

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

85022

DÖNEL PARABOLOİD KABUĞUN KANTHOROVİCH- TOTTENHAM YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

İnşaat Mühendisi İzet HOT

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

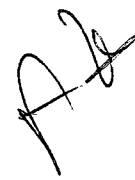
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL

İSTANBUL, 1999



85022

E. KÖKSAL



SİMGE LİSTESİ	i
ŞEKİL LİSTESİ	ii
ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ	1
2. İNCE KABUK TEORİSİNDE YAPILAN KABULLER	3
3. YÜZEY GEOMETRİSİ ve GENEL KABUK DENKLEMLERİ	6
3.1 Yüzey Geometrisi	6
3.1.1 Genel Yüzey Parametrik Denklemleri	6
3.1.2 Lamé Katsayıları	8
3.1.2.1 Birinci Kuadratik Form Katsayıları, Lamé Katsayıları	8
3.1.2.2 İkinci Kuadratik Form Katsayıları, Lamé Katsayıları	8
3.1.3 Genel Yüzey Karakteristikleri	9
3.1.4 Toplam Ve Ortalama Eğrilikler Ve Yüzey Tipleri	11
3.1.4.1 Toplam Eğrilik, Gauss Eğriliği	11
3.1.4.2 Ortalama Eğrilik	11
3.1.4.3 Yüzey Tip Ve Tarifler	11
3.2 Kabuk Genel Denklemleri	14
3.2.1 Genel Yüzey Gerilme Hali Ve Kesit Tesirleri	14
3.2.2 Ortogonal Eğrisel Koordinatlarda, Orta Yüzeyin Şekil Değiştirme Bileşenleri	18
3.2.2.1 Birim Uzama Şekil Değiştirme Bileşenleri	18
3.2.2.2 Birim Kayma Şekil Değiştirme Bileşenleri	18
3.2.2.3 Koordinat Eğrilerine Teğet Doğruların Eğilmelerinin Değişimi, Yani Dönmeleri .	18
3.2.2.4 Normal Eğrilik Değişimi	18
3.2.2.5 Bülme Eğriliğinin Değişimi	19
3.2.3 Kabuk Elastisite Bağlıları	19
3.2.4 Genel Yüzey Denge Denklemleri	19
3.2.4.1 Genel Eğrisel (X,Y) Koordinatlarda Denge Denklemleri	19
3.2.4.2 Ortogonal Asal Eğrisel (X,Y) Koordinatlarda Denge Denklemleri	20
3.2.5 Genel Eğrisel Koordinatlarda Lineer Maman Denge Denklemleri	20
4. DÖNEL KABUK	22
4.1 Genel Dönel Kabuklar	22
4.1.1 Giriş Ve Tanımlamalar	22
4.1.2 Genel Dönel Kabukların Yüzey Denklemleri Ve Karakteristik Değerler	22

4.1.2.1	Kartezyen Koordinat Sisteminden Eğrisel Koordinat Sistemine Geçiş	22
4.1.2.2	Eğrisel Koordinatlarda Dönel Yüzey Parametrik Genel Denklemleri	26
4.1.3	Dönel Yüzey Genel Karakteristikleri	30
4.2	Genel Dönel Kabuk Lineer Denge Denklemleri	31
4.2.1	Genel Dönel Kabuk Denge Denklemleri	31
4.2.2	Kinematik Bağlantılar	32
4.2.2.1	Birim Boyda Uzama Şekil Değiştirme Bileşenleri	32
4.2.2.2	Kayma Şekil Değiştirme Bileşenleri	33
4.2.2.3	Meridyen Ve Paralel Teğetlerinin Dönmeleri	33
4.2.2.4	Normal Eğrilik Değişimleri	33
4.2.2.5	Burulma Eğrilik Değişimi	33
4.3	Özel Hal, Dönel Simetrik Yük Etkisi Durumu	33
4.3.1	Özel Halde, Kinematik Ve Elastisite Bağlantıları	34
4.3.1.1	Kinematik Bağlantıları	34
4.3.1.2	Elastisite Bağlantıları	34
4.3.2	Mambran Denge Denklemleri	35
4.3.2.1	Simetrik Olmayan Yük Hali	35
4.3.2.2	Simetrik Olan Yük Hali	35
5.	SAYISAL ÇÖZÜM	37
5.1	Dönel Paraboloid Kabuk	37
5.1.1	Dönel Paraboloid Yüzey Karakteristikleri	37
5.1.2	Kesit Zorları	37
5.2	Kanthorovich-Tottenham Yöntemi	38
5.3	Örnek	41
5.4	Sayısal Uygulama	48
5.5	Sonuçların Karşılaştırılması	54
6.	SONUÇLAR ve TARTIŞMA	56
	KAYNAKLAR	57
	EKLER	58
Ek 1	SAP90 data dosyası	59
Ek 2	Kabuğun görünüşü	62
Ek 3	Kabuğun simetrik yük altında deforme olmuş şekli	63
Ek 4	M_{11} (yani M_x) moment diyagramı	64
Ek 5	M_{22} (yani M_y) moment diyagramı	65
Ek 6	M_{12} (yani M_{xy}) moment diyagramı	66
Ek 7	SAP90 data.SOL dosyası	67
	ÖZGEÇMİŞ	68

SİMGE LİSTESİ

ds_x, ds_y	Kenar boyları
ds	Köşegen eğri uzunluğu
r_x, r_y, r_{xy}	Normal eğrilik yarıçapları
$1/r_x, 1/r_y, 1/r_{xy}$	Normal eğrilikler
$\rho_x, \rho_y, \rho_{xy}$	Geodezik eğrilik yarıçapları
$1/\rho_x, 1/\rho_y, 1/\rho_{xy}$	Geodezik eğrilikler
$\phi_x, \dots, \omega_x, \dots$	Dönmeler
u, v, w	Yer değiştirme bileşenleri
A, B, C, E, F, G	Birinci kuadratik form Lamé katsayıları
L, M, N	İkinci kuadratik form Lamé katsayıları
N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}	Normal kuvvetler
M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}	Eğilme momentler
V_x, V_y, V_{xy}, V_{yx}	Kesme kuvvetler



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	Eğrisel koordinatlarda genel yüzey 7
Şekil 3.2 a,b	Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri 14
Şekil 4.1 a,b,c	Genel dönel yüzey (x,y) eğrisel koordinatların (φ,θ) eğrisel koordinat formuna dönüşümü 23
Şekil 4.1 d	Sonsuz küçük dört kenarlı elamanın genel dönel yüzey hali 24
Şekil 4.1 e	Sonsuz küçük dört kenarlı elamanın genel eğrisel yüzey hali 25
Şekil 5.1	Tabanı kare planlı dönel paraboloid kabuk 48
Şekil 5.2	Noktalar dağılım krokisi 49

ÇİZELEGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1	Genel yüzey karakteristikleri	6
Çizelge 4.1	Dönel yüzey karakteristikleri	30
Çizelge 5.1	Dönel paraboloid yüzey karakteristikleri	37
Çizelge 5.2	Nokta nokta kesit tesirleri sonuçları	54
Çizelge 5.3	Nokta nokta yer değiştirme bileşenleri sonuçları	54
Çizelge 5.4	Kanthorovich-Tottenham yöntemi ve SAP90 ile bulunan kesit tesirleri sonuçlarının karşılaştırması	55
Çizelge 5.5	Kanthorovich-Tottenham yöntemi ve SAP90 ile bulunan yer değiştirme bileşenleri sonuçlarının karşılaştırması	55



ÖNSÖZ

Dünyanın dört tarafına dağılmış, fakat her zaman manevi anlamda yanımda olan, bana doğru yolu gösteren aileme, özellikle o sınımsız ve kibar söyledikleri “OKU” emri hatırlayarak, babama ve anneme ömür boy bir borç bilirim.

Ayrıca bu tezin hazırlanmasında yardımlarını hiç esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL hocama teşekkür ve şükranlarımı sunarım.



ÖZET

Dönel kabuklar, bir eksen etrafında her hangi bir eğrinin dönmesiyle oluşan yüzeylerdir. Eksen etrafında döndürülen eğriye göre isim alırlar. Örneğim bir parabol döndürülürse meydana gelen yüzey dönel paraboloid kabuk adını alır.

Sayısal tekniklerinden yararlanarak çeşitli yük altında, dönel kabukların çözümü için kullanılacak denklemlerin kabuk genel denge denklemlerinden elde edilmesi mümkündür. Dönel kabuk denklemlerini daha basit ve anlaşılır formda ifade etmek için genel yüzey kabuk denklemlerde kullanılan eksen takımı olan (x,y) eğrisel koordinatlarını yeni eksen takımına (φ,θ) dönüştürerek oluşturmak gerekir. Dönel paraboloid kabuğun çözümü, bir çok sayısal metotlarla gibi, Kanthorovich-Tottenham metoduyla mümkündür.

Kanthorovich-Tottenham metodunun amacı:

- İki boyutlu kısmi diferansiyel denklem takımını, bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerinin iki doğrultuda olan fonksiyonlarından bir doğrultudakini seçerek ve enerjinin minimizasyonundan yararlanarak adi diferansiyel denklem takımına indirgemek.
- Yeni fonksiyonlar (tarifiyle) üç adet yüksek mertebeden adi diferansiyel denklem takımını sekiz adet birinci mertebeden diferansiyel denklem takımına indirgemek.
- Sınır şartlarından yararlanarak S_0 başlangıç matrisini belirlemek. Burada S durum matrisini ve sonra kesit tesirlerini ve yer değiştirme bileşenlerini bulmak.

Anahtar Kelimeler: Dönel paraboloid kabuk,Kanthorovich-Tottenham metodu

JÜRİ:

1. Prof.Dr. Ercüment KÖKSAL (Danışman)
2. Prof.Dr. Faruk YÜKSELER
3. Prof. Gündüz ÖZİŞİK

Kabul tarihi: 13.07.1999
Sayfa sayısı : 68

ABSTRACT

The pivoted shells are the surfaces that becomes with any curve's revolution around an axis. They're named curve rotated around the axis. For example, if a parabola rotated, the surface get the name "Pivoted paraboloid shell".

It is possible to get the equations, using numerical techniques to solve the pivoted shells problems under varies loading types, from general balance equations. It's needed to change the (x,y) curved co-ordinates that is used as the axis group of general surface shell equations to (φ,θ) new axis group to explain the pivoted shells equations in a basic and understandable form. It's possible to solve the pivoted paraboloid shell problems with the method of Kanthorovich-Tottenham.

The aim of method of Kanthorovich-Tottenham:

- To reduce the differential equation set of a two dimensional body to an ordinary differential equation set by choosing one of the components of displacement functions which is generally two directions and using the minimisation process of energy.
- By defining new functions to reduce three higher order ordinary differential equation set to eight first order ordinary differential equation set.
- By the use of boundary conditions, to define S_0 initial matrices. Here, to find S state matrices and then stress resultants and components of the displacements.

Keywords: Pivoted paraboloid shell, Method of Kanthorovich-Tottenham

JURY:

1. Prof.Dr. Ercüment KÖKSAL (Supervisor)
2. Prof.Dr. Faruk YÜKSELER
3. Prof. Gündüz ÖZİŞİK

Date: 13.07.1999

Page: 68

1 GİRİŞ

Dönel kabuklar pek çok mühendislik yapısında yer alırlar. Hazine, su kuleleri, her nevi malzeme silo ve bunkerleri genellikle silindirik, koni ve küre takkesi gibi dönel kabuk elemanları ihtiva etmektedir. Kubbe tarzındaki çatı örtüleri çok defa küre, dönel elipsoid ve ya padaboloid kabuk takkeleri ve soğutma kuleleri ise genellikle hiperboloid ve bazen de koni şeklinde yapılmaktadırlar. Televizyon kuleleri ise uçları küre ve ya dönel elipsoid takkeleri ile örtülmüş bir silindirik kabuktan meydana gelirler.

İki yüzey tarafından sınırlamak suretiyle meydana gelen ve

- h kalınlığı, onun plandaki boyutları ve eğrilik yarıçapları yanında çok küçük olan,

- her noktada h kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir yüzey olan

bu yüzey taşıyıcı sisteme kabuk denir. Değişken de olabilen h kalınlıklarını ortalayan yüzeye kısaca orta yüzey denir. Kabuklar bu yüzey şekillerine göre isim alırlar.

Bu çalışmada dönel kabukların tiplerini ele alınmış ve incelenmiştir. Bu sebeple dönel kabukların eğilme hesabını daha kolay kılmak için, pratikte geçen bütün halleri kapsayacak şekilde, denge denklemleri ve karakteristik değerler verilmiştir. Ayrıca, dönel paraboloid kabuk ele alınıp denge denklemleri ve karakteristik değerler verilmiş ve Kanthorovich-Tottenham metodu ile eğilmeli analizi yapılmıştır.

Çalışmada yer almış bölümler:

2. İnce kabuk teorisinde yapılan kabuller

3. Genel yüzeyin geometrisi ve kabuk denge denklemleri bölümünde, uzayda bir yüzeyi belirlemek için gerekli yüzeyin bir dört kenarlı elemanın

- kenar boyları (ds_x, ds_y)
- köşegen eğri uzunluğu (ds)
- normal eğrilik yarıçapları (r_x, r_y, r_{xy})
- normal eğrilikler $(1/r_x, 1/r_y, 1/r_{xy})$
- geodezik eğrilik yarıçapları $(\rho_x, \rho_y, \rho_{xy})$
- geodezik eğrilikler $(1/\rho_x, 1/\rho_y, 1/\rho_{xy})$
- dönmeler $(\varphi_x \dots, \omega_x \dots)$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

- yüzey genel parametrik denklemleri
- bunlar için gerekli Lamé katsayıları
- denge denklemleri
 - statik
 - stabilite
- kinematik bağıntılar
- elastisite bağıntılar
- kabuk ana diferansiyel denklemleri
- enerji ifadeler

verilmiştir.

4. Dördüncü bölümde genel dönel

5. Beşinci bölümde ise dönel paraboloid kabuğun gerekli ifadeleri verilmiş ve Kanthorovich-Tottenham metodunu inceleyip, dönel paraboloid kabuk elemanının eğilmeli çözümüne uygulanmıştır.



2 İNCE KABUK TEORİSİNDE YAPILAN KABULLER

2.1 Birinci Mertebe Teorisinde Yapılan Kabuller

2.1.1 Kabuk kabulleri

1. Malzeme elastik, lineer, izotrop ve homojendir.
2. Süperpozisyon kanunu geçerlidir.
3. Betty karşılık teoremi geçerlidir.
4. Kirshof-Lame hipotezi geçerlidir.
 - a) şekil değiştirmeden evvel düzleme dik olan doğru, şekil değiştirmeden sonra da düzleme dik kalır.
 - b) şekil değiştirmeden evvel düzleme dik olan doğru, şekil değiştirmeden sonra da doğru kalır.
 - c) şekil değiştirmeden evvel düzleme dik olan doğrunun boyu, şekil değiştirmeden sonra da değişmez.
 - d) $\sigma_z = 0$
5. Kabuk incedir. Öyle ki, kabuk kalınlığı diğer boyutlarından nazaran çok küçük olduğu var sayılır.
 - a) elastik, ince kabuk teorisinde

$$h \lll r_{\min} \quad (2.1)$$

- b) basık kabuk teorisinde ise

$$\frac{f}{L} \leq \frac{1}{5} \quad (2.2)$$

geçerlidir.

2.1.2 İnce, basık kabuk teorisinde ilave kabuller

Kabuk yüksekliği, taban genişliğine oranla küçüktür. Öyle ki,

$$\frac{f}{L} \leq \frac{1}{5} \quad (2.3)$$

olmalı. Bu durumda,

1. Denge denklemlerin ilk ikisinde (yani $\sum X = 0$ ve $\sum Y = 0$) V_x ve V_y kesme kuvvetleri terk edilebilir.
2. Yine N_{xy} ve M_x ifadelerinde M_{xy} momentlerinin tersi az olacağından terk edilebilir.
3. Normal dönmelerde (u) ve (v) deplasmanları terk edilir.
4. Basık kabukta, orta yüzeyin toplam eğriliği yaklaşık sıfırdır.

2.1.3 Mambran kabukta ilave kabuller

Mambran kabuk, kabuk kalınlığı çok ince olduğu, zar gibi, hali betimler.

1. Kabuk çok ince olduğu ve orta yüzeyle ifade edildiği kabul edilir.
2. Bu durumda kabuk kalınlığı sıfırdır.

$$h = 0$$

3. Kabuk elemanının kenarlarında gerilmeler ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$) üniform olarak yayılı olup, z ekseninden bağımsızdır. Bu duruma mambran gerilme hali denir. Gerilmelerden,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (2.4)$$

olup, diğer gerilmeler de üniform yayılı olduğundan,

$$M_x = M_y = M_{yx} = V_x = V_y = 0 \quad (2.5)$$

olur.

2.2 İkinci Mertebe Teorisinde Yapılan Kabuller

1. Hesaplar, şekil değiştirmiş şekil üzerinde yapılır.

2. Yer değiştirme bileşenleri büyüktür.
3. Geometrik açıdan non-lineer terimleri dikkate alınır.
4. Süperpozisyon kanunu geçersizdir.
5. Betty karşıtlık teoremi geçersizdir.



