



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nervölli Psik. Sonlu Elem. Yön. İle Eğ. Hes.

Yüksek Lisans Tezi

ŞEREFETTİN ORUÇ

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

858

NERVÜRLÜ PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI

İnş.Müh. Şerafettin ORUÇ

FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Türkan KÖKSAL

İSTANBUL, 2001

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
D.B. No 62711

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VII- 37

NERVÜRLÜ PLAKLARIN SONLU ELEMANLAR
YÖNTEMİ İLE EĞİLME HESABI

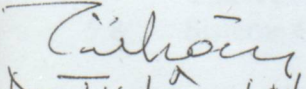
421

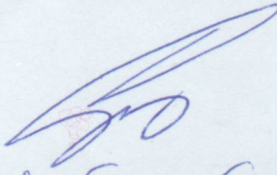
İnş.Müh. Şerafettin ORUÇ

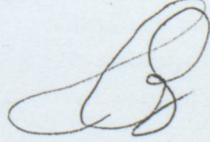
FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Türkan KÖKSAL


Prof. Dr. Türkan Köksal


Prof. Sinan Çağdas


Doç. Dr. Zülgüç Öznürek

İSTANBUL, 2001

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. İNCE PLAKLAR	1
1.1 Tanım	1
1.2 Varsayımlar	1
1.2.1 Plak Geometrisi Yönünden	1
1.2.2 Malzeme Yönünden	1
1.2.3 Hesapları Basitleştirme Yönünden	2
1.3 Diferansiyel Geometri	4
1.4 Gerilme ile Deformasyon Bileşenleri Arasındaki Bağlıntılar	6
1.5 Gerilme ile Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlıntılar	7
1.6 Moment Bağlıntıları	8
2. NERVÜRLÜ PLAKLAR İÇİN ELASTİSİTE SABİTLERİ	9
3. ENERJİ PRENSİPLERİ	12
3.1 Toplam Potansiyel Enerji	12
3.1.1 Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi)	12
3.1.2 Toplam Potansiyel Enerjini İkinci Varyasyonu	16
4. VİRTÜEL İŞ PRENSİBİ	19
5. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	21
5.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi	22
5.2 Plaklar İçin Deplasman Fonksiyonu Seçimi	23
5.3 Şekil Fonksiyonlarının Bulunması	26
5.4 Deformasyonların Deplasmanlar Cinsinden İfadesi	26
5.5 Kesit Tesirleri – Şekil Değiştirmeleri Bağlıntıları	27
5.6 Eleman Rijitlik Matrisi	27
5.7 Yük Vektörü	28
5.8 Sisteme Geçiş	29
6. NERVÜRLÜ PLAKLAR İÇİN HESAPLANAN ELEMAN RİJİTLİK MATRİSİ	31
7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	35

SİMGE LİSTESİ

		Sayfa
a	Sonlu elemana bölünmüş plağın x doğrultusundaki boyu	4
b	Sonlu elemana bölünmüş plağın y doğrultusundaki boyu	4
C	Nervürlerin ortalama burulma rijitliği	8
dx	Nervürlerin x doğrultusundaki aralıkları	9
dy	Nervürlerin y doğrultusundaki aralıkları	12
E	Elastisite modülü	16
G	Kayma modülü	23
h	Nervürlü plakta dış yüksekliği	
Lx	Plağın x doğrultusundaki boyu	
Ly	Plağın y doğrultusundaki boyu	
Mx, My	Plak atalet momentleri	
Mxy	Burulma momenti	
t	Plak kalınlığı	
u, v, w	Yer değiştirmeler	
U	İç kuvvetlerin potansiyel enerjisi	
U_b	Eğilme şekil değiştirme enerjisi	
U_m	Membran şekil değiştirme enerjisi	
V	Toplam potansiyel enerji	
W	Dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi	
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Birim deformasyon bileşenleri	
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri	
θ_x	x doğrultusundaki dönme	
θ_y	y doğrultusundaki dönme	
γ_{xy}	Kayma deformasyonu	
δ	Varyasyon sembolü	
ν	Poisson oranı	
τ_{xy}	Kayma gerilmesi	

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 Deformasyondan önce ve sonra plak elemanı	4
Şekil 1.2 Plak üzerindeki gerilme bileşenleri	8
Şekil 2.1 Nervürlü plakta sistemin gösterilişi	9
Şekil 3.1 q yayılı yükü ile yüklü basit kiriş	12
Şekil 3.2 Eksenel basınç yükü altında basit kiriş	16
Şekil 5.1 Dikdörtgen bir plaktaki deplasmanlar	23

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın; yönlendirilmesi ve oluşturulmasında göstermiş olduğu yardımlarından ve iyi niyetinden dolayı Sayın Prof. Dr. Türkan KÖKSAL' a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

ÖZET

Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemanlara ayrılmaktadır. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Çözüm aşamasında toplam potansiyel enerjinin 1.varyasyonu ve virtüel iş prensibi kullanılmıştır.

Sık nervürlü plaklarda ; nervürler plağın kalınlığına katılarak elastisite sabitleri vasıtasıyla ortalama kalınlık alınmış gibi hesap yapılır. Sık nervürlü plaklar için oldukça doğru olan bu kabul, nervürlerin arası açıldıkça gerçek çözümden uzaklaşmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar, plaklar, nervürlü plaklar, potansiyel enerji, virtüel iş.

ABSTRACT

In finite elements method, structural system is divided into elements. As the element's dimensions decrease, mistake ratio decreases, but solution time increases. First variation of total potential energy and virtual work principle are used to solve the problem.

In the plates with dense nervures; nervures are added to plate's thickness. An average thickness is obtained. This acceptance is rather proper for plates with dense nervures. As the distance between nervures increases, solution may give some mistakes.

Keywords: Finite elements, plates, plates with nervures, potential energy, virtual work.

1. İNCE PLAKLAR

1.1 Tanım

Kalınlığı, taşıyıcı boyutlarının yanında çok küçük ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlere plak denir. Plakların orta noktalarını birleştiren yüzeye orta yüzey denir. Plaklar için orta yüzey bir düzlemdir.

Dış yükler orta düzleme dik ise plak çalışması söz konusudur. Yani orta düzlemin eğilmesi ile birlikte elastik yüzey oluşmaktadır. Bu tür taşıyıcılara ince plak denir. Betonarme döşemler plak cinsinden taşıyıcılardır.

Dış yükler orta düzlemin içinde etkiyorsa bir levha çalışması söz konusudur. Levhalarda stabilite problemleri önem kazanır.

1.2 Varsayımlar

1.2.1 Plak Geometrisi Yönünden

a- Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür.

$$h < I_x, I_y$$

b- Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.

c- Yükler orta düzleme diktir.

d- Şahimler (çökmeler) plak kalınlığının yanında çok küçüktür.

$$w \ll h$$

1.2.2 Malzeme Yönünden

a- Malzeme homojendir. Yani her noktada aynı fiziksel özelliklere sahiptir.

b- Malzeme izotropdur. Yani her doğrultuda aynı elastik özelliğe ve davranışa sahiptir.

