

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

128587

**PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN SONLU BİR KİRİŞİN
TEKİL HARMONİK YÜK ETKİSİ ALTINDAKİ
DAVRANIŞININ İNCELENMESİ**

İnşaat Mühendisi Tolga BANK

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN

128587
İrfan Coşkun

Prof. Dr. Hasan Engin,

Hasan Engin

İSTANBUL, 2002 -

Prof. Dr. Turqut Koçataş

T. Koçataş

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	4
3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ	8
3.1 Sonlu Fark Denklemlerinin Elde Edilişi.....	8
3.2 Sonlu Fark Denklemlerinin Çözümü	12
4. SONUÇLAR.....	17
KAYNAKLAR	29
ÖZGEÇMİŞ.....	30

SİMGE LİSTESİ

A	Katsayılar matrisi
EJ	Eğilme rijitliği
G	Kayma tabakası parametresi
k	Winkler zemin modülü (orantı katsayısı)
k_θ	Birim dönme başına birim boydaki tepki momenti
l	Kiriş ayrılma boyu
L	Kiriş yarı boyu
m	Birim boydaki kütle
M	Eğilme momenti
p	Zemin tepki kuvveti
P_0	Yükün genliği
$P(t)$	Harmonik tekil yük
S	Çekme kuvveti
T	Kesme kuvveti
w	Düşey deplasman
w_1	Temas bölgesindeki kiriş deplasmanı
w_2	Ayrılma bölgesindeki kiriş deplasmanı
w_3	Zemin yüzeyinin deplasmanı
X	Ayrılma noktasının koordinatı
\vec{X}	Bilinmeyenler vektörü
Ω	Zorlama fonksiyonunun frekansı
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
ξ	Boyutsuz koordinat
λ	Boyutsuz Winkler zemin parametresi
λ_G	Boyutsuz Pasternak zemin parametresi
$\bar{\Omega}$	Boyutsuz zorlama frekansı (frekans parametresi)
ρ	Boyutsuz kütle oranı
\bar{P}_0	Boyutsuz yük

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Orta noktasından harmonik tekil yüke maruz kiriş	4
Şekil 2.2	Kirişten çıkarılan eleman.....	4
Şekil 3.1	Kirişin temas bölgesinin h aralıklı N bölgeye bölünüşü	9
Şekil 3.2	Kirişin ayrılma bölgesinin h aralıklı M bölgeye bölünüşü.....	10
Şekil 4.1	$\lambda = 50$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi	19
Şekil 4.2	$\lambda = 100$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi	20
Şekil 4.3	$\lambda = 200$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi	21
Şekil 4.4	$\lambda = 100$, $\bar{\Omega} = 0$ için elastik eğriler (statik hal).....	22
Şekil 4.5	$\lambda = 100$, $\bar{\Omega} = 0.2$ için elastik eğriler	23
Şekil 4.6	$\lambda = 100$, $\bar{\Omega} = 0.4$ için elastik eğriler (1.çözüm).....	24
Şekil 4.7	$\lambda = 100$, $\bar{\Omega} = 0.4$ için elastik eğriler (2.çözüm).....	25
Şekil 4.8	$\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.2$ için elastik eğriler.....	26
Şekil 4.9	$\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.6$ için elastik eğriler (1.çözüm).....	27
Şekil 4.10	$\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.6$ için elastik eğriler (2.çözüm).....	28

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans bitirme tezinde çekme almadığı kabul edilen Pasternak zeminine oturan sonlu bir kirişin ortasından tekil harmonik yüke maruz halde davranışı incelenerek, kirişin zeminden ayrılma noktasının koordinatları araştırılmıştır.

Bu tezin hazırlanması aşamasında tecrübelerinden sürekli faydalandığım çok değerli görüş ve yönlendirmeleriyle beni destekleyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İrfan COŞKUN'a candan teşekkürlerimi sunarım.



ÖZET

Bu çalışmada çekme almayan Pasternak zeminine oturan sonlu bir kirişin harmonik tekil yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Kirişin zemine tam batmadığı ve Bernoulli – Euler hipotezinin geçerli olduğu kabul edilerek, ortaya çıkan temas ve ayrılma bölgeleri için hareket denklemleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Bu tür problemlerde ayrılma noktasının koordinatı (temas bölgesi) başlangıçta bilinmediğinden, sınır ve süreklilik koşullarının doğrusal olmasına rağmen, problem bu koordinata göre doğrusal olmamaktadır. Elde edilen denklemlerde gerekli boyutsuzlaştırmalar yapılmış ve ilgili sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak sonlu farklar yöntemi yardımıyla problem sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda çeşitli frekans oranları ve zemin parametreleri için ayrılma noktasının yerinin değişimi ve kiriş elastik eğrileri ile zemin yüzeyinin durumu grafikler yardımıyla verilmiştir.

Anahtar Kelimeler:Harmonik yük, Pasternak zemini, sonlu kiriş, sonlu farklar.

ABSTRACT

This study examines the response of a finite beam resting on a tensionless Pasternak foundation under the effect of a harmonic concentrated load. The governing equations for the contact and the non-contact regions of the beam are obtained considering the Bernoulli-Euler hypothesis and with an assumption that the beam doesn't sink into the foundation exactly. In such problems, since the contact regions are not known in advance, the problem appears as a nonlinear one even though the boundary and continuity conditions are linear. The governing equations are written in dimensionless form and then solved numerically with the help of finite differences method by using the related boundary and continuity conditions. The variation of the position of the lift-off points, elastic curves of the beam and the position of the foundation surface with respect to some parameters are presented in the figures.

Abstract:Harmonic load, Pasternak foundation, finite beam, finite differences



1. GİRİŞ

Elastik zemin üzerine oturan kirişler mühendislikte çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Burada kirişle zeminin karşılıklı etkileşimi sözkonusu olduğundan problemin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi, zeminin karmaşık yapısı nedeniyle bazı idealleştirmeler yapılmasını gerektirmektedir. Bilindiği gibi zemin oldukça karışık ve belirsiz elastik özellikleri olan ve plastik deformasyon yapabilen bir ortamdır. Bu da problemin matematiksel çözümünü sınırlandırmaktadır.

Elastik zemine oturan kiriş problemlerinde, zemin sürekli bir ortam gibi alınabildiği gibi tekil yaylardan oluşan bir sistem gibi de düşünülebilmektedir. Yapısının kolaylığı nedeniyle, zemin çoğunlukla tekil yaylardan oluşan bir ortam gibi düşünülmüş ve birçok model geliştirilmiştir. Bu modeller Winkler, Pasternak, Filonenko-Borodich, Genelleştirilmiş model ve Vlasov modeli olarak bilinmektedir.

Geliştirilen bu modeller esas olarak zemin tepkisi hakkında yapılan kabullere dayanmaktadır. Winkler modelinde zeminin kirişe yerdeğiştirme ile orantılı olarak tepki gösterdiği kabul edilmekte ve bu tepki kuvveti $p(x) = kw(x)$ ile ifade edilmektedir. Burada k Winkler zemin modülünü (orantı katsayısını), w deplasmanı ve p 'de tepki kuvvetini göstermektedir. Bu model diğer modeller arasında en basit olanı ve en yaygın kullanılanıdır.

Diğer zemin modellerinde yaylar arasındaki etkileşimi de gözönüne almak için ikinci bir parametre dikkate alınmıştır.

Pasternak modelinde, ortamı oluşturan yayların üst yüzeylerinden kayma mukavemeti olan bir tabakaya tutturuldukları kabul edilerek yaylar arasındaki kayma etkileşimi dikkate alınmıştır. Bu modelde p tepki kuvveti $p(x) = kw(x) - G(d^2w(x)/dx^2)$ ile hesaplanmaktadır. Burada G kayma tabakası parametresini göstermektedir.

Filonenko-Borodich zemin modelinde zemin tepkisi $p(x)=kw(x)-S(d^2w/dx^2)$ ile hesaplanmakta ve yayların üst uçlarından S çekme kuvvetine maruz elastik bir zarla birbirine tutturulduğu kabul edilmektedir.

Genelleştirilmiş zemin modelinde , temas noktasında basınç kuvvetine ilave olarak moment etkisi de dikkate alınmakta ve zemin tepkisi $p(x)=kw(x)-k_\theta(d^2w(x)/dx^2)$ ile hesaplanmaktadır. Burada k_θ , birim dönme başına birim boydaki tepki momenti olarak alınmaktadır.

Vlasov modelinde zemin yarı sonsuz bir ortam gibi alınmakta ve tepki kuvveti $p(x) = kw(x) - t(d^2w/dx^2)$ ile hesaplanmaktadır. Burada t , elastik sabitlerden ve kiriş boyutlarından elde edilen bir parametreyi göstermektedir.

Yukarıda verilen modeller matematik bakımdan birbirine eşdeğer olup tek fark S , G , k_θ ve t parametrelerinin tanımında ortaya çıkmaktadır.

