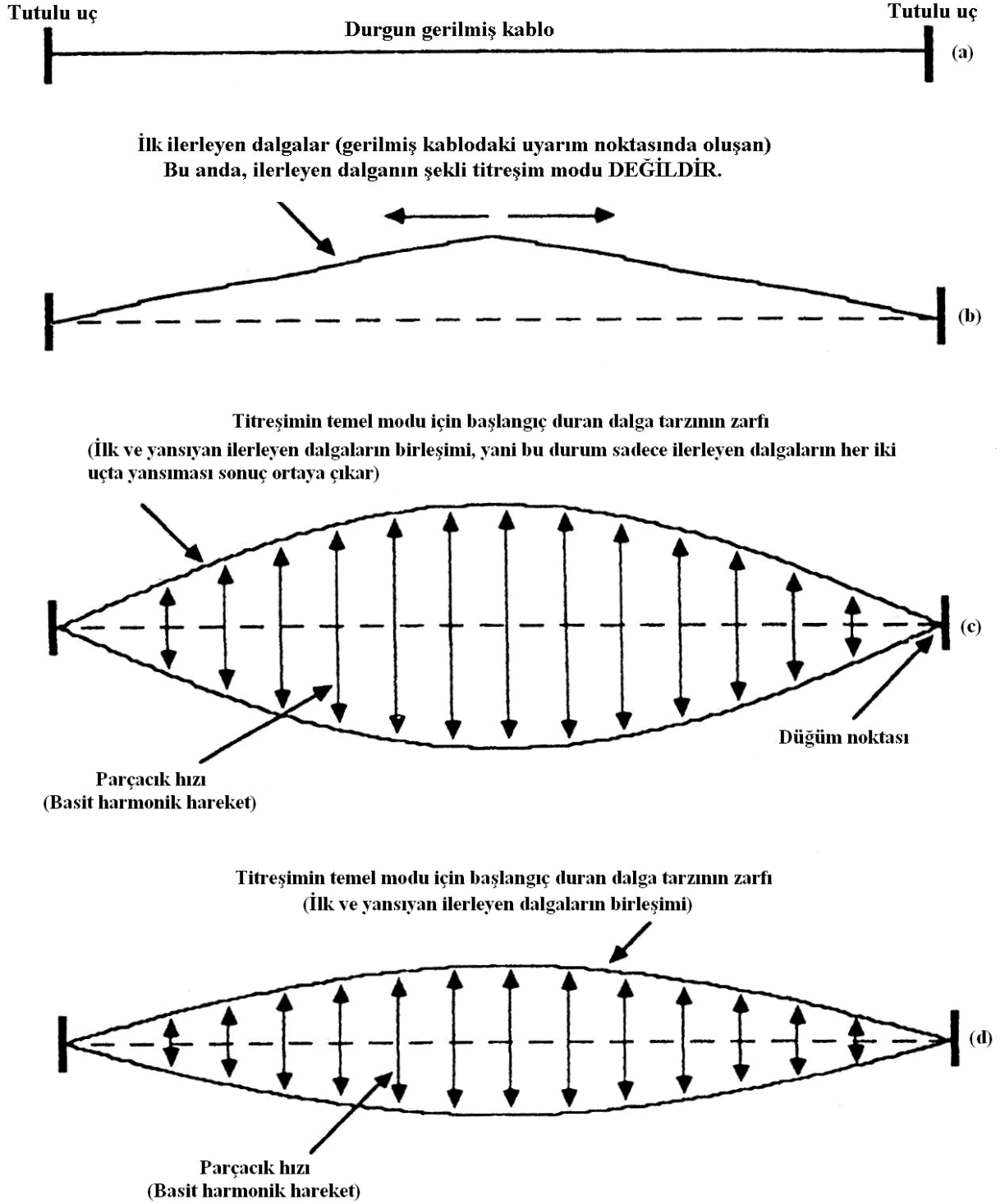
Çoğu literatürde  $c$  sembolü hem dalga (faz) hızı hem de viskoz sönüm katsayısı ve  $k$  sembolü hem dalga sayısı hem de yay rijitliği olarak kabul görmüştür. Bu çelişkiyi önlemek için  $c$  sembolü dalga (faz) hızını,  $c_v$  sembolü viskoz sönüm katsayısını,  $k$  sembolü dalga sayısını ve  $k_s$  sembolü yay rijitliğini gösterecektir.

#### **Ek 1.4 Doğal Frekanslar, Titreşim Modları, Zorlanmış Titreşimler ve Rezonans Kavramlarının Tanıtımı**

Doğal frekanslar, titreşim modları, zorlanmış titreşimler ve rezonans kavramları hem elastik sürekli ortam hem de makroskopik bakış açısı ile tanımlanabilir. Doğal frekansların ve titreşim modlarının varlığı tüm fiziksel sistemlerin uzayla sınırlandırılmasıyla ilgilidir. İyice gerilmiş, sabitlenmiş bir kablodaki titreşim modu ve onunla ilişkili doğal frekans, iki sınır noktası arasında eşit genlik ve dalga boylu ters yönde hareket eden iki dalganın birleşimi olarak yorumlanabilir. Alternatif olarak bir duran dalga olarak da açıklanabilir (Yani sabit dalga yapısıyla sınırlandırılmış değişken genlikle salınım yapan bir yay). Titreşim modunun ilk açıklaması dalga modeliyle ikincisi ise makroskopik modelle ilişkilidir. Her ikisi de fiziksel hareketi tanımlar ve matematiksel olarak eşdeğerdirler. Bu durum bir sonraki başlıkta

gösterilecektir.

Yukarıda tartışılan kavramlar basit bir örnekle açıklanabilir. Şekil Ek 1.7 (a) da gösterildiği gibi uzatılmış ve iki ucundan tutturulmuş bir kablo dikkate alınsın. Kablo gelişigüzel bir



Şekil Ek 1.7 Gerilmiş Bir Yay İçin İlerleyen ve Duran Dalgaların Şematik Gösterimi

noktadan çekilir ve serbestçe titreşmesi için bırakılır. Kablonun çekildiği anda iki yöne doğru hareket edecek bir dalga oluşturulur. Bu anda, hareket eden dalganın şeklinin titreşim modu olmadığı bilinmelidir (Şekil Ek 1.7(b)). Çünkü henüz duran bir dalga yapısı oluşmamıştır. Dalgalar kablo boyunca tutulu uçlara gelene kadar ilerler ve bu noktalarda yansıma yaparlar.

Başlangıçtaki bu yansımalarından sonra (her bir tutulu uçtan bir adet) daha ileri bir kısa zaman aralığı vardır ki bu zaman aralığında gerilmiş kablo boyunca olan toplam hareket, istenmeyen dalgaların ve henüz başlangıç noktasına ulaşmamış olan yansıyan dalgaların birleşik etkisidir. Bu zaman boyunca değişmeyen dalga formu hala oluşmamıştır. Yansıyan dalgalar karşılaştığında ters istikamette ilerleyen eşit genlikli dalga kombinasyonlarının olduğu bir olay ortaya çıkar. Bu durum değişmeyen uzay bağımlı genlikli bir titreşimi oluşturur. Duran dalga formu (titreşim modu) böylece elde edilir ve dalga yayılımı işlemi kendi kendini tekrar etmeye devam eder. Kablonun nasıl uyarıldığına bağlı olarak farklı titreşim modları da uyarılacaktır. Temel mod, en kolay gözlenebilen moddur. Oluşan duran dalganın frekansı kablunun doğal frekansıdır ve Şekil Ek 1.7 (c) de gösterildiği gibi titreşim modudur. Basit harmonik harekette sabit olan düğüm noktaları hariç yay üzerindeki her nokta enine titreşim yapar. Değişmeyen dalga için sıfır ve maksimum genlik noktaları uzayda sabittirler ve kablo boyunca çeşitli noktalardaki yer değiştirmelerin göreceli fazı 0 ve  $\pi$  değerlerini alır. Yani ilk ile yansıyan dalgalar arasında faz sürekliliği vardır. Çünkü kablo serbest olarak titreşebilmektedir ve sönüme sahiptir (Tüm gerçek fiziksel sistemler az veya çok sönüme sahiptirler), bu yüzden titreşim genliği de zamanla azalacaktır. Daha sonra duran dalga tarzı (veya mod şekli) da zamanla sönecektir. Bu durum Şekil Ek 1.7 (d) de gösterilmiştir. Eğer kablo harmonik bir dış kuvvet ile sürekli olarak bu frekansta uyarılırsa bu mod şeklinde tınlama (rezonans) ortaya çıkar ve genliği sadece kablodaki sönüm kısıtlar. Rezonans, bir dış kuvvetin frekansı ile doğal frekansın çakışması durumunda oluşur.

Makroskopik bakış açısında Şekil Ek 1.7 (b) de gösterilen ilerleyen dalga kavramları dikkate alınmazken, Şekil Ek 1.7 (c) ve (d) de gösterilen duran dalga kavramları dikkate alınmıştır. Yani makroskopik bakış açısı salınım yapan sistemdeki fiziksel kısıtlılıklardan dolayı üretilen çeşitli duran dalga tarzları (şekilleri) ile direk olarak ilişkilidir. Sonradan, toplu parametrelili modeller, çeşitli doğal frekansları, zorlanmış titreşimleri ve rezonansları sonradan incelemek için kullanılabilir ve titreşimler normal modlar açısından analiz edilebilir. Alternatif olarak titreşimler, dalga hareketi bakış açısıyla da incelenebilir. Bakış açısı dikkate alınırken gerçek bir sistem üzerindeki fiziksel kısıtlılıkların dört tip dalga hareketi ürettiği hatırlanmalıdır. Bunlar; kırınım (diffraction), yansıma (reflection), kırılma (refraction) ve saçılmadır

(scattering). Yansıma, doğal frekansların üretimi sonucu oluşan bir dalga olgusudur ve bu sebeple büyük pratik öneme sahiptir. Yansıma olgusundan dolayı sonlu yapılar sadece belirli doğal frekanslarda serbestçe titreşebilir. Diğer taraftan sonsuz yapılar herhangi bir frekansta serbestçe titreşebilir. Bu nokta ses alanlarının (sonsuz sıvı ortamlardaki dalgalar) ve sınırlandırılmış yapıların etkileşimini dikkate alırken önem taşır.

### **Ek 1.5 Sürekli Sistemler–Yay, Çubuk ve Plaklardaki Dalga Tiplerinin İncelenmesi**

Bilinmektedir ki mühendisler titreşimleri modlar açısından, sesi ise dalgalar açısından inceleme eğilimindedirler. Ancak bu ikisinin basit olarak aynı fiziksel olguya bakan iki farklı bakış açısı olduğu sıklıkla unutulmaktadır. Ses ve titreşim arasındaki etkileşimi dikkate alırken iki fiziksel model için de yeterli çalışma bilgisine sahip olmak mühendisler için önemlidir.

Herhangi bir sürekli sistem, örneğin bir uçak yapısı, bir boru hattı veya bir geminin omurgası sürekli dağılı olan kendi kütesine ve elastik kuvvetlere sahiptir (önceki bölümde tartışılan rijit kütleler ve kütesiz yayların aksine). Yapı genellikle etkileşimli kablolar, çubuklar, kirişler, plaklar, kabuklar vs. gibi ne rijit ne de kütesiz olan parçalardan oluşur. Bu sistemler sonsuz büyük sayıda parçalardan oluşur ve bu nedenle hareketlerini tanımlayacak sonsuz büyük sayıda koordinata gerek duyulur. Yani sonsuz sayıda doğal frekans ve sonsuz sayıda titreşim modu bulunur. Böylece sürekli bir sistem, sürekli kütle, sürekli rijitlik ve sürekli sönüm ile modellenmelidir ki sistem içerisindeki her bir noktanın hareketi zamanın bir fonksiyonu olarak belirlenebilsin. Sonuçta ortaya çıkan ve parçacık hareketini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler dalga denklemleri olarak adlandırılır ve bunlar katı veya sıvılardaki dalga yayılımı da tanımlar.

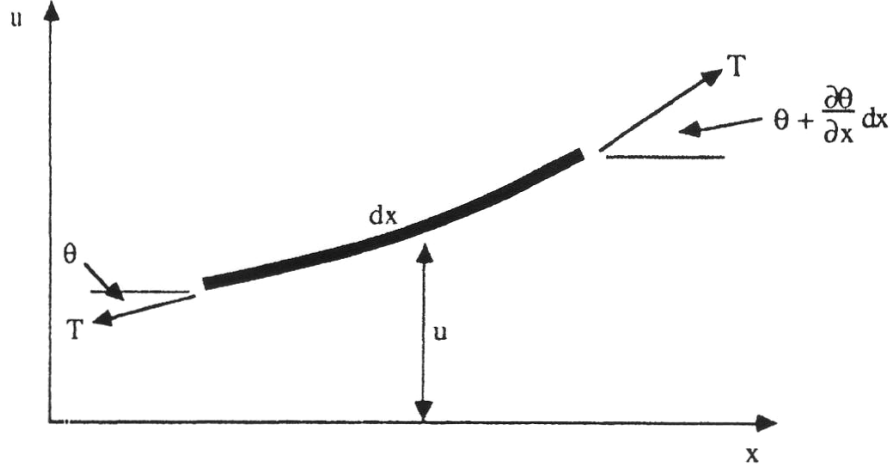
Katı ve sıvılardaki dalga yayılımının temellerinin anlaşılması mühendislik seslerinde ve titreşimlerinde çok önemlidir. Bu yüzden çok basit (fakat mühendislik bakış açısından pek pratik olmayan) bir örnek olan kablo ile başlamak öğretici olacaktır. Kablolardaki dalga yayılımının fiziği dalga yayılımı olgusunun temelini anlamayı sağlar.

- **Titreşen Kablo**

Şekil Ek 1.8 de gösterildiği gibi esnek, gergin, birim uzunluğun kütesi  $\rho_L$  olan ve  $T$  çekme kuvvetine maruz bir kablo ele alınsın. Kablonun titreşim hareketini tanımlamaya başlamadan önce bir çok basitleştirici varsayım yapılmıştır. Bunlar şu şekildedir:

- 1) Malzeme homojen ve izotropdur,
- 2) Hooke kanununa uyulmuştur,

- 3) Enerji sönümü başlangıçta yok sayılmıştır,
- 4) Titreşim genlikleri küçüktür. Hareket doğrusaldır,
- 5) Kabloda kesme kuvveti yoktur ve kabloya etkiyen eğilme momenti yoktur,
- 6) Uçlarda uygulanan çekme kuvvetleri sabittir ve kablo boyunca eşit dağılıdır.



Şekil Ek 1.8 Esnek, gergin bir kablo parçasının boyuna titreşimleri

Yanal yer değiştirmelerin ( $u$ ) küçük olduğu varsayılmış ve gerilmenin yer değiştirmeler ile değişimi ihmal edilmiştir. Yanal yöndeki hareketin eşitliği  $dx$  kadar bir kablo elemanı göz önüne alınarak ve küçük yer değiştirmelerin ve eğimlerin olduğu varsayılarak Newton'un ikinci kanunundan elde edilir. Böylece

$$T\left(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x} dx\right) - T\theta = \rho_L dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{Ek 1.5})$$

olur. Burada  $\theta = \partial u / \partial x$  kablunun eğimi,  $\theta + (\partial\theta / \partial x) dx$   $\theta$  açısının  $x + dx$  konumundaki Taylor serisi açılımıdır. Bu nedenle  $\partial\theta / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2$  olur ve buradan

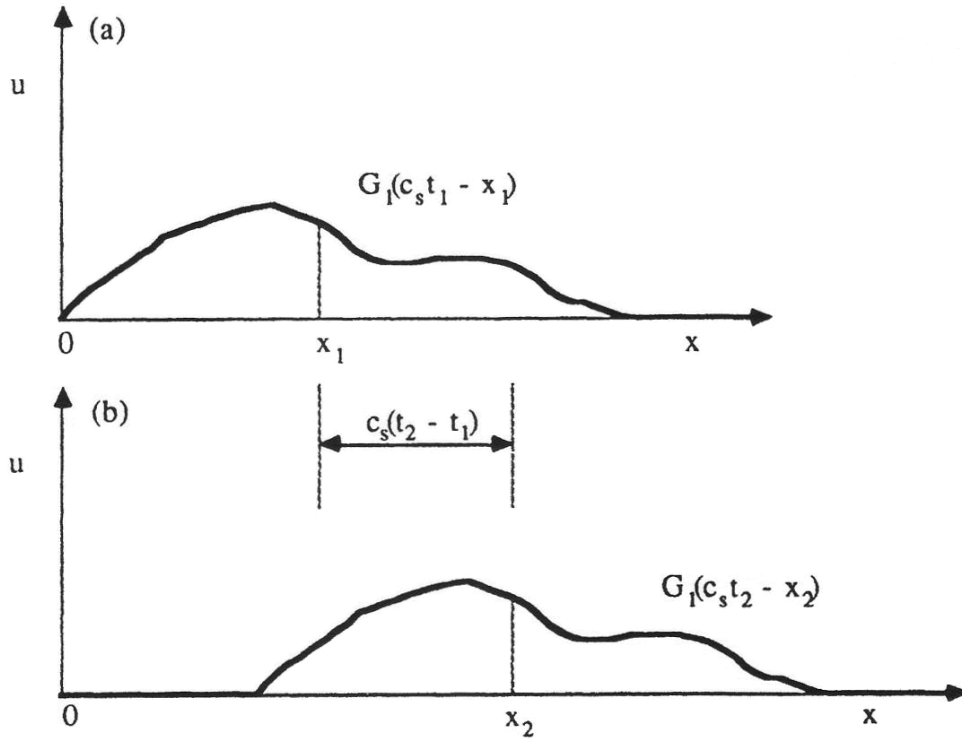
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ elde edilir. Burada } c_s = \left(\frac{T}{\rho_L}\right)^{1/2} \text{ dir.} \quad (\text{Ek 1.6})$$

Eşitlik (Ek 1.6) bir boyutlu dalga eşitliğidir.  $c_s$  sabitinin birimi  $\text{ms}^{-1}$  dir ve kablunun hareketi sırasında küçük yanal parçacık yer değiştirmelerinin ilerleme hızını temsil eder. Bu kablo boyunca yayılan dalga hızıdır ve parçacık yer değiştirmesine ve hızına diktir (Bkz. Şekil Ek 1.1b). Ayrıca dalganın faz hızı olarak da adlandırılır. Dalga denklemi ikinci dereceden kısmi diferansiyel bir denklemdir. Bu denklemin genel çözümü argümanları sırasıyla  $(c_s t - x)$  ve

$(c_s t + x)$  olan  $G_1$  ve  $G_2$  gibi iki keyfi bağımsız fonksiyon içerir.  $G_1$  fonksiyonu pozitif  $x$  yönünde ilerleyen sabit şekilli bir dalgayı,  $G_2$  fonksiyonu ise negatif  $x$  yönünde ilerleyen sabit şekilli bir dalgayı temsil eder. Bu iki dalga da aynı  $c_s$  hızı ile ilerler. Böylece dalga denkleminin genel çözümü

$$u(x, t) = G_1(c_s t - x) + G_2(c_s t + x) \quad (\text{Ek 1.7})$$

olur.  $G_1$  ve  $G_2$  gibi herhangi keyfi fonsiyonlar için (örneğin sinüs veya kosinüs fonksiyonları, eksponansiyel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar veya doğrusal fonksiyonlar) (Ek 1.7) eşitliğinin dalga denkleminde yerine konması bunun gerçekten bir genel çözüm olduğunu gösterir.



Şekil Ek 1.9. Dalga denkleminin çözümünün karakterinin gösterimi

Herhangi bir  $t_1$  anında pozitif  $x$  yönünde ilerleyen  $G_1(c_s t - x)$  dalgasını göz önüne alalım. Dalganın şekli Şekil Ek 1.9(a) da gösterilmiştir.  $t_2$  anında dalga şeklini korurken  $c_s(t_2 - t_1)$  kadar sağa doğru ilerlemiştir. Yani  $G_1(c_s t_1 - x_1)$  ve  $G_2(c_s t_2 + x_2)$  nin her ikisi de dalga denklemini sağlar. Bu durum Şekil Ek 1.9(b) de gösterilmiştir. Daha önce sönüm olayının ihmal edildiği hatırlanmalıdır. Yukarıdaki dalga yayılımı tanımını ise bir idealleştirmedir.

Pratikte dalgalar kablo boyunca ilerlerken küçük bir miktar bozulma ortaya çıkar. Tekil osilator durumu için, bu varsayım mühendislik yapılarında oldukça kabul edilebilir olur. Çünkü bu yapılar genellikle hafif sönümlüdür.

Bu ana kadar kablonun sınırları hakkında bir açıklama yapılmamıştır. Gerçekte tüm yapıların sınırları ve buna uygun sınır koşulları vardır. Yani yapılar sonludur. Sonlu kabloları incelemeden önce,  $x = 0$  noktasından başlayıp pozitif  $x$  yönünde sonsuza giden bir kabloyu dikkate almak yararlı olacaktır. Bu örnek, kendi içinde çok uygulanabilir olmamakla beraber, sonlu elemanlardaki dalga yayılımına ve bir kaynaktan çıkan ses dalgalarının yayılımına kullanışlı ve basit bir giriş olacaktır. Açık uzaylarda, ses dalgaları çok büyük mesafelerde gerçekten yayılım gösterir. Bu yüzden sonsuza doğru ilerleyen dalgalar olarak modellenebilirler.

Şimdi  $x = 0$  noktasından başlayıp pozitif  $x$  yönünde sonsuza giden yarı-sonsuz bir kabloyu göz önüne alalım. Kabloya  $x = 0$  noktasında yanal yönde bir  $Fe^{i\omega t}$  harmonik kuvveti uygulansın. Kablo pozitif  $x$  yönünde sonsuza uzadığından ve  $x = 0$  noktasında başladığından genel çözümde sadece tek bir dalga olur (Eşitlik Ek 1.7). Bu nedenle  $u(x, t) = G_1(c_s t - x)$  olur. Burada  $u$  ve  $G$  karmaşık büyüklükler olarak temsil edilir. Uygulanan kuvvet harmonik olduğundan,  $x = 0$  konumundaki parçacık yer değiştirmesi de harmonik olacaktır. Bu yüzden,  $u(0, t) = Ae^{i\omega t}$  olur. Burada  $A$  uygulanan kuvvetle ilişkili karmaşık sabittir. Böylece  $G_1(c_s t) = Ae^{i\omega t}$  elde edilir. Dalga sayıları (wavenumbers) kavramı elastik sürekli ortam bakış açısı konusunda açıklanmıştı (Eşitlik (Ek 1.2)). Buradan,  $k$  dalga sayısı olmak üzere  $\omega, kc_s$  ile yer değiştirebilir. Böylece

$$G_1(c_s t) = Ae^{ikc_s t}, \quad (\text{Ek 1.8a})$$

ve

$$u(x, t) = G_1(c_s t - x) = Ae^{ik(c_s t - x)} = Ae^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{Ek 1.8b})$$

elde edilir.

