

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROF. DR. İLHAN EREN

ERBOLOİD KABUĞUN (SOĞUTMA KULESİ) SONLU FARKLAR  
TEKNİĞİYLE MAMBRAN HESABI

85094

İnşaat Müh. Erkan ŞENER

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ercüment Köksal

İSTANBUL, 1999

## İÇİNDEKİLER

Sayfa

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| SİMGE LİSTESİ .....                                                                                       | ii  |
| KISALTMA LİSTESİ .....                                                                                    | iii |
| ŞEKİL LİSTESİ .....                                                                                       | iv  |
| ÇİZELGE LİSTESİ .....                                                                                     | v   |
| ÖZET .....                                                                                                | vi  |
| ABSTRACT .....                                                                                            | vii |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                            | 1   |
| 2. İNCE KABUK TEORİSİNDE KABULLER ve KAVRAMLAR .....                                                      | 2   |
| 2.1 Birinci Mertebe Teorisinde Yapılan Kabuller .....                                                     | 2   |
| 2.1.1 Malzeme ve malzemenin davranışı .....                                                               | 2   |
| 2.1.1.1 Malzeme elastik özelliği .....                                                                    | 3   |
| 2.1.1.2 Malzeme davranışı .....                                                                           | 7   |
| 2.1.2 Süreklilik hipotezi .....                                                                           | 8   |
| 2.1.3 Malzeme lineer elastiktir .....                                                                     | 8   |
| 2.1.4 Süperpozisyon kanunu geçerlidir .....                                                               | 8   |
| 2.1.5 Betty karşıtlık teoremi geçerlidir .....                                                            | 8   |
| 2.1.6 Kabuk incedir .....                                                                                 | 8   |
| 2.1.7 HKL, Kirchhoff-Love kabulleri .....                                                                 | 9   |
| 2.1.8 Kabuğun kalınlığı $h \ll r_{\min}$ .....                                                            | 10  |
| 2.1.9 İnce, basık kabuk teorisinde ilave kabuller .....                                                   | 11  |
| 2.1.10 Mambran kabuk teorisinde ilave kabuller .....                                                      | 11  |
| 2.2 Kinematik Bağlantılarla İlgili Farklı Yaklaşımlar .....                                               | 13  |
| 3. YÜZEY GEOMETRİSİ ve GENEL KABUK DENKLEMLERİ .....                                                      | 14  |
| 3.1 Yüzey Geometrisi .....                                                                                | 14  |
| 3.1.1 Genel yüzey parametrik denklemleri .....                                                            | 14  |
| 3.1.2 Lamé katsayıları .....                                                                              | 15  |
| 3.1.3 Yüzey elemanının kenar boyları ve $d\bar{s}$ .....                                                  | 18  |
| 3.1.4 Yüzey esas eğrilikleri, asal eğrilikleri, normal eğrilikleri<br>ve normal eğrilik yarıçapları ..... | 20  |
| 3.1.5 Yüzeyin geodezik eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri .....                                           | 25  |
| 3.1.6 Toplam ve ortalama eğrilikler ve yüzey tipleri .....                                                | 30  |
| 3.1.6.1 Toplam eğrilik , Gauss eğriliği .....                                                             | 30  |
| 3.1.6.2 Ortalama eğrilik .....                                                                            | 31  |
| 3.1.6.3 Yüzey tip ve tarifleri .....                                                                      | 31  |
| 3.2 Kabuk Genel Denklemleri .....                                                                         | 33  |

|         |                                                                                                                                                  |    |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2.1   | Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri .....                                                                                                | 33 |
| 3.2.2   | Ortogonal eğrisel koordinatlarda, orta yüzeyin<br>şekil değiştirme bileşenleri .....                                                             | 38 |
| 3.2.3   | Kabuk elastisite bağıntıları .....                                                                                                               | 40 |
| 3.2.4   | Genel yüzey denge denklemleri .....                                                                                                              | 41 |
| 3.2.4.1 | Genel eğrisel (x,y) koordinatlarında, orta yüzeyin<br>şekil değiştirme bileşenleri .....                                                         | 41 |
| 3.2.4.2 | Ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarında denge denklemleri .....                                                                            | 42 |
| 3.2.4.3 | Genel eğrisel koordinatlarda mambran denge denklemleri .....                                                                                     | 43 |
| 3.2.4.4 | Ortogonal eğrisel koordinatlarda mambran denge denklemleri .....                                                                                 | 44 |
| 4.      | DÖNEL KABUK .....                                                                                                                                | 46 |
| 4.1     | Genel Dönel Kabuklar .....                                                                                                                       | 46 |
| 4.1.1   | Giriş ve tanımlamalar .....                                                                                                                      | 46 |
| 4.1.2   | Genel dönel kabukların yüzey denklemleri ve karakteristik değerleri .....                                                                        | 47 |
| 4.2     | Genel Dönel Kabuk Denge ve Stabilite Denklemleri .....                                                                                           | 51 |
| 4.2.1   | Dönel kabuk genel eğilmeli denge denklemleri .....                                                                                               | 51 |
| 4.2.2   | Kinematik bağıntılar .....                                                                                                                       | 52 |
| 4.2.3   | Özel hal, dönel simetrik yük etkisi durumu .....                                                                                                 | 53 |
| 4.2.4   | Özel halde, kinematik ve elastisite bağıntıları .....                                                                                            | 54 |
| 4.2.5   | Mambran denge denklemleri .....                                                                                                                  | 55 |
| 4.2.5.1 | Simetrik olmayan yük hali .....                                                                                                                  | 55 |
| 4.2.5.2 | Simetrik yük hali .....                                                                                                                          | 55 |
| 4.3     | Dönel Kabukların (DMV) Yaklaşımıyla Non-Lineer<br>Denge Denklemleri .....                                                                        | 56 |
| 4.3.1   | Dönel kabuğun non-lineer eğilmeli denge denklemleri,<br>kinematik ve elastisite bağıntıları .....                                                | 56 |
| 4.3.2   | Özel hal, eksenel simetrik yük durumunda denge denklemleri,<br>kinematik ve elastisite bağıntıları.....                                          | 59 |
| 4.3.3   | Dönel kabuğun eğilmeli lineer denge denklemleri.....                                                                                             | 61 |
| 4.3.4   | Dönel kabuğun mambran lineer denge denklemleri .....                                                                                             | 61 |
| 5.      | SAYISAL ÇÖZÜM.....                                                                                                                               | 62 |
| 5.1     | Hiperbolik Soğutma Kulesinin, Zati Simetrik Yük Altında,<br>Sonlu Farklar Tekniğinden Yararlanarak Sayısal<br>İntegrasyonla Mambran Çözümü ..... | 62 |
| 6.      | SONUÇLAR .....                                                                                                                                   | 92 |
|         | KAYNAKLAR .....                                                                                                                                  | 93 |
|         | ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                                                   | 94 |

## SİMGE LİSTESİ

|                                                           |                              |
|-----------------------------------------------------------|------------------------------|
| $ds_x, ds_y$                                              | Kenar boyları                |
| $ds$                                                      | Köşegen eğri uzunluğu        |
| $r_x, r_y, r_{xy}$                                        | Normal eğrilik yarıçapları   |
| $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \frac{1}{r_{xy}}$          | Normal eğrilikler            |
| $\rho_x, \rho_y, \rho_{xy}$                               | Geodezik eğrilik yarıçapları |
| $\frac{1}{\rho_x}, \frac{1}{\rho_y}, \frac{1}{\rho_{xy}}$ | Geodezik eğrilikler          |
| $\omega_{x\dots}, \phi_{x\dots}$                          | Dönmeler                     |
| $E$                                                       | Elastisite modülü            |
| $u, v, w$                                                 | Deplasman bileşenleri        |
| $A, B, C, F, E$                                           | Lamé Katsayıları             |

## KISALTMA LİSTESİ

|     |                         |
|-----|-------------------------|
| HKL | Kirchhoff-Love Hipotezi |
| DMV | Donnel-Mushtari-Vlasov  |



## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

|                   |                                                                                                                                           |    |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1         | Örnek: Çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı.....                                                                                    | 2  |
| Şekil 3.1         | (x,y) Koordinat takımı genel ise $\theta \neq 90^\circ$ , ortogonal ise $\theta = 90^\circ$ olur .....                                    | 16 |
| Şekil 3.2 a,b     | Genel yüzeyin eğrisel koordinatlarda karakteristikleri .....                                                                              | 20 |
| Şekil 3.3 a,b     | Genel yüzeyin eğrilikleri .....                                                                                                           | 21 |
| Şekil 3.4         | Geodezik eğrilikler .....                                                                                                                 | 26 |
| Şekil 3.5 a,b     | Genel yüzeyin gerilme hali .....                                                                                                          | 33 |
| Şekil 4.1 a,b,c,d | Dönel kabuk tipleri.....                                                                                                                  | 46 |
| Şekil 4.2 a,b,c   | Genel dönel yüzey (x,y) eğrisel koordinatlarının $(\varphi,\theta)$ eğrisel koordinat formuna dönüşümü .....                              | 48 |
| Şekil 4.2 d,e     | Sonsuz küçük dört kenarlı elemanın genel dönel ve genel eğrisel yüzey hali .....                                                          | 49 |
| Şekil 4.3 a       | Dönel kabuk yüzey elemanın kesit tesirleri ve karakteristikleri .....                                                                     | 55 |
| Şekil 4.3 b,c     | Dönel kabukların Lamé katsayıları ile ifade edilen $(\varphi,\theta)$ eğrisel koordinatlarındaki eğrilikleri ve eğrilik yarıçapları ..... | 56 |
| Şekil 5.1 a,b     | Dönel kabuğun elemanın kesit tesirleri .....                                                                                              | 63 |
| Şekil 5.2         | Simpson kuralı .....                                                                                                                      | 65 |
| Şekil 5.3 a,b,c   | Hiperbolik soğutma kulesi .....                                                                                                           | 68 |
| Şekil 5.4         | $N_\varphi$ ve $N_\theta$ kesit tesirleri diyagramları .....                                                                              | 91 |

## ÇİZELGE LİSTESİ

|                                                                | Sayfa |
|----------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 2.1 Kinematik bağıntılar .....                         | 13    |
| Çizelge 4.1 Genel ve dönel yüzey karakteristikleri .....       | 50    |
| Çizelge 5.1 Hesap tablosu .....                                | 90    |
| Çizelge 5.2 Zati ağırlık altında kesit tesirleri tablosu ..... | 91    |



## ÖZET

Dönel kabukların sayısal tekniklerden yararlanarak çeşitli yük etkisi altında çözümü için kullanılacak denklemlerin kabuk genel denklemlerinden elde edilmesi mümkündür. Kabuk malzemesi

- homogen, izotrop ve sürekli kabul edilir
- Hook kanunu geçerlidir
- hesaplarda süperpozisyon kanunu geçerlidir
- Betty karşıtlık teoremi geçerlidir
- deformasyonlar kabuk kalınlığı boyunca lineerdir
- HKL geçerlidir
- membran kabukta, kabuk kalınlığının çok küçük olduğu kabul edilir.

Genel dönel yüzey denklemlerinin elde edilmesi için genel yüzeylerin parametrik denklemlerinden yararlanılabilir. Bunun için yüzey üzerindeki sonsuz küçük dört kenarlı elemandan yola çıkarak öncelikle Lamé katsayıları tayin edilir. Buradan genel dönel kabukların denge denklemlerini, stabilite denklemlerini, bünye denklemlerini, geometrik uygunluk denklemlerini (kinematik bağıntılarını) ve yüzey parametrik denklemlerini elde etmek mümkündür. Dönel yüzeyli kabuk denklemlerini daha basit ve anlaşılır formda ifade etmek için genel yüzey kabuk denklemlerinde kullanılan eksen takımı olan (x,y) eğrisel koordinatlarını yeni eksen takımına ( $\varphi, \theta$ ) dönüştürerek oluşturmak gerekir.

Bunun dışında membran denge denklemlerinde

$$M_{\varphi\theta} = M_{\varphi} = M_{\theta} = V_{\varphi} = V_{\theta} = 0$$

olması problemlerin nispeten daha kolay çözümünü sağlar. Hiperbolik soğutma kulesi gibi bir dönel kabuğun simetrik yük altında membran çözümünü yaparken kullanılan denge denklemi

$$\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} + p_z = 0$$

den hareketle  $N_{\varphi}$  ve  $N_{\theta}$  kesit tesirleri elde edilir. Kesit tesirlerinin tayini için bir nümerik integralin çözümüne ihtiyaç duyulur. Bu çözümün sağlanması için sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi bir sayısal teknik kullanılabilir. Dönel yüzeyli kabukların çözümünde yararlanılan genel yüzeyli kabuk denklemleri ile kesit tesirlerinin belirlenmesi ve çözüme ulaşılması mümkündür.

**Anahtar Kelimeler :** Dönel kabuk, Membran Hesap.

## ABSTRACT

Revolution shells are under load effects are solved by using numerical methods. Shell general equations can be used for solution. Shell material

- it is accepted that homogenous, isotropy and continuous.
- Hook law is in common use
- superposition law is used at the calculations
- Betty contrast theorem is used
- deformations are linear along the shell thickness
- HKL is in common use
- Shell thickness is accepted very small at the membrane shell.

Equations of the general revolution surface is obtained by using parametrical equations of the general surfaces. Therefore, infinite small four edge element on the surface is thought. Firstly, Lamé coefficient is determined. From here, equilibrium, stability, structure, geometric agreeableness and surface parametric equations of the general revolution shells can be obtained. We can express revolution surface shell equations in simple and understanding form. Therefore inclined coordinates (x,y) are used general shell equations are transformed to new axis set. Externally, at the membrane equilibrium equations

$$M_{\varphi\theta} = M_{\varphi} = M_{\theta} = V_{\varphi} = V_{\theta} = 0$$

becomes easy solving of the problems. Equilibrium equation for solving of the membrane of revolution shell like a refrigeration tower under symmetrical load is used

$$\frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} + p_z = 0$$

$N_{\varphi}$  and  $N_{\theta}$  is obtained from this. Solving of numeric integrate is needed for determining of the cross sectional influences. Finite elements and finite differential methods can be used for this solving. Shell with general surface equations can be used for solving of shells with revolution surface cross sectional effects can be determined and the solution can be attained from this equations.

**Key Words:** Revolution shell, membrane solution.

## 1. GİRİŞ

Dönel hiperbolik kabuğun sonlu farklarla sabit yük altında mambran çözümü yapılmıştır. İkinci bölümde kabuk kabulleri ve yaklaşımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde genel yüzeyin yani genel kabuğun yüzey denklemleri geometrisi ve genel denklemleri oluşturulmuş olup bunu takip eden dördüncü bölümde ise dönel kabuk geometrisi, yüzey ve genel denklemleri verilmiştir.

Beşinci bölümde sonlu farklar tekniğini kullanarak sayısal integrasyonla hiperbolik soğutma kulesinin sabit dönel simetrik yük altında mambran çözümü verilmiştir. Sayısal hesap ve sonuçlar da sunulmuştur.



## 2. İNCE KABUK TEORİSİNDE KABULLER ve KAVRAMLAR

Genel anlamda mekanik mühendislik problemlerinin tümünü kapsar. Problemlerde ana unsur elemanın malzemesi olup bunun tipine göre mekanik bilimi sınıflandırılır.

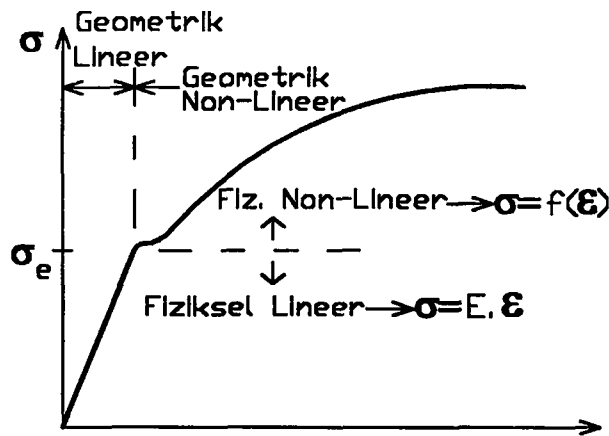
- Rijit Cisim Mekaniği
- Elastik Cisim Mekaniği
- Akışkanlar Mekaniği

Kabuk malzemesi elastik cisim olup, kabuk sistemler elastik cisim mekaniğinin konusudur. Kabuk sistemler için yapılan yaklaşımlar, kabuk probleminin birinci merteye ya da ikinci merteye hesabına bağlı olarak iki ana gruba ayrılır.

### 2.1 Birinci Merteye Teorisinde Yapılan Kabuller

Mühendislik problemlerinde, tipine göre hesaplar 1. merteye ya da II. merteye teorisiyle yapılır. 1. merteye teorisiyle hesap yapmak demek şekil değiştirmemiş sistem üzerinde işlem yapmak, örneğin denge ve uygunluk denklemlerini oluşturmaktır. Bu durumda yer değiştirme ve şekil değiştirmenin küçük olduğu varsayılır.

#### 2.1.1 Malzeme ve malzemenin davranışı



Şekil 1.1 Örnek: Çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı

**Malzeme kavramı.** Malzemeyi belirleyen iki ana özellik vardır. Bunların biri malzemenin elastik özelliği, diğeri davranış biçimidir. O halde kısaca ve şematik olarak

### Mekanik



Kabuk malzemesi, homogen, izotrop ve sürekli kabul edilir.

Homogen ve izotrop olma, malzeme özelliklerinin (Elastik sabitlerin) sırasıyla, noktanın bulunduğu yere ve noktadan geçen doğrultuya göre değişmediğini gösterir.

Malzeme hem elastik özelliğine ve hem de davranış tipine göre sınıflandırılır.