Malzemede mekanik özellikler; tesirlerin doğrultusuna bağlı olmayıp aynıdır.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y}; \quad E_x = E_y = E$$

c- Malzeme belirli sınırla içinde Hooke Kanunu'na uyan Lineer-elastik bir malzemedir.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

1.2.3 Hesapları Basitleştirme Yönünden

a- Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normal, deformasyondan gelen elastik yüzeyin o noktadaki normal olarak kalır. Yani deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktadaki normal üzerinde bulunan herhangi bir nokta, deformasyondan sonrada elastik yüzeyin o noktadaki yüzeyin normal üzerinde bulunur. Bu çubuk sistemlerdeki Bernouilli—Navier hipotezine karşılık gelen Kirchhoff—Love hipotezidir.

b- Plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür. Gerçekte plakta üç doğrultuda (uzay) gerilme durumu söz konusudur. Fakat döşemenin herhangi bir (x_0, y_0) noktasında σ_z 'in h yüksekliğince değişimi incelenirse ;

$$\sigma_z = \sigma(x_0, y_0, z) \quad z = -h/2 \text{ için } \sigma_z = -p$$

$$z = h/2 \text{ için } \sigma_z = 0$$

p birim alana gelen yüküdür. $P=1,0 \text{ t/m}^2$ olsa $\sigma_z = -0,10 \text{ kg/cm}^2$ olur. Uygulamadan bilinir ki σ_x, σ_y değerleri $50\text{—}100 \text{ kg/cm}^2$ arasında değişir. Bu durumda σ_z değeri σ_x, σ_y yanında çok küçüktür ve $\sigma_z = 0$ alınabilir.

c- Yukarıdaki varsayıma bağlı olarak $\epsilon_z \approx 0$ alınabilir. Çünkü elastisite teorisinden bilinir ki ;

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \sigma_z = 0 \quad \mu = 0,10 - 0,15$$

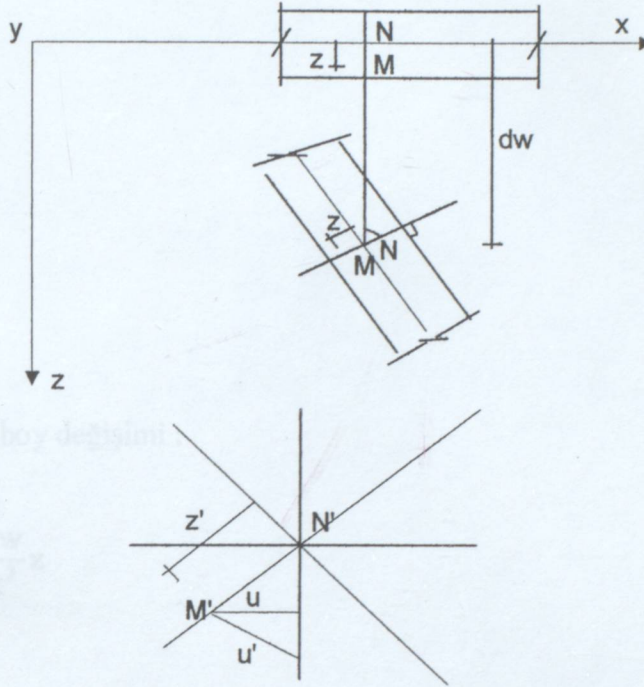
Bu durumda z doğrultusundaki boy değişimleri yok sayılabilecek kadar küçük olur. Demek ki deformasyon sırasında plak kalınlığının değişmediği kabul ediliyor. $w=w(x,y)$ olur.

d- Kesitin orta düzleminde deformasyon yoktur. Birim boy ve açı değerleri

$$\begin{aligned} (\epsilon_x)_{z=0} &\approx 0 & (\epsilon_y)_{z=0} &\approx 0 & (\gamma_{xy})_{z=0} &\approx 0 \\ (u)_{z=0} &\approx 0 & (v)_{z=0} &\approx 0 & (w)_{z=0} &\neq 0 \end{aligned}$$

Plak probleminde ilk adım, plağa etkiyen yükler ile bunu sonucu olan deformasyonlar arasındaki diferansiyel bağıntının çıkartılmasıdır.

1.3 Diferansiyel Geometri



Şekil 1.1 Deformasyondan önce ve sonra plak elemanı

Bu bölümde, diferansiyel geometri yardımıyla, deformasyon (şekil değiştirme) bileşenleri ile, deplasman (yer değiştirme) bileşenleri arasındaki bağıntılar çıkartılacaktır.

Plağın x doğrultusundaki eğimi

$$\operatorname{tg}\beta \approx \beta \approx \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.1)$$

olacaktır.

Şekilden

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u_z'}{z} \quad (1.2)$$

$$u_z = u_z' \cdot \cos\beta \quad \beta \text{ çok küçük olduğundan}$$

$$\cos\beta \approx 1; u_z = u_z'$$

u_z , u 'nun (+) yönüne ters olduğu için $u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z$

$$u_z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z \quad (1.3)$$

Benzer şekilde :

$$v_z = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot z \quad (1.4)$$

Z derinliğinde birim boy değişimi :

$$(\epsilon_x)_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$$

$$(\epsilon_x)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \quad (1.5)$$

$$(\epsilon_y)_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \quad (1.6)$$

z derinliğinde ve orta düzleme paralel bir elemandaki açı değişimi (distorsiyon) :

$$(\gamma_{xy})_z = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_z = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z - \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \cdot z$$

$$(\gamma_{xy})_z = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z \quad (1.7)$$

1.4 Gerilme İle Deformasyon Bileşenleri Arasındaki Bağlıntılar

$\sigma_z \approx 0$ $\varepsilon_z \approx 0$ alındığına göre ;

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y) \quad (1.8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu \sigma_x) \quad (1.9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (1.10)$$

$$\text{Burada } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (1.11)$$

Bu bağlantılardan gerilmeler seçilirse :

$$(\sigma_x)_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y)_z \quad (1.12)$$

$$(\sigma_y)_z = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_x)_z \quad (1.13)$$

$$(\tau_{xy})_z = G(\gamma_{xy})_z \quad (1.14)$$

Matris formda ifade edilirse ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \mu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Kapalı şekilde yazılırsa ;

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.16)$$

1.5 Gerilme İle Deplasman Bileşenleri Arasındaki Bağlımlar

$$\begin{aligned} \left(\sigma_x\right)_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(-z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \left(\sigma_x\right)_z &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Benzer şekilde :

$$\left(\sigma_y\right)_z = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.18)$$

$$\left(\tau_{xy}\right)_z = -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (1.19)$$

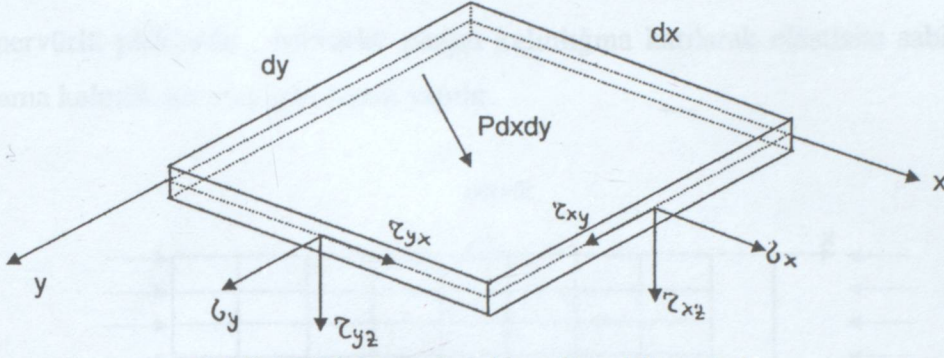
Görüldüğü gibi gerilmeler z'e lineer olarak bağlıdır. Demek ki kesit yüksekliğince gerilmeler lineer olarak değişmektedir.