3 YÜZEY GEOMETRİSİ VE KABUK DENKLEMLERİ

3.1 Yüzey Geometrisi

3.1.1 Genel yüzey parametrik denklemleri

Uzayda bir yüzeyi belirtmek için, yüzeyin bir dört kenarlı herhangi elemanının,

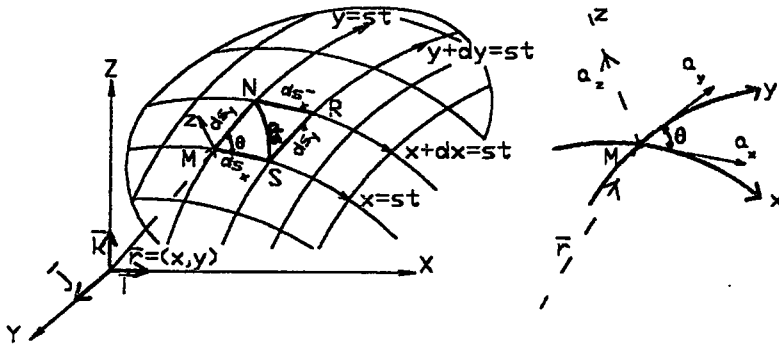
- Kenar boyları (ds_x, ds_y)
 - Köşegen eğri uzunluğu (ds)
 - Normal eğrilik yarıçapları (r_x, r_y, r_{xy})
 - Normal eğrilikler $(1/r_x, 1/r_y, 1/r_{xy})$
 - Geodezik eğrilik yarıçapları $(\rho_x, \rho_y, \rho_{xy})$
 - Geodezik eğrilikler $(1/\rho_x, 1/\rho_y, 1/\rho_{xy})$
 - Dönmelerin $(\phi_x, \dots, \omega_x, \dots)$
 - Yüzey genel parametrik denklemlerini
 - Bunlar için gerekli Lamé katsayıların bulunması ifadelerin tayin edilmesi gerekir. Görüldüğü gibi, yukarıdaki karakteristik değerlerin bir kısmı bağımsız değildir. Bunlardan kabuk yüzey tiplerine geçmek ve kabuk etüdünü yapmak olasıdır. Daha sonra genel yüzey yani genel kabuk geometrisinden ve sonsuz küçük dört kenarlı elemanından hareketle
 - Denge Denklemlerini
 - Statik
 - Stabilitate
 - Kinematik Bağıntılar
 - Elastisite Bağıntılar
 - Kabuk Ana Diferansiyel Denklemlerini
 - Enerji İfadelerini
- oluşturmak olasıdır.

Uzayda her hangi bir (M) noktası (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarıyla belirtilebilir. Ancak nokta bir yüzey üzerinde bulunursa o zaman bu koordinatlar arasında bir $s(X,Y,Z) = 0$ bağıntısı mevcut olur. Buna yüzey denklemi adı verilir. Matematiksel açıdan kolaylık olsun diye, özellikle elastisite teorisiyle ilgili birçok problemlerde değişik koordinat takımı daha doğrusu, parametre kullanarak (X,Y,Z) içeren denklemler iki yüzey eğrisi (x,y) cinsinden

yazılabilir. Dolayısıyla, kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanan, kabuk orta yüzeyi de (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarda yazılabilir. Böylece genel yüzey parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} X &= f_1(x,y) \\ Y &= f_2(x,y) \\ Z &= f_3(x,y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

olur. Bu (3.1) parametrik ifadelerdeki (f_i) ler, (x) ve (y) parametrelerinin sürekli ve uniform fonksiyonlarıdır. Kısaca yukarıdaki bu bağıntılar herhangi bir yüzey denkleminin parametrik ifadesidir. Yüzeye ait her hangi bir (M) noktası, yüzeyin eğrisel koordinatları denen (x,y) nin bir değer çiftine karşı gelir. $\vec{r}$ yer vektörünün (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarının bileşkeleriyle uzayda verilen $M(X,Y,Z)$ noktası aynı zamanda (x,y) eğrisel koordinatlarıyla (parametreleriyle) belirtilen bir yüzey üzerindedir. O halde M nin X,Y,Z bileşenleri (yer vektörü bileşkesi $\vec{r}$) ile (x,y,z) eğrisel koordinat takımı arasında matematiksel (diferansiyel) bir bağıntı kurulabilir. Yüzey üzerindeki her hangi bir eğride, (x,y) cinsinden $g(x,y) = 0$ olarak ya da parametrik formda $x = g_x(\beta)$, $y = g_y(\beta)$ ile ifade edilebilir. Burada (β) bağımsız değişkendir ve x,y yüzeyin eğrisel koordinatlarıdır.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ŞEKİL 3.1 (x,y) Eğrisel koordinat takımı genel ise $\theta \neq 90^\circ$, ortogonal ise $\theta = 90^\circ$ olur.

3.1.2 Lamé katsayılar

Bir yüzeyin bütün geometrisini Lamé katsayıları belirler. Çünkü, yüzeyin şekli ve eğrilikleri, iki ana kuadratik form katsayılarına bağlıdır.

- 1- Birinci kuadratik form katsayıları, yüzey şeklini
- 2- İkinci kuadratik form katsayıları, yüzey eğriliğini karakterize ederler.

3.1.2.1 Birinci kuadratik form katsayıları, Lamé katsayıları

$$\begin{aligned}
 E &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \dots\dots\dots A = \sqrt{E} \\
 G &= \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \dots\dots\dots B = \sqrt{G} \\
 F &= \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \dots\dots\dots C = \sqrt{F}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Birinci kuadratik form, (s_1)

$$s_1 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = ds^2 \tag{3.3}$$

3.1.2.2 İkinci kuadratik form katsayıları, Lamé katsayıları

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix} \\
 M &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

İkinci kuadratik form, (s_2)

$$s_2 = Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2 \quad (3.5)$$

Yüzeyin bir (M) noktasında kovariant baz vektörleri yer vektörünün (x) ve (y) ye göre türetilmesiyle elde edilir. Yer vektörü,

$$\vec{r} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j} + Z(x, y)\vec{k} \quad (3.6)$$

3.1.3 Genel Yüzey Karakteristikleri

Çizelge 3.1 Genel yüzey karakteristikleri

Eğrisel koordinatlar

Ortogonal, eşlenik eğrisel koordinatlar

$X = f_1(x, y)$	→	$X = f_1(x, y)$	
$Y = f_2(x, y)$	→	$Y = f_2(x, y)$	
$Z = f_3(x, y)$	→	$Z = f_3(x, y)$	
x, (Eğrisel)	→	x, (Eğrisel)	} $x \perp y, r_{xy}=0$
y, (Eğrisel)	→	y, (Eğrisel)	
z, (Doğrusal)	→	z, (Doğrusal)	
$\vec{r}_x$	→	$r_x = \frac{E}{L} = \frac{A^2}{L}$	
$\vec{r}_y$	→	$r_y = \frac{G}{N} = \frac{B^2}{N}$	
$\vec{r}_{xy} = \frac{ds_x}{d\gamma_x} = \frac{EM - FL}{E\sqrt{EG - F^2}}$	→	$r_{xy} = 0$	

$$\bar{r}_{yx} = \frac{ds_y}{d\gamma_y} = \frac{FN - GM}{G\sqrt{EG - F^2}}$$

→

$$r_{yx} = 0$$

$$\rho_x = AB \frac{\partial y}{\partial A}$$

→

$$\rho_x = AB \frac{\partial y}{\partial A}$$

$$\rho_y = AB \frac{\partial x}{\partial B}$$

→

$$\rho_y = AB \frac{\partial x}{\partial B}$$

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx$$

→

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx$$

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

→

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

$$d\varphi_x = \frac{A}{\bar{r}_x} dx$$

→

$$d\varphi_x = \frac{A}{\bar{r}_x} dx = \frac{AL}{E} dx = \frac{L}{A} dx$$

$$d\varphi_y = \frac{B}{\bar{r}_y} dy$$

→

$$d\varphi_y = \frac{B}{\bar{r}_y} dy = \frac{BN}{G} dy = \frac{N}{B} dx$$

$$d\gamma_x = \frac{A}{\bar{r}_{xy}} dx$$

→

$$d\gamma_x = 0$$

$$d\gamma_y = \frac{B}{\bar{r}_{yx}} dy$$

→

$$d\gamma_y = 0$$

$$A = \sqrt{E}$$

→

$$A = \sqrt{E}$$

$$B = \sqrt{G}$$

→

$$B = \sqrt{G}$$

$$C = \sqrt{F}$$

→

$$C = \sqrt{F}$$

$$M$$

→

$$M = 0$$

$$ds_x = A dx = \bar{r}_x d\varphi_x$$

→

$$ds_x = A dx = r_x d\varphi_x$$

$$ds_y = B dy = \bar{r}_y d\varphi_y$$

→

$$ds_y = B dy = r_y d\varphi_y$$

$$\frac{1}{\bar{r}_x}$$

→

$$\frac{1}{r_x} = \frac{L}{A^2}$$

$$\frac{1}{\bar{r}_y}$$

→

$$\frac{1}{r_y} = \frac{N}{B^2}$$

$$\frac{1}{\bar{r}_{xy}}$$

→

$$\frac{1}{r_{xy}} \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

→

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}$$

→

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{\rho_{xy}} & \rightarrow \frac{1}{\rho_{xy}} \\
d\bar{s}^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 - 2AB dx dy \cos \theta & \rightarrow ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 \\
A(\text{alan}) = ds_x \cdot ds_y = AB dx dy \sin \theta & \rightarrow A(\text{alan}) = AB dx dy \\
\theta \neq 90^\circ & \rightarrow \theta = 90^\circ \\
\cos \theta = \frac{C^2}{AB} = \frac{F}{\sqrt{EG}} & \rightarrow \cos \theta = 0, F = 0
\end{array}$$

- Bir takımı eşlenikse, $r_{xy} = 0$ ve $M = 0$

- Bir takımı ortogonalsa, $\theta = 90^\circ$ ve $F = 0$

Bir takımı ortogonal ve eşlenikse, eksenler asal eksen olur ve $r_{xy} = r_{yx} = 0$, $\theta = 90^\circ$ ve $M = F = 0$ olur.

Şimdi eğriliklerden yararlanarak çok genel yüzey tipinin belirlenmesinde kullanılan tarifleri ve bunlara bağlı olarak bazı kabuk tiplerini verelim.

3.1.4 Toplam ve ortalama eğrilikler ve yüzey tipleri

3.1.4.1 Toplam eğrilik, Gauss eğriliği

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (3.7)$$

3.1.4.2 Ortalama eğrilik

$$\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (3.8)$$

olarak tarif edilir.

3.1.4.3 Yüzey tip ve tarifleri

Yüzey tipleri belirlemek için yukarıdaki tariflerden yararlanır. Şöyle ki, (M) noktasındaki

1. Toplam eğrilik pozitif ise yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ise, yüzey **eliptik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0 \quad (3.9)$$

2. Toplam eğrilik negatif ise yani eğrilik yarıçapları farklı işaretli ise, yüzey **hiperbolik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} < 0 \quad (3.10)$$

3. Toplam eğrilik pozitif ise yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ve eşit ise, yüzey **küresel** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0, \quad r_x = r_y \quad (3.11)$$

4. Toplam eğrilik sıfır yani asal eğriliklerden biri sıfır ise, yüzey **parabolik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{r_y} = 0 \quad (3.12)$$

5. Toplam eğrilik yaklaşık sıfır ise, yüzey **basık** (kabuk) adını alır. Bu durumda eğrilik yarıçapları çok büyüktür.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} \cong 0, \quad r_x \text{ ve } r_y \gg 0 \quad (3.13)$$

6. Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenini boyunca sabit ise, yüzey **silindirik** adını alır. Yani bir doğrultuya paralel kalarak, verilen bir uzay eğrisine değen bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye silindirik yüzey denir. Uzay eğrisine silindirik yüzeyin doğrultmanı, doğruya da silindirik yüzeyin ana doğrusu denir.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x = \infty, \quad r_y = \text{sabit} \quad (3.14)$$

7. Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenine göre değişken ise, yüzey **konik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{r_y} \neq \text{sabit} \quad (3.15)$$

8. Verilen bir düzleme paralel kalarak ve verilen bir doğru ile verilen bir uzay eğrisine değen bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye **konoid** yüzey denir.

9. Verilen bir eğri yayının, sabit bir doğru etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeye **dönel** yüzey denir.



3.2 Kabuk Genel Denklemleri

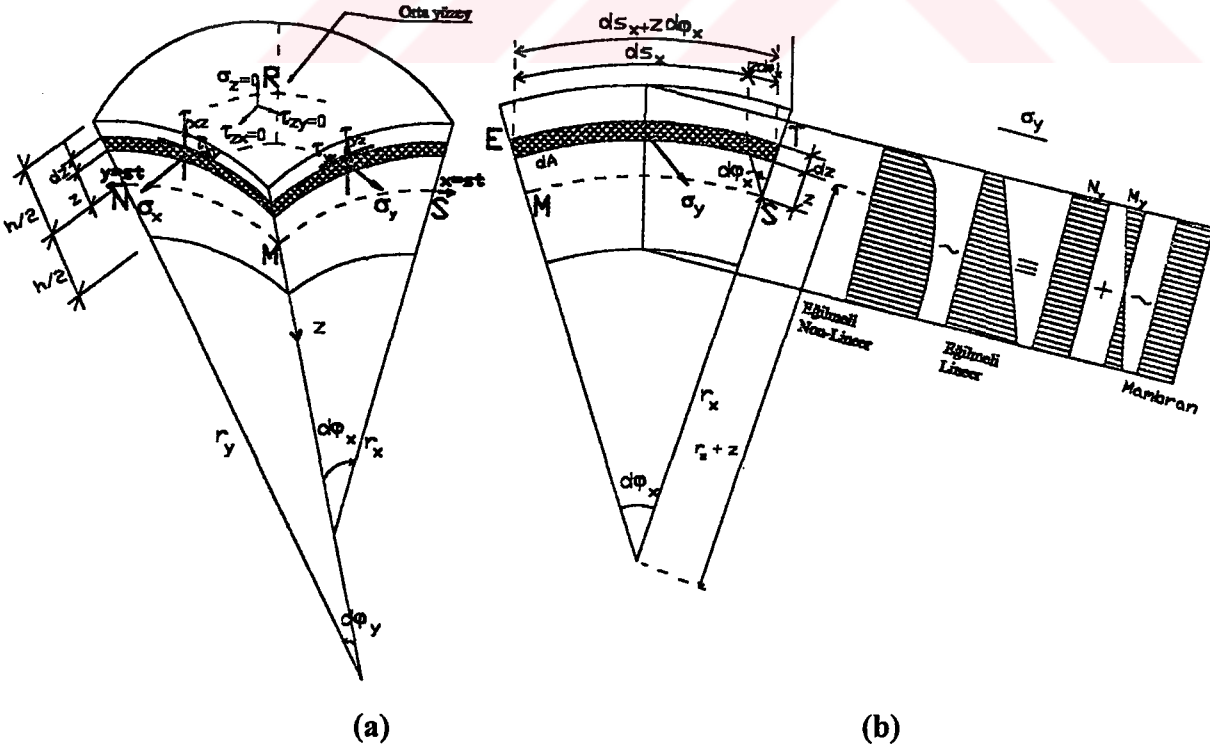
3.2.1 Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri

Yüzeyin (MNRS) dört kenarlı elemanlarının $\widehat{MS}$ ve $\widehat{MN}$ kenarlarında yani (x) ve (y) eğrisel koordinatların bulunduğu, kenarlarında sırasıyla (Şekil 3.2 a)

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

$$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$$

gerilmeleri oluşur. Bu gerilmelerin büyüklüğü orta yüzeye olan (z) uzaklarına bağlıdır. Bilindiği gibi aslında üç boyutlu yüzeyde üç eksenli gerilme hali mevcuttur. Kabuk kalınlığının, eğrilik yarıçaplarına oranla küçük olduğu kabulünden, (z=sabit) kesitleri içinde normal σ_z gerilmelerinin sıfır olduğu varsayılır, ($\sigma_z = 0$). Yine ince elastik klasik kabuk kabullerinden hatırlanacağı gibi ($\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$) alınır. Eksenler ortogonal yani $x = st$ ve $y = st$ birbirlerine dik olduklarından $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olacağından gerilmelerin sayısı beşe iner. Kabukta kesme etkisi terk edilirse τ_{xz} ve τ_{yz} gerilmelerin de sıfır olmak gerekir. Bu durumda bağımsız üç gerilme $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ kalır. Mambran halde ise bu üç bağımsız gerilmenin (Şekil 3.2 b) den de görüldüğü gibi kabuk kalınlığı boyunca üniform yayılı olduğu kabul edilir. Üç boyutlu genel gerilme halinde, üç bağımsız gerilme haline geçişi matris formda ifade edelim.



Şekil 3.2 a,b Genel yüzey kesit tesirleri ve gerilme hali

1. Gerilme hali

Genel kabuk	Kaymalı Kabuk	İnce Kabuk	Mambran Kabuk
$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$	$\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$	$\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Birim boya düşen kesit tesirleri

Kabukta kesit tesirlerinin birim boya düşen miktarlar olarak belirlenir. Örnek olarak, birim boya değişen N_y normal kuvvetin değerini bulalım. Orta eksenden (z) mesafedeki yay uzunluğu (Şekil 3.2 b) den,

$$\widehat{ET} = ds_x + zd\varphi_x = ds_x + \frac{ds_x}{r_x} z = ds_x \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) \quad (3.16)$$

olur. Burada

$$ds_x = d\varphi_x \cdot r_x, \quad d\varphi_x = \frac{ds_x}{r_x} \quad (3.17)$$

olup, taralı kesitteki normal σ_x kesit tesiri denklem (3.16) dan

$$\begin{aligned} \sigma_y \cdot dA &= \sigma_y \cdot dz \cdot ds_y \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) \\ dA &= dz \cdot ds_y \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur. Şimdi birim boya düşen ve (h) kalınlığı boyunca gerilmenin toplamını veren kesit tesiri,

$$N_y \cdot ds_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot ds_x \frac{r_x + z}{r_x} dz \rightarrow N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x} \right) dz, \quad (3.19)$$

olur. Diğer kesit tesirleri de benzer şekilde bulunur. Burada şu hususa dikkat etmek gerekir. Eğer (z) eksenini kabuk dış yüzüne doğru pozitifken (dA) taralı alanı orta yüzeyin altına alınırsa (şekil 3.2 b) ve denklem (3.16) da (-z) olacağından (3.20) denklemlerinde $\left(1 - \frac{z}{r}\right)$ olur.

$$\begin{aligned}
 \text{Normal Kuvvetler, } N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 \text{Kayma Kuvvetler, } N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \\
 \text{Eğilme Momentleri, } M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, & M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz & (3.20) \\
 \text{Burulma Momentleri, } M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, & M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz \\
 \text{Kesme Kuvvetleri, } V_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & V_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz
 \end{aligned}$$

3. Non-Linear gerilme hali

Yüzey elemanındaki (Şekil 3.2 b) gerilme yayılımını ilk gerilme diyagramı kabuk elemanının non-linear gerilme halidir. Kabuk elemanının yan yüzlerinin genişlikleri (z) koordinatlarına bağlı olduğundan, orta yüzeye paralel tesir eden ve yapılan kabullere göre gerilme bileşenleri kabuk kalınlığınca lineer olarak değişmez. Gerilme dağılışı doğrusal değil eğriseldir.

