YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ELASTİK KİRİŞİN HAREKETLİ BİR KÜTLE ETKİSİ ALTINDAKİ DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

İnş. Müh. Salih SEVİM

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN

Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN 22.03.2002
Prof. Dr. Turgut Kocatürk T. Kocatürk 22.03.2002
Prof. Dr. Hasan Engin Hasan Engin 22.03.2002

İSTANBUL , 2002

İÇİNDEKİLER

KISALTMA LİSTESİ

A	Kiriş kesit alanı
EI	Eğilme rijitliği
F_x	Yatay doğrultudaki dış kuvvet
F_y	Düşey doğrultudaki dış kuvvet
g	Yerçekimi ivmesi
L	Kirişin uzunluğu
m	Kirişin birim uzunluğunun kütlesi
M	Hareketli kütle etkisinden oluşan eğilme momenti
R_x, R_y	Mesnet reaksyonları
s	Kiriş üzerinde değişen koordinat
T	Kirişin kinetik enerjisi
u	Kirişin boyuna uzama miktarı
U	Dış kuvvetlerin yaptığı iş
v	Hareketli kütlenin hızı
V	Deforme olmuş kirişin potansiyel enerjisi
V_1	Eğilme momenti etkisi ile oluşan potansiyel enerji bileşeni
V_2	Gerilmelerin etkisi ile oluşan potansiyel enerji bileşeni
w	Kiriş düşey yer değiştirmesi
W	Hareketli kütlenin ağırlığı
ε_x	Birim boydaki uzama miktarı
ξ	Hareketli kütlenin koordinatı
μ	Sürtünme katsayısı
σ_x	Boyuna gerilmeler
δ_{ir}	Kronecker deltası

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sırasında çok değerli yardımlarından faydalandığım hocam Yrd.Doç.Dr. İrfan Coşkun 'a hem desteğini hemde sonsuz sabrını esirgemediği için en derin teşekkürlerimi arz ederim.

ÖZET

Bu çalışmada hareketli bir kütle etkisi altındaki sonlu elastik bir kirişin yatay ve düşey yöndeki hareketleri incelenmiştir. Kirişin yönetici hareket denklemleri için Hamilton prensibi kullanılmış ve iki lineer olamayan girişimli diferansiyel denklem elde edilmiştir. Diferansiyel denklemlerin girişimli çıkmasının nedeni, yatay yöndeki sürtünme kuvvetinin de, diğer bir deyişle eksenel kuvvetin de dikkate alınmış olmasıdır. Bilindiği gibi bir kiriş üzerinde hareketli bir kuvvet alındığında bu etki ortaya çıkmamaktadır. Lineer halde, moment ile eğrilik arasındaki bağıntıda düşey yer değiştirmeler küçük kabul edildiğinden bunların türevlerinin karesi de 1'in yanında ihmal edilmekteydi. Bu çalışmada kirişin düşey yöndeki sonlu yer değiştirmeleri dikkate alındığından ortaya lineer olmayan bir denklem takımı çıkmaktadır. Ortaya çıkan bu denklem takımının çözümü güç olduğundan lineer olmayan terimler ihmal edilerek sonlu farklar yöntemi yardımıyla lineer hal için çözüm yapılmıştır. Çözüm sonunda hareketli kütlenin kiriş üzerinde bulunduğu çeşitli konumlar için düşey yer değiştirmeler ve kayıcı mesnette ortaya çıkan yatay yer değiştirmeler grafikler yardımı ile verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hareketli kütle, elastik kiriş, sonlu yerdeğiştirme, Hamilton prensibi.

ABSTRACT

This study deals with vertical and horizontal motions of a finite elastic beam that is traversed by a moving mass. Hamilton's principle is used to describe, equations of motions for an elastic beam and two non-linear couple differential equations are obtained. The horizontal friction force between moving mass and elastic beam is taken into consideration; as a result of this, equations are couple. As we know that, in previous researches, when we consider the moving force on an elastic beam this effect couldn't be happened. In a linear situation, in the relation between the moment and curvature, we consider that the vertical displacements are small enough. Hence, the squares of their derivations are also neglected, because they are very small. In this study, non-linear couple equations are caused by vertical finite displacements. Because the solutions of this equations are very difficult, non-linear terms are neglected and for a linear situation, finite difference method is used. In the end of the solution, for various locations of a moving mass on the beam, the vertical and the horizontal displacements are shown by graphics.

Keywords: Moving mass, elastic beam, finite displacement, Hamilton's principle

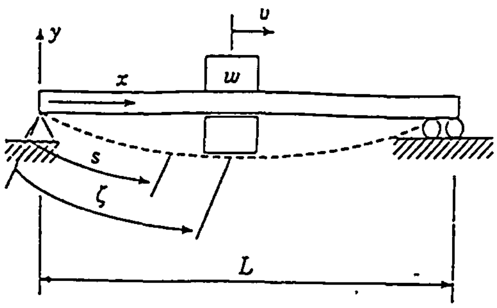
1. GİRİŞ

Hareketli yüke maruz kiriş problemleri ile ilgili çalışmalar genel olarak iki gruba ayrılmaktadır. Bunlardan biri, hareketli tekil kuvvet problemi, diğeri ise hareketli kütle problemidir. Hareketli tekil kuvvet probleminde kiriş ile kuvvet arasında ortaya çıkan eylemsizlik kuvveti ihmal edilmekte, hareketli kütle probleminde ise kiriş ile kütle arasındaki düşey eylemsizlik kuvveti dikkate alınmaktadır. Yapılan çalışmaların çoğunda kirişin düşey hareketleri incelenmiş ve problem lineer olmuştur (Ting vd.,1974; Fryba, 1973).

Bu çalışmada ikinci hal incelenmekte ve esas olarak Genin vd.'nin (1977) çalışmalarına dayanmaktadır. Bu tür bir probleme örnek olarak bir köprü üzerinde hareket eden bir tren veya sürekli kütleye sahip bir tank verilebilir. İncelenen problemde sistemin hareket denklemleri ve gerekli sınır koşulları Hamilton prensibinden yararlanılarak elde edilmiştir. Bilindiği gibi Hamilton prensibi, sonlu bir aralıkta sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri toplamının değişiminin sıfır olmasına dayanmaktadır. Problemde kirişin düşey yer değiştirmeleri sonlu kabul edilmiş ve yatay yöndeki sürtünme kuvvetinden dolayı ortaya çıkan yatay yer değiştirmeler de dikkate alınmıştır.

Hamilton prensibinin kullanılması ile iki girişimli lineer olmayan diferansiyel denklem elde edilmiştir. Lineer olmayan bu denklemlerin çözümü güç olduğundan, lineer olmayan terimler ihmal edilerek sonlu farklar metodu ile çözüm yapılmıştır.

2. HAREKET DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLİŞİ



Şekil 2.1 Hareketli kütle etkisi altındaki kiriş

Şekil 2.1 de sabit bir v hızı ile L açıklığında basit bir kiriş üzerinde hareket eden W ağırlığında bir cisim görülmektedir. Kirişin birim boyunun kütlesi m, kütlenin kiriş üzerinde bulunduğu konum ξ ve koordinatı s ile gösterilmektedir.

Bu durumda sistem için Hamilton ilkesi

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U - V)dt = 0 \tag{2.1}$$

denklemi ile ifade edilmektedir (Clough ve Penzien, 1972).

Burada T sistemin kinetik enerjisini, U dış kuvvetlerin yaptığı işi, V ise deforme olan kirişteki potansiyel enerjiyi göstermektedir. V potansiyel enerjisi $V = V_1 + V_2$ olarak alınabilir. Bu terimlerden V_1 eğilme etkisinden oluşan potansiyel enerji, V_2 ise normal kuvvet etkisinden oluşan potansiyel enerjiyi göstermektedir. Bundan sonra (2.1) denklemindeki enerji terimleri teker teker elde edilecektir.

2.1 Enerji Bileşenlerinin Elde Edilişi

Potansiyel enerji bileşenlerinden birincisi olan V_1 için

$$V_1 = \int_0^l \frac{1}{2} M d\theta \tag{2.2}$$

yazılabilir. Moment ile eğrilik arasındaki ilişkinin

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{w_{xx}}{\left(1 + w_x^{\,2}\right)^{3/2}} \tag{2.3}$$

olduğu bilinmektedir. Buna göre ds yay diferansiyelinin $ds = \left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$ ile verilen tanımı yardımıyla w_x türevi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{ds}\frac{ds}{dx} ,$$

$$\frac{ds}{dx}=\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \left[1+\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 \cdot \left(\frac{ds}{dx}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{ds}{dx} \cdot \left[\frac{1}{\frac{ds^2}{dx^2}}+\left(\frac{dw}{ds}\right)^2\right]^{1/2} ,$$

$$1=\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dw}{ds}\right)^2 \quad , \quad \frac{ds}{dx}=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{dw}{ds}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\frac{dw}{dx}=\frac{dw}{ds} \cdot \frac{1}{\left[1-\left(\frac{dw}{ds}\right)^2\right]^{1/2}}$$ ve $\frac{dw}{dx}=w_x$, $\frac{dw}{ds}=w_s$ kısaltmaları ile

$$w_x=\frac{w_s}{\left[1-w_s^{\,2}\right]^{1/2}}$$

olarak elde edilir. Bundan yararlanılarak ikinci türev ;

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dw}{ds}\frac{ds}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(w_s(1-w_s^{\,2})^{-1/2}\right)$$

$$=\left\{w_{ss}(1-w_s^{\,2})^{-1/2}+w_s\left[\frac{-1}{2}\left(1-w_s^{\,2}\right)^{-3/2}(-2w_sw_{ss})\right]\right\}\frac{ds}{dx}$$

$$=\left[w_{ss}\frac{1}{\left(1-w_s\right)^{1/2}}+w_s^{\,2}w_{ss}\frac{1}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{3/2}}\right]\frac{1}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{1/2}}=w_{ss}\frac{\left(1-w_s^{\,2}+w_s^{\,2}\right)}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2}$$

$$w_{xx}=w_{ss}\frac{1}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2}$$

olarak elde edilir.