Parçacık yer değiştirmesinin karmaşık gösterimi olan  $u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$ , yayılan bir dalganın çok önemli bir temsilidir ve hem katılardaki hem de sıvılardaki dalga yayılımını göstermede genişçe kullanılır.

Karmaşık sabit  $A$ ,  $x = 0$  konumunda (yani kuvvetin etkiye noktasında) bir kuvvet dengesi olduğu göz önüne alınarak hesaplanabilir.  $x = 0$  konumunda, düşey yöndeki kuvvetlerin toplamı bize  $F e^{i\omega t} = F e^{i0} e^{i\omega t} = -T \sin \theta \approx -T \theta \approx -T \partial u / \partial x$  eşitliğini verir. Buradan,  $A = F / (iTk)$  olur ve bu yüzden,

$$u(x, t) = \frac{F}{iTk} e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{Ek 1.9a})$$

ve

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{F}{\rho_L c_s} e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{Ek 1.9b})$$

olur.  $v(x, t)$  parçacık hızıdır ve katı ve sıvılardaki dalga yayılımı analizlerinde diğer bir önemli parametredir. Dalga özdirenci tanımının kuvvet/hız olduğunun hatırlanmasıyla, yayın tahrik noktası mekanik özdirenci  $x = 0$  konumunda izleyen şekilde hesaplanabilir:

$$Z_m = \frac{F e^{i\omega t}}{\frac{F}{\rho_L c_s} e^{i\omega t}} = \rho_L c_s \quad (\text{Ek 1.10})$$

Bu tahrik noktası mekanik özdirenci direnç gösterir (yani gerçektir) ve tahrik kuvvetinden bağımsızdır. Yani enerji tahrik noktasından uzağa doğru sürekli olarak yayılır. Bu özdirenç, sadece kablunun fiziksel özelliklerinin bir fonksiyonu olduğundan, kablunun karakteristik mekanik özdirenci olarak isimlendirilir. Kabloya ortalama güç girişi eşitlik (Ek 1.11) den elde edilebilir. Yani

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} |V|^2 \text{Re}[Z_m] \quad (\text{Ek1.11})$$

Böylece,

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \frac{F^2}{\rho_L c_s} = \frac{1}{2} Z_m V^2 = \frac{1}{2} Z_c V^2 \quad (\text{Ek 1.12})$$

olur. Burada  $V = |v(0, t)| = F / (\rho_L c_s)$  dir. Kablunun sönüme sahip olmadığını varsayıldığı hatırlanmalıdır, böylece enerji tahrik noktasından uzağa doğru (+ sonsuza doğru) yayılır.

Şimdi  $x = 0$  konumunda kuvvet etkileyen aynı kablunun sonlu ve  $x = L$  konumunda tutulu olduğunu göz önüne alalım. Pozitif  $x$  yönünde ilerleyen dalga şimdi sınırdan yansır ve

yansıma işlemi her iki uçta kendini tekrar eder. Zamanın herhangi bir anında, kablonun tam hareketi pozitif ve negatif yönde ilerleyen dalgaların doğrusal süperpozisyonu olarak tanımlanır. Yani keyfi fonksiyon ile beraber (Ek 1.7) eşitliği harmonik bir fonksiyon ile değiştirilmiştir. Genel olarak, ses ve titreşimlerde dalgaları harmonik bileşenlerin toplamı olarak tanımlamak uygundur. Bu prosedür makroskopik toplu parametrelili modeller için benimsenen prosedüre benzerdir. Bu yüzden,  $x=0$  konumunda harmonik olarak uyarılmış (yanal yönde), sonlu, tutulu kablo için  $u(x,t)$  cevabı

$$u(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)} \quad (\text{Ek1.13})$$

Karmaşık sabitler iki sınır koşulundan elde edilir. Bunlar:

- 1) Zorlanan uçta,  $F e^{i\omega t} = F e^{i0} e^{i\omega t} = -T \sin \theta \approx -T\theta \approx -T \partial u(0,t) / \partial x$ .
- 2) Tutulu uçta, yer değiştirme,  $u(L,t) = 0$ .

Birinci sınır koşulundan,

$$F = ikTA_1 - ikTA_2 \quad (\text{Ek 1.14})$$

olduğunu göstermek oldukça açık bir alıştırmadır.

İkinci sınır koşulundan,

$$A_1 e^{-ikL} + A_2 e^{ikL} = 0 \quad (\text{Ek 1.15})$$

Bu iki eşitlik  $A_1$  ve  $A_2$  değerlerini elde etmek için eş zamanlı olarak çözülebilir.

$2 \cos kL = e^{ikL} + e^{-ikL}$  olduğu not edilerek,

$$A_1 = \frac{F e^{ikL}}{i2kT \cos kL} \quad (\text{Ek 1.16a})$$

ve

$$A_2 = \frac{-F e^{-ikL}}{i2kT \cos kL} \quad (\text{Ek 1.16b})$$

elde edilir.  $u(x,t)$  yer değiştirmesi de böylece

$$u(x,t) = \frac{F}{i2kT \cos kL} \left\{ e^{i(\omega t + k\{L-x\})} - e^{i(\omega t - k\{L-x\})} \right\} \quad (\text{Ek 1.17})$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (Ek 1.17), kablunun yer değiştirmesini eşit genlikli fakat ters yönlerde yayılan iki ilerleyen dalganın toplamı cinsinden tanımlar. Bu ifade izleyen şekilde yeniden düzenlenirse:

$$u(x, t) = \frac{F e^{i\omega t}}{i2kT \cos kL} \left\{ e^{ik(L-x)} - e^{-ik(L-x)} \right\} \quad (\text{Ek 1.18})$$

$$\sin k(L-x) = \frac{\left\{ e^{ik(L-x)} - e^{-ik(L-x)} \right\}}{2i} \quad (\text{Ek 1.19})$$

olduğundan dolayı

$$u(x, t) = \frac{F \sin k(L-x) e^{i\omega t}}{kT \cos kL} = \frac{F \sin k(L-x) e^{i\omega t}}{\rho_L c_s \omega \cos kL} \quad (\text{Ek 1.20})$$

elde edilir. Eşitlik (Ek 1.20) matematiksel olarak (Ek 1.17) eşitliği ile özdeştir. Bununla birlikte, (Ek 1.20) eşitliği kablunun yer değiştirmesini duran bir dalga açısından açıklar (yani kablo sabit bir dalga formunun sınırlarında uzaysal değişken genlik ile titreşir. Basit, fakat önemli olan bu fiziksel olgu burada örneklendirilmiştir. Duran bir dalga, ters yönlerde hareket eden eşit genlikli iki dalganın birleşimidir.

Tahrik noktası (the drive-point) mekanik öz direnci  $Z_m$ , ilk olarak parçacık hızı  $v(x, t)$  yi  $x = 0$  da hesaplayıp daha sonra uygulanan kuvvet  $F$  yi buna bölerek elde edilir. Bu durumda

$$Z_m = -i\rho c_s \cot kL \quad (\text{Ek 1.21})$$

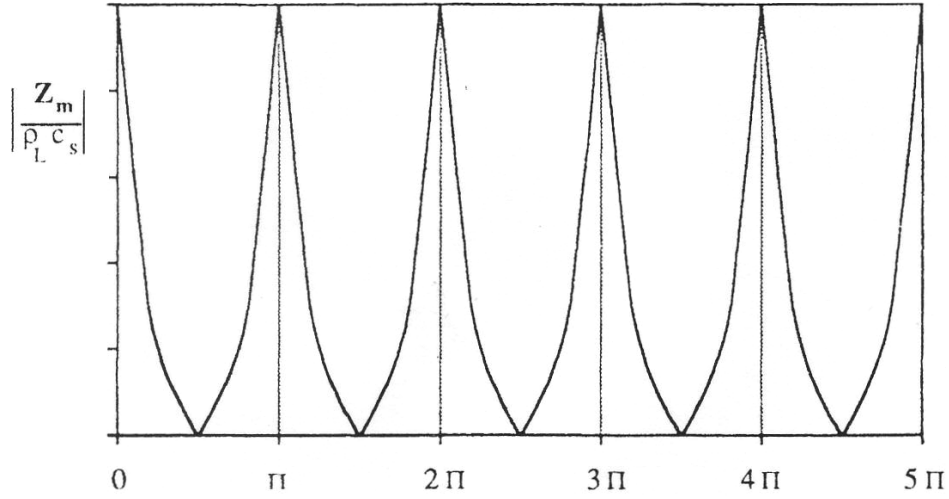
Özdirenç sanaldır ve bu yüzden tamamen reaktiftir. Bu durum sürücü kuvvetler ile kablo arasında net bir enerji transferi olmadığını gösterir. Yani güç kablo tarafından emilmez ve zamandaki ortalama güç akışı sıfırdır. Bu durum, kablo herhangi bir sönüme sahip olmadığından, beklenir. Bu noktada bir direnen öz direncin enerji sönümüne işaret ettiğini fark etmek önemlidir. Eşitlik (Ek 1.21) in aldığı form Şekil Ek 1.10 de sunulmuştur.  $Z_m$  nin minimum değeri  $\cos kL = 0$  olduğunda gerçekleşir.  $\cos kL = 0$  için  $u(x, t)$  yer değiştirmesi sonsuza gittiğinde bu durum eşitlik (Ek 1.20) ile tutarlı olur. Yani yer değiştirme maksimumdur. Minimum öz direnç durumları böylece sistemin rezonans frekansları olur. Bu frekanslarda zorlama frekansı kablunun doğal frekansı ile çakışır ve  $\cos kL = 0$  dan kablunun frekans eşitliği olarak söz edilir. Böylece  $\cos kL = 0$  için,

$$\frac{\omega L}{c_s} = n\pi - \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ için} \quad (\text{Ek 1.22})$$

olur. Böylece

$$\omega_n = \frac{c_s \pi}{L} \left\{ n - \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{Ek 1.23})$$

olur.



Şekil Ek 1.10  $x = 0$  noktasında harmonik uyarılmış ve  $x = L$  noktasında tutulmuş bir yay için tahrik noktası mekanik öz direnci

İlerleyen paragrafta geliştirilen kavramlar, bir yapının doğal frekanslarını belirlemede yapının tahrik noktası (drive-point) öz direncinin önemini göstermektedir. Bu prosedür kompleks yapılar da doğal frekansların deneysel olarak belirlenmesinde sıklıkla kullanılır.

Şu ana kadar bu alt bölümde dalga denklemleri (Eşitlik Ek 1.6) için dalga tipi çözümleri araştırılmıştır. Daha önce üzerinde durulduğu gibi dalga-mod ikiliği ortaya çıkar ve kablo sonsuz büyük sayıda parçadan oluşan bir sistem olarak düşünülebilir. Böylece, bunun yer değiştirme cevabı her biri kendi doğal frekansına ve titreşim moduna sahip tüm bireysel parçacıkların cevaplarının toplamıdır.

Eşitlik (Ek 1.6) şimdi farklı bir yol ile çözülebilir. Değişkenlerin ayrıştırılmasıyla  $u(x, t)$  yer değiştirmesi

$$u(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (\text{Ek 1.24})$$

şeklinde gösterilebilir.

Önceki analizde kullanılan kompleks yer değiştiririnin şimdi gerçek yanal yer değiştirme ile değiştirildiği dikkate alınmalıdır. Bu çözüm formu araştırılırken sadece gerçek sayılar ile çalışmak daha uygundur. Bazı ders kitapları kompleks notasyonu kullanmayı tercih eder. İki çözüm de aynı sonuçları üretir. Eşitlik (Ek 1.24) eşitlik (Ek 1.6) da yerine konursa

$$\phi^{-1} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = q^{-1} c_s^{-2} \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (\text{Ek 1.25})$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (Ek 1.25) in sol tarafı zamandan, sağ tarafı ise uzaysal konumdan bağımsızdır. Eşitliğin geçerli olması için her iki tarafın da titreşimin frekansıyla alakalı bir sabite eşit olması gerekir. Bu sabit  $-k^2$  olsun. Burada  $k$  dalga sayısıdır (wavenumber) ( $k = \omega/c_s$ ). Buradan

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi = 0 \quad (\text{Ek 1.26})$$

ve

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (\text{Ek 1.27})$$

olur. Bu doğrusal diferansiyel denklemler için çözümler

$$\phi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{Ek 1.28})$$

ve

$$q(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (\text{Ek 1.29})$$

şeklinindedir. Keyfi sabitler olan A, B, C ve D sınır ve başlangıç koşullarına bağlıdır. İki tarafından sabitlenmiş, gerilmiş bir kablo için başlangıç koşulları

$$1) \quad u(0, t) = 0$$

$$2) \quad u(L, t) = 0 \quad \text{olmaktadır.}$$

Birinci sınır koşulu  $B=0$  olduğunu, ikinci sınır koşulu ise  $\sin kL = 0$  olduğunu gösterir. Böylece her iki tarafından tutulu bir kablo için frekans eşitliği

$$\sin kL = 0, \text{ veya } \frac{\omega L}{c_s} = \frac{\omega_n L}{c_s} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ için} \quad (\text{Ek 1.30})$$

olur. Burada sürekli bir sistemin sonsuz sayıda doğal frekansı olduğu gösterilmiştir.

$B = 0$  olduğundan konum parametresi  $\phi(x)$

$$\phi_n(x) = \sin k_n x = \sin \frac{\omega_n x}{c_s} = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{Ek 1.31})$$

olur. (Ek 1.31) eşitliği kavramsal olarak çok önemlidir. Bu eşitlik kablunun  $n$ . titreşim modu için mod şeklini temsil eder. Böylece  $u(x, t)$  yer değiştirmesi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t\} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{Ek 1.32})$$

şeklini alır. Burada

$$\omega_n = \frac{n\pi c_s}{L} \text{ dir.} \quad (\text{Ek 1.33})$$

$C_n$  ve  $D_n$  sabitleri, genellikle başlangıç koşullarının Fourier ayrıklaştırmasıyla elde edilir.  $u(x, 0) = a(x)$  ve  $\partial u(x, 0)/\partial t = b(x)$  olarak verilirse buradan

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L a(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (\text{Ek 1.34})$$

ve

$$C_n \omega_n = \frac{2}{L} \int_0^L b(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (\text{Ek 1.35})$$

elde edilir.

Burada  $D_n$  ve  $\omega_n C_n$ ,  $a(x)$  ve  $b(x)$  fonksiyonlarının Fourier serisi açılımlarının Fourier katsayılarıdır.

Yukarıdaki modal analizde iki önemli nokta ortaya çıkmıştır. Bunlar:

- 1) Sınır koşulları, sistemin mod şekillerini ve doğal frekanslarını belirler,
- 2) Başlangıç koşulları, her bir modun toplam cevaba olan katkısını belirler.

$\phi_n(x)$  ve  $q_n(t)$  parametreleri, daha karmaşık sürekli sistemlerin normal mod analizinin temelini oluşturur.

• **Kirişlerde Yanal Eğilme Titreşimleri**

Katılarda bir çok dalga tipi oluşabilir (Cremer ve diğerleri) ama bunlar arasında en önemli iki tanesi boyuna dalgaya çok benzer dalgalar (quasi-longitudinal waves) ve eğilme dalgalarıdır. Eğilme dalgaları sesin yapılardan yayılmasında önemli bir rol oynar ve bu yüzden dikkatli bir şekilde göz önüne alınmalıdır. Kirişlerdeki eğilme titreşimlerinin hareket denklemleri, kablo ve çubuklardaki dalga denklemlerine benzer şekilde elde edilebilir. İlk olarak, titreşen kabloda yapılan varsayımlara ek olarak birkaç varsayım yapılmalıdır. Bunlar izleyen şekildedir:

- 1) Dönme ataleti ve kayma deformasyonlarının etkisi ihmal edilecektir,
- 2) Kirişin kesit alanı sabit kabul edilecektir,
- 3)  $EI$  değeri sabit ve kiriş tarafsız eksenine göre simetrik kabul edilecektir.
- 4) Net boyuna kuvvetlerin olmadığı kabul edilecektir.

Şekil Ek 1.11 de gösterilen, birim uzunluktaki kütlesi  $\rho_L$  olan bir kiriş elemanı göz önüne alınsın. Burada  $V$  kesme kuvveti,  $M$  ise eğilme momentini göstermektedir. Newton'un ikinci kanunundan,

$$\rho_L dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \left\{ V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right\} + V \quad (\text{Ek 1.36})$$

Böylece,

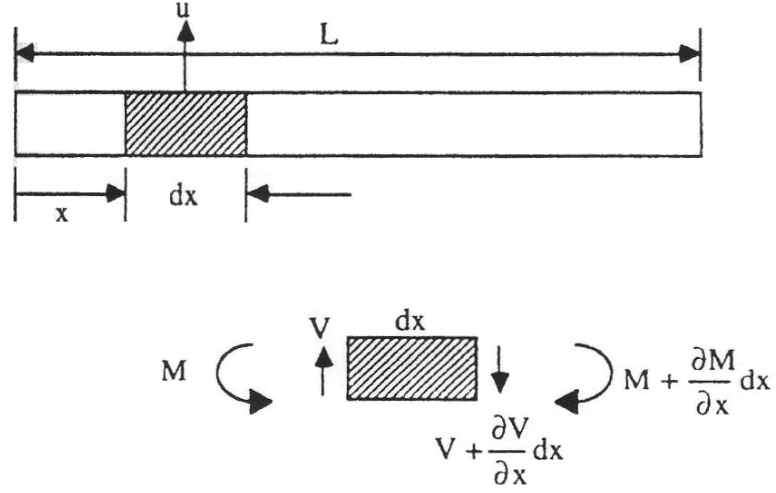
$$\rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{Ek 1.37})$$

olur.

Momentlerin, birim elemanın sağ yüzeyine göre toplamı (saat yönünün pozitif olduğu kabulü ile) bize

$$-M + Vdx + \left\{ M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right\} = 0 \quad (\text{Ek 1.38})$$

verir. Buradan,



Şekil Ek 1.11 Enine titreşime maruz bir kiriş elemanında eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -V \quad (\text{Ek 1.39})$$

olur. Kiriş eğilme teorisine göre (Euler-Bernoulli ya da ince kiriş teorisi) simetri düzleminde eğilen bir kiriş için eğrilik ve moment

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -M \quad (\text{Ek 1.40})$$

ile ilişkilidir. Burada  $EI$  kirişin eğilme rijitliği ve  $I$  tarafsız düzlem eksenine göre alan ikinci momentidir Şekil Ek 1.11 ile alakalı olan diyagramın düzleminin içine doğru olan eksen). Eşitlik (Ek 1.40) ın işareti koordinat ekseninin seçimi ve pozitif eğilme momentinin tanımıyla uyumlu olmalıdır.  $\partial^2 u / \partial x^2$  nin işaretinin her zaman  $M$  nin işaretiyle ters olduğu gösterilebilir. Buna göre,

$$\rho_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \left\{ EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}}{\partial x^2} \quad (\text{Ek 1.41})$$

olur. Böylece,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \text{ olur. Burada } a^2 = \frac{EI}{\rho_L} \text{ dir.} \quad (\text{Ek 1.42})$$

(Ek 1.42) denklemi yanal doğrultudaki eğilme hareketi için Euler kiriş denklemidir. Bu denklem, yanal kablo titreşimi için dalga denkleminde ve çubuklardaki boyuna dalgaya çok

benzer dalga (quasi-longitudinal wave) denkleminde farklıdır. Denklem dördüncü dereceden bir kısmi diferansiyel denklemdir ve sabit  $a^2$  değeri eğilme dalga hızı değildir. Bu, eğilme dalgalarının kesme ve boyuna dalgaların birleşiminden oluşmasının bir sonucudur.

İzleyen şekilde bir çözüm göz önüne alınsın:

$$u(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad (\text{Ek 1.43})$$

Bu denklem Euler denkleminde yerine yazılırsa

$$k^4 = \frac{\rho_L}{EI} \omega^2 \quad (\text{Ek 1.44})$$

elde edilir. burada  $k$  nin ikisi kompleks olmak üzere dört kökü vardır. Bunlar,

$$k = \pm \left( \frac{\rho_L \omega^2}{EI} \right)^{1/4}, \quad \text{ve} \quad \pm i \left( \frac{\rho_L \omega^2}{EI} \right)^{1/4} \quad (\text{Ek 1.45})$$

şeklinde dir.

$k$  parametresinin birimi  $m^{-1}$  dir ve eğilme dalga sayısını gösterir. Bu yüzden, bundan sonra  $k_b$  olarak adlandırılacaktır. (Ek 1.42) eşitliğinin tam çözümü dört bileşenden oluşmaktadır ve izleyen şekildedir:

$$u(x, t) = \left\{ A_1 e^{-ik_b x} + A_2 e^{ik_b x} + A_3 e^{-k_b x} + A_4 e^{k_b x} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{Ek 1.46})$$

(Ek 1.46) denklemini girişler için yanal eğilme titreşimlerinin çözümünü verir. Denklemden görüldüğü üzere iki üstel olarak azalan, yayılmayan dalga denklemi ve iki yayılan dalga denklemi bulunmaktadır. Yayılmayan dalgalar kısa sürede kaybolan dalgalar olarak bilinir ve net enerji aktarmazlar. İki yayılan dalga bileşeni  $+$  ve  $-$   $x$  yönünde dalga yayılımını gösterir.