4. Lineer gerilme hali

Eğer $r_x \neq r_y$ ise $N_{xy} \neq N_{yx}$ ve $M_{xy} \neq M_{yx}$ dir. Ancak $1 + \frac{z}{r} \cong 1$ kabulü yapıldığında ya da

$r_x = r_y$ olduğunda, $N_{xy} = N_{yx}$ ve $M_{xy} = M_{yx}$ olur. Gene $x = t$ ve $y = st$ ortogonal ise $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

olur, çünkü $x = st$ ve $y = st$ de yüzler birbirine diktir. V_x ve V_y doğru eksenli çubuklardaki kesme kuvvetine benzer.

5. Mambran gerilme hali

Bazı özel hallerde, yük ve mesnetlenme durumlarına bağlı olarak gerilmelerin ekstrem değerleri yani maksimum ile minimum arasında çok az bir fark olur. Öyle ki σ_x , σ_y ve $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ kabuk kalınlığınca üniform dağılı kabul edilebilir. Yani gerilmeler (z) den bağımsız olurlar. Bu durumda kesit tesirlerinin yukarıdaki toplamaları şu sonuçları verir.

$$\begin{aligned}
 N_x &= \sigma_x \cdot h, & N_y &= \sigma_y \cdot h, & N_{xy} &= \tau_{xy} \cdot h \\
 M_x &= -\sigma_x \cdot \frac{h^3}{12r_y}, & M_y &= -\sigma_y \cdot \frac{h^3}{12r_x} \\
 M_{xy} &= -\tau_{xy} \cdot \frac{h^3}{12r_y}, & M_{yx} &= -\tau_{yx} \cdot \frac{h^3}{12r_x}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Burada momentler şöyle de yazılabilir

$$\begin{aligned}
 M_x &= -N_x \cdot e_x, & e_x &= \frac{h^2}{12r_y} \\
 M_y &= -N_y \cdot e_y, & e_y &= \frac{h^2}{12r_x} \\
 M_{xy} &= -N_{xy} \cdot e_x \\
 M_{yx} &= -N_{yx} \cdot e_y
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Kabullerden kabuk kalınlığının eğrilik yarıçapına göre çok küçük olduğu ve yukarıda N_x kuvvetinin $\frac{h}{12r_y}$ oranında azaldığı görülmektedir. Bu oran (1/240) altında olduğundan eksantrisite pratik olarak sıfır alınabilir.

$$M_x = -N_x \cdot e_x, \quad e_x = 0, \quad M_x \cong 0 \tag{3.23}$$

olur. Benzer şekilde,

$$M_x = M_{xy} = M_{yx} = M_y = 0$$

olur. Denge denklemleri gösterir ki eğer momentler sıfır ise,

$$V_x = V_y = 0$$

olur. Böylece kabuk kalınlığı boyunca üniform gerilme yayılımı elde edilir. Bu durumda kabukta yalnızca N_x , N_y , $N_{xy} = N_{yx}$ kesit tesirleri oluşur. Bu da kabuğun mambran halini gösterir. Sonuçta kabuğun eğilmeden bağımsız olan bu gerilme haline, mambran gerilme hali denir ve (Şekil 3.2 b) deki son gerilme diyagramıdır.

3.2.2 Ortogonal eğrisel koordinatlarda orta yüzey şekil değiştirme bileşenleri

3.2.2.1 Birim uzama şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{r_x} = \frac{\partial u}{\partial s_x} + \frac{v}{\rho_x} + \frac{w}{r_x} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{r_y} = \frac{\partial v}{\partial s_y} + \frac{u}{\rho_y} + \frac{w}{r_y}\end{aligned}\quad (3.24)$$

3.2.2.2 Birim kayma şekil değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{A} \right) \\ \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial s_y} + \frac{\partial v}{\partial s_x} - \frac{u}{\rho_x} - \frac{v}{\rho_y}\end{aligned}\quad (3.25)$$

3.2.2.3 Koordinat teğet doğruların eğimlerinin değişimi, yani dönmeleri

$$\begin{aligned}\beta_x &= \frac{u}{r_x} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{\partial s_x} \\ \beta_y &= \frac{v}{r_y} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{\partial s_y}\end{aligned}\quad (3.26)$$

3.2.2.4 Normal eğrilik değişimi

$$k_x = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right)$$

$$\begin{aligned}
k_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial s_x} + \frac{\beta_y}{\rho_x} = \frac{\partial \beta_x}{A \partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\beta_y}{AB} \\
k_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right) \\
k_y &= \frac{\partial \beta_y}{\partial s_y} + \frac{\beta_x}{\rho_y} = \frac{\partial \beta_y}{B \partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\beta_x}{AB}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.2.2.5 Burulma eğriliğinin değişimi

$$\begin{aligned}
k_{xy} &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{r_x} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} u \right) + \frac{1}{r_y} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} v \right) \\
k_{yx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\beta_y}{A \partial x} + \frac{\beta_x}{B \partial y} - \left(\frac{\partial A}{\partial y} \beta_x + \frac{\partial B}{\partial x} \beta_y \right) \frac{1}{AB} \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2.3 Kabuk elastisite bağıntıları

Genel bir yüzeyde elastisite bağıntıları aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\begin{aligned}
N_x &= C(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\
N_y &= C(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\
N_{xy} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy} \\
M_x &= D(k_x + \nu k_y) \\
M_y &= D(k_y + \nu k_x) \\
M_{xy} &= D(1-\nu)k_{xy}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Burada C uzama, D eğilme rijitliğidir. h ise yüzeyin et kalınlığıdır.

$$\begin{aligned}
C &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \\
D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

3.2.4 Genel yüzey denge denklemleri

3.2.4.1 Genel eğrisel (x,y) koordinatlarda denge denklemleri

$$\begin{aligned}
 \sum x=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(N_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{\bar{r}_x} - \frac{V_y}{\bar{r}_{xy}} + p_x &= 0 \\
 \sum y=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(N_y A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{\bar{r}_y} - \frac{V_x}{\bar{r}_{yx}} + p_y &= 0 \\
 \sum z=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(V_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{\bar{r}_x} + \frac{N_y}{\bar{r}_y} + \frac{N_{xy}}{\bar{r}_{xy}} + \frac{N_{yx}}{\bar{r}_{yx}} + p_z &= 0 \\
 \sum M_x=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} + \frac{\partial(M_{yx} A)}{\partial y} \right] - V_x &= 0 \\
 \sum M_y=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} + \frac{\partial(M_{xy} B)}{\partial x} \right] - V_y &= 0 \\
 \sum M_z=0 \dots \frac{M_x}{\bar{r}_{xy}} - \frac{M_y}{\bar{r}_{yx}} + \frac{M_{yx}}{\bar{r}_y} - \frac{M_{xy}}{\bar{r}_x} + N_{xy} - N_{yx} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

3.2.4.2 Ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarda denge denklemleri

Burada, (x,y) eğrisel koordinatlar sistemi ortogonal ve eşlenik olduğundan $\bar{r}_x, \bar{r}_y$ ler, asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür ve artık r_x, r_y şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned}
 \sum x=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(N_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{r_x} + p_x &= 0 \\
 \sum y=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(N_y A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{r_y} + p_y &= 0 \\
 \sum z=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(V_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z &= 0 \\
 \sum M_x=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} + \frac{\partial(M_{yx} A)}{\partial y} \right] - V_x &= 0 \\
 \sum M_y=0 \dots \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(M_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} + \frac{\partial(M_{xy} B)}{\partial x} \right] - V_y &= 0 \\
 \sum M_z=0 \dots \frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} + N_{xy} - N_{yx} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

3.2.5 Genel eğrisel koordinatlarda lineer mambran denge denklemleri

Mambran halde eğilme ve burulma momentleri terk edilir.

$$M_x = M_{xy} = M_{yx} = M_y = 0$$

Diğer taraftan

$$V_x = V_y = 0 \quad \text{ve} \quad N_{xy} = N_{yx}$$

olduğunu gördük. Bu durumda denge denklemleri üçe iner.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} + \frac{\partial(N_{xy} A)}{\partial y} + ABp_x &= 0 \\ \frac{\partial(N_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial(N_{xy} A)}{\partial x} + ABp_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{N_x}{\bar{r}_x} + \frac{N_y}{\bar{r}_y} + p_z = 0$$

4 DÖNEL KABUK

4.1 Genel Dönel Kabuk

4.1.1 Giriş ve tanımlar

Genel yüzeylerin parametrik denklemlerden hareketle, genel dönel yüzey denklemlerinin elde edilmesini vereceğiz. Böylece önce Lamé katsayılarının ve diğer dönel yüzey karakteristiklerini çıkartıp, genel ve özel dönel kabukların denge denklemlerini, stabilite denklemlerini, bünye denklemlerini, kinematik bağıntılarını, yüzey parametrik denklemlerini ve diğer özelliklerini vereceğiz. Ayrıca dönel kabuk denklemlerini bir de dönel yüzeyin sonsuz küçük dört kenarlı elemanından hareketle çıkarılışını vereceğiz.

Dönel kabuklar, bir eksen etrafında herhangi bir eğrinin dönmesiyle meydana gelirler. Örneğin bu eğri (meridyen adı verilir), parabol ise dönel yüzey parabolik dönel kabuk, hiperbol ise hiperbolik dönel kabuk, daire ise küresel kabuk adını alır. Özel hal olarak bu eğri dönme eksenini kesen bir doğru ise konik kabuk, dönme eksenine paralel bir doğru ise silindirik kabuk adını alır.

Dönel kabuklar tiplerinin açık ya da kapalı olmalarına ve yine dönme eksenini etrafında tam olup olmadıklarına göre tiplerine ayrılırlar. Böylece dönel kabuk

1. Tepesi kapalı formda dönel kabuklar

- Tam olan
- Tam olmayan

2. Tepesi açık olan formda dönel kabuklar

- Tam olan
- Tam olmayan

Ayrıca dönel kabuklar meridyen eğrisinin tipine göre adlandırılıp sınıflandırılırlar. Hiperbolik dönel kabuklar, parabolik dönel kabuklar gibi.

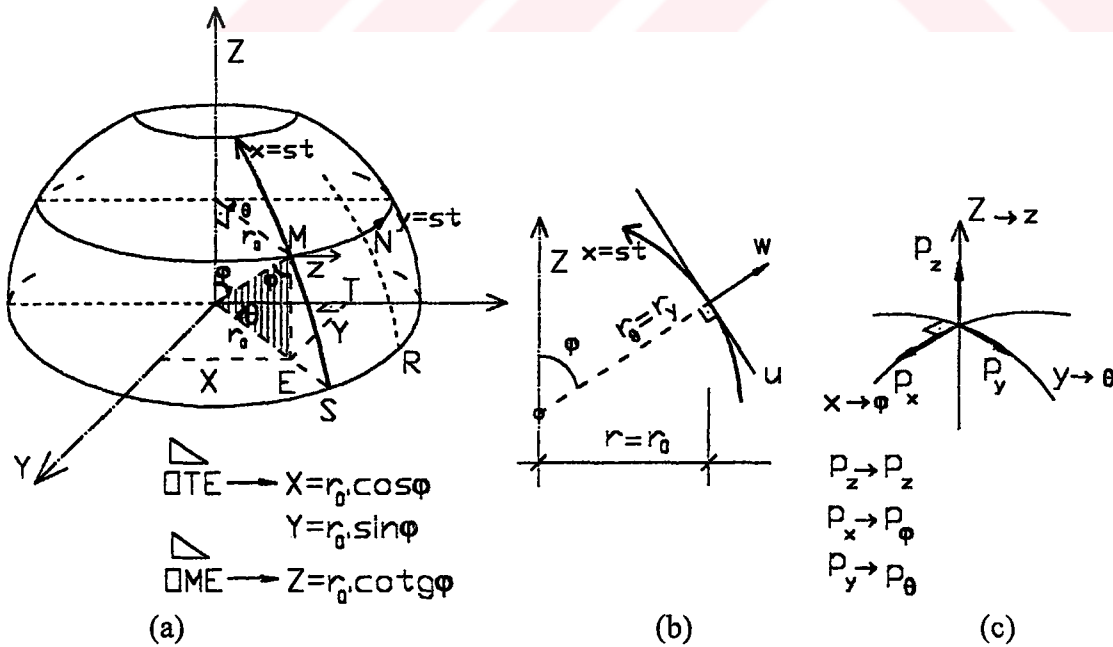
Dönel kabukların oluşturulabilmesi için dönme eksenini etrafında döndürdüğümüz eğriye meridyen eğrisi ve dönme eksenine dik düzlemlerin dönel kabuk yüzeyiyle oluşturduğu arakesit eğrisinde paralel eğrisi ya da paralel dairesi sınırladığı MNRS dört kenarlısı kabuk denklemlerinin oluşturulmasında kullandığımız sonsuz küçük dönel yüzey elemanıdır.

4.1.2 Genel dönel kabukların yüzey denklemleri ve karakteristik değerleri

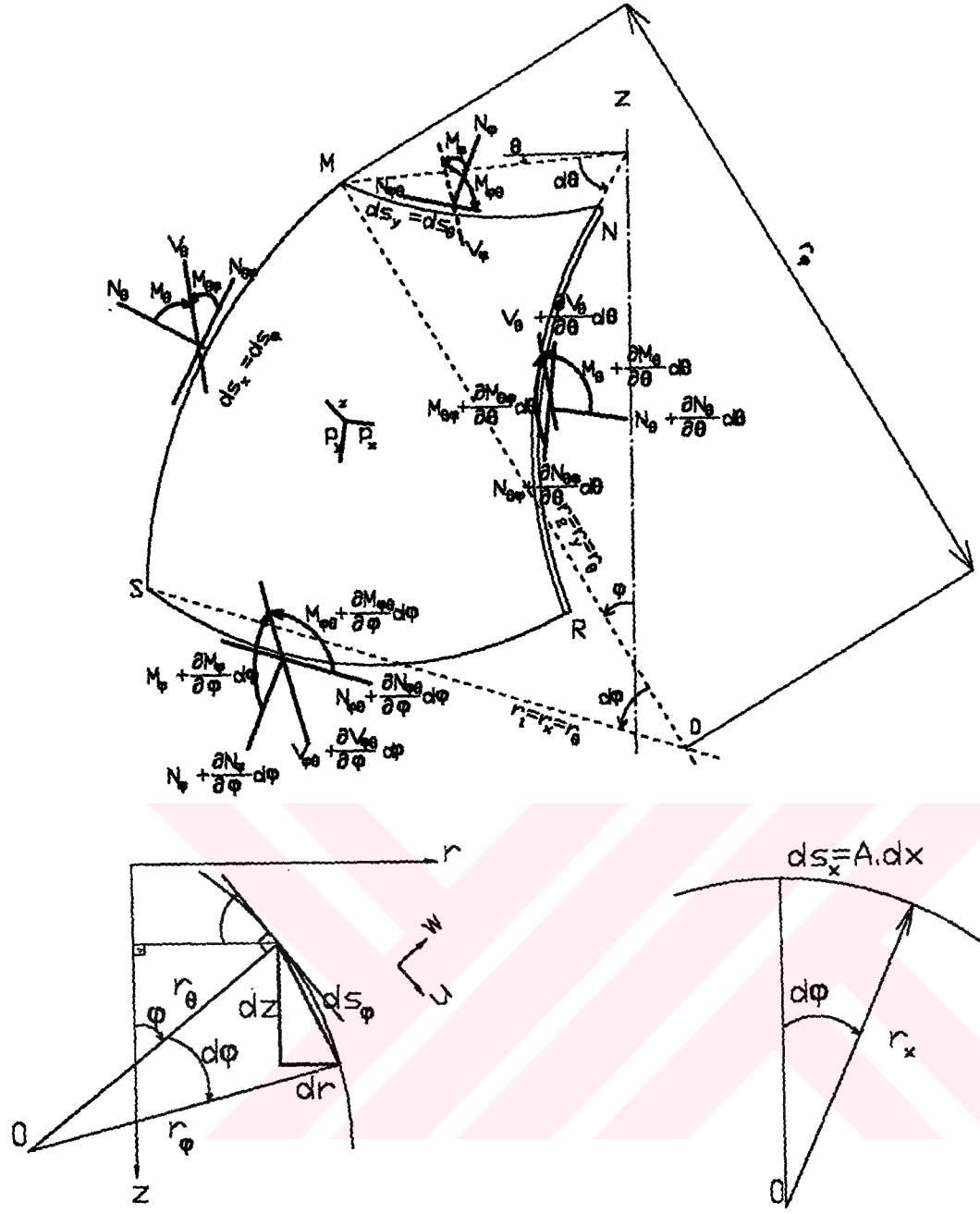
4.1.2.1 Kartezyen koordinat sisteminden eğrisel koordinat sistemine geçiş

$$\begin{aligned} X &= f_1(x, y) \\ Y &= f_2(x, y) \\ Z &= f_3(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Genel yüzey parametrik denklemleri bu (4.1) bağıntılarıyla bilinmektedir. Şimdi genel yüzey kabuk için yeni eksen takımını (φ, θ, z) olarak seçip (x, y) eğrisel parametrleri yerine koyalım. Böylece dönel yüzeyin kabuk denklemlerini daha basit ve anlaşılır formda ifade etme olanağını elde ederiz. Artık uzayda dönel yüzey üzerindeki herhangi bir M noktasının X,Y,Z koordinatlarının (φ, θ) parametrelerine (dönel yüzeyi oluşturan) bağlı olarak ifade edebiliriz. Önce dönel yüzey genel parametrik denklemlerini ve sonra be denklemlerden yararlanarak Lamé katsayılarını (A,B) ve ardından diğer karakteristik değerleri tayin edelim.