#### 2.1.1.1 Malzeme elastik özelliği

Malzeme elastik özellikler açısından üç ana gruba ayrılır. Bunlar

1- Anizotrop malzeme

2- Orthotrop malzeme

3- İzotrop malzeme

Genel Hook kanunu

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Matris formda

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}$$

şeklinde gösterilir. Burada  $[D]$ , malzemenin elastik sabitlerinin matris formda gösterimidir ve katsayılar matrisi olarak ifade edilir.

#### 1- Anizotrop hal

En genel anizotrop halde (9x9) luk  $[D]$  katsayılar (Elastisite) matrisinin bağımsız eleman sayısı 81 adettir.

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & \dots & D_{1119} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{9991} & \dots & D_{9999} \end{bmatrix}$$

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin, homogen olmayan halde, simetrik olması durumunda elastik bağımsız sabitlerin sayısı 36 ya iner. Dört indisli gösterimi iki indise indirgeyerek bu anizotrop halde  $[D]$  katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} D_{1111} & \dots & D_{1119} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{9991} & \dots & D_{9999} \end{bmatrix}$$

Green şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

$$U = \frac{1}{2} D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$$

şeklindeyse  $[D]$  katsayılar matrisinin bu anizotrop hal için bağımsız elastik sabit sayısı 36 dan 21 e iner.

Elastik özellikler tek bir düzleme göre simetrikse (monolitik simetrlili) bağımsız elastik sabit sayısı 13 e iner. Örneğin, kabuk ve plakta orta yüzey simetri düzlemi ise sekiz elastik sabit sıfır olur ve 21 bağımsız elastik sabit 13 e iner (Köksal, 1996).

## 2- Orthotrop hal

Malzemenin elastik özellikleri karşılıklı olarak birbirine dik üç düzleme göre, ikişer ikişer simetrikse orthotrop cisim adını alır ve  $[D]$  katsayılar matrisinde bağımsız elastik sabit sayısı 9 a iner. Örneğin,  $\sigma_z \equiv 0$  için, düzlem gerilme haline tekabül eden bu durumda sabit sayısı 9 olur. Bu durumda kayma etkisi göz önüne alınmaktadır. **Reissner Teorisi.**

Orthotrop cisimde, malzemenin elastik özellikleri uygun olarak seçilen bir eksen takımının iki eksenini doğrultusunda aynı, üçüncü eksen doğrultusunda farklı ise yani orthotrop olma koşuluna ek olarak iki eksenin, üçüncü eksen etrafında dönmesi halinde elastik özellikler değişmiyorsa, bağımsız elastik sabit sayısı 6 ya iner. Örneğin, bu durumda kabuk ve plakta kayma etkisi terkedilmiştir ve bağımsız elastik sabit sayısı 6 dır. Bu hal **Kirchoff Teorisi**'dir.

Orthotrop cisim kalınlık boyunca homogen ise bağımsız elastik sabit sayısı 4 e iner.

Malzemenin elastik özellikleri birbirine dik üç eksen boyunca eşitse (kübik malzeme) bağımsız elastik sabit sayısı 3 e iner.

Orthotrop kabuklarda, orthotropi özelliğini sağlayan elemanların, örneğin nervürlerin etkisi

-Kabuğa çizgisel yük şeklinde verilerek,

-Kabuk ile nervürler birlikte mütalaa edilerek yani nervürleri kabuk elastik sabitlerine katarak, sağlanır.

## 3- İzotrop hal

Cismin malzemesinin elastik sabitleri koordinat eksenlerinin doğrultusundan bağımsız ise yani herhangi bir noktadan geçen tüm doğrultularda elastik özellikler aynı ise izotrop malzeme adını alır ve bağımsız elastik sabit sayısı 2 ye iner. Bunlara Lamé katsayıları denir:  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Lamé katsayıları ile E Young modülü ve  $\nu$  Poisson oranı arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{(1 - 2\nu)} \quad \dots\dots\dots \nu = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}$$

İzotrop hal için [ D ] katsayılar matrisini açık formlarda verelim.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & D_{1212} & 0 \\ & & & & & D_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & D_{66} & 0 \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

İzotrop kabukta elastisite bağıntısı (Hook K.)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2} \cdot C & 0 & 0 & 0 \\ & & & D & \nu D & 0 \\ & & & & D & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2} \cdot D \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

Burada ,  $C = \frac{E.h}{(1-\nu^2)}$ ,  $D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)}$  ve örneğin  $k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $k_y = -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

olur.  $N_i$ ,  $M_i$  ler kabukta birim boya düşen kesit tesirleri ve  $h$  kabuk kalınlığıdır.  $C$  uzama,  $D$  eğilme rijitlikleri ve  $k_x$ ,  $k_y$  ler eğriliklerdir.

### 2.1.1.2 Malzeme davranışı

Malzeme davranışı açısından değerlendirilirken, malzeme fiziksel ve geometrik özellikleriyle ele alınır.

#### 1- Malzemenin fiziksel özelliği

Gerilme-şekil değiştirme halidir. Gerilme-şekil değiştirme bağıntısının farklılığından oluşur.  $\sigma = f(\epsilon)$ .

Fiziksel açıdan malzemeleri iki gruba ayırmaktayız.

##### 1.a- Lineer hal,

Hook K. geçerli,  $\sigma = E \cdot \epsilon$  bağıntısı doğrusaldır,  $E$  sabit.

##### 1.b- Non-lineer hal,

Hook K. geçersiz,  $\sigma = f(\epsilon)$  bağıntısı eğriseldir.

#### 2- Malzemenin geometrik özelliği

Şekil değiştirme bağıntılarının durumunu gösterir. Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntısının farklılığından oluşur.  $\epsilon = f(d)$ ,  $\{d\} = (u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ . Geometrik olarak ta malzemeleri iki gruba ayırmaktayız.

##### 2.a- Lineer hal,

Deplasmanlar küçük olup,  $\epsilon = f(d)$  bağıntısı doğrusaldır. İkinci dereceden terimler

alınmaz. Örneğin,  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  gibi.

##### 2.b- Non-lineer hal

Deplasmanlar nispeten büyük olup,  $\epsilon = f(d)$  bağıntısı eğriseldir ve ikinci derece terimler içerir. Örneğin,  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots$  gibi. Burada ikinci terim non-lineerdir.

Malzemenin davranışının fiziksel ve geometrik özelliklerinin durumunu çeliğin gerilme-şekil değiştirme diyagramı üzerinde Şekil 2.1' de gösterilmiştir.

## **Homogen malzeme**

Malzeme içerisinde, elastik özellikler noktadan noktaya değişmez. Elastik sabitler koordinatlara bağlı olmaz ve bütün ortamda aynı sabit değeri alırlar.

## **Kabuk orta yüzeyi**

Kabuğun alt ve üst yüzeylerinin tam ortalarını teşkil eden noktaların geometrik yerini oluşturan yüzey kabuk orta yüzeyi adını alır. Hesaplarımızda bu yüzeyi referans yüzeyi olarak aldığımızdan, buna kabuk referans yüzeyi de denir.

Kompozit kabuklarda (örneğin sandviç kabuklar) kabuğun bütünü için yeni elastik sabitler hesaplanarak, tek bir malzemeden oluşan et kalınlığına sahip kabuk gibi ele alınabilirler.

### **2.1.2 Süreklilik hipotezi**

Kabuğun sürekli ortama sahip olması, bize, kuvvet ve deplasmanları sürekli fonksiyonlarla ifade etme olanağını verir. Kısaca kabuğun malzemesinin homogen, izotrop ve sürekli ortam özelliği taşıdığı kabullerine süreklilik hipotezi adı verilir.

### **2.1.3 Malzeme lineer elastiktir**

Malzeme fiziksel özelliğinin lineer elastik olması , gerilme şekil değiştirme bağıntılarının lineer olduğunu kısaca Hook Kanunu'nun geçerli olduğunu gösterir. Bu bize hesaplarda süperpozisyon kanununu uygulama olanağını verir.

### **2.1.4 Süperpozisyon kanunu geçerlidir**

### **2.1.5 Betty karşılıklı teoremi geçerlidir**

### **2.1.6 Kabuk incedir**

Kabuk ince olup ayrıca kabuk kalınlığına oranla elastik deformasyonlar, şekil ve yer değiştirme bileşenleri küçüktür. Örneğin,  $w \ll h$ . Bu malzemenin geometrik lineer özelliğine karşı gelir. Bu yapılacak hesaplarda yer değiştirme büyüklüklerinden yalnızca lineer terimler göz önüne alınacak yani kinematik bağıntılarda (şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları ya da geometrik uygunluk bağıntıları da denir), yer değiştirme bileşenlerinin yalnızca birinci mertebeden terimlerinin dikkate alınacağı demektir. Sonuç olarak bünye denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında ikinci mertebeden terimler terk edilirler. Kısaca geometrik ve fiziksel olarak lineer hal söz konusudur. Ayrıca

1- Deformasyonlar kabuk kalınlığı boyunca lineerdir.

2-  $(h/r)^2 \ll 1$

3- HKL geçerlidir.

Tüm bunlar kabuk kabullerinde birinci yaklaşım olarak kabul edilirler.

#### 2.1.7 HKL, Kirchhoff-Love kabulleri

1- Kabuk orta yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler terk edilebilecek kadar küçüktür. Yani  $\sigma_z = 0$  alınır. Elastisite teorisinde bu gerilmelerin ikinci mertebeden rol oynadıkları ispatlanmış olup, pratikten de  $\sigma_z$  normal gerilmesinin diğer gerilmelere oranla %0.1 mertebesinde kaldığı bilinmektedir.

2- Deformasyondan önce kabuk orta yüzeyine dik olan bir doğru, deformasyondan sonra da

2.1- Doğru olarak kalır.

2.2- Kabuk orta yüzeyine dik doğru kalır.

Bu Bernoulli-Navier Hipotezi'nin genelleştirilmiş haline tekabül eder. Bu Bernoulli-Navier Hipotezi basit kiriş teorisinde deformasyondan sonra düzlem kesitler düzlem kalır şeklindedir ve kesme kuvvetinden dolayı deformasyonlar ihmal edilir. Bu da kabuktaki orta yüzeye dik doğrultudaki  $V_x$  ve  $V_y$  kuvvetlerinden dolayı kabuktaki deformasyonlar ihmal edilecek demektir. Yani bu kabul gereğince, orta yüzeye paralel yüzeylerde  $\gamma_{zx}$  ve  $\gamma_{zy}$  birim kayma şekil değiştirmeleri aynı kalır, yani sıfır olur. Tabiatıyla  $\tau_{zx}$  ve  $\tau_{zy}$  kayma gerilmeleri de sıfır olur. Bu kabulü içermeyen kabuk teorisine, **kaymalı kabuk teorisi**

denir. Bu teoriye göre, doğru, orta yüzeye deformasyondan sonra dik kalmaz. Dolayısı ile birim kayma şekil değiştirme bileşenleri sıfır olmaz ve kayma gerilmeleri hesaplara girer.

**2.3- Kabuk orta yüzeyine dik doğrunun deformasyondan sonra boyu değişmez.**

Orta yüzeye dik doğru üzerindeki bütün noktalar eşit miktarda yer değiştirirler. Böylece kabuğun kalınlığının deformasyondan sonra değişmediği varsayılır. Buna göre  $\varepsilon_z = 0$  olup, bu da kabuk ince ise geçerlidir.

Böylece kabuk teorilerini birinci ve ikinci mertebeden olmak üzere iki kategoriye ayırmanın nedeni açığa çıkar.

**3- Yukarıdaki (2.1) , (2.2) , (3) kabulleri bir düzlem şekil değiştirme halini karakterize eder.** Ancak (1) kabulü de göz önüne alındığında bir düzlem gerilme hali ile karşılaşılır. Bu durumda görülür ki  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$  iken  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz} \neq 0$  dır, karmaşık bir düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme hali vardır. Yine de kabuk kalınlığı  $(h/r) < (1/20)$  den az ise bu yaklaşım rahatlıkla kabul edilebilir.

Görüldüğü gibi tüm bu yaklaşımlar kabuk ince ise geçerlidir.

### 2.1.8 Kabuğun kalınlığı $h \ll r_{\min}$

Kabuğun bir noktasındaki kalınlığının, orta yüzeyin o noktadaki en küçük eğrilik yarıçapına oranı terk edilebilir.

$$\frac{r+h}{r} = 1 + \frac{h}{r} \cong 1, \quad r \rightarrow r_{\min}$$

Sıralanan bu kabuller, **lineer eğilmeli ince kabuk teorisinde** yapılır. Görüldüğü gibi ince kabuk teorisi Love yaklaşımlarını içerir.

İnce kabuk teorisi çerçevesinde bazı bilim adamlarının yaptığı ilave kabuller de olup bu yaklaşımlar bazı tip kabuk ve hesap yöntemlerine uygun düşmektedir. Burada iki örnek sunulacak ve 2. Bölüm sonunda dönel kabuğun farklı yaklaşımları için bir tablo verilecektir. Şöyle ki,

## 1. Donnell yaklaşımı

Kabuk kalınlığı yanında orta yüzeyin (v) deplasman bileşeni çok küçük kabul edilir ve x ekseninde etrafında dönme bileşeninin ifadelerinde ( v / r ) terimi terk edilir.

## 2. Novoziloff yaklaşımı

Bu kabulde ( v / r ) terimi terk edilmez. Bu sonlu elemanlarla hesapta iyi sonuç verdiği kabul edilen bir yaklaşımdır.

Örneğin; silindirik kabukta,

Donnell yaklaşımında  $\beta_\theta = -\frac{\partial w}{r\partial\theta}$  iken

Novoziloff yaklaşımında  $\beta_\theta = \frac{v}{r} - \frac{\partial w}{r\partial\theta}$  alınır.

### 2.1.9 İnce, basık kabuk teorisinde ilave kabuller

Kabuk yüksekliği, taban genişliğine oranla küçüktür. Öyle ki,

$$\frac{f}{L_{\min}} \leq \frac{1}{5}$$

olmalıdır.

- 1- Bu durumda Denge denklemlerinin ilk ikisinde  $V_x$  ve  $V_y$  kesme kuvvetleri terk edilebilir.
- 2- Yine  $N_{xy}$  ve  $M_x$  ifadelerinde  $M_{xy}$  momentlerinin tesiri az olacağından terk edilebilir.
- 3- Normal dönmelerde de (u) ve (v) deplasmanları terk edilir.
- 4- Basık kabukta, orta yüzeyin toplam eğriliği yaklaşık sıfırdır.

### 2.1.10 Mambran kabuk teorisinde ilave kabuller

Mambran kabuk, kabuk kalınlığının çok ince olduğu, zar gibi, hali betimler.

- 1- Kabuğun çok ince olduğu ve orta yüzeyle ifade edildiği kabul edilir.

2- Bu durumda kabuk kalınlığı ve düşey deplasman sıfırdır.

$$h = w = 0$$

3- Kabuk elemanının kenarlarında gerilmeler ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) üniform olarak yayılı olup, z ekseninden bağımsızdır. Bu duruma **mambran gerilme hali** denir.

Gerilmelerden,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

olup, diğer gerilmeler de üniform yayılı olduğundan,

$$M_x = M_y = M_{yx} = 0$$

$$V_x = V_y = 0$$

olur.

## 2.2 Kinematik Bağıntılarla İlgili Farklı Yaklaşımlar

Çizelge 2.1 Kinematik bağıntılar

| Deplasman Bileşeni                | DÖNEL KABUK                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                        |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                   | LOVE                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | DONNELL                                                                                                                                                                                                                | KLASİK                                                                                                                                 |
| $\epsilon_s, (\epsilon_x)$        | $\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{r_s}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{r_s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2$                                                                                                           | $\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{r_s}$                                                                                        |
| $\epsilon_\theta, (\epsilon_y)$   | $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u - \frac{w}{r_\theta}$                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u - \frac{w}{r_\theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2$                                                  | $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} u - \frac{w}{r_\theta}$                                       |
| $\gamma_{s\theta}, (\gamma_{xy})$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\cos \varphi}{r} v \right)$                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta}$ | $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\cos \varphi}{r} v \right)$ |
| $k_s, (k_x)$                      | $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{r_s} \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                    | $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$                                                                                                                                                                                    | $\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$                                                                                                    |
| $k_\theta, (k_y)$                 | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v}{r_\theta} \right) + \frac{\cos \varphi}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{r_s} \right)$                                                                                                                                     | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}$                                                                                                          | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial s}$                          |
| $k_{s\theta}, (k_{xy})$           | $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v}{r_\theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u}{r_s} \right) \right] - \frac{\cos \varphi}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \frac{v}{r_\theta}$ | $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}$                                                                                            | $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}$            |

Dikkat edilmesi gereken durum; Tablodan görüldüğü gibi, klasik teorinin deformasyonları, Love yaklaşımının birim boy değişimi bileşenlerinin ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ) aynı, Donnell yaklaşımının da eğilme ve burulma eğriliklerinin  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{xy}$  aynıdır.

### 3. YÜZEY GEOMETRİSİ ve GENEL KABUK DENKLEMLERİ

#### 3.1 Yüzey Geometrisi

##### 3.1.1 Genel yüzey parametrik denklemleri

Uzayda bir yüzeyi belirleyebilmek için, yüzeyin bir dört kenarlı herhangi elemanının,

- Kenar boylarının  $( ds_x , ds_y )$
- Köşegen eğri uzunluğunun  $( ds )$
- Normal eğrilik yarıçaplarının  $( r_x , r_y , r_{xy} )$
- Normal eğriliklerinin  $( 1/r_x , 1/r_y , 1/r_{xy} )$
- Geodezik eğrilik yarıçaplarının  $( \rho_x , \rho_y , \rho_{xy} )$
- Geodezik eğriliklerinin  $( 1/\rho_x , 1/\rho_y , 1/\rho_{xy} )$
- Dönmelerin  $( \varphi_x \dots , \omega_x \dots )$
- Yüzey genel parametrik denklemlerinin
- Bunlar için gerekli Lamé Katsayılarının

bulunması ifadelerinin tayin edilmesi gerekir. Görüldüğü gibi yukarıdaki karakteristik değerlerin bir kısmı bağımsız değildir. Bunlardan kabuk yüzey tiplerine geçmek ve kabuk etüdünü yapmak olasıdır. Daha sonra genel yüzey yani genel kabuk geometrisinden ve sonsuz küçük dört kenarlı elemanından hareketle

- Denge Denklemlerini: Statik ( Non-Linear, Linear, membran linear ) denge denklemleri, stabilite (Linear, non-linear) denge denklemleri.
  - Kinematik Bağıntılarını
  - Elastisite Bağıntılarını
  - Kabuk Ana Diferansiyel Denklemlerini
  - Enerji İfadelerini
- oluşturmak olasıdır. Şimdi bu konuların açıklamalarını yapalım.