$$\sigma_x = a \cdot z \quad (1.20)$$

$$\sigma_y = b \cdot z \quad (1.21)$$

$$\tau_{xy} = c \cdot z \quad (1.22)$$

1.6 Moment bağıntıları



Şekil 1.2 Plak üzerindeki gerilme bileşenleri

Sonsuz küçük bir plak elemanda gerilmelerden meydana gelen momentler ;

$$M_x \cdot dy = \int \sigma_x \cdot dF \cdot z \quad (1.23)$$

Bu ifade denklem (1.20) deki σ değeri yerine koyulup entegre edilirse ;

$$M_x = \frac{ah^3}{12} \quad (1.24)$$

elde edilir. Burada $\frac{h^3}{12}$ birim genişlik için plak atalet momentidir. M_x kısaca ;

$$M_x = a \cdot I \quad (1.25)$$

$$M_y = b \cdot I \quad (1.26)$$

$$M_{xy} = c \cdot I \quad (1.27)$$

Moment ifadeleri deplasmanlar cinsinden açık biçimde yazılırsa ;

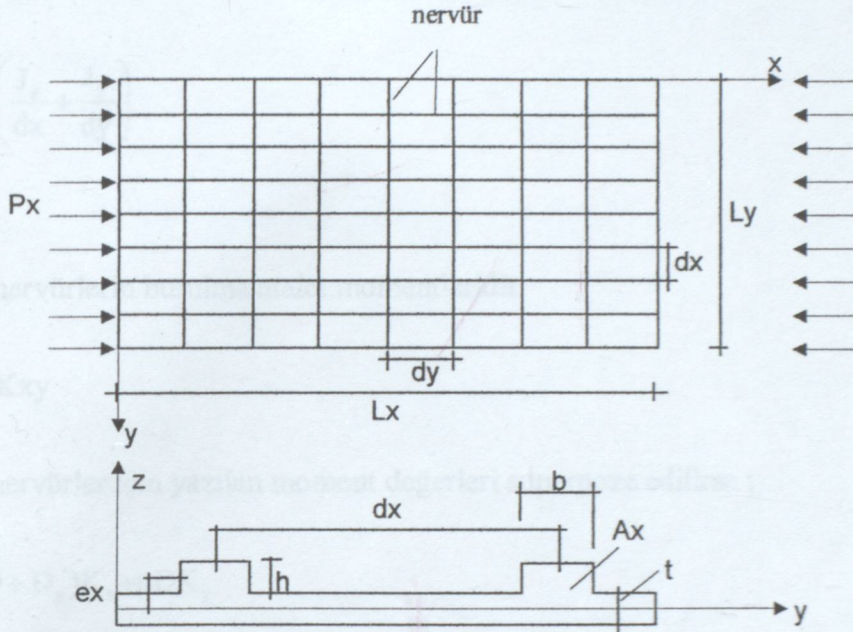
$$M_x = -\frac{E \cdot I}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.28)$$

$$M_y = -\frac{E \cdot I}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.29)$$

$$M_{xy} = -\frac{E \cdot I}{1 + \mu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) \quad (1.30)$$

2. NERVÜRLÜ PLAKLAR İÇİN ELASTİSİTE SABİTLERİ

Sık nervürlü plaklarda ; nervürler plağın kalınlığına katılarak elastisite sabitleri vasıtasıyla ortalama kalınlık alınmış gibi hesap yapılır.



Şekil 2.1 Nervürlü plakta sistemin gösterilişi

Nervürlerin x ve y doğrultularındaki aralıkları sırasıyla dx ve dy, enkesit atalet momentleri I_x ve I_y olsun.

$$D_x = (EI)_x = E \frac{I_x}{dx} \quad (2.1)$$

$$D_y = (EI)_y = E \frac{I_y}{dy} \quad (2.2)$$

Nervürler birer çubuk olarak kabul edilirse ; $\mu_x = \mu_y = 0$ olur. D_x denklem (1.28) deki moment ifadesinde yerine koyulursa ;

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

elde edilir. Kısaltmak amacıyla ;

$$K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ olsun.} \quad (2.4)$$

$$M_x = D_x \cdot K_x \quad (2.5)$$

$$M_y = D_y \cdot K_y \quad (2.6)$$

Nervürlerin ortalama burulma rijitliğine C denirse ;

$$C = \frac{1}{2} G \left(\frac{J_x}{dx} + \frac{J_y}{dy} \right) \quad (2.7)$$

Burada;

J_x, J_y : nervürlerin burulma atalet momentleridir.

$$M_{xy} = C \cdot K_{xy} \quad (2.8)$$

Plak ve nervürler için yazılan moment değerleri superpoze edilirse ;

$$M_x = (D + D_x) K_x + \mu D K_y \quad (2.9)$$

$$M_y = (D + D_y) K_y + \mu D K_x \quad (2.10)$$

$$M_{xy} = D(1 - \mu) K_{xy} + C K_{xy} \quad (2.11)$$

Kapalı matrisi formda ;

$$[M] = [D][K] \quad (2.12)$$

yazılabilir. [D] matrisi açık olarak yazılırsa ;

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + E \frac{I_x}{dx} & \frac{\mu Eh^3}{12(1-\mu^2)} & 0 \\ \frac{\mu Eh^3}{12(1-\mu^2)} & \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + E \frac{I_y}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{1}{2} G \left(\frac{J_x}{dx} + \frac{J_y}{dy} \right) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

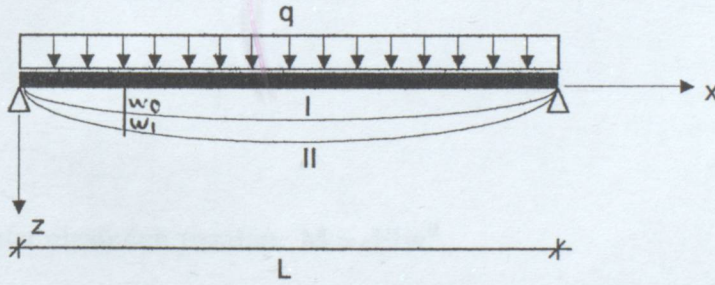
3.ENERJİ PRENSİPLERİ

3.1 Toplam Potansiyel Enerji Prensibi

Geometrik açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilen toplam potansiyel enerji, fiziksel açıdan yalnızca lineer sistemlere uygulanabilmektedir.