Eğilme dalgası hızı,  $c_b$ , eğilme dalga numarası (wavenumber)  $k_b$  den elde edilebilir. Buna göre,

$$c_b = \frac{\omega}{k_b} = \omega^{1/2} \left\{ EI / \rho_L \right\}^{1/4} = \left\{ 1.8 c_L t f \right\}^{1/2} \quad (\text{Ek 1.47})$$

Eğilme dalga hızı olan (Ek 1.47) eşitliği önemli bir eşitliktir ve boyuna dalga hızı  $c_L$  nin tersine eğilme dalga hızının verilen bir malzeme için sabit olmadığını ifade eder. Bu eşitlik frekansın bir fonksiyonudur ve onunla birlikte artar. Yani eğilme dalgalarının farklı frekans

bileşenleri farklı dalga hızlarında ilerler ve bu yüzden dağılımlıdır. Eğilme dalga hızının, ses dalgalarının yapılardan yayılmasında önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Kayma deformasyonlarının ve dönme ataletinin eğilme dalga hızı üzerine etkileri Fahy ve Cremer ve diğerleri tarafından ayrıntılı incelenmiştir. Kayma deformasyonu eğilme dalga hızının üst limitini sınırlar (yani yüksek frekanslarda hız sonsuza ulaşmaz).

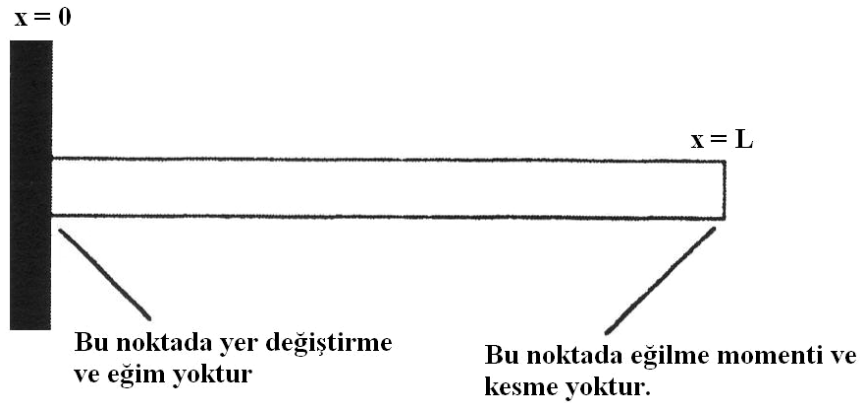
Grup hızı ( $c_g$ ) kavramı elastik sürekli ortam bakış açısı başlığında (Ek 1.4) eşitliği ile açıklanmıştır. Bir dalga dağılmayan bir dalga olduğunda  $\omega$  ile  $k$  arasındaki ilişki doğrusal ve dalga veya faz hızı ile grup hızı birbirine eşittir. Eğilme dalgaları için  $\omega$  ile  $k$  arasındaki ilişki doğrusal değildir ve bu yüzden grup ve dalga hızları birbirine eşit değildir. Yani dalga tarafından taşınan enerji fazın ilerlediği hızda ilerlemez. Katılardaki eğilme hızları için  $c_g = 2c_b$  dir.

Kirişlerdeki gerçek  $u(x,t)$  yanal yer değiştirmesi (Ek 1.46) eşitliğindeki kompleks çözümün gerçel kısmından elde edilir. Ayrıca bu yer değiştirme Euler kiriş denkleminde, değişkenlerin ayrılmasıyla da doğrudan elde edilebilir ki bu prosedür mekanik titreşimler konusunda yazılan kitapların çoğunda benimsenmiştir. Değişkenlerin ayrılması iki bağımsız doğrusal diferansiyel denklem ortaya çıkarır. Bunlar;

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} - k_b^4 \phi = 0 \quad (\text{Ek 1.48})$$

ve

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (\text{Ek 1.49})$$



Şekil Ek 1.12  $x = 0$  noktasında tutulu ve  $x = L$  noktasında serbest bir kirişin gösterimi

Bunların ilgili çözümleri

$$\phi(x) = A_1 \sin k_b x + A_2 \cos k_b x + A_3 \sinh k_b x + A_4 \cosh k_b x \quad (\text{Ek 1.50})$$

ve

$$q(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \quad (\text{Ek 1.51})$$

şeklindedir.  $A_1$  ve  $A_2$  sabitleri sınır koşullarından,  $C$  ve  $D$  sabitleri ise başlangıç koşullarından elde edilir. Titreşen kablo durumu için,  $\phi(x)$  dalga şeklini temsil eder.  $q(t)$  ise her bir modun toplam cevaba olan katkısını belirler. Toplam cevap böylece bütün ayrıık modların toplamı olur. Yani;

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (\text{Ek 1.52})$$

Örnek olarak Şekil Ek 1.12 de gösterilen  $x = 0$  noktasında tutulu,  $x = L$  noktasında serbest bir kirişteki serbest yanal titreşimleri göz önüne alalım. Sınır koşulları:

- 1) Tutulu uçta yer değiştirme ve eğim yoktur. Bu yüzden  $u(0, t) = 0$  ve  $\partial u(0, t) / \partial x = 0$  ;
- 2) Serbest uçta moment ve kesme kuvveti yoktur. Bu yüzden  $\partial^2 u(L, t) / \partial x^2 = 0$  ve  $\partial^3 u(L, t) / \partial x^3 = 0$

Bu dört sınır koşulu (Ek 1.50)-(Ek 1.52) eşitliklerine uygulanırsa  $k_{Bn} L$  ( $k_{Bn}$   $n$ . mod için dalga sayısıdır.) cinsinden izleyen transandantal frekans denklemi elde edilir.

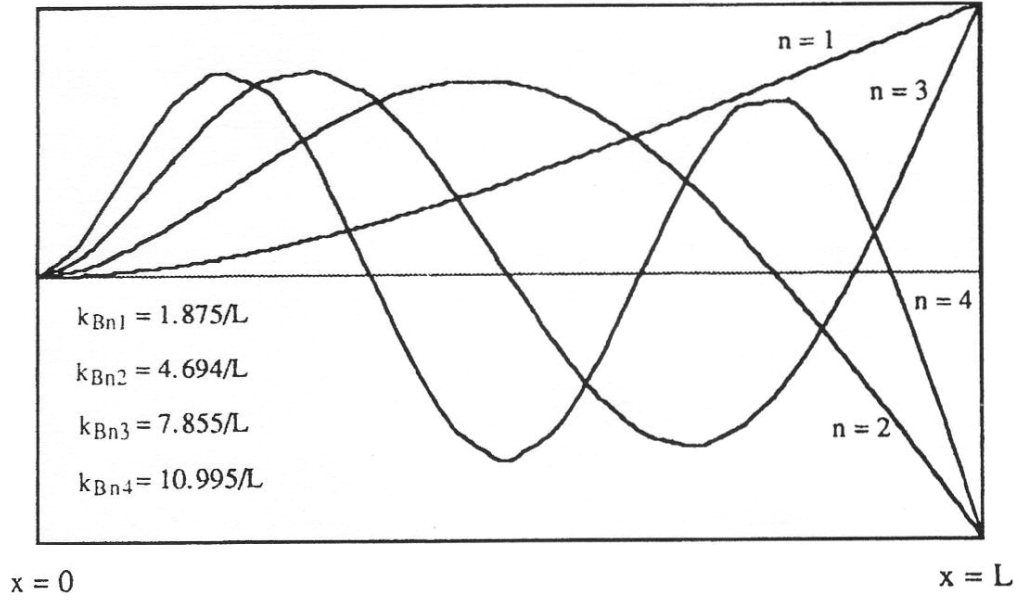
$$\text{sech } k_{Bn} L = -\cos k_{Bn} L \quad (\text{Ek 1.53})$$

Karşı gelen mod şekilleri ise

$$\phi_n(x) = A_n \left[ \cosh k_{Bn} x - \cos k_{Bn} x - \left\{ \frac{\cosh k_{Bn} L + \cos k_{Bn} L}{\sinh k_{Bn} L + \sin k_{Bn} L} \right\} \times (\sinh k_{Bn} x - \sin k_{Bn} x) \right] \quad (\text{Ek 1.54})$$

İlk dört mod şekli Şekil Ek 1.13 de gösterilmiştir.

Kiriş elemanlarının tahrik noktası (drive-point) mekanik öz direnci,  $Z_m$ , kablo ve çubuklar için kullanılan prosedürlerin aynısı kullanılarak hesaplanabilir. Fahy tarafından elde edilen iki özel sonuç burada sunulmuştur. Daha fazla ayrıntı için Fahy ve Cremer ve diğ. Çalışmalarına bakılmalıdır. Birinci sonuç sonsuz bir kirişteki eğilme modlarının nokta tahriki içindir. İkinci



Şekil Ek 1.13 Bir ucu tutulu bir ucu serbest bir kiriş için ilk dört eğilme modu şekilleri

sonuç basit mesnetli sonlu bir kirişin nokta uyarımıyla ilgilidir. Daha önceden belirtildiği gibi bu aşamada sönüm ihmal edilmiştir. Sonsuz bir kirişin nokta uyarımı için

$$Z_m = \frac{2EI k_B^3}{\omega} (1+i) \quad (\text{Ek 1.55})$$

ve sonlu bir kirişin nokta uyarımı için

$$Z_m = \frac{i4EI k_B^3}{\omega} (\tanh k_B L - \tan k_B L)^{-1} \quad (\text{Ek 1.56})$$

şeklindedir. Sonsuz kiriş hali için, özdirençin gerçel kısmı (yani direnç) uyarım noktasından yayılan enerji ile, sanal kısmı (yani tepki) pozitif olduğu için kütle ile ilişkilidir. Eğer sanal kısım negatif olsaydı rijitlik ile ilişkili olacaktı. Çünkü sönüm ihmal edilmiştir ve daha önce ki durumda olduğu gibi sonlu kiriş için özdirenç sanaldır. Bu özdirençin bir kısmı kütleyle bir kısmı da rijitlik ile ilişkilidir.

Sönüm etkisi, kompleks elastisite modülünün ( $E'$ ) kiriş denkleminde dahil edilmesi ve bir karmaşık dalga numarası ( $k'$ ) elde edilmesiyle analize eklenebilir.

$$k' = k \left( 1 - i \frac{\eta}{4} \right) \quad (\text{Ek 1.57})$$

Sanal (imajiner) kısmın artık, boyuna dalgaya çok benzer dalga (quasi-longitudinal wave)

konusunda olduğu gibi  $\eta/2$  değil  $\eta/4$  olduğu not edilmelidir. Yayılan ve yayılmayan dalgalar arasındaki fark (Bkz. Eşitlik Ek 1.46) karmaşık dalga numarasının kullanımından dolayı artık biraz daha karmaşık hale gelmiştir.

## Ek 2 Sayısal Fourier ve Ters Fourier Dönüşümleri\*

### Ek 2.1 Fourier Dönüşümü Hakkında Özet Bilgiler

$f(t)$  zamana bağlı bir fonksiyon olmak üzere, fonksiyonun sürekli Fourier ve ters Fourier dönüşüm formülleri

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{Ek 2.1})$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{Ek 2.2})$$

şeklinde verilmektedir (Brigham, 1974). Burada açısal frekans  $\omega$ , normal frekans  $f$  ye (devir/birim zaman)  $\omega = 2\pi f$  formülü ile bağlıdır.  $F^F(\omega)$  zamana bağlı  $f(t)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümü olup kompleks değerlidir.

### Ek 2.2 Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri

$f(t)$  fonksiyonu,  $t \geq 0$  için tanımlanmış reel değerli fonksiyondur. Fourier dönüşümü  $F^F(\omega)$ , kompleks değerli bir fonksiyon olup  $(-\infty, \infty)$  aralığında tanımlanmıştır.  $F^F(\omega)$  nın  $(-\omega)$  ve  $(\omega)$  daki değerleri birbirinin kompleks eşleniğidir.

$$F^F(-\omega) = \overline{F^F(\omega)} \quad (\text{Ek 2.3})$$

Burada, üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. (Ek 2.1) ifadesi yardımıyla fonksiyonun Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde düzenlenmektedir.

$$F^F(\omega) = F[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \int_0^{\infty} -f(t) \sin \omega t dt \quad (\text{Ek 2.4})$$

Fourier uzayındaki fonksiyon reel ve imajiner kısımlardan meydana gelmektedir.

$$F^F(\omega) = F_R^F + iF_I^F \quad (\text{Ek 2.5})$$

Fourier dönüşüm uzayındaki fonksiyonun reel kısmı simetrik, imajiner kısmı ise antisimetrik özelliğe sahiptir.

---

\* Ek 2, Çalım (2003)'den alınmıştır.

Fonksiyonun zamana göre türevinin Fourier dönüşümü

$$\left(\dot{f}(t)\right)^F = F\left[\dot{f}(t)\right] = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{Ek 2.6})$$

şeklindedir. (Ek 2.6) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\left(\dot{f}(t)\right)^F = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=\infty} - f(0) \times 1 + i\omega F^F(\omega) \quad (\text{Ek 2.7})$$

elde edilir. Fourier dönüşümünde hem davranış hem de yük fonksiyonunun sıfıra gittiği kabul edilmektedir. Buna fonksiyonun yayılma şartı (Radiation condition) denilmektedir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow 0 \quad (\text{Ek 2.8})$$

Yayılma şartı kabulü ile fonksiyonun birinci türevinin Fourier dönüşümü

$$\left(\dot{f}(t)\right)^F = i\omega F^F(\omega) - f(0) \quad (\text{Ek 2.9})$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde fonksiyonun ikinci türevinin Fourier dönüşümü

$$\left(\ddot{f}(t)\right)^F = -\omega^2 F^F(\omega) - i\omega f(0) - \dot{f}(0) \quad (\text{Ek 2.10})$$

şeklindedir. (Ek 2.9) ve (Ek 2.10) eşitliklerindeki ikinci ve üçüncü terimler  $t = 0$  anındaki başlangıç şartlarıdır. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri Çizelge Ek 2.1 de gösterilmektedir.

Çizelge Ek 2.1 Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri

| Tip 53 | Zamanla Değişim                | Fourier Dönüşümü                            |
|--------|--------------------------------|---|
| 1      | $e^{-bt} \sin(at) \quad b > 0$ | $\frac{a}{a^2 + (b + i\omega)^2}$           |
| 2      | $e^{-bt} \cos(at) \quad b > 0$ | $\frac{b + i\omega}{a^2 + (b + i\omega)^2}$ |
| 3      | $\sin(at)$                     | $\frac{a}{a^2 - \omega^2}$                  |
| 4      | $\cos(at)$                     | $\frac{i\omega}{a^2 - \omega^2}$            |

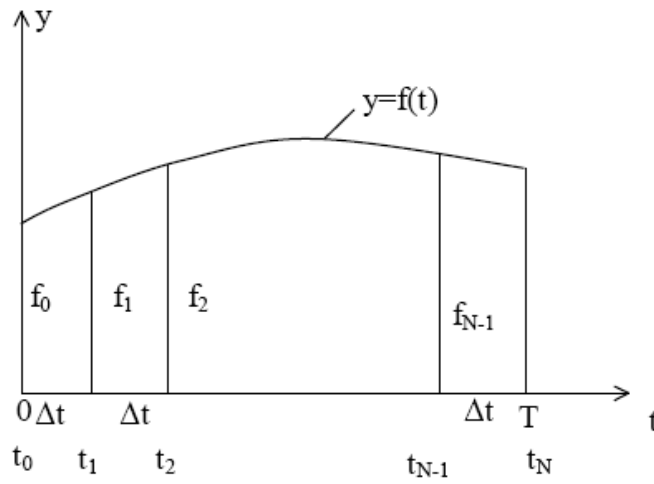
### Ek 2.3 Ayırık Fourier Dönüşümü

$f(t)$  fonksiyonunun sürekli olarak tanımlanmadığını ve  $[0, T]$  aralığında  $\Delta t$  aralıkları ile ayırık olarak

$$f_i = f(t_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{Ek 2.11})$$

şeklinde verildiği kabul edilsin. Burada

$$t_i = i\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad (\text{Ek 2.12})$$



Şekil Ek 2.1  $f(t)$  fonksiyonunun ayırık tanımı

Ayırık Fourier dönüşüm formülleri ayırık şekilde verilen  $f(t)$  fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesap etmek için kullanılacaktır.

### Ek 2.4 Ayırık Fourier Dönüşümünün Önemi

Ayırık Fourier dönüşümünün önemi iki noktada toplanabilir.

- Cisimlerin, yapıların, akışkanların dinamik davranışını incelemeye yönelik deneylerde ivme, hız gibi bazı büyüklüklerin zamana göre değişimleri küçük zaman aralıkları ( $\Delta t$ ) ile belli bir zaman aralığı  $[0, T]$  de ayırık olarak ölçülür. Elde edilmiş olan deneysel verinin değerlendirilmesi için çoğu kez, özellikle deprem ve titreşim analizlerinde, büyüklüklerin ayırık olarak ölçülmüş ve zamana göre değişimlerinin Fourier dönüşümlerinin bulunması arzu edilir. Böyle bir amaca ayırık Fourier dönüşüm formüllerini kullanarak ulaşmak mümkündür.

- Ayırık Fourier dönüşümü cisimlerin, yapıların dinamik davranışının analitik olarak bulunmasında da kullanılabilir. Cisim ve yapıların dinamik davranışı adi veya kısmi diferansiyel denklemleri tarafından idare edilir. Bu denklemler zaman uzayında sayısal olarak ya integrasyon formülleri veya ayırık Fourier dönüşümü yardımı ile entegre edilebilir. Ayırık Fourier dönüşümünün kullanılmasının, integrasyon formüllerinin kullanılmasına göre en önemli avantajı cismin veya yapının istenen bir noktasındaki dinamik davranışın diğer noktadaki davranış bulunmadan belirlenebilmesidir. Hâlbuki klasik integrasyon formüllerinin kullanılması halinde belli bir noktadaki dinamik davranışı bulmak için diğer noktadaki davranışı bulmaya ihtiyaç vardır, yani, cismin bütün noktalarındaki dinamik davranış aynı zamanda ve birlikte bulunur.

### Ek 2.5 Kompleks Fourier Serisi

Ayırık Fourier dönüşümü formüllerini kompleks Fourier formülleri kullanarak elde edileceğinden bu konu kısaca incelenecektir.

$f(t)$  fonksiyonu  $[0, T]$  aralığında tanımlanmış olsun.  $f(t)$  fonksiyonunun  $[0, T]$  aralığında geçerli olan Fourier serisi açılımı

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t} \quad (\text{Ek 2.13})$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (\text{Ek 2.14})$$

formülleri verilmektedir. Burada  $\omega_k$ ,  $k$  nıncı Fourier bileşeninin açısal frekansını göstermekte olup

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi}{T_k} = 2\pi f_k \quad (\text{Ek 2.15})$$

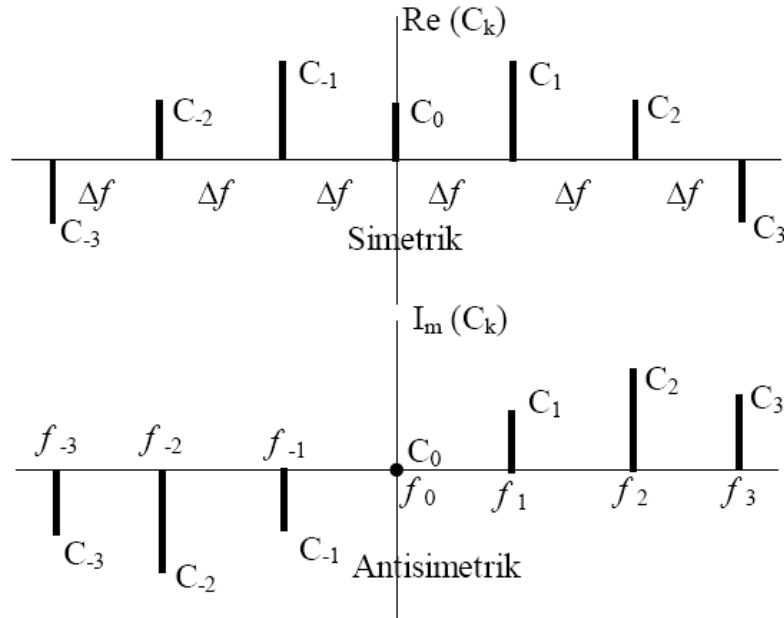
formülü ile tanımlanmaktadır.  $T_k$  ve  $f_k$  sırasıyla  $k$  nıncı Fourier bileşeninin periyodunu ve normal frekansını göstermektedir. (Ek 2.13) ve (Ek 2.15) denklemlerinden anlaşılacağı üzere, (Ek 2.13) ün açılımı  $f(t)$  fonksiyonu  $[0, T]$  aralığı dışında  $T$  periyodu ile periyodik olarak devam ettiği kabulüne göre yapılmıştır. (Ek 2.14) denklemi kompleks Fourier sabitleri  $C_k$  ların

$$C_{-k} = \bar{C}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{Ek 2.16})$$

özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. (Ek 2.16) denklemi  $C_0$  in reel olacağını  $C_{-1}$ ,  $C_{-2}$ ,  $C_{-3}$ , ..... nin  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , ..... nin kompleks eşleniği olacağını göstermektedir. (Ek 2.13) denklemi  $f(t)$  nin frekansları

$$f_k = \frac{k}{T} = k\Delta f \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots) \quad (\text{Ek 2.17})$$

ve genlikleri  $C_k$  olan sonsuz sayıda Fourier bileşenin toplamı olarak ifade edileceğini göstermektedir.  $f_k$  frekanslarının eşit aralıklı bir dağılıma sahip olduğuna dikkat edilmelidir (Şekil Ek 2.2).