Uzayda herhangi bir (M) noktası (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarıyla belirtilebilir. Ancak nokta bir yüzey üzerinde bulunursa o zaman bu koordinatlar arasında bir  $s(X,Y,Z) = 0$  bağıntısı mevcut olur. Buna yüzey denklemi adı verilir. Matematiksel açıdan kolaylık olsun diye, özellikle elastisite teorisiyle ilgili birçok problemlerde değişik koordinat takımı daha doğrusu, parametre kullanarak (X,Y,Z) içeren denklemler iki yüzey eğrisi (x,y) cinsinden yazılabilir. Dolayısıyla, kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanan, kabuk orta yüzeyi de (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarda yazılabilir. Böylece genel yüzey parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} X &= f_1(x,y) \\ Y &= f_2(x,y) \\ Z &= f_3(x,y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

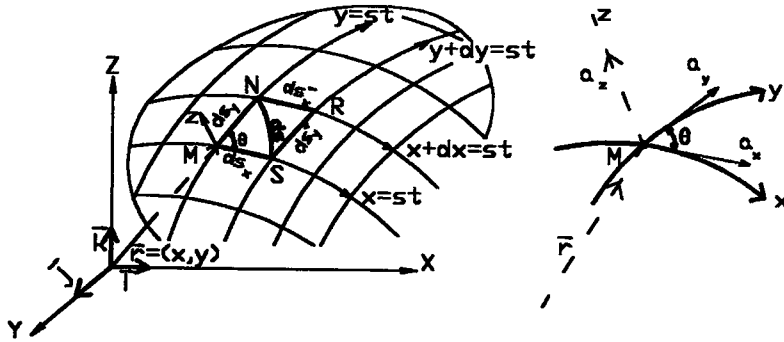
olur. Bu (3.1) parametrik ifadelerdeki ( $f_i$ ) ler, (x) ve (y) parametrelerinin sürekli ve uniform fonksiyonlarıdır. Kısaca yukarıdaki bu bağıntılar herhangi bir yüzey denkleminin parametrik ifadesidir. Yüzeye ait herhangi bir (M) noktası, yüzeyin eğrisel koordinatları denenen (x,y) nin bir değer çiftine karşı gelir.

$\vec{r}$  yer vektörünün (X,Y,Z) kartezyen koordinatlarının bileşkeleriyle uzayda verilen M(X,Y,Z) noktası aynı zamanda (x,y) eğrisel koordinatlarıyla (parametreleriyle) belirtilen bir yüzey üzerindedir. O halde M' nin X,Y,Z bileşenleri (yer vektörü bileşkesi  $\vec{r}$ ) ile (x,y,z) eğrisel koordinat takımı arasında matematiksel (diferansiyel) bir bağıntı kurulabilir. Yüzey üzerindeki herhangi bir eğride, (x,y) cinsinden  $g(x,y) = 0$  olarak ya da parametrik formda  $x = g_x(\beta)$ ,  $y = g_y(\beta)$  ile ifade edilebilir. Burada ( $\beta$ ) bağımsız değişkendir ve x, y yüzeyin eğrisel koordinatlarıdır.

### 3.1.2 Lamé Katsayıları

Bir yüzeyin bütün geometrisini Lamé Katsayıları belirler. Çünkü yüzeyin şekli ve eğrilikleri, iki ana kuadratik form katsayılarına bağlıdır.

- 1- Birinci kuadratik form katsayıları, yüzey şeklini
- 2- İkinci kuadratik form katsayıları, yüzey eğriliğini karakterize ederler.



ŞEKİL 3.1 (x,y) Eğrisel koordinat takımı genel ise  $\theta \neq 90^\circ$ , ortogonal ise  $\theta = 90^\circ$  olur.

### 1- Birinci kuadratik form katsayıları, Lamé Katsayıları

$$E = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \dots\dots A = \sqrt{E}$$

$$G = \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \dots\dots B = \sqrt{G} \quad (3.2)$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial y} \dots\dots C = \sqrt{F}$$

### Birinci kuadratik form, ( $s_1$ )

$$s_1 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = ds^2 \quad (3.3)$$

### 2- İkinci kuadratik form katsayıları, Lamé katsayıları

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

İkinci kuadratik form, ( $s_2$ )

$$s_2 = L dx^2 + 2M dx dy + N dy^2 \quad (3.5)$$

Yüzeyin bir (M) noktasında kovariant baz vektörleri yer vektörünün (x) ve (y) ye göre türetilmesiyle elde edilir. Yer vektörü,

$$\vec{r} = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j} + Z(x, y)\vec{k} \quad (3.6)$$

olup diğer taraftan

$$\vec{a}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \vec{a}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \quad \vec{a}_z = \frac{\vec{a}_x \cdot \vec{a}_y}{|\vec{a}_x \cdot \vec{a}_y|} \quad (3.7)$$

Kovariant baz vektörlerinden üçüncü bileşen (3.7) yüzeye dik birim vektördür.

### 3.1.3 Yüzey elemanın kenar boyları ve $d\bar{s}$

Genel yüzey (MNRS) elemanın kenar boylarını ve  $d\bar{s}$  hesabını verelim. Yüzey karakteristiklerini daha uygun bir formda aşağıdaki biçimde Lamé katsayılarından yararlanarak ifade edebiliriz.

$$A = \sqrt{E} = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$B = \sqrt{G} = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

$$C = \sqrt{F}$$

Tarifini yapalım. Yine

$x = st$ ,  $y = st$  den  $dx = 0$ ,  $dy = 0$  olur. Ayrıca,

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy \quad (3.9)$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

olup, herhangi bir eğrisel yüzeyin bir  $\widehat{NS}$  eğrisinin boyu,

$$d\bar{s}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (3.10)$$

olur. Denklem (3.8) in belirttiği tariflerden yararlanarak  $d\bar{s}$ yani köşegen eğrisi boyu ile sonsuz küçük elemanın kenar boyları, genel eğrisel koordinatlarda,

$$\widehat{MS} = ds_x = A \cdot dx$$

$$\widehat{MN} = ds_y = B \cdot dy$$

$$\widehat{RN} = ds_x^+ = \left( A + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot dy \right) dx = ds_x + \frac{\partial s_x}{\partial y} \cdot dy \quad (3.11)$$

$$\widehat{RS} = ds_y^+ = \left( B + \frac{\partial B}{\partial x} \cdot dx \right) dy = ds_y + \frac{\partial s_y}{\partial x} \cdot dx$$

olarak bulunur. (3.3) , (3.8) ve (3.11) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 &= ds_x^2 + ds_y^2 - 2ds_x ds_y \cos\theta \\ d\bar{s}^2 &= A^2 dx^2 + B^2 dy^2 - 2AB dx dy \cos\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. Bu denklemlerdeki (-) üst çizgiler, x ve y yüzeyin eğrisel koordinatlarının genel olduğunu yani  $\theta$  açısının  $90^\circ$  den farklı olduğunu betimler. Yüzeyin (x,y) koordinat takımının ortogonal olması halinde yani  $\theta = 90^\circ$  için üst çizgiler karakterlerde kaldırılarak yazılacaktır. Denklem (3.3) ve (3.12)  $\widehat{MR}$  eğrisinin diferansiyelinin karesini gösterir.  $\theta$  açısı,  $x=st$  ve  $y=st$  koordinat eğrilerinden tayin edilebilir. Şöyle ki, MNS üçgeninde

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}} = \frac{C^2}{A \cdot B} \quad (3.13)$$

Eğer (x,y) eğrisel koordinatları ortogonalse, yani  $\theta = 90^\circ$  ise,  $\cos\theta = 0$  olacağından,

$$F \equiv 0 \rightarrow C = 0 \quad (3.14)$$

olur. Şekil 3.1 den görüldüğü gibi  $\theta$  açısı, x ve y eğrisel koordinatları arasındaki açıdır.

Ortogonal (x,y) eğrisel koordinatlarda (ds) boyu, denklem (3.12) ve (3.14) den,

$$ds^2 = ds_x^2 + ds_y^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 \quad (3.15)$$

olur. Şimdi genel yüzeyin, **genel ve ortogonal eğrisel koordinatlarda** diğer karakteristik değerlerini verelim.

### 3.1.4 Yüzeyin esas eğrilikleri, asal eğrilikleri, normal eğrilikleri ve normal eğrilik yarıçapları

Genel bir yüzeyin, genel eğrisel koordinatlarda ve ortogonal eğrisel koordinatlarda karakteristikleri Şekil 3.2a,b' de gösterilmiştir.

#### 1- Genel eğrisel eksenler

$$\theta \neq 90^\circ, \quad \bar{r}_x, \bar{r}_y, \bar{r}_{xy}, C, F, M$$

#### 2- Eşlenik eğrisel eksenler

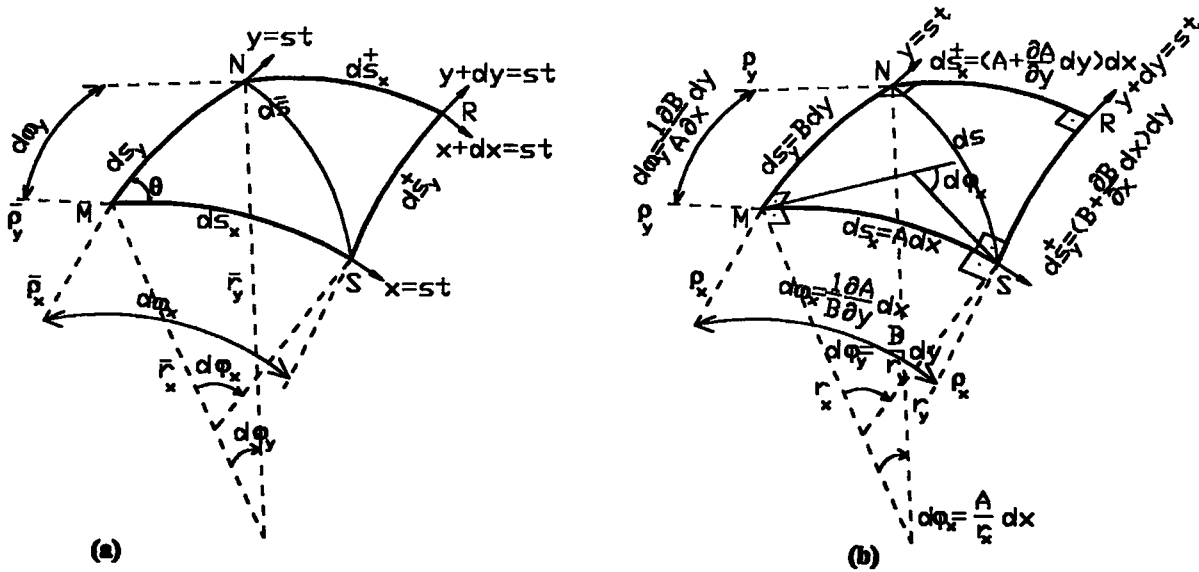
$$\theta \neq 90^\circ, \quad \bar{r}_x, \bar{r}_y \neq 0, \bar{r}_{xy} = 0 \rightarrow M = 0, C, F$$

#### 3- Ortogonal fakat eşlenik olmayan eğrisel eksenler

$$\theta = 90^\circ \rightarrow C=F=0, \quad r_x, r_y, r_{xy}, M$$

#### 4- Ortogonal, eşlenik eğrisel eksenler (Asal eksenler)

$$\theta = 90^\circ \rightarrow C=F=0, \quad r_x \rightarrow r_{\max}, \quad r_y \rightarrow r_{\min}, \quad r_{xy} = 0 \rightarrow M = 0$$

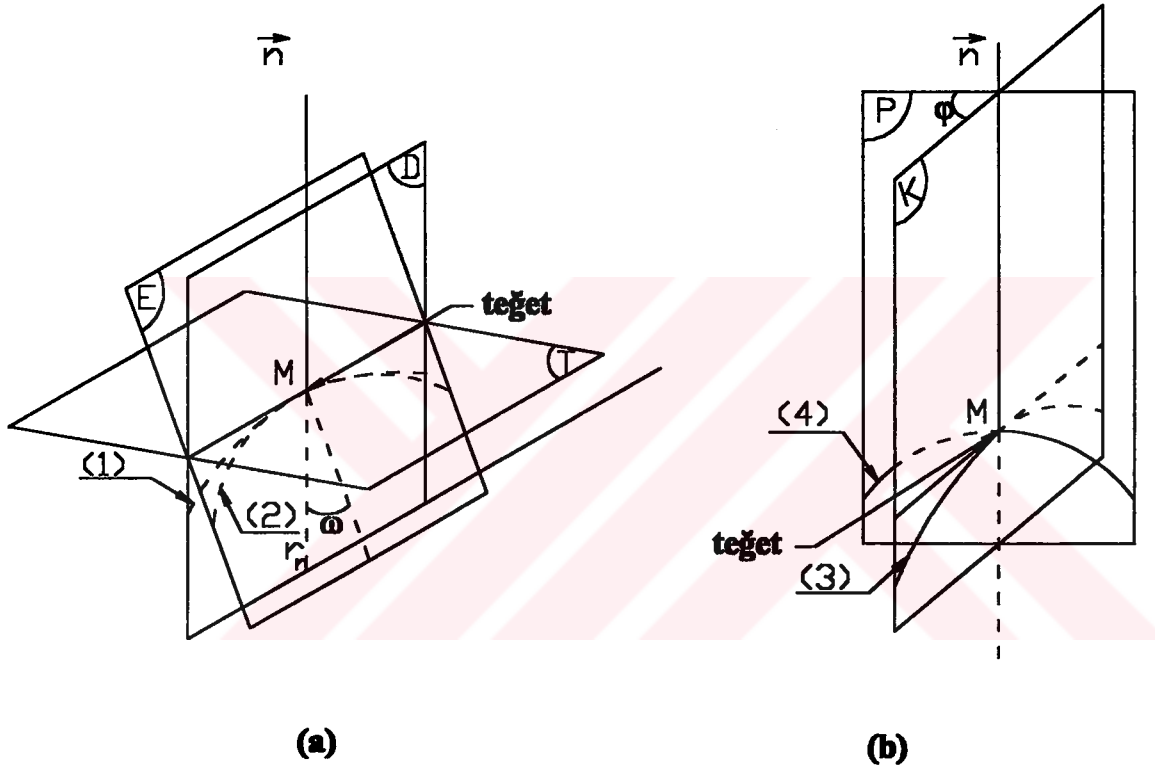


Şekil 3.2a,b

Genel bir yüzeyin eğriliklerini, eğrilik yarıçaplarını yine Lamé Katsayıları ile ifade edebiliriz. Genel bir yüzeyin esas eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri aşağıdaki denklemin kökleriyle bulunurlar.

$$(LN - M^2) \cdot r_n^2 - (EN + GL - 2 FM) r_n + EG - F^2 = 0 \quad (3.16)$$

Çünkü, Şekil 3.3 a,b.



Şekil 3.3 a,b

Yüzeyin üzerindeki bir (M) noktasından, yüzeye,  $n$  normalini ve bu normali içine alan (D) dik düzlemini çıkaralım. Yüzey ile (D) dik düzleminin ara kesiti (1) olsun. (M) noktasında normalini içine alan yüzeye, normal düzlem denir. Bu düzlem, (M) noktasında normal doğru etrafında döndüğünde normal eğrilik yarıçapları değişir. Öyle bir konum vardır ki normal düzlemlerin eğrilik yarıçapları eşlenik olur. Yani  $\bar{r}_{xy} = 0$  olur ve  $\bar{r}_x, \bar{r}_y$  ye **esas eğrilik** yarıçapları denir. Bu durumda dik düzlemle yüzeyin arakesitini teşkil eden eğrilere de eşlenik eğriler denir. Eğer bu eşlenik eğriler birbirine dikse yani ortogonalse **asal eğrisel**

**koordinatlar** adını alır. **Eşlenik eğrilik** yarıçapları da asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür ve biri maksimum diğeri minimum olur. Kısaca öyle bir konum vardır ki normal düzlemin bu durumda eğrilik yarıçaplarından biri maksimum diğeri minimum olur ve asal eğrilik yarıçapları ( $r_x, r_y$ ) adını alır. Arakesit eğrileri de artık asal eğrisel koordinatlar adını alır ve ortogonaldır. Ortogonal yüzeyde ortogonal koordinat sisteminde ( $x = st, y = st$ ) eğrileri asal eğrilere dir.

(M) noktasında yüzey normali  $\vec{n}$  ve eğriliği  $\frac{1}{r_n}$  olsun, normal eğriliğin değeri (3.3), (3.5) den,

$$\frac{1}{r_n} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2}{Edx^2 + 2Fdx dy + Gdy^2}$$

olur. Eksenler eşlenikse  $\overline{T}_{xy} = 0$  olacağından , esas eğrilik yarıçapları (3.16) denklemiyle bulunurlar. Ancak eşlenik eksenler birbirine dik olursa asal eksenlere dönüşeceklerinden,

$$F = 0, M = 0$$

olur. Bu durumda, asal eğrilik yarıçapları

$$LN r_n^2 - (EN + GL) r_n + EG = 0 \quad (3.17)$$

denkleminin kökleri ile bulunur.