Şekil 4.1 a,b,c Genel dönel yüzey (x, y) eğrisel koordinatların (φ, θ) eğrisel koordinat formuna dönüşümü



$$dr = ds_\phi \cdot \cos \phi$$

$$\frac{dr}{d\phi} = r_\phi \cdot \cos \phi = r_\phi$$

$$ds_\theta = r \cdot d\theta, \quad ds_\phi = r_\phi \cdot d\phi$$

$$A = r_\phi, \quad B = r, \quad r_x = r_\phi, \quad r_y = r_\theta$$

$$ds_x = r_x \cdot d\phi_x, \quad r_x \cdot d\phi_x = A \cdot dx, \quad d\phi_x = \frac{A}{r_x} dx$$

$$ds_x = r_x \cdot \frac{A}{r_x} dx = A \cdot dx \rightarrow ds_x = r_x \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \dots \right]^{1/2} = r_x \\ B &= \left[\left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \dots \right]^{1/2} = r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &x, y, z \text{ ortogonal} \\ &r_{xy} = \infty, \quad \frac{1}{r_{xy}} = 0 \end{aligned}$$

(e)

Şekil 4.1e Sonsuz küçük dört kenarlı elamanın genel eğrisel yüzey hali

Yine genel yüzeyin eğrisel koordinatları (x,y) , dönel yüzey halinde, dönel yüzey genel formuna en uygun olan, (φ,θ) eğrisel koordinatlarına dönüştürülür. Öyle ki dönel yüzeyde, yüzeyin (x,y) eğrisel koordinatlarına karşı gelen ve paralel eğrisi (y) , meridyen eğrisi (x) yerine, paralel eğrisinin konumunu belirleyen (φ) ile meridyen eğrisinin konumunu belirleyen (θ) değişkenleri alınır. Kısaca genel dönel kabukta $x \rightarrow \varphi$ ve $y \rightarrow \theta$ alınacaktır. Sonuçta dönel

kabukların koordinat takımı (φ,θ,z) dir. Komşu iki paralel eğrisi ile, komşu iki meridyen eğrisinin belirlediği sonsuz küçük dört kenarlı kabuk elemanına (MNRS) demiştik (Şekil 4.1).

4.1.2.2. Dönel yüzey parametrik genel denklemleri

Dönel yüzeyin (Şekil 4.1) den kartezyen koordinatlarda parametrik genel denklemleri

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{X}{r_0} & X &= r_0 \cdot \cos \theta \\ \sin \theta &= \frac{Y}{r_0} & Y &= r_0 \cdot \sin \theta \\ \cos \varphi &= \frac{Z}{r_\theta} & Z &= r_\theta \cdot \cos \varphi = r_0 \cotg \varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

olur. Burada $r_0 = r_0(\varphi) = r_\theta \sin \theta$.

Önceki paragraflarda verilen genel eğrisel yüzeyin denklemlerinin, Lamé katsayıları, eğrilik yarıçapları, eğrilikler, parametreler, yüzey elemanının kenar boyları, (ds) eğri boyu ve sonuçta denklemleri dönel kabukta aşağıdaki ifadelerle dönüştürülür.

1. Dönel yüzeyin eğrisel koordinatları

$$x \rightarrow \varphi$$

$$y \rightarrow \theta$$

$$z \rightarrow z$$

Burada (x,y) genel eğrisel yüzey, (φ,θ) dönel yüzey parametreleri, yani dönel yüzey elemanının eğrisel koordinatlarıdır.

2. Dönel yüzeyin Lamé katsayıları

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_0 \cos \theta}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_0 \sin \theta}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_0 \cotg \varphi}{\partial \varphi}\right)^2}$$

$$A = \sqrt{r_\varphi^2 \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r_\varphi^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{r_\varphi^2} = r_\varphi \quad (4.3)$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_0 \cos \theta}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_0 \sin \theta}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_0 \cotg \varphi}{\partial \theta}\right)^2}$$

$$B = \sqrt{r_0^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 0} = \sqrt{r_0^2} = r_0 = r$$

$$C = 0 \quad \rightarrow \quad F = 0, \quad M = 0 \quad (4.4)$$

Dönel kabuğun (φ, θ) eğrisel koordinatları ortogonal ve eşlenik olduğundan (F), (M) Lamé katsayısı (0) olur. Dolayısıyla

$$C = \sqrt{F \equiv 0}, M = 0$$

olur.

3. Normal asal eğrilik yarıçapı ve normal eğrilikler

Koordinatlar (φ, θ) ortogonal ve eşlenik olduğundan genel eğrisel yüzeyin normal eğrilik yarıçapları $(\bar{r}_x, \bar{r}_y)$, dönel kabukta asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür (r_φ, r_θ) ve $(1/\bar{r}_{xy}) \equiv 0$ olur. Kısaca genel eğrisel yüzeyden asal eğrilik yarıçapları (r_x, r_y) dönel kabukta

$$\begin{aligned} r_x &\rightarrow r_\varphi \\ r_{xy} &\rightarrow r_\theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

olur. Değerleri ise

- Meridyen eğrilik yarıçapı $r_\varphi = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dr_0}{d\varphi}$

$$\begin{aligned}
- \text{ Paralel eğrilik yarıçapı} \quad r_\theta &= \frac{r_0}{\sin \varphi} & (4.6) \\
- \text{ Eğrilikler} \quad \frac{1}{r_\varphi} &= \cos \varphi \frac{d\varphi}{dr_0} \\
\frac{1}{r_\theta} &= \frac{\sin \varphi}{r_0}
\end{aligned}$$

olur. Paralel eğrisinin (z) dönme eksenine dik uzaklığı (r_0)

$$\begin{aligned}
dr_0 &= ds_\varphi \cos \varphi \\
\frac{dr}{d\varphi} &= r_\varphi \cos \varphi & (4.7) \\
r &= r_0 = r_\theta \sin \varphi
\end{aligned}$$

Yine genel yüzey bağıntılarından normalin eğimleri

$$\begin{aligned}
d\varphi_x &= d\varphi & (4.8) \\
d\varphi_y &= \frac{r_0}{r_\theta} d\vartheta = d\theta \cdot \sin \varphi
\end{aligned}$$

4. Geodezik Eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri

Dönel yüzey elemanının (M) ve (S) noktalarında (MN) ve (RS) paralel eğrilerinin teğetleri ile yine (M) ve (S) noktalarında (MS) ne (NR) meridyenlerin teğet doğrularının kesim noktaları geodezik eğrilik yarıçaplarının boyunu belirler. Bunlar sırasıyla

$$\begin{aligned}
\rho_x &\rightarrow \rho_\varphi \rightarrow \infty \\
\rho_y &\rightarrow \rho_\theta & (4.9)
\end{aligned}$$

olur. İlk kolon genel eğrisel yüzeyin, ikinci ve üçüncü kolon dönel kabuğun geodezik eğrilik yarıçaplarıdır. Şimdi dönel kabuk geodezik eğrilik yarıçapları ifadelerini verelim.

$$d\bar{s}_y = \rho_y d\omega_y \rightarrow ds_\theta = \rho_\theta d\omega_y \quad (4.10)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 d\omega_y &= \frac{1}{r_\varphi} \frac{dr_0}{d\varphi} d\theta = d\theta \cdot \cos\varphi \\
 d\omega_y &= \frac{ds_\theta}{\rho_\theta} \rightarrow \rho_\theta = \frac{ds_\theta}{d\omega_y} = \frac{r_0 \cdot d\theta}{\cos\varphi \cdot d\theta} \\
 \rho_\theta &= \frac{r_0}{\cos\varphi}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

olur.

$$\rho_\varphi \rightarrow \infty \dots \frac{1}{\rho_\varphi} = 0 \dots d\omega_x = 0 \tag{4.12}$$

5. Geodezik eğrilikler

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho_\varphi} &= \frac{\cos\varphi}{r_0}, \quad \frac{1}{\rho_\theta} = 0 \\
 \frac{1}{\rho_\theta} &= \frac{d\omega_y}{ds_\theta} = \frac{d\theta \cdot \cos\varphi}{r_0 \cdot d\theta}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

6. Dönel yüzeyin (MNRS) elemanın kenar uzunlukları

$$\begin{aligned}
 MS = ds_x = ds_\varphi &= A \cdot dx, \quad MS = ds_\varphi = r d\varphi, \quad A = r_\varphi, \quad x \rightarrow \varphi \\
 MN = ds_y = ds_\theta &= B \cdot dy, \quad MN = ds_\theta = r_0 d\theta, \quad B = r_0, \quad y \rightarrow \theta
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

olur. Kenarların bulunması ile (ds) eğri eleman boyunu (Köşegen) bulabiliriz.

$$ds^2 = ds_\varphi^2 + ds_\theta^2, \quad ds = \sqrt{(r_\varphi d\varphi)^2 + (r_0 d\theta)^2} \tag{4.15}$$

7. Genel Dönel Yüzey denklemlerinin Oluşturulması

Artık dönel kabuğun genel denklemlerini yazabiliriz. Bu denklemleri dönel kabuk elemanın dengesinden bulabileceğimiz gibi, genel kabuk denklemlerindeki değerler yerine aşağıdaki

ifadeleri koyarak doğrudan ifade edebiliriz

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \varphi, & r_x &\rightarrow r_\varphi, & A &= r_\varphi, & ds_x &\rightarrow ds_\varphi = r_\varphi d\varphi \\ y &\rightarrow \theta, & r_y &\rightarrow r_\theta, & B &= r = r_0, & ds_y &\rightarrow ds_\theta = r_0 d\theta \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dönel yüzeyin φ ve θ doğrultularında eğrilik yarıçapları, sırasıyla r_φ , r_θ , geodezik yarıçapları ρ_φ , ρ_θ olup, $r = r_0$ ve ρ_φ değerleri ise

$$\begin{aligned} dr &= ds_\varphi \cos \varphi, & \frac{dr}{d\varphi} &= r_\varphi \cos \varphi \\ r &= r_\varphi \sin \varphi, & \rho_x \rightarrow \rho_y &= \infty, & \frac{\partial r_\varphi}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.1.3 Dönel yüzey karakteristikleri

Şimdi kısaca genel eğrisel yüzey karakteristiklerine karşı gelen genel dönel yüzey karakteristiklerini verelim.

Çizelge 4.1 Dönel yüzey karakteristikleri

Genel Yüzey		Dönel Yüzey
$X = f_1(x, y)$	$\rightarrow$	$X = r_0 \cos \theta$
$Y = f_2(x, y)$	$\rightarrow$	$Y = r_0 \sin \theta$
$Z = f_3(x, y)$	$\rightarrow$	$Z = r_\theta \cos \varphi = r_0 \cotg \varphi$
x	$\rightarrow$	φ paralel eğrisi konumunu verir
y	$\rightarrow$	θ meridyen eğrisi konumunu verir
z	$\rightarrow$	z dönme eksenini
r_x	$\rightarrow$	r_φ
r_y	$\rightarrow$	r_θ
ρ_x	$\rightarrow$	$\rho_\varphi \rightarrow \infty$
ρ_y	$\rightarrow$	ρ_θ

$d\omega_x$	$\rightarrow$	0
$d\omega_y$	$\rightarrow$	$d\omega_y = d\theta \cdot \cos\varphi$
$d\varphi_x$	$\rightarrow$	$d\varphi_x = d\varphi$
$d\varphi_y$	$\rightarrow$	$d\varphi_y = d\theta \cdot \sin\varphi$
A	$\rightarrow$	r_φ
B	$\rightarrow$	$r_\theta, [r_0 = r = r_\theta \cdot \sin\varphi]$
C	$\rightarrow$	$C = 0$
ds_x	$\rightarrow$	$ds_\varphi = r_\varphi d\varphi$
ds_y	$\rightarrow$	$ds_\theta = r_\theta d\theta$
$\frac{1}{r_x}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{r_\varphi}$
$\frac{1}{r_y}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{r_\theta} = \frac{\sin\varphi}{r}$
$\frac{1}{\rho_x}$	$\rightarrow$	0
$\frac{1}{\rho_y}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{\rho_\theta}$
p_x	$\rightarrow$	p_φ
p_y	$\rightarrow$	p_θ
p_z	$\rightarrow$	p_z

4.2 Genel Dönel Kabuk Denklemleri

4.2.1 Denge yöntemi ile genel dönel denge denklemleri

Genel kabuk denklemlerinde (3.32), dönel kabukla ilgili değerler yerlerine konunca, ortogonal eğrisel koordinatlarda genel dönel kabuk için aşağıdaki eğilmeli, lineer denge denklemleri elde edilir.

$$\sum \varphi = 0, \quad (r \cdot N_\varphi)_{,\varphi} + r_\varphi \cdot (N_{\theta\varphi})_{,\theta} - r_\varphi \cdot N_\theta \cdot \cos\varphi - r \cdot V_\varphi = -r \cdot r_\varphi \cdot p_\varphi$$

$$\begin{aligned}
\sum \theta = 0, \quad & (r \cdot N_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi} \cdot (N_{\theta})_{,\theta} - r_{\varphi} \cdot N_{\theta\varphi} \cdot \cos\varphi - r_{\varphi} \cdot V_{\theta} \cdot \sin\varphi = -r \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\
\sum z = 0, \quad & r_{\varphi} \cdot N_{\theta} \cdot \sin\varphi + r \cdot N_{\varphi} + r_{\varphi} \cdot (V_{\theta})_{,\theta} + (V_{\varphi})_{,\varphi} = -r \cdot r_{\varphi} \cdot p_z \\
\sum M_{\varphi} = 0, \quad & (r \cdot M_{\varphi})_{,\varphi} + (r \cdot M_{\theta\varphi})_{,\theta} - V_{\varphi} \cdot r \cdot r_{\varphi} - M_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot \cos\varphi = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Bu $(\sum M_{\varphi} = 0)$ ifadesini de kaymalı terimi eşitliğin sağına alalım,

$$\begin{aligned}
& (r \cdot M_{\varphi})_{,\varphi} + (r \cdot M_{\theta\varphi})_{,\theta} - M_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot \cos\varphi = r \cdot r_{\varphi} \cdot V_{\varphi} \\
\sum M_{\theta} = 0, \quad & (r \cdot M_{\theta\varphi})_{,\varphi} + r_{\varphi} (M_{\theta})_{,\theta} + r_{\varphi} \cdot M_{\theta\varphi} \cdot \cos\varphi = r \cdot r_{\varphi} \cdot V_{\theta} \\
\sum M_z = 0, \quad & \frac{1}{r_{\varphi}} M_{\varphi\theta} - \frac{1}{r_{\theta}} M_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} - N_{\theta\varphi}
\end{aligned}$$

Bu son denklem bağımsız değildir.

Yukarıda (4.18) denklemlerinde, 4. Ve 5. Denklemlerinden V_{φ} ve V_{θ} bulunup, 3.denklemden yerlerine konarak beş denklem, üç denkleme indirgenebilir. Dönel kabuk karakteristik değerleri için aşağıdaki ortogonal eğrisel koordinatlarda lineer genel denge denklem takımı doğrudan elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (r \cdot N_{\varphi})_{,\varphi} + (r_{\varphi} \cdot N_{\theta\varphi})_{,\theta} - r \cdot N_{\theta} \cdot \cos\varphi + r_{\varphi} \cdot N_{\varphi\theta} = -r \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\
& (r_{\varphi} \cdot N_{\theta})_{,\theta} + (r N_{\varphi\theta})_{,\varphi} - r_{\varphi} \cdot N_{\varphi} + r \cdot N_{\theta\varphi} \cdot \cos\varphi = -r \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\theta} \\
& \left[\frac{1}{r_{\varphi}} (r \cdot M_{\varphi})_{,\varphi} \right]_{,\varphi} + \frac{r_{\varphi}}{r} M_{\varphi,\theta} + 2 \left(M_{\varphi\theta,\varphi\theta} + \frac{r_{\varphi}}{r} M_{\varphi\theta,\theta} \cos\varphi + M_{\varphi\theta,\varphi} \right) + \\
& \left[\frac{r_{\varphi}}{r} M_{\theta\theta,\theta} - (M_{\theta} \cdot \cos\varphi)_{,\varphi} \right] - (r \cdot N_{\varphi} + r_{\varphi} \cdot N_{\theta} \sin\varphi) = r \cdot r_{\varphi} p_z
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Bu denklemlerin ilk ikisinde kesme kuvvetleri terk edilmiştir. Bu durumda kinematik bağıntılar.

4.2.2 Kinematik bağıntılar

4.2.2.1 Birim boyda uzama şekil değiştirme bileşenleri

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi}} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) \tag{4.20}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r_{\theta}}(u \cdot \cotg \varphi - w) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

4.2.2.2 Kayma şekil değiştirme bileşenleri

$$\lambda_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r_{\varphi}} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v \cdot \cos \varphi}{r_0} \quad (4.21)$$

4.2.2.3 Meridyen ve paralel teğetlerinin dönmeleri

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi} &= \frac{1}{r_{\varphi}} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ \beta_{\theta} &= \frac{1}{r_0} \left(v + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.2.4 Normal eğrilik değişimleri

$$\begin{aligned} k_{\varphi} &= \frac{1}{r_{\varphi}} \beta_{\varphi,\varphi} \\ k_{\theta} &= \frac{1}{r_{\theta}} \beta_{\theta,\theta} + \beta_{\varphi} \cdot \frac{\cotg \varphi}{r_{\theta}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2.2.5 Burulma eğrilik değişimi

$$k_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0} \beta_{\varphi,\theta} - \beta_{\theta} \cdot \frac{\cotg \varphi}{r_0} + \frac{1}{r_{\varphi}} \cdot (\beta_{\theta} \cdot \sin \varphi)_{,\varphi} \quad (4.24)$$

4.3 Özel Hal, Dönel Simetrik Yük Etkisi Durumu

Denklem (4.18) in özel bir hali olarak, dönel simetrik yük hali için, eğilmeli denge denklemleri verilecektir. Bu durumda, $p_{\theta} = 0$ ve kayma kuvvetleri ile burulma momentleri sıfır olur. Yani

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = V_{\theta} = 0, \quad p_{\theta} = 0$$

olmaktadır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 (N_\varphi \cdot r_0)_{,\varphi} - N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \cos\varphi - V_\varphi \cdot r_\theta &= -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_\varphi \\
 N_\varphi \cdot r_0 + N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \sin\varphi + (V_\varphi \cdot r_\theta) &= -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_z \\
 (M_\varphi \cdot r_0)_{,\varphi} - M_\theta \cdot r_\varphi \cdot \cos\varphi - V_\varphi \cdot r_0 \cdot r_\varphi &= 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. Bu üç denklem görüldüğü gibi beş bilinmeyen içermekte olup, problem yine hiperstatiktir. Çözüme gidebilmek için kinematik bağıntılara ve elastisite denklemlerine ihtiyaç vardır.