Uygulama alanının genişliği nedeniyle elastik zemine oturan kirişlerin statik ve dinamik davranışları konusunda çok sayıda çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmaların büyük çoğunluğunda Winkler zemini dikkate alınmış ve zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı kabul edilmiştir. Winkler zemin modelinin, ortamı oluşturan yaylar arasındaki etkileşimi dikkate almaması nedeniyle yukarıdaki modeller geliştirilmiştir. Kerr (1964), Rao (1975), Valsangkar ve Pradhanang (1988), Eisenberger ve Clastornik (1987), Yokoyama (1991), Eisenberger (1994) yukarıda değinilen zemin modellerini dikkate alarak, bu tür zeminlere oturan kirişlerin titreşimlerini incelemişlerdir. Daha gerçekçi bir yaklaşım olarak zeminin çekme almadığı veya çok az aldığı kabul edilmektedir. Weitsman (1970) ve Kerr ve Coffin (1991) çalışmalarında kirişin statik olarak etkiyen tekil yük etkisi altında batmasını ve kirişin zeminden ayrılma noktalarını incelemişlerdir. Yalnız basınca çalışan zemine oturan kirişlerin dinamik davranışları son otuz yıl içinde araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Kirişin zeminden ayrıldığı bölgelerde, zeminin etkisinin olmaması nedeniyle sistemin davranışı değişmektedir. Ayrılma noktasının yerinin bilinmemesi nedeniyle, hareket denklemleri ve sınır koşulları doğrusal olduğu halde ayrılma noktasının yerini veren ve doğrusal olmayan bir denklem ile karşılaşılmaktadır. Bu doğrusal olmayan denklem takımının kökleri hesaplanarak kirişin zeminden ayrıldığı noktalar elde edilmektedir. Her adımda bu denklem takımının kök hesabı gerektiğinden, bu tür problemler ayrı bir güçlük taşımaktadır. Bu konudaki ilk çalışmalar Weitsman (1971), Rao (1974) ve Choros ve Adams (1979) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda yalnız basınca çalışan elastik zemin üzerine oturan kirişlerin hareketli yükler altındaki davranışları incelenmiştir. Celep vd. (1989) çekmeye çalışmayan Winkler zemine oturan sonlu bir kirişin dinamik davranışını incelemiş ve çeşitli yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının yerinin değişimini incelemişlerdir.

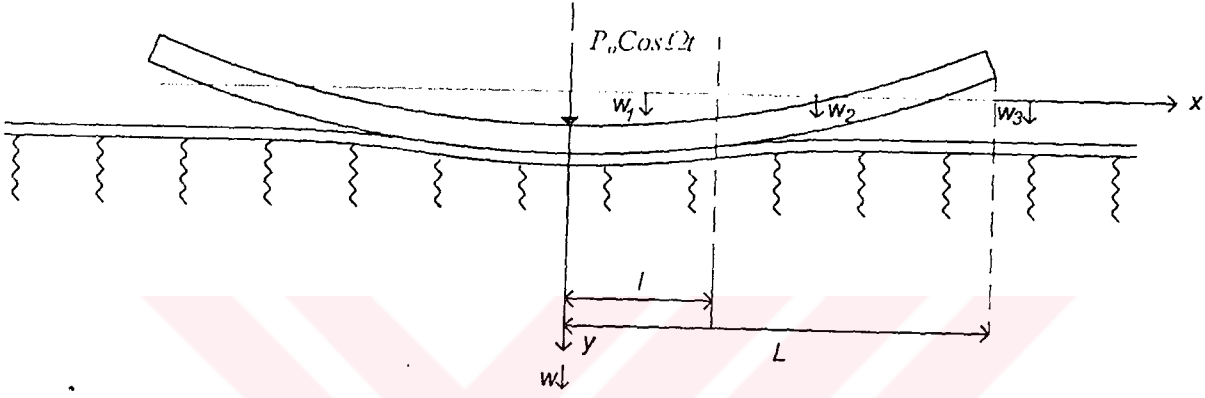
Coşkun ve Engin (1999) ortasından tekil harmonik yüke maruz çekme almayan bir zemin üzerine oturan kiriş problemini incelemiş ve zemini lineer olmayan bir Winkler zemini olarak ayrılma noktasının yerinin çeşitli parametrelere göre değişimini incelemişlerdir. Özdoğan vd. (1995) yalnız basınç aktaran Pasternak zeminine oturan bir kirişin zorlanmış titreşimlerini incelemiş ve ayrılma noktasının yerinin çeşitli parametrelere göre değişimini grafikler yardımıyla vermişlerdir.

Yapılan bu çalışmada Pasternak zeminine oturan, ortasından tekil harmonik yüke maruz bir kirişin davranışı incelenmiş ve ayrılma noktasının koordinatları sayısal bir yöntemle hesaplanarak sonuçlar grafikler yardımıyla verilmiştir.



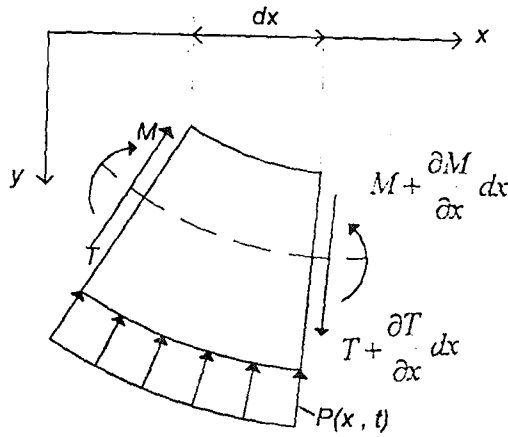
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi yalnız basınç gerilmesi aktaran, Pasternak zeminine oturan $2L$ boyunda bir kiriş gözönüne alalım. Kiriş homojen olup orta noktasından $P(t)=P_0\cos\Omega t$ harmonik tekil yüküne maruzdur. Burada P_0 yükün genliğini, Ω ise zorlama fonksiyonunun frekansını göstermektedir. Zeminin çekme gerilmesi almaması nedeniyle herhangi bir anda kiriş ve zemin yüzeyi Şekil 2.1’deki gibi olacaktır.



Şekil 2.1 Orta noktasından harmonik tekil yüke maruz kiriş

Kiriş hareket denklemini elde etmek için kirişten dx boyunda bir elemanı çıkaralım (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 Kirişten çıkarılan eleman

Burada M eğilme momentini, T kesme kuvvetini, m kiriş ve zemine ait birim boydaki kütleyi, $p(x,t)$ ise zemin tepkisini göstermektedir.

Bu eleman için düşey yönde hareket denklemi yazılırsa;

$$-T + \left[\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] - p dx = m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dx \quad (2.1)$$

denklemini elde edilir. Zemin tepkisi için $p = kw - G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ ve kütle için $m = m_z + m_k$ yazılırsa;

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \left[kw - G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = (m_k + m_z) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (2.2)$$

denklemini elde edilir. Burada G kayma tabakası parametresini, m_z ve m_k da zemin ve kirişe ait birim boyun kütlelerini göstermektedir. Eğim ve düşey yerdeğişikliklerin küçük olduğu ve kiriş için Bernoulli –Euler hipotezinin geçerli olduğu kabul edilmektedir. Bilindiği gibi EJ kiriş eğilme rijitliği olmak üzere moment ve eğrilik arasında ;

$$-\frac{M}{EJ} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

bağıntısı ve kesme kuvveti ile eğilme momenti arasında da

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \quad (2.4)$$

bağıntısı bulunmaktadır. (2.4) ve (2.3) denklemlerinde gerekli türevler alınıp bulunan değerler (2.2) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \left[kw - G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + (m_k + m_z) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Zemin çekme gerilmesi aktarmadığı için kiriş $\pm l$ noktalarında zeminden ayrılmakta ve kiriş elastik eğrisi ile zemin tabakasının durumuna göre üç bölge ortaya çıkmaktadır (Şekil 2.1). Bu bölgelerde; w_1 temas bölgesindeki kiriş deplasmanını, w_2 ayrılma bölgesindeki kiriş deplasmanını, w_3 ise zemin yüzeyinin deplasmanını göstermektedir. Simetri nedeniyle hesaplarda $0 \leq x < \infty$ bölgesi gözönüne alınacaktır.

Birinci bölgede dış yük olarak yalnızca $P_0 \text{Cos}\Omega t$ yükü bulunduğu, ikinci bölgede hem dış yük olmadığı hem de zemin etkisinin ortadan kalktığı ve üçüncü bölgede de hem kiriş hem de dış yük etkisi olmadığı gözönüne alınırsa, bu üç bölge için hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$EJ \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + (m_k + m_z) \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + kw_1 - G \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} = P_0 \delta(x_1) \text{Cos}\Omega t \quad 0 \leq x_1 < l \quad (2.6)$$

$$EJ \frac{\partial^4 w_2}{\partial x_2^4} + m_k \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0 \quad l \leq x_2 < L \quad (2.7)$$

$$G \frac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2} - kw_3 - m_z \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = 0 \quad l \leq x_3 < \infty \quad (2.8)$$

Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonunu, l 'de kiriş ayrılma boyunu göstermektedir. Kiriş etkileyen yük harmonik olduğuna göre kiriş ve zeminin davranışı da harmonik olacaktır. Buna göre yerdeğiştirme için ;

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \text{Cos}\Omega t \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

ayrıştırması yapılabilir. Boyutsuz büyüklüklerle çalışmanın sağladığı kolaylıklardan dolayı aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \lambda = \frac{kL^4}{EJ}, \quad \lambda_G = \frac{GL^2}{EJ}, \quad X = \frac{l}{L}, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{m_k}{k} \Omega^2, \quad \rho = \frac{m_k}{m_z}, \quad \bar{P}_0 = \lambda \frac{P_0}{kL} \quad (2.10)$$

Bu boyutsuzlaştırmalardan sonra (2.6), (2.7) ve (2.8) denklemleri;

$$\frac{d^4 W_1}{d\xi_1^4} - \lambda_G \frac{d^2 W_1}{d\xi_1^2} + \lambda \left[1 - \bar{\Omega}^2 \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \right] W_1 = \bar{P}_0 \delta(\xi_1), \quad 0 \leq \xi_1 < X \quad (2.11)$$

$$\frac{d^4 W_2}{d\xi_2^4} - \lambda \bar{\Omega}^2 W_2 = 0, \quad X \leq \xi_2 < 1 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2 W_3}{d\xi_3^2} - \frac{\lambda}{\lambda_G} \left[1 - \frac{\bar{\Omega}^2}{\rho} \right] W_3 = 0, \quad X \leq \xi_3 < \infty \quad (2.13)$$

olur. Burada X ayrılma noktasının koordinatını gösteren ve henüz bilinmeyen bir parametredir. Probleme ait sınır ve süreklilik koşulları ise simetri, ayrılma noktasındaki

çökmelerin, eğimlerin, kesme kuvveti ve eğilme momentlerinin eşitliği gözönünde tutularak yazılabilir. Ayrıca kirişin boş ucunda kesme kuvveti ve eğilme momenti sıfır olmakta, üçüncü bölge yüzeyinin deplasmanı, ξ 'nin sonsuza gitmesi halinde, sonlu kalmaktadır. Bunlar topluca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W'(0)=0 \quad , \quad W_1(X)=W_2(X) \quad , \quad W_1'(X)=W_2'(X) \quad , \quad W_1''(X)=W_2''(X) \quad , \quad W_1'''(0)=\frac{\bar{P}_0}{2}$$

$$W_1'''(X)=W_2'''(X) \quad , \quad W_1(X)=W_3(X) \quad , \quad W_1'(X)=W_3'(X) \quad , \quad W_2''(1)=0 \quad , \quad W_2'''(1)=0$$

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow \infty} W_3(\xi_3) \rightarrow \text{sonlu} \quad (2.14)$$

Görüldüğü gibi 11 adet koşul yazılabilmektedir. Bu koşulların sayısı, diferansiyel denklemlerin mertebeleri ve bilinmeyen X değeri dikkate alındığında, çözüm için yeterli olmaktadır.