**Asal eğrilik yarıçapları**

$$r_x, r_y = \frac{\frac{EN + GL}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{EN + GL}{2}\right)^2 \cdot LNEG}}{LN} = \frac{EN + GL}{2LN} \pm \frac{EN - GL}{2LN} \begin{matrix} \nearrow r_x \rightarrow (+) \\ \searrow r_y \rightarrow (-) \end{matrix} \quad (3.18)$$

$r_x \rightarrow (+)$  ve  $r_y \rightarrow (-)$  hali için,

$$r_x = \frac{E}{L} = \frac{A^2}{L}$$

$$r_y = \frac{G}{N} = \frac{B^2}{N}$$

### Normal asal eğrilikler

$$\frac{1}{r_x} = \frac{L}{E} = \frac{L}{A^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{N}{G} = \frac{N}{B^2}$$

Ayrıca bu eğrilik yarıçapları  $ds_x$  ve  $ds_y$  elemanter yay uzunlukları boyunca değişmez ise aşağıdaki bağıntılar yazılabilir. Şekil 3.2a dan genel eğrisel koordinatlarda

$$ds_x = A \cdot dx = \bar{r}_x \cdot d\phi_x$$

$$ds_y = B \cdot dy = \bar{r}_y \cdot d\phi_y \quad (3.20)$$

Burulma eğrilik yarıçapları, genel eğrisel koordinatlarda

$$\bar{r}_{xy} = \frac{ds_x}{d\gamma_x} = \frac{EM - FL}{E\sqrt{EG - F^2}} \quad (3.21)$$

$$\bar{r}_{yx} = \frac{ds_y}{d\gamma_y} = \frac{EN - GM}{G\sqrt{EG - F^2}}$$

ifadeleriyle verilebilir. Eşlenik olmayan , ortogonal eğrisel koordinatlarda ,  $F \cong 0$  dan, üst çizgilerde kaldırılarak,

$$r_{xy} = -r_{yx} = \frac{M}{\sqrt{EG}} = \frac{M}{AB} \quad (3.22)$$

olur. Eğer (x) ve (y) aynı zamanda asal eğriler ise yani hem ortogonal ( $\theta = 90^\circ$ ) ve ham de eşlenik ( $r_{xy} = 0$ ),  $F = C = 0$  ve  $M = 0$  dan,

$$r_{xy} = r_{yx} = 0 \quad (3.23)$$

olur. Diğer taraftan eğrisel koordinat sisteminin ortogonal olmasından,

$$\vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \quad (3.24)$$

ifadesinin sağlandığı varsayılır. Yüzey baz vektörlerinin boyları A ve B,

$$A = \sqrt{\vec{a}_x \cdot \vec{a}_x} \quad (2.25)$$

$$B = \sqrt{\vec{a}_y \cdot \vec{a}_y}$$

yazılabilir. Dolayısıyla kabuk yani ortogonal bir yüzey elemanının üzerindeki bir eğri elemanının boyunun (3.15) denklemi ile verilebileceğini biliyoruz (Şekil 3.2b). Sonuç olarak, ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarında, normal asal eğrilik yarıçapları, sırasıyla normal eğrilikler normal açı değişimleri ve burulma açı değişimleri

### Normal asal eğrilik yarıçapları

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{E}{L}, \quad r_x = \frac{A^2}{L} \quad \dots\dots\dots A = \sqrt{E}, \quad r_x = \frac{A^2}{\vec{a}_z} \cdot \frac{\partial x}{\partial \vec{a}_x} \\ r_y &= \frac{G}{N}, \quad r_y = \frac{B^2}{N} \quad \dots\dots\dots B = \sqrt{G}, \quad r_y = \frac{B^2}{\vec{a}_z} \cdot \frac{\partial y}{\partial \vec{a}_y} \end{aligned} \quad (3.26)$$

### Normal eğrilikler

$$\frac{1}{r_x} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{r_x} = \frac{L}{A^2}, \quad \frac{1}{r_x} = \frac{\vec{a}_x}{A^2} \cdot \frac{\partial \vec{a}_x}{\partial x}$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{N}{G}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{G}{B^2}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{\bar{a}_y}{B^2} \cdot \frac{\partial \bar{a}_y}{\partial y} \quad (3.27)$$

Bilindiği gibi asal eğrilikler birbirine dik iki düzlem içinde bulunurlar ve burada  $r_x$  ve  $r_y$  asal eğrilik yarıçaplarıdır ve  $r_{xy} = 0$  dır. Buradan ve Şekil (3.2b) ile (3.11), (3.27) denklemlerinden,

**Normal açı değişimleri  $d\varphi_x, d\varphi_y$**

$$ds_x = A \cdot dx = r_x \cdot d\varphi_x, \quad ds_y = B \cdot dy = r_y \cdot d\varphi_y$$

$$d\varphi_x = \frac{A}{r_x} dx = \frac{AL}{E} dx \quad d\varphi_x = \frac{AL}{A^2} dx = \frac{L}{A} dx$$

$$d\varphi_y = \frac{B}{r_y} dy = \frac{BN}{G} dy \quad d\varphi_y = \frac{BN}{B^2} dy = \frac{N}{B} dy$$

**Burulma açı değişimleri**

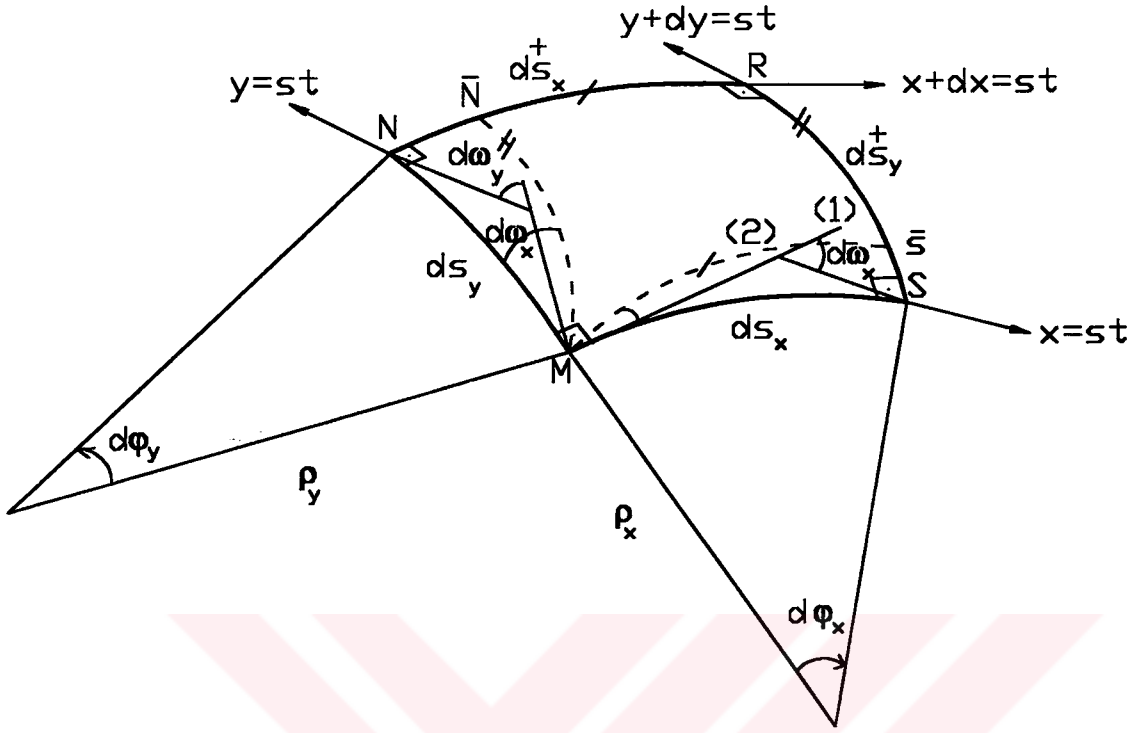
$$d\gamma_x = \frac{ds_x}{r_{xy}} = \frac{A \cdot dx}{r_{xy}} = 0$$

$$d\gamma_y = \frac{ds_y}{r_{yx}} = \frac{B \cdot dy}{r_{yx}} = 0$$

olur.

### 3.1.5- Yüzeyin geodezik eğrilik yarıçapları ve eğrilikleri

Geodezik açı değişimleri, ortogonal eğrisel koordinatlarda, aşağıdaki şekilde bulunabilir. Yüzeyin  $x = st$ ,  $y = st$  koordinat eğrilerine sırasıyla M ve S noktalarından çizilen (1) ve (2) teğetlerinin belirttiği düzlemdeki  $\rho_x$  eğriliği ve aralarındaki  $d\omega_x$  açı değişimi ile (M)



Şekil 3.4 Geodezik eğrilikler

noktasından geçen  $\widehat{RN}$  ve  $\widehat{RS}$  kenarlarına paralel  $\widehat{MS}$  ve  $\widehat{MN}$  yayları göz önüne alınsın, **geodezik açı değişimi** (Şekil 3.4) ve denklem (3.11) den,

$$d\omega_x = \frac{\widehat{NN}}{\widehat{MN}} = \frac{NR - SM}{MN} = \frac{ds_x^+ - ds_x}{ds_y} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} (A dx) dy + A dx - A dx \right] \frac{1}{B dy}$$

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx \quad (3.28)$$

$$d\omega_y = \frac{\widehat{SS}}{\widehat{MS}} = \frac{RS - MN}{MS} = \frac{ds_y^+ - ds_y}{ds_x} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (B dy) dx + B dy - B dy \right] \frac{1}{A dx}$$

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

bulunur. Buradan geodezik eğrilik yarıçaplarına ve eğriliklere geçebiliriz. Şekil 3.4 ve 3.2b den ve denklem (3.28) ve (3.11) den

**Geodezik eğrilik yarıçapları ,  $\rho_x$  ,  $\rho_y$**

$$\widehat{MS} = A \cdot dx = \rho_x d\omega_x$$

$$\widehat{MN} = B \cdot dy = \rho_y d\omega_y$$

$$\rho_x = A \cdot \frac{dx}{d\omega_x} = A \cdot dx \frac{B \partial y}{dx \partial A}, \quad \rho_x = A \cdot B \frac{\partial y}{\partial A} \quad (3.29)$$

$$\rho_y = B \cdot \frac{dy}{d\omega_y} = B \cdot dy \frac{A \partial x}{dy \partial B}, \quad \rho_y = A \cdot B \frac{\partial x}{\partial B}$$

**Geodezik eğrilikler**

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3.30)$$

ifadeleriyle elde edilirler.

Şimdi genel yüzeyin karakteristiklerini genel eğrisel ve ortogonal eşlenik koordinatlarda toplu olarak verelim.

**Genel yüzey karakteristikleri**Eğrisel koordinatlar

$$X = f_1(x, y)$$

$$Y = f_2(x, y)$$

$$Z = f_3(x, y)$$

$$x, \text{ (Eğrisel)}$$

$$y, \text{ (Eğrisel)}$$

$$z, \text{ (Doğru)}$$

**Genel yüzey karakteristikleri**Ortogonal, eşlenik eğrisel koordinatlar

$$X = f_1(x, y)$$

$$Y = f_2(x, y)$$

$$Z = f_3(x, y)$$

$$x, \text{ (Eğrisel)}$$

$$y, \text{ (Eğrisel)}$$

$$z, \text{ (Doğru)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \perp y, r_{xy} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\bar{r}_x$$

$$r_x = \frac{E}{L} = \frac{A^2}{L}$$

$$\bar{r}_y$$

$$r_y = \frac{G}{N} = \frac{B^2}{N}$$

$$\bar{r}_{xy} = \frac{ds_x}{d\gamma_x} = \frac{EM - FL}{E\sqrt{EG - F^2}}$$

$$r_{xy} = 0$$

$$\bar{r}_{yx} = \frac{ds_y}{d\gamma_y} = \frac{FN - GM}{G\sqrt{EG - F^2}}$$

$$r_{yx} = 0$$

$$\rho_x = AB \frac{\partial y}{\partial A}$$

$$\rho_x = AB \frac{\partial y}{\partial A}$$

$$\rho_y = AB \frac{\partial x}{\partial B}$$

$$\rho_y = AB \frac{\partial x}{\partial B}$$

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx$$

$$d\omega_x = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} dx$$

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

$$d\omega_y = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} dy$$

$$d\phi_x = \frac{A}{\bar{r}_x} dx$$

$$d\phi_x = \frac{A}{r_x} dx = \frac{AL}{E} dx = \frac{L}{A} dx$$

$$d\phi_y = \frac{B}{\bar{r}_y} dy \quad \rightarrow \quad d\phi_y = \frac{B}{r_y} dy = \frac{BN}{G} dy = \frac{N}{B} dy$$

$$d\gamma_x = \frac{A}{r_{xy}} dx \quad \rightarrow \quad d\gamma_x = 0$$

$$d\gamma_y = \frac{B}{r_{yx}} dy \quad \rightarrow \quad d\gamma_y = 0$$

$$A = \sqrt{E} \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{E}$$

$$B = \sqrt{G} \quad \rightarrow \quad B = \sqrt{G}$$

$$C = \sqrt{F} \quad \rightarrow \quad C = 0$$

$$M \quad \rightarrow \quad M = 0$$

$$ds_x = A \cdot dx = \bar{r}_x \cdot d\phi_x \quad \rightarrow \quad ds_x = A \cdot dx = r_x \cdot d\phi_x$$

$$ds_y = B \cdot dy = \bar{r}_y \cdot d\phi_y \quad \rightarrow \quad ds_y = B \cdot dy = r_y \cdot d\phi_y$$

$$\frac{1}{\bar{r}_x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_x} = \frac{L}{A^2}$$

$$\frac{1}{\bar{r}_y} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_y} = \frac{N}{B^2}$$

$$\frac{1}{\bar{r}_{xy}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r_{xy}} \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho_{xy}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho_{xy}}$$

$$d\bar{s}^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2 - 2AB dx dy \cos\theta \quad \rightarrow \quad ds^2 = A^2 dx^2 + B^2 dy^2$$

$$A = ds_x \cdot ds_y = AB dx dy \sin\theta \rightarrow \quad A = AB dx dy$$

$$\theta \neq 90^\circ \quad \rightarrow \quad \theta = 90^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{C^2}{AB} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \rightarrow \quad \cos\theta = 0, \quad F = 0$$

-Bir eksen takımı eşlenikse ,  $r_{xy} = 0$  ve  $M = 0$

-Bir eksen takımı ortogonale ,  $\theta = 90^\circ$  ve  $F = 0$

-Bir eksen takımı ortogonal ve eşlenikse , eksenler asal eksen olur ve  $r_{xy} = r_{yx} = 0$ ,  $\theta = 90^\circ$   
 $F = M = 0$  olur.

Şimdi eğriliklerden yararlanarak çok genel ve yüzey tipinin belirlenmesinde kullanılan tarifleri ve bunlara bağlı olarak ifade edilen bazı kabuk tiplerini verelim.

### 3.1.6 Toplam ve ortalama eğrilikler ve yüzey tipleri

#### 3.1.6.1 Toplam eğrilik, Gauss eğriliği

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (3.31)$$

### 3.1.6.2 Ortalama eğrilik

$$\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \quad (3.32)$$

olarak tarif edilir.

### 3.1.6.3 Yüzey tip ve tarifleri

Yüzey tipini belirtmek için yukarıdaki tariflerden yararlanılır. Şöyle ki, (M) noktasındaki

1- Toplam eğrilik pozitif ise yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ise, yüzey **eliptik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0 \quad (3.33)$$

2- Toplam eğrilik negatif ise yani eğrilik yarıçapları farklı işaretli ise, yüzey **hiperbolik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} < 0 \quad (3.34)$$

3- Toplam eğrilik pozitif yani eğrilik yarıçapları aynı işaretli ve eşit ise, yüzey **küresel** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} > 0, \quad r_x = r_y \quad (3.35)$$

4- Toplam eğrilik sıfır yani asal eğriliklerden biri sıfırsa, yüzey **parabolik** adını alır.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_y \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{r_y} = 0 \quad (3.36)$$

5- Toplam eğrilik yaklaşık sıfır ise, yüzey **basık** (kabuk) adını alır. Bu durumda eğrilik yarıçapları çok büyüktür.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} \cong 0, \quad r_x \text{ ve } r_y \gg 0 \quad (3.37)$$

6- Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenini boyunca sabit ise yüzey **silindirik** adını alır. Yani bir doğrultuya paralel kalarak, verilen bir uzay eğrisine değen bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye silindirik yüzey denir.

Uzay eğrisine silindirik yüzeyin doğrultması, doğruya da silindirik yüzeyin ana doğrusu denir.

$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x = \infty, \quad r_y = st \quad (3.38)$$

7- Toplam eğrilik sıfır ve eğrilik yarıçaplarından biri sonsuz diğeri dönme eksenine göre değişken ise yüzey **konik** adını alır.