Yay boyu ile eğrilik arasındaki bağıntıdan $d\theta=\frac{ds}{\rho}$ yazılabilir. Bu ifade ile V_1 potansiyel enerjisi ;

$$V_1=\int\frac{1}{2}Md\theta=\int\frac{1}{2}EJ\frac{1}{\rho}\frac{ds}{\rho} \tag{2.4}$$

olur. $\frac{1}{\rho^2}$ terimi yerine daha önce hesaplanan türevlerden yararlanarak

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{w_{xx}}{\left(1+w_x^{\,2}\right)^3}=\frac{w_{ss}^{\,2}}{1-w_s^{\,2}}$$ yazılırsa V_1 potansiyel enerjisi ;

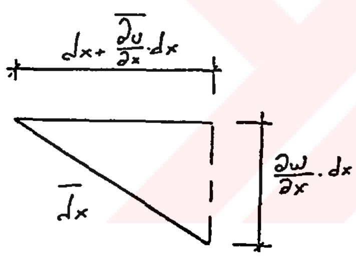
$$V_1=\int\frac{EJ}{2}.\frac{w_{ss}^{\,2}}{1-w_s^{\,2}}ds \tag{2.5}$$

olarak elde edilir.

Potansiyel enerji ifadelerinden ikincisi olan V_2 aşağıdaki gibi yazılabilir ;

$$V_2=\int_0^l\frac{1}{2}A\sigma_x\varepsilon_x.dx \tag{2.6}$$

Bu ifadedeki A, kiriş kesit alanını, σ_x normal gerilmeyi ve ε_x de çubuk ekseni doğrultusundaki şekil değiştirmeyi göstermektedir. Bu şekil değiştirme için aşağıda verilen dx boyundaki kiriş elemanına ait yer değiştirmeler dikkate alınacaktır.



Bu durumda şekil değiştirme, u yatay yerdeğiştirmeyi göstermek üzere ;

$$\varepsilon_x=\frac{\overline{dx}-dx}{dx}=\frac{\left[(dx+u_x.dx)^2+(w_x.dx)^2\right]^{1/2}-dx}{dx}\quad,\quad\varepsilon_x=\sqrt{(u_x+1)^2+w_x^{\,2}}-1 \tag{2.7}$$

olarak yazılabilir. Karekök içindeki terim için aşağıdaki gibi binom açılımı yapılmaktadır.

$$\sqrt{(u_x+1)^2+w_x^{\,2}}=(u_x+1)^1+\frac{1}{2}(u_x+1)^{-1}w_x^{\,2}-\frac{1}{8}(u_x+1)^{-3}w_x^4+\frac{1}{16}(u_x+1)^{-5}w_x^6+\ldots \tag{2.8}$$

Bu ifade (u_x+1) parantezine alınıp, $(u_x+1)^{-2}$ ve $(u_x+1)^{-4}$ için tekrar açılım yapılırsa (2.7) ile verilen şekil değiştirme için ;

$$\varepsilon_x=u_x+\frac{1}{2}w_x^2-\frac{1}{2}u_xw_x^2+\frac{1}{2}u_x^{\,2}w_x^2-\frac{1}{8}w_x^{\,4}+\ldots \tag{2.9}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki u_x ve w_x aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır ;

$$u_x = \frac{u_s}{\left(1 - w_s^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad w_x = \frac{w_s}{\left(1 - w_s^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(2.9) da verilen şekil değiştirme ve $\sigma_x = E\varepsilon_x$ olduğu göz önünde tutulursa V_2 potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi olur ;

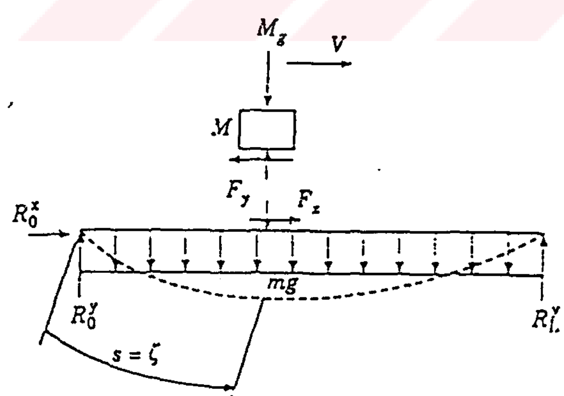
$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^l EA\left[\frac{u_s}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{1/2}} + \frac{1}{2}\frac{w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{u_s w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{w_s^{\,2}u_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} - \frac{1}{8}\frac{w_s^{\,4}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} + \ldots\right]^2 ds \qquad (2.10)$$

(2.1) denklemindeki T kinetik enerjisi ve U dış kuvvetlerin iş terimleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} m\left(\dot{w}^2 + \dot{u}^2\right) ds \qquad (2.11)$$

$$U = \int_0^l (F_x u + F_y w)\,ds + R_{0X} u_0 - R_{0Y} w_0 - R_{lY} w_l \qquad (2.12)$$

Burada (2.11) ifadesindeki $\dot{u}$ ve $\dot{w}$ terimleri hız bileşenlerini göstermektedir. İkinci ifadedeki F_x ve F_y terimleri hareketli kütleye ait dış kuvvet bileşenlerini, R_{0X}, R_{0Y} ve R_{LY} de mesnet tepkilerini göstermektedir. Bu terimler şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Kiriş ve kütleye ait serbest cisim diyagramı

$V\,(V_1\ ,\ V_2)$, T ve U terimleri elde edildiğine göre bundan sonra (2.1) denklemindeki ilgili fonksyonlara göre değişimleri her terim için ayrı ayrı yazalım.

2.2 Enerji Terimlerinin Değişiminin Hesaplanması

2.2.1 V_1 , V_2 Potansiyel Enerjilerinin Değişiminin Hesabı ;

V_1 potansiyel enerjisi, $V_1 = \int \frac{EJ}{2} \frac{w_{ss}^2}{1-w_s^2} ds$ olarak yazılmıştı. Bu terimin yerdeğiştirme fonksyonuna bağlı değişimi aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$$\delta V_1 = \frac{EJ}{2} \int_0^l \frac{2w_{ss}\delta w_{ss}\left(1-w_s^2\right) - \left(-2w_s\delta w_s\right)w_{ss}^2}{\left(1-w_s^2\right)^2}$$

$$= EJ\left[\int_0^l \frac{w_{ss}}{1-w_s^2}\delta w_{ss} + \int_0^l \frac{w_{ss}^2 w_s}{\left(1-w_s^2\right)^2}\delta w_s\right] \tag{2.13}$$

Bu ifade için aşağıdaki gibi kısmi integrasyon yapalım. Birinci terim için ;

$$\frac{w_{ss}}{1-w_s^2} = U \quad , \quad \frac{w_{sss}\left(1-w_s^2\right) - \left(-2w_s w_{ss}\right)w_{ss}}{\left(1-w_s^2\right)^2} = dU$$

$$\delta w_{ss} = dV \quad , \quad \delta w_s = V$$

$\int UdV = UV - \int VdU$ olduğu dikkate alınarak ,

$$\delta V_1 = \frac{w_{ss}}{1-w_s^2}\delta w_s\Big|_0^l - \left[\int \frac{w_{sss}}{1-w_s^2}\delta w_s + \int \frac{2w_s w_{ss}^2}{\left(1-w_s^2\right)^2}\delta w_s\right]$$

olarak elde edilir. Köşeli parantez içindeki terime bir kez daha kısmi integrasyon uygulanırsa , birinci kısım için ;

$$\frac{w_{sss}}{1-w_s^2} = U \quad , \quad \frac{w_{ssss}\left(1-w_s^2\right) - w_{sss}\left(-2w_s w_{ss}\right)}{(1-w_s^2)^2} = dU$$

$$\delta w_s = dV \quad , \quad \delta w = V$$

ve ikinci kısım için de ;

$$\frac{2w_s w_{ss}^2}{\left(1-w_s^2\right)^2} = U \quad , \quad \frac{2w_{ss}^3 + 4w_s w_{ss} w_{sss}}{\left(1-w_s^2\right)^2} + \frac{8w_s^2 w_{ss}^3}{\left(1-w_s^2\right)^3} = dU$$

$$\delta w_s = dV \quad , \quad \delta w = V$$

yazılırsa ve (2.13) ün ikinci terimi için benzer işlemler yapılırsa, birinci ve ikinci parça olarak ayırdığımız ifadeleri toparladığımızda,

$$\delta V_1 = EJ\left\{\frac{w_{ss}}{1-w_s^2}\delta w_s - \left[\frac{w_{sss}}{1-w_s^2}+\frac{w_s w_{ss}^2}{\left(1-w_s^2\right)^2}\right]\delta w\right\}\Bigg|_0^l + EJ\int_0^l\left\{\frac{w_{ssss}}{1-w_s^2}+\frac{4w_{sss}w_{ss}w_s+w_{ss}^3}{\left(1-w_s^2\right)^2}+\frac{4w_s^2 w_{ss}^3}{\left(1-w_s^2\right)^3}\right\}\delta w ds \quad (2.14)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede paydadaki terimler için ;

$$\left(1-w_s^2\right)^{-1} = 1 + w_s^2 + w_s^4 + \ldots$$

$$\left(1-w_s^2\right)^{-2} = 1 + 2w_s^2 + 3w_s^4 + \ldots$$

$$\left(1-w_s^2\right)^{-3} = 1 + 3w_s^2 + 6w_s^4 + \ldots$$

olduğu göz önünde tutulursa ve 5. mertebeden terimler ihmal edilirse, V_1 in değişimi aşağıdaki gibi olur ;

$$\begin{aligned}\delta V_1 &= EJ\left\{\left(w_{ss}+w_s^2 w_{ss}\right)\delta w_s - \left(w_s w_{ss}^2 + w_{sss} + w_{sss}w_s^2\right)\delta w\right\}\Big|_0^l \\ &+ EJ\int_0^l\left(w_{ssss}+w_s^2 w_{ssss}+4w_s w_{ss} w_{sss}+w_{ss}^3\right)\delta w ds\end{aligned} \quad (2.15)$$

Aynı şekilde diğer bileşen olan V_2 ' nin değişimi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$f(u_s, w_s) = \frac{u_s}{\left(1-w_s^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{w_s^2}{\left(1-w_s^2\right)} - \frac{1}{2}\frac{u_s w_s^2}{\left(1-w_s^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{u_s^2 w_s^2}{\left(1-w_s^2\right)^2} - \frac{1}{8}\frac{w_s^4}{\left(1-w_s^2\right)^2} + \ldots$$

olarak tanımlansın. Bu durumda V_2 potansiyel enerjisi ;

$$V_2 = \frac{EA}{2}\int_0^l f^2(u_s, w_s) ds \quad (2.16)$$

olur. Bu ifadenin değişimi ise aşağıdaki gibidir.