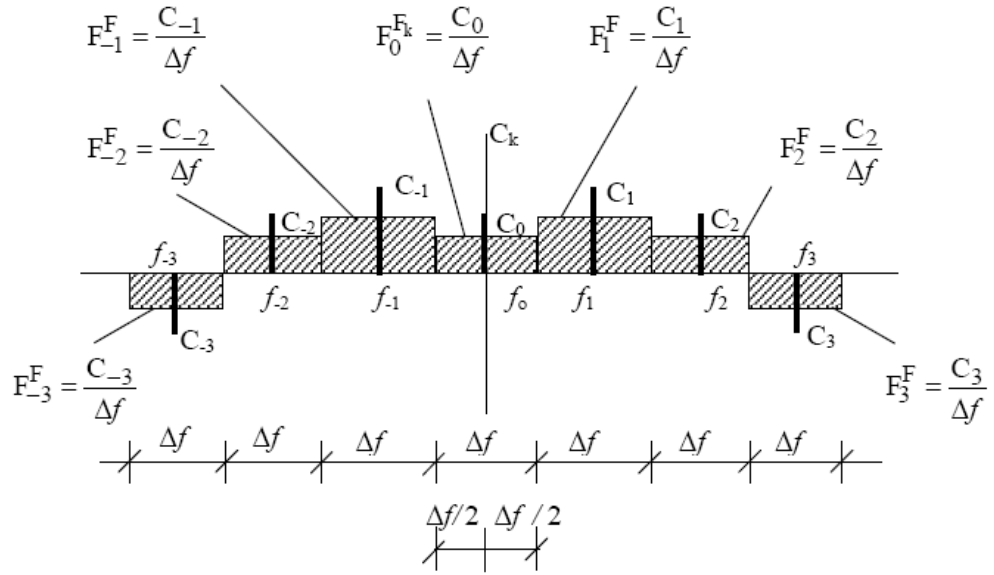


Şekil Ek 2.2 Fourier serileri

$C_k$  Fourier sabitlerini  $\Delta f$  e bölerek yayılı Fourier sabitleri  $F_k^F$  cinsinden

$$F_k^F = \frac{C_k}{\Delta f} \quad (\text{Ek 2.18})$$

denklemini ile temsil etmek mümkündür (Şekil Ek 2.3).



Şekil Ek 2.3 Yayılı Fourier sabitleri

Fourier serisi denklemleri, yayılı Fourier sabitleri cinsinden yazılmaktadır.

$$\left. \begin{aligned}
 f(t) &= \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i\omega_k t} \\
 F_k^F &= \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \\
 \omega_k &= 2\pi f_k = 2\pi k \Delta f = 2\pi \frac{k}{T}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.19})$$

### Ek 2.6 Sürekli Fourier Dönüşümü ve Kompleks Fourier Serisi Arasındaki İlişki

Sürekli Fourier dönüşümü formülleri kompleks Fourier serisi formüllerinden periyot  $T$  sonsuza giderken elde edilebilir.  $T$  sonsuza giderken ( $T \rightarrow \infty$ )  $f_k$  lar arasındaki mesafe sıfıra yaklaşır,  $f_k$  ların dağılımı sürekli hale dönüşür ve

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta f &= \frac{1}{T} \rightarrow df \\
 \omega_k &= 2\pi f_k \rightarrow \omega = 2\pi f
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.20})$$

bağıntıları elde edilir. Dolayısı ile kompleks Fourier serisi formülleri (Ek 2.19),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{Ek 2.21})$$

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{Ek 2.22})$$

şeklini alır. Bu formüller ise (Ek 2.1) ve (Ek 2.2) denklemleri ile verilen sürekli Fourier dönüşüm formülleri ile aynıdır.

### Ek 2.7 Ayrık Fourier Dönüşüm Formülleri

Ayrık Fourier dönüşüm formülleri, kompleks Fourier serisi formüllerini (Ek 2.19), kullanarak elde edilecektir.  $f(t)$  fonksiyonunun  $\Delta t$  aralıkları ile ayrık olarak

$$\left. \begin{aligned} f_n &= f(t_n) \\ t_n &= n \Delta t \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \\ \Delta t &= \frac{T}{N} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.23})$$

denklemleri ile verildiği kabulü yapılmaktadır. (Ek 2.19) denklemlerinin ikincisinde dikdörtgen integrasyon yöntemi kullanılırsa ve birincisini  $t = t_N = n \Delta t$  için yazılırsa

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i\omega_k t_n} \\ F_n^F &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\omega_n t_k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.24})$$

formülleri elde edilir. Burada

$$\left. \begin{aligned} \omega_n t_k &= (2\pi n \Delta f)(k \Delta t) = 2\pi nk \frac{1}{T} \frac{T}{N} = 2\pi \frac{nk}{N} \\ \omega_k t_n &= (2\pi k \Delta f)(n \Delta t) = 2\pi kn \frac{1}{T} \frac{T}{N} = 2\pi \frac{nk}{N} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.25})$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa (Ek 2.24) eşitlikleri

$$f_n = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.26a})$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.26b})$$

şeklini alır.

### Ek 2.8 Katlama Frekansı

$f(t)$  fonksiyonu  $\Delta t$  zaman aralıklarını kullanarak ayırık olarak elde edilmiştir ve bu ayırık fonksiyon değerlerini (Ek 2.26a) denklemi ile Fourier bileşenleri cinsinden temsil edilmiştir. Ancak  $\Delta t$  aralıkları ile temsil edilebilecek Fourier bileşeninin maksimum frekansı  $f_c$

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2} \frac{1}{T} = \frac{N}{2} \Delta f \quad (\text{Ek 2.27})$$

olarak hesaplanmaktadır.  $f_c$  den daha büyük frekanslı Fourier bileşenleri,  $f_c$  den küçük frekanslı Fourier bileşenleri üzerine katlanır. Başka bir deyişle, frekansları  $-f_c \leq f_k \leq f_c$  aralığında olan Fourier bileşenleri birbirinden bağımsızdır ve frekansları bu aralık dışında olan Fourier bileşenleri,  $[-f_c, f_c]$  aralığındaki Fourier bileşenleri cinsinden ifade edilebilir.  $f_c$  ye katlama frekansı denilmektedir. Bu bilgilerin ışığı altında (Ek 2.26a) denklemindeki  $(-\infty, \infty)$  limitler için  $(-N/2, N/2)$  kullanılabilir. Dolayısı ile (Ek 2.26) denklemleri

$$f_n = \Delta f \sum_{k=-N/2}^{N/2} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.28a})$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.28b})$$

halini alır.

### Ek 2.9 Ayırık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Son Şekli

(Ek 2.28b) denklemi  $F_n^F$  nin  $f$  frekansının  $2f_c$  periyotlu periyodik fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Dolayısı ile (Ek 2.28a) denkleminin limitleri  $(-N/2, N/2)$ ,  $(0, N-1)$  olarak değiştirilebilir. Dolayısı ile ayırık Fourier dönüşüm formülleri

$$f_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.29a})$$

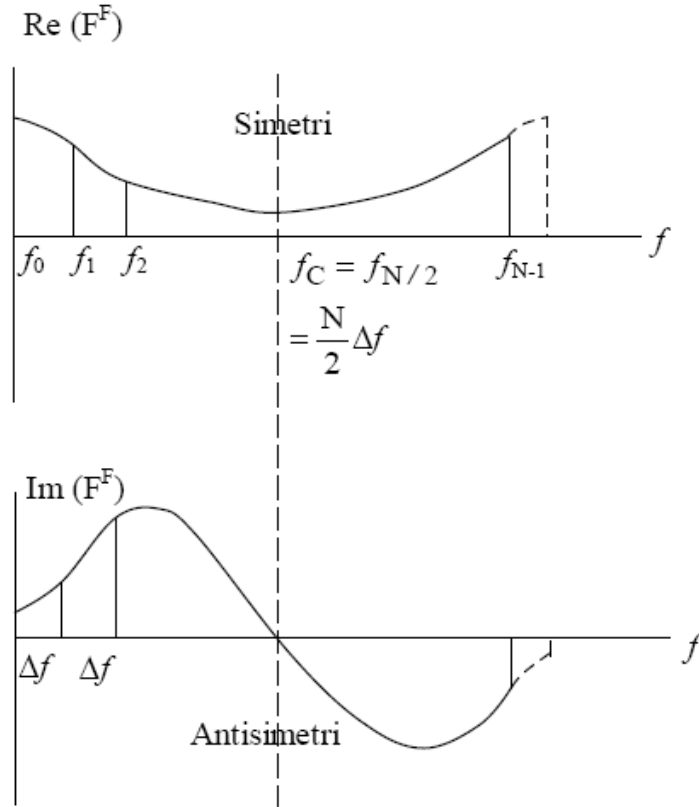
$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (\text{Ek 2.29b})$$

şeklinde yazılabilir. Burada (Ek 2.29b) denklemi ayırık  $f(t_k) = f_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) fonksiyonunun Fourier dönüşümünü (FD) hesap etmekte kullanılabilir. Bu şekilde hesap

edilen  $F_n^F$  değerleri frekans uzayında  $2f_c = N\Delta f$  periyodu ile periyodik olacaktır. (Ek 2.29a) denklemi ise Fourier transformu ayırık olarak  $F^F(f_k) = F_k^F$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) şeklinde bilinen fonksiyonu zaman uzayında hesap etmek için, yani ters Fourier dönüşümünü (TFD) bulmak için kullanılabilir. Bu şekilde hesap edilen  $f_n$  değerleri zaman uzayında  $T = N\Delta t$  periyodu ile periyodik olacaktır.

### Ek 2.10 Ayırık Fourier Dönüşümünün Önemli Bir Özelliği

(Ek 2.29b) denklemi ile hesap edilen Fourier dönüşümünün reel ve imajiner kısımları,  $f_c = \frac{N}{2}\Delta f$  frekansına göre sırasıyla simetrik ve antisimetrik olacaklardır (Şekil Ek 2.4).



Şekil Ek 2.4 Ayırık Fourier dönüşümünün simetri ve antisimetri özellikleri

Bu özellik,  $F^F$  in frekans uzayında  $2f_c = N\Delta f$  periyodu ile periyodik ve  $\text{Re}(F^F)$   $\text{Im}(F^F)$  in sırasıyla  $f_0$  a göre simetrik ve antisimetrik olması sonucu meydana gelmektedir. Frekans spektrumu  $0 \leq f \leq f_c$  aralığı için fiziksel anlam taşımaktadır.  $f_c < f \leq 2f_c$  aralığındaki spektrum frekansı negatif olan Fourier bileşenlerinin spektrumunu temsil etmektedir.

### Ek 2.11 Ayırık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Kompakt Formu

(Ek 2.29) dönüşüm formülleri

$$\left. \begin{aligned} f_n &= \Delta f x_n && \text{Ters Fourier Dönüşümü (TFD) için} \\ F_n^F &= \Delta t x_n && \text{Fourier Dönüşümü (FD) için} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.30})$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k^F, \quad W = e^{i\frac{2\pi}{N}} && \text{TFD için} \\ x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_k, \quad W = e^{-i\frac{2\pi}{N}} && \text{FD için} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 2.31})$$

ve  $W^{nk}$ ,  $W$  nun  $(nk)$  inci kuvvetini göstermektedir.

### Ek 2.12 Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol

$f(t)$  nin belli zaman aralığında verilmiş olduğu kabul edilsin. Fonksiyonun Fourier dönüşümünü ( $F^F$ ) bulmak için şu basamakları izlemek gerekmektedir:

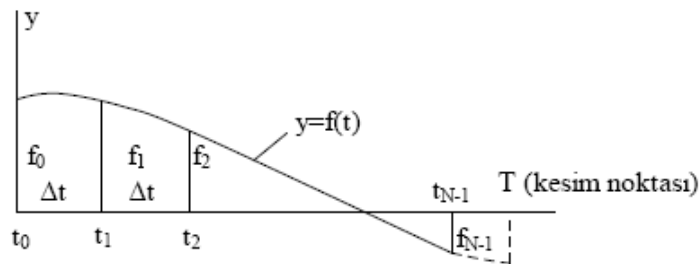
- Analizde göz önüne alınacak  $[0, T]$  zaman aralığını seçilir.
- Bölüm sayısı ( $N$ ) seçilir ve  $f_0, f_1, f_2, \dots$ 'nin  $\Delta t = T/N$  aralıkları hesaplanır veya verilmiş olduğu kabul edilir (Şekil Ek 2.5).
- $x_n$  değerleri ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_k, \quad W = e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{Ek 2.32})$$

- Fourier dönüşümü (FD)

$$F_n^F = \Delta t x_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{Ek 2.33})$$

ifadelerinden hesaplanır.



Şekil Ek 2.5 Ayırık  $f(t)$  fonksiyon değerleri

### Ek 2.13 Ters Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol

$F^F$  nin  $f$  e bağlı olarak verilmiş olduğu kabul edilsin. Fonksiyonun zamana bağlı değerlerini bulmak için şu basamakları izlemek gerekmektedir:

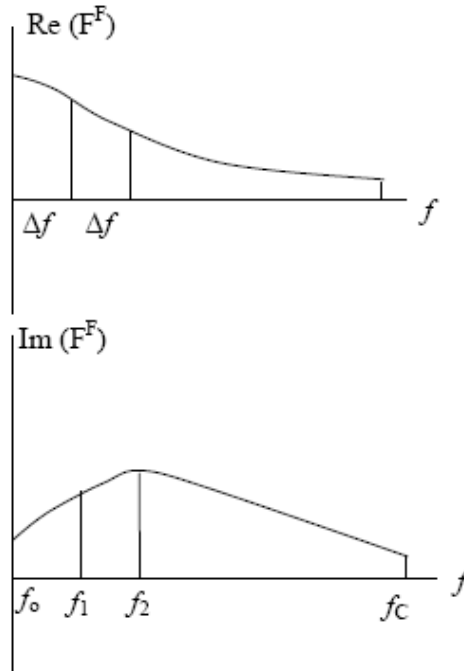
- Analizlerde göz önüne alınacak  $[0, f_c]$  frekans aralığını seçilir.
- $N$  seçilir ve  $F_0^F, F_1^F, \dots$   $\Delta f = \frac{f_c}{N/2}$  aralıkları ile hesaplanır veya verilmiş olduğu kabul edilir (Şekil Ek 2.6).
- $F^F$ , reel ve imajiner kısımları  $f_c$  etrafında sırasıyla simetrik ve antisimetrik olacak şekilde  $[0, 2f_c]$  aralığında tanımlanır (Şekil Ek 2.7).
- $x_n$  değerleri ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k^F, \quad W = e^{i\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{Ek 2.34})$$

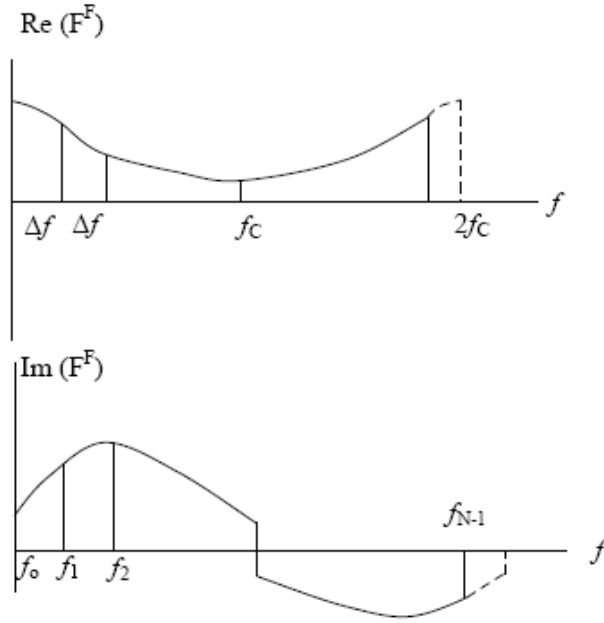
formülü kullanılarak bulunur.

- Ters Fourier dönüşümü (TFD) aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$f_n = \Delta f x_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (\text{Ek 2.35})$$



Şekil Ek 2.6 Ayrık  $F^F$  değerleri



Şekil Ek 2.7  $F^F$  'nin  $[0, 2f_c]$  aralığına genişletilmesi

#### Ek 2.14 FFT Algoritması (Hızlı Fourier Dönüşüm Algoritması)

Ayrık Fourier dönüşümü veya ters Fourier dönüşümü için  $x_n = (n = 0, 1, \dots, N-1)$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \quad (\text{Ek 2.36})$$

formülü ile hesap edilmesi gerekmektedir. Burada  $W$ , elemanları kompleks  $W^{nk}$  olan  $(N \times N)$  boyutlu kare matrisini ve  $F$  ise elemanları FD için  $F_n$ , TFD için  $F_n^F$  ile temsil edilen  $(N \times 1)$  boyutlu kolon vektörünü göstermektedir. (Ek 2.36) denklemi  $x_n$  leri bulmak için  $N^2$  sayıda kompleks çarpım yapmak gerektiğini göstermektedir. FFT algoritmasında  $N$ , 2 nin kuvveti olarak  $(N = 2^M)$  hesaplanmaktadır. Burada  $M$  tam bir sayıyı göstermektedir. FFT algoritması kullanılırsa kompleks çarpım sayısı  $NM/2$  ye indirgenmektedir. FFT algoritmasının işlemleri ne kadar kısalttığını gösteren bir örnek verelim.  $N = 2^8 = 256$  olsun. Eğer FFT algoritması kullanılmazsa  $256^2 = 65536$  kompleks çarpım yapmak gerekir. FFT algoritması kullanılması halinde çarpım sayısı  $(256)(8)/2 = 1024$  olmaktadır.

### Ek 3 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı\*

#### Ek 3.1 Tek Serbestlik Dereceli Sönümsüz Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı

Bilindiği gibi lineer bir sistemin toplam cevabı zorlama hareketi ile doğal hareketin süperpozisyonudur. Harmonik tahrik durumunda zorlamalı harekete kararlı hal cevabı adı verilir. Bu kısımda TSD sönümsüz sistemlerin harmonik tahrike cevabı ile ilgilenilecektir. Şekil Ek 3.1'de gösterilen TSD sönümsüz bir sistem göz önüne alınsın. Sistemin lineer olduğu, tahrik genliği  $p_0$  ve tahrik frekansı  $\Omega$  nın sabitler olduğu farz edilecektir. Hareketin eşitliği izleyen şekildedir:

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \cos \Omega t \quad (\text{Ek 3.1})$$

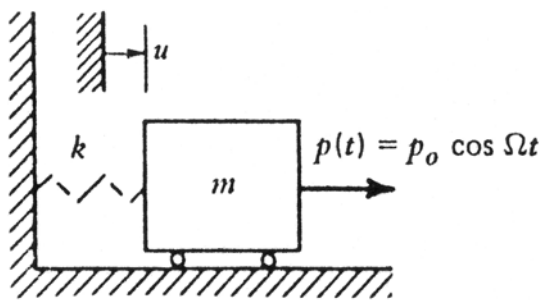
Sadece ikinci mertebeden türevlerin (Ek 3.1) eşitliğinin sol tarafında görünmesi gerçeğinden görülür ki zorlamalı hareket veya kararlı hal cevabı izleyen formda olacaktır:

$$u_p = U \cos \Omega t \quad (\text{Ek 3.2})$$

Genlik  $U$  yu belirlemek için (Ek 3.2) eşitliği (Ek 3.1) eşitliğinde yerine konursa kararlı hal genliği

$$U = \frac{p_0}{k - m\Omega^2} \quad (\text{Ek 3.3})$$

olarak elde edilir ki burada  $(k - m\Omega^2) \neq 0$  olmaktadır.



Şekil Ek 3.1 TSD sönümsüz sistemin harmonik tahriği

$$U_0 = \frac{p_0}{k} \quad (\text{Ek 3.4})$$

\* Ek 3, Craig (1981)'den alınmıştır.

olarak alınsın ki bu değer statik yer değiştirmedir. Bu durumda (Ek 3.3) eşitliği

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-r^2}, \quad r \neq 1 \quad (\text{Ek 3.5})$$

olarak yazılır ki burada

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (\text{Ek 3.6})$$

olup frekans oranı olarak isimlendirilmektedir ve

$$H(\Omega) = \frac{U}{U_0} \quad (\text{Ek 3.7})$$

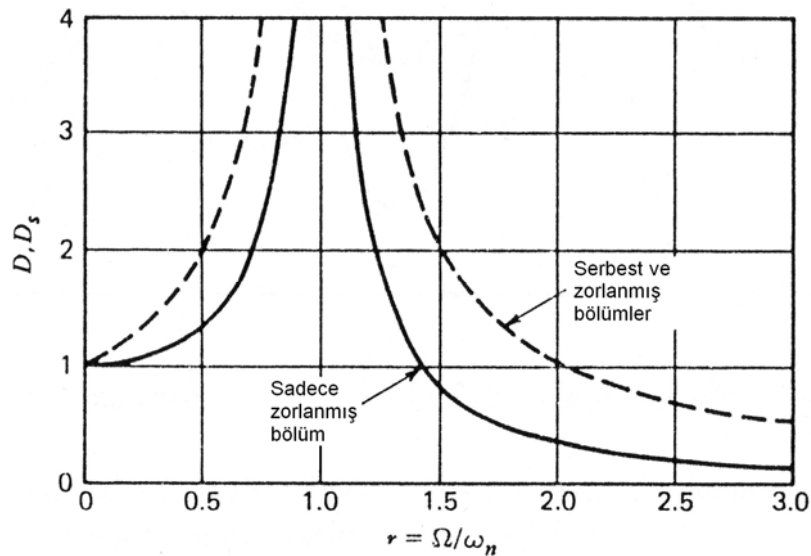
frekans cevap fonksiyonu olarak isimlendirilir. Frekans cevap fonksiyonu,  $H(\Omega)$ , kararlı hal hareketinin şiddeti ve işaretini frekans oranı  $r$  nin bir fonksiyonu olarak verir. şiddet

$$D_s = |H(\Omega)| \quad (\text{Ek 3.8})$$

olup kararlı hal büyütme faktörü veya artımı olarak isimlendirilir. Bu, şekil Ek 3.2 de çizilmiştir. (Ek 3.2) den (Ek 3.5) e kadar olan eşitlikler kararlı hal cevabını

$$u_p = \left( \frac{U_0}{1-r^2} \right) \cos \Omega t, \quad r \neq 1 \quad (\text{Ek 3.9})$$

olarak verecek şekilde birleştirilebilir.



Şekil Ek 3.2  $p(t) = p_0 \sin \Omega t$  ile tahrik edilmiş TSD sönümsüz bir sistemin dinamik büyütme faktörleri

Eğer  $r < 1$  ise cevap,  $(1 - r^2) > 0$  olduğu için tahrik ile aynı fazdadır. Eğer  $r > 1$  ise cevap, tahrik ile  $180^\circ$ lik bir faz farkına sahiptir. Yani  $u_p$  izleyen şekilde yazılabilir:

$$u_p = \left( \frac{U_0}{r^2 - 1} \right) (-\cos \Omega t) \quad (\text{Ek 3.10})$$

TSD sönümsüz bir sistemin doğal hareketinin genel formunun  $u = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$  şeklinde olduğu bilinmektedir. Buradan bu eşitlikle (Ek 3.9) eşitliğinin birleştirilmesi toplam cevabı

$$u_p = \left( \frac{U_0}{1 - r^2} \right) \cos \Omega t + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (\text{Ek 3.11})$$

olarak verir. Aşağıdaki örnek eşitlik (Ek 3.11) in kullanımını gösterecektir.