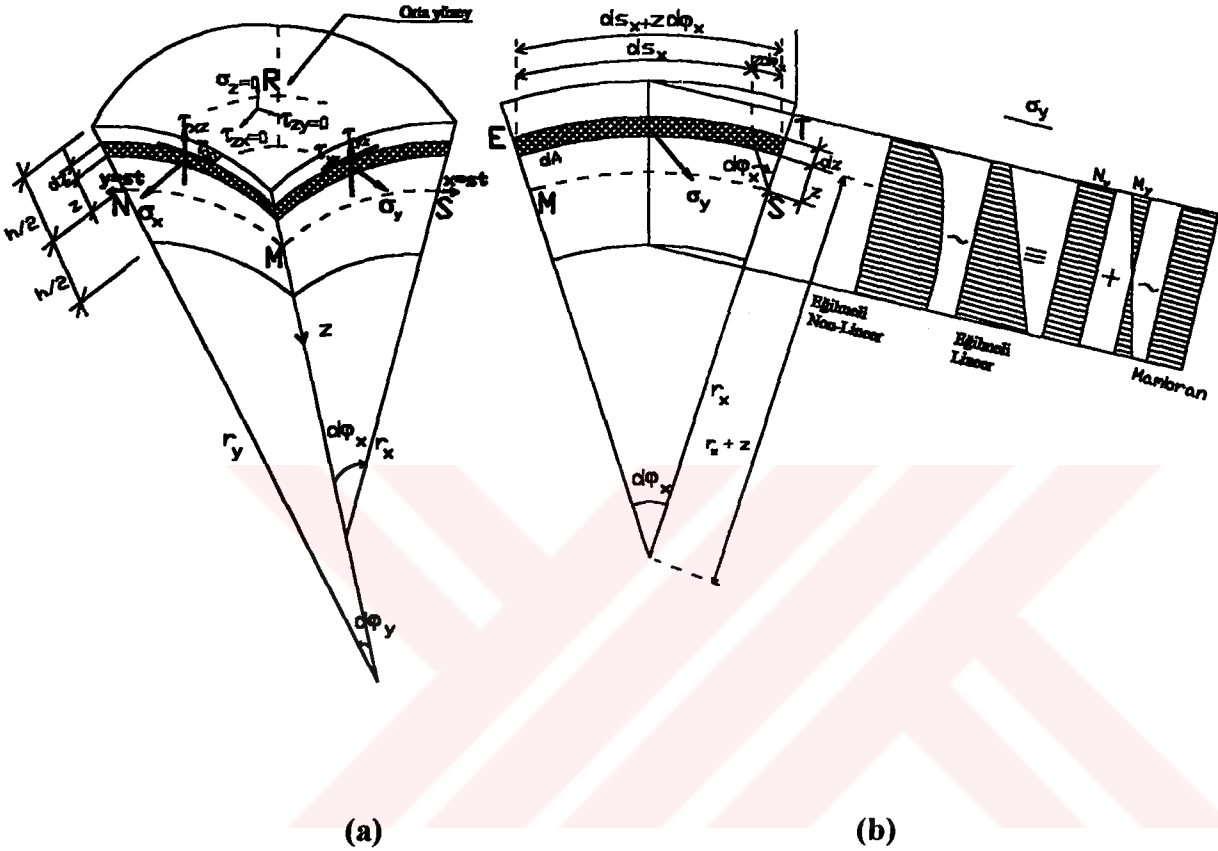
$$\frac{1}{r_x \cdot r_y} = 0, \quad r_x = \infty, \quad r_y \neq st \quad (3.39)$$

8- Verilen bir düzleme paralel kalarak ve verilen bir doğru ile verilen bir uzay eğrisine değen bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye **konoid** yüzey denir.

9- Verilen bir eğri yayının, sabit bir doğru etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeye **dönel yüzey** denir.

### 3.2 Kabuk Genel Denklemleri

#### 3.2.1 Genel yüzey gerilme hali ve kesit tesirleri



Şekil 3.5 a,b

Yüzeyin (MNRS) dört kenarlı elemanının  $\widehat{MS}$  ve  $\widehat{MN}$  kenarlarında yani (x) ve (y) eğrisel koordinatlarının bulunduğu, kenarlarda sırasıyla (Şekil 3.5 a)

$$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$$

$$\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$$

gerilmeleri oluşur. Bu gerilmelerin büyüklüğü orta yüzeye olan (z) uzaklıklarına bağlıdır. Bilindiği gibi aslında üç boyutlu yüzeyde üç eksenli gerilme hali mevcuttur. Kabuk kalınlığının, eğrilik yarıçaplarına oranla küçük olduğu kabulünden, ( $z = st$ ) kesitleri içinde normal  $\sigma_z$  gerilmelerinin sıfır olduğu varsayılır, ( $\sigma_z = 0$ ). Yine ince elastik klasik kabuk kabullerinden hatırlanacağı gibi ( $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ) alınır. Eksenler ortogonal yani  $x = st$  ve

y = st birbirlerine dik olduklarında  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  olacağından bağımsız gerilmelerin sayısı beşe iner. Kabukta kesme etkisi terk edilirse  $\tau_{xz}$  ve  $\tau_{yz}$  gerilmelerini de sıfır almak gerekir. Bu durumda bağımsız üç gerilme  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  kalır. Mambran halde ise bu üç bağımsız gerilmenin (Şekil 3.5 b) den de görüldüğü gibi kabuk kalınlığı boyunca üniform yayılı olduğu kabul edilir.

Üç boyutlu genel gerilme halinden, üç bağımsız gerilme haline geçişi matris formda ifade edelim.

### 1- Gerilme hali:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |               |             |               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|-------------|---------------|
| Genel Kabuk                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Kaymalı Kabuk | İnce Kabuk, | Mambran Kabuk |
| $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ |               |             |               |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |               |             | Simetrik      |

### 2- Birim boya düşen kesit tesirleri

Kabukta kesit tesirlerini birim boya düşen miktarlar olarak belirleriz. Örnek olarak, birim boya düşen  $N_y$  normal kuvvetin değerini bulalım. Orta eksen (z) mesafedeki yay uzunluğu (Şekil 3.5 b) den,

$$\widehat{ET} = ds_x + z.d\phi_x = ds_x + \frac{ds_x}{r_x} \cdot z = ds_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) \quad (3.40)$$

olur. Burada

$$ds_x = d\phi_x \cdot r_x, \quad d\phi_x = \frac{ds_x}{r_x}$$

olup, taralı kesitteki normal  $\sigma_y$  kesit tesiri denklem (3.40) den

$$\sigma_y \cdot dA = \sigma_y \cdot dz \cdot ds_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right), \quad dA = dz \cdot ds_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right)$$

olur. Şimdi birim boya düşen ve (h) kalınlığı boyunca yayılı gerilmenin toplamını veren kesit tesiri,

$$N_y \cdot ds_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot ds_x \cdot \frac{r_x + z}{r_x} dz \rightarrow 1 \cdot N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (3.41)$$

olur. Diğer kesit tesirleri de benzer şekilde bulunur. Burada şu hususa dikkat etmek gerekir. Eğer (z) eksenini kabuk dış yüzüne doğru pozitifken (dA) taralı alanı orta yüzeyin altında alınırsa (Şekil 3.5 b) ve denklem (3.40)'da (-z) olacağından (3.42)

denklemlerinde  $\left(1 - \frac{z}{r}\right)$  olur.

$$\begin{aligned} \text{Normal Kuvvetler, } N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz, \\ \text{Kayma Kuvvetleri, } N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, & N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\text{Eğilme Momentleri, } M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz,$$

$$\text{Burulma Momentleri, } M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz,$$

$$\text{Kesme Kuvvetleri, } V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz, \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz,$$

Yüzey elemanındaki (Şekil 3.5 b) gerilme yayılımını kısaca inceleyelim.

### 3- Non-Linear gerilme hali

Kabuk elemanının yan yüzeylerinin genişlikleri ( $z$ ) koordinatlarına bağlı olduğuna göre, orta yüzeye paralel tesir eden ve yapılan kabullere göre gerilme bileşenleri kabuk kalınlığınca lineer olarak dağılamaz. Gerilme dağılışı doğrusal değil eğriseldir, (Şekil-3.5 b) deki ilk gerilme diyagramı.

### 4- Linear gerilme hali

Ancak kabuk kalınlığı ve ( $z$ ), eğrilik yarıçaplarına göre çok küçük olduklarında  $\frac{z}{r_x}$  ve  $\frac{z}{r_y}$  terimlerinin tesiri çok az olur ve birin yanında terk edilebilir.

Kesit kuvvet ve momentlerinden gerilmelerin hesaplanmasında , kesit yüzlerini dik açılı ve normal gerilmelerle, orta yüzeye paralel tesir eden kayma gerilmelerinin kabuk kalınlığınca lineer yayılı olduğunu kabul etmek mümkündür. Görüldüğü gibi,  $r_x \neq r_y$  ise  $N_{xy} \neq N_{yx}$  ve  $M_{xy} \neq M_{yx}$  dir. Ancak  $1 + \frac{z}{r} \cong 1$  kabulü yapıldığında ya da  $r_x = r_y$  olduğunda,

$N_{xy} = N_{yx}$  ve  $M_{xy} = M_{yx}$  olur. Gene  $x = st$  ve  $y = st$  ortogonal ise  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  olur, çünkü  $x = st$  ve  $y = st$  de yüzler birbirine diktir.  $V_x$  ve  $V_y$  doğru eksenli çubuklardaki kesme kuvvetine benzer.

$N_{xy}$  ,  $N_{yx}$  ,  $M_{xy}$  ,  $M_{yx}$  nin (3.41) deki değerleri yerlerine konduğunda aşağıdaki  $\sum M_z = 0$  denge bağıntısının özdeş olarak sağlandığı görülür.

$$\frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} - V_{xy} + V_{yx} \cong 0 \quad (3.42)$$

### 5- Mambran gerilme hali

Bazı özel hallerde, yük ve mesnetlenme durumlarına bağlı olarak gerilmelerin ekstrem değerleri yani maksimum ile minimum arasında çok az bir fark olur. Öyle ki  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}=\tau_{yx}$  kabuk kalınlığınca üniform dağılı kabul edilebilir. Yani gerilmeler (z) den bağımsız olurlar. Bu durumda kesit tesirlerinin yukarıdaki toplamaları şu sonuçları verir.

$$N_x = \sigma_x \cdot h, \quad N_y = \sigma_y \cdot h, \quad N_{xy} = N_{yx} = \tau_{xy} \cdot h$$

$$M_x = -\sigma_x \cdot \frac{h^3}{12r_y}, \quad M_y = -\sigma_y \cdot \frac{h^3}{12r_x} \quad (3.43)$$

$$M_{xy} = -\tau_{xy} \cdot \frac{h^3}{12r_y}, \quad M_{yx} = -\tau_{yx} \cdot \frac{h^3}{12r_x}$$

Burada momentler şöyle de yazılabilir. Örneğin,

$$M_x = -\sigma_x \cdot \frac{h \cdot h \cdot h}{12r_y}, \quad N_x = \sigma_x \cdot h, \quad M_x = -N_x \cdot \frac{h \cdot h}{12r_y} \quad (3.44)$$

$$e_x = h \cdot \frac{h}{12r_y}, \quad M_x = -N_x \cdot e_x$$

Kabullerinden kabuk kalınlığının eğrilik yarıçapına göre çok küçük olduğu ve yukarıda  $N_x$  kuvvetinin  $\frac{h}{12r_y}$  oranında azaldığı görülmektedir. Bu oran (1/240) altında olduğundan eksantrisite pratik olarak sıfır alınabilir.

$$M_x = -N_x \cdot e_x, \quad e_x = 0, \quad M_x \cong 0 \quad (3.45)$$

olur. Benzer şekilde,

$$M_y = M_{xy} = M_{yx} = M_x = 0$$

olur. Denge denklemleri gösterir ki eğer momentler sıfır ise,

$$V_x = V_y = 0$$

olur. Böylece kabuk kalınlığı boyunca üniform gerilme yayılımı elde edilebilir. Bu durumda kabukta yalnızca  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy} = N_{yx}$  kesit tesirleri oluşur. Bu da kabuğun mambran halini gösterir. Sonuçta kabuğun eğilmeden bağımsız olan bu gerilme haline, mambran gerilme hali denir. Şekil 3.5 b deki son gerilme diyagramıdır.

### 3.2.2 Ortogonal eğrisel koordinatlarda, orta yüzeyin şekil değiştirme bileşenleri

1- Birim uzama şekil değiştirme bileşenleri

$$\epsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} v + \frac{w}{r_x} = \frac{\partial u}{\partial s_x} + \frac{v}{\rho_x} + \frac{w}{r_x} \quad (3.46)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u + \frac{w}{r_y} = \frac{\partial v}{\partial s_y} + \frac{u}{\rho_y} + \frac{w}{r_y}$$

2- Birim kayma şekil değiştirme bileşenleri

$$\gamma_{xy} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{A} \right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial s_y} + \frac{\partial v}{\partial s_x} - \frac{u}{\rho_x} - \frac{v}{\rho_y} \quad (3.47)$$

3- Koordinat eğrilerine teğet doğruların eğimlerinin değişimi, yani dönmeleri,

$$\beta_x = \frac{u}{r_x} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u}{r_x} + \frac{\partial w}{\partial s_x}$$

$$\beta_y = \frac{v}{r_y} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{v}{r_y} + \frac{\partial w}{\partial s_y} \quad (3.48)$$

#### 4- Normal eğrilik değişimi

$$k_x = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right)$$

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial s_x} + \frac{\beta_y}{\rho_x} = \frac{\partial \beta_x}{A \partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\beta_y}{AB}$$

$$k_y = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{B \partial y} + \frac{v}{r_y} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{A \partial x} + \frac{u}{r_x} \right)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial s_y} + \frac{\beta_x}{\rho_y} = \frac{\partial \beta_y}{B \partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\beta_x}{AB}$$
(3.49)

#### 5- Burulma eğriliklerinin değişimi

$$k_{xy} = \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{r_x} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} u \right) + \frac{1}{r_y} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} v \right)$$

$$k_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_y}{A \partial x} + \frac{\beta_x}{B \partial y} - \left( \frac{\partial A}{\partial y} \beta_x + \frac{\partial B}{\partial x} \beta_y \right) \frac{1}{AB} \right]$$
(3.50)

6- Yüzeyin orta yüzeyden (z) mesafedeki yerinde orta yüzey şekil değiştirme bileşenleri cinsinden deformasyon ifadeleri, (Şekil 3.5).

Yukarıda verilen deformasyon bileşenleri hep orta yüzeyin şekil değiştirme bileşenleri idi. Kabuk kalınlığında orta yüzeyin dışında bir (z) mesafesindeki noktada deformasyonlar aşağıda orta yüzeyin deformasyonları cinsinden verilmiştir.

$$\epsilon_x^{(z)} = \frac{\epsilon_x + z k_x}{1 + \frac{z}{r_x}} \approx \epsilon_x + z \left( k_x + \frac{\epsilon_x}{r_x} \right)$$
(3.51)

$$\epsilon_y^{(z)} = \frac{\epsilon_y + z k_y}{1 + \frac{z}{r_y}} \approx \epsilon_y + z \left( k_y + \frac{\epsilon_y}{r_y} \right)$$

$$\gamma_{xy}^{(z)} = \frac{\gamma_{xy} \left( 1 + \frac{z^2}{r_x r_y} \right) + z k_{xy} \left[ 2 + z \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \right]}{\left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right)} \approx \gamma_{xy} + z \left[ 2k_{xy} + \left( \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \right) \gamma_{xy} \right] \quad (3.52)$$

Genel dönel kabuk non-lineer denge denklemlerinden özel bir durum olarak

$$A = r_\varphi, \quad B = r_0 = r = r_\theta \cdot \sin \theta$$

elde edilebilir.

### 3.2.3 Kabuk elastisite bağıntıları

Genel bir yüzeyde elastisite bağıntıları aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$N_x = C (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

$$N_y = C (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$N_{xy} = C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}$$

$$M_x = D (k_x + \nu k_y)$$

$$M_y = D (k_y + \nu k_x)$$

$$M_{xy} = D (1 - \nu) k_{xy}$$

(3.53)

Burada şekil değiştirme bileşenleri, **ortogonal eğrisel koordinatlarda kesit zorlarının non-lineer formda** yer değiştirmeler cinsinden ifadeleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$N_x = C [(e_x + \beta_x^2) + \nu(e_y + \beta_y^2)]$$

$$N_y = C [(e_y + \beta_y^2) + \nu(e_x + \beta_x^2)]$$

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= C \frac{1-\nu}{2} (e_{xy} + \beta_x \beta_y + \beta_y \beta_x) \\
M_x &= D \left[ \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \cdot A + \frac{\partial A \beta_y}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial \beta}{\partial x} \beta_x \right) \right] \\
M_y &= D \left[ \left( \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \beta_x \right) + \nu \left( \frac{1}{A} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \beta_y \right) \right] \\
M_{xy} &= D \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Burada C uzama, D eğilme rijitliğidir. h ise yüzeyin et kalınlığıdır.

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.55}$$

### 3.2.4 Genel yüzey denge denklemleri

#### 3.2.4.1 Genel eğrisel (x,y) koordinatlarında denge denklemleri

$$\begin{aligned}
\sum x = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{yx} A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{\bar{r}_x} - \frac{V_y}{\bar{r}_{xy}} + p_x &= 0 \\
\sum y = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_y A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{\bar{r}_y} - \frac{V_x}{\bar{r}_{yx}} + p_y &= 0 \\
\sum z = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(V_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{\bar{r}_x} + \frac{N_y}{\bar{r}_y} + \frac{N_{xy}}{\bar{r}_{xy}} + \frac{N_{yx}}{\bar{r}_{yx}} + p_z &= 0 \\
\sum M_x = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} + \frac{\partial(M_{yx} A)}{\partial y} \right] - V_x &= 0
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\sum M_y = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} + \frac{\partial(M_{xy} B)}{\partial x} \right] - V_y = 0$$

$$\sum M_z = 0 \dots \frac{M_x}{\bar{r}_{xy}} - \frac{M_y}{\bar{r}_{yx}} + \frac{M_{yx}}{\bar{r}_y} - \frac{M_{xy}}{\bar{r}_x} + N_{xy} - N_{yx} = 0$$

### 3.2.4.2 Ortogonal asal eğrisel (x,y) koordinatlarında denge denklemleri

Burada, (x,y) eğrisel koordinatlar sistemi ortogonal ve eşlenik olduğundan  $\bar{r}_x, \bar{r}_y$  ler, asal eğrilik yarıçaplarına dönüşür ve artık  $r_x, r_y$  şeklinde gösterilir.

$$\sum x = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{xy} A)}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] - \frac{V_x}{r_x} + p_x = 0$$

$$\sum y = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(N_y A)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{xy} B)}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{yx} \right] - \frac{V_y}{r_y} + p_y = 0$$

$$\sum z = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(V_x B)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y A)}{\partial y} \right] + \frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0 \quad (3.57)$$

$$\sum M_x = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} + \frac{\partial(M_{yx} A)}{\partial y} \right] - V_x = 0$$

$$\sum M_y = 0 \dots \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(M_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial B}{\partial x} M_{yx} + \frac{\partial(M_{xy} B)}{\partial x} \right] - V_y = 0$$

$$\sum M_z = 0 \dots \frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} + N_{xy} - N_{yx} = 0$$

Yukarıdaki (3.57) un 6. Denkleminin bir özdeşlik olduğu dolayısıyla bağımsız bir ifade olmadığı görülür. Çünkü  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  ve

$$\frac{M_{xy}}{r_x} - \frac{M_{yx}}{r_y} + N_{yx} - N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \left[ \frac{z}{r_x} \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right) - \frac{z}{r_y} \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) - \left( 1 + \frac{z}{r_y} \right) + \left( 1 + \frac{z}{r_x} \right) \right] dz \equiv 0$$

olur. O halde elimizde beş bağımsız denkleme karşı bilinmeyen kesit tesiri olduğu görülür ( $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, V_x, V_y$ ). Dolayısı ile problem hiperstatiktir. Böylece kabuk problemlerinde kabuk deformasyonlarının da Kinematik bağıntıların incelenmesi zorunluluğunun nedeni ortaya çıkar.