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

3.1. Sonlu Fark Denklemlerinin Elde Edilişi

Bu bölümde yukarıda elde edilen (2.11), (2.12) ve (2.13) denklemlerinin (2.14) sınır ve süreklilik koşulları altındaki çözümü, sonlu farklar yöntemi yardımıyla sayısal olarak yapılacaktır. Parametre sayısını azaltmak için çözümde $\rho = 1$ yani $m_k = m_z$ alınacaktır. Bu durumda (2.11), (2.12) ve (2.13) denklemleri $(dW/dx) = W'$ gösterimi ile aşağıdaki gibi olur.

$$W_1^{IV} - \lambda_G W_1'' + \lambda (1 - 2\bar{\Omega}^2) W_1 = \bar{P}_0 \delta(\xi_1) \quad (3.1)$$

$$W_2^{IV} - \lambda \bar{\Omega}^2 W_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$W_3'' - \frac{\lambda}{\lambda_G} (1 - \bar{\Omega}^2) W_3 = 0 \quad (3.3)$$

Sonlu farklar, uygulama alanı oldukça geniş bir yöntem olup kiriş, plak v.b. türden problemlerin çözümünde oldukça sık kullanılan yaklaşık bir sayısal yöntemdir. Yöntemin esası, ilgili diferansiyel denklemi sonlu farklardan oluşan yaklaşık cebirsel bir denkleme dönüştürmektir. Herhangi bir i . nokta için çeşitli mertebeden türevler, sonlu farklar ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$W_i' = \frac{W_{i+1} - W_i}{h} \quad (\text{ileri fark}),$$

$$W_i' = \frac{W_i - W_{i-1}}{h} \quad (\text{geri fark}),$$

$$W_i' = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2h} \quad (\text{merkezi fark}),$$

$$W_i'' = \frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{h^2} \quad (\text{merkezi fark}),$$

$$W_i''' = \frac{1}{2h^3} (5W_i - 18W_{i-1} + 24W_{i-2} - 14W_{i-3} + 3W_{i-4}) \quad (\text{geri fark}),$$

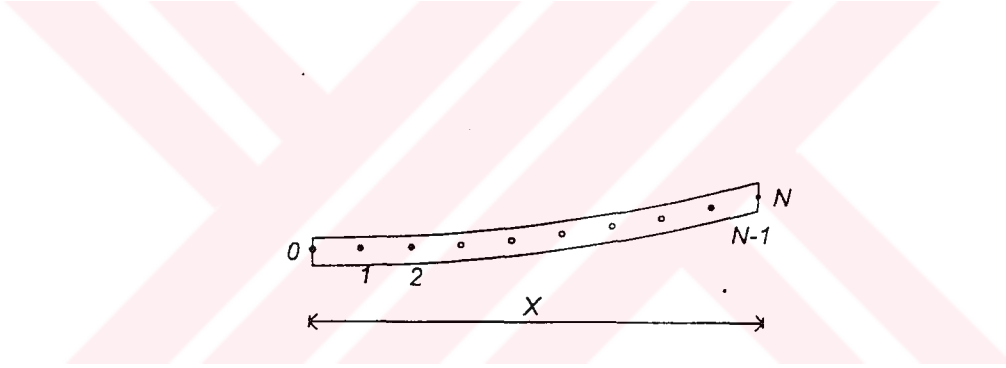
$$W_i''' = \frac{1}{2h^3} (-5W_i + 18W_{i+1} - 24W_{i+2} + 14W_{i+3} - 3W_{i-4}) \quad (\text{ileri fark}),$$

$$W_i'' = \frac{1}{h^4} (W_{i+2} - 4W_{i+1} + 6W_i - 4W_{i-1} + W_{i-2}) \quad (\text{merkezi fark}),$$

(3.4)

Burada h noktalar arasındaki mesafeyi göstermektedir.

(3.1) denkleminin çözümü için sonlu fark denklemlerini elde etmek amacıyla temas bölgesi Şekil (3.1)'deki gibi h aralıklı N bölgeye ayrılmaktadır. Bu bölgede herhangi bir i . nokta için (3.1) denklemi aşağıdaki gibi olur:



Şekil 3.1 Kirişin temas bölgesinin h aralıklı N bölgeye bölünüşü

$$\frac{1}{h^4} (W_{1,i-2} - 4W_{1,i-1} + 6W_{1,i} - 4W_{1,i+1} + W_{1,i+2}) - \frac{\lambda_G}{h^2} (W_{1,i-1} - 2W_{1,i} + W_{1,i+1}) + \lambda (1 - 2\bar{\Omega}^2) W_{1,i} = 0$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

(3.5)

olur. Bu denklemde $\lambda_D = \lambda (1 - 2\bar{\Omega}^2)$, $\alpha_1 = -4 - \lambda_G h^2$, $\alpha_2 = 6 + 2\lambda_G h^2 + \lambda_D h^4$

kısaltmaları yapılırsa denklemin son şekli aşağıdaki gibi olur.

$$W_{1,i-2} + \alpha_1 W_{1,i-1} + \alpha_2 W_{1,i} + \alpha_1 W_{1,i+1} + W_{1,i+2} = 0 \quad (3.6)$$

Bu denklemde $i = 1, 2, 3, \dots, N-1$ alınır ;

$$i=1 : W_{1,-1} + \alpha_1 W_{1,0} + \alpha_2 W_{1,1} + \alpha_1 W_{1,2} + W_{1,3} = 0$$

$$i=2 : W_{1,0} + \alpha_1 W_{1,1} + \alpha_2 W_{1,2} + \alpha_1 W_{1,3} + W_{1,4} = 0$$

(3.7)

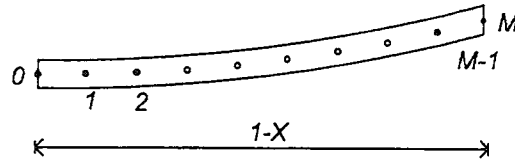
$$i=3 : W_{1,1} + \alpha_1 W_{1,2} + \alpha_2 W_{1,3} + \alpha_1 W_{1,4} + W_{1,5} = 0.$$

$$i=N-1 : W_{1,N-3} + \alpha_1 W_{1,N-2} + \alpha_2 W_{1,N-1} + \alpha_1 W_{1,N} + W_{1,N+1} = 0$$

denklemler elde edilmiş olur. (N-1) sayıdaki bu denklemler takımında $W_{1,-1}, W_{1,0}, W_{1,i}$

($i=1, \dots, N$) ve $W_{1,N+1}$ olmak üzere toplam (N+3) bilinmeyen ortaya çıkmaktadır.

(3.2) denkleminin çözümü için, ikinci bölge de h aralıklı M bölgeye ayrılmaktadır.



Şekil 3.2 Kirişin ayrılma bölgesinin h aralıklı M bölgeye bölünüşü

Bu halde $h = (1-X)/M$ olmakta (Şekil 3.2) ve herhangi bir i noktası için (3.2) denklemini aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\frac{1}{h^4}(W_{2,i-2}-4W_{2,i-1}+6W_{2,i}-4W_{2,i+1}+W_{2,i+2})-\lambda\bar{\Omega}^2W_{2,i}=0 \quad i=1,2,\dots,M-1 \quad (3.8)$$

Bu denklemde $\beta_I = 6 - h^4 \lambda \bar{\Omega}^2$ kısaltması yapılırsa;

$$W_{2,i-2} - 4W_{2,i-1} + \beta_1 W_{2,i} - 4W_{2,i+1} + W_{2,i+2} = 0 \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde ($i=1,2, \dots, M-1$) alınırsa :

$$i=1 : W_{2,-1} - 4W_{2,0} + \beta_1 W_{2,1} - 4W_{2,2} + W_{2,3} = 0$$

$$i=2 : W_{2,0} - 4W_{2,1} + \beta_1 W_{2,2} - 4W_{2,3} + W_{2,4} = 0$$

(3.10)

$$i=3 : W_{2,1} - 4W_{2,2} + \beta_1 W_{2,3} - 4W_{2,4} + W_{2,5} = 0$$

.

.

.

$$i=M-1 : W_{2,M-3} - 4W_{2,M-2} + \beta_1 W_{2,M-1} - 4W_{2,M} + W_{2,M+1} = 0$$

denklem takımı elde edilir. (M-1) sayıdaki bu denklem takımında, $W_{2,-1}$, $W_{2,0}$, $W_{2,j}$

($j=1,2,\dots,M$) ve $W_{2,M+1}$ olmak üzere toplam (M+3) bilinmeyen ortaya çıkmaktadır.