$$\delta V_2 = \frac{EA}{2}\int_0^l 2f(u_s, w_s)\delta f(u_s, w_s) ds$$

$\delta f(u_s, w_s) = \dfrac{\partial f}{\partial u_s}\delta u_s + \dfrac{\partial f}{\partial w_s}\delta w_s$ olduğu dikkate alınırsa ;

$$\delta V_2 = EA\int_0^l f\frac{\partial f}{\partial u_s}\delta u_s ds + f\frac{\partial f}{\partial w_s}\delta w_s ds \tag{2.17}$$

olur bu ifadenin birinci terimi için kısmi integrasyon aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$$f\frac{\partial f}{\partial u_s} = U \quad , \quad f_s\frac{\partial f}{\partial u_s} + f\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u_s}\right) = dU$$

$\delta u_s = dV \quad , \quad \delta u = V$ ile

$$f\frac{\partial f}{\partial u_s}\delta u\Big|_0^l - \int_0^l\left[\frac{df}{ds}\frac{\partial f}{\partial u_s} + f\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial u_s}\right)\right]\delta u ds$$

yazılabilir. Köşeli parantez içindeki terimin $\frac{d}{ds}\left(f\frac{\partial f}{\partial u_s}\right)$ 'e eşit olduğu dikkate alınırsa ve $\frac{\partial f}{\partial u_s} = f_{u_s}$ olarak tanımlanırsa, birinci terimin değişimi ;

$$EA\left[f\, f_{u_s}\delta u\Big|_0^l - \int_0^l \left(f\, f_{u_s}\right)_s \delta u ds\right]$$

olarak elde edilir. (2.17) ifadesindeki ikinci terim $\int_0^l \frac{\partial f}{\partial w_s}\delta w_s ds$ şeklinde idi. Bunun için de aşağıdaki gibi kısmi integrasyon işlemi yapılmaktadır.

$$f\frac{\partial f}{\partial w_s} = U \quad , \quad f_s\frac{\partial f}{\partial w_s} + f\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial w_s}\right) = dU$$

$\delta w_s = dV \quad , \quad \delta w = V$ ile

$$f\frac{\partial f}{\partial w_s}\delta w\Big|_0^l - \int_0^l\left[\left(f_s\frac{\partial f}{\partial w_s} + f\frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial w_s}\right)\delta w\right]ds$$ yazılabilir.

Köşeli parantez içindeki terimin $\frac{d}{ds}(f\frac{df}{dw_s})$ 'e eşit olduğu dikkate alınırsa, $\frac{\partial f}{\partial w_s} = fw_s$ ile kısmi integrasyonun son şekli ;

$$EA\left[f\, f_{w_s}\delta w\Big|_0^l - \int_0^l \left(f\, f_{w_s}\right)_s \delta w ds\right]$$

olarak elde edilir. (2.17) ifadesinin birinci ve ikinci terimleri için yapılan kısmi integrasyon işlemlerinden sonra ;

$$\delta\ V_2 = EA\left[\left(f\,f_{u_s}\right)\delta u\,\Big|_0^l + \left(f\,f_{w_s}\right)\,\delta w\Big|_0^l - \int_0^l \left[f\,f_{u_s}\right]_s\,\delta u ds - \int_0^l \left[f\,f_{w_s}\right]_s\,\delta w ds\right] \tag{2.18}$$

olarak elde edilir. (2.18) ifadesindeki türetmeler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
f_s &= \frac{u_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{1/2}} + \frac{w_s w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)} - \frac{1}{2}\frac{u_{ss} w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{3/2}} + \frac{1}{2}\frac{w_s^{\,3} w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} + \frac{u_s u_{ss} w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} + \frac{u_s^{\,2} w_s w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} \\
f_{u_s} &= \frac{1}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{3/2}} + \frac{u_s w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} \\
\left(f_{u_s}\right)_s &= \frac{-3}{2}\frac{w_s^{\,3} w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{5/2}} + \frac{u_{ss} w_s^{\,2}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} + \frac{u_s 2 w_s w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} \\
f_{w_s} &= \frac{w_s}{\left(1-w_s^{\,2}\right)} + \frac{3}{2}\frac{w_s^{\,3}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} - \frac{3}{2}\frac{u_s w_s^{\,3}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^{5/2}} + \frac{u_s^{\,2} w_s}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} \\
\left(f_{w_s}\right)_s &= \frac{w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)} + \frac{13}{2}\frac{w_s^{\,2} w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2} + \frac{u_s^{\,2} w_{ss}}{\left(1-w_s^{\,2}\right)^2}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Yukarıdaki ifadelerde, paydadaki terimler için binom açılımı uygulanarak ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilerek δV_2 ifadesi için ;

$$\begin{aligned}
\delta V_2 &= EA\left\{\left(u_s + \frac{1}{2}w_s^{\,2} + \frac{3}{2}u_s^{\,2}w_s^{\,2} + \frac{3}{8}w_s^{\,4}\right)\delta u\right\}\Bigg|_0^l + EA\left\{\left(u_s w_s + \frac{3}{2}u_s w_s^{\,3} + u_s^{\,3}w_s + \frac{1}{2}w_s^{\,3}\right)\delta w\right\}\Bigg|_0^l \\
&- EA\int_0^l \left[u_{ss} + 3u_{ss}u_s w_s^{\,2} + \frac{3}{2}w_s^{\,3}w_{ss} + w_s w_{ss} + 3u_s^{\,2}w_s w_{ss}\right]\delta u ds \\
&- EA\int_0^l \left\{u_{ss}w_s + 3u_s^{\,2}u_{ss}w_s + \frac{3}{2}u_{ss}w_s^{\,3} + u_s w_{ss} + u_s^{\,3}w_{ss} + \frac{3}{2}w_s^{\,2}w_{ss} + \frac{9}{2}u_s w_s^{\,2}w_{ss}\right\}\delta w ds
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ifadesi elde edilir.

2.2.2 Kinetik Enerji Değişiminin İncelenmesi

Sisteme ait T kinetik enerjisi ;

$$T = \int_0^l \frac{m}{2}\left(\dot{w}^2 + \dot{u}^2\right)ds$$

olarak tanımlanmıştı. Bu ifadeye ait değişim aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1} T dt &= \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{m}{2}\left(\dot{w}^2 + \dot{u}^2\right)dsdt \\ &= \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{m}{2}\dot{w}^2 dt.ds + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{m}{2}\dot{u}^2 dtds \\ &= \int_0^l m\,\dot{w}\,\delta\dot{w}\,ds + \int_0^l m\,\dot{u}\,\delta\dot{u}\,ds\end{aligned} \tag{2.21}$$

Bu ifade için aşağıdaki gibi kısmi integrasyon yapılmaktadır.

$\dot{w} = U$, $\ddot{w} = dU$ $\qquad$ $\dot{u} = U$, $\ddot{u} = dU$

$\delta w = V$, $\delta\dot{w} = dV$ $\qquad$ $\delta u = V$, $\delta\dot{u} = dV$

tanımlamaları ile

$$\delta T = m\int_0^l \left(\dot{w}\,\delta w + \dot{u}\,\delta u\right)\Big|_{t_0}^{t_1} ds - m\int_0^{t_1}\int_0^l \left(\ddot{w}\,\delta w + \ddot{u}\,\delta u\right)dsdt \tag{2.22}$$

olarak elde edilir.

2.2.3 Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşe Ait Değişimin İncelenmesi

Sistemde dış kuvvetlere ait iş ;

$U = \int_0^l \left[\left(F_x u + F_y w\right)ds\right] + R_{0X}u_0 - R_{0Y}w_0 - R_{LY}w_L$ olarak tanımlanmıştı, buna ait değişim ise

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1} U dt &= \delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_0^l \left(F_x u + F_y w\right)ds + R_{0X}u_0 - R_{0Y}w_0 - R_{LY}w_{yL}\right]dt \\ &= \int_0^l\int_{t_0}^{t_1}\left[F_x\delta u + u\delta F_x + F_y\delta w + w\delta F_y\right]dsdt + \int_{t_0}^{t_1}\left(R_{0X}\delta u_0 - R_{0Y}\delta w_0 - R_{LY}\delta w_L\right)dt\end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklindedir. F_x ve F_y terimleri daha önce belirtildiği gibi dış kuvvet bileşenleridir. Bu kuvvetlerden F_y bileşeni aşağıdaki gibi yazılmaktadır .

$$F_y = \left(W + \frac{W}{g}\ddot{w} \right)\delta(s-\xi) + mg \tag{2.24}$$

Bu ifadede W cismin ağırlığını, mg kirişin birim boyunun ağırlığını ve $\ddot{w}$ ivmeyi göstermektedir. Cismin kiriş üzerinde bulunduğu konum $\zeta(t)$ ve hızı da v ile gösterilmek üzere, $\ddot{w}$ ivmesi aşağıdaki gibi bulunabilir ;

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{\xi} = \frac{d\xi(t)}{dt}$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial t}dt$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}v + \frac{\partial w}{dt}$$

olarak yazılabilir.

$d(w) = \dfrac{\partial w}{\partial x}vdt + \dfrac{\partial w}{\partial t}dt = \phi$ olarak tanımlanıp türev alınırsa ,

$$d(dw) = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt$$

olur. Gerekli türetmeler yapılırsa ;

$$d(dw) = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}vdtdx + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}dtdx \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}vdt^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\dot{v}dt^2 \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dt^2 \right]$$

Yukarıdaki $d(dw)$ ifadesi $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ olarak yazıldığında ;

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}v\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\frac{dx}{dt} \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}v + \frac{\partial w}{\partial x}\dot{v} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]$$

olur. $v = \dfrac{dx}{dt}$ olduğu dikkate alınırsa , ivme terimi

$\ddot{w} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v\dfrac{\partial^2 w}{\partial x . \partial t} + v^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{v}\dfrac{\partial w}{\partial x}$ olarak elde edilir (Ting vd., 1974).