### 3.2.4.3 Genel eğrisel koordinatlarda lineer mambran denge denklemleri

Mambran halde eğilme ve burulma momentleri terk edilir.

$$M_x = M_y = M_{xy} = M_{yx} = 0$$

Diğer taraftan (3.56) denklemlerinin 4,5 ve 6. larından

$$V_x = V_y = 0 \quad N_{xy} = N_{yx}$$

olur. Bu durumda denge denklemleri üçe iner.

$$\frac{\partial(N_x B)}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} N_y + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} + \frac{\partial(N_{xy} A)}{\partial y} + AB p_x = 0$$

(3.58)

$$\frac{\partial(N_y A)}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x + \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial(N_{xy} B)}{\partial x} + AB p_y = 0$$

$$\frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0$$

### 3.2.4.4 Ortogonal eğrisel koordinatlarda membran denge denklemleri

Ortogonal eğrisel koordinatlarda (3.58) denklemlerinde koordinatlar asal eksenler olduğundan, yalnızca  $\bar{r}_x = r_x$  ve  $\bar{r}_y = r_y$  olur ve yalnızca üçüncü denklem değişir.

$$\frac{N_x}{r_x} + \frac{N_y}{r_y} + p_z = 0$$

Diğer iki denklem aynıdır.

Mambran halde üç bağımsız denge denklemine karşın, üç adet bilinmeyen kesit tesiri ( $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ) olduğundan, problem izostatiktir.

Özel kabuk tiplerinde (x,y) eğrisel koordinatları yerine uygun koordinat takımları seçilerek bu denklemler daha basit formda yazılabilirler. Bunlar ileriki paragraflarda verilmiştir.

### İzotrop kabukların bünye denklemleri

İnce cidarlı, h kalınlıklı, izotrop kabuğun kesit tesiri-şekil değiştirme bağıntıları  $\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}$ , açık formda,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

olur. Buradan, izotrop hal için,

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \nu C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu}{2}C & 0 & 0 & 0 \\ & & & D & \nu D & 0 \\ & & & & D & 0 \\ & & & & & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

olur. Burada,

$$C = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.61)$$

ya da,

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, & C_{44} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ C_{12} &= \nu \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, & C_{45} &= \nu \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ C_{22} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}, & C_{55} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$C_{33} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad C_{66} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}$$

olur. [D] matrisi

$$[D] = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & 0 & \\ & & \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & 0 & \\ & & \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right| \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

şeklinde yazılabilir.

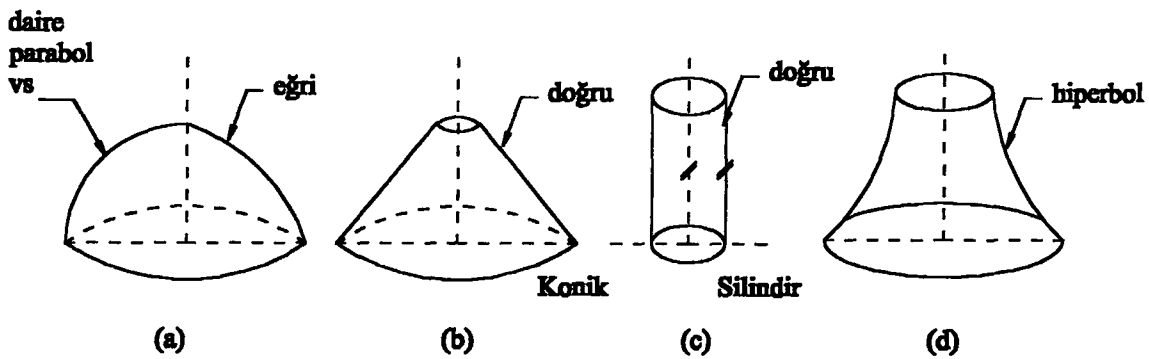
## 4. DÖNEL KABUK

### 4.1 Genel Dönel Kabuklar

#### 4.1.1 Giriş ve tanımlamalar

Genel yüzeylerin parametrik denklemlerinden hareketle, genel dönel yüzey denklemlerinin elde edilmesini vereceğiz. Böylece önce Lamé parametrelerinin ve diğer dönel yüzey karakterlerini tayin ederek, genel ve özel dönel kabukların denge denklemlerini, stabilite denklemlerini, bünye denklemlerini, geometrik uygunluk denklemlerini (kinematik bağıntılarını), yüzey parametrik denklemlerini ve diğer özelliklerini belirleyeceğiz. Ayrıca dönel kabuk denklemlerini bir de dönel yüzeyin sonsuz küçük dört kenarlı elemanından hareketle çıkarılışını vereceğiz.

Dönel kabuklar, bir eksen etrafında herhangi bir eğrinin dönmesiyle oluşan yüzeylerdir. Örneğin bu eğri (meridyen), parabol ise dönel yüzey parabolik dönel kabuk, hiperbol ise hiperbolik dönel kabuk, daire ise küresel kabuk (kubbe) adını alır. Özel hal olarak bu eğri dönme eksenini kesen bir doğru ise konik kabuk, dönme eksenine paralel bir doğru ise silindirik kabuk adını alır (Şekil 4.1).

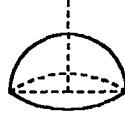


Şekil 4.1 a, b, c, d

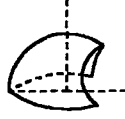
Dönel kabuklar tepelerinin açık ya da kapalı olmalarına ve yine dönme eksenini etrafında tam olup olmadıklarına göre tiplerine ayrılırlar. Böylece dönel kabuklar

## 1- Tepesi kapalı formda dönel kabuklar

### 1.1- Tam olan



### 1.2- Tam olmayan



## 2- Tepesi açık formda dönel kabuklar

### 2.1- Tam olan



### 2.2- Tam olmayan



olarak sınıflandırılabilirler.

Ayrıca dönel kabuklar meridyen eğrisinin tipine göre adlandırılıp sınıflandırılırlar. Hiperbolik dönel kabuk, parabolik dönel kabuk gibi.

Dönel kabukların oluşturulabilmesi için dönme eksenini etrafında döndürdüğümüz eğriye; meridyen eğrisi ve dönme eksenine dik düzlemlerin dönel kabuk yüzeyiyle oluşturduğu arakesit eğrisinde paralel eğrisi ya da paralel dairesi adı verilir. Birbirine çok yakın iki dönme eksenini ile iki paralel dairesinin sınırladığı MNRS dört kenarlısı kabuk denklemlerinin oluşturulmasında kullandığımız sonsuz küçük dönel yüzey elemanıdır.

### 4.1.2 Genel dönel kabukların yüzey denklemleri ve karakteristik değerleri

#### Genel dönel yüzeyin parametrik denklemleri

$$X = f_1(x, y)$$

$$Y = f_2(x, y)$$

$$Z = f_3(x, y)$$

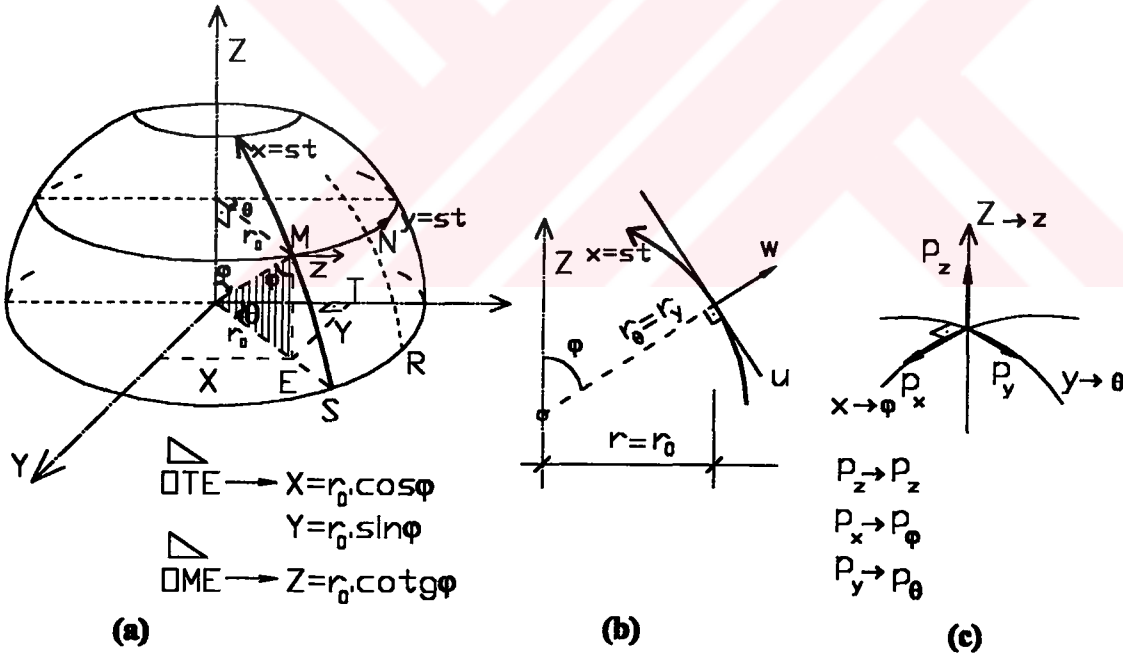
(4.1)

Genel yüzey parametrik denklemleri bu (4.1) bağıntılarıyla bilinmektedir. Şimdi genel yüzey kabuk için yeni eksen takımlarını  $(\phi, \theta, z)$  olarak seçip,  $(x, y)$  eğrisel parametreleri yerine koyalım. Böylece dönel yüzeyli kabuk denklemlerini daha basit ve anlaşılır formda

ifade etme olanağını elde ederiz. Artık uzayda dönel yüzey üzerindeki herhangi bir M noktasının  $X, Y, Z$  koordinatlarının  $(\varphi, \theta)$  parametrelerine (dönel yüzeyi oluşturan) bağlı olarak ifade edebiliriz.

Önce dönel yüzey genel parametrik denklemlerini ve sonra bu denklemlerden yararlanarak Lamé katsayılarını  $(A, B)$  ve ardından diğer karakteristik değerleri tayin edelim.

Yukarıda değindiğimiz gibi, genel dönel kabukta,  $z$  eksenine dik düzlemlerin dönel kabuk yüzeyini kestiği eğrilere, paralel eğrileri (elips, daire gibi),  $z$  eksenini içine alan düzlemlerin dönel yüzeyi kestiği arakesit eğrilerine de meridyen eğrileri (parabol, hiperbol, daire gibi) denir. Burada  $X, Y, Z$  hem genel eğrisel yüzeyin ve hem de genel dönel yüzeyin kartezyen koordinat sistemidir. Bu denklemler yüzeyin genel parametrik denklem takımı olup, değerleri yüzey tipine göre tayin edilir. Bu değerler aşağıda genel dönel yüzey için verilmiştir.



Şekil-4.2 a,b,c

Yine genel yüzeyin eğrisel koordinatları  $(x,y)$ , dönel yüzey halinde, dönel yüzey formuna en uygun olan,  $(\varphi, \theta)$  eğrisel koordinatlarına dönüştürülür. Öyle ki dönel yüzeyde, yüzeyin  $(x,y)$  eğrisel koordinatlarına karşı gelen ve paralel eğrisi  $(y)$ , meridyen eğrisi  $(x)$  yerine,



Şimdi kısaca genel eğrisel yüzey karakteristiklerine karşı gelen genel dönel yüzey karakteristiklerini verelim.

Çizelge 4.1 Genel ve dönel yüzey karakteristikleri

| Genel Yüzey        |   | Dönel Yüzey                                                                                                                          |                       |
|--------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| $X = f_1(x, y)$    | → | $X = r_0 \cdot \cos\theta$                                                                                                           | Parametrik Denklemler |
| $Y = f_2(x, y)$    | → | $Y = r_0 \cdot \sin\theta$                                                                                                           |                       |
| $Z = f_3(x, y)$    | → | $Z = r_0 \cdot \cos\varphi = r_0 \cdot \cotg\varphi$                                                                                 |                       |
| $z$                | → | $z$ dönme eksen                                                                                                                      | Asal Eksen takımıdır  |
| $x$                | → | $\varphi$ paralel eğrisi konumunu verir                                                                                              |                       |
| $y$                | → | $\theta$ meridyen eğrisi konumunu verir                                                                                              |                       |
| $r_x$              | → | $r_\varphi$                                                                                                                          |                       |
| $r_y$              | → | $r_\theta$                                                                                                                           |                       |
| $\rho_x$           | → | $\rho_\varphi \rightarrow \infty$                                                                                                    |                       |
| $\rho_y$           | → | $\rho_\theta$                                                                                                                        |                       |
| $d\omega_x$        | → | 0                                                                                                                                    |                       |
| $d\omega_y$        | → | $d\omega_y = d\theta \cdot \cos\varphi$                                                                                              |                       |
| $d\varphi_x$       | → | $d\varphi_x = d\varphi$                                                                                                              |                       |
| $d\varphi_y$       | → | $d\varphi_y = d\theta \cdot \sin\varphi$                                                                                             |                       |
| A                  | → | $r_\varphi$                                                                                                                          |                       |
| B                  | → | $r_0, [r_0 = r = r_\theta \cdot \sin\varphi, (dr/d\varphi) = r_\varphi \cdot \cos\varphi, dr = ds_\varphi \cdot \cos\varphi]$        |                       |
| C                  | → | $C = 0$                                                                                                                              |                       |
| $ds_x$             | → | $ds_\varphi = r_\varphi \cdot d\varphi, [ds_x = A \cdot dx = ds_\varphi = r_\varphi \cdot d\varphi \rightarrow A = r_\varphi]$       |                       |
| $ds_y$             | → | $ds_\theta = r_0 \cdot d\theta, [ds_y = B \cdot dy = r_\theta \cdot d\varphi_y = ds_\theta = r_0 \cdot d\theta \rightarrow B = r_0]$ |                       |
| $\frac{1}{r_x}$    | → | $\frac{1}{r_\varphi}$                                                                                                                |                       |
| $\frac{1}{r_y}$    | → | $\frac{1}{r_\theta} = \frac{\sin\varphi}{r}$                                                                                         |                       |
| $\frac{1}{\rho_x}$ | → | 0                                                                                                                                    |                       |

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{\rho_y} & \longrightarrow & \frac{1}{\rho_y} \\
p_z & \longrightarrow & p_z \\
p_x & \longrightarrow & p_\varphi \\
p_y & \longrightarrow & p_\theta
\end{array}$$

## 4.2 Genel Dönel Kabuk Denge ve Stabilite Denklemleri

Dönel yüzeyin paralel ve meridyen eğrileri  $(\theta, \varphi)$  ve eğrilik yarıçapları  $r_\theta$ ,  $r_\varphi$  ile, Şekil 4.3b den görüldüğü gibi , yalnızca  $(\varphi)$  nin fonksiyonu olan  $r$  değişkenleri şekil değiştirmiş kabuğun orta yüzeyinin biçimini karakterize eder. Orta yüzeyin deplasman bileşenleri  $u, w, v$  olup, genelde  $\varphi$  ve  $\theta$  nın her ikisini de içeren fonksiyonlardır.

### 4.2.1 Genel dönel kabuk denge denklemleri

Genel kabuk denklemlerinde (3.57) de, dönel kabukla ilgili Çizelge 4.1'deki değerler yerlerine konunca, dönel kabuk için aşağıdaki eğilmeli lineer denge denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum \varphi = 0, \quad & (rN_\varphi)_{,\varphi} + r_\varphi (N_{\theta\varphi})_{,\theta} - r_\varphi N_\theta \cos\varphi - rV_\varphi = -r.r_\varphi.p_\varphi \\
\sum \theta = 0, \quad & (rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_\varphi (N_\theta)_{,\theta} + r_\varphi N_{\theta\varphi} \cos\varphi - r_\varphi V_\theta \sin\varphi = -r.r_\varphi.p_\theta \\
\sum z = 0, \quad & r_\varphi N_\theta \sin\varphi + rN_\varphi + r_\varphi (V_\theta)_{,\theta} + (rV_\varphi)_{,\varphi} = r.r_\varphi.p_z \\
\sum M_\varphi = 0, \quad & (M_{\varphi.r})_{,\varphi} + (M_{\theta\varphi})_{,\theta}.r_\varphi - V_\varphi.r.r_\varphi - M_\theta.r_\varphi \cos\varphi = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Bu  $(\sum M_\varphi = 0)$  ifadesinde kaymalı terimi eşitliğin sağına koyalım,

$$(rM_\varphi)_{,\varphi} + r_\varphi (M_{\theta\varphi})_{,\theta} - r_\varphi M_\theta \cos\varphi = r.r_\varphi.V_\varphi$$

$$\sum M_{\theta} = 0, \quad (rM_{\theta\varphi})_{,\varphi} + r_{\varphi}(M_{\theta})_{,\theta} + r_{\varphi}M_{\theta\varphi}\cos\varphi = r.r_{\varphi}.V_{\theta}$$

$$\sum M_z = 0, \quad \frac{1}{r_{\varphi}}M_{\varphi\theta} - \frac{1}{r_{\theta}}M_{\theta\varphi} = N_{\varphi\theta} - N_{\theta\varphi}$$

Bu son denklem bağımsız değildir.