(3.3) denkleminin çözümü ise ;

$$W_3(\xi) = A e^{r\xi} + B e^{-r\xi} \quad (3.11)$$

olarak alınmaktadır. Burada A ve B integrasyon sabitlerini göstermekte ve r ,

$$r = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_G} \times (1 - \bar{\Omega}^2)\right)}$$

olarak tanımlanmaktadır.

(3.7) , (3.10) ve (3.11) denklemlerinde toplam bilinmeyen sayısı (N+M+8) olmaktadır. X ayrılma noktasının koordinatı da henüz bilinmediğinden bu sayı (M+N+9) olur. Mevcut denklemlerin sayısı ise (N-1) + (M-1) = N+M-2 olmaktadır. Bu durumda (M+N+9) – (M+N-2) =11 adet ilave denkleme ihtiyaç vardır. Çözüm için gerekli bu ilave denklemler sınır ve süreklilik koşullarından yazılan (2.14) bağıntıları kullanılarak elde edilmektedir.

3.2 Sonlu Fark Denklemlerinin Çözümü

Yukarıda sözü edilen ilave denklemleri elde etmek için (2.14) bağıntılarında aşağıdaki gibi sonlu fark açılımları yapılmaktadır.

$$W_1'(0) = 0 \rightarrow W_{1,0}' = 0 \rightarrow W_{1,0}' = \frac{W_{1,1} - W_{1,-1}}{2h} = 0$$

$$W_{1,-1} = W_{1,1} \quad (3.12)$$

$$W_1'''(0) = \bar{P}_0 \rightarrow W_{1,0}''' = \bar{P}_0 \rightarrow W_{1,0}''' = \frac{1}{2h^3} (-5W_{1,0} + 18W_{1,1} - 24W_{1,2} + 14W_{1,3} - 3W_{1,4}) = \bar{P}_0$$

$$-5W_{1,0} + 18W_{1,1} - 24W_{1,2} + 14W_{1,3} - 3W_{1,4} = 2h^3 \bar{P}_0 \quad (3.13)$$

$$W_1(X) = W_2(X) \rightarrow W_{1,N} = W_{2,0} \quad (3.14)$$

$$W_1'(X) = W_2'(X) \rightarrow W_{1,N}' = W_{2,0}' \rightarrow \frac{W_{1,N+1} - W_{1,N-1}}{2h} = \frac{W_{2,1} - W_{2,-1}}{2h}$$

$$W_{1,N+1} - W_{1,N-1} = W_{2,1} - W_{2,-1} \quad (3.15a)$$

$$W_1''(X) = W_2''(X) \rightarrow W_{1,N}'' = W_{2,0}'' \rightarrow \frac{W_{1,N+1} - 2W_{1,N} + W_{1,N-1}}{h^2} = \frac{W_{2,1} - 2W_{2,0} + W_{2,-1}}{h^2}$$

$$W_{1,N+1} - 2W_{1,N} + W_{1,N-1} = W_{2,1} - 2W_{2,0} + W_{2,-1} \quad (3.15b)$$

(3.15a) ve (3.15b) bağıntılarından :

$$W_{1,N+1} = W_{2,1} \quad (3.16)$$

$$W_{1,N-1} = W_{2,-1} \quad (3.17)$$

$$W_1'''(X) = W_2'''(X) \rightarrow W_{1,N}''' = W_{2,0}'''$$

$$5W_{1,N} - 18W_{1,N-1} + 24W_{1,N-2} - 14W_{1,N-3} + 3W_{1,N-4} = -5W_{2,0} + 18W_{2,1} - 24W_{2,2} + 14W_{2,3} - 3W_{2,4} \quad (3.18)$$

$$W_2''(1) = 0 \rightarrow W_{2,M}'' = 0$$

$$\left(\frac{W_{2,M+1} - 2W_{2,M} + W_{2,M-1}}{h^2} \right) = 0 \rightarrow W_{2,M+1} = 2W_{2,M} - W_{2,M-1} \quad (3.19)$$

$$W_2'''(1) = 0 \rightarrow W_{2,M}''' = 0$$

$$5W_{2,M} - 18W_{2,M-1} + 24W_{2,M-2} - 14W_{2,M-3} + 3W_{2,M-4} = 0 \quad (3.20)$$

$$W_1(X) = W_3(X) \rightarrow W_{1,N} = W_{3,0}$$

$$W_{1,N} = Ae^{rx} + Be^{-rx} \quad (3.21a)$$

$$W_1'(X) = W_3'(X) \rightarrow W_{1,N}' = W_{3,0}'$$

$$\frac{W_{1,N} - W_{1,N-1}}{h} = r(Ae^{rx} - Be^{-rx})$$

$$W_{1,N} - W_{1,N-1} = hr(Ae^{rx} - Be^{-rx}) \quad (3.21b)$$

(2.14) eşitliklerinin sonuncusu dikkate alındığında, $A = 0$ olması gerektiği görülür. Bu durumda $W_{1,N} = W_{2,0}$ olduğu dikkate alınır (3.21a) ve (3.21b) eşitliklerinden :

$$W_{2,0} - B e^{-rx} = 0 \quad (3.22)$$

$$W_{2,0} - W_{1,N-1} + B h r e^{-rx} = 0 \quad (3.23)$$

olarak elde edilir. (3.12), (3.14), (3.16), (3.17) ve (3.19) denklemleri (3.7) ve (3.10) denklemlerinde yerine yazılırsa, bu denklemlerdeki bilinmeyenler $W_{1,j}$ ($j = 0,1,\dots,N-1$), $W_{2,k}$ ($k=0,1,\dots,M$) olmak üzere toplam $(N+M+1)$ olur. B integral sabiti ile birlikte bilinmeyenlerin sayısı $(N+M+2)$ olur. Denklem sayısı ise (3.18), (3.20), (3.22) ve (3.23) denklemleri gözönünde tutulursa $(N-1) + (M-1) + 4 = (N+M+2)$ olur.

Bu homojen denklem takımını matris formunda

$$\underline{A} \vec{X} = 0 \quad (3.24)$$

olarak yazılabilir.

Burada \underline{A} ; $(M+N+2) \times (M+N+2)$ boyutlarında bir kare matrisi (katsayılar matrisini), ise bilinmeyenler vektörünü göstermektedir. Katsayılar matrisinin elemanları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$a_{i,j} = \alpha_1$$

$$a_{i,j+1} = \alpha_2$$

$$a_{i,j+2} = \alpha_1$$

$$a_{i,j+3} = 1$$

$$a_{i+1,j} = 1$$

$$i=1,\dots,N-1 \quad (j=i)$$

$$a_{1,2} = 1 + \alpha_2, \quad a_{N,N+1} = 0, \quad a_{N,N} = 1$$

$$a_{i,j+1} = -4$$

$$a_{i,j+2} = \beta_1$$

$$i=N, \dots, (N+M-2) \quad (j=i)$$

$$a_{N+M-2, N+M} = \beta_1 - 1, \quad a_{N+M-2, N+M+1} = -2, \quad a_{N+M-2, N+M+2} = 0$$

$$a_{i, j+3} = -4$$

$$a_{i, j+4} = 1$$

$$a_{i+1, j+1} = 1$$

$$a_{N+M-1, N-3} = 3$$

$$a_{N+M-1, N-2} = -14$$

$$a_{N+M-1, N-1} = 24$$

$$a_{N+M-1, N} = -18$$

$$a_{N+M-1, N+1} = 10$$

$$a_{N+M-1, N+2} = -18$$

$$a_{N+M-1, N+3} = 24$$

$$a_{N+M-1, N+4} = -14$$

$$a_{N+M-1, N+5} = 3$$

$$a_{N+M, N+M-3} = 3$$

$$a_{N+M, N+M-2} = -14$$

$$a_{N+M, N+M-1} = 24$$

$$a_{N+M, N+M} = -18$$

$$a_{N+M, N+M+1} = 5$$

$$a_{N+M+1, N+1} = 1$$

$$a_{N+M+1, N+M+2} = -e^{-rx}$$

$$a_{N+M+2, N+1} = 1$$

$$a_{N+M+2, N} = -1$$

$$a_{N+M+2, N+M+2} = hre^{-rx}$$

Bu elemanlar dışında kalan tüm matris elemanları sıfırdır. Bilinmeyenleri gösteren vektörü ise;

$$X^T = [W_{1,0} \quad W_{1,1} \quad W_{1,2} \quad \dots \quad W_{1,N-1} \quad W_{2,0} \quad W_{2,1} \quad W_{2,2} \quad \dots \quad W_{2,M} \quad B]^T$$

olmakta ve iki bölgeden gelen deplasman türünden olan bilinmeyenlerle üçüncü bölgeden

gelen integral sabitini içermektedir.