4.3.1 Özel halde, kinematik ve elastisite bağıntıları

4.3.1.1 Kinematik bağıntılar

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right) \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r_\theta} (u \cdot \cot\varphi - w) \\
 \beta_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \left(u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\
 k_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.3.1.2 Elastisite bağıntıları

$$\begin{aligned}
 N_\varphi &= C \cdot (\varepsilon_\varphi + \nu \cdot \varepsilon_\theta) = C \cdot \left[\frac{1}{r_\varphi} (u_{,\varphi} - w) + \frac{\nu}{r_\theta} (u \cdot \cot\varphi - w) \right] \\
 N_\theta &= C \cdot (\varepsilon_\theta + \nu \cdot \varepsilon_\varphi) = C \cdot \left[\frac{1}{r_\theta} (u \cdot \cot\varphi - w) + \frac{\nu}{r_\varphi} (u_{,\varphi} - w) \right] \\
 M_\varphi &= -D \cdot (k_\varphi - \nu \cdot k_\theta) = -D \cdot \left(\frac{1}{r_\varphi} \beta_{\varphi,\varphi} - \frac{\nu}{r_0} \beta_\varphi \cdot \cos\varphi \right)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$M_{\theta} = -D \cdot (k_{\theta} - \nu \cdot k_{\varphi}) = -D \cdot \left(\frac{1}{r_0} \beta_{\varphi} \cdot \cos \varphi - \frac{\nu}{r_{\varphi}} \beta_{,\varphi\varphi} \right)$$

4.3.1.3 Mambran denge Denklemleri

Yine (4.18) denklemlerinden lineer mambran denge denklemleri elde edilebilir.

4.3.1.4 Simetrik olmayan yük hali

Bunun için (4.18) denklemlerinde

$$M_{\varphi} = M_{\theta} = M_{\varphi\theta} = V_{\varphi} = V_{\theta} = 0 \quad (4.28)$$

(4.28) değerlerini koymak gerek. Buradan aşağıdaki

$$\begin{aligned} N_{\varphi\theta,\theta} \cdot r_{\varphi} + (N_{\varphi} \cdot r_0)_{,\varphi} - N_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot \cos \varphi &= -r_0 \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\ N_{\theta,\theta} \cdot r_{\varphi} + (N_{\varphi\theta} \cdot r_0)_{,\varphi} + N_{\theta\varphi} \cdot r_{\varphi} \cdot \cos \varphi &= -r_0 \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\ N_{\varphi} \cdot r_{\theta} + N_{\theta} \cdot r_{\varphi} &= -r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot p_z \end{aligned} \quad (4.29)$$

ortogonal koordinatlarda lineer denge denklemleri elde edilir. Dönel kabuk bölümünde $r = r_0$ olmakta yani denklemlerdeki r ya da r_0 aynı anlamda alınmaktadır. Üçüncü denklem

$$\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} = -p_z \quad \text{ya da} \quad r_0 \cdot N_{\varphi} + r_{\varphi} \cdot N_{\theta} \cdot \sin \varphi = -r_0 \cdot r_{\varphi} \cdot r_z \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. Çünkü, $(r_0/r_{\theta}) = \sin \varphi$ dir.

4.3.1.5 Simetrik yük hali

Eksenel simetrik dönel kabuklarda simetrik yük durumunda $\partial \theta$ ifadesi içine alan erimler sıfır olur. Bu denklemde, $\partial \theta$ olmadığından, $\partial \varphi$ yerine de $d\varphi$ yazılabilir. Yine bu durumda, $p_{\theta} = 0$ ve $N_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} = 0$ olacağından aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned}
(N_\varphi \cdot r_0)_{,\varphi} - N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \cos\varphi &= -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_\varphi \\
N_\varphi \cdot r_0 + N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \sin\varphi &= -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_z
\end{aligned}
\tag{4.31}$$



5 SAYISAL ÇÖZÜM

5.1 Dönel Paraboloid Kabuk

5.1.1 Dönel paraboloid yüzeyin karakteristikleri

Dönel paraboloid kabuklar, bir eksen etrafında parabol bir eğrinin dönmesiyle meydana gelirler.

Dönel paraboloid kabuklarda $\theta = 90^\circ$ olduğundan eğrisel ortogonal eşlenik koordinat sisteminde çalışmak mümkündür.

Çizelge 5.1 Dönel paraboloid yüzeyin karakteristiklerinin bazıları

Genel dönel yüzey (genel eğrisel koordinatlar)		Dönel paraboloid yüzey (ortogonal, eşlenik eğrisel koordinatlar)
$X = r_0 \cdot \cos\theta$	→	$X = f_1(x, y)$
$Y = r_0 \cdot \sin\theta$	→	$Y = f_2(x, y)$
$Z = r_\theta \cdot \cos\varphi = r_0 \cdot \cotg\varphi$	→	$Z = f_3(x, y)$
φ paralel eğrisel konumunu verir	→	x , (eğrisel) ($x \perp y$, $r_{xy}=0$)
θ paralel eğrisel konumunu verir	→	y , (eğrisel)
z dönme eksen	→	z dönme eksen
r_φ	→	r_x
r_θ	→	r_y
p_φ	→	p_x
p_θ	→	p_y
p_z	→	p_z
.....		

5.1.2 Kesit zorları

$$\begin{aligned}
 N_x &= C[u' + \nu v' - (\alpha + \nu)w] \\
 N_y &= C[\dot{v} + \nu u' - \nu w] \\
 N_{xy} &= \frac{C(1-\nu)}{2}(\dot{u} + v') \\
 M_x &= D(w'' + \nu \ddot{w}) \\
 M_y &= D(\ddot{w} + \nu w'') \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu)w'' \\
 V_x &= -D(w''' + w''') \\
 V_y &= -D(\dot{w} + w'')
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

olup h kabuk kalınlığı ve

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.2 Kanthorovich-Tottenham Yöntemi

Amacı, iki boyutlu kısmi diferansiyel denklem takımını, bilinmeyen yer değiştirme bileşenlerinin iki doğrultuda olan fonksiyonlarından bir doğrultudakini seçerek ve enerjinin minimizasyonundan yararlanarak adi diferansiyel denklem takımına indirgemek.

Yeni fonksiyonlar (tarifiyle) üç adet yüksek mertebeden adi diferansiyel denklem takımını sekiz adet birinci mertebeden diferansiyel denklem takımına indirgemek.

Sınır şartlarından yararlanarak S_0 başlangıç matrisini belirlemek. Burada S durum matrisini ve sonra kesit tesirlerini ve yer değiştirme bileşenlerini bulmak.

1. Dönel paraboloid kabuk denklemi

$$z = -\left(f_x \frac{x^2}{a^2} + f_y \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (5.3)$$

Dönel paraboloid kabukta $f_x = f_y = f$ ve $a = b$ olduğundan (5.3) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$z = -\left(f \frac{x^2}{a^2} + f \frac{y^2}{a^2}\right) = -\frac{f}{a^2}(x^2 + y^2) \quad (5.4)$$

2. Asal eğrilikler

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +\frac{2f_x}{a^2} \\ k_y &= \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +\frac{2f_y}{b^2} \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

yani, $f_x = f_y = f$ ve $a = b$ olduğundan (5.5) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{2f}{a^2} \\ k_y &= \frac{2f}{a^2} \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Burada

$$k_x = \frac{\alpha}{a} = k_y = \frac{\beta}{b}, \quad k_{xy} = 0, \quad r_x = r_y \quad (5.7)$$

dir. Burada

$$\alpha = \beta = -\frac{2f}{a}, \quad \gamma = 12\frac{a^2}{h^2}, \quad r = \frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad (5.8)$$

3. Boyutsuz koordinatlar ve yer deęistirmeler

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a}, \quad \bar{u} = \frac{u}{a}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{a} \quad (5.9)$$

4. Vlassov'un basık kabuk teorisinde boyutsuz kısmi diferansiyel denge denklemleri

$$\begin{aligned} L_1(u_1, v_1, w) &= \bar{u}'' + \frac{1}{2}(1-\nu)\ddot{\bar{u}} + \frac{1}{2}(1+\nu)\bar{v}' - \alpha(1+\nu)\bar{w}' = -(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_x}{E} \\ L_2(u_2, v_2, w) &= \ddot{\bar{v}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\bar{v}'' + \frac{1}{2}(1+\nu)\ddot{\bar{u}} - \alpha(1+\nu)\dot{\bar{w}} = -(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_y}{E} \\ L_3(u_3, v_3, w) &= -\alpha(1+\nu)\bar{u}' - \alpha(1+\nu)\dot{\bar{v}} + 2\alpha^2(1+\nu)\bar{w} + \frac{1}{\gamma}(\bar{w}''' + 2\bar{w}'' + \ddot{\bar{w}}) = (1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_z}{E} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ve boyutsuz zorları

$$\begin{aligned} N_x &= C[\bar{u}' + \nu\dot{\bar{v}} - \nu\bar{w}] \\ N_y &= C[\dot{\bar{v}} + \nu\bar{u}' - \nu\bar{w}] \\ N_{xy} &= \frac{C(1-\nu)}{2}(\dot{\bar{u}} + \bar{v}') \\ M_x &= D(\bar{w}'' + \nu\ddot{\bar{w}}) \\ M_y &= D(\ddot{\bar{w}} + \nu\bar{w}'') \\ M_{xy} &= -D(1-\nu)\bar{w}'' \\ V_x &= -D(\bar{w}''' + \bar{w}'') \\ V_y &= -D(\dot{\bar{w}} + \bar{w}'') \end{aligned} \quad (5.11)$$

olup, h kabuk kalınlığı ve

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$
(5.12)

dır. $L_i(u, v, w)$ diferansiyel operatörüdür.

5.1 Örnek

Rijit mesnetli, tabanı kare planlı, dönel paraboloid kabuğun eğilmeli çözümü:

1. Sınır şartları:

Kenarlarından rijit mesnetli kabukta $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ sınırlarında dönme, yer değiştirmeler oluşmaz.

$$\begin{aligned} x = \pm 1 \quad \text{için} \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0 \\ y = \pm 1 \quad \text{için} \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad w' = 0 \end{aligned}$$
(5.13)

2.a Kanthorovich Yöntemi

Amaç, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerini birinci mertebeden diferansiyel denklemlere indirgemek. Çözüm için yer değiştirme bileşenlerinin ifadelerinin bir kısmını seçelim.

$$u = f_1(x) \cdot m_1(y), \quad v = f_2(x) \cdot m_2(y), \quad w = f_3(x) \cdot m_3(y)$$
(5.14)

Burada $f_i(x)$ ve $m_i(y)$ fonksiyonları yalnızca bir değişkene bağlıdır. Burada $m_i(y)$ fonksiyonların sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçelim. Böylece

$$\begin{aligned} u &= f_1(x) \cdot (1 - y^2), & m_1 &= 1 - y^2 \\ v &= f_2(x) \cdot (y - y^3), & m_2 &= y - y^3 \\ w &= f_3(x) \cdot (1 - y^2)^2, & m_3 &= (1 - y^2)^2 \end{aligned}$$
(5.15)

olur. Bu (5.15) ifadesini (5.10) kısmı diferansiyel denkleminde yerine koyalım.

$$\begin{aligned}
 f_1''(1-y^2) + \frac{1}{2}(1-\nu)(-2f_1) + \frac{1}{2}(1+\nu)f_2'(1-3y^2) - \alpha(1+\nu)f_3'(1-y^2)^2 &= -(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_x}{E} \\
 6f_2y + \frac{1}{2}(1-\nu)f_2''(y-y^3) + \frac{1}{2}(1+\nu)f_1'(-2y) - \alpha(1+\nu)f_3(-4)(1-y^2) &= -(1-\nu^2)\frac{b}{h}\frac{p_y}{E} \quad (5.16) \\
 -\alpha(1+\nu)f_1'(1-y^2) - \alpha(1+\nu)f_2(1-3y^2) + 2\alpha^2(1+\nu)f_3(1-y^2)^2 + \\
 + \frac{1}{\gamma} \left[f_3'''(1-y^2)^2 + 2f_3''(-4)(1-3y^2) + 24f_3 \right] &= +(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_z}{E}
 \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [L_i(f_i \cdot m_i) - W_i] f_i(x) \cdot m_i(y) dx dy = 0 \quad i=1,2,3 \quad (5.17)$$

Galerkin denkleminde hareketle ve $m_i(y)$ bilindiğine göre bilinmeyen üç $f_i(x)$ 'i potansiyel enerjinin minimizasyondan yararlanarak, yani $\frac{\partial V}{\partial f_i(x)} = 0$ dan bulunan üç denklemler belirleyebiliriz. Bu denklemler

$$\int_{-1}^{+1} [L_i(u, v, w) - W_i] \cdot m_i dx dy = 0. \quad i=1,2,3 \quad (5.18)$$

Burada W_i dış iş, V_i ise iç iş olur. İntegrasyonu $y = \pm 1$ sınırlarında yaparak sabit katsayılı f_i 'lere bağlı yüksek mertebeden üç adet adi diferansiyel denklemini elde ederiz. Dış yükü bileşenleri $p_x = p_y = 0$ ve $p_z = \text{sabit}$ olsun.

$$\begin{aligned}
 1.0667f_1'' - 1.3333(1-\nu)f_1 + 0.2667(1+\nu)f_2' - 0.9143\alpha(1+\nu)f_3' &= 0 \\
 0.0762(1-\nu)f_2' - 1.6f_2 - 0.2667(1+\nu)f_1' + 0.6095\alpha(1+\nu)f_3 &= 0 \quad (5.19) \\
 -0.9173\alpha(1+\nu)f_1' - 0.6095\alpha(1+\nu)f_2 + 2 \cdot 0.8127\alpha^2(1+\nu)f_3 \\
 + \frac{1}{\gamma} \left[0.8127f_3''' - 4.8768f_3'' + 25.6f_3 \right] &= +1.0667(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_z}{E}
 \end{aligned}$$

2.b Tottenham Yöntemi

Probleme yeni fonksiyonlar ithal edelim. Şöyle ki,

$$f_1' = f_4, f_2' = f_5, f_3' = f_6, f_6' = f_3'' = f_8, f_7' = f_6'' = f_3''' = f_8 \quad (5.20)$$

Böylece üç adet (5.19) denklemleri, aşağıdaki sekiz $f_1, f_2, \dots, f_8$ bilinmeyenini içeren sekiz adet birinci mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir.

$$\begin{aligned} f_1' &= f_4, \\ f_2' &= f_5, \\ f_3' &= f_6, \\ f_4' &= f_1'' = +1.25(1-\nu)f_1 - 0.25(1+\nu)f_5 - 0.8572\alpha(1+\nu)f_6 \\ f_5' &= f_2'' = +21.0\frac{1}{1-\nu}f_2 + 3.5\frac{1+\nu}{1-\nu}f_4 + 8.0\frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}f_3 \\ f_6' &= f_7, \\ f_7' &= f_8 \\ f_8' &= +0.75\gamma\alpha(1+\nu)f_2 - [2\gamma\alpha^2(1+\nu) + 31.4]f_3 + 1.125\alpha(1+\nu)f_4 + 6f_7 + 1.3125(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_z}{E}\gamma \end{aligned} \quad (5.21)$$

Matris formunda

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & a_{82} & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 & a_{87} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_8 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

yada en kısa gösterimle

$$\frac{d}{dx} S = D \cdot S + P \quad (5.23)$$

olur. Burada S bilinmeyenleri içeren kolon matrisi, D 8x8 kare matris ve P dış yükü terimlerini içeren kolon matrisidir. Burada D ve P matrislerinin elemanlarının değerleri

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= +1, \\
 a_{25} &= +1, \\
 a_{36} &= +1, \\
 a_{41} &= +1.25(1-\nu) = 0.875, \\
 a_{45} &= -0.25(1+\nu) = 0.325, \\
 a_{46} &= -0.8572\alpha(1+\nu) = 0.445744, \\
 a_{52} &= +21 \frac{1}{1-\nu^2} = 23.0679, \\
 a_{53} &= +3.5 \frac{1+\nu}{1-\nu} = 6.5, \\
 a_{54} &= +8.0 \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} = -5.9428, \\
 a_{67} &= +1, \\
 a_{78} &= +1, \\
 a_{82} &= +0.75\gamma\alpha(1+\nu) = -20780, \\
 a_{83} &= -2\gamma\alpha^2(1+\nu) - 31.5 = -22218.16665, \\
 a_{84} &= +1.125(1+\nu)\alpha\gamma = -31200, \\
 a_{87} &= +6.0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

olup, diğer terimleri sıfırdır.

3. Denklemin çözümü

(5.13) denkleminin çözümü çubuk sisteme benzer şekilde,

$$S(x) = e^{Dx} \cdot S_0 - [I - e^{Dx}] \cdot D^{-1} \cdot P \tag{5.25}$$

olur. Burada, I birim matris, S_0 ise $S(x)$ 'in $x=0$ daki değeridir. Matematikten bilindiği gibi e^{Dx} 'in Fourier serisine açılımı

$$e^{D_x} = I + \frac{D \cdot x}{1!} + \frac{D^2 \cdot x^2}{2!} + \dots = I + D \cdot x \left\{ I + \frac{D \cdot x}{2} \left[I + \frac{D \cdot x}{3} (I + \dots) \right] \right\} \quad (5.26)$$

olup $e^{D_x} = F(x)$ diyerek (5.25) denklemini

$$S(x) = F(x) \cdot S_0 + S^*(x) \quad (5.27)$$

biçiminde yazılabiliriz. Burada

$$S^*(x) = (I - e^{D_x}) D^{-1} P \quad (5.28)$$

dir.

4. Sınır şartlarından S_0 'nin belirlenmesi

Eğer dış yük simetrik ise, kabuğun kesit tesirlerinde x,y eksenlerine göre simetrik olacaktır.