İvmenin bu değeri ile F_y ve F_x kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F_y(\xi,t)=\left[W+\left(\frac{W}{g}\right)\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}+\dot{v}w_s\right)\right]\delta(s-\xi)+mg \tag{2.25}$$

$$F_x(\xi,t)=\mu.F_y(\xi,t)=\mu\left[W+\left(\frac{W}{g}\right).\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}+\dot{v}w_s\right)\right]\delta(s-\xi) \tag{2.26}$$

Bundan sonra (2.23) ifadesindeki terimler teker teker incelenecektir. Önce $w(\delta F_y)$ terimini dikkate alalım ;

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l w(\delta F_y)=\int_0^l\left\{\int_{t_0}^{t_1} w\delta\left(W+\left(\frac{W}{g}\right)\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}+\dot{v}w_s\right)\delta(s-\xi)+mg\right)dt\right\}ds$$

$$=\int_0^l\left\{\int_{t_0}^{t_1} w\frac{W}{g}\left[\delta\ddot{w}+2(\delta v)\dot{w}_s+2v\delta\dot{w}_s+2v(\delta v)w_{ss}+v^2(\delta w_{ss})+(\delta\dot{v})w_s+\dot{v}\delta w_s\right]\delta(s-\xi)dt\right\}ds$$

Yukarıdaki ifadede v hızının zamana göre değişimleri sıfır olmaktadır. Bu durumda yukarıdaki ifade ;

$$=\int_0^l\left\{\int_{t_0}^{t_1} w\frac{W}{g}\left[\delta\ddot{w}+2v(\delta\dot{w}_s)+v^2(\delta w_{ss})\right]\delta(s-\xi).dt\right\}ds$$

olur. Bu ifadedeki her terime kısmi integrasyon uygulayarak değişimlerdeki türevlerden kurtulmaya çalışalım. Birinci terim için ;

$\delta\ddot{w}=dV \quad , \quad \delta\dot{w}=V$

$\dfrac{W}{g}w=U \quad , \quad \dfrac{W}{g}\dot{w}=dU$ ile

$$\int_0^l\left\{\int_{t_0}^{t_1}\frac{W}{g}w\delta\ddot{w}\delta(s-\xi)dt\right\}ds \;=\; \int_0^l\frac{W}{g}w\delta\dot{w}\Big|_{t_0}^{t_1}ds-\int_0^l\left\{\int_{t_0}^{t_1}\frac{W}{g}\dot{w}\delta\dot{w}\delta(s-\xi)dt\right\}ds \quad \text{ve}$$

$\delta\dot{w}=dV \quad , \quad \delta w=V$

$\dot{w}=U \quad , \quad \ddot{w}=dU$ ile

$$=\int_0^l\frac{W}{g}w\delta\dot{w}\Big|_{t_0}^{t_1}ds-\int_0^l\frac{W}{g}\dot{w}\delta w\Big|_{t_0}^{t_1}ds+\int_0^l\left(\int_{t_0}^{t_1}\frac{W}{g}\ddot{w}\delta w\delta(s-\xi)dt\right)ds$$

bulunur. Bu ifadedeki birinci ve ikinci terimler sıfır olduğundan geriye yalnızca üçüncü terim kalır. İkinci terim için ;

$$\delta\dot{w}_s = dV \quad , \quad \delta w_s = V$$

$$2\frac{W}{g}vw = U \quad , \quad \left(2\frac{W}{g}\dot{v}w + 2\frac{W}{g}v\dot{w}\right)dt = dU$$

$$\int_0^l \left\{ \int_{t_0}^{t_1} 2\frac{W}{g}vw\delta\dot{w}_s\delta(s-\xi)dt \right\} ds = \int_0^l 2\frac{W}{g}vw\delta w_s \Big|_{t_0}^{t_1} ds - \int_0^l \left\{ \int_{t_0}^{t_1} 2\frac{W}{g}v\dot{w}\delta w_s.\delta(s-\xi)dt \right\} ds$$

$$\delta w_s = dV \quad , \quad \delta w = V \quad \text{ile ;}$$

$$= \int_0^l 2\frac{W}{g}vw\delta w_s \Big|_{t_0}^{t_1} ds - \int_{t_0}^{t_1} 2\frac{W}{g}v\dot{w}\delta w \Big|_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l 2\frac{W}{g}v\dot{w}_s\delta w\,\delta(s-\xi)ds \right\} dt$$

Bu ifadede birinci terim sıfırdır ve geriye ikinci ve üçüncü terim kalır. Üçüncü terim için ;

$$\delta w_{ss} = dV \quad , \quad \delta w_s = V$$

$$\frac{W}{g}v^2 w = U \quad , \quad \frac{W}{g}v^2 w_s ds = dU$$

$$\int_0^l \int_{t_0}^{t_1} \frac{W}{g}v^2 w\delta w_{ss}\delta(s-\xi)dsdt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{W}{g}wv^2\delta w_s \Big|_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \frac{W}{g}v^2 w_s\delta w_s\delta(s-\xi)ds \right\} dt \right]$$

$$\delta w_s ds = dV \quad \text{ve} \quad \delta w = V$$

$$\frac{W}{g}v^2 w_s = U \quad \text{ve} \quad \frac{W}{g}v^2 w_{ss}ds = dU \quad \text{ile ;}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{W}{g}wv^2\delta w_s \Big|_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{W}{g}v^2 w_s\delta w \Big|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l \frac{W}{g}v^2 w_{ss}\delta w ds \right) dt$$

olarak elde edilir. (2.23) ifadesindeki $u(\delta F_x)$ terimi dikkate alınırsa ;

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l u(\delta F_x) dsdt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l u\left\{ \mu\delta\left[W + \frac{W}{g}\left(\ddot{w} + 2v\dot{w}_s + v^2 w_{ss} + \dot{v}w_s\right) \right] \right\} dsdt$$

Daha önce yaptığımız gibi parça parça kısmi integrasyon uygulayarak değişimlerdeki türevlerden kurtulalım. Birinci terim için ;

$\delta\ddot{w} = dV \quad , \quad \delta\dot{w} = V$

$u = U \quad , \quad \dot{u} = dU$ ile

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}u\delta\ddot{w}\delta(s-\xi)dsdt = \int_0^l \mu\frac{W}{g}u\delta\dot{w}\Big|_{t_o}^{t_1} ds - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}\dot{u}(\delta\dot{w})dsdt$$

$\delta\dot{w} = dV \quad , \quad \delta w = V$

$\ddot{u} = dU \quad , \quad \dot{u} = U$ ile

$$= \int_0^l \mu\frac{W}{g}u\delta\dot{w}\Big|_{t_0}^{t_1} ds - \int_0^l \mu.\frac{W}{g}\dot{u}\delta w\Big|_{t_0}^{t_1} ds + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}\ddot{u}\delta w\delta(s-\xi)dsdt$$

olur. Burada birinci ve ikinci terim düşer ve geriye üçüncü terimler kalır.

İkinci terim için ;

$\delta\dot{w}_s = dV \quad , \quad \delta w_s = V$

$u = U \quad , \quad \dot{u} = dU$ ile

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}u2v(\delta\dot{w}_s)\delta(s-\xi)dsdt = \int_0^l 2\mu\frac{W}{g}uv\delta w_s\Big|_{t_0}^{t_1} ds - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l 2\mu\frac{W}{g}v\dot{u}\delta w_s\delta(s-\xi)dsdt$$

$\delta w_s = dV \quad , \quad \delta w = V$

$\dot{u} = U \quad , \quad \dot{u}_s = dU$ ile

$$= \int_0^l 2\mu\frac{W}{g}vu\delta w_s\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} 2\mu\frac{W}{g}v\dot{u}\delta w\Big|_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l 2\mu\frac{W}{g}v\dot{u}_s\delta w\delta(s-\xi)dsdt$$

olur. Üçüncü terim için ;

$\delta w_s = V \quad , \quad \delta w_{ss}ds = dV$

$u = U \quad , \quad u_s = dU$ ile

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}uv^2\delta w_{ss}\delta(s-\xi)dsdt = \int_{t_0}^{t_1} \mu\frac{W}{g}v^2u\delta w_s\Big|_0^l dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\frac{W}{g}v^2u_s\delta w_s\delta(s-\xi)dsdt$$

$\delta w_s ds = dV \quad , \quad \delta w = V$

$u_s = U \quad , \quad u_{ss} = dU$ ile

$$=\int_{t_0}^{t_1}\mu\frac{W}{g}v^2u\delta w_s\Big|_0^l dt-\int_{t_0}^{t_1}\mu\frac{W}{g}v^2u_s\delta w\Big|_0^l dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mu\frac{W}{g}v^2u_{ss}\delta w\,\delta(s-\xi)dsdt$$

olur. $w\delta(F_y)$ ve $u\delta(F_x)$ için yukarıda bulunan değerler $F_x(\delta u)$ ve $F_y(\delta w)$ ile birlikte (2.23) ifadesinde yerine yazılır ve düzenleme yapılırsa ;

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Udt=\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left\{\mu\frac{W}{g}\left(\ddot{u}+2v\dot{u}_s+v^2u_{ss}\right)\delta(s-\xi)+\left[W+\frac{2W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\delta(s-\xi)\right]+mg\right\}\delta wdsdt$$
$$+\int_{t_1}^{t_1}\int_0^l\mu\left[W+\frac{W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\right]\delta(s-\xi)\delta udsdt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\mu\frac{W}{g}v^2u\delta(s-\xi)\delta w_s\Big|_0^l dt-\int_{t_0}^{t_1}\left(2\mu\frac{W}{g}v\dot{u}+\mu\frac{W}{g}v^2u_s\right)\delta(s-\xi)\delta w\Big|_0^l dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{W}{g}v^2w\delta(s-\xi)\delta w_s\Big|_0^l dt-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{2W}{g}v\dot{w}+\frac{W}{g}v^2w_s\right)\delta(s-\xi)\delta w\Big|_0^l dt$$
$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(R_{0X}u_0-R_{0Y}w_0+R_{LY}w_L\right)dt \tag{2.27}$$

ifadesi bulunur. U ' nun değişimi için bulunan bu değerler T ve U ile birlikte $\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U-V)dt=0$ ifadesinde yerine koyulur ve δu ' ya göre düzenlenirse