(3.24) denklem takımı çözümlenerek ayrılma noktasının yeri (X) bulunmaktadır. Yerdeğişirmelerin hesabı için ise homojen denklemlerden birinin (burada (3.22) denkleminin) yerine homojen olmayan (3.13) denklemi kullanılmakta ve elde edilen yeni denklem sistemi çözülmektedir. (3.13) denkleminin ait katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$a_{N+M+1,1} = -5$$

$$a_{N+M+1,2} = 18$$

$$a_{N+M+1,3} = -24$$

$$a_{N+M+1,4} = 14$$

$$a_{N+M+1,5} = -3$$

$$b_{N+M+1,1} = 2h^3 \overline{p_0}$$

Bu katsayıların sonucusu yeni denklem sisteminin sağ tarafında sıfır olmayan elemanı göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu bölümde yukarıda formülasyonu yapılan probleme ait sayısal sonuçlar verilmektedir. İncelenen problem , bilinmeyenler ve sınır koşullarına göre doğrusal olmasına rağmen, ayrılma noktasının koordinatı (temas boyu) olan X 'e göre doğrusal değildir. Bu nedenle çözümde bir ardışık yaklaşım işlemi yapılmakta ve şu şekilde hareket edilmektedir. (3.24) denklem takımı homojen bir denklem takımı olduğu için sıfırdan farklı çözüm olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. Bunun için önce kiriş – zemin etkileşimini karakterize eden λ ve λ_G parametreleri ile zorlama fonksiyonuna ait $\bar{\Omega}$ frekans parametresi seçilmektedir. Daha sonra bu değerler sabit tutularak bilinmeyen X değeri tahmin edilip katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan X değeri hesaplanmaktadır. Bunun için önce tahmin edilen X temas boyu N bölgeye ayrılmakta , daha sonra kalan boy (ayrılma boyu) için yaklaşık bir M değeri bulunarak , bu boy M bölgeye ayrılmaktadır. Daha önce seçilen parametreler ve bulunan h aralığı yardımıyla denklem takımı bilgisayar programı kullanılarak otomatik olarak oluşturulmakta ve determinantı sıfır yapan X değeri bulunmaktadır. Bu işlemler sırasında kirişe ait düşey denge kontrolü her adımda aşağıdaki eşitlik yardımıyla yapılmaktadır.

$$\frac{P_0}{\lambda_G} = \int_0^X [-W_2''(\xi) + \frac{\lambda}{\lambda_G}(1 - 2\bar{\Omega}^2)W_1(\xi)]d\xi - \frac{\lambda}{\lambda_G}\bar{\Omega}^2 \int_X^1 W_2(\xi)d\xi \quad (4.1)$$

X değeri bulunduktan sonra , (3.13) eşitliği yardımıyla bilinmeyenler hesaplanmaktadır. Şekil (4.1), (4.2) ve (4.3) de ayrılma noktasının yerinin frekans parametresine göre değişimi görülmektedir. Şekil (4.1) ve (4.2) de frekans parametresinin büyümesi ile ayrılma noktasının yerinin (temas boyunun) büyüdüğü , bazı frekans değerleri için çözüm olmadığı bazıları için ise birden fazla çözüm olduğu görülmektedir. Örneğin şekil (4.2) de $\bar{\Omega} \geq 0.4$ için birden fazla çözüm olduğu görülmektedir. Yine bu şekillerden λ_G büyüdükçe sabit bir λ değeri için ayrılma noktasının yerinin küçüldüğü görülmektedir. Şekil (4.3) de ise ayrılma noktasının yerinin küçük frekanslar için, frekans arttıkça küçüldüğü görülmektedir. Yine bu şekilden, bazı frekans değerleri için çözüm olmadığı, bazıları için ise, örneğin $\bar{\Omega} \geq 0.6$ için , birden fazla çözüm olduğu görülmektedir.

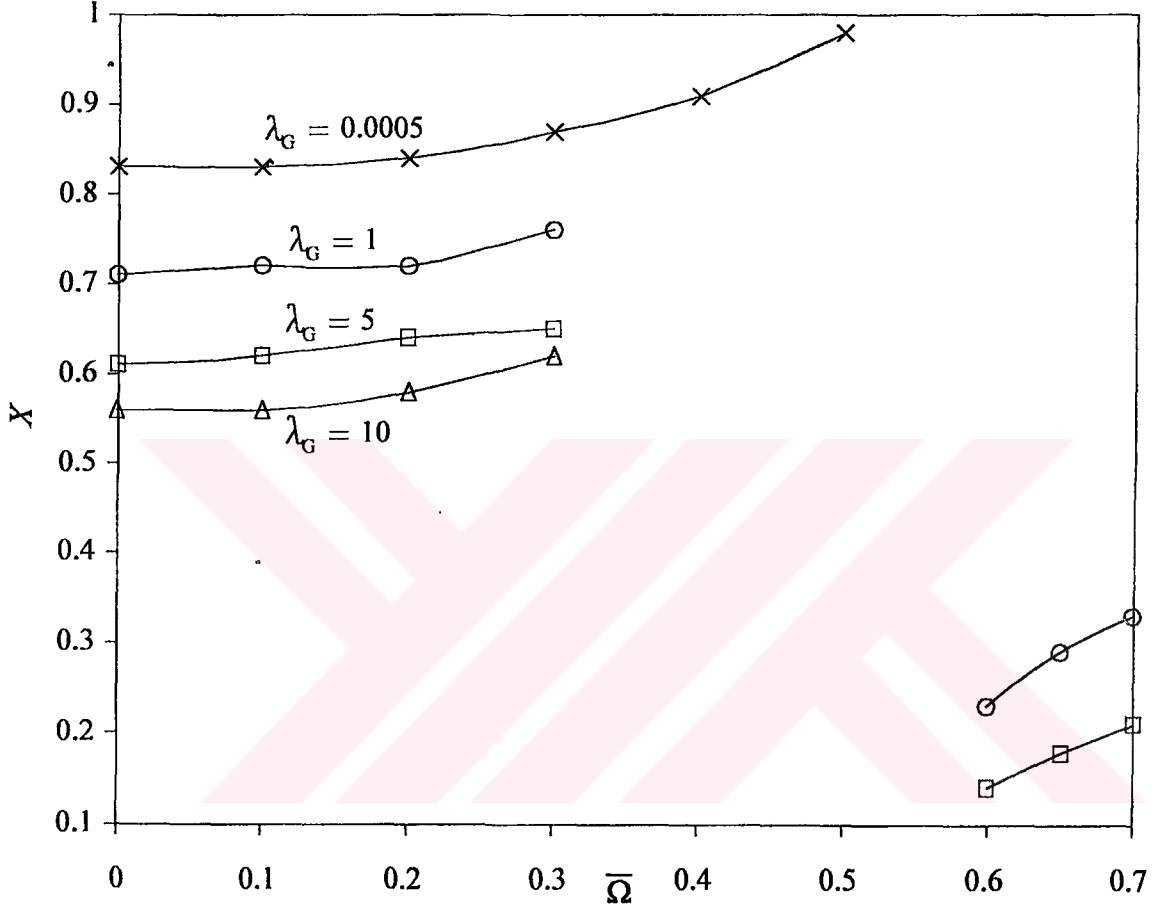
Şekil (4.4), (4.5), (4.6) ve (4.7) de bir λ değeri seçilerek frekans parametresinin ve λ_G 'nin çeşitli değerleri için kiriş elastik eğrileri ve kayma tabakasının yüzey eğrileri verilmiştir. Şekil (4.4) de , frekans parametresi sıfır alındığı için, çözüm statik hale karşı gelmektedir. Bu halde temas bölgesi için elde edilen deplasmanların, diğer haller için elde edilen değerlerden küçük

olduğu görülmektedir. Şekil (4.5) ve (4.6)'dan artan $\bar{\Omega}$ değerleri için düşey deplasmanların büyüdüğü görülmektedir. Bu  Şekilden, λ_G parametresinin değerinin büyümesi ile deplasmanların küçüldüğü görülmektedir.

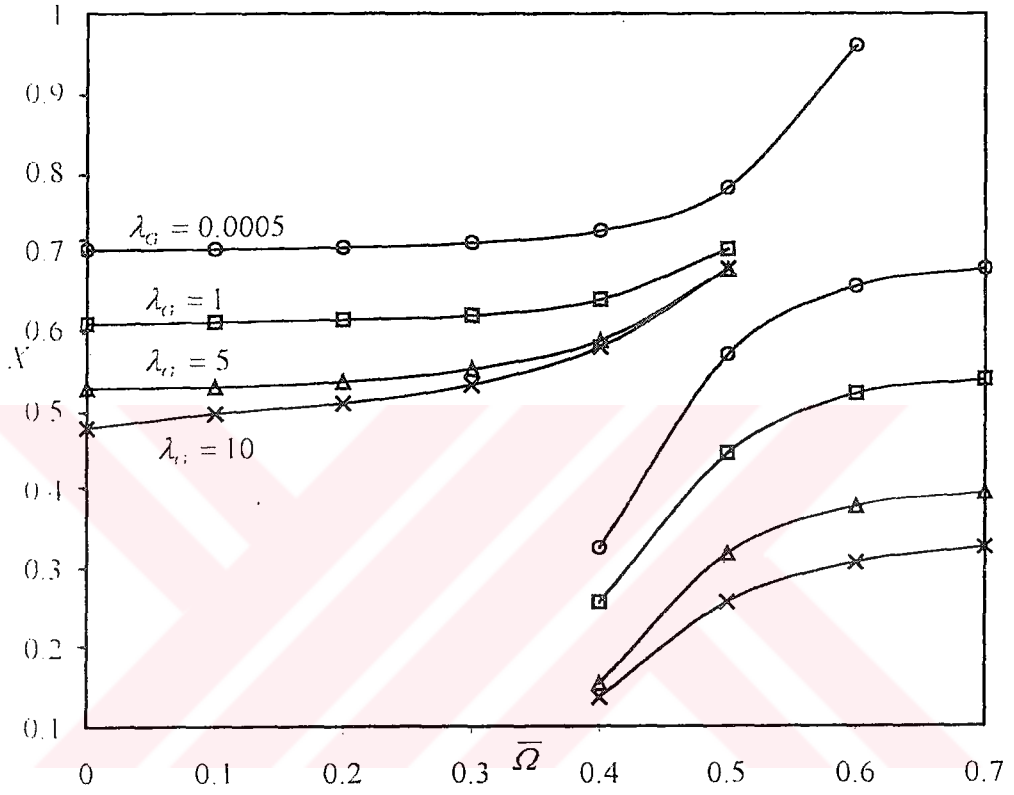
Şekil (4.6) ve (4.7)'de belirli bir frekans parametresi değerini için elde edilen iki farklı çözüme ait elastik eğriler görülmektedir. Bu çözümlerden ikincisinde deplasmanların temas bölgesinde daha küçük, ayrılma bölgesinde daha büyük olduğu görülmektedir.