3.1.1 Toplam Potansiyel Enerjinin Birinci Varyasyonu (Denge Denklemi)

Tolam potnasiyel enerji, sistemin hakiki denge konumunda bir ekstremden geçer. Böylece belirli bir integral ifadeyi ekstrem yapan konumun bulunmasına problemi indirgemis oluruz. Problemlerin çoğunda bu ekstrem değer bir minimumdur. Matematikte ise bu çeşit problemlere **Varyasyon Hesabı** denir. (Şekil 3.1) deki basit kiriş q yayılı yüküyle yüklü olsun. Çubuğun dx elemanına ait diferansiyel denge denklemini yazalım. (z eksenini aşağı



Şekil 3.1 q yayılı yükü ile yüklü basit kiriş

doğrudur.)

w = çökme (sehim)

w' = eğim(kesit dönmesi)

$-EI w'' = M$ eğilme momenti

$-EI w''' = V$ kesme kuvveti

$EI w^{IV} = q$ yayılı yükün şiddeti

Çubuğun diferansiyel denklemini şöyle olur.

$$EIw^{IV} = q \quad (3.1)$$

Böylece çökme ile dış yük arasındaki esas diferansiyel denklem kurulmuş olur. Denklemin entegrasyonundaki sabitlerin belirtilmesinde kullanılacak sınır şartları ise şunlardır.

$$x=0 \text{ da } w=0 \quad ; x=L \text{ de } w=0 \quad (\text{Geometrik Şartlar})$$

$$x=0 \text{ da } w''=0 \quad ; x=L \text{ de } w''=0 \quad (\text{Dinamik Şartlar})$$

Aranan $w(x)$ eğrisi geometrik sınır şartlarını gerçekleyen bir çok eğriler arasında bir tanesidir. Hakiki denge konumunda toplam potansiyel enerji minimum olmakta ve enerji en küçük değerini bu konumda almaktadır. Toplam potansiyel enerji, iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi ile dış kuvvetlerin potansiyel enerjilerinin toplamına eşittir.

$$V = U + W \quad (3.2)$$

Burada U iç kuvvetlerin işi; W da dış kuvvetlerin işidir. Örnekte iç kuvvetler eğilme momenti ve kesme kuvvetidir. Kesme kuvvetini ihmal edip iç kuvvetlerin potansiyel enerjisini yazalım.

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (3.3)$$

Bu ifadeyi deplasmanlar cinsinden yazalım. $M = -EIw''$

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 dx \quad (3.4)$$

Sistem konservatif ise dış kuvvetlerin işi daima negatiftir. Burada q kuvveti ile w deplasmanı aynı yönde olduğu için çarpımları pozitifdir. Dolayısıyla dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi şöyle olur.

$$W = - \int_0^L qw dx \quad (3.5)$$

Toplam potansiyel enerji:

$$V = U + W = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} (w'')^2 - qw \right] dx \quad (3.6)$$

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi (I) hakiki denge konumuna yakın (II) inci bir konum daha alalım. Burada w_0 denge konumuna karşı gelen deplasmandır, w_1 ise ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlardır. Böyle bir artıma w' nin varyasyonu denir. w' de (II) inci konuma karşı gelen deplasmandır.

$$w \rightarrow w_0 + w_1$$

$w_1(x) = \epsilon \xi(x)$; burada ϵ istenildiği kadar küçük alınan bir değeri, $\xi(x)$ ise sınırlarda sıfır olan keyfi bir fonksiyonu gösterir.

$$\xi(0) = \xi(L) = 0 \quad ; \quad w_1(0) = w_1(L) = 0 \text{ olur}$$

Potansiyel enerjideki değişme (varyasyon) şöyle yapılır.

$$\Delta V = V_{II}(w_0 + w_1) - V_I(w_0) \quad (3.7)$$

$$\Delta V = \left[\int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'' + w_1'')^2 dx - \int_0^L q(w_0 + w_1) dx \right] - \left[\int_0^L \frac{EI}{2} (w_0'')^2 dx - \int_0^L q w_0 dx \right] \quad (3.8)$$

Gerekli işlemler yapıp, kısaltmalardan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\Delta V = \int_0^L EI w_0'' w_1'' dx - \int_0^L q w_1 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx \quad (3.9)$$

Burada üçüncü terim ilk iki terimden daha küçük olup daima pozitifdir.

$$\int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx \quad (3.10)$$

İlk integrali kısmi olarak arka arkaya iki defa entegre edelim.

$$\int_0^L EI w_0'' w_1'' dx = \left| EI w_0'' w_1' \right|_0^L - \left| EI w_0''' w_1 \right|_0^L + \int_0^L EI w_0^{IV} w_1 dx \quad (3.11)$$

İlk terim $w''(0)=w''(L)=0$ dinamik şartlardan dolayı ; ikinci terimde sınırlarda $w_1(0) = w_1(L) = 0$ olduğundan dolayı sıfır eder. Sonuç olarak potansiyel enerjideki değişim şöyle olur.

$$\Delta V = \int_0^L EI w_0^{IV} w_1 dx - \int_0^L q w_1 dx + \alpha \quad (3.12)$$

$$\Delta V = \left[\int_0^L (EI w_0^{IV} - q) dx \right] w_1 + \alpha \quad (3.13)$$

(3.13) denklemindeki büyük parantez içindeki değer denge konumuna ait diferansiyel denklemi gösterdiği için (3.1) den dolayı sıfırdır. Sonuç olarak potansiyel enerjideki değişim sıfırda nbüyük bir değerdir.

$$\Delta V = \alpha > 0 \quad (\alpha : \text{sonsuz küçük pozitif bir değerdir.})$$

Buda gösteriyor ki denge konumuna komşu olan bütün konumlardaki toplam potansiyel enerji denge konumundakinden fazladır. O halde denge konumuna ait toplam potansiyel enerji minimumdur. ΔV deki birinci dereceden ve ikinci dereceden terimlerin toplamına V nin birinci ve ikinci varyasyonu denir.

Bunlar δV ve $\frac{\delta^2 V}{2}$ ile gösterilir.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V \quad (3.15)$$

$$\delta V = \int_0^L (EI w_0'' w_1'' - q w_1) dx = 0 \quad (3.16)$$

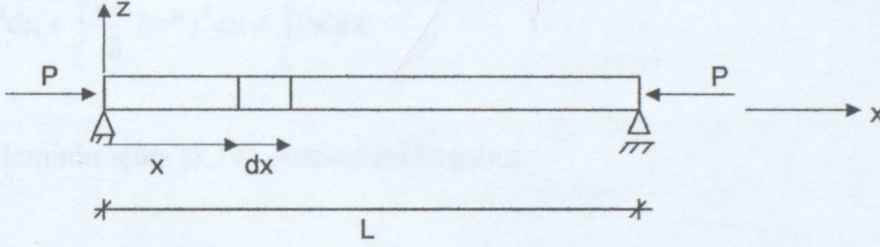
$$\frac{1}{2} \delta^2 V = \int_0^L \frac{EI}{2} (w_1'')^2 dx = \alpha > 0$$

$$\delta V = 0$$

$$\frac{\delta^2 V}{2} > 0 \quad \text{ise } V \text{ minimumdur.}$$

O halde elastik bir sistemde geometrik sınır şartlarını gerçekleyen bütün yer değiştirme konumları arasında; hakiki konum ; toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır.