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l m\ddot{u}\delta udsdt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\mu\left[W+\frac{W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\right]\delta(s-\xi)\delta udsdt$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}\left\{-EA\int_0^l\left[u_{ss}+3u_{ss}u_sw_s^2+\frac{3}{2}w_s^3w_{ss}+w_sw_{ss}+3u_s^2w_sw_{ss}\right]\delta uds\right\}dt$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}EA\left(u_s+\frac{1}{2}w_s^2+\frac{3}{2}u_s^2w_s^2+\frac{3}{8}w_s^4\right)\delta u\Big|_0^l dt=0 \tag{2.28}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemdeki ifadeler δu parantezine alınır ve ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse ilk üç terimden ;

$$EA\left(u_{ss}+3u_{ss}u_sw_s^2+\frac{3}{2}w_s^3w_{ss}+w_sw_{ss}+3u_s^2w_sw_{ss}\right)-m\ddot{u}=-\mu\left[W+\frac{W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\right]\delta(s-\xi) \tag{2.29}$$

denklemi ve son terimden ;

$$EA\left(u_s+\frac{1}{2}w_s^{\,2}+\frac{3}{2}u_s^{\,2}w_s^{\,2}+\frac{3}{8}w_s^{\,4}\right)\delta u\Big|_0^l=0 \tag{2.30}$$

denklemi elde edilir. Bu son eşitlik bize ;

$$u_s+\frac{1}{2}w_s^{\,2}+\frac{3}{2}u_s^{\,2}w_s^{\,2}+\frac{3}{8}w_s^{\,4}\Big|_{s=l}=0 \tag{2.31}$$

$$u(0)=u_0=0$$

geometrik sınır koşullarını vermektedir. δu için yapılan düzenlemeler δw için de yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir ;

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l m\ddot{w}\,\delta w\,ds\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\left\{\mu\frac{W}{g}\left(\ddot{u}+2v\dot{u}_s+v^2u_{ss}\right)\delta(s-\xi)+\left[W+\frac{2W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\delta(s-\xi)\right]+mg\right\}\delta w\,ds\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}EJ\int_0^l\left(w_{ssss}+w_s^{\,2}w_{ssss}+4w_sw_{ss}w_{sss}+w_{ss}^{\,3}\right)\delta w\,ds\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}-EA\int_0^l\left\{u_{ss}w_s+3u_s^{\,2}u_{ss}w_s+\frac{3}{2}u_{ss}w_s^{\,3}+u_sw_{ss}+u_s^{\,3}w_{ss}+\frac{3}{2}w_s^{\,2}w_{ss}+\frac{9}{2}u_sw_s^{\,2}w_{ss}\right\}\delta w\,ds\,dt$$

$$+\left\{-EI(w_{ss}+w_s^{\,2}w_{ss}).\delta w_s+(w_sw_{ss}^{\,2}+w_{sss}+w_s^{\,2}w_{sss})\delta w\right\}\Big|_0^l$$

$$-\left\{EA.(u_s.w_s+u_s^{\,3}.w_s+\frac{1}{2}w_s^{\,3}+\frac{3}{2}u_sw_s^{\,3})\delta w\right\}\Big|_0^l$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\mu\frac{W}{g}v^2u\,\delta(s-\xi).\delta w_s\Big|_0^l.dt-\int_{t_0}^{t_1}\left[2\mu\frac{W}{g}v.\dot{u}+\mu\frac{W}{g}v^2.u_s\right]\delta(s-\xi)\delta w\Big|_0^l dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\frac{W}{g}v^2w\,\delta(s-\xi)\delta w_s\Big|_0^l dt-\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{2W}{g}v\dot{w}+\frac{W}{g}v^2w_s\right)\delta(s-\xi)\delta w\Big|_0^l dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left(R_{0X}.u_0-R_{0Y}.w_0+R_{LY}.w_L\right)dt=0 \tag{2.32}$$

Bu denklemdeki terimler δw parantezine alınır ve düzenleme yapılırsa ;

$$\begin{aligned}&EI\left[\left(w_{ssss}+w_s^{\,2}w_{ssss}+4w_sw_{ss}w_{sss}+w_{ss}^{\,3}\right)\right]\\&-EA\left[u_{ss}w_s+3u_s^{\,2}u_{ss}w_s+\frac{3}{2}u_{ss}w_s^{\,3}+u_sw_{ss}+u_s^{\,3}w_{ss}+\frac{3}{2}w_s^{\,2}w_{ss}+\frac{9}{2}u_sw_s^{\,2}w_{ss}\right]+m\ddot{w}\\&=\mu\frac{W}{g}\left(\ddot{u}+2v\dot{u}_s+v^2u_{ss}\right)\delta(s-\xi)+\left[W+\frac{2W}{g}\left(\ddot{w}+2v\dot{w}_s+v^2w_{ss}\right)\delta(s-\xi)\right]+mg\end{aligned} \tag{2.33}$$

ve ;

$$\left\{-EI(w_{ss}+w_s^2w_{ss}).\delta w_s+(w_sw_{ss}{}^2+w_{sss}+w_s^2w_{sss})\delta w\right\}\Big|_0^l$$
$$-\left\{EA(u_s.w_s+u_s^3.w_s+\frac{1}{2}w_s^3+\frac{3}{2}u_sw_s^3)\delta w\right\}\Big|_0^l=0 \tag{2.34}$$

denklemleri elde edilir. Son eşitlik bize ,

$$w_{ss}\ \Big|_0^l\ =0\qquad,\qquad w\Big|_0^l=0 \tag{2.35}$$

şeklinde dinamik ve geometrik sınır koşullarını vermektedir. Boyutsuz büyüklüklerle çalışmak kolaylık sağladığından aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır.

$$\frac{s}{L}=\bar{s}\quad,\quad\frac{w}{L}=\bar{w}\quad,\quad\frac{u}{L}=\bar{u}\quad,\quad\frac{\xi}{L}=\bar{\xi}=\frac{vt}{L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=L\frac{1}{L}.\bar{u}_s=\bar{u}_s\qquad\rightarrow\qquad u_s=\bar{u}_s$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial\bar{u}_s}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=\frac{1}{L}.\hat{u}_{ss}\qquad\rightarrow\qquad u_{ss}=\frac{1}{L}.\bar{u}_{ss}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=L\frac{1}{L}\bar{w}_s\qquad\rightarrow\qquad w_s=\bar{w}_s$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)=\frac{\partial\bar{w}_s}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=\frac{1}{L}\bar{w}_{ss}\qquad\rightarrow\qquad w_{ss}=\frac{1}{L}\bar{w}_{ss}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{L}\bar{w}_{ss}\right)=\frac{1}{L}\frac{\partial\bar{w}_{ss}}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=\frac{1}{L^2}\bar{w}_{sss}\qquad\rightarrow\qquad w_{sss}=\frac{1}{L^2}\bar{w}_{sss}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{L^2}\bar{w}_{sss}\right)=\frac{1}{L^2}\frac{\partial\bar{w}_{sss}}{\partial\bar{s}}\frac{\partial\bar{s}}{\partial s}=\frac{1}{L^3}\bar{w}_{ssss}\qquad\rightarrow\qquad w_{ssss}=\frac{1}{L^3}\bar{w}_{ssss}$$

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}=L\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\qquad\rightarrow\qquad\dot{u}=L\dot{\bar{u}}$$

$$\ddot{u}=\frac{\partial}{\partial t}(L.\dot{\bar{u}})=L.\ddot{\bar{u}}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = L\dot{\overline{w}} \qquad \rightarrow \qquad \dot{w} = L\dot{\overline{w}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{w} = L\ddot{\overline{w}}$$

$$\delta(s-\xi) \rightarrow \delta(\overline{s}L - \overline{\xi}L) \rightarrow \frac{\delta}{L}(\overline{s} - \overline{\xi})$$

Bu boyutsuz büyüklükler (2.29) denkleminde yerine koyulup her iki taraf $\frac{L}{EA}$ ile çarpılırsa ;

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_{ss} + 3\overline{u}_s.\overline{u}_{ss}\overline{w}_s^2 + \overline{w}_s\overline{w}_{ss} + 3\overline{u}_s^2\overline{w}_s\overline{w}_{ss} + \frac{3}{2}\overline{w}_s^3\overline{w}_{ss} - \frac{mL^2}{EA}.\ddot{\overline{u}} \\
&+ \mu\left[\frac{W}{EA} + \frac{W}{gEA}\left(L\ddot{\overline{w}} + 2v\dot{\overline{w}}_s + \frac{v^2}{L}w_{ss}\right)\right]\delta\left(\overline{s} - \overline{\xi}\right) = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

denklemi elde edilir. Verilen boyutsuz büyüklükler (2.33) denkleminde yerine koyulup her iki taraf bu kez $\frac{L^3}{EJ}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&\overline{w}_{ssss} + \overline{w}_s^2.w_{ssss} + 4\overline{w}_s\overline{w}_{ss}\overline{w}_{sss} + \overline{w}_{ss}^3 \\
&-\frac{EA}{EI}L^2\left[\overline{u}_{ss}\overline{w}_z + \frac{3}{2}\overline{u}_s\overline{u}_{ss}\overline{w}_z + \frac{3}{2}\overline{u}_{ss}\overline{w}_z^{\,3} + \overline{u}_s\overline{w}_{ss} + \frac{3}{2}\overline{w}_z^{\,2}\overline{w}_{ss} + \frac{9}{2}\overline{w}_z\overline{w}_z^{\,2}\overline{w}_{ss}\right] + \frac{mL^4}{EI}\ddot{\overline{w}} \\
&-\frac{mgL^3}{EI} - \frac{L^2}{EI}\left[W + \frac{2W}{g}\left(L\ddot{\overline{w}} + 2v\dot{\overline{w}}_s + \frac{v^2}{L}\overline{w}_{ss}\right)\right].\delta(\overline{s} - \overline{\xi}) \\
&-\mu\frac{W}{g}\frac{L^2}{EI}\left(L\ddot{\overline{u}} + 2v\dot{\overline{u}}_s + \frac{v^2}{L}\overline{u}_{ss}\right).\delta(\overline{s} - \overline{\xi}) = 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

denklemi elde edilir. (2.36) ve (2.37) denklemlerini uygun bir forma sokmak amacıyla aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım.