Şekil (4.8), (4.9) ve (4.10)'da bir λ_G değerini seçilerek frekans parametresi ve λ 'nın çeşitli değerleri için kiriş elastik eğrileri verilmiştir. Şekil (4.8) ve (4.9)'dan λ değerini büyüdükçe, deplasmanların küçüldüğü görülmektedir. Şekil (4.9) ve (4.10) da aynı frekans parametresi değerini için elde edilen farklı çözümlere karşı gelen elastik eğriler görülmektedir. Birinci çözümden, ayrılmanın neredeyse ortadan kalktığı, ikinci çözümde ise, temas bölgesinin Şekil (4.7)'ye benzer Şekilde oldukça küçüldüğü görülmektedir.

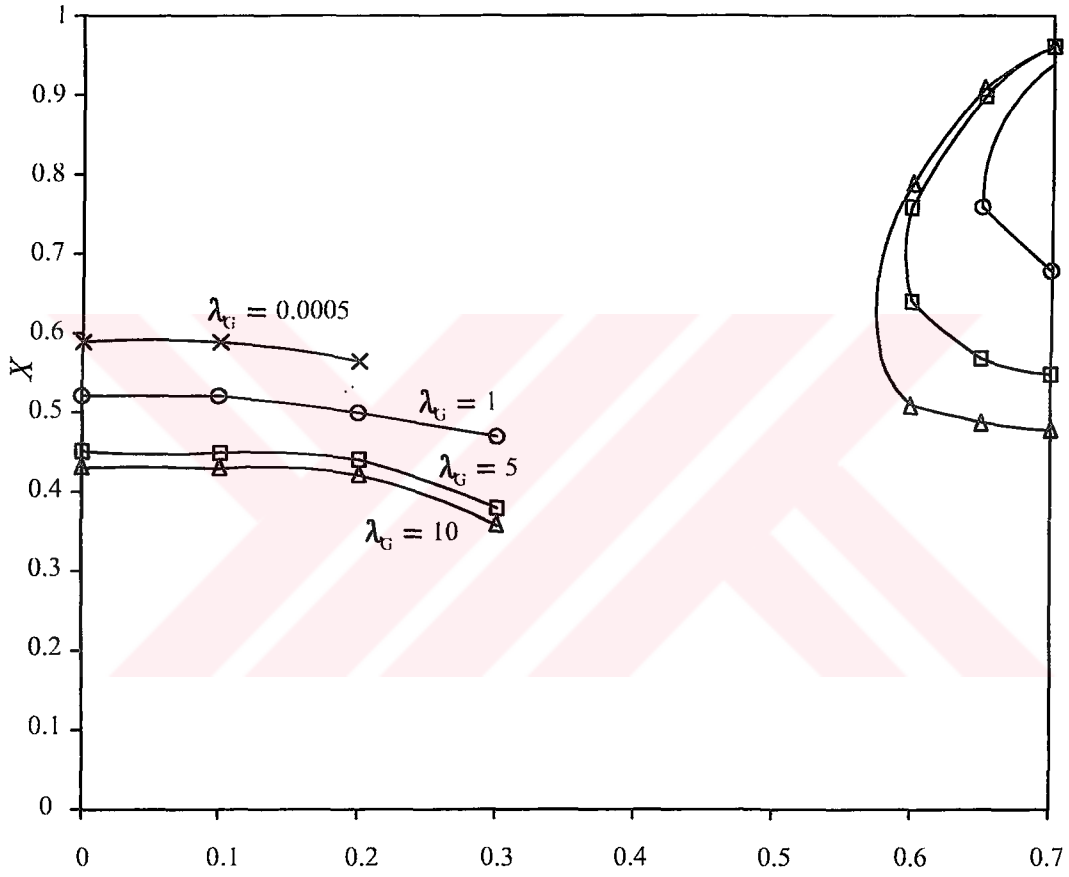
Sayısal işlemler sırasında frekans parametresinin değerini $\bar{\Omega} \leq 0.7$ olarak seçilmiŐtir. Parametrenin bu değerinden daha büyük değerler için, temas ve ayrılma bölgeleri yerdeđiŐtirmekte, diğer bir deyiŐle kirişin ortası zeminden ayrılmaktadır. Bu halde çözüm elde edebilmek için temas ve ayrılma bölgelerine ait hareket denklemlerini ve sınır koŐullarını bu hal için yeniden yazmak gerekmektedir.



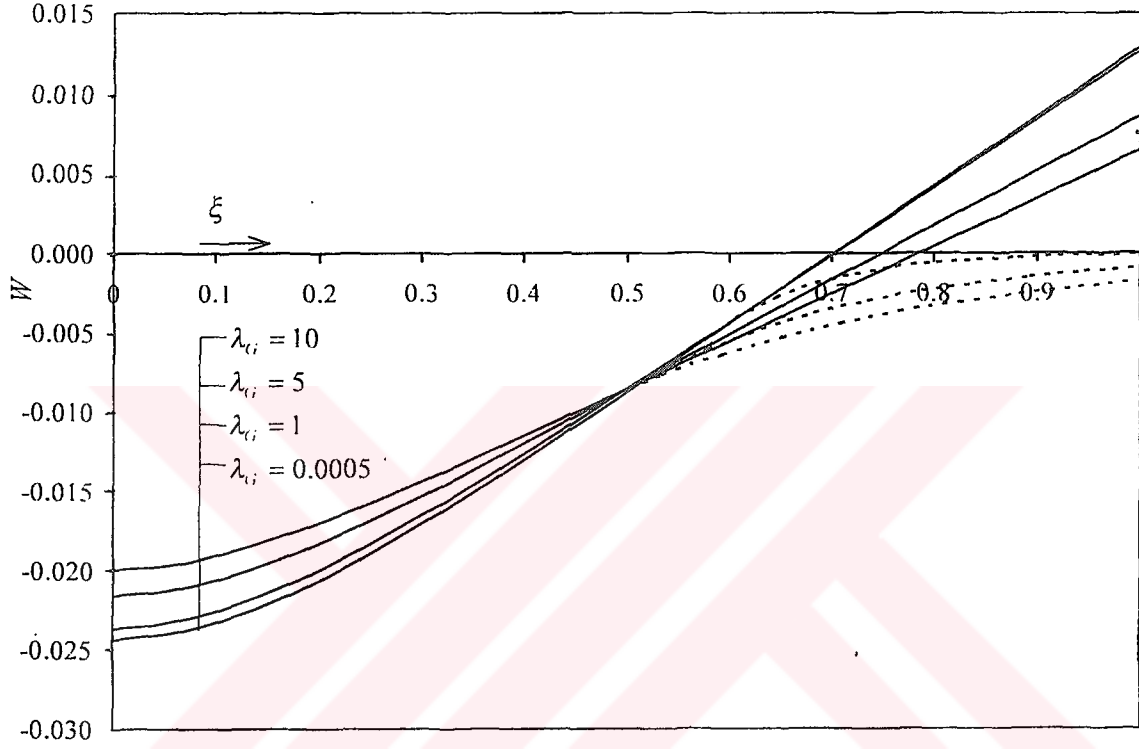
Şekil 4.1 $\lambda=50$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi



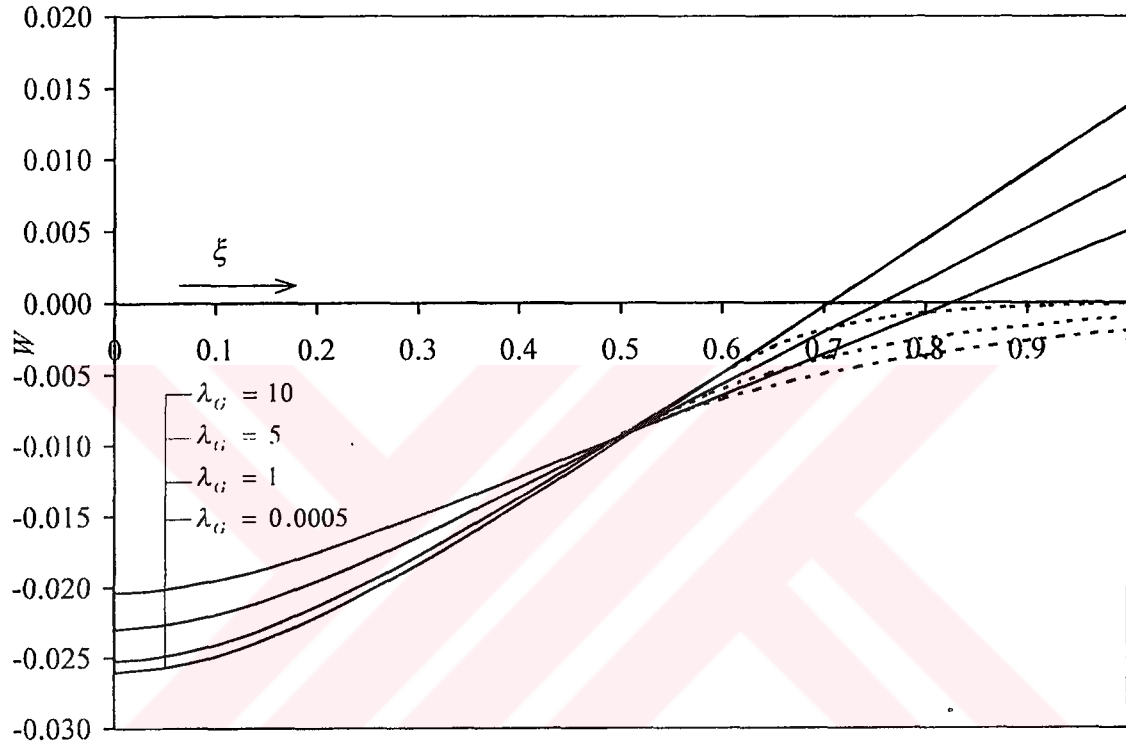
Şekil 4.2 $\lambda=100$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi



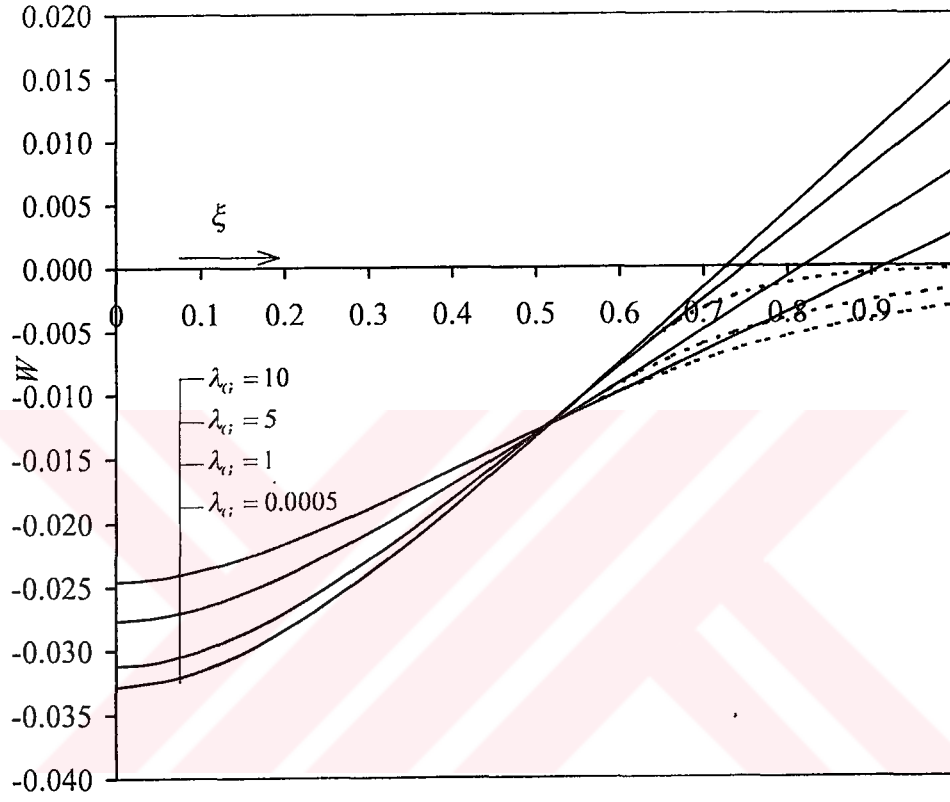
Şekil 4.3 $\lambda=200$ için ayrılma noktasının yerinin frekans oranı ile değişimi



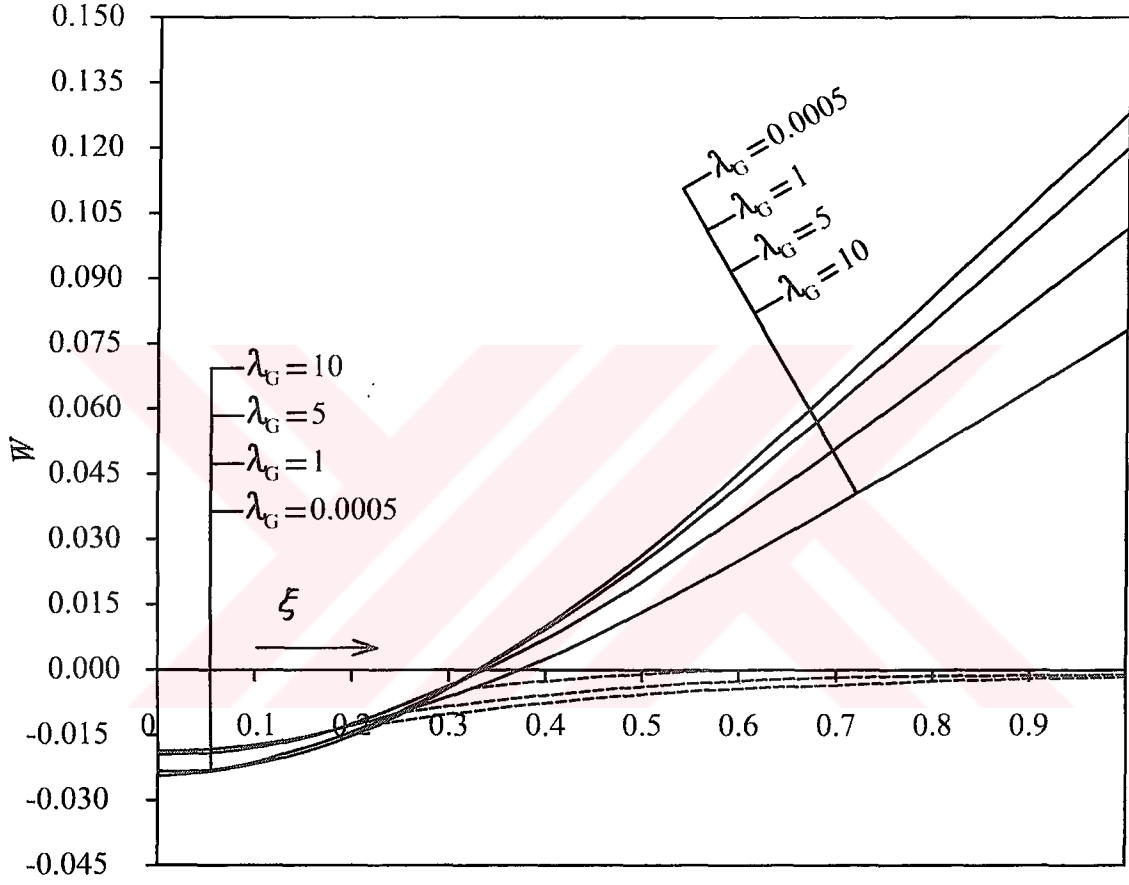
Şekil 4.4 $\lambda=100$, $\bar{\Omega}=0$ için elastik eğriler (statik hal)



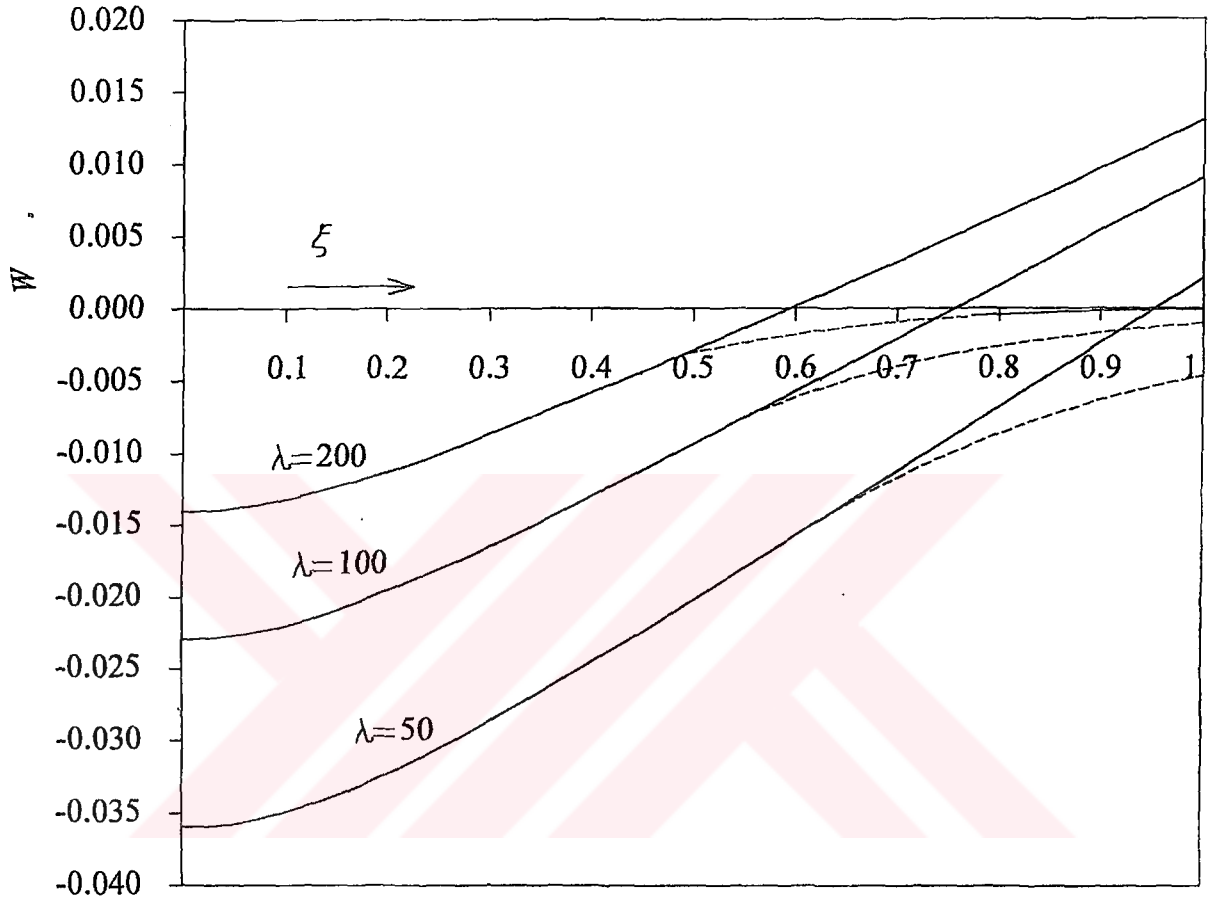
Şekil 4.5 $\lambda=100$, $\bar{\Omega}=0.2$ için elastik eğriler