Bu durumda

$$x = 0 \quad \text{için} \quad u = f_1 = 0, \quad v' = f_3 = 0, \quad w' = f_6 = 0, \quad w''' = f_8 = 0 \quad (5.29)$$

olur ve S_0 de yalnızca dört bilinmeyen kalır.

$$S(x) = \begin{bmatrix} \cdot \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_7 \\ \cdot \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & +1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & +1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & +1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_7 \end{bmatrix} = k_1 \cdot \bar{S}_0 \quad (5.30)$$

S_0 'nin bilinmeyenleri, $f_2(0)$, $f_3(0)$, $f_4(0)$ ve $f_7(0)$ dir. Şimdi $x = +1$ de, (5.13), (5.27),

(5.30) dan

$$S(x=1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_4(1) \\ f_5(1) \\ 0 \\ f_7(1) \\ f_8(1) \end{bmatrix} = F(1,0) \cdot k_1 \cdot \bar{S}_0 + S^*(1,0) \quad (5.31)$$

bulunur. Birinci, ikinci, üçüncü ve altıncı denklemler $\bar{S}_0$ 'nin dört bilinmeyeni için dört denklemi oluşturur. Aşağıdaki matristen

$$k_2 = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

yararlanarak

$$k_2 \cdot S(1,0) = k_2 \cdot F(1,0) \cdot k_1 \cdot \bar{S}_0 + S^*(1,0) = 0 \quad (5.33)$$

yazabiliriz. Burada

$$\bar{S}_0 = -[k_2 \cdot F(1,0) \cdot k_1]^{-1} + k_2 \cdot S^*(1,0) \quad (5.34)$$

dır. (5.30) denkleminde S_0 bilinmeyen fonksiyonları, $S_0 = k_1 \cdot \bar{S}_0$ olduğundan

$$S_0 = -k_1 \cdot [k_2 \cdot F(1,0) \cdot k_1]^{-1} + k_2 \cdot S^*(1,0) \quad (5.35)$$

denklemiyle artık bulunabilir. (5.34) ile başlangıç durumu matrisi belirlediğinde, bunu (5.27) denkleminde yerine koyarak $S(x)$ 'in durum vektörü nokta nokta ve bilgisayar yardımıyla bulunabilirler. Burada da kesit tesirleri ve yer değiştirmeler nokta nokta ve bilgisayar yardımıyla bulunabilirler. Çünkü yer değiştirmeler f_i ler cinsinden yazılabilirler. Şöyle ki,

$$\begin{aligned}
N_x &= C[\bar{u}' + \nu \dot{\bar{v}} - \nu \dot{\bar{w}}] = C[f_1'(1-y^2) + \nu f_2'(1-3y^2) + \nu f_3'(1-y^2)^2 \\
N_y &= C[\dot{\bar{v}} + \nu \bar{u}' - \nu \bar{w}'] = C[f_2(1-3y^2) + \nu f_1'(1-y^2) + f_3(1-y^2)^2 \\
N_{xy} &= \frac{C(1-\nu)}{2}(\dot{\bar{u}} + \bar{v}') = C \frac{1-\nu}{2}[f_2'(y-y^3) + f_1(-2y) \\
M_x &= D(\bar{w}'' + \nu \ddot{\bar{w}}) = D[f_2''(1-y^2)^2 + \nu f_3'(-2+12y^2)] \\
M_y &= D(\ddot{\bar{w}} + \nu \bar{w}'') = D[f_3'(-2+12y^2) + \nu f_3''(1-y^2)^2] \\
M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{1}{\alpha} \bar{w}' = -D(1-\nu)[f_3'(-2y+4y^3)] \\
V_x &= -D(\bar{w}''' + \bar{w}''') = -D[f_3''(1-y^2)^2 + f_3'(-2+12y^2)] \\
V_y &= -D(\dot{\bar{w}} + \bar{w}'') = -D[f_3(24y) + f_3'(-2y+4y^3)]
\end{aligned} \tag{5.36}$$

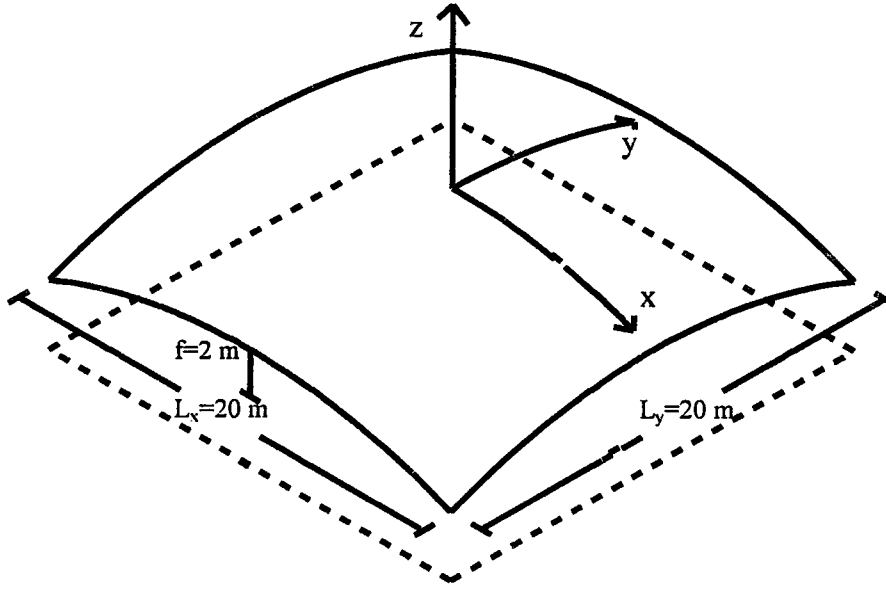
Burada, f_i üstlü ifadelerin üstsüz eşitlikleri cinsinden alınmaları gerektiğine dikkat edilmelidir. Örneğin, $f_3'' = f_7$ gibi (5.20).

Deplasman bileşenleri

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= f_1(x) \cdot (1-y^2) \\
v(x, y) &= f_2(x) \cdot (y-y^3) \\
w(x, y) &= f_3(x) \cdot (1-y^2)^2
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Bu denklemlerde $f_1(x)$, $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ nin çözümü istenen noktada sayısal değerleri $(1-y^2)$, ... fonksiyonlarının da o noktanın koordinatı cinsinden değerleri yerlerine konularak u , v , w değerleri nokta nokta ve bilgisayar yardımıyla bulunur.

5.4 Sayısal Uygulama



Şekil 5.1 Tabanı kare planlı, dönel paraboloid kabuk

Veriler:

Kenarlarından rijit mesnetli, tabanı kare planlı dönel paraboloid kabukta

$$L_x = L_y = L = 20m$$

$$f_x = f_y = f = 2m$$

$$a = b = \frac{L}{2} = 10m$$

$$h = 0.15m$$

$$\alpha = \beta = -\frac{2f}{a} = -\frac{4}{10} = -0.4$$

$$\gamma = 12 \frac{a^2}{h^2} = 12 \frac{100}{0.0225} = 53333.33333$$

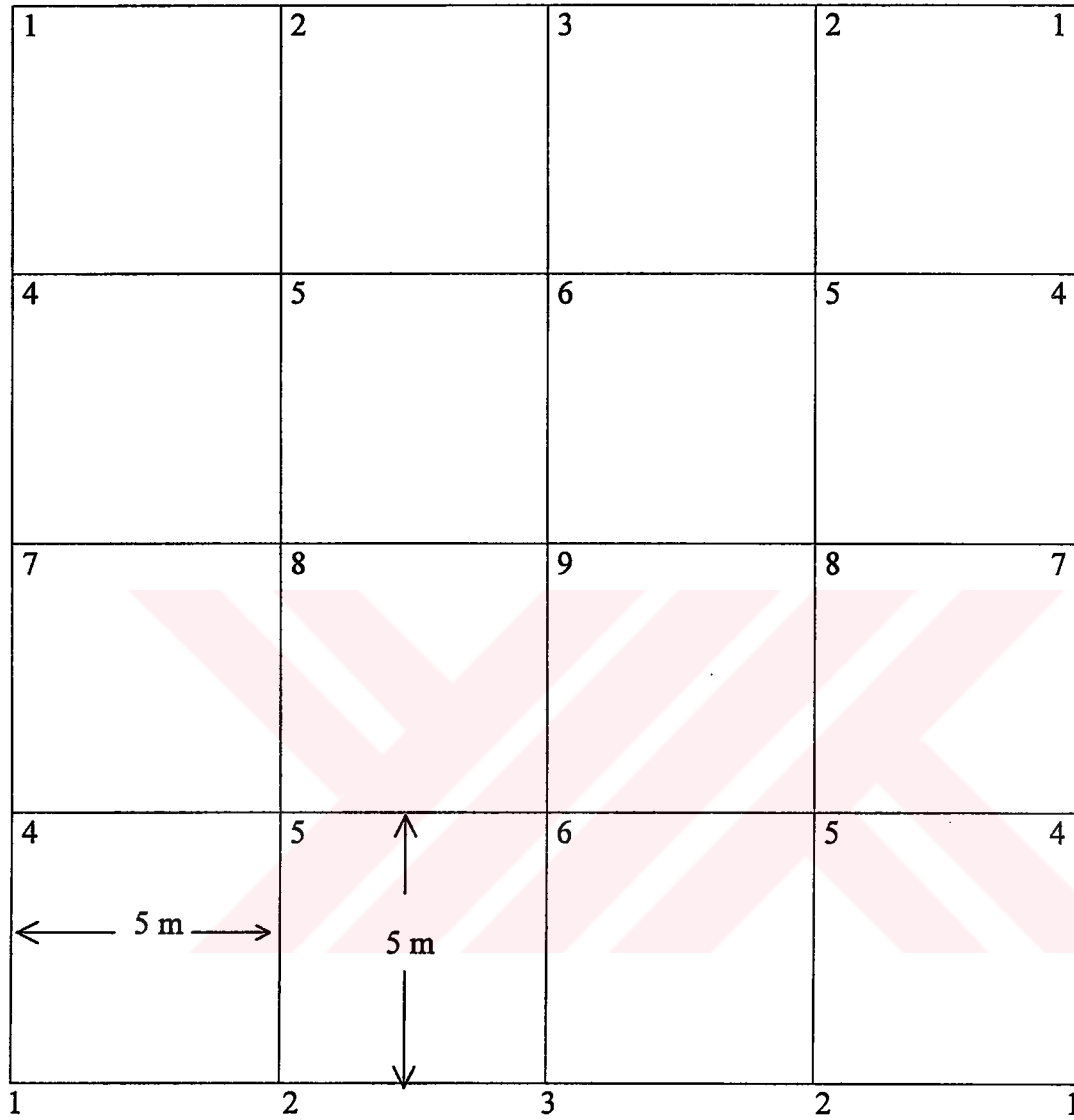
$$E = 2.85 \times 10^6$$

$$\nu = 0.3$$

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} = 469780.2198$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 880.8379$$

Çözüm:



Şekil 5.2 Noktalar dağılım krokisi

Elemanımız her bakımından (boyutlar olsa, yük olsa) simetrik olduğundan Şekil 5.2 de gösterilen ve kabuk elemanının bir çeyreğini temsil eden noktalardaki kesit zorları ve yer değiştirmeleri bulunursa çözümün tamamı için yeterlidir.

1. Sınır şartları:

Kenarlarından rijit mesnetli kabukta $x = \pm 1$ ve $y = \pm 1$ sınırlarında dönme, yer değiştirmeler oluşmaz.

$$x = \pm 1 \quad \text{için} \quad u = 0, v = 0, w = 0, w' = 0$$

$$y = \pm 1 \quad \text{için} \quad u = 0, v = 0, w = 0, w' = 0$$

2. Kanthorovich Yöntemi

Şimdi $m_i(y)$ fonksiyonların sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçelim. Böylece

$$u = f_1(x) \cdot (1 - y^2), \quad m_1 = 1 - y^2$$

$$v = f_2(x) \cdot (y - y^3), \quad m_2 = y - y^3$$

$$w = f_3(x) \cdot (1 - y^2)^2, \quad m_3 = (1 - y^2)^2$$

olur. Bu (5.15) ifadesini (5.10) kısmı diferansiyel denkleminde yerine koyalım.

$$f_1''(1 - y^2) + \frac{1}{2}(1 - \nu)(-2f_1) + \frac{1}{2}(1 + \nu)f_2'(1 - 3y^2) - \alpha(1 + \nu)f_3'(1 - y^2)^2 = -(1 - \nu^2)\frac{a}{h} \frac{P_x}{E}$$

$$6f_2y + \frac{1}{2}(1 - \nu)f_2''(y - y^3) + \frac{1}{2}(1 + \nu)f_1'(-2y) - \alpha(1 + \nu)f_3(-4)(1 - y^2) = -(1 - \nu^2)\frac{b}{h} \frac{P_y}{E}$$

$$-\alpha(1 + \nu)f_1'(1 - y^2) - \alpha(1 + \nu)f_2(1 - 3y^2) + 2\alpha^2(1 + \nu)f_3(1 - y^2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \left[f_3''(1 - y^2)^2 + 2f_3'''(-4)(1 - 3y^2) + 24f_3 \right] = +(1 - \nu^2)\frac{a}{h} \frac{P_z}{E}$$

olur. Şimdi

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [L_i(f_i \cdot m_i) - W_i] f_i(x) \cdot m_i(y) dx dy = 0$$

Galerkin denkleminde hareketle ve $m_i(y)$ bilindiğine göre bilinmeyen üç $f_i(x)$ 'i potansiyel enerjinin minimizasyondan yararlanarak, yani $\frac{\partial V}{\partial f_i(x)} = 0$ dan bulunan üç denklemlerle belirleyebiliriz. Bu denklemler

$$\int_{-1}^{+1} [L_i(u, v, w) - W_i] \cdot m_i dx dy = 0.$$

Burada W_i dış iş, V_i ise iç iş simgeleri. İntegrasyonu $y = \pm 1$ sınırlarında yaparak sabit katsayılı f_i 'lere bağlı yüksek mertebeden üç adet adi diferansiyel denklemi elde ederiz. Dış yükü bileşenleri $p_x = p_y = 0$ ve $p_z = \text{sabit}$ olsun.

$$\begin{aligned} 1.0667 f_1'' - 1.3333(1-\nu)f_1 + 0.2667(1+\nu)f_2' - 0.9143\alpha(1+\nu)f_3' &= 0 \\ 0.0762(1-\nu)f_2' - 1.6f_2 - 0.2667(1+\nu)f_1' + 0.6095\alpha(1+\nu)f_3 &= 0 \\ -0.9173\alpha(1+\nu)f_1' - 0.6095\alpha(1+\nu)f_2 + 2 \cdot 0.8127\alpha^2(1+\nu)f_3 & \\ + \frac{1}{\gamma} [0.8127f_3''' - 4.8768f_3'' + 25.6f_3] = +1.0667(1-\nu^2) \frac{\alpha}{h} \frac{p_z}{E} & \end{aligned}$$

3. Tottenham Yöntemi

Probleme yeni fonksiyonlar ithal edelim. Şöyle ki,

$$f_1' = f_4, f_2' = f_5, f_3' = f_6, f_6' = f_3'' = f_8, f_7' = f_6'' = f_3''' = f_8$$

Böylece üç adet (5.19) denklemleri, aşağıdaki sekiz $f_1, f_2, \dots, f_8$ bilinmeyenini içeren sekiz adet birinci mertebeden diferansiyel denkleme indirgenir.

$$f_1' = f_4,$$

$$f_2' = f_5$$

$$f_3' = f_6$$

$$f_4' = f_1'' = +1.25(1-\nu)f_1 - 0.25(1+\nu)f_5 - 0.8572\alpha(1+\nu)f_6$$

$$f_5' = f_2'' = +21.0 \frac{1}{1-\nu} f_2 + 3.5 \frac{1+\nu}{1-\nu} f_4 + 8.0 \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} f_3$$

$$f_6' = f_7$$

$$f_7' = f_8$$

$$f_8' = +0.75\gamma\alpha(1+\nu)f_2 - [2\gamma\alpha^2(1+\nu) + 31.4]f_3 \\ + 1.125\alpha(1+\nu)f_4 + 6.0f_7 + 1.3125(1-\nu^2)\frac{a}{h}\frac{p_z}{E}\gamma$$

Matris formunda

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & a_{82} & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 & a_{87} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_8 \end{bmatrix},$$

yada en kısa gösterimle

$$\frac{d}{dx} S = D \cdot S + P$$

olur. Burada S bilinmeyenleri içeren kolon matrisi, D 8x8 kare matris ve P dış yükü terimlerini içeren kolon matrisidir. Burada D ve P matrislerinin elemanlarının değerleri

$$a_{14} = +1,$$

$$a_{25} = +1,$$

$$a_{36} = +1,$$

$$a_{41} = +1.25(1-\nu) = 0.875,$$

$$a_{45} = -0.25(1+\nu) = 0.325,$$

$$a_{46} = -0.8572\alpha(1+\nu) = 0.445744,$$

$$a_{52} = +21 \frac{1}{1-\nu^2} = 23.0679,$$

$$a_{53} = +3.5 \frac{1+\nu}{1-\nu} = 6.5,$$

$$a_{54} = +8.0 \frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu} = -5.9428,$$

$$a_{67} = +1,$$

$$a_{78} = +1,$$

$$a_{82} = +0.75\gamma\alpha(1+\nu) = -20780,$$

$$a_{83} = -2\gamma\alpha^2(1+\nu) - 31.5 = -22218.16665,$$

$$a_{84} = +1.125(1+\nu)\alpha\gamma = -31200,$$

$$a_{87} = +6.0$$

$\frac{d}{dx}S = D \cdot S + P$ şeklinde olan diferansiyel denklem takımının çözümü bir çok geliştirilmiş

bilgisayar programı (MatLab, MatCad, Matematika vb.) ile mümkün ve çok kolaydır. S matrisi bulunduğundan sonra bu değerleri (5.36) denkleminde yerlerine koyarsak kesit tesirleri nokta nokta bilgisayar yardımı ile bulunabilirler.