### Örnek Ek 3.1

Şekil Ek 3.1 de gösterilen sistemde  $k = 40 \text{ lb/in.}$  ve kütle  $38.6 \text{ lb}$  gelmektedir.  $p(t) = 10 \cos(10t)$  tahrik kuvveti başladığında sistem hareketsizse yani  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$  ise sonuç hareket için bir ifade belirleyiniz ve sonuç hareketinin grafiğini çiziniz.

### Çözüm

(Ek 3.11) eşitliğinden toplam cevabın izleyen şekilde olduğu görülür:

$$u_p = \frac{U_0}{1 - r^2} \cos \Omega t + A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (1)$$

(1) eşitliği, hızı verecek şekilde diferansiyellenebilir.

$$\dot{u} = \frac{-U_0 \Omega}{1 - r^2} \sin \Omega t - A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t \quad (2)$$

$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$  eşitliğinden

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{40(386)}{(38.6)}} = 20 \text{ rad/s} \quad (3)$$

Eşitlik (Ek 3.4) ten

$$U_0 = \frac{P_0}{k} = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ in.} \quad (4)$$

Eşitlik (Ek 3.7) den

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5 \quad (5)$$

Buradan,

$$\frac{U_0}{1-r^2} = \frac{0.25}{1-(0.5)^2} = \frac{0.25}{1-0.25} = \frac{0.25}{0.75} = 0.33 \text{ in.} \quad (6)$$

$A_1$  ve  $A_2$  'yi hesaplamak için başlangıç koşulları kullanılırsa

$$u(0) = 0 = \frac{U_0}{1-r^2} + A_1 \quad (7)$$

Bu yüzden,

$$A_1 = -\frac{U_0}{1-r^2} = -0.33 \text{ in.} \quad (8)$$

$$\dot{u}(0) = 0 = A_2 \omega_n \quad (9)$$

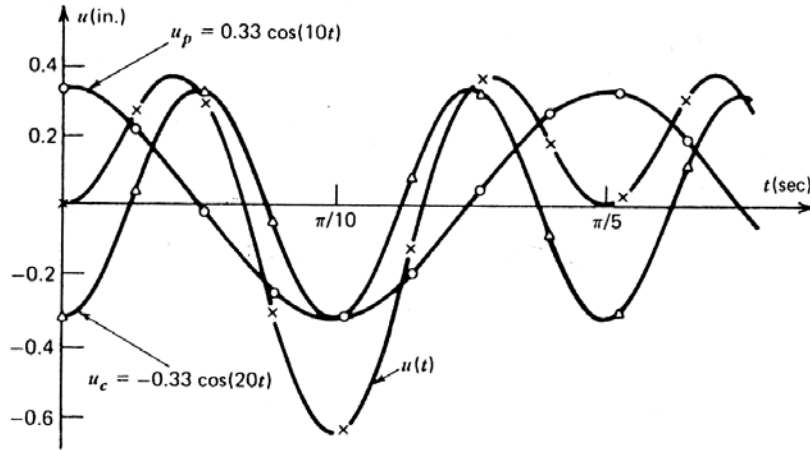
Böylece,

$$A_2 = 0 \quad (10)$$

Sonuç olarak,

$$u = 0.33 [\cos(10t) - \cos(20t)] \text{ in.} \quad (11)$$

Bu eşitlik zaman-yer değiştirme eksen takımında izleyen şekilde çizilmiştir.



Örnek Ek 3.1 in cevaplarının çiziminden izleyen sonuçlar gözlenir:

- Kararlı hal cevabı tahrik ile aynı frekansa sahiptir ve  $r < 1$  olduğundan tahrik ile aynı fazdadır.
- Zorlama hareketi ve doğal hareket dönüşümlü olarak birbirini güçlendirir ve zayıflatır ki bu durum “vurma olayı (beat phenomenon)” olarak adlandırılır. Böylece toplam cevap basit harmonik hareket değildir.
- Maksimum toplam cevap ( $u = -0.66$  in.  $t = \pi/10$  sn. anında) şiddet olarak maksimum kararlı hal cevabından ( $u = 0.33$  in.  $t = 0$  sn. anında) daha büyüktür.

Toplam dinamik büyütme çarpanı

$$D = \max \frac{|u(t)|}{U_0} \quad (\text{Ek 3.12})$$

olarak belirlenir. Yukarıdaki örnekte bunun değeri  $0.66/0.33 = 2$  dir. Şekil Ek 3.2, dinamik büyütme faktörü,  $D$ , ve kararlı hal büyütme faktörü,  $D_s$ , için frekans oranı  $r$ 'nin bir fonksiyonu olarak  $p_0 \sin \Omega t$  harmonik kuvveti ile tahrik edilen ve başlangıçta hareketsiz olan sönümsüz bir sistem için çizilmiştir.

(Ek 3.9) ve (Ek 3.11) eşitlikleri  $r = 1$  'de geçerli değildir.  $r = 1$  veya  $\Omega = \omega_n$  durumu rezonans olarak isimlendirilir ve Şekil Ek 3.2 den aşıkardır ki rezonansa yakın tahrik frekanslarında cevap çok büyük olur. Harmonik tahrike yapıların cevabının incelenmesinin önemi, çoğunlukla büyük hareket genliklerinin oluştuğu rezonans koşullarından kaçınmanın gerekliliğinden ortaya çıkar.  $r = 1$  olduğunda (Ek 3.2) eşitliğinin kabul edilen izleyen çözümle değiştirilmesi gerekir:

$$u_p = Ct \sin \Omega t, \quad \Omega = \omega_n \quad (\text{Ek 3.13})$$

Daha sonra (Ek 3.13) eşitliğinin (Ek 3.1) eşitliğinde yerine konmasıyla

$$C = \frac{P_0}{2m\omega_n} \quad (\text{Ek 3.14})$$

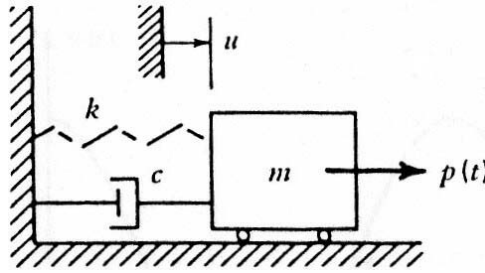
veya

$$u_p = \frac{1}{2}(U_0\omega_n t) \sin \omega_n t \quad (\text{Ek 3.15})$$

elde edilir. Bu, aşağıda Şekil Ek 3.3 te çizilmiştir. Not edilmelidir ki, Şekil Ek 3.2  $r=1$  de sonsuz genlik vermesine karşın Şekil Ek 3.3 gösterir ki genlik zamanın lineer bir fonksiyonu olarak gelişir.

### Ek 3.2 Viskoz Sönümlü Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Tahrike Cevabı

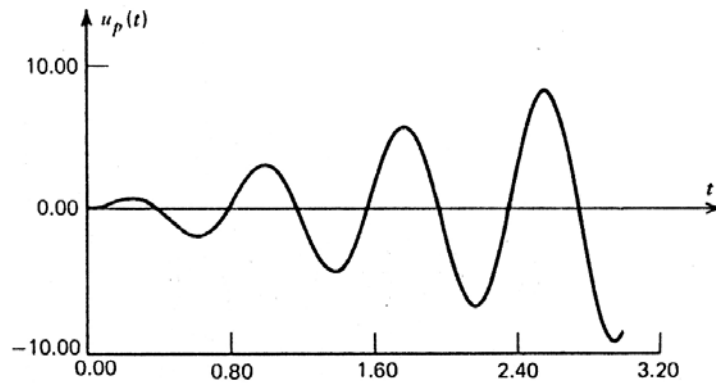
Lineer bir TSD sistemin klasik analitik modeli yay – kütle – sönüm mekanizması olup Şekil Ek 3.3 te verilmiştir.



Şekil Ek 3.3 TSD sisteminin prototipi

Bu sistem,  $p_0 \cos \Omega t$  tahriğine maruz kaldığında, onun hareket eşitliği izleyen şekildedir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 \cos \Omega t \quad (\text{Ek 3.16})$$



Şekil Ek 3.4 Rezonans durumunda ( $\Omega = \omega_n$ )  $u_p(t)$ 'nin cevabı

Eşitlik (Ek 3.16) daki sönüm teriminin varlığı yüzünden, kararlı hal cevabı tahrik ile aynı fazda olmayacaktır (veya  $180^\circ$  faz farkı olacaktır), fakat

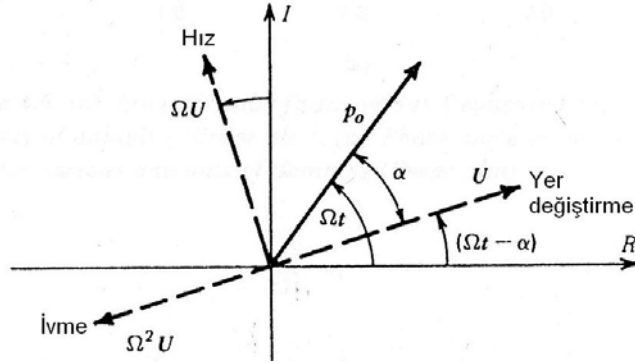
$$u_p = U \cos(\Omega t - \alpha) \quad (\text{Ek 3.17})$$

ile verilecektir. Burada  $U$  kararlı hal genliği ve  $\alpha$  kararlı hal cevabının tahriğe göre göreceli olan faz açısıdır.

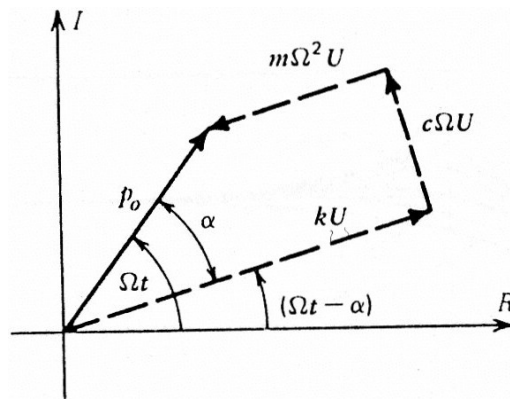
$U$  ve  $\alpha$  nın belirlenmesi dönen vektörlerin kullanımı ile kolaylaştırılmıştır. Eşitlik (Ek 3.16) da ihtiyaç duyulan hız ve ivme izleyen şekilde verilir:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_p &= -\Omega U \sin(\Omega t - \alpha) \\ \ddot{u}_p &= -\Omega^2 U \cos(\Omega t - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 3.18})$$

Şekil Ek 3.5 dönen vektörlerin ilişkisini öyle gösterir ki onların gerçel eksen üzerindeki izdüşümleri,  $p_0 \cos \Omega t$  ve (Ek 3.17) ve (Ek 3.18) eşitliklerindeki yer değiştirme, hız ve ivme ifadeleridir.



Şekil Ek 3.5  $p, u, \dot{u}$  ve  $\ddot{u}$ 'yu temsil eden dönen vektörler



Şekil Ek 3.6 Kuvvet vektör poligonu

(Ek 3.17) ve (Ek 3.18) eşitlikleri (Ek 3.16) da yerine konduğunda izleyen ifade elde edilir:

$$-m\Omega^2 U \cos(\Omega t - \alpha) - c\Omega U \sin(\Omega t - \alpha) + kU \cos(\Omega t - \alpha) = p_0 \cos \Omega t \quad (\text{Ek 3.19})$$

Bu eşitlik amacımıza uygun olarak kuvvet vektörü poligonu ile temsil edilir. Çünkü eşitlik (Ek 3.19) daki her bir terim Şekil Ek 3.3 deki kütle üzerine etkiyen bir kuvveti temsil eder. Şekil Ek 3.6,  $m\Omega^2 U < kU$  yani  $\Omega < \omega_n$  durumu için bir kuvvet vektörü poligonunu gösterir. Şekil Ek 3.6 daki kesikli çizgili vektörlerin yatay (gerçel) eksen üzerindeki izdüşümleri eşitlik (Ek 3.19) un solundaki terimlerdir; sürekli çizgi ile gösterilen vektörün gerçel eksen üzerindeki izdüşümü eşitlik (Ek 3.19) un sağındaki terimi verir. Şekil Ek 3.6 dan kolaylıkla görülür ki

$$p_0^2 = (kU - m\Omega^2 U)^2 + (c\Omega U)^2 \quad (\text{Ek 3.20})$$

ve

$$\tan \alpha = \frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} \quad (\text{Ek 3.21})$$

Bunlar

$$D_s = \frac{U}{U_0} = \frac{1}{\left[ (1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{Ek 3.22})$$

ve

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (\text{Ek 3.23})$$

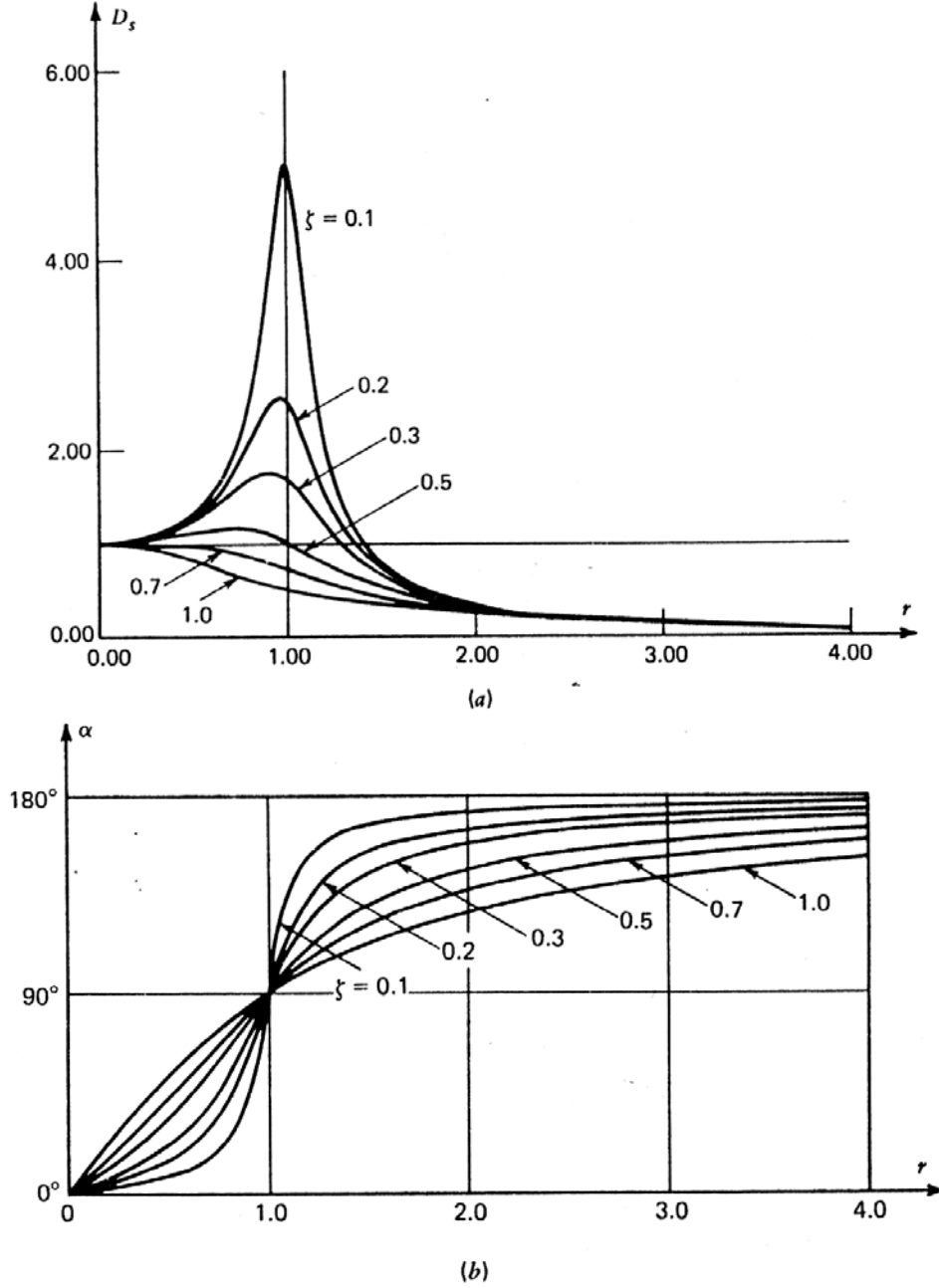
olarak yazılabilir. Burada

$$\zeta = \text{viskoz sönüm oranı} = \frac{c}{c_{cr}} \rightarrow c_{cr} = \text{kritik sönüm kats.} = 2m\omega_n = 2\frac{k}{\omega_n} = 2\sqrt{km}$$

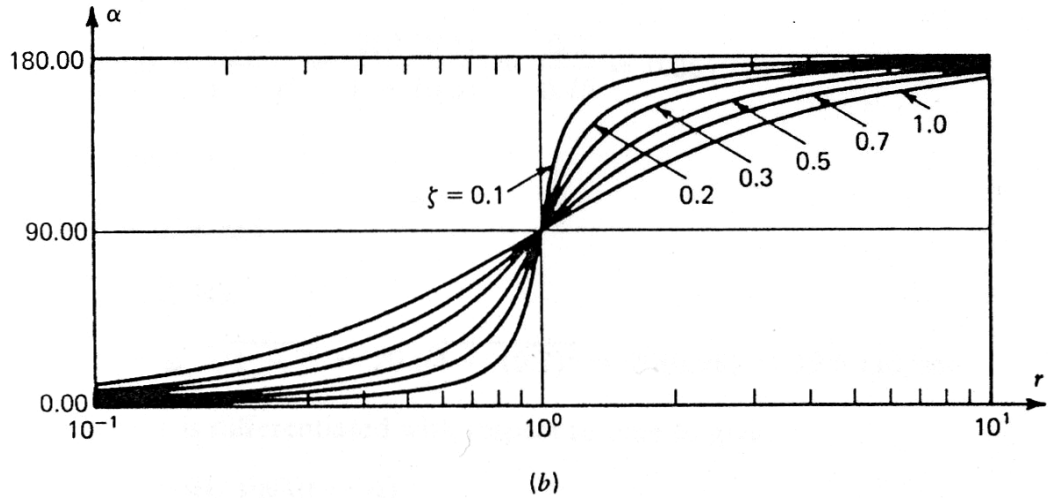
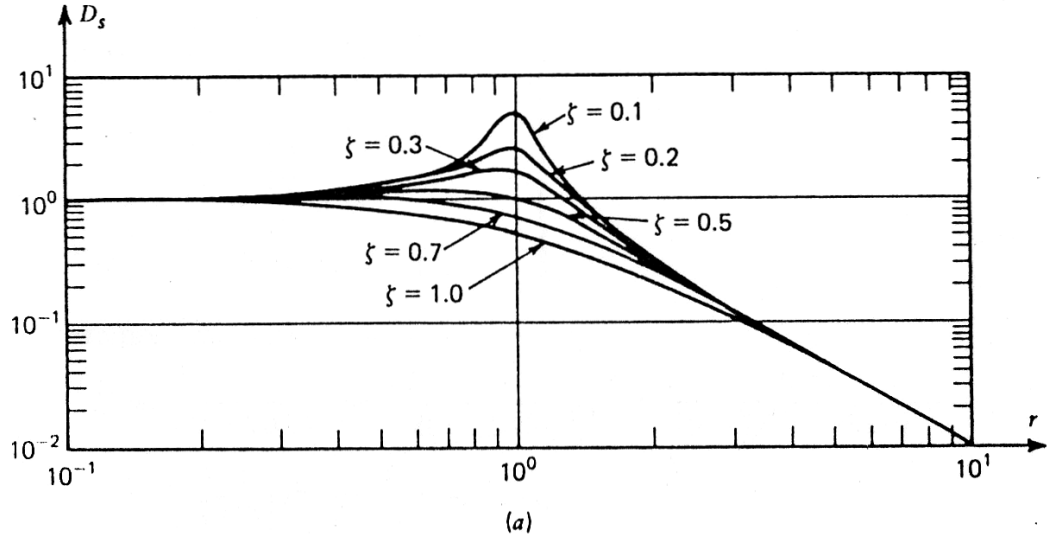
$$r = \text{frekanslar oranı} = \frac{\Omega}{\omega_n} \rightarrow \omega_n = \text{sönümsüz dairesel doğal frekans}$$

$$U_0 = \frac{p_0}{k} \text{ dır.}$$

Kararlı hal büyütme çarpanı,  $D_s$ , ve faz açısı,  $\alpha$ , Şekil Ek 3.7 de çizilmiştir. Genlik ve faz bilgisi beraberce sistemin frekans cevabı olarak isimlendirilir. Şekil Ek 3.7 deki çizimler lineer çözümler olarak isimlendirilir. Çünkü hem yatay hem de dikey eksenler lineer ölçeklere sahiptirler.



Şekil Ek 3.7 (a) Çeşitli sönüm miktarları için büyütme çarpanı – frekans oranı grafiği  
(b) Çeşitli sönüm miktarları için faz açısı – frekans oranı grafiği



Şekil Ek 3.8 (a) Çeşitli sönüm çarpanları için büyütme çarpanı – frekans oranı grafiği (logaritmik) (b) Çeşitli sönüm çarpanları için faz açısı – frekans oranı grafiği (logaritmik)

(Ek 3.17), (Ek 3.20) ve (Ek 3.21) eşitlikleri ve Şekil Ek 3.7 de kararlı hal cevabının izleyen belli başlı özellikleri incelenebilir:

- (Ek 3.17) eşitliği ile tariflenen hareket harmoniktir ve tahrik ile aynı frekanstadır.
- Kararlı hal cevabının genliği, tahriğin frekans ve genliğinin bir fonksiyonu olmanın yanında sistemin doğal frekansı ve sönüm çarpanının da bir fonksiyonudur. Kararlı hal büyütme çarpanı birim değerden dikkate değer derecede büyük veya küçük olabilir.
- Kararlı hal cevabı  $u_p = U \cos(\Omega t - \alpha)$ , ve tahrik  $p = p_0 \cos \Omega t$ , aynı fazda değildirler. Yani onlar maksimum değerlerine aynı zamanda ulaşmazlar. Cevap, hareketin  $\alpha$  faz açısı kadar gerisindedir. Bu  $\alpha/\Omega$  zamanı kadar geride olmaya tekabül eder.
- Rezonans durumunda, yani  $r = 1$  de genlik sadece sönüm kuvvetiyle sınırlandırılır ve

$$(D_s)_{r=1} = \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{Ek 3.24})$$

Ayrıca rezonans durumunda cevap, tahriği  $90^\circ$  geriden takip eder. Yani  $\alpha = 90^\circ$  dir.