Yukarıdaki (4.18) denklemlerinde, 4. ve 5. Denklemlerden  $V_{\varphi}$  ve  $V_{\theta}$  bulunup, 3. denklemde yerlerine konarak beş denklem, üç denkleme indirgenebilir. Dönel kabuk karakteristik değerleri için aşağıdaki lineer denge denklem takımı doğrudan şu şekilde yazılabilir.

$$(rN_{\varphi})_{,\varphi} + (r_{\varphi}N_{\varphi\theta})_{,\theta} - rN_{\theta}\cos\varphi + r_{\varphi}N_{\varphi\theta} = -r.r_{\varphi}.p_{\varphi}$$

$$(r_{\varphi}N_{\theta})_{,\theta} + (rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} - r_{\varphi}N_{\varphi} + rN_{\varphi\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\theta}$$

(4.19)

$$\left[ \frac{1}{r_{\varphi}}(rM_{\varphi})_{,\varphi} \right]_{,\varphi} + \frac{r_{\varphi}}{r}M_{\varphi\theta} + 2 \left( M_{\varphi\theta,\varphi\theta} + \frac{r_{\varphi}}{r}M_{\varphi\theta,\theta}\cos\varphi + M_{\varphi\theta,\varphi} \right) +$$

$$\left[ \frac{r_{\varphi}}{r}M_{\theta,\theta\theta} - (M_{\theta}\cos\varphi)_{,\varphi} \right] - (rN_{\varphi} + r_{\varphi}N_{\theta}\sin\varphi) = -r.r_{\varphi}.p_z$$

Bu denklemlerin ilk ikisinde kesme kuvvetleri terk edilmiştir. Bu durumda kinematik bağıntılar

#### 4.2.2 Kinematik bağıntılar

Birim boyda uzama şekil değiştirme bileşenleri

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi}} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w \right)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r_{\theta}} (u \cot\varphi - w) + \frac{1}{r_{\theta}} \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Kayma şekil değiştirme bileşenleri

$$\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v \cdot \cos \varphi}{r_0}$$

Meridyen ve paralel teğetlerinin dönmeleri

$$\beta_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad \beta_\theta = \frac{1}{r_0} \left( u + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

Normal eğrilik değişimleri

$$k_\varphi = \frac{1}{r_\varphi} \beta_{\varphi,\varphi} \quad (4.20)$$

$$k_\theta = \frac{1}{r_\theta} \beta_{\theta,\theta} + \beta_\varphi \cdot \frac{\cot \varphi}{r_\theta}$$

Burulma eğrilik değişimi

$$k_{\varphi\theta} = \frac{1}{r_0} \beta_{\varphi,\theta} - \beta_\theta \cdot \frac{\cot \varphi}{r_0} + \frac{1}{r_\varphi} (\beta_\theta \cdot \sin \varphi)_{,\varphi}$$

#### 4.2.3 ÖZEL HAL, dönel simetrik yük etkisi durumu

Denklem (4.18) in özel bir hali olarak, dönel simetrik yük hali için, denge denklemleri verilecektir. Bu durumda,  $p_\theta = 0$  ve kayma kuvvetleri ile burulma momentleri sıfır olur.

Yani

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = V_\theta = 0, \quad p_\theta = 0$$

olmaktadır. Bu durumda,

$$(N_\varphi \cdot r_0)_{,\varphi} - N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \cos \varphi - V_\varphi \cdot r_\theta = -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_\varphi$$

$$\begin{aligned}
r_0 \cdot N_\varphi + N_\theta \cdot r_\varphi \cdot \sin\varphi + (r_0 \cdot V_\varphi)_{,\varphi} &= -r_0 \cdot r_\varphi \cdot p_z \\
(r_0 \cdot M_\varphi)_{,\varphi} - r_\varphi \cdot M_\theta \cdot \cos\varphi - r_0 \cdot r_\varphi \cdot V_\varphi &= 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olur. Bu üç denklem görüldüğü gibi beş bilinmeyen içermekte olup, problem yine hiperstatiktir. Çözümüne gidebilmek için kinematik bağıntılara ve elastisite denklemlerine ihtiyaç vardır.

#### 4.2.4 Özel halde, kinematik ve elastisite bağıntıları

##### Kinematik bağıntılar

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \left( \frac{du}{d\varphi} - w \right), & \beta_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \left( u - \frac{dw}{d\varphi} \right) \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} (u \cdot \cot\varphi - w), & k_\varphi &= \frac{1}{r_\varphi} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned} \tag{4.22a}$$

##### Elastisite bağıntıları

$$\begin{aligned}
N_\varphi &= D(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta), & M_\varphi &= -K \left( k_\varphi + \frac{\nu}{r} \beta_\varphi \cos\varphi \right) \\
N_\theta &= D(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi), & M_\theta &= -K \left( \frac{1}{r} \beta_\varphi \cos\varphi + \nu k_\varphi \right)
\end{aligned} \tag{4.22b}$$

Yine (4.18) den membran denklemleri elde edilebilir.

#### 4.2.5 Mambran denge denklemleri

$$M_{\varphi\theta} = M_{\varphi} = M_{\theta} = V_{\varphi} = V_{\theta} = 0 \text{ olur.} \quad (4.23)$$

##### 4.2.5.1 Simetrik olmayan yük hali

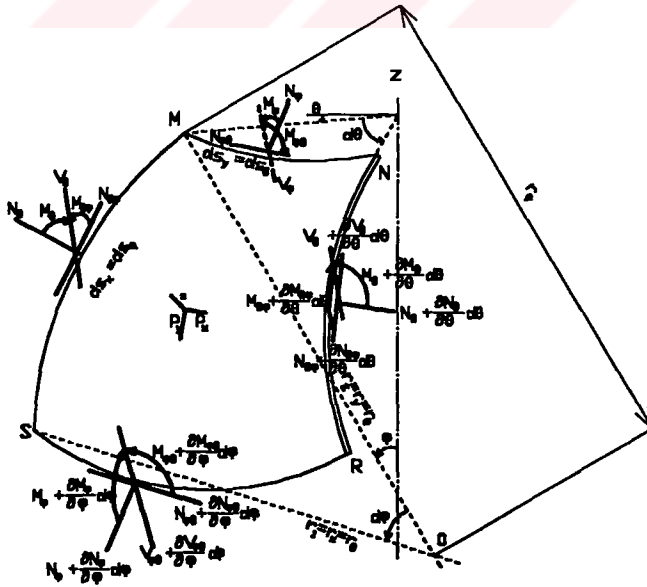
Bu denklemler (4.18) den (4.23) değerleri yerlerine konarak elde edilir.

$$\begin{aligned} r_{\varphi} \cdot N_{\theta\varphi,\theta} + (r_{\theta} \cdot N_{\varphi})_{,\varphi} - r_{\varphi} \cdot N_{\theta} \cdot \cos\varphi &= -r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\ r_{\varphi} \cdot N_{\theta,\theta} + (r_{\theta} \cdot N_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi} \cdot N_{\theta\varphi} \cdot \cos\varphi &= -r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\theta} \\ r_{\theta} \cdot N_{\varphi} + r_{\varphi} \cdot N_{\theta} &= -r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot p_z \end{aligned} \quad (4.24)$$

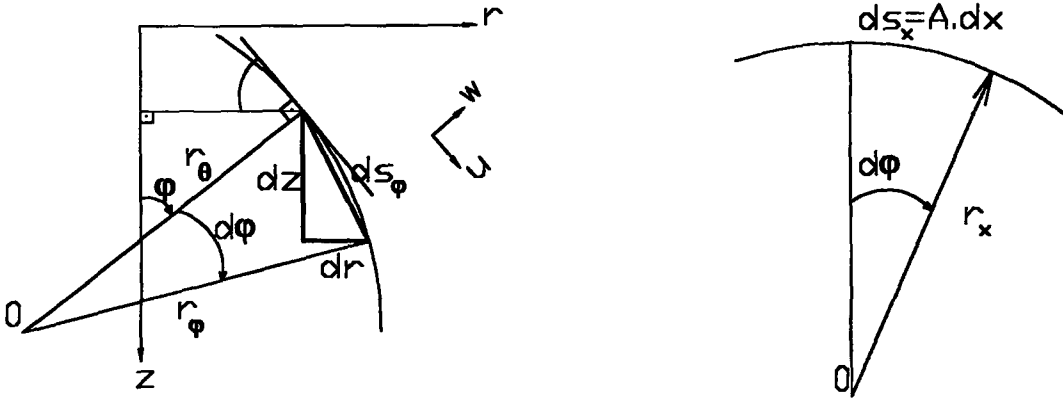
##### 4.2.5.2 Simetrik yük hali

Bu durumda  $p_{\theta} = 0$ ,  $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = 0$  olacağından,

$$\begin{aligned} (r_{\theta} \cdot N_{\varphi})_{,\varphi} - r_{\varphi} \cdot N_{\theta} \cdot \cos\varphi &= -r_{\theta} \cdot r_{\varphi} \cdot p_{\varphi} \\ \frac{N_{\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{r_{\theta}} &= -p_z \end{aligned} \quad (4.25)$$



Şekil 4.3 a



$$dr = ds_\phi \cdot \cos \phi$$

$$\frac{dr}{d\phi} = r_\phi \cdot \cos \phi = r_\phi$$

$$ds_\theta = r \cdot d\theta, \quad ds_\phi = r_\phi \cdot d\phi$$

$$A = r_\phi, \quad B = r, \quad r_x = r_\phi, \quad r_y = r_\theta$$

(b)

$$ds_x = r_x \cdot d\phi_x, \quad r_x \cdot d\phi_x = A \cdot dx, \quad d\phi_x = \frac{A}{r_x} dx$$

$$ds_x = r_x \cdot \frac{A}{r_x} dx = A \cdot dx \rightarrow ds_x = r_x \cdot dx$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + \dots \right]^{1/2} = r_x \\ B &= \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 + \dots \right]^{1/2} = r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &x, y, z \text{ ortogonal} \\ &r_{xy} = \infty, \quad \frac{1}{r_{xy}} = 0 \end{aligned}$$

(c)

Şekil 4.3 b,c

### 4.3 Dönel Kabukların (DMV) Yaklaşımıyla Non-Lineer Denge Denklemleri

Şimdi DMV yaklaşımıyla, komşu denge konumundan, Euler denklemlerini kullanarak dönel kabukta non-lineer ve lineer denge denklemlerini verelim.

#### 4.3.1 Dönel kabuğun non-lineer eğilmeli denge denklemleri, kinematik ve elastisite bağıntıları

Daha önceki bölümlerde de açıldığı gibi, genel kabuğun denklemleri DMV yaklaşımı ile ve toplam potansiyel enerji denklemlerinden teşkil edilebilirler. Bunun için potansiyel enerjinin stasyoner değer ilkesinin birinci kriterinin rutin olarak uygulanması yeterlidir.

Sonuçta varyasyon hesabının Euler Denklemleriyle verilen genel kabuğun non-lineer diferansiyel denge denklemleri elde edilir. Buradan dönel kabuk karakterleriyle, dönel kabuk non-lineer denge denklemlerini doğrudan elde edebiliriz. Bu istenirse yukarıda ve önceki bölümlerde izah edildiği gibi, komşu denge durumundan hareketle, (DMV) yaklaşımı çerçevesinde, kinematik bağıntılar kullanılarak ve toplam potansiyel enerjisi kullanılarak stasyoner değer ilkesi ile Euler denklemleri uyarılmasıyla dönel kabuk non-lineer denge denklemlerinin elde edilmesi şeklinde de olabilir. O halde (DMV) yaklaşımı ile dönel kabuk non-lineer denge denklemleri (4.12-18).

$$(rN_{\varphi})_{,\varphi} + r_{\varphi}N_{\varphi\theta,\theta} - r_{\varphi}N_{\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\varphi}$$

$$(rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi}N_{\theta,\theta} + r_{\varphi}N_{\varphi\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\theta}$$

$$\left[ \frac{1}{r_{\varphi}}(rM_{\varphi})_{,\varphi} \right]_{,\varphi} + 2 \left( M_{\varphi\theta,\varphi\theta} + \frac{r_{\varphi}}{r}M_{\varphi\theta,\theta}\cos\varphi \right) + \left[ \frac{r_{\varphi}}{r}M_{\theta,\theta\theta} - (M_{\theta}\cos\varphi)_{,\varphi} \right] - (rN_{\varphi} + r_{\varphi}N_{\theta}\sin\varphi) - \quad (4.26)$$

$$[r_{\theta}(N_{\varphi}\beta_{\varphi} + N_{\varphi\theta}\beta_{\theta})]_{,\varphi} + r_{\varphi}(\beta_{\theta}N_{\theta} + \beta_{\varphi}N_{\varphi\theta})_{,\theta} = -r.r_{\varphi}.p_z$$

olur. Koyu terimler non-lineerdir. Bu durumda kinematik bağıntıların ve elastisite bağıntılarının ifadelerinde dönel kabuk değerlerini yerlerine koyarak,

### Kinematik Bağıntılar

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon_{\varphi} + \frac{1}{2}\beta_{\varphi}^2, \quad k_{\varphi}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta} + \frac{1}{2}\beta_{\theta}^2, \quad k_{\theta}$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = e_{\varphi\theta} + \beta_{\varphi}\beta_{\theta}, \quad k_{\varphi\theta}$$

$$\begin{aligned}
k_{\varphi} &= \frac{\beta_{\varphi,\varphi}}{r_{\varphi}} \\
k_{\theta} &= \frac{\beta_{\theta,\theta}}{r_0} + \frac{r_{\varphi}}{r_0 \cdot r_{\varphi}} \beta_{\varphi} = \frac{\beta_{\theta,\theta}}{r_0} + \frac{r_{\varphi} \cdot \text{Cos}\varphi}{r_0 \cdot r_{\varphi}} \beta_{\varphi} = \frac{1}{r_0} (\beta_{\theta,\theta} + \beta_{\varphi} \cdot \text{Cos}\varphi) \\
2k_{\varphi\theta} &= \frac{\beta_{\theta,\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{\beta_{\varphi,\theta}}{r_0} - \frac{r_{0,\varphi} \beta_{\theta}}{r_0 \cdot r_{\varphi}} = \frac{\beta_{\theta,\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{\beta_{\varphi,\theta}}{r_0} - \frac{\beta_{\theta}}{r_0} \text{Cos}\varphi = \frac{r_0}{r_{\varphi}} \left( \frac{\beta_{\theta}}{r_0} \right)_{,\varphi} + \frac{\beta_{\varphi,\theta}}{r_0}
\end{aligned} \tag{4.27a}$$

### Elastisite bağıntıları

$$\begin{aligned}
N_{\varphi} &= C \cdot (\epsilon_{\varphi} + \nu \epsilon_{\theta}) & M_{\varphi} &= D \cdot (k_{\varphi} + \nu k_{\theta}) \\
N_{\theta} &= C \cdot (\epsilon_{\theta} + \nu \epsilon_{\varphi}) & M_{\theta} &= D \cdot (k_{\theta} + \nu k_{\varphi}) \\
N_{\varphi\theta} &= C \cdot \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\varphi\theta} & M_{\varphi\theta} &= D \cdot (1-\nu) k_{\varphi\theta}
\end{aligned} \tag{4.27.b}$$

olur.

Daha açık bir formda kesit tesirlerini verelim. Denklem (4.9)' dan

$$\begin{aligned}
N_{\theta} &= C \cdot \left[ (\epsilon_{\theta} + \beta_{\theta}^2) + \nu (\epsilon_{\varphi} + \beta_{\varphi}^2) \right] \\
N_{\varphi} &= C \cdot \left[ (\epsilon_{\varphi} + \beta_{\varphi}^2) + \nu (\epsilon_{\theta} + \beta_{\theta}^2) \right] \\
N_{\varphi\theta} &= C \frac{1-\nu}{2} (\epsilon_{\varphi\theta} + 2\beta_{\varphi}\beta_{\theta}) \\
M_{\varphi} &= D \left[ \frac{\beta_{\varphi,\varphi}}{r_{\varphi}} + \frac{\nu}{r} (\beta_{\theta,\theta} + \beta_{\varphi} \cdot \text{Cos}\varphi) \right] \\
M_{\theta} &= D \left[ \frac{1}{r} (\beta_{\theta,\theta} + \beta_{\varphi} \cdot \text{Cos}\varphi) + \frac{\nu}{r_{\varphi}} \beta_{\varphi,\varphi} \right] \\
M_{\varphi\theta} &= D \frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{r}{r_{\varphi}} \left( \frac{\beta_{\theta}}{r} \right)_{,\varphi} + \frac{\beta_{\varphi,\theta}}{r} \right]
\end{aligned} \tag{4.27.c}$$

Burada (4.19) den ve (4.8) den

$$e_{\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi}} (u_{,\varphi} + w)$$

$$e_{\theta} = \frac{1}{r} (v_{,\theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi)$$

$$e_{\varphi\theta} = \frac{r}{r_{\varphi}} \left( \frac{v}{r} \right)_{,\varphi} + \frac{u_{,\theta}}{r}$$

$$\beta_{\varphi} = -\frac{w_{,\varphi}}{r_{\varphi}}, \quad \beta_{\theta} = -\frac{w_{,\theta}}{r_0}$$

#### 4.3.2 ÖZEL HAL: Eksenel Simetrik Yük Durumunda Denge Denklemleri, Kinematik ve Elastisite Bağlıları

Dönel kabuğun non-lineer denklem takımı, eksenel dönel simetrik yük durumunda aşağıdaki yine non-lineer forma indirgenir. Bu durumda şekil değiştirmeler de eksenel simetriktir.