3.1.2 Toplam Potansiyel Enerjinin İkinci Varyasyonu



Şekil 3.2 Eksenel basınç yükü altında basit kiriş

Uçlarından eksenel P basınç yüküne maruz bir prizmatik çubuk alalım. Toplam potansiyel enerjiyi yazalım.

$$V = U_m + U_b + W \quad (3.14)$$

Burada U_m membran, U_b eğilme şekil değiştirme enerjisi ve W tatbik edilen dış yükün potansiyel enerjisidir.

$$U_m = \frac{EA}{2} \int_0^L \epsilon^2 dx \quad (3.15)$$

$$U_b = \frac{EA}{2} \int_0^L (w'')^2 dx \quad (3.16)$$

Burada ϵ merkezli eksendeki uzama şekil deęiřtirmesidir.

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}(w')^2 \quad (3.17)$$

Eksenel P yükünün potansiyel enerjisi şöyledir.

$$W = P[u(L) - u(0)] \quad (3.18)$$

$$W = P \int_0^L u' dx \quad (3.19)$$

(3.15) (3.16) ve (3.19) denklemlerini (3.14) denklemini içine koyalım.

$$V = \int_0^L \frac{EA}{2} \varepsilon^2 dx + \int_0^L \frac{EI}{2} (w'')^2 dx + \int_0^L Pu' dx \quad (3.20)$$

(3.20) denkleminin içine (3.17) denklemini koyalım.

$$V = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} (u' + \frac{1}{2} w'^2)^2 + \frac{EI}{2} (w'')^2 + Pu' \right] dx \quad (3.21)$$

$$u \rightarrow u_0 + u_1$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1 \quad (3.22)$$

Burada u_0 , w_0 stabilitenin incelendiği denge konumunu gösterir. u_1 , w_1 ise ikinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük artımlardır. Deforme olmamış kolon için şöyle yazılabilir.

$$u_0 = -\frac{P}{EA} x \quad ; \quad u'_0 = -\frac{P}{EA} \quad ; \quad w_0 \cong 0 \quad (3.23)$$

$$(\varepsilon = -\frac{P}{EA} \quad ; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{P}{EA} \quad ; \quad u = -\frac{P}{EA} x \text{ kolon kısaldığı için})$$

$$V + \Delta V = \int_0^L \left\{ \left[\frac{EA}{2} (u'_0 + u'_1) + \frac{1}{2} (w'_0 + w'_1)^2 \right]^2 + \frac{EI}{2} (w''_0 + w''_1)^2 + P(u'_0 + u'_1) \right\} dx \quad (3.24)$$

$$V = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} (u'_0 + \frac{1}{2} w_0'^2) + \frac{EI}{2} (w''_0)^2 + Pu'_0 \right] dx \quad (3.25)$$

$$\Delta V = (V + \delta V) - V$$

Potansiyel enerjideki değişimi Taylor serisine açalım.

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots$$

$$\frac{1}{2!} \delta^2 V = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u'_1)^2 + EI(w''_1)^2 - P(w'_1)^2] dx \quad (3.26)$$

İkinci dereceden terimlerin toplamı $\frac{1}{2!} \delta^2 V$ ile gösterilir. Üçüncü ve dördüncü dereceden terimler terk edilmiştir. P nin küçük değerleri için ; u_1 , w_1 in bütün sıfır olmayan varyasyonları için $\delta V^2 > 0$ dır. Yük sıfırdan artırılırken en az bir u_1 , w_1 varyasyonları için δV^2 sıfıra eşitlendiğinde P denilen değere ulaşılır. Bütün diğer varyasyonlar için hala pozitiftir. $P = \bar{P}$ için δV^2 ; u_1 , w_1 göre stasyonerdir.

$$\delta(\delta^2) = 0 \quad \delta V = 0$$

δV^2 nin u_1 , w_1 e göre varyasyonel türevi sıfıra eşittir.

$$\frac{\delta(\delta^2 V)}{\delta u_1} = 0 \quad \frac{\delta(\delta^2 V)}{\delta w_1} = 0 \quad (3.27)$$

4. VİRTÜEL İŞ PRENSİBİ

Virtüel deplasmanlar metodu ve virtüel kuvvetler metodu olmak üzere ikiye ayrılır. Sonlu elemanlar metodunda virtüel deplasmanlar metodu kullanılır. Kuvvetlerin işi hesaplanırken, yer değiştirmelerin mutlaka o kuvvetlerden doğması gerekmez. Yani iş her zaman gerçek olmayabilir. Keyfi bir yer değiştirme ile de iş hesabı bahis konusu olabilir. Tamamen keyfi olan bu yer değiştirmeye virtüel yer değiştirme denir. Kuvvetin bu şekilde virtüel yer değiştirme ile yaptığı bu işede **Virtüel İş** denir. Virtüel yer ve şekil değiştirmeler sistemin dış bağlarına uygun , sistemin iç sürekliliğini bozmayan , çok küçük ve keyfidir. Virtüel iş prensibi geneldir. Geometrik açıdan veya fiziksel açıdan lineer ve lineer olmayan sistemlere uygulanabilir. Cismin fizik bünyesine bağlı değildir. Dengesi incelenen cisim rijit , elastik veya plastik olabilir.

Rijit cisimler mekaniğinde nonlinearite problemi iki ana kola ayrılmıştır. Biri malzeme veya fiziksel nonlinearite ; diğeri büyük deplasman veya geometrik nonlinearite. Malzeme bakımından nonlinearite malzemenin gerilme – deformasyon kanununa bağlıdır. Geometrik nonlinearite deplasmanların derecesine bağlıdır. Öyleki bu deplasman durumunda artık küçük deplasmanlar için geçerli olan deformasyon - deplasman bağıntıları geçerli değildir. Böyle problemlerde virtüel iş prensibi kolaylıkla uygulanabilmektedir. u hakiki deplasman , δu virtüel deplasman ; $\{ \epsilon \}$ hakiki deformasyon , $\{ \delta \epsilon \}$ virtüel deformasyon sie ; deplasman durumunda iç kuvvetlerin yaptığı işe , **iç kuvvetlerin virtüel işi** denir.

$$\delta U = \iiint_V \{ \delta \epsilon \}^T \{ \sigma \} dV \quad (4.1)$$

Buradaki gerilmeler hakiki gerilmeler, deformasyonlar ise virtüeldir.

$$\{ \sigma \} = [D] \{ \epsilon \} \quad (4.2)$$

$$\delta U = \iiint_V \{ \delta \epsilon \}^T [D] \{ \epsilon \} dV \quad (4.3)$$

X kütlelesel kuvveti ; p yüzeysel kuvveti ; q çizgisel kuvveti ; P münferit kuvveti gösterirse dış kuvvetlerin işi şöyle olur.

$$\delta W = \iiint_V \{\delta u\}^T \{X\} dV + \iint_F \{\delta u\}^T \{p\} dF + \int_S \{\delta u\}^T \{q\} ds + P \quad (4.4)$$

Dış yüklerin etkisi altında dengede olan bir sisteme geometrik ve kinematik sınır şartlarına uygun keyfi küçük bir deplasman verildiğinde dış kuvvetlerin işindeki artım , sistemin şekil değiştirme enerjisindeki artıma eşittir.Yani iç kuvvetlerin virtüel işi dış kuvvetlerin virtüel işine eşittir.

$$\delta U = \delta W \quad (4.5)$$

5. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Sonlu elemanlar yöntemi; sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sonlu elemanlara ayırarak elde edilen elemanlar üzerinde iç ve dış kuvvetlerin enerjisini minimizasyonu ve sonra bu elemanların birleştirilmesi tarzında bir uygulama getirir. Bunun sonucu olarak mesnet şartları, sisteme ait özellikler dış yüklerin sürekli yada ani değişimleri kolayca gözönüne alınabilir. Dolayısıyla sonlu elemanlar yöntemi analitik metodlarla çözülemeyen karışık problemlere uygulanabilir. Yüzeysel sistemin tipik bölgelerinde eleman boyutları küçültülerek o bölgenin daha prezisyonlu incelenmesi mümkün olur. Diğer bir avantajıda sınır şartlarının problemin çözüm sırasına göre en son adımda hesaplara dahil edilmesidir. Böylelikle çeşitli sınır şartlarını probleme uygularken baştaki yoğun hesaplara girilmez.