Rezonans yakınında dinamik büyütme faktörü çok büyük olabileceğinden ve tahrik geniş bir frekans aralığını kaplayabileceğinden Şekil Ek 3.7 nin eğrileri Şekil Ek 3.8 de gösterildiği gibi sıklıkla logaritmik ölçek ile çizilir. Bu Bode Çizimi olarak isimlendirilir.

Toplam cevap  $u = u_p + u_c$  ile verilir ki bu (Ek 3.17), (Ek 3.22), (Ek 3.23) ve

$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$  eşitliği kullanılarak

$$u = \frac{U_0}{\left[ (1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \cos(\Omega t - \alpha) + e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (\text{Ek 3.25})$$

şeklinde yazılır. Burada  $\alpha$ , (Ek 3.23) ile verilmiştir ve  $A_1$  ve  $A_2$  başlangıç koşullarından belirlenecek sabitlerdir. Eşitlik (Ek 3.25) teki doğal hareket zamanla yok olacağından bu geçici başlangıç titreşimi olarak isimlendirilir.

### Örnek Ek 3.2

Eğer Örnek Ek 3.1 deki sisteme  $\zeta = 0.2$  ye eşdeğer bir sönüm eklenirse ve aynı tahrik ve başlangıç koşulları mevcutsa sonuç hareket için bir ifade belirleyip hareketin çizimini yapınız.

### Çözüm

Toplam cevap fonksiyonu (Ek 3.25) eşitliğinde verilmiştir,

$$u = U \cos(\Omega t - \alpha) + e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t) \quad (1)$$

Burada

$$U = \frac{U_0}{\left[ (1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (2)$$

$\omega_n$ ,  $U_0$  ve  $r$  Örnek Ek 3.1 de bulunabilir.

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_n &= \left( \frac{k}{m} \right)^{1/2} = 20 \text{ rad/s} \\
 U_0 &= \frac{p_0}{k} = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ in.} \\
 r &= \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5 \\
 \zeta \omega_n &= (0.2)(20) = 4 \text{ rad/s}
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Bu yüzden, (2) ve (3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{0.25}{\left\{ \left[ 1 - (0.5)^2 \right]^2 + \left[ 2(0.2)(0.5) \right]^2 \right\}^{1/2}} = \frac{0.25}{\left[ (0.75)^2 + (0.2)^2 \right]^{1/2}} \\
 &= \frac{0.25}{\sqrt{0.6025}} = \frac{0.25}{0.776} = 0.32 \text{ in.}
 \end{aligned} \quad (4)$$

(Ek 3.23) eşitliğinden

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2} = \frac{2(0.2)(0.5)}{1-(0.5)^2} = \frac{0.2}{0.75} = 0.267 \quad (5)$$

Buradan,

$$\alpha = 0.26 \text{ rad.} \quad (6)$$

elde edilir. Sönümsüz dairesel doğal frekans eşitliğinden

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 20 \sqrt{1 - (0.2)^2} = 20(0.98) = 19.6 \text{ rad/sn} \quad (7)$$

(1) eşitliğinin zamana göre türevi alınırsa

$$\dot{u} = -\Omega U \sin(\Omega t - \alpha) + e^{-\zeta \omega_n t} \left[ (A_2 \omega_d - A_1 \zeta \omega_n) \cos \omega_d t - (A_1 \omega_d + A_2 \zeta \omega_n) \sin \omega_d t \right] \quad (8)$$

elde edilir.

(1) ve (8) eşitlikleri  $t = 0$  anında değerlendirilip başlangıç koşullarına eşitlenirse

$$u(0) = 0 = 0.32 \cos(-0.26) + A_1 \quad (9)$$

Buradan,

$$A_1 = -0.32 \cos(-0.26) = -0.32(0.966) = -0.31 \text{ in.} \quad (10)$$

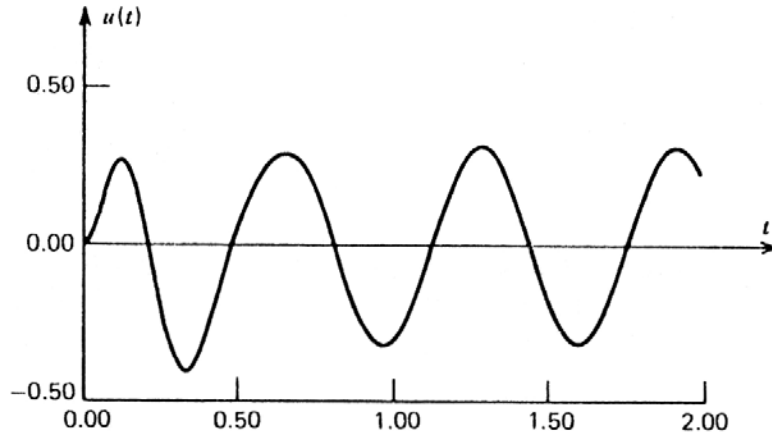
$$\dot{u}(0) = 0 = -(0.32)(10)\sin(-0.26) + [A_2(19.6) - (-0.31)(0.2)(20)] \quad (11)$$

$$A_2 = -0.11 \text{ in.} \quad (12)$$

Buradan (1), (4), (6), (10), ve (12) eşitlikleri birleştirilerek

$$u = 0.32 \cos(10t - 0.26) - e^{-4t} [0.31 \cos(19.6t) + 0.11 \sin(19.6t)] \text{ in.} \quad (13)$$

elde edilir.



Sönüm etkisini görmek için yukarıdaki sonuçları Örnek Ek 3.1 deki sonuçlarla karşılaştırabiliriz.

### Ek 3.3 Kompleks Frekans Cevabı

Önceki kısımda  $p_0 \cos \Omega t$  tahriğine karşı gelen kararlı hal cevabının genliği,  $U$ , ve faz açısı,  $\alpha$ , dönen vektörlerin (Ek 3.19) eşitliğindeki terimleri elde etmek için gerçel eksen üzerine izdüşümü vasıtasıyla belirlenmişti. Kompleks düzlemdeki vektörlerin kullanımı bu kısımda daha sonra yine ele alınacaktır. Çünkü bu durum birçok frekans cevabı hesaplarını büyük oranda basitleştirir ve ayrıca deneysel sonuçları incelemede faydalı bir yol sağlar.

Şekil Ek 3.3 deki TSD sistemin kararlı hal cevabı yeniden göz önüne alınsın. Alt indis R (gerçel eksen üzerindeki izdüşüm için)  $\cos \Omega t$  tahriği yüzünden ortaya çıkan kararlı hal veya zorlanmış titreşimi göstermekte kullanılsın. Böylece,

$$m\ddot{u}_R + c\dot{u}_R + ku_R = p_0 \cos \Omega t \quad (\text{Ek 3.26})$$

ve

$$u_R = U \cos(\Omega t - \alpha) \quad (\text{Ek 3.27})$$

Bunun gibi

$$m\ddot{u}_I + c\dot{u}_I + ku_I = p_0 \sin \Omega t \quad (\text{Ek 3.28})$$

ve

$$u_I = U \sin(\Omega t - \alpha) \quad (\text{Ek 3.29})$$

karşı gelen  $\sin \Omega t$  tahriği için hareket eşitliği ve kararlı hal çözümü olsun. Şimdi eğer eşitlik (Ek 3.28)  $i = \sqrt{-1}$  ile çarpılıp eşitlik (Ek 3.26) ya ilave edilirse ve Euler formülü ( $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ ) kullanılırsa

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = \bar{p} = p_0 e^{i\Omega t} \quad (\text{Ek 3.30})$$

elde edilir. Buradaki üst çizgi kompleks düzlemdeki bir vektörü gösterir. Eşitlik (Ek 3.30) hareketin kompleks denklemi olarak isimlendirilir ve

$$\bar{u} = u_R + iu_I \quad (\text{Ek 3.31})$$

vektörü kompleks cevap olarak bilinir. Anlaşılmaktadır ki gerçek kararlı hal hareketi  $\bar{u}$  nin ya gerçel ya da sanal kısmı ile tahriğin  $\cos \Omega t$  veya  $\sin \Omega t$  tipinde olmasına bağlı olarak verilecektir.

Eşitlik (Ek 3.30) un kararlı hal çözümünün

$$\bar{u} = \bar{U} e^{i\Omega t} \quad (\text{Ek 3.32})$$

formuna sahip olduğu farz edilecektir. Burada  $\bar{U}$  kompleks genliktir ki ayrıca

$$\bar{U} = U e^{-i\alpha} \quad (\text{Ek 3.33})$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $U$  ve  $\alpha$ , (Ek 3.17) eşitliğinde tanıtılan genlik ve faz açısının aynısıdır.

(Ek 3.32) eşitliğinin (Ek 3.30) da yerine konmasıyla doğrudan

$$\bar{U} = \frac{P_0}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \quad (\text{Ek 3.34})$$

elde edilir. Bu

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{\bar{U}}{U_0} = \frac{1}{(1-r^2) + i(2\zeta r)} \quad (\text{Ek 3.35})$$

formunda yazılabilir. Burada  $\bar{H}(\Omega)$  kompleks frekans cevabı olarak isimlendirilir.

Eşitlik (Ek 3.33) ve (Ek 3.35) ten kararlı hal cevabının genlik ve fazını belirlemek için sadece eşitlik (Ek 3.35) in sağ tarafındaki kompleks ifadenin genlik ve fazının bulunmasına ihtiyaç vardır.

Şimdi kompleks sayılar teorisinden birkaç sonuç aşağıda verilecektir:

- Dikdörtgen ve polar temsil: Eğer bir kompleks sayı (vektör) dikdörtgen koordinatlardaki formuyla

$$\bar{A} = A_R + iA_I \quad (\text{Ek 3.36})$$

ile ve polar formda

$$\bar{A} = Ae^{i\alpha} \quad (\text{Ek 3.37})$$

ile gösterilirse bu durumda

$$A \equiv |\bar{A}| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \quad (\text{Ek 3.38})$$

ve

$$\tan \alpha = \frac{A_I}{A_R} \quad (\text{Ek 3.39})$$

- İki kompleks sayının bölümü: Eğer  $\bar{A}$  ve  $\bar{B}$  iki kompleks sayıysa bu durumda

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \left( \frac{Be^{i\beta}}{Ae^{i\alpha}} \right) = \left( \frac{B}{A} \right) e^{i(\beta-\alpha)} \quad (\text{Ek 3.40})$$

(Ek 3.35) eşitliğindeki paydayı polar formda ifade etmek için (Ek 3.36) - (Ek 3.39) eşitlikleri kullanılarak ve (Ek 3.35) eşitliğindeki bölümün genlik ve fazını elde etmek için (Ek 3.40) eşitliği kullanılarak

$$|\bar{H}(\Omega)| = \frac{U}{U_0} = \frac{1}{\left[ (1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{Ek 3.41})$$

ve

$$\tan \alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \quad (\text{Ek 3.42})$$

elde edilir. Bunlar (Ek 3.22) ve (Ek 3.23) eşitliklerinde elde edilenlerle aynı sonuçlardır. Böylece kompleks frekans cevabı  $\bar{H}(\Omega)$  hem kararlı hal cevabının şiddetini, hem de faz açısını kapsar ve (Ek 3.36) - (Ek 3.40) eşitlikleri bu şiddet ve faz bilgisini çıkarabilmek için gayet kolaylıkla kullanılabilir.

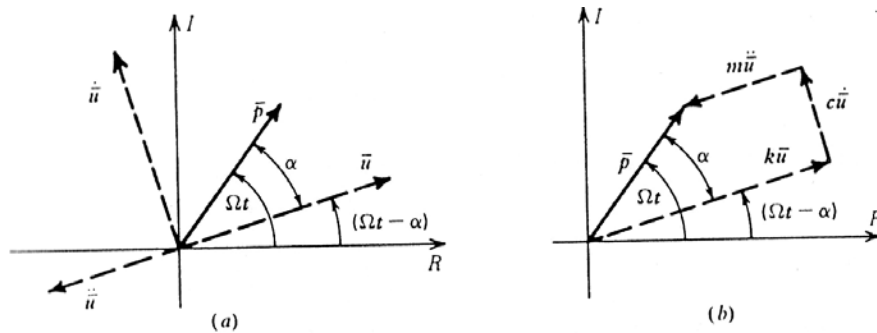
Özetle, kararlı hal cevabını belirlemede kompleks vektörlerin kullanımında kullanılan dört adım aşağıda verilmiştir:

- 1) Kompleks tahrik ve kompleks cevap açısından diferansiyel denklem yazılır, eşitlik (Ek 3.30)
- 2) Eşitlik (Ek 3.32) de olduğu gibi kompleks genliği  $\bar{U}$  olan bir çözüm olduğu varsayılır.
- 3) Kompleks frekans cevabı  $\bar{H}(\Omega)$  için bir ifade elde etmek amacıyla varsayılan cevap diferansiyel eşitlik içinde değiştirilir.
- 4) Kompleks frekans cevabının genlik ve fazını elde etmek için (Ek 3.36) - (Ek 3.40) eşitlikleri kullanılır.

Viskoz sönümlü TSD sistemlerin harmonik tahriklere cevabı başlıklı bölümde kullanılan kuvvet vektör poligonu (Ek 3.30) eşitliğindeki kompleks diferansiyel eşitliğiyle şimdi doğrudan ilişkilendirilebilir. (Ek 3.32) eşitliğinin türevi alınarak

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= i\Omega \bar{U} e^{i\Omega t} = i\Omega \bar{u} \\ \ddot{\bar{u}} &= (i\Omega)^2 \bar{U} e^{i\Omega t} = -\Omega^2 \bar{u} \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 3.43})$$

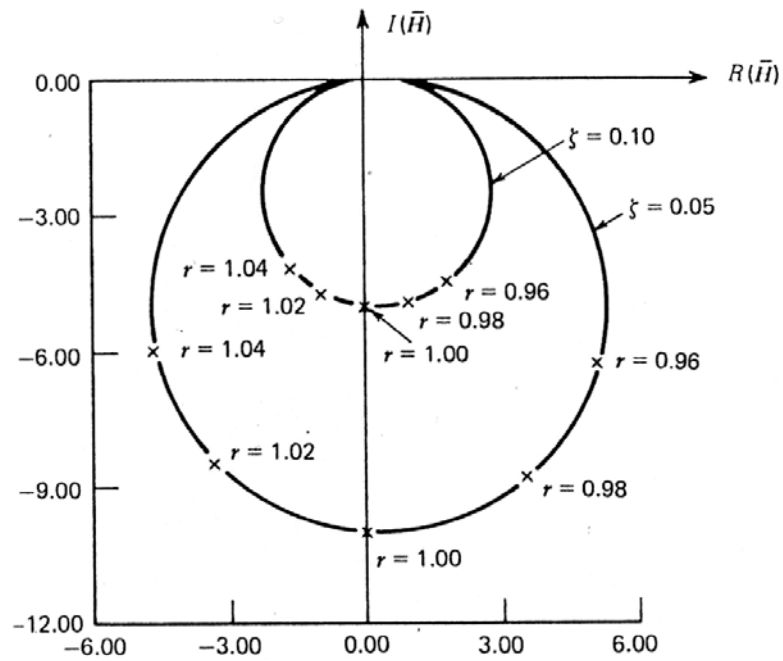
Şekil Ek 3.5 ve 3.6 böylece kompleks vektörler açısından Şekil Ek 3.9 da görüldüğü gibi tekrar şekillendirilebilir ve Şekil Ek 3.9b deki kuvvet vektör poligonu doğrudan (Ek 3.30) eşitliğini temsil eder.



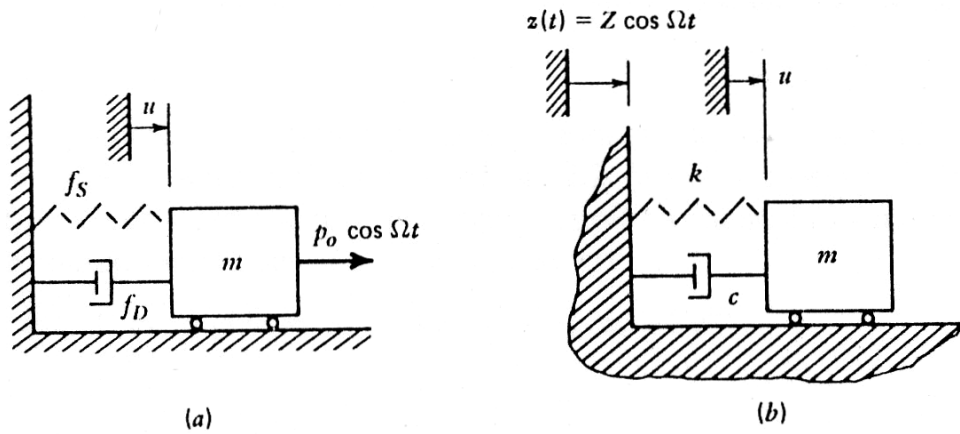
Şekil Ek 3.9 Dönen vektörler için kompleks vektör notasyonu

(Ek 3.22) ve (Ek 3.23) eşitliklerinde verilen sonuçlar genlik ve faz çizimleri olarak Şekil Ek 3.7 de çizilmiştir. Genlik ve faz bilgileri (Ek 3.35) eşitliğinin sonuçlarının kompleks düzlemde çizilmesiyle birleştirilebilir. Bu sonuç çizimi vektör cevap çizimi olarak isimlendirilir. Bu çizim bazı yazarlarca Nyquist çizimi veya Argang çizimi olarak da adlandırılır. Şekil Ek 3.10,  $\zeta = 0.1$  ve  $\zeta = 0.05$  için vektör cevap çizimini gösterir.

Vektör cevap diyagramının, yapı dinamiğindeki deneysel sonuçları incelemeye çok yararlı olduğu daha sonra görülecektir. Bu ayrıca  $R(\bar{H})$ - Frekans ve  $I(\bar{H})$ - Frekans grafiklerini çizmek için de yararlı olacaktır.



Şekil Ek 3.10 Visköz sönümlü bir sistemin kararlı hal titreşimi için vektör cevap titreşimi

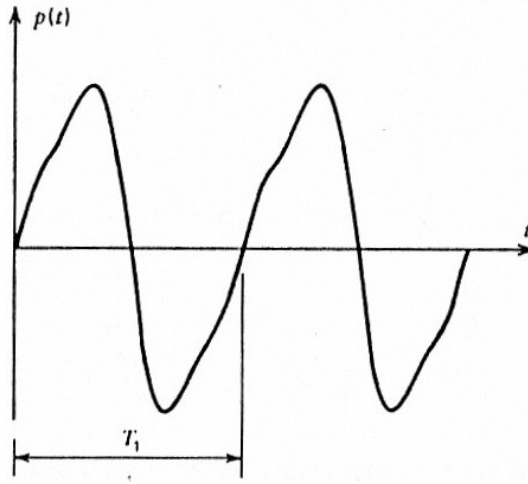


Şekil Ek 3.11 Visköz sönümlü bir sistemin kararlı hal titreşimi için vektör cevap titreşimi

## Ek 4 Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerin Periyodik Tahrike Cevabı\*

### Ek 4.1 Periyodik Tahrike Cevap – Gerçel Fourier Serileri

Yapılar üzerine etki eden kuvvetler sıklıkla periyodiktir. Örneğin, çeşitli yol yüzeylerinde sabit bir hızla hareket eden bir otomobile etki eden kuvvetler periyodik olarak dikkate alınır. Zamanın bir fonksiyonu olan ve  $T_1$  periyoduna sahip olan  $p(t)$ , Fourier serileri aracılığıyla genişletilerek harmonik bileşenlerine ayrılabilir. Bu bölümde gerçel Fourier serileri dikkate alınacaktır. Bir sonraki bölümde ise kompleks Fourier serileri tanıtılacaktır. Kompleks form Ek 3 deki kompleks frekans cevap fonksiyonu ile birleştirildiğinde sönümlenmiş sistemleri çalışmak için çok faydalıdır.



Şekil Ek 4.1  $T_1$  periyotlu periyodik bir fonksiyon

Şekil Ek 4.1  $T_1$  periyotlu periyodik bir fonksiyonu gösterir ki bu,

$$p(t+T_1) = p(t) \quad (\text{Ek 4.1})$$

$p(t)$  Fourier serilerine genişletilmek suretiyle şekilde görüldüğü gibi harmonik bileşenlerine ayrılır:

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega_1 t) \quad (\text{Ek 4.2})$$

Burada

---

\* Ek 4, Craig (1981)'den alınmıştır.

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (\text{Ek 4.3})$$

temel frekans,  $a_n$  ve  $b_n$  n. harmoniğin katsayılarıdır.  $a_0$ ,  $a_n$  ve  $b_n$   $p(t)$  ile aşağıdaki eşitlikler ile bağlantılıdır:

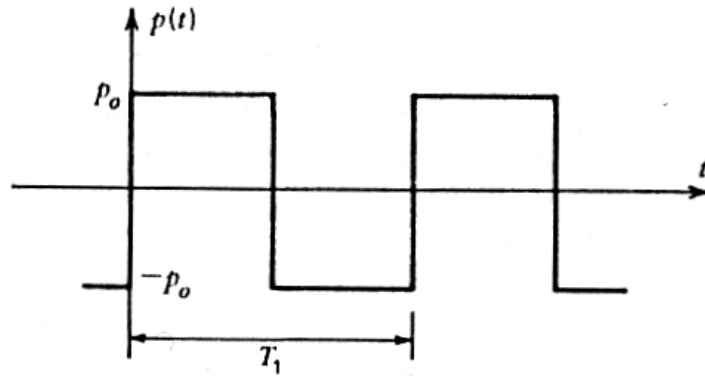
$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) dt = p(t) \text{ nin ortalama değeri} \\ a_n &= \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, n \neq 0 \\ b_n &= \frac{2}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 4.4})$$

Burada  $t$  keyfi bir zamandır.