$$N_x = C[u' + \nu v' + \nu w'] = C \left[f_1' (1 - y^2) + \nu f_2' (1 - 3y^2) + \nu f_3' (1 - y^2)^2 \right]$$

$$N_y = C[v' + \nu u' + w'] = C \left[f_2' (1 - 3y^2) + \nu f_1' (1 - y^2) + f_3' (1 - y^2)^2 \right]$$

$$N_{xy} = \frac{C(1-\nu)}{2} (v' + u') = C \frac{1-\nu}{2} \left[f_2' (y - y^3) + \nu f_1' (-2y) \right]$$

$$M_x = D \frac{1}{a} (w'' + \nu \ddot{w}) = \frac{D}{a} \left[f_3'' (1 - y^2)^2 + \nu f_3'' (-2 + 12y^2) \right]$$

$$M_y = D \frac{1}{a} (\ddot{w} + \nu w'') = \frac{D}{a} \left[f_3'' (-2 + 12y^2) + \nu f_3'' (1 - y^2)^2 \right]$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) \dot{w}' = D(1-\nu) \left[f_3' (-2y + 4y^3) \right]$$

$$V_x = D(w''' + \ddot{w}') = D \left[f_3''' (1 - y^2)^2 + f_3''' (-2 + 12y^2) \right]$$

$$V_y = D(\ddot{w} + \dot{w}'') = D \left[f_3'' \cdot 24y + f_3'' (-2y + 4y^3) \right]$$

Çizelge 5.2 Nokta nokta kesit tesirleri

Nokta No	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kesit Tesiri									
$N_x(t)$	158.75	10.545	7.182	-1.044	-5.145	-4.640	0.000	-2.870	-3.478
$N_y(t)$	158.75	-1.044	0.000	10.545	-5.145	-2.870	7.182	-4.640	-3.478
$N_{xy}(t)$	-35.90	-5.500	0.000	-8.500	-6.500	0.000	0.000	0.000	0.000
$M_x(tm)$	-4.100	0.600	-1.850	0.000	0.000	-0.480	0.000	0.530	0.000
$M_y(tm)$	-4.100	0.000	0.000	0.600	0.000	0.530	-1.850	-0.480	0.000
$M_{xy}(tm)$	8.200	0.700	0.000	0.000	-0.600	0.000	0.000	0.000	0.000
$V_x(t)$	31.01	0.980	0.000	-0.317	0.066	0.000	0.000	0.000	0.000
$V_y(t)$	31.01	-0.317	0.000	0.980	0.066	0.000	0.000	0.000	0.000

Bu değerleri (5.37) denkleminde yerlerine koyarsak yer değiştirme bileşenlerini nokta nokta bilgisayar yardımı ile bulunabilirler.

$$\begin{aligned}
 u &= f_1(x) \cdot (1 - y^2), & m_1 &= 1 - y^2 \\
 v &= f_2(x) \cdot (y - y^3), & m_2 &= y - y^3 \\
 w &= f_3(x) \cdot (1 - y^2)^2, & m_3 &= (1 - y^2)^2
 \end{aligned}$$

Çizelge 5.3 Nokta nokta yer değiştirme bileşenleri

Nokta No	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yer Değiştirme									
$u(m)$	0.000	0.003	0.000	0.002	0.0004	0.000	0.004	0.0003	0.000
$v(m)$	0.000	0.002	0.004	0.003	0.0004	0.0003	0.000	0.000	0.000
$w(m)$	0.000	0.002	0.025	0.002	0.0081	0.0131	0.025	0.0131	0.012

5.5 Sonuçların Karşılaştırılması

SAP90 dünyada çok kullanılan ve sonlu elamanlar tekniği ile statik ve dinamik analizi esnasında kullanılan bir bilgisayar programıdır.

Kanthorovich-Tottenham yöntemi ile elde ettiğimiz sonuçların SAP90 programı ile bulunan değerlerin karşılaştırılması yapılmıştır ve Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5 de verilmiştir. SAP90 data dosyası ve SAP90 çıktı dosyaları EKLER bölümünde detaylı olarak verilmiştir.

Çizelge 5.4 Nokta nokta kesit tesirleri sonuçlarının karşılaştırılması

Nokta No	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kesit Tesiri									
N_x (t)	158.75	10.545	7.182	-1.044	-5.145	-4.640	0.000	-2.870	-3.478
	161.02	11.200	8.010	-1.501	-6.100	-5.220	0.000	-3.040	-3.752
N_y (t)	158.75	-1.044	0.000	10.545	-5.145	-2.870	7.182	-4.640	-3.478
	161.02	-1.501	0.000	11.200	-6.100	-3.040	8.010	-5.220	-3.752
N_{xy} (t)	-35.90	-5.500	0.000	-8.500	-6.500	0.000	0.000	0.000	0.000
	-34.73	-5.810	0.000	-9.000	-5.990	0.000	0.000	0.000	0.000
M_x (tm)	-4.100	0.600	-1.850	0.000	0.000	-0.480	0.000	0.530	0.000
	-4.185	0.640	-1.980	0.000	0.000	-0.400	0.000	0.460	0.000
M_y (tm)	-4.100	0.000	0.000	0.600	0.000	0.530	-1.850	-0.480	0.000
	-4.185	0.000	0.000	0.640	0.000	0.460	-1.980	-0.400	0.000
M_{xy} (tm)	8.200	0.700	0.000	0.000	-0.600	0.000	0.000	0.000	0.000
	8.530	0.750	0.000	-0.610	-0.680	0.000	0.000	0.000	0.000
V_x (t)	31.01	0.980	0.000	-0.317	0.066	0.000	0.000	0.000	0.000
	32.92	0.900	0.060	-0.300	0.060	0.000	0.000	0.000	0.000
V_y (t)	31.01	-0.317	0.000	0.980	0.066	0.000	0.000	0.000	0.000
	32.92	-0.300	0.060	0.900	0.060	0.000	0.000	0.000	0.000

Çizelge 5.5 Nokta nokta yer değiştirme bileşenleri

Nokta No	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Yer Değiştirme									
u (m)	0.000	0.003	0.000	0.002	0.0004	0.000	0.004	0.0003	0.000
	0.000	0.0031	0.000	0.0021	0.0004	0.000	0.0045	0.0003	0.000
v (m)	0.000	0.002	0.004	0.003	0.0004	0.0003	0.000	0.000	0.000
	0.000	0.0021	0.0045	0.0031	0.0004	0.0003	0.000	0.000	0.000
w (m)	0.000	0.002	0.025	0.002	0.0081	0.0131	0.025	0.0131	0.012
	0.000	0.0022	0.0258	0.0022	0.0082	0.0132	0.0258	0.0132	0.0122

*Çizelgelerde verilen değerlerin ilki Kanthorovich-Tottenham yöntemi ile bulunan değerler, ikinci değerler ise SAP90 programı ile bulunan değerlerdir.

6 SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Genel yüzey denklemlerini çıkardıktan sonra, genel dönel yüzey denklemlerini, yani denge denklemleri, elastisite ve kinematik bağıntıları elde edilmek mümkün ve kolay olduğunu gösterdik. Daha sonra çözümde yaralandığımız Kanthorovich-Tottenham yöntemi ile simetrik yük altında dönel paraboloid kabuğun kesit tesirleri ve yer değiştirme bileşenleri elde edilmiştir.

Kanthorovich-Tottenham yöntemi yardımı ile bulunan sonuçların, dünyada çok kullanılan ve sonlu elemanlar tekniği ile çalışan SAP90 adlı program ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırması yapılmıştır ve sonuçların bir birine çok yakın olduğu görülmüştür.

Kanthorovich-Tottenham yöntemi haricinde, bu tip problemler bir çok teknikle çözmek mümkündür. Onlardan bazıları:

- Sonlu farklar metodu
- Sonlu elemanlar metodu
- Ritz metodu
- Galerkin metodu
- Felberg metodu vb.

KAYNAKLAR

Karadeniz, A. A., (1995), “Yüksek Matematik” Cilt 3, Çağlayan Kitapevi, İstanbul

Keskinel, F. ve Kumbasar N., (1976), “Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar” İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Yayın No:112, Matbaa Teknisyenleri Kol.LŞti. İstanbul

Köksal, E., (1996), “Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi”, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayını No:309, Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul

Köksal, E., (1998), “Kabuklar Dersi Ders Notları”, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, (yayınlanmamış)

Özden, K., (1975), “Dönel Kabuklar”, İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi, Sayı 1040, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul

Taneroğlu, S., (1991), “Elastisite Teorisi”, Birinci Baskı, İTÜ Kütüphanesi, Sayı 1434, İTÜ, İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul

EKLER

SAP90 programı ile yapılan çözümün tamamı bu bölümde verilmiştir..

Ek 1 SAP90 data dosyası

Ek 2 Kabuğun görünüşü

Ek 3 Kabuğun simetrik yük altında deforme olmuş şekli

Ek 4 M_{11} (yani M_x) moment diyagramı

Ek 5 M_{22} (yani M_y) moment diyagramı

Ek 6 M_{12} (yani M_{xy}) moment diyagramı

Ek 7 SAP90 data.SOL dosyası



Ek 1 SAP90 data dosyası

SAP90 ILE CÖZÜMÜ

SYSTEM

L=1

JOINTS

49	X=10.000	Y=0.0000	Z=-24.00	
42	X=10.000	Y=20.000		
43	X=0.0000	Y=10.000		
44	X=20.000			
1	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=49 42 1 39 1 1.130993248
4001	X=0.0000	Y=20.000		A=43 44 4001 39 -100 1.130993248
41	X=20.000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=44 43 41 40 100 1.130993248
45	X=10.000	Y=30.000	Z=-24.00	A=42 45 4001 39 1 1.130993248
142	X=10.000	Y=10.000	Z=-48.00	
143	X=0.0000	Y=10.000		A=142 143 49 39 1 1.130993248
247	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=50 88 101 39 1 1.130993248
248	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=51 87 201 39 1 1.130993248
249	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=52 86 301 39 1 1.130993248
250	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=53 85 401 39 1 1.130993248
251	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=54 84 501 39 1 1.130993248
252	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=55 83 601 39 1 1.130993248
253	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=56 82 701 39 1 1.130993248
254	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=57 81 801 39 1 1.130993248
255	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=58 80 901 39 1 1.130993248
256	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=59 79 1001 39 1 1.130993248
257	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=60 78 1101 39 1 1.130993248
258	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=61 77 1201 39 1 1.130993248
259	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=62 76 1301 39 1 1.130993248
260	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=63 75 1401 39 1 1.130993248
261	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=64 74 1501 39 1 1.130993248
262	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=65 73 1601 39 1 1.130993248
263	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=66 72 1701 39 1 1.130993248
264	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=67 71 1801 39 1 1.130993248

265	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=68	70 1901 39	1	1.130993248
266	X=10.000	Y=20.000	Z=-22.00	A=69	266 2001 39	1	1.130993248
267	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=70	68 2141 39	-1	1.130993248
268	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=71	67 2241 39	-1	1.130993248
269	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=72	66 2341 39	-1	1.130993248
270	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=73	65 2441 39	-1	1.130993248
271	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=74	64 2541 39	-1	1.130993248
272	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=75	63 2641 39	-1	1.130993248
273	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=76	62 2741 39	-1	1.130993248
274	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=77	61 2841 39	-1	1.130993248
275	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=78	60 2941 39	-1	1.130993248
276	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=79	59 3041 39	-1	1.130993248
277	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=80	58 3141 39	-1	1.130993248
278	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=81	57 3241 39	-1	1.130993248
279	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=82	56 3341 39	-1	1.130993248
280	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=83	55 3441 39	-1	1.130993248
281	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=84	54 3541 39	-1	1.130993248
282	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=85	53 3641 39	-1	1.130993248
283	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=86	52 3741 39	-1	1.130993248
284	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=87	51 3841 39	-1	1.130993248
285	X=0.0000	Y=0.0000	Z=0.0000	A=88	50 3941 39	-1	1.130993248

RESTRAINTS

1 41 40 R=1 1 1 1 1 1
 4001 4041 40 R=1 1 1 1 1 1

SHELL

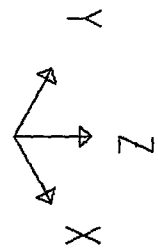
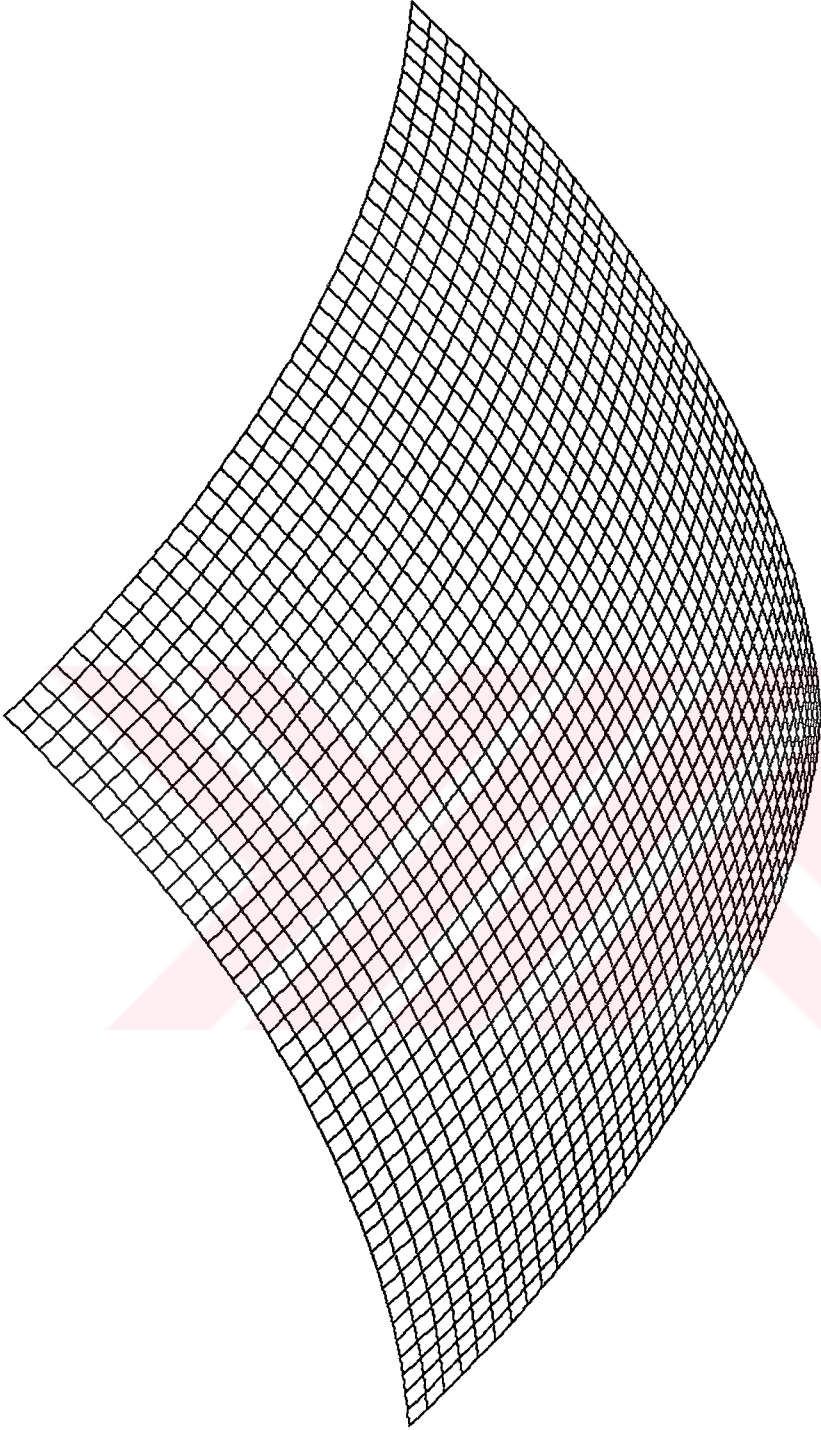
NM=1 Z=-1

1 E=2.85E6 W=7.00

1 JQ=1 2 101 102 ETYPE=0 M=1 TH=0.12 G=40 1
 101 JQ=101 102 201 202 ETYPE=0 M=1 TH=0.15 G=40 1
 201 JQ=201 202 301 302 ETYPE=0 M=1 TH=0.15 G=40 1
 301 JQ=301 302 401 402 ETYPE=0 M=1 TH=0.15 G=40 1
 401 JQ=401 402 501 502 ETYPE=0 M=1 TH=0.15 G=40 1

501	JQ=501	502	601	602	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
601	JQ=601	602	701	702	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
701	JQ=701	702	801	802	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
801	JQ=801	802	901	902	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
901	JQ=901	902	1001	1002	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1001	JQ=1001	1002	1101	1102	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1101	JQ=1101	1102	1201	1202	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1201	JQ=1201	1202	1301	1302	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1301	JQ=1301	1302	1401	1402	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1401	JQ=1401	1402	1501	1502	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1501	JQ=1501	1502	1601	1602	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1601	JQ=1601	1602	1701	1702	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1701	JQ=1701	1702	1801	1802	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1801	JQ=1801	1802	1901	1902	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
1901	JQ=1901	1902	2001	2002	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2001	JQ=2001	2002	2101	2102	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2101	JQ=2101	2102	2201	2202	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2201	JQ=2201	2202	2301	2302	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2301	JQ=2301	2302	2401	2402	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2401	JQ=2401	2402	2501	2502	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2501	JQ=2501	2502	2601	2602	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2601	JQ=2601	2602	2701	2702	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2701	JQ=2701	2702	2801	2802	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2801	JQ=2801	2802	2901	2902	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
2901	JQ=2901	2902	3001	3002	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3001	JQ=3001	3002	3101	3102	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3101	JQ=3101	3102	3201	3202	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3201	JQ=3201	3202	3301	3302	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3301	JQ=3301	3302	3401	3402	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3401	JQ=3401	3402	3501	3502	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3501	JQ=3501	3502	3601	3602	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3601	JQ=3601	3602	3701	3702	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3701	JQ=3701	3702	3801	3802	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3801	JQ=3801	3802	3901	3902	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1
3901	JQ=3901	3902	4001	4002	ETYPE=0	M=1	TH=0.15	G=40	1