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{mL^2}{EA} \quad , \quad \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{L^2}{v^2} \quad , \quad \omega_3^2 = \frac{gEJ}{WL^3} \quad ,$$

$$\beta_1^2 = \frac{Wv^2}{gLEA} \quad , \quad \frac{\beta_1^2}{\omega_1^2} = \frac{WL}{gEA} \quad , \quad \frac{\beta_1^2}{\omega_2} = \frac{Wv}{gEA} \quad ,$$

$$\beta_4 = \frac{AL^2}{J} \quad , \quad \beta_5 = \frac{W}{mgL} \quad , \quad \frac{1}{\beta_5\omega_3^2} = \frac{mL^4}{EJ} \quad ,$$

$$\beta_6 = \frac{WL^2}{EI}.\left[\delta\left(\overline{s} - \overline{\xi}\right) + \frac{mgl}{W}\right] \quad , \quad \beta_7 = \frac{W}{EA}\delta(s-\xi)$$

Bu büyüklükler (2.36) ve (2.37) denklemlerinde yerine koyulup düzenleme yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir :

$$\overline{u}_{ss}+3\overline{u}_s\overline{u}_{ss}\overline{w}_s^2+\overline{w}_s\overline{w}_{ss}+3\overline{u}_s^2\overline{w}_s\overline{w}_{ss}+\frac{3}{2}\overline{w}_s^3\overline{w}_{ss}-\frac{1}{\omega_1^2}\ddot{\overline{u}}$$
$$+\mu\left[\beta_7+\beta_1^2\left(\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{\overline{w}}+\frac{2}{\omega_2}\dot{\overline{w}}_s+\overline{w}_{ss}\right)\right]\delta\left(\overline{s}-\overline{\xi}\right)=0 \tag{2.38}$$

$$\overline{w}_{ssss}+\overline{w}_s^2.w_{ssss}+4\overline{w}_s\overline{w}_{ss}\overline{w}_{sss}+\overline{w}_{ss}^3$$
$$-\beta_4\left[\overline{u}_{ss}\overline{w}_s+3\overline{u}_s^2\overline{u}_{ss}\overline{w}_s+\frac{3}{2}\overline{u}_{ss}\overline{w}_s^3+\overline{u}_s\overline{w}_{ss}+\overline{u}_s{}^3\overline{w}_{ss}+\frac{3}{2}\overline{w}_2^2\overline{w}_{ss}+\frac{9}{2}\overline{w}_s\overline{w}_s{}^2\overline{w}_{ss}\right]$$
$$-2\beta_2^2\left(\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{\overline{w}}+\frac{2}{\omega_2}\dot{\overline{w}}_s+\overline{w}_{ss}\right)\delta(\overline{s}-\overline{\xi}) \tag{2.39}$$
$$-\mu\beta_2^2\left(\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{\overline{u}}+\frac{2}{\omega_s}\dot{\overline{u}}_s+\overline{u}_{ss}\right).\delta(\overline{s}-\overline{\xi})+\frac{1}{\beta_5\omega_3^2}\ddot{\overline{w}}-\beta_6=0$$

Bu durumda sınır koşulları ;

$$w_{ss}\ \Big|_0^L=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{L}.\overline{w}_{ss}\ \Big|_0^1=0 \quad , \quad \overline{w}\ \Big|_0^1=0 \quad , \quad \overline{u}\ \Big|_{\overline{s}=o}=0$$
$$\overline{u}_s+\frac{1}{2}\overline{w}_s^2+\frac{3}{2}\overline{u}_s^2.\overline{w}_s^2+\frac{3}{8}\overline{w}_s^4\ \Big|_{\overline{s}=l}=0 \tag{2.40}$$

olur. Problem için başlangıç koşulları ;

$$t=0\ :\ \overline{w}=\dot{\overline{w}}=\overline{u}=\dot{\overline{u}}=0 \tag{2.41}$$

Şeklindedir. Bundan sonra (2.38) ve (2.39) denklemleri çözülmeye çalışılacaktır.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Yukarıda elde edilen (2.38) ve (2.39) hareket denklemleri hem lineer olmayan hem de girişimlidir. Çözüm güçlüğü nedeni ile burada yalnızca lineer hale ait çözüm yapılacak ve çözümde sonlu farklar yöntemi kullanılacaktır. Lineer olmayan terimlerin ihmal edilmesi ile hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$u_{ss}-\frac{1}{\omega_1^{\,2}}\ddot{u}+\mu\left[\beta_7+\beta_1^{\,2}\left\{\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{w}+\frac{2}{\omega_2}\dot{w}_s+w_{ss}\right\}\right]\delta(s-\xi)=0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}&w_{ssss}-2\beta_2^2\left\{\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{w}+\frac{2}{\omega_2}\dot{w}_s+w_{ss}\right\}\delta(s-\xi)\\&-\mu.\beta_2^2\left\{\frac{1}{\omega_2^2}\ddot{u}+\frac{2}{\omega_2}\dot{u}_s+u_{ss}\right\}\delta(s-\xi)+\frac{1}{\beta_5.\omega_3^2}\ddot{w}-\beta_6=0\end{aligned} \tag{3.2}$$

Yukarıdaki denklemlerde boyutsuz büyüklükler üzerindeki çizgiler ifade kolaylığı açısından kaldırılmıştır. Zamana bağlı problemlerin çözümünde, zaman aralığının çok küçük olması nedeni ile klasik türev ifadeleri hatalı sonuçlar verebilmektedir. Bu nedenle burada sonlu fark açılımları için Crank – Nicolson metodu kullanılmıştır (Smith, 1978). Bu metotta herhangi bir terim için, onun $j+1, j$ ve $j-1$ zaman aralığındaki sonlu fark ifadesi yazılmaktadır. Buna göre i kiriş üzerindeki istasyon noktalarını göstermek üzere ilgili türevler (3.1) ve (3.2) denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir ;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1}\right)+\frac{1}{2}\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)+\frac{1}{4}\left(u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1}\right)\right]\\&-\frac{1}{\omega_1^2.k^2}\left(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right)+\\&+\mu\beta_1^2\left(\frac{1}{\omega_2^2k^2}\left(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}\right)\right)+\frac{2}{\omega_2hk}\left(w_{i+1,j+1}-w_{i+1,j}+w_{i,j}-w_{i,j+1}\right)\\&+\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{4}\left(w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}\right)+\frac{1}{2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}\right)+\frac{1}{4}\left(w_{i+1,j-1}-2w_{i,j-1}+w_{i-1,j-1}\right)\right]\delta_{ir}\\&=-\mu\beta_7\end{aligned} \tag{3.3}$$

ve

$$\frac{1}{h^4}\left[\frac{1}{4}\left(w_{i+2,j+1}-4w_{i+1,j+1}+6w_{i,j+1}-4w_{i-1,j+1}+w_{i-2,j+1}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{h^4}\left[\frac{1}{2}\left(w_{i+2,j}-4w_{i+1,j}+6w_{i,j}-4w_{i-1,j}+w_{i-2,j}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{h^4}\left[\frac{1}{4}\left(w_{i+2,j-1}-4w_{i+1,j-1}+6w_{i,j-1}-4w_{i-1,j-1}+w_{i-2,j-1}\right)\right]$$
$$-2\beta_2^2\left[\frac{1}{\omega_2^2 k^2}\left(w_{i,j+1}-2w_{i,j}+w_{i,j-1}\right)+\frac{2}{\omega_2 hk}\left(w_{i+1,j+1}-w_{i+1,j}+w_{1,j}-w_{1,j+1}\right)\right]\delta_{ir}$$
$$-2\beta_2^2\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{4}(w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1})+\frac{1}{2}(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j})+\frac{1}{4}(w_{i+1,j-1}-2w_{i,j-1}+w_{i-1,j-1})\right]\delta_{ir}$$
$$-\mu\beta_2^2\left[\frac{1}{\omega_2^2 k^2}\left(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right)+\frac{2}{\omega_2 kh}\left(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j}-u_{i,j+1}\right)\right]\delta_{ir}$$
$$-\mu\beta_2^2\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{4}(u_{i+1,j+1}-2u_{i,j+1}+u_{i-1,j+1})+\frac{1}{2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})+\frac{1}{4}(u_{i+1,j-1}-2u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1})\right]\delta_{ir}$$
$$+\left(\frac{1}{\beta_5\omega_3^2}\right)\frac{1}{k^2}\left(w_{i,j+1}-2w_{1,j}+w_{i,j}\right)=\beta_6 \tag{3.4}$$

Yukarıdaki ifadelerde δ_{ir} olarak tanımlanan Kronecker deltası, daha önce karşılaşılan $\delta(s-\xi)$ terimini göstermektedir.

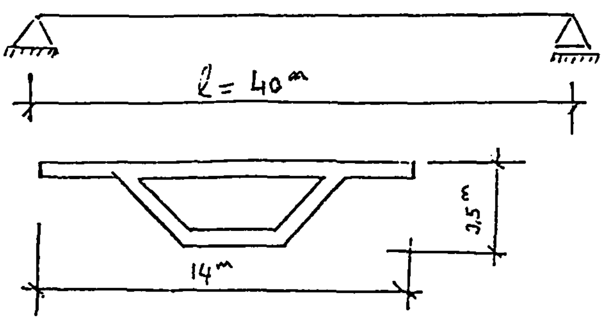
Bu durumda sınır ve başlangıç koşulları ;

$$\begin{array}{lll} w(0,t)=0 & w(s,0)=0 & \\ w(1,t)=0 & u(s,0)=0 & \\ w_{ss}(0,t)=0 & w_t(s,0)=0 & u(0,t)=0 \\ w_{ss}(1,t)=0 & u_t(s,0)=0 & u_s(1,t)=0 \end{array} \tag{3.5}$$

Yukarıdaki ifadelerde k ve h aralık olarak alınmaktadır. Sonlu fark açılımları yapıldıktan sonra elde edilen denklemler A.X=B şeklinde matris formunda düzenlenmekte ve denklem takımı çözülerek bilinmeyenler (yatay ve düşey yerdeğiştirmeler) bulunmaktadır. Burada A katsayılar matrisini, X bilinmeyenler vektörünü, B de sabitler vektörünü göstermektedir.

4. SAYISAL UYGULAMA VE SONUÇLAR

Aşağıda boyu ve kesit özellikleri verilen bir açıklıklı bir kiriş (köprü) örnek olarak ele alınmış ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir (Kwon vd., 1998).