Her ne kadar teorik olarak  $p(t)$ 'nin Fourier serileri ile temsil edilmesi sonsuz sayıda terim gerektirse de pratik olarak  $p(t)$  genellikle nispeten az sayıda terim ile yeterli hassasiyet ile yaklaşık sonuç elde edilir. Örnek Ek 4.1 kare bir dalganın Fourier serileri ile gösterimini örneklemektedir.

### Örnek Ek 4.1

- 1) Şekilde gösterilen kare dalganın Fourier serileri ile temsilinin katsayıları için ifadeleri belirleyin.  $p(t)$ 'nin Fourier serileri ile gösterimini yazın.
- 2) Sırasıyla bir, iki ve üç terimli Fourier serilerini kullanarak tepesi kesilmiş serileri çiziniz.



### Çözüm:

- 1) (Ek 4.4) eşitliğindeki integraller  $-T_1/2 \leq t \leq T_1/2$  periyotları arasında değerlendirilirse izleyen şekilde yazılabilirler:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) dt \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) \cos(n\Omega_1 t) dt \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (3)$$

Burada

$$p(t) = \begin{cases} -p_0 & -\frac{T_1}{2} < t < 0 \\ p_0 & 0 < t < \frac{T_1}{2} \end{cases} \quad (4)$$

(4) eşitliğini (1) ve (2) eşitliklerinde yerine koyarsak

$$a_0 = a_n = 0 \quad (5)$$

elde ederiz.

$a_0$  ve  $a_n$  Fourier serilerindeki çift terimlerin katsayıları iken  $p(t)$ 'nin,  $t$ 'nin bir tek fonksiyonu olması gerçeğinden; ki bu  $p(t) = -p(-t)$ ,

$$b_n = \frac{4p_0}{T_1} \int_0^{T_1/2} \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (6)$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle

$$b_n = \frac{4p_0}{T_1} \left( \frac{-1}{n\Omega_1} \right) \cos(n\Omega_1 t) \Big|_0^{T_1/2} \quad (7)$$

olur. Fakat

$$\Omega_1 T_1 = 2\pi \quad (8)$$

bu yüzden

$$b_n = \frac{-2p_0}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \quad (9)$$

veya

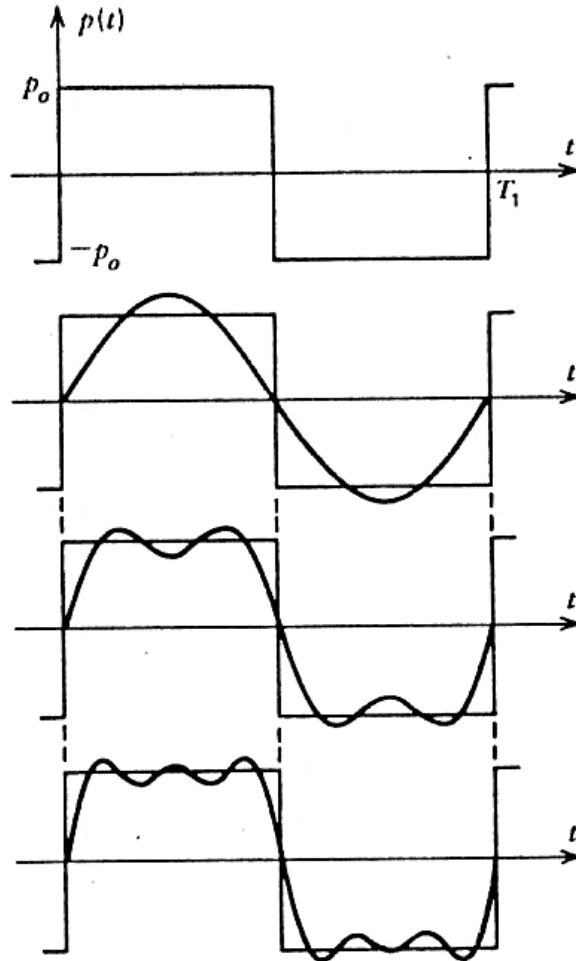
$$b_n = \frac{4p_0}{n\pi} \quad n=1,3,5,\dots \quad (10)$$

Kare dalganın Fourier serisi ile temsili böylece

$$p(t) = \frac{4p_0}{n\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \left( \frac{1}{n} \right) \sin(n\Omega_1 t) \quad (11)$$

olur.

- 2) Aşağıdaki çizimler kare dalganın Fourier serileriyle gösteriminde sıfır olmayan ilk üç teriminin katkısını göstermektedir.

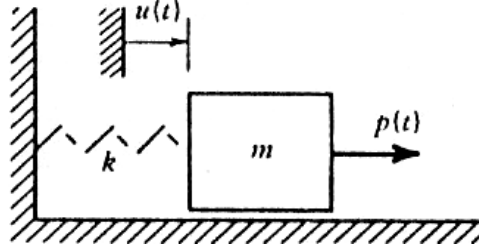


Ek 3 de TSD sistemlerin harmonik tahrike cevabını ve periyodik bir fonksiyonun harmonik bileşenleri cinsinden nasıl temsil edileceğini belirledikten sonra şimdi TSD bir sistemin periyodik tahrike cevabını belirleyebiliriz. Örnek Ek 4.2 de sönümsüz TSD bir sistem Örnek

Ek 4.1 deki kare dalgaya maruz bırakılmıştır.

### Örnek Ek 4.2

Aşağıdaki sönümsüz TSD sistem Örnek Ek 4.1 de gösterildiği gibi bir  $p(t)$  kare dalga tahrikine maruz bırakılmıştır.  $\omega_n = 6\Omega_1$  ise sistemin kararlı hal cevabını belirleyiniz.



### Çözüm

(Ek 3.9) eşitliğinden sönümsüz TSD sistemin  $p_0 \cos \Omega t$  harmonik tahrikine olan kararlı hal cevabı

$$u = \left( \frac{p_0/k}{1-r^2} \right) \cos \Omega t \quad (1)$$

$$\text{olur. Burada } r = \Omega/\omega_n = \Omega\sqrt{m/k} \text{ dır.} \quad (2)$$

Örnek Ek 4.1 den  $p(t)$ 'yi

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin(n\Omega_1 t) \quad (3)$$

formunda yazabiliriz. Burada

$$P_n = \begin{cases} \frac{4p_0}{n\pi} & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases} \quad (4)$$

Bu yüzden, kararlı hal cevabının genel ifadesi aşağıdaki formda olur:

$$U_n = \frac{P_n}{k(1-r_n^2)} \quad (5)$$

Burada

$$r_n = \frac{n\Omega_1}{\omega_n} \quad (6)$$

olur. Buradan, kararlı hal cevabı

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin(n\Omega_1 t) \quad (7)$$

olur. Burada

$$U_n = \frac{4p_0}{nk\pi \left[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2\right]}, \quad n = \text{tek} \quad (8)$$

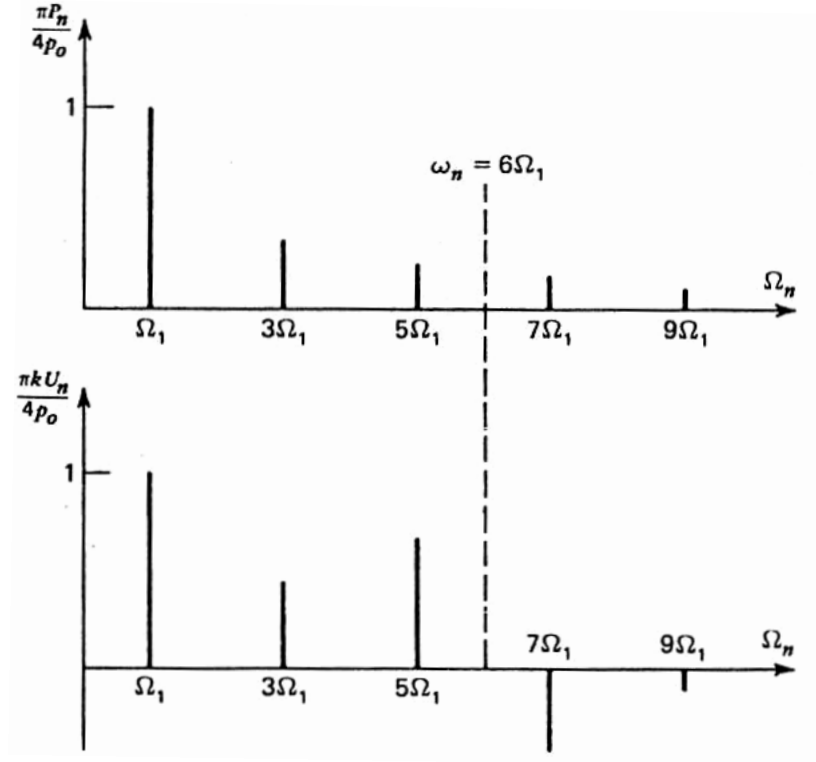
veya

$$u = \frac{4p_0}{k\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\Omega_1 t)}{n \left[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2\right]} \quad (9)$$

bulunur ki bu problem için  $\Omega_1/\omega_n = \frac{1}{6}$ .

---

Periyodik fonksiyonları onların spektrumları cinsinden göstermek çok uygundur ki bu her harmonik bileşenin frekansa göre genliklerinin çizilmesiyle yapılır. Örnek 2.1 ve 2.2'deki  $p(t)$  ve  $u(t)$ 'nin spektrumları Şekil 2.2'de çizilmiştir. Örnek 2.2'deki 4 ve 8 eşitliklerinden,



Şekil Ek 4.2 Örnek Ek 4.2 ye göre tahrik ve cevap spektrumları

$$\frac{P_n}{P_0} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases} \quad (\text{Ek 4.5})$$

$$\frac{U_n}{p_0/k} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi [1 - (n/6)^2]} & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases} \quad (\text{Ek 4.6})$$

ve

$$\Omega_n = n\Omega_1 \quad (\text{Ek 4.7})$$

Özel oran  $\Omega_1/\omega_n$  için tahrikin bazı Fourier bileşenleri rezonans frekansının üstündeyken bazılarının altında olduğuna dikkat çekilmelidir. Bazı  $n$  değerleri için eğer  $n\Omega_1$   $\omega_n$ 'e yakınsa cevap çok büyük Fourier bileşenleri içerebilir.

#### Ek 4.2 Periyodik Tahriğe Cevap – Kompleks Fourier Serileri

Kompleks frekans cevap fonksiyonu  $\bar{H}(\Omega)$ , viskoz sönümlü bir sistemin harmonik tahriğe cevabının uygun bir temsili olarak Ek 3 de kompleks frekans cevabı başlığında açıklanmıştır.

Periyodik fonksiyonların kompleks Fourier serileriyle gösterimi keza oldukça kullanışlı olacaktır.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n(\Omega) e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (\text{Ek 4.8})$$

olsun.  $P_n$  üzerindeki çizgi serinin katsayılarının kompleks olabileceğini sembolize eder. Bu bileşenleri değerlendirmek için

$$\int_t^{t+T_1} e^{i(n\Omega_1 t)} e^{-i(m\Omega_1 t)} dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ T_1 & n = m \end{cases} \quad (\text{Ek 4.9})$$

olduğu göz önünde bulundursun. (Ek 4.8) eşitliği  $e^{-i(m\Omega_1 t)}$  ile çarpılır ve bir periyot için entegre edilirse

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (\text{Ek 4.10})$$

elde edilir. Ayrıca

$$\bar{P}_{-n} = \bar{P}_n^* = \bar{P}_n \text{'nin kompleks eşleniği} \quad (\text{Ek 4.11})$$

ve

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) dt = p(t) \text{'nin ortalama değeri} \quad (\text{Ek 4.12})$$

olduğu göz önünde bulundursun. (Aslında,  $p(t)$  gerçel değerli olduğu için  $\bar{P}_0$  gerçel değerlidir.)

### Örnek Ek 4.3

- 1)  $p(t)$  nin gerçel değerli olduğunu gösteriniz, (Ek 4.8) eşitliğinin sağ tarafı olması gerektiği üzere gerçel değerli olmalıdır.
- 2) Eğer  $p(t)$  tek fonksiyonsa,  $\bar{P}_n(\Omega)$  'nin sanal ve  $\bar{P}_{-n} = -\bar{P}_n$  olduğunu gösteriniz.

### Çözüm

- 1) (Ek 4.8) eşitliği açıldığında

$$p(t) = \bar{P}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n [\cos(n\Omega_1 t) + i \sin(n\Omega_1 t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_{-n} [\cos(n\Omega_1 t) - i \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

$\bar{P}_0$  'ın gerçel değerli olduğu görülen (Ek 4.12) eşitliğinden ve (Ek 4.11) eşitliğinden, (1) eşitliği

$$p(t) = \bar{P}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ R(\bar{P}_n) \cos(n\Omega_1 t) + I(\bar{P}_n) \sin(n\Omega_1 t) \right] \quad (2)$$

olarak ifade edilebilir, ki bu gerçel değerlidir.

2) (Ek 4.10) eşitliği

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) [\cos(n\Omega_1 t) - i \sin(n\Omega_1 t)] dt \quad (3)$$

olarak yazılabilir.  $p(t)$ ,  $t$ 'ye bağlı bir tek fonksiyon olduğu belirtildiği için

$$\bar{P}_{+n} = \frac{-i}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (4)$$

olarak yazılır. Buradan

$$\bar{P}_{-n} = \frac{-i}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) \sin(-n\Omega_1 t) dt = \frac{i}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (5)$$

yazılır. Bu yüzden,  $\bar{P}_n$  tamamen sanaldır ve  $\bar{P}_{-n} = -\bar{P}_n$  'dir.

Yukarıdaki örnekte bulunan (2) eşitliği ile (Ek 4.2) eşitliği karşılaştırıldığında

$$a_n = 2R(\bar{P}_n), b_n = 2I(\bar{P}_n) \quad (\text{Ek 4.13})$$

olduğu görülür.

#### Örnek Ek 4.4

1) Örnek Ek 4.1 deki kare dalga için  $\bar{P}_n$  'i belirleyiniz.

2)  $R(\bar{P}_n)$ ,  $I(\bar{P}_n)$  ve  $|\bar{P}_n|$  'nin spektrumlarını çiziniz.

#### Çözüm

1) (Ek 4.10) eşitliği  $0 < t < T_1$  aralığında entegre edilirse

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1/2} (p_0) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt + \frac{1}{T_1} \int_{T_1/2}^{T_1} (-p_0) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt \quad (1)$$

$$\bar{P}_n = \frac{-P_0}{in\Omega_1 T_1} \left[ e^{-i(n\Omega_1 t)} \Big|_0^{T_1/2} - e^{-i(n\Omega_1 t)} \Big|_{T_1/2}^{T_1} \right] \quad (2)$$

Fakat  $\Omega_1 T_1 = 2\pi$  olduğundan

$$e^{-i(n\Omega_1 T_1/2)} = e^{-in\pi} = \begin{cases} +1 & n = \text{çift} \\ -1 & n = \text{tek} \end{cases} \quad (3)$$

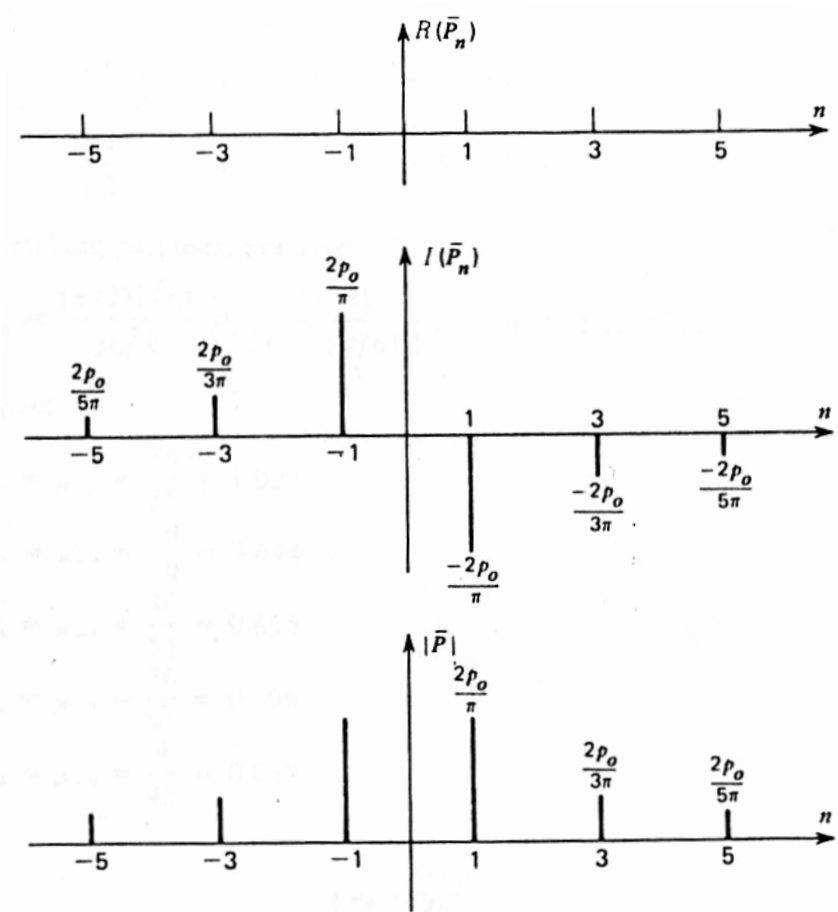
Böylece,

$$\bar{P}_n = \frac{ip_0}{2\pi n} \left[ 2e^{-in\pi} - 1 - e^{-i(2n\pi)} \right] \quad (4)$$

veya

$$\bar{P}_n = \frac{ip_0}{2\pi n} (2e^{-in\pi} - 2) = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{-2p_0 i}{n\pi} & n = \text{tek} \end{cases}$$

(Not:  $e^{-i(n\Omega_1 t)}$ ,  $[\cos(n\Omega_1 t) - i \sin(n\Omega_1 t)]$  olarak ifade edilerek de  $\bar{P}_n$  elde edilebilir.)



(Ek 3.32) ve (Ek 3.35) eşitliklerinden, TSD sistemin kararlı rejim cevabı kompleks formda

$$\bar{u}(t) = \bar{U}e^{i\Omega t} = \bar{H}(\Omega) p_0 e^{i\Omega t} \quad (\text{Ek 4.14})$$

olarak yazılabilir. Burada  $\bar{H}(\Omega)$ , (Ek 3.35) eşitliğinde belirtilen kompleks frekans cevabı fonksiyonudur.

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{1/k}{\left[1 - (\Omega/\omega_n)^2\right] + i[2\zeta\Omega/\omega_n]} \quad (\text{Ek 4.15})$$

Periyodik bir tahrik için kompleks Fourier serisi kullanılabilir.

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (\text{Ek 4.16})$$

Kararlı rejim cevabı

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{U}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (\text{Ek 4.17})$$

olur. (Ek 4.14) eşitliğinde görülen  $\bar{U} = Hp_0$  harmonik tahrik için

$$\bar{U}_n = \bar{H}_n \bar{P}_n = |\bar{H}_n| |\bar{P}_n| e^{i(\alpha_{H_n} + \alpha_{P_n})} \quad (\text{Ek 4.18})$$

olduğu görülür. Burada

$$\bar{H}_n(\Omega) = \frac{1/k}{\left[1 - (n\Omega_1/\omega_n)^2\right] + i[2\zeta n\Omega_1/\omega_n]} \quad (\text{Ek 4.19})$$

Örnek Ek 4.5, periyodik tahrike maruz bir TSD sistemin kararlı rejim cevabını bulmada kompleks Fourier serisinin kullanımını göstermektedir. Bu yöntem, eğer sistem sönümlüye daha faydalı olmaktadır.

### Örnek Ek 4.5

- 
- 1) Örnek Ek 4.2 yi,  $\omega_n = 6\Omega_1$  olan bir kare dalga tahrikine maruz sönümsüz TSD sistemde  $\bar{U}_n$  için bir ifade çıkararak tekrar ediniz.
  - 2)  $|\bar{U}_n|$  ve  $\alpha_{U_n}$  ifadelerini çiziniz.

### Çözüm

1) (Ek 4.18) eşitliğinden

$$\bar{U}_n = \bar{H}_n \bar{P}_n = |H_n| |P_n| e^{i(\alpha_{H_n} + \alpha_{P_n})} \quad (1)$$

ve (Ek 4.19) eşitliğinden  $\zeta = 0$  için

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{1/k}{1 - (\Omega/\omega_n)^2} = \frac{1/k}{1 - (n/6)^2} \quad (2)$$

olarak bulunur. Örnek Ek 4.4 ten

$$\bar{P}_n = \begin{cases} 0 & n = \text{çift} \\ \frac{-2p_0 i}{n\pi} & n = \text{tek} \end{cases} \quad (3)$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\bar{U}_n = \bar{H}_n \bar{P}_n = \begin{cases} \frac{-i(2p_0)}{n\pi k [1 - (n/6)^2]} & n = \text{tek} \\ 0 & n = \text{çift} \end{cases} \quad (4)$$

olarak bulunur.