Ek 2 Kabuğun görünüşü

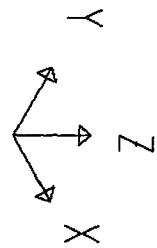
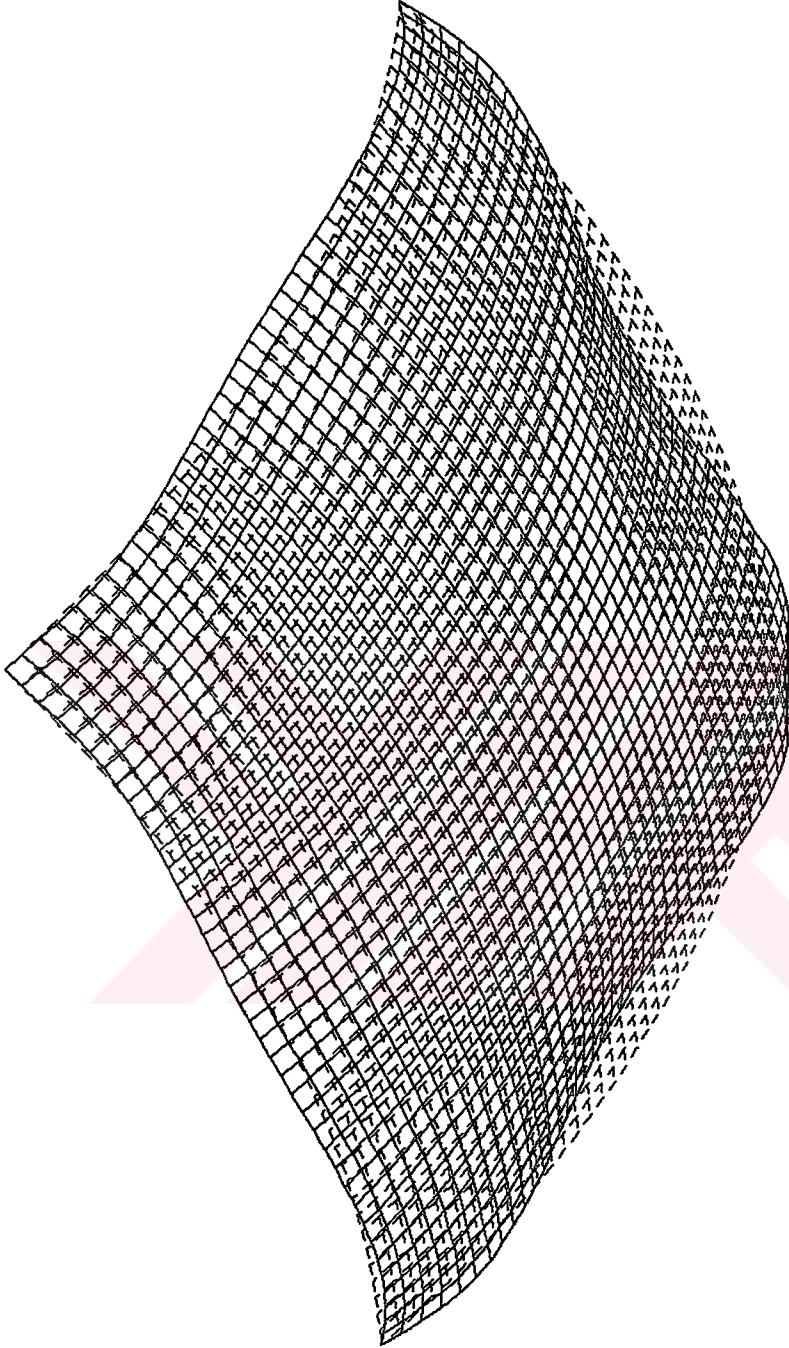


TEZ
UNDEFORMED
SHAPE

OPTIONS
HIDDEN LINES

CADDOA

Ek 3 Kabuğun Simetrik yük altında deforme olmuş şekli



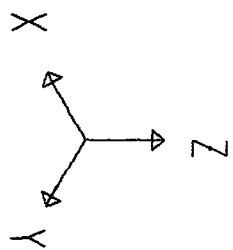
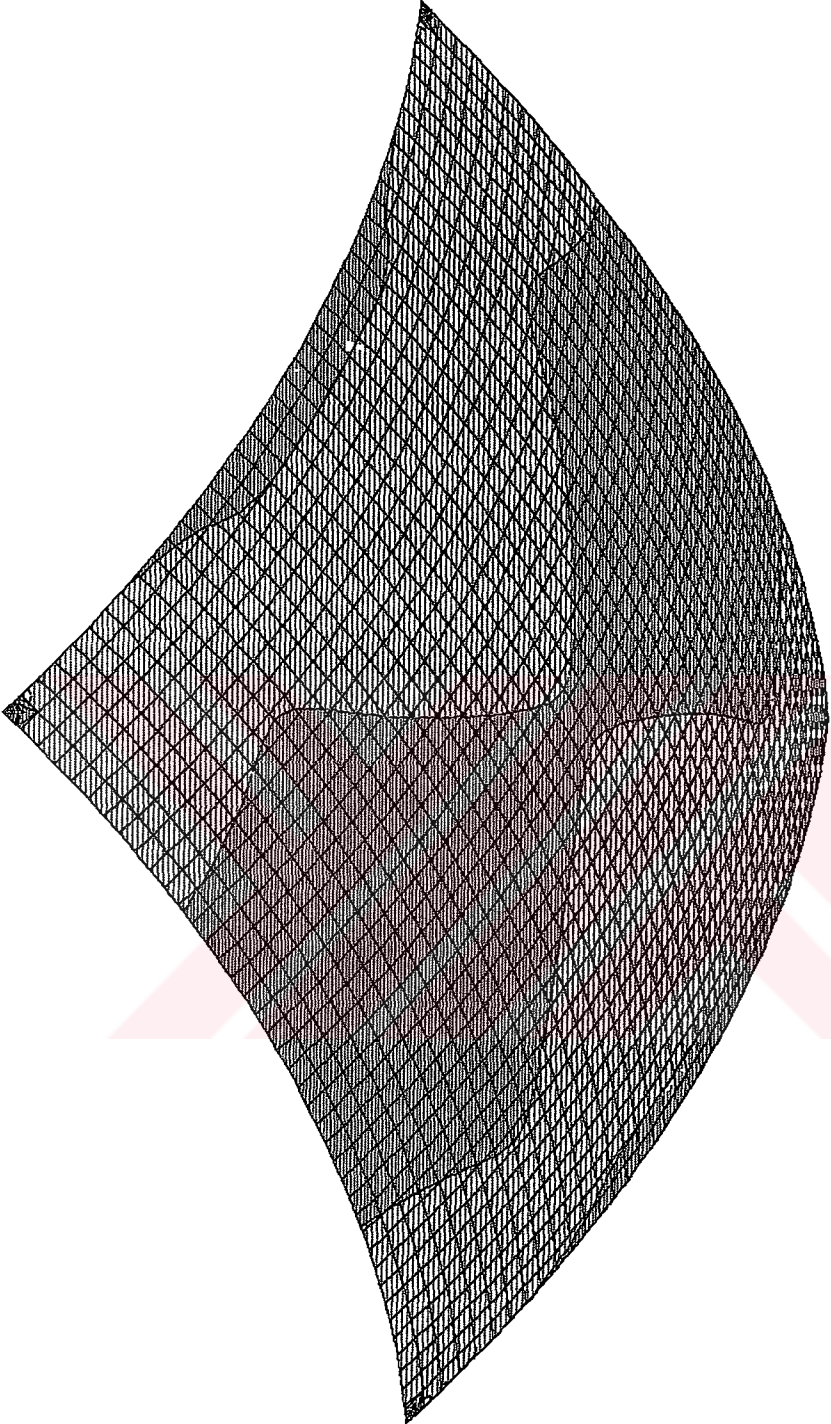
TEZ
DEFORMED
SHAPE
LOAD 1

MINIMA
X - .5109E-02
Y - .5109E-02
Z - .2579E-01

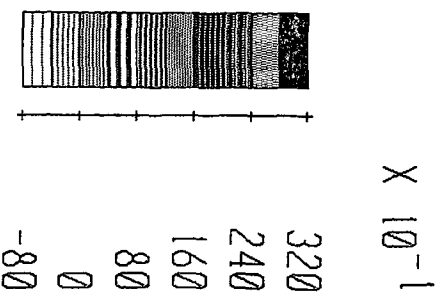
MAXIMA
X .5109E-02
Y .5109E-02
Z .9094E-02

Ek 4 M_{11} (yani M_x) moment diyagramı

MIN IS -.718E+01 <JOINT 3901> MAX IS .281E+02 <JOINT 41>



TEZ
SHELL
OUTPUT M11
LOAD 1



Ek 5 M_{22} (yani M_y) moment diyagramı

MIN TQ - 714E+01 < INTINT

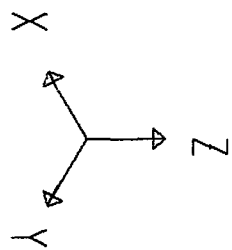
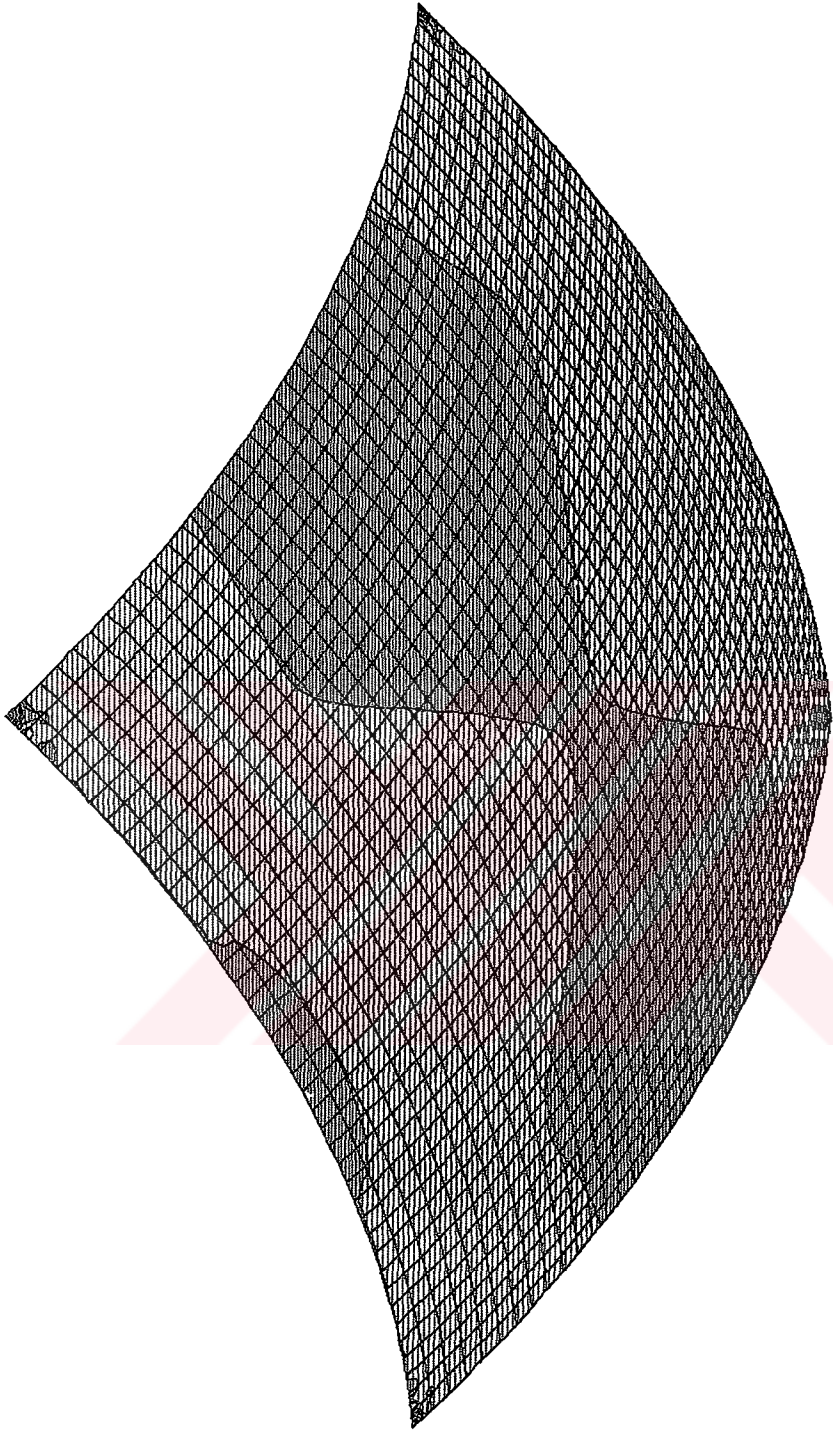
>>

MAX TQ

251E+02 < INTINT

1>

SAP90



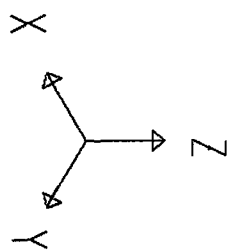
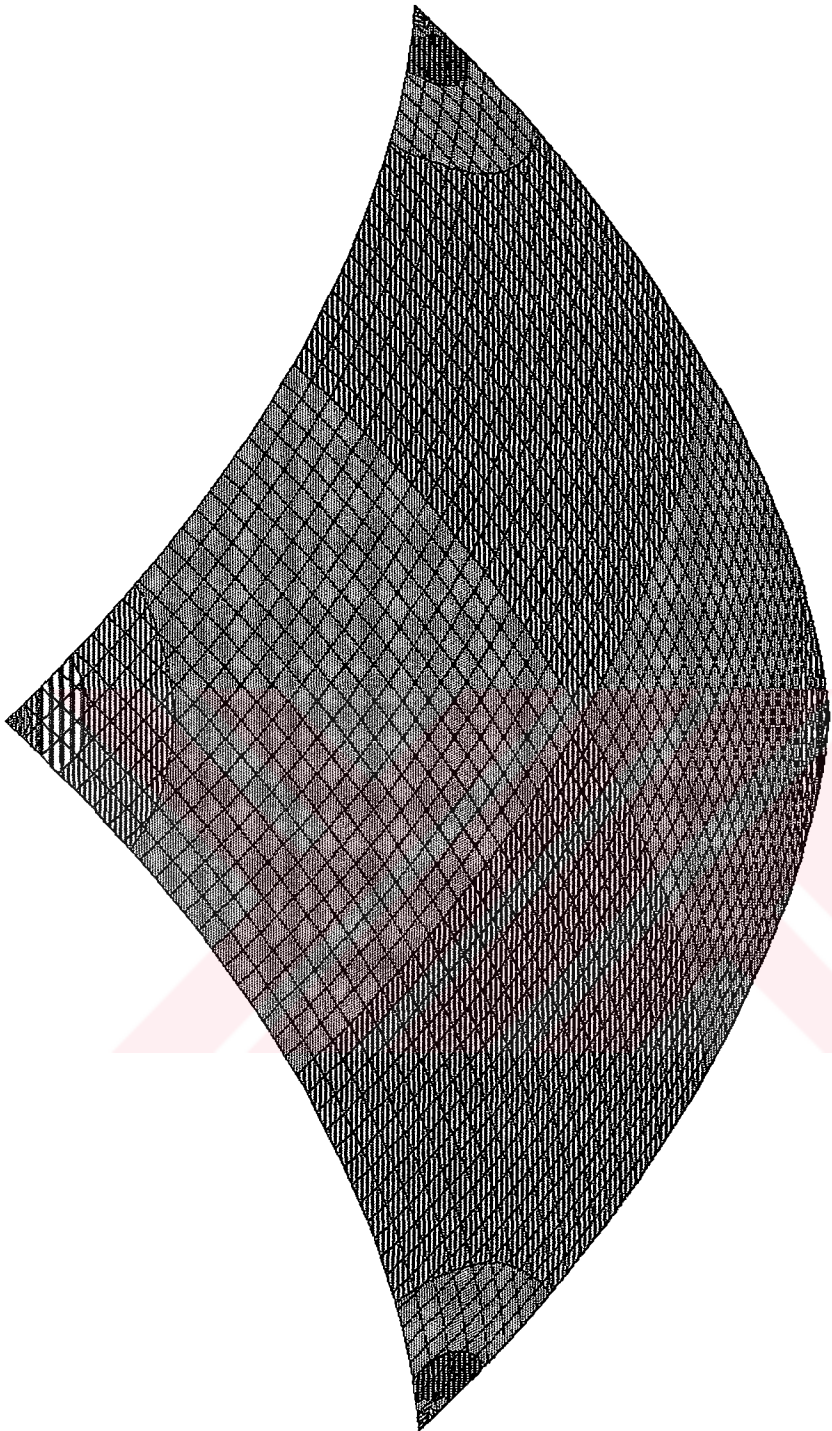
TEZ
SHELL
OUTPUT M22
LOAD 1

X 10⁻¹

320
240
160
80
0
-80

Ek 6 M_{12} (yani M_{xy}) moment diyagramı

MIN 15 - .104F+02 <.INTINT 41> MAX 15 .104F+02 <.INTINT 1>



TEZ
SHELL
OUTPUT M12
LOAD 1



110
66
22
-22
-66
-110

$\times 10^{-1}$

Ek 7 SAP90 data.SOL dosyası

PROGRAM:SAP90/FILE:TEZ.SOL

JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

	JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1-	1	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
2-	11	-.003059	-.002110	-.002159	-.000800	.006621	.001706
3-	21	.000000	.004484	-.025793	.003386	.000000	.000000
4-	1001	-.002110	-.003059	-.002159	-.006621	.000800	-.001706
5-	1011	-.000435	-.000435	-.008233	-.001534	.001534	.000000
6-	1021	.000000	.000326	-.013239	.000910	.000000	.000000
7-	2001	.004484	.000000	-.025793	.000000	-.003386	.000000
8-	2011	.000326	.000000	-.013239	.000000	-.000910	.000000
9-	2121	.000000	-.000016	-.012204	.000004	.000000	.000000

REACTIONS AND APPLIED FORCES

LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

	JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1-	1	161.0183	161.0183	112.0638	-4.1581	4.1581	.0000
2-	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3-	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
4-	1001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5-	1011	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6-	1021	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7-	2001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8-	2011	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9-	2021	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	05.08.1971	
Doğum yeri	Tutin,Sancak,Yugoslavya	
Lise	1986-1990	Tutin,Sancak,Yugoslavya
Lisans	1991-1992	Sarayevo Üniversitesi, Saraybosna İnşaat Mühendisliği Bölümü
	1993-1997	Ondokuz Mayıs Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
Çalıştığı kurumlar	1997-1998	Yüksel İnşaat A.Ş.
	1998-1999	Probi A.Ş.