$E = 3{,}303x10^{10}\ N/m^2$

$m_{kiriş} = 3852$ kg/m³

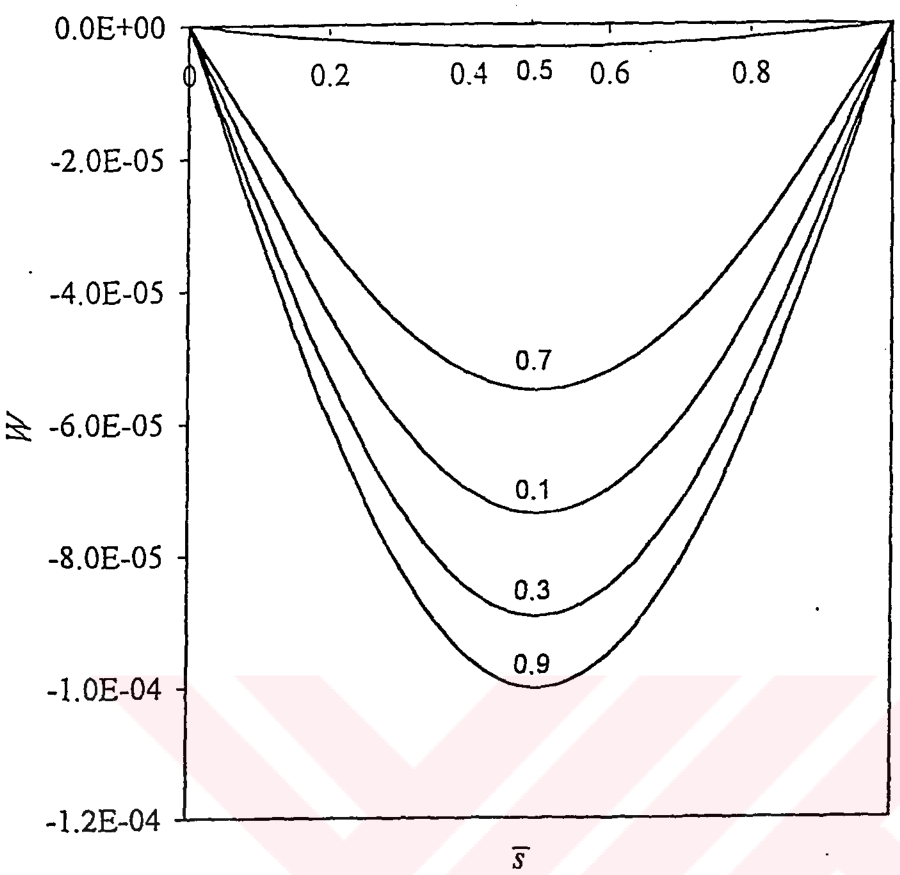
A= $11{,}332\ m^2$

J = $18{,}638\ m^4$

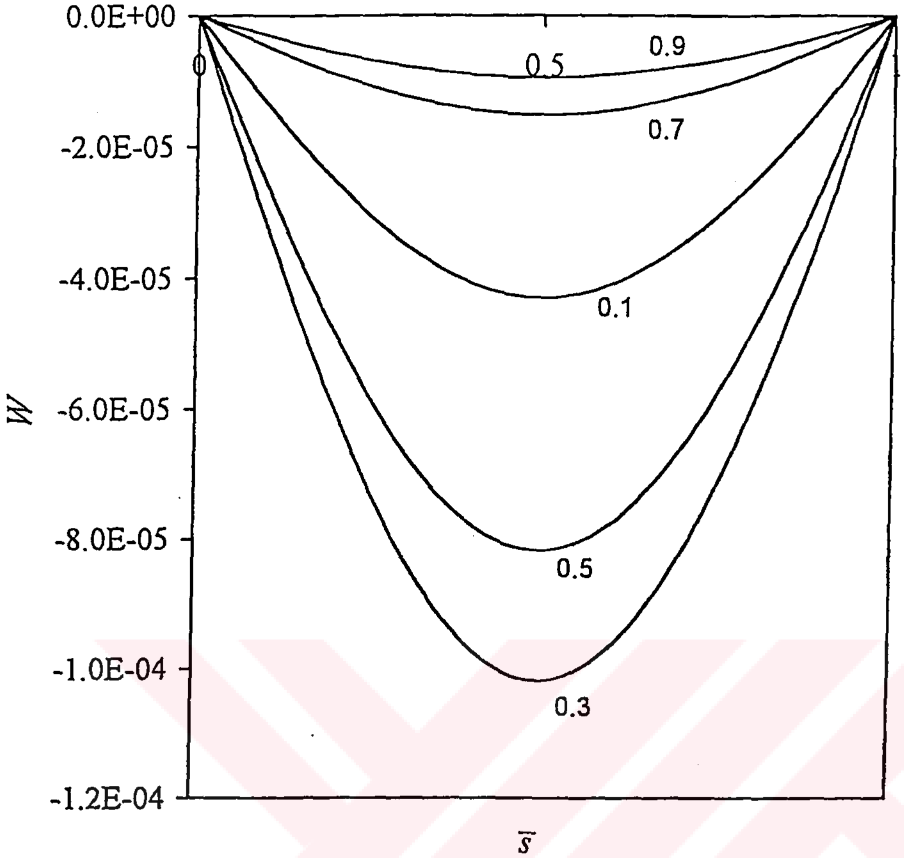
Şekil 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 de kütle oranı $\dfrac{M}{mL} = 0{,}5$, sürtünme katsayısı $\mu = 0{,}25$ alınarak değişik hızlar için kiriş düşey deplasmanları verilmiştir. Şekiller üzerindeki sayılar, kütlenin bulunduğu konumu göstermektedir. Şekillerden, hızların düşey deplasmanlar üzerinde büyük etkisi olduğu anlaşılmakta ve kütlenin herhangi bir konumu için, değişik hızlarda farklı deplasmanlar elde edildiği görülmektedir.

Şekil 4.5 de $M/mL = 0{,}5$, $\mu = 0{,}25$ için , değişik hızlarda sağ mesnetteki yatay yerdeğiştirmelerin, kütlenin bulunduğu konumla değişimi verilmiştir. Sayısal işlemlerin sonunda, yatay yer değiştirmelerin düşey yer değiştirmelere bağlı olduğu ve en küçük düşey deplasmanda en büyük yatay yerdeğiştirmenin ortaya çıktığı görülmüştür. Şekil 4.1 de en küçük düşey deplasmanının, kütle 0,5 te iken ortaya çıktığı ve bu durumda sağ mesnetteki yatay yer değiştirmenin diğer hızlar için bulunan değerlerle karşılaştırıldığında en büyük olduğu görülmektedir. Aynı şekilde, en büyük düşey yer değiştirme kütle 0,9 da iken olduğu, buna karşın yatay yer değiştirmenin de diğer hızlar için bulunan değerlerle karşılaştırıldığında en küçük olduğu görülmektedir. Bunun sonucu olarak, yatay kuvvetin (sürtünme kuvveti) düşey deplasmanlar üzerinde etkisi olduğu söylenebilir (Genin, Xu ve Xu, 1997).

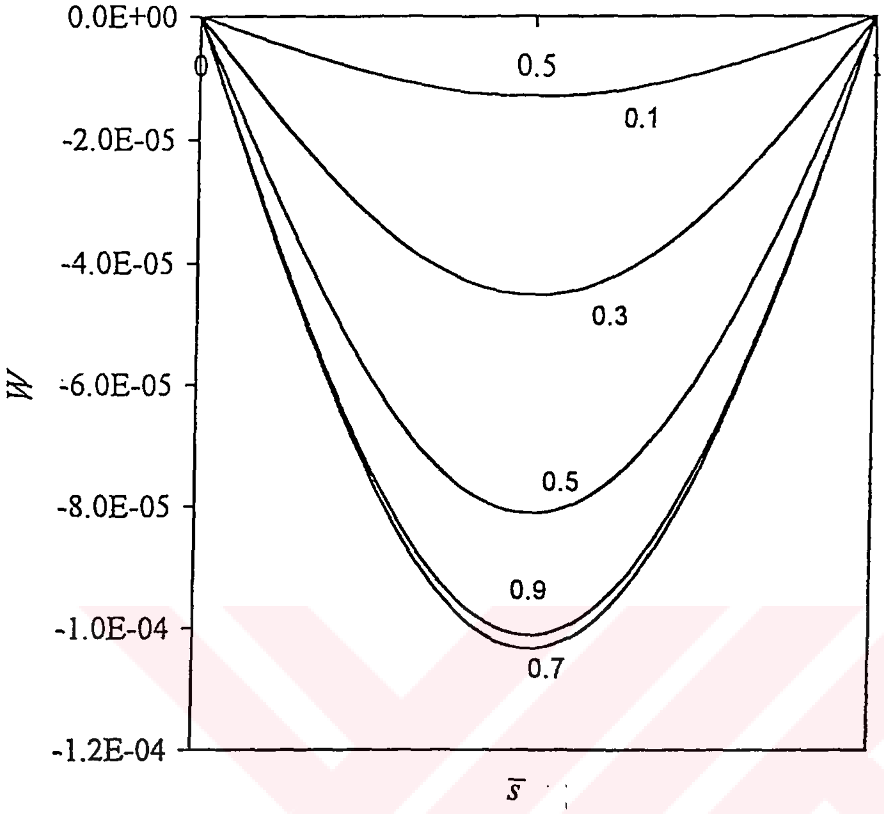
Şekil 4.6 ve 4.7 de $v = 300 km/h$ ve $\mu = 0{,}25$ için, kütle oranının düşey ve yatay deplasmanlar üzerindeki etkisi görülmektedir. Şekilden hareketli kütlenin büyümesi ile düşey ve yatay deplasmanlarında büyüdüğü görülmektedir.