2) (4) eşitliğinden

$$|\bar{U}_n| = \frac{2p_0/\pi k}{|n[1 - (n/6)^2]|} \quad (5)$$

$$\alpha_{U_n} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & n = +1, +3, +5, -7, -9, \dots \\ \frac{\pi}{2} & n = -1, -3, -5, +7, +9, \dots \end{cases} \quad (6)$$

elde edilir. Çizim amacıyla

$$\mu_n \equiv \frac{(\pi/2)|\bar{U}_n|}{p_0/k} = \frac{|1/n|}{|1 - (n/6)^2|}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \dots \quad (7)$$

hesaplanırsa

$$\mu_1 = \mu_{-1} = \frac{36}{35} = 1,029$$

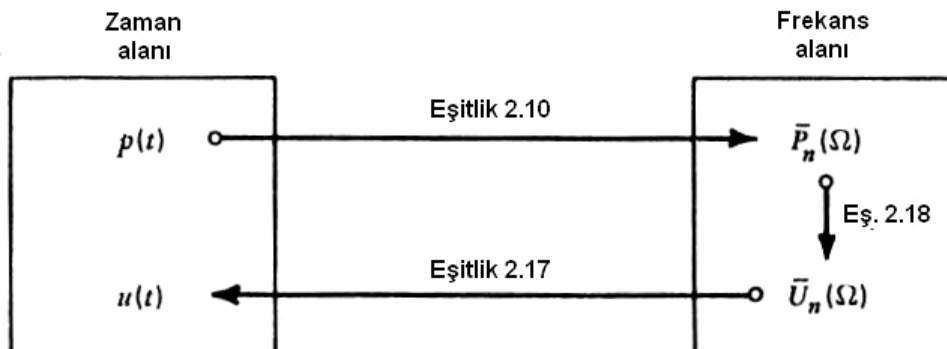
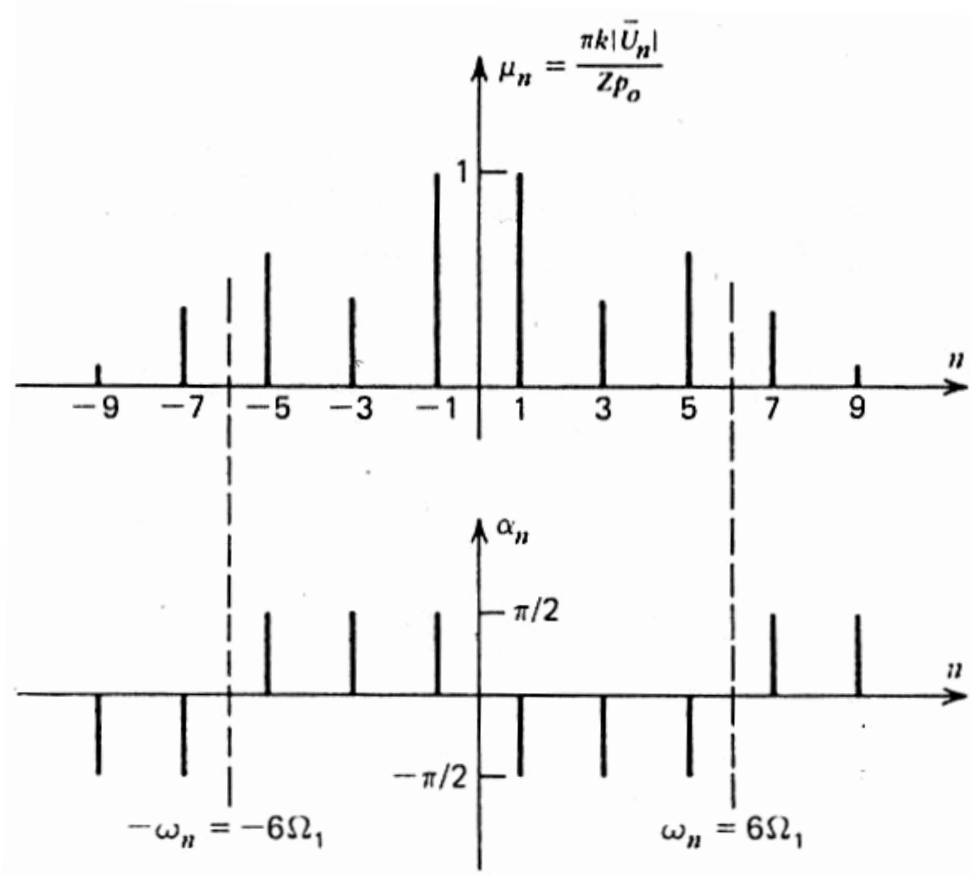
$$\mu_3 = \mu_{-3} = \frac{4}{9} = 0,444$$

$$\mu_5 = \mu_{-5} = \frac{36}{55} = 0,655$$

$$\mu_7 = \mu_{-7} = \frac{36}{91} = 0,396$$

$$\mu_9 = \mu_{-9} = \frac{4}{45} = 0,089$$

bulunur.



Şekil Ek 4.3 Periyodik cevap probleminin frekans alanına dönüşüm ile çözümü.

Örnek Ek 4.5 teki  $\mu_n$  grafiği ile Şekil Ek 4.2b yi karşılaştırarak kompleks katsayıların genliklerinin gerçel katsayılarınkının yarısı olduğuna dikkat ediniz. Kompleks Fourier serisi içindeki  $(-n)$  terimlerinin katkısı bu farkı açıklamaktadır.

Örnek Ek 4.5 teki gibi problemleri zaman alanından frekans alanına (spektrum) dönüşüm ve frekans alanından zaman alanına dönüşüm bakımından düşünmek uygun olacaktır. Şekil Ek 4.3 bu durumu açıklamaktadır.

### Ek 4.3 Periyodik Olmayan Tahrike Cevap – Fourier İntegrali

Önceki bölümlerde periyodik bir fonksiyonun eşitlik (Ek 4.2) ve (Ek 4.8) de olduğu gibi Fourier serileri ile gösterilebileceğini görmüştük. Temsil edilecek fonksiyon periyodik değilse bu fonksiyon Fourier integrali ile temsil edilebilir. Fourier integrali, Fourier serilerinde  $T_1$  periyodunun sonsuza ulaşması sağlanarak elde edilir. Fourier integralleri için ifadeleri elde etmede kompleks Fourier serilerini kullanmak uygun olacaktır. Eşitlik (Ek 4.8) burada tekrar edilirse

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}_n(\Omega) e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (\text{Ek 4.20})$$

burada

$$\bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_t^{t+T_1} p(t) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt \quad (\text{Ek 4.21})$$

İntegralin sağlanması koşuluyla bu geçerlidir.

$T_1 \rightarrow \infty$  olması durumunda, izleyen notasyonu açıklamak uygun olacaktır:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \Delta\Omega \\ n\Omega_1 &= \Omega_n \\ \bar{P}_n(\Omega_n) &= T_1 \bar{P}_n = \left( \frac{2\pi}{\Delta\Omega} \right) \bar{P}_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ek 4.22})$$

Buradan eşitlik (Ek 4.20) izleyen şekilde yazılabilir:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega_n) e^{i\Omega_n t} \Delta\Omega \quad (\text{Ek 4.23})$$

Burada

$$\bar{P}(\Omega_n) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t) e^{-i\Omega_n t} dt \quad (\text{Ek 4.24})$$

olmaktadır.

Eşitlik (Ek 4.24) teki integral sınırları gösterildiği gibi alınmıştır bu yüzden  $T_1 \rightarrow \infty$  iken  $p(t)$  nin spesifik formundan bağımsız olarak  $p(t)$  nin tüm zaman tanım alanı kapsanacaktır.

$T_1 \rightarrow \infty$  iken  $\Omega_n$ ,  $\Omega$  sürekli değişkenine,  $\Delta\Omega$  da  $d\Omega$  diferansiyeline dönüşür. Böylece (Ek 4.23) ve (Ek 4.24) eşitlikleri

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(\Omega) e^{i\Omega_n t} d\Omega \quad (\text{Ek 4.25})$$

ve

$$\bar{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (\text{Ek 4.26})$$

şeklinde yazılabilir.

Eşitlik (Ek 4.25) ve (Ek 4.26) Fourier dönüşüm çifti olarak adlandırılır.  $\bar{P}(\Omega)$ ,  $p(t)$  nin Fourier dönüşümü,  $p(t)$  ise  $\bar{P}(\Omega)$  nin ters Fourier dönüşümü olarak adlandırılır.  $p(t)$  nin Fourier dönüşümü ile ifadesi için (Ek 4.26) eşitliğindeki integralin sağlanması gerekir. Bu,  $-\infty < t < \infty$  aralığında  $p(t)$  nin Dirichlet koşullarını sağlaması ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(t)| dt$$

integrali yakınsak olduğunda garanti edilir. Bu koşullara; kuvvetler, yer değiştirmeler ve bunun gibi birçok fiziksel algılanabilir fonksiyonlarda karşılaşılabılır. Sonuç olarak eşitlik (Ek 4.25) ve (Ek 4.26),  $f = \Omega/2\pi$  frekansı cinsinden yazılırsa daha simetrik bir formda yazılabilir. Böylece

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{P}(f) e^{i(2\pi f t)} df \quad (\text{Ek 4.27})$$

ve

$$\bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i(2\pi f t)} dt \quad (\text{Ek 4.28})$$

olur.

Eşitlik (Ek 4.17) ve (Ek 4.18) de TSD sistemin periyodik tahrike cevabının izleyen formda olduğunu bulmuştuk:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{H}_n \bar{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \quad (\text{Ek 4.29})$$

Eşitlik (Ek 4.20) den (Ek 4.26) ya kadar olan işlem sırası izlenerek TSD sistemin  $u(t)$  cevabı için izleyen Fourier dönüşüm çiftini elde ederiz.

$$\bar{U}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i(2\pi f t)} dt \quad (\text{Ek 4.30})$$

ve

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(f) e^{i(2\pi f t)} df \quad (\text{Ek 4.31})$$

Burada

$$\bar{U}(f) = \bar{H}(f) \bar{P}(f) \quad (\text{Ek 4.32})$$

kompleks frekans cevap fonksiyonunun sonucu ve tahrikin Fourier dönüşümüdür.

Eşitlik (Ek 4.28) den, doğrudan Fourier dönüşümünün tespitinin Örnek Ek 4.6 da görüleceği üzere doğrudan entegrasyon içerdiği açıktır.

### Örnek 2.6

---

$p(t)$  izleyen şekilde tanımlanan dikdörtgen bir sinyal olsun

$$p(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ p_0 & -T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

$t = 0$  'da simetrik olan bu dikdörtgen sinyalin Fourier dönüşümünü belirleyiniz.

### Çözüm

Eşitlik (Ek 4.26)'dan

$$\bar{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (1)$$

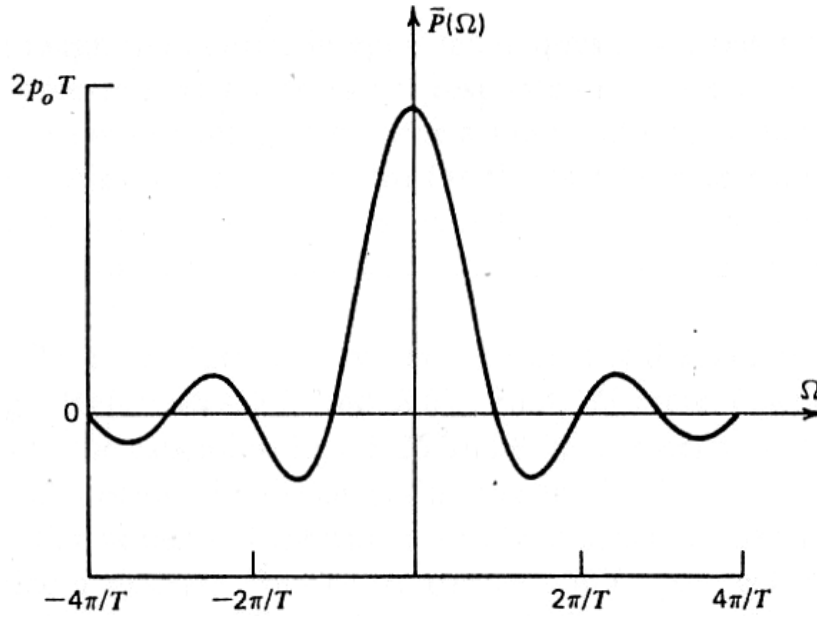
$$= \int_{-T}^T p_0 e^{-i\Omega t} dt$$

$$= \left( \frac{p_0}{-i\Omega} \right) (e^{-i\Omega T} - e^{i\Omega T}) \quad (2)$$

elde edilir. Bu ayrıca izleyen şekilde de yazılabilir.

$$\bar{P}(\Omega) = 2p_0 T \left( \frac{\sin \Omega T}{\Omega} \right) \quad (3)$$

$\bar{P}(\Omega)$  bu yüzden gerçek bir fonksiyondur.  $\Omega$ 'ya göre grafiği çizilebilir ve Örnek Ek 4.4 teki ilgili ayrık Fourier serileriyle karşılaştırılabilir.



(Ek 4.31) ve (Ek 4.32) eşitliklerinden cevap izleyen ters Fourier dönüşümü ile ifade edilir

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(f) \bar{P}(f) e^{i(2\pi f t)} df \quad (Ek 4.33)$$

Örneğin, viskoz sönümlü bir sistem için  $\bar{H}(f)$

$$\bar{H}(f) = \frac{1/k}{\left[ 1 - (f/f_n)^2 \right] + i(2\zeta f/f_n)} \quad (Ek 4.34)$$

ile, Örnek Ek 4.6 daki dikdörtgen sinyal için ise

$$\bar{P}(f) = 2p_0T \left[ \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} \right] \quad (\text{Ek 4.35})$$

ile verilir.

Eşitlik (Ek 4.33) teki ters Fourier dönüşümünün değerlendirilmesi kompleks düzlemde kontur entegrasyonu gerektirir ki bu konumuz dışındadır. Nümerik açıdan bakıldığında Fourier integralinin önemi hızlı Fourier dönüşümü metotları ile hesaplanan ayrık Fourier dönüşümünün (DFT) yaklaşık olarak hesaplanmasında yatar. Ayrık Fourier dönüşümü (DFT) ve Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) ile kısa bir bilgi ilerleyen bölümlerde verilmiştir.

#### Ek 4.4 Kompleks Frekans Cevabı ile Birim İmpuls Cevabı İlişkisi

Kompleks frekans cevabı  $\bar{H}(\Omega)$ , ya da  $\bar{H}(f)$ , bir sistemin frekans alanındaki cevabının karakteristiğini tanımlar. Birim impuls cevabı  $h(t)$  ise sistemin zaman alanındaki cevabını tanımlar. Örnek olarak (Ek 4.34) eşitliğinde verilen  $\bar{H}(f)$  ve  $h(t)$  için yazılırsa

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n t \quad (\text{Ek 4.36})$$

elde edilir.  $h(t)$  birim impulsa  $t=0$  anında verilen cevaptır. (Ek 4.28) eşitliğine göre bu birim impulsun Fourier dönüşümü

$$\bar{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i(2\pi ft)} dt = 1 \quad (\text{Ek 4.37})$$

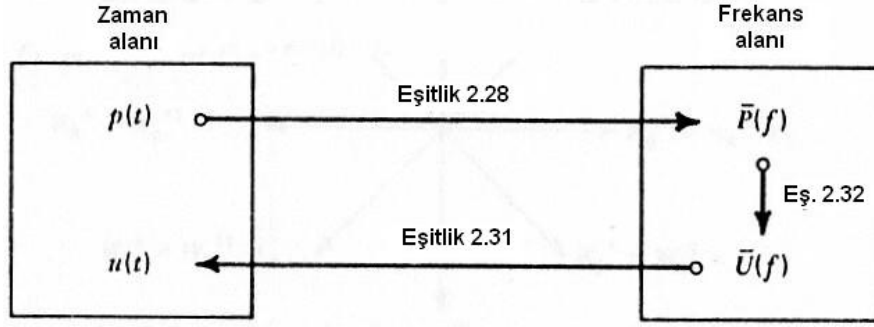
olarak verilir. Buradan, (Ek 4.33) eşitliği ile (Ek 4.37) eşitliği birleştirilerek

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (\text{Ek 4.38})$$

elde edilir. Böylece  $h(t)$  nin  $\bar{H}(f)$  için ters Fourier dönüşümü olduğu sonucuna varılır ve

$$\bar{H}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i(2\pi ft)} dt \quad (\text{Ek 4.39})$$

olarak bulunur. Bu nedenle Şekil Ek 4.3 teki diyagram, periyodik olmayan fonksiyonlar için Şekil Ek 4.4 te gösterildiği üzere genişletilebilir.



Şekil Ek 4.4 Süreksiz (geçici) cevap probleminin frekans alanına dönüşüm ile çözümü.

Yukarıda ters dönüşüm yöntemi belirtilmekle birlikte, eşitlik (Ek 4.31) in ters dönüşümü en iyi izleyen bölümde kısaca bahsedilecek olan nümerik teknikler yardımıyla başarılmaktadır.

#### Ek 4.5 Ayırık Fourier Dönüşümleri (DFT) ve Hızlı Fourier Dönüşümleri (FFT)

“Periyodik Olmayan Tahrike Cevap – Fourier İntegrali” başlıklı bölümde belirtilen Fourier integral teknikleri bir sistemin süreksiz cevabının bulunması hakkında bir yöntem belirtmesine rağmen, Fourier integralinin nümerik uygulanabilmesi ancak 1965’te hızlı Fourier dönüşümü hakkında yayımlanan Cooley-Tukey algoritmasıyla mümkün olmuştur. Bu tarihten itibaren FFT, teknolojinin, ölçüm ve alet kullanımı gibi, birçok alanındaki gelişmelere öncülük etmiştir.

Fourier dönüşümlerinin nümerik değerlendirmesi iki adımdan oluşmaktadır. İlk adımda ayırık Fourier dönüşümleri türetilir ki bu (Ek 4.27) ve (Ek 4.28) eşitliklerine karşılık gelir. Daha sonra DFT’lerin hesaplanması için bir etkin nümerik algoritma (FFT) tanımlanır.

Fourier dönüşümünün nümerik işlemi için öncelikle (Ek 4.27) ve (Ek 4.28) eşitliklerinin Fourier dönüşüm çiftine uygun ayırık Fourier dönüşüm çifti tanımlanır. Önce dönüştürülecek bir sürekli fonksiyon,  $\Delta t$  ayırık zaman aralıklarıyla örneklenmelidir. Sonra bu örneklenen değerlerden sonlu sayıda ( $N$  adet) değer alınmalıdır. Bunun sebebi bilgisayar hafızasındaki ve işlem zamanında kısıtlamalardır. Bu örnekleme ve sınırlamanın etkisi sürekli sinyalin, periyodu  $T_1 = N \Delta t$  olan ve  $t_m = m \Delta t$  noktalarında örneklenen bir periyodik sinyal ile yaklaşık olarak hesaplanmasıdır.

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (\text{Ek 4.40})$$

olduğu varsayılınsın.  $N$  örnekten oluşan  $T_1$  periyodundan sonra (Ek 4.24) integral izleyen sonlu

toplamda yerine konabilir.

$$\bar{P}(\Omega_n) = \sum_{m=0}^{N-1} p(t_m) e^{-i(n\Omega_1)(m\Delta T)} \Delta t \quad (\text{Ek 4.41})$$

veya

$$\bar{P}(\Omega_n) = \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} p(t_m) e^{-i(2\pi mn/N)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{Ek 4.42})$$

Ters ayrık Fourier dönüşümü (DFT) aynı şekilde (Ek 4.23) ten elde edilebilir. Böylece,

$$p(t_m) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{P}(\Omega_n) e^{i(n\Omega_1)(m\Delta T)} \Omega_1 \quad (\text{Ek 4.43})$$

veya

$$p(t_m) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{P}(\Omega_n) e^{i(2\pi mn/N)}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{Ek 4.44})$$

(Ek 4.42) ve (Ek 4.44) bu yüzden ayrık Fourier dönüşüm çifti olarak tanımlanır.

DFT gösteriminin doğruluğu  $\Delta t$  dönüşüm aralığına ve örnekleme sayısı  $N$ 'e bağlıdır, fakat bu konu hakkındaki tartışma bu yazının dışındadır.

Hızlı Fourier dönüşümü (FFT) yeni bir dönüşüm çeşidi değildir, fakat ayrık Fourier dönüşümlerini (DFT) elde etmede oldukça etkili bir nümerik algoritmadır. Önemi, bir ayrık Fourier dönüşümünün (DFT) hesabında birçok tekrarın ortadan kaldırılmasında yatar ve DFT'lerin çok daha hızlı hesaplanmasına izin verir.

(Ek 4.42) ya da (Ek 4.44) eşitliklerinden biri izleyen forma sokulabilir:

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} B_n W_N^{mn}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{Ek 4.45})$$

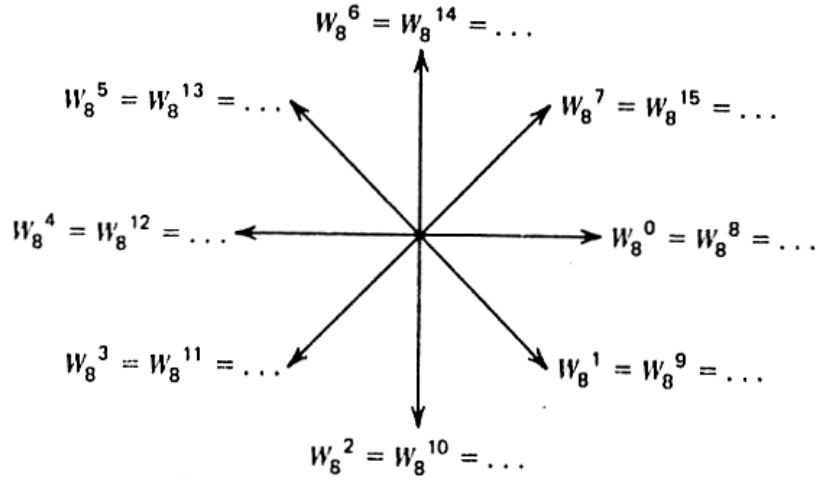
Burada

$$W_N = e^{-i(2\pi/N)} \quad (\text{Ek 4.46})$$

olarak alınmıştır.

Eşitlik (Ek 4.45) teki hesaplama sayısının ölçüsü, eşitliğin şekline bağlı olarak gelen kompleks sonuçların sayısı ve  $m$ 'in aralığıyla ilgilidir.  $N$  adet kompleks sonuca ihtiyaç duyan  $N$

toplamin olduğu veya tüm  $A_n$ 'lerin hesaplanması için  $N^2$  sonuca ihtiyaç duyulduğu açıktır.  $W_n$ 'nin katlarının periyodik doğasından faydalanılarak toplam hesaplama için harcanan çaba oldukça azaltılabilir. Şekil Ek 4.5,  $W_8^{mn}$  için tekrarlı çevrimi göstermektedir. FFT algoritması için kompleks sonuçların sayısı  $(N/2)\log_2 N$  ile verilmiştir. Örneğin,  $N = 512$  ise FFT işlemlerinin sayısı orijinal DFT işlemlerinin sayısından %1 daha azdır.



Şekil Ek 4.5  $N = 8$  için  $W_N^{mn}$ 'nin periyodik doğası

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 21.02.1982

Doğum yeri İzmit

Lise 1993-2000 Kocaeli Anadolu Lisesi

Lisans 2000-2004 İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fak.  
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2004-2007 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
İnşaat Müh. Anabilim Dalı, Mekanik Programı

**Çalıştığı kurumlar**

2004-2005 Göktürk İnşaat

2005-2006 Torun Yapı

2007-devam ediyor Surtaş İşl. İnş. San. ve Tic.Ltd. Şti