Sonlu Elemanlar Yönteminin Kullanıldığı Yerler

- a- Yapı Mühendisliği : Çubuk, plak, levha ve kabukların çözümünde
- b- Zemin Mekaniğinde : Şevlerin gerilme analizinde, barajlarda ve tünellerde
- c- Hidrolikte : Viskoz akımda, sürtünme maddelerinin taşınımında, dalga titreşiminde
- d- Isı Transferinde : Isı iletiminde, ısı akımı taşınımında
- e- Nükleer Enerjide : Reaktörün statik ve dinamik analizinde, ısı akımında
- f- Elektrik Mühendisliğinde : Devre analizlerinde, manyetik potansiyel dağılımında kullanılabilir.

Sonlu elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemana ayrılmaktadır. Eleman boyutları küçüldükçe problemin hata oranı azalmakta, fakat çözüm süresi uzamaktadır. Sistemi oluşturan elemanların herbirine sonlu eleman denir ve birleştikleri köşe noktalarında düğüm noktaları olarak adlandırılır. Sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi, düğüm noktalarının deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilebilir. Deplasman parametreleri; deplasman bileşenleri, dönmeler ve burulma eğriliği gibi deplasman vektörleri içermektedir. Eğilme hesaplarında düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sistemin deplasman yüzeyinin ve her düğüm noktasındaki kesit tesirlerinin bulunması için kafidir. Stabilité hesabında ise, bu deplasman parametrelerine göre kurulan denklem takımının (Δ) katsayılar determinantını sıfır yapan yük yani kritik yük tayin edilir.

5.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçimi

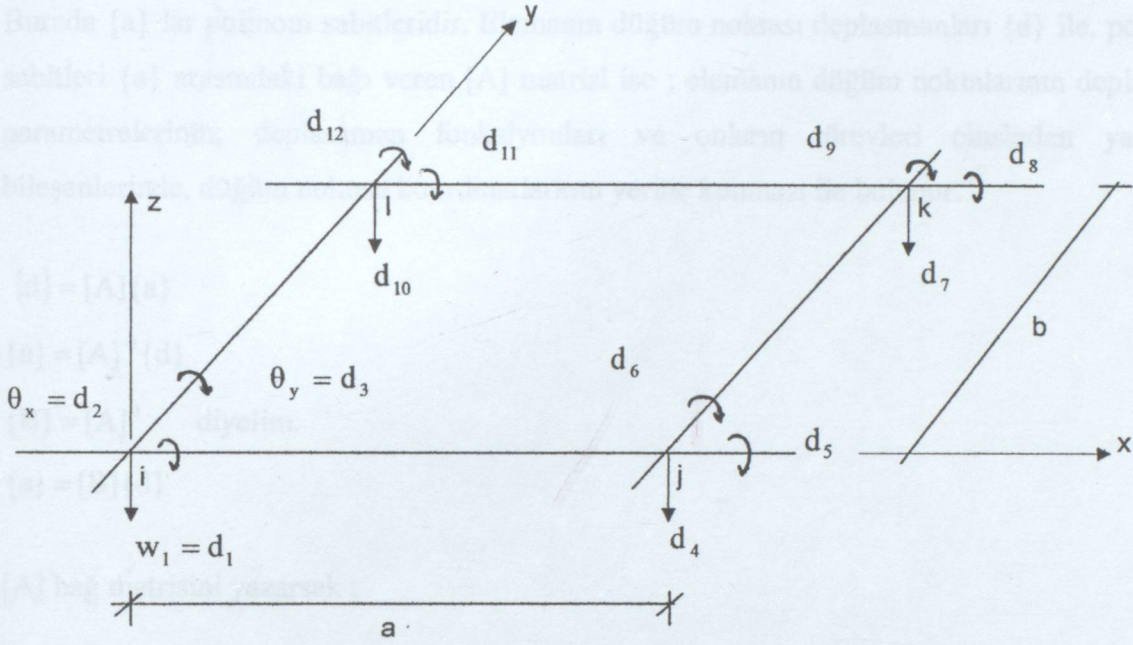
Deplasman fonksiyonu iki şekilde seçilebilir.

- 1) Düğüm noktası deplasman parametreleri ile sonradan belirlenen belirsiz katsayılı basit bir polinom olarak belirlenebilir.
- 2) Doğrudan, bir elemanın bütün diğer düğüm noktalarında sıfır değeri alan, sadece dikkate alınan düğüm noktasındaki deplasman ve dönmeler için birim değer alan şekil fonksiyonları olarak belirlenebilir.

Bir deplasman fonksiyonu şu şartları sağlamalıdır :

- 1) Deplasman fonksiyonu bir polinom şeklinde seçilmişse, o polinom eleman serbestlik derecesi kadar sayıda polinom sabitine sahip olmalıdır.
- 2) Deplasman fonksiyonu, bütün koordinat eksenlerine göre dengelenmelidir.
- 3) Deplasman fonksiyonu, eleman herhangi bir iç gerilmeye neden olmadan aynı zamanda rijit cisim hareketlerinde bulunmasına izin vermelidir.
- 4) Deplasman fonksiyonu, sabit deformasyon şartını sağlayacak şekilde seçilmelidir.
- 5) Eleman içinde ve kenarlarında süreklilik şartını sağlamalıdır. Ayrıca iç ve dış kuvvetlerin işindeki türevlerde sürekli olmalıdır.

5.1.1 Plaklar İçin Deplasman Fonksiyonu Seçimi



Şekil 5.1 Dikdörtgen bir plaktaki deplasmanlar

Dikdörtgen bir eleman seçilmiştir. Elemanın her köşesinde bir deplasman bileşeni, ikide dönme olmak üzere 3 tane deplasman parametresi alınmıştır. Böylece her elemanda toplam 12 tane serbestlik derecesi tarif edilmiştir. Bu nedenle deplasman fonksiyonu 12 bilinmeyenli bir polinom olarak seçilmelidir.