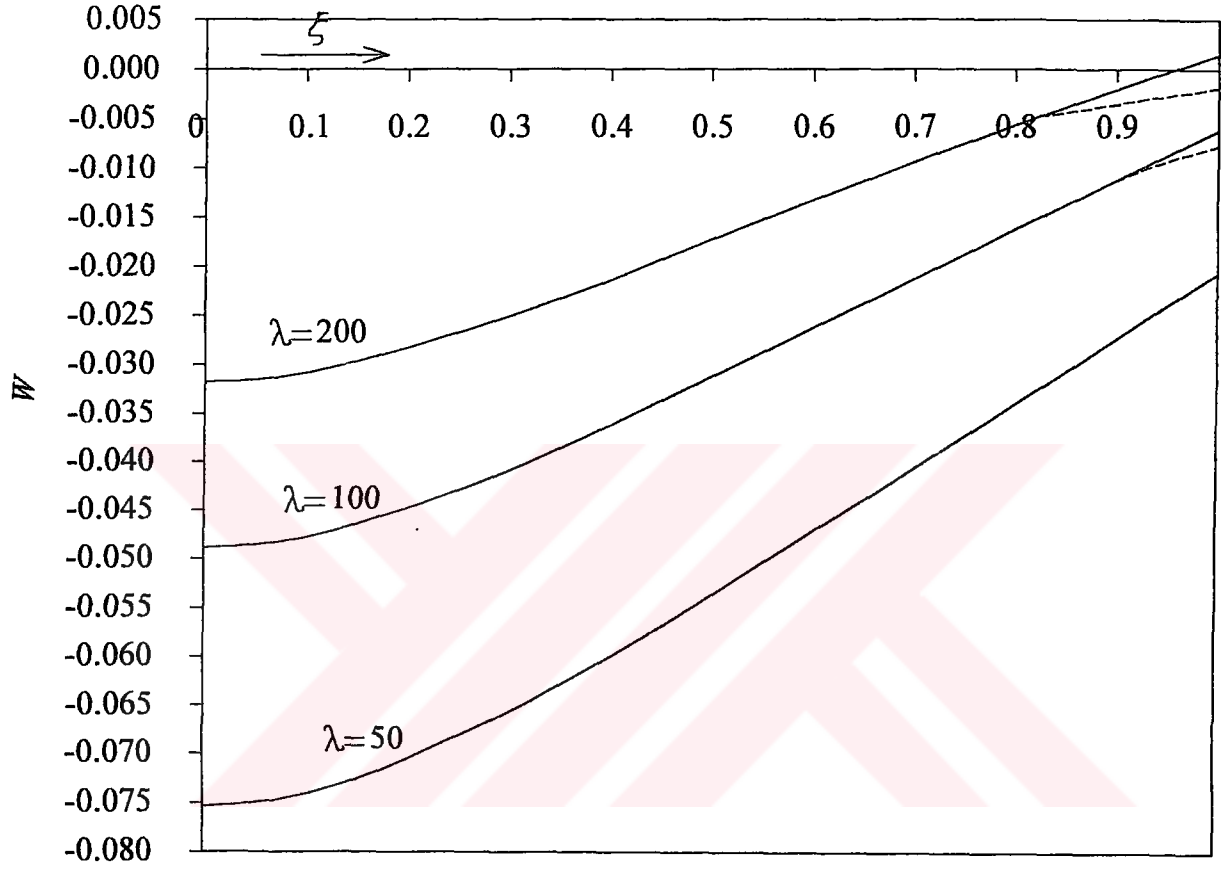
Şekil 4.6 $\lambda=100$, $\bar{\Omega}=0.4$ için elastik eğriler (1.Çözüm)



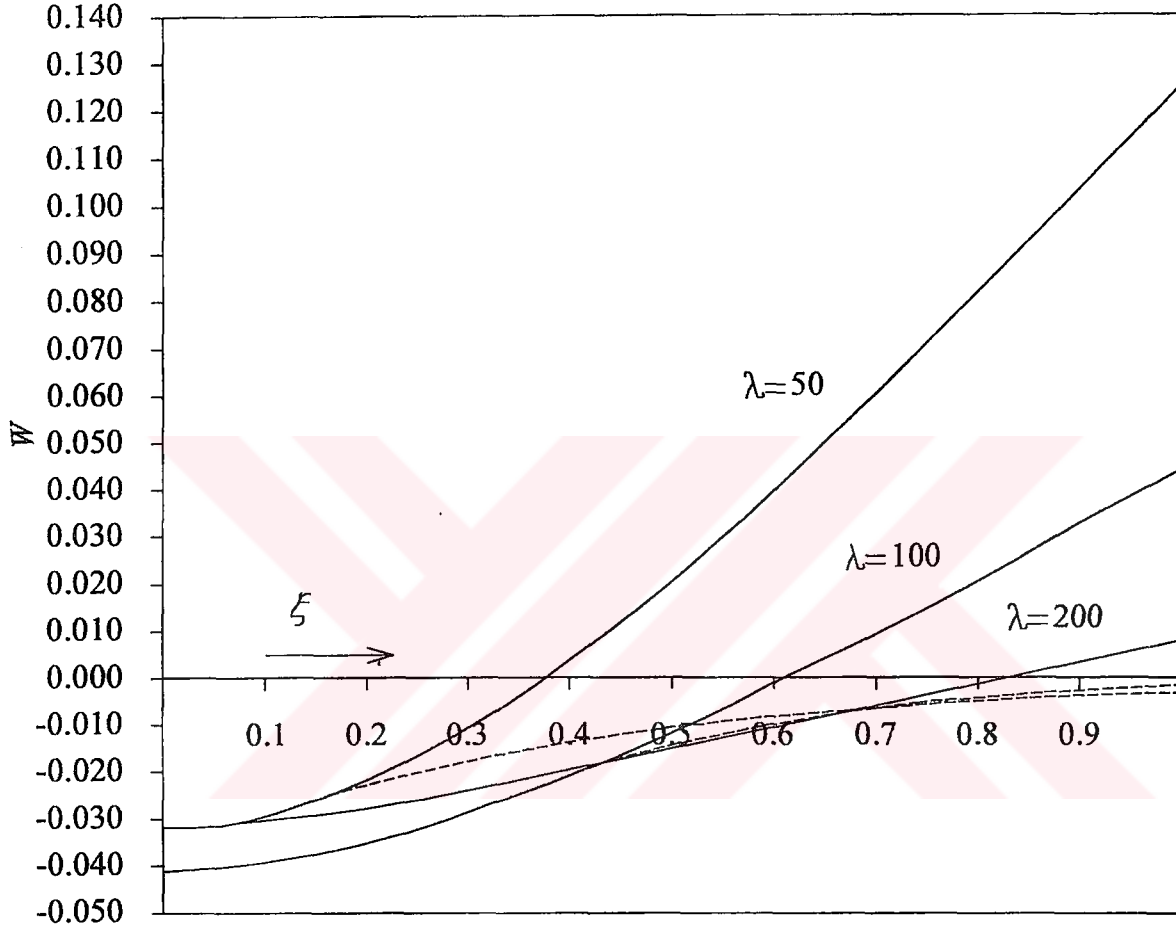
Şekil 4.7 $\lambda = 100$, $\bar{\Omega} = 0.4$ için elastik eğriler (2. Çözüm)



Şekil 4.8 $\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.2$ için elastik eğriler



Şekil 4.9 $\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.6$ için elastik eğriler (1.Çözüm)



Şekil 4.10 $\lambda_G = 5$, $\bar{\Omega} = 0.6$ için elastik eğriler (2.Çözüm)

KAYNAKLAR

- Celep, Z., Malaika A., Abu-Hussein, M., (1989), "Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 128: 235-246.
- Choros, J., Adams, G.G., (1979), "A Steadely Moving Load on an Elastic Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation", *Journal of Applied Mechanics*, 46: 175-180.
- Coşkun, İ., Engin, H., (1999), "Non-linear Vibrations of a Beam on an Elastic Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, 223(3): 335-354.
- Eisenberger, M., (1994) "Vibration Frequencies for Beams on Variable One and Two Parameter Elastic Foundations", *Journal of Sound and Vibration*, 176: 577-584.
- Eisenberger, M., Clastornik, J., (1987), "Beams on Variable Two Parameter Elastic Foundation", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE 113: 1454-1466.
- Kerr, A.D., (1964), "Elastic and Viscoelastic Foundation Models", *Journal of Applied Mechanics*, ASME 31: 491-498.
- Kerr, A.D., Coffin, D.W., (1991), "Beams on a Two Dimensional Pasternak Base Subjected to Loads That Cause Lift-off", *International Journal of Solids and Structures*, 28(4): 413-422.
- Özdoğan, M., Coşkun, İ., ve Engin, H., (1995), "Yalnız Basınç Aktaran Pasternak Zeminine Oturan bir Kirişin Zorlanmış Titreşimleri", IX. Ulusal Mekanik Kongresi, 4-8 Eylül 1995, Ürgüp, 542-167.
- Rao, N.V.S.K., (1974), "Onset of Separation Between a Beam and Tensionless Elastic Foundation Due to Moving Loads", *Journal of Applied Mechanics*, ASME 41: 303-305.
- Rao, N.V.S.K., Das, Y.C., Anandakrishnan, M., (1975), "Dynamic Response of Beams on Generalized Elastic Foundations", *International Journal of Solids and Structures*, 11: 255-273.
- Valsangkar, A.J., Pradhanang, R., (1988), "Vibrations of Beams-columns on Two Parameter Elastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16: 217-225.
- Weitsman, Y., (1970), "On Foundations That React in Compression Only", *Journal of Applied Mechanics*, ASME 37: 1019-1030.
- Weitsman, Y., (1971), "Onset of Separating Between a Beam and a Tensionless Elastic Foundation Under a Moving Load", *International Journal of Mechanical Sciences*, 13: 707-713.
- Yokoyama, T., (1991), "Vibrations of Timoshenko Beam-columns on Two Parameter Elastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20: 355-370.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 20.09.1975

Doğum yeri Trabzon

Lise 1986-1993 Trabzon Anadolu Lisesi

Lisans 1993-1997 İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fak.
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Y. Lisans 1999-2002 Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak.

Çalıştığı Kurumlar

1997-1998 Akfen A.Ş.

1998-1999 Kibsaş A.Ş.

1999-Devam ediyor İzosan Mühendislik Ltd. Şti.