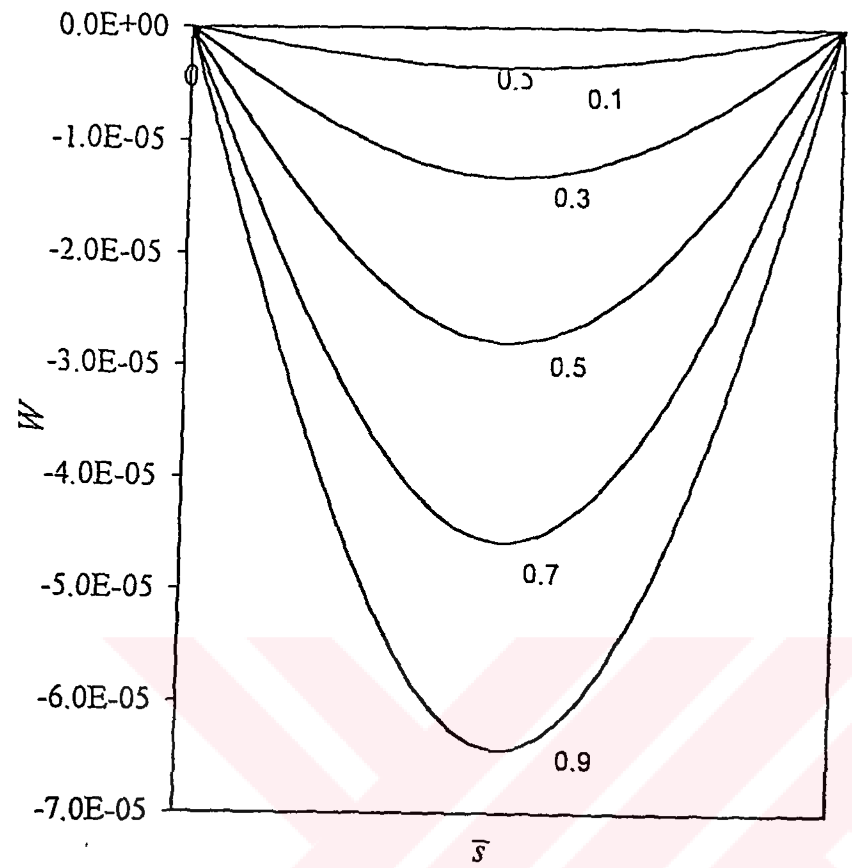
Şekil 4.1 V=300 km/h, μ=0.25 ve M/mL = 0.5 için kiriş düşey yer değiştirmeleri.



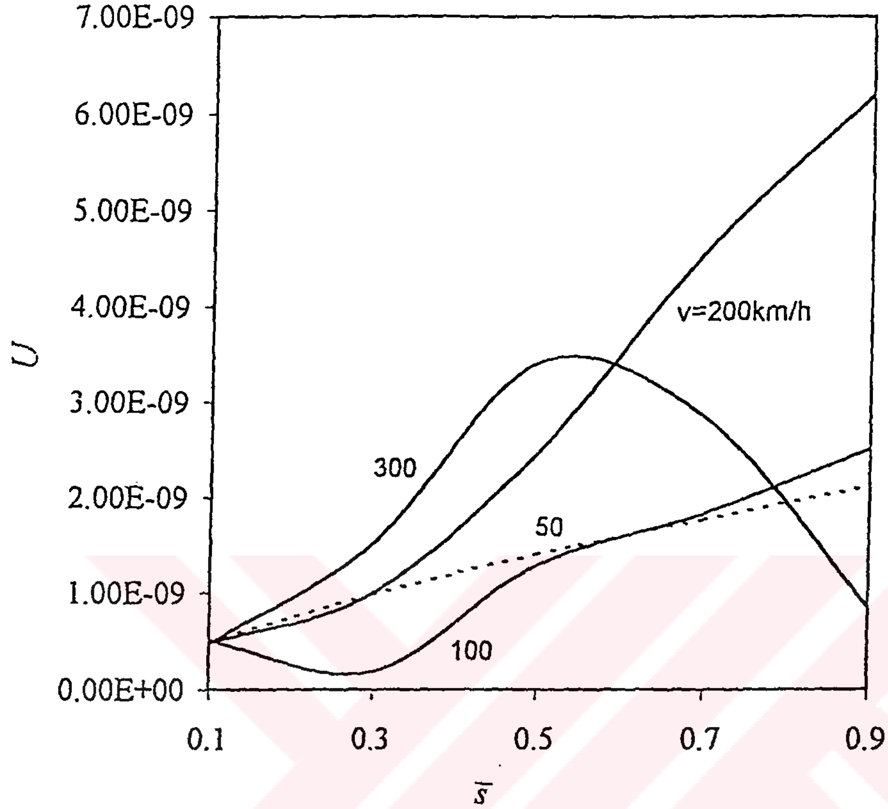
Şekil 4.2 V=200 km/h, μ=0.25 ve M/mL = 0.5 için kiriş düşey yer değiştirmeleri.



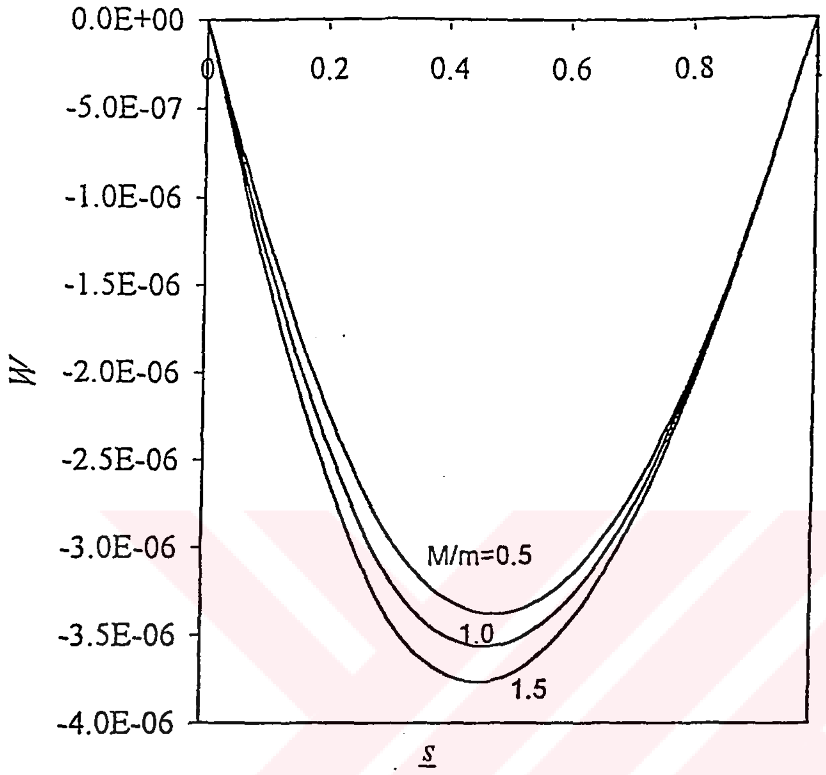
Şekil 4.3 V=100 km/h, μ=0.25 ve M/mL = 0.5 için kiriş düşey yer değiştirmeleri.



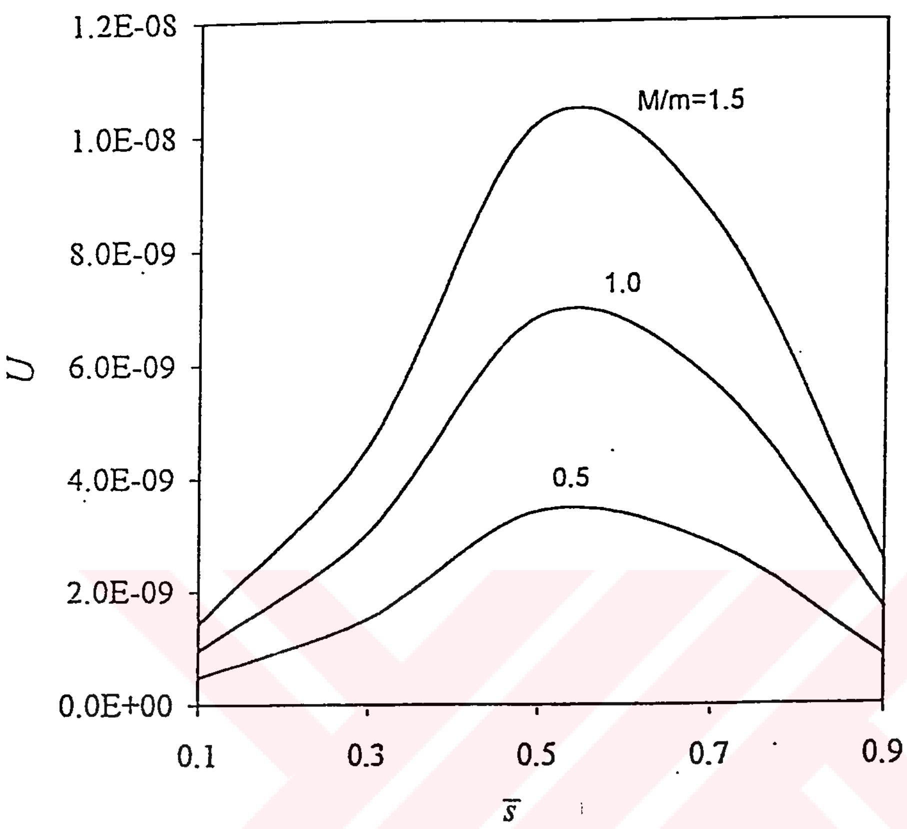
Şekil 4.4 V=50 km/h, μ=0.25 ve M/mL = 0.5 için kiriş düşey yer değiştirmeleri.



Şekil 4.5 M/mL = 0.5, μ = 0.25 için sağ mesnetteki yatay yer değiştirmelerin hızla değişimi.



Şekil 4.6 V=300 km/h, μ=0.25 ve kütle kirişin ortasında olması hali için düşey yer değiştirmelerin kütle oranına göre değişimi



Şekil 4.7 V=300 km/h, μ=0.25 için sağ mesnetteki yatay yer değiştirmelerin kütle oranına göre değişimi

KAYNAKLAR

Clough, R.W., Penzien, J., (1972), Dynamics of Structures.

Fryba, L., (1973), Vibrations of Solids and Structures Under Moving Loads, Groningen, The Netherlands, Noordhoff International Publishing.

Genin, J., Xu, W. , Xu , X., (1997), A Non Linear Moving Mass Problem, "Journal of sound and vibration", 204(3), 495-504

Genin, J., Ting, E.C., and Ginsberg, J.H., (1974), A General Algorithm for Moving Mass Problem "Journal of Sound and Vibration'', 33(1), 49-58.

Kwon, H.C., Kim, M.C., Lee, I.W., (1998), Vibration Control of Bridges Under Moving Loads, Computers and Structures, Vol.66, No.4 : 473-480.

Smith, G.D., (1978), Numerical Solition of Partial Differential Equations, Oxford, Clarendon Press.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	31.07.1974	
Doğum yeri	Çanakkale	
Lise	1987 – 1990	İzmir Atatürk Lisesi
Lisans	1990 – 1995	Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü

Çalıştığı Kurumlar

	1996 – 1999	Peri Kalıp ve İskeleleri Ltd. Şti.
	1999 – 2000	Bakım Onarım ve İstihkam Komutanlığı Turan / İzmir
	2001 – 2002	Temsa İş Makinaları A.Ş. İzmir.