Seçilen dikdörtgen elemanın düğüm noktalarındaki deplasman parametreleri:

$$\{d\}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Deplasman fonksiyonu:

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (5.2)$$

Burada $\{a\}$ lar polinom sabitleridir. Elemanın düğüm noktası deplasmanları $\{d\}$ ile, polinom sabitleri $\{a\}$ arasındaki bağı veren $[A]$ matrisi ise ; elemanın düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin; deplasman fonksiyonları ve onların türevleri cinsinden yazılmış bileşenlerinde, düğüm noktası koordinatlarının yerine konması ile bulunur.

$$\{d\} = [A]\{a\} \quad (5.3)$$

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \quad (5.4)$$

$$\{B\} = [A]^{-1} \text{ diyelim.} \quad (5.5)$$

$$\{a\} = [B]\{d\} \quad (5.6)$$

$[A]$ bağı matrisini yazarsak ;

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -a_3 - a_5y - 2a_6y - a_8x^2 - 2a_9xy - 3a_{10}y^2 - a_{11}x^3 - 3a_{12}xy^2 \quad (5.7)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + 2a_8xy + a_9y^2 + 3a_{11}x^2y + a_{12}y^3 \quad (5.8)$$

Deplasman fonksiyonu matris formda ;

$$w(x, y) = \{ \Phi(x, y) \} \{ a \} \quad (5.9)$$

$$w(x, y) = \{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$w(x, y) = \{ \Phi(x, y) \} \{ a \} \quad (5.10)$$

Düğüm noktası koordinatları ;

i(0,0) j(a,0) k(a,b) l(0,b)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 & ab^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^2 & b^2 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

5.2 Şekil Fonksiyonlarının Bulunması

$$w(x, y) = \{\Phi(x, y)\} \{a\}$$

(5.6) denklemini (5.10) denkleminde yerine koyalım.

$$w(x, y) = \{\Phi(x, y)\} [B] \{d\} \quad (5.12)$$

$$[N] = \{\Phi(x, y)\} [B] \quad (5.13)$$

$$w(x, y) = [N] \{d\} \quad (5.14)$$

5.3 Deformasyonların Deplasmanlar Cinsinden İfadesi

İnce plak için lineer şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları şöyledir.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\text{Matris formda yazarsak ; } \{\varepsilon\} = [F] \{a\} \quad (5.16)$$

[F] : Türev Matris

(5.6) denklemini (5.16) denkleminde yerine koyalım.

$$\{\varepsilon\} = [F][B]\{d\} \quad (5.17)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_4 & -6a_7x & -2a_8y & -6a_{11}xy & 0 \\ -2a_6 & -2a_9x & -6a_{10}y & -6a_{12}xy & 0 \\ 2a_5 & 4a_8x & 4a_9y & 6a_{11}x^2 & 6a_{12}y^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

5.4 Kesit Tesirleri – Şekil Değişimleri Bağıntıları

$$\{\sigma\} = \{M\} = [D]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (5.20)$$

Burada ;

$\{\varepsilon_0\}$: başlangıç şekil değişimi

$\{\sigma_0\}$: başlangıç gerilmesi.

Bunlar ihmal edilirse;

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (5.21)$$

5.5 Eleman Rijitlik Matrisi

Eleman rijitlik matrisi ve yük vektörü virtüel iş prensibi veya minimum potansiyel enerji prensiplerinden biri kullanılarak bulunabilir.

$$\delta V = \delta U + \delta W \quad (5.22)$$

δV : Toplam potansiyel enerji

δU : Şekil değişimlerin yaptığı iş

δW : Dış kuvvetlerin yaptığı iş

(5.31)

$$\delta U = \iint \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dx dy$$

(5.23)

$$\delta W = - \iint \{p\} \{w\}^T dx dy$$

(5.24)

Eleman rijitlik matrisinin hesabında iki yöntem kullanılır.

1) İntegral matrisleriyle hesap.

(5.17) denklemini (5.23) denkleminde yazalım.

$$\delta U = \{d\}^T \iint \{B\}^T [F]^T [D] [F] [B] dx dy \{d\}$$

(5.25)

$$[H] = \iint [F]^T [D] [F] dx dy$$

(5.26)

$$[k_e] = [B]^T [H] [B]$$

(5.27)

$$\delta U = \{d\}^T [k_e] \{d\}$$

(5.28)

2) Şekil fonksiyonlarının türevlerinden yararlanarak hesap.

$$[K] = \{d\}^T \iint [N]^T [D] [N] dx dy \{d\}$$

(5.29)

Elemanın boyutları, şekli yada elastisite modülü değişirse [D] matrisi de değişir. Buna bağlı olarak yeni bir eleman rijitlik matrisi hesaplamak gerekir.

5.6 Yük Vektörü

Tekil yük için :

Yük hangi düğüm noktasına geliyorsa, yükün kendi değeri o noktadaki yer değiştirmelerle aynı doğrultuda yerleştirilir.

Yayıllı yük için :

Şekil fonksiyonları ile birim yayılı yükün çarpımından bulunur.

$$\delta W = - \iint \{p\} \{\varphi(x, y)\}^T [B]^T \{d\}^T dx dy$$

(5.30)

$$\{q_e\} = \iint [N]^T \{p\} dx dy \quad (5.31)$$

$$\delta W = -\{q_e\} \{d\}^T \quad (5.32)$$

$$\delta V = \{d\}^T ([k_e] \{d\} - \{q_e\}) \quad (5.33)$$

5.7 Sisteme Geçiş

Elemandan sisteme geçiş için iki yöntem vardır.

- 1) Çevirme matrisleri ile
- 2) Biriktirme yöntemi ile

Sistemin rijitlik matrisi

$$[K] = \sum_{i=1}^n [C_{ei}]^T [k_e] [C_{ei}] \quad (5.34)$$

Sistemin dış yük matrisi

$$[Q] = \sum_{i=1}^n [C_{ei}]^T [q_e] \quad (5.35)$$

$$[K] \{D_s\} = \{Q\} \quad (5.36)$$

$[C_{ei}]$: (i) elemanın çevirme matrisi

$[K]$: Sistemin rijitlik matrisi

$[Q]$: Sistemin dış yük matrisi

$\{D_s\}$: Sistemin deplasman parametresi

1) Sonlu elemana ayrılan sistemin düğüm noktaları numaralandırılırken elde edilecek lineer denklem takımının katsayılar matrisi bant genişliğinin mümkün mertebe küçük olmasına dikkat edilmelidir.

- 2) Her elemanın rijitlik matrisi, varsa elastik yataklanma matrisi ve dış etkiler matrisi hesaplanır.
- 3) Eleman eksenini ile sistem ekseninin çakışmaması halinde eleman rijitlik matrisi ve yük matrisi çevirme matrisleri ile sistem eksenlerine dönüştürülür.
- 4) Sistem rijitlik ve dış etkiler matrisi yerlerine yerleştirilir.
- 5) Elde edilen denklem takımına mesnet şartları konur. Mesnetlerde sıfır olduğu bilinen deplasman parametrelerine ait satır ve sütunlar silinip denklem takımı küçültülür. Eğer mesnet çökmeleri varsa; mesnet çökmeleri düğüm noktaları deplasman parametrelerinin alacağı değerlerle belirlenir. Katsayılar matrisinde bu deplasman parametrelerine karşı gelen yatay satırlar silinmeli, sütunlar ise bu değerlerle çarpılarak denklem takımının sağına geçirilip ilave yükleme terimleri olarak düşünölmelidir.
- 6) Denklem takımı çözümlenerek düğüm noktası deplasman parametreleri bulunur.
- 7) Eleman eksenini ile sistem eksenini çakışmaması halinde deplasman parametreleri eleman özel eksenine dönüştürülür.
- 8) Düğüm noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bulunur.
- 9) Aynı düğüm noktasında birleşen elemanların her birinden hesaplanan kesit tesirleri farklıdır. Bu değerlerin ortalaması alınarak o düğüm noktasının kesit tesiri nümerik olarak bulunmuş olur.

6. NERVÜRLÜ PLAKLAR İÇİN HESAPLANAN ELEMAN RİJİTLİK MATRİSİ

$$K_{1,1} = -2b/a^3(D+D_x) - 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,1} = 4b/a^3(D+D_x) + 2\nu D/a + 4a/b^3(D+D_y) + 5.6/ab[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,2} = -\nu D/a - 2a/b^2(D+D_y) - 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,3} = 2b/a^2(D+D_x) + \nu D/b + 0.4/b[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,4} = -4b/a^3(D+D_x) - 2\nu D/a + 2a/b^3(D+D_y) - 5.6/ab[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,5} = \nu D/a - a/b^2(D+D_y) + 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,6} = 2b/a^2(D+D_x) + 0.4/b[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,7} = -2b/a^3(D+D_x) + 2\nu D/a - 2a/b^3(D+D_y) + 5.6/ab[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,8} = -a/b^2(D+D_y) + 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,9} = b/a^2(D+D_x) - 0.4/b[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,10} = 2b/a^3(D+D_x) - 2\nu D/a - 4a/b^3(D+D_y) - 5.6/ab[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,11} = -2a/b^2(D+D_y) - 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{1,12} = b/a^2(D+D_x) - \nu D/b - 0.4/b[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,2} = 4a/3b(D+D_y) + 8b/15a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,3} = -\nu D$$

$$K_{2,4} = -a/b^2(D+D_y) + \nu D/a + 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,5} = 4a/6b(D+D_y) - 8b/15a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,6} = 0$$

$$K_{2,7} = a/b^2(D+D_y) - 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,8} = a/3b(D+D_y) + 2b/15a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,9} = 0$$

$$K_{2,10} = 2a/b^2(D+D_y) + 0.4/a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,11} = 2a/3b(D+D_y) - 2b/15a[(1-\nu)D/2+C]$$

$$K_{2,12} = 0$$

$$K_{3,3} = 4b/3a(D + D_x) + 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,4} = -2b/a^2(D + D_x) - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,5} = 0$$

$$K_{3,6} = 2b/3a(D + D_x) - 2a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,7} = -b/a^2(D + D_x) + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,8} = 0$$

$$K_{3,9} = b/3a(D + D_x) + 2a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,10} = b/a^2(D + D_x) - vD/b - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{3,11} = 0$$

$$K_{3,12} = 2b/3a(D + D_x) - 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,4} = 4b/a^3(D + D_x) + 2vD/a + 4a/b^3(D + D_y) + 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,5} = -2a/b^2(D + D_x) - vD/a - 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,6} = -2b/a^2(D + D_x) - vD/b - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,7} = 2b/a^3(D + D_x) - 2vD/a - 4a/b^3(D + D_y) - 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,8} = -2a/b^2(D + D_y) - 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,9} = -b/a^2(D + D_x) + vD/b + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,10} = -2b/a^3(D + D_x) + 2vD/a - 2a/b^3(D + D_y) + 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,11} = -a/b^2(D + D_y) + 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{4,12} = -b/a^2(D + D_x) + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,5} = 4a/3b(D + D_y) + 4.8b/9a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,6} = vD$$

$$K_{5,7} = 2a/b^2(D + D_y) + 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,8} = 2a/3b(D + D_y) - 2b/15a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,9} = 0$$

$$K_{5,10} = a/b^2(D + D_y) - 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,11} = a/3b(D + D_y) + 2b/15a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{5,12} = 0$$

$$K_{6,6} = 4b/3a(D + D_x) + 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{6,7} = -b/a^2(D + D_x) + vD/b + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{6,9} = 2b/3a(D + D_x) - 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{6,10} = b/a^2(D + D_x) - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{6,11} = 0$$

$$K_{6,12} = b/3a(D + D_x) + 2a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,7} = 4b/a^3(D + D_x) + 2vD/a + 4a/b^3(D + D_y) + 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,8} = 2a/b^2(D + D_y) + vD/a + 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,9} = -2b/a^2(D + D_x) - vD/b - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,10} = -4b/a^3(D + D_x) - 2vD/a + 2a/b^3(D + D_y) - 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,11} = a/b^2(D + D_y) - vD/a - 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{7,12} = -2b/a^2(D + D_x) - 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{8,8} = 4a/3b(D + D_y) + 8b/15a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{8,9} = -vD$$

$$K_{8,10} = a/b^2(D + D_y) - vD/a - 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{8,11} = 2a/3b(D + D_y) - 8b/15a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{8,12} = 0$$

$$K_{9,9} = 4b/3a(D + D_x) + 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{9,10} = 2b/a^2(D + D_x) + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{9,11} = 0$$

$$K_{9,12} = 2b/3a(D + D_x) - 2a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{10,10} = 4b/a^3(D + D_x) + 2vD/a + 4a/b^3(D + D_y) + 5.6/ab[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{10,11} = 2a/b^2(D + D_y) + vD/a + 0.4/a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{10,12} = 2b/a^2(D + D_x) + vD/b + 0.4/b[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{11,11} = 4a/3b(D + D_y) + 8b/15a[(1-v)D/2 + C]$$

$$K_{11,12} = vD$$

$$K_{12,12} = 4b/3a(D + D_x) + 8a/15b[(1-v)D/2 + C]$$

8. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında sonlu elemanlar yöntemi, nervürlü plaklar için eğilme hesabı yapılmasında kullanılmıştır. Öncelikle şunu belirtmek gerekirkı sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık bir yöntemdir. Bununla birlikte karmaşık problemlerin çözümünde kolaylıkla uygulanabildiği için tercih edilen bir yöntemdir.

Burada üzerinde durulması gereken en önemli konu; nervür rijitliğinin plak rijitliğine katılarak hesap yapılmasıdır. Sık nervürlü plaklar için oldukça doğru olan bu kabul, nervürlerin arası açıldıkça gerçek çözümden uzaklaşmaktadır. Bu çalışmanın gerçekten yararlı olabilmesi için nervür aralıklarının ne kadar olması gerektiğine dair bir optimizasyon yapılmalıdır. Nervür aralıkları için belli bir sınır değer bulunup hesaplamanın ne şekilde yapılacağına karar verilmelidir. Bu tez çalışmasında elde edilen eleman rijitlik matrisi, elastik plak teorisine göre hesaplanmış ve sık nervürlü plaklar için geçerlidir.

KAYNAKLAR

Berktaş İ. (1992) "Plak Teorisi ve Uygulamaları", Y.T.Ü., İstanbul

Çakıroğlu A., Özden E., Özmen G. (1992) "Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları", Cilt 2., 2. Baskı, İ.T.Ü., İstanbul

Girkmann K., Çeviren: Tameroğlu S. (1991) "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler", İ.T.Ü., İstanbul

Köksal T. (1995) "Sonlu Elemanlar Metodu", Y.T.Ü., İstanbul

Szillard R. (1974) "Theory of Analysis of Plates Prentice-Hall", "INC"

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	10.09.1976	
Doğum Yeri	Sinop	
Lise	1989-1992	Kabataş Erkek Lisesi
Lisans	1993-1997	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1997-2001	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Yapı Anabilim Dalı