Non-lineer denge denklemleri

$$(rN_{\varphi})_{,\varphi} - r_{\varphi} N_{\theta} \cos \varphi = -r_{\varphi} p_{\varphi}$$

$$(rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi} N_{\varphi\theta} \cos \varphi = -r_{\varphi} p_{\theta}$$

$$\left[ \frac{1}{r_{\varphi}} (rM_{\varphi})_{,\varphi} \right] - (M_{\theta} \cos \varphi)_{,\varphi} - \quad (4.28)$$

$$(rN_{\varphi} + r_{\varphi} N_{\theta} \sin \varphi) - (rN_{\varphi} \beta_{\varphi})_{,\varphi} = -r_{\varphi} p_z$$

Burada koyu terim non-lineer terimdir. Bu durumda kinematik ve elastisite bağlantıları (4.6), (4.7.a), (4.7.b), (4.8) ve (4.11) den

#### Kinematik Bağlılar

$$\varepsilon_{\varphi} = e_{\varphi} + \frac{1}{2} \beta_{\varphi}^2$$

$$\varepsilon_{\theta} = e_{\theta}$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = e_{\varphi\theta}$$

$$e_{\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi}} \left( \frac{du}{d\varphi} + w \right)$$

$$e_{\theta} = \frac{1}{r} (u \cdot \cos\varphi + w \cdot \sin\varphi)$$

$$e_{\varphi\theta} = \frac{r}{r_{\varphi}} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{v}{r} \right)$$

$$\beta_{\varphi} = -\frac{1}{r_{\varphi}} \frac{dw}{d\varphi} \quad \beta_{\theta} = 0$$

$$k_{\varphi} = \frac{1}{r_{\varphi}} \frac{d\beta_{\varphi}}{d\varphi}$$

$$k_{\theta} = \frac{1}{r} \beta_{\varphi} \cos\varphi \quad (4.29)$$

### Elastisite Bağlılıları

$$N_{\varphi} = C.(\varepsilon_{\varphi} + \nu\varepsilon_{\theta})$$

$$N_{\theta} = C.(\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_{\varphi})$$

$$N_{\varphi\theta} = C. \frac{1-\nu}{2} \gamma_{\varphi\theta}$$

$$M_{\varphi} = D.(k_{\varphi} + \nu k_{\theta})$$

$$M_{\theta} = D.(k_{\theta} + \nu k_{\varphi})$$

olur. Şayet kabuğa burulma yükü etkimiyorsa (4.28) denklemlerinde  $N_{\varphi\theta} = 0$  olur.

### 4.3.3 Dönel kabuğun eğilmeli lineer denge denklemleri

(4.28) denklemlerindeki non-lineer terim terk edilerek, aşağıdaki lineer denge denklemleri elde edilir.

$$(rN_{\varphi})_{,\varphi} - r_{\varphi}N_{\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\varphi}$$

$$(rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi}N_{\varphi\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\theta} \quad (4.30.a)$$

$$\left[ \frac{1}{r_{\varphi}}(rM_{\varphi})_{,\varphi} \right]_{,\varphi} - (M_{\theta}\cos\varphi)_{,\varphi} - (rN_{\varphi} + r_{\varphi}N_{\theta}\sin\varphi) = -r.r_{\varphi}.p_z$$

Bu durumda elastisite ve bünye denklemleri (4.29) aynıdır. Yalnızca  $\varepsilon_{\varphi} = e_{\varphi} + \frac{1}{2}\beta_{\varphi}^2$  yerine yerine

$$\varepsilon_{\varphi} = e_{\varphi} \quad (4.30.b)$$

olacaktır.

### 4.3.4 Dönel kabuğun mambran lineer denge denklemleri

$$(rN_{\varphi})_{,\varphi} - r_{\varphi}N_{\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\varphi}$$

(4.31)

$$(rN_{\varphi\theta})_{,\varphi} + r_{\varphi}N_{\varphi\theta}\cos\varphi = -r.r_{\varphi}.p_{\theta}$$

$$rN_{\varphi} + r_{\varphi}N_{\theta}\sin\varphi = -r.r_{\varphi}.p_z$$

(4.31) Denklemleri statikçe belirlidir. Dönel simetrik yük halinde uygunluk denklemlerine gerek kalmadan çözüme gidilebilir.

## 5. SAYISAL ÇÖZÜM

### 5.1 Hiperbolik Soğutma Kulesinin Simetrik Yükleme Altında Sonlu Farklar Tekniğiyle Teorik Mambran Çözümü

Önceki etütlerimizde genel kabuk denklemleri, dönel kabuk genel denklemleri ve diğer bağıntı ve problem özellikleri verilmişti.

Şimdi dönel kabuğun paralel eğrisine teğet dış yük bileşeninin ( $p_\theta = 0$ ) sıfır olduğu, yani dönel kabuğun simetrik yüke maruz mambran çözümünü, sonlu farklar tekniği ile denge denklemlerini oluşturup, sayısal integrasyon yöntemiyle yapalım.

Dış yükün,  $p_\theta$  bileşeni sıfır olduğundan, kayma kuvvetleri  $N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = 0$  olur. Bu durumda dönel kabuğun (4.31) denge denklemleri aşağıdaki şekle indirgenir.

$$\frac{d(N_\varphi r_0)}{d\varphi} - N_\theta r_\varphi \cos \varphi + P_\varphi r_0 r_\varphi = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{N_\varphi}{r_\varphi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + p_z = 0$$

Burada  $N_\theta$ 'yi yok edersek,

$$N_\varphi = -\frac{1}{r_0 \sin \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r_0 \cdot r_\varphi (p_\varphi \sin \varphi + p_z \cos \varphi) d\varphi \quad (5.2)$$

$N_\varphi$  değerini elde ederiz. Burada ( $\varphi_0$ ) açısı kabuğun üst sınırını oluşturan meridyen eğrisinin sabit başlangıç sınır açısını gösterir. Kabuk tepesi kapalı ise yani kesik değilse ( $\varphi_0 = 0$ ) olacağı açıktır. Diğer taraftan  $N_\varphi$  meridyen aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz (Şekil 5.1 a,b).

$$N_\varphi = -\frac{P_\varphi}{2\pi r_0 \sin \varphi} \quad (5.3)$$

şimdi (5.1) denkleminin ikinci ifadesinden  $N_\theta$ 'yi yazalım.

$$N_\theta = -p_z r_\theta - N_\varphi \frac{r_\theta}{r_\varphi} \quad (5.4)$$

Diğer taraftan  $N_\theta$  ifadesini şu şekilde de ifade edebiliriz. Meridyene dik kuvvetlerinin yatay bileşeni  $T = N_\varphi \cdot \cos \varphi$  olur ki,  $ds_\varphi = r_\varphi \cdot d\varphi$  olduğu dikkate alınır, elemanın yatay denge denkleminde

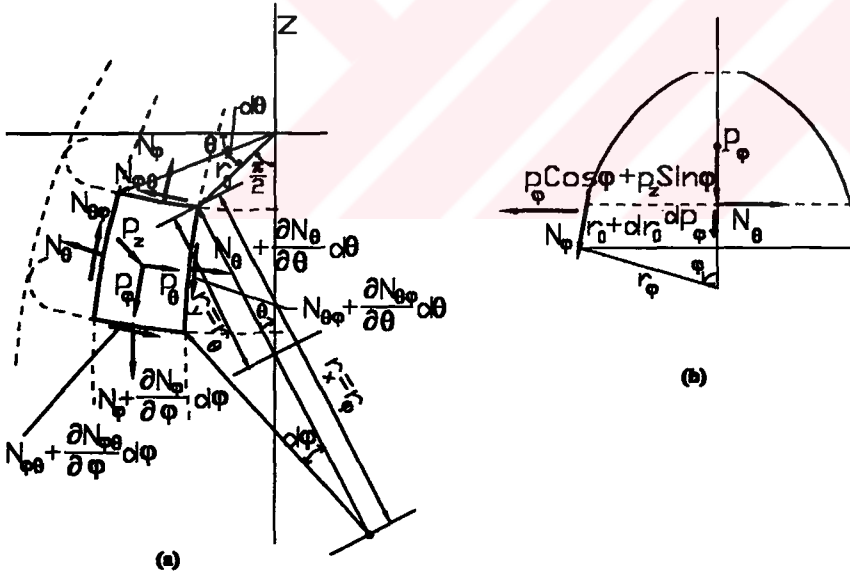
$$N_\theta \cdot ds_\varphi \cdot d\theta = N_\varphi \cdot \cos \varphi \cdot r_0 \cdot d\theta + p_\theta \cdot \cos \varphi \cdot ds_\varphi \cdot r_0 \cdot d\theta - p_z \cdot \sin \varphi \cdot ds_\varphi \cdot r_0 \cdot d\theta$$

$$N_\theta \cdot ds_\varphi = d(N_\varphi \cdot \cos \varphi \cdot r_0) + (p_\theta \cdot \cos \varphi - p_z \cdot \sin \varphi) r_0 \cdot ds_\varphi$$

olur. Burada  $N_\varphi$ 'nin (5.1) değeri yerine konursa, sonuçta  $N_\theta$

$$N_\theta = -\frac{1}{2\pi r_\varphi} \cdot \frac{d(P_\varphi \cdot \cot \varphi)}{d\varphi} + (p_y \cos \varphi - p_z \sin \varphi) r_0 \quad (5.5)$$

elde edilir (Şekil 5.1a,b).



Şekil 5.1a,b

Bu (5.5) denklemleri, bize gösteriyor ki membran teorisinde, dönme eksenine dik yatay dış yükler ( $N_\varphi$ ) kuvveti oluşturmazlar. Bu nedenle dış yükleri yatay ve düşey bileşenlere ayırmak avantaj sağlar.

Şimdi, iç kuvvetlerin genel ifadelerini belirttiğimiz gibi, bu kuvvetlerin başlangıç, sınır, değerlerini de bulmak gerekir. Bu başlangıç sınır değerlerini sıfır (0) indisi ile gösterelim. Bu durumda,

1- Kesik dönel kabuklarda, tepesi açık,

$$P_{\varphi,0} = 0 \dots\dots\dots N_{\varphi,0} = 0 \quad (5.6)$$

$$(5.1) \text{ den } \dots\dots\dots N_{\theta,0} = -p_{z,0} \cdot r_{\theta,0}$$

2- Kapalı dönel kabuklarda, tepesi kapalı kubbe formu,

$$(5.3) \text{ den } \dots\dots\dots P_{\varphi,0} = 0 \dots\dots\dots r_{0,0} \cdot \sin \varphi_0 = 0$$

Kabuk tepesinde asal eğrilik yarıçapları  $r_{\varphi,0} = r_{\theta,0}$  olacağından ve (5.1) den

$$N_{\varphi,0} = N_{\theta,0} = -\frac{1}{2} \cdot p_{z0} \cdot r_{\theta,0} \quad (5.7)$$

olur. Bu değer, (5.6) dekinin yarısıdır.

### Sonlu Farklar Tekniği Kullanarak Sayısal İntegrasyonla Kabuk İç Kuvvetleri

Bağımsız değişken olarak ( $\varphi$ ) açısını alalım.

$$f(\varphi) = r_0 \cdot r_{\varphi} \cdot (p_y \cdot \sin \varphi + p_z \cdot \cos \varphi) \quad (5.8)$$

dersek, (5.2) denklemini

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{r_0 \cdot \sin \varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi) \cdot d\varphi \quad (5.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda integral ifade

$$I_{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi) \cdot d\varphi \quad (5.10)$$

olup, sonuçta  $N_{\varphi}$  kesit tesirinin tayini bir nümerik integralin (5.10) çözümüne indirgenmiş olur.

Bu çözüm için, önce dönel kabuğu dönme eksenine dik paralel düzlemlerle dilimlere ayıralım. Her dilimi sınırlayan paralel ( $\varphi_i$ ) açısıyla belirlenebilir. Bu birleşim yerlerini

belirleyen paralellerini  $(0,1,2,...)$  diye numaralandıracağız. Artık  $f(\varphi)$  fonksiyonlarının, her birleşim paralelinde, değerlerini  $(f_0, f_1, f_2,...)$  bulabiliriz. Minimum hata, paralelleri belirleyen açılar arasındaki aralığın  $(\Delta\varphi)$  eşit olması halinde olur. Bu nedenle paralellerin pozisyonu öyle seçilir ki, düzenlenir ki, eğrilik merkezi açıları eşit olsun. Yani

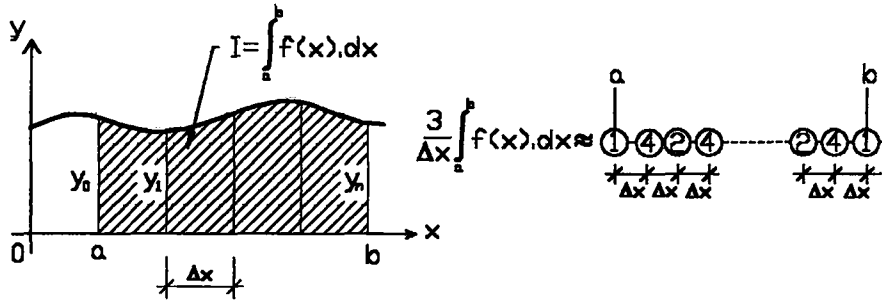
$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = ..... = \varphi_m - \varphi_{m-1}$$

Şimdi  $(m)$ 'ci birleşim yeri (paralel) için nisbi integral değerini, Simpson tarafından verilen integralin, sonlu farklarla ifadesi biçiminde belirleyelim. Simpson Metodu'nda, sistem  $(b-a)$  aralığında, çift sayıda ve birbirine eşit parçalara bölündüğünde, herhangi bir  $f(x)$  eğrisinin bölünmüş eğri parçalarının her biri bir parabol eğrisidir. Bu durumda  $f(x)$  eğrisinin nümerik integralini Simpson

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ..... + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

şeklinde verir (Şekil 5.2).



Şekil 5.2 Simpson kuralı

O halde,

1-  $(m)$  dilim sayısının çift olması halinde, yani integrali hesaplanacak aralık sayısının çift olması halinde (16 dilim gibi,...)

$$I_{\varphi,m} = \frac{\Delta\varphi}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{m-3} + 2f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m) \quad (5.11)$$

2- (m) tek için

$$I_{\varphi,m} = \frac{\Delta\varphi}{3} \left( f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{m-3} + \frac{3}{4}f_{m-2} + 4f_{m-1} + \frac{5}{4}f_m \right) \quad (5.12)$$

olur. Dikkat edilmesi gereken diğer bir durum da, numaralamanın kabuğun üst sınırından başlamasıdır.

Bazı hallerde son aralık önceki aralıklara eşit olmayabilir. Bu durumda (5.11-12) sayısal integral ifadeleri aşağıdaki şekilde olacaktır.

1- Eşit aralık sayısı çift ve farklı bir son aralık,  $\Delta\varphi_n = \alpha\Delta\varphi$  hali

$$I_{\varphi,n} = \frac{\Delta\varphi}{3} \left\{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \dots + 4f_{n-2} + f_{n-1} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \left[ -\alpha^2 f_{n-2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\alpha+1)(\alpha+3)f_{n-1} + (2\alpha+3)f_n \right] \right\} \quad (5.13)$$

2- Eşit aralık sayısı tek ve farklı bir son aralık,  $\Delta\varphi_n = \alpha\Delta\varphi$  hali

$$I_{\varphi,n} = \frac{\Delta\varphi}{3} \left\{ f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \dots + 4f_{n-3} + f_{n-2} + \frac{1+\alpha}{2} [\alpha(2-\alpha)f_{n-2} + \right. \\ \left. + (1+\alpha)^2 f_{n-1} + (2\alpha-1)f_n \right] \right\} \quad (5.14)$$

Sonuçta aranan iç kuvvetler, m paralelinde (birleşim yerinde) aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$N_{\varphi,m} = -\frac{I_{\varphi,m}}{r_{0,m} \cdot \sin \varphi_m}, \quad N_{\theta,m} = -p_{z,m} \cdot r_{\theta,m} - N_{\varphi,m} \cdot \frac{r_{\theta,m}}{r_{\varphi,m}} \quad (5.15)$$

Bazen ( $\varphi$ ) yerine başka bir bağımsız değişken koymak daha uygun olur. Örneğin çoğu kere bu z koordinatı olup dönele kabukta tabandan itibaren z kotlarıyla tariflenir. Bu durumda da yine (5.8 ile 5.15) bağıntıları geçerlidir. Kısaca bu ifadelerde ( $\varphi$ ) yerine (z) konabilir, ancak boyutlar uygun olarak dönüştürülmelidir.

Başka bir özel, fakat önemli durum da kabuğun, zati ağırlık halidir. Zati ağırlık etkisindeki kabuk hesabında öncelikle çözümü kolaylaştırıcı şu özellikleri bilmek yararlıdır.

Kabuğun birim alana düşen (yani paralel ve meridyen yaylarının birim uzunlukta olup sınırladığı alan) ağırlığı  $g = \gamma \cdot h$  olsun. Burada  $\gamma$  kabuk malzemesinin özgül ağırlığı,  $h$  kabuk kalınlığıdır.

Bu durumda dış yük bileşenleri

$$p_y = g \cdot \sin \varphi, \quad p_z = g \cdot \cos \varphi,$$

olur.  $f$  fonksiyonu (5.8) den

$$f(\varphi) = r_0 \cdot r_\varphi \cdot (g \cdot \sin^2 \varphi + g \cdot \cos^2 \varphi) = \gamma \cdot h \cdot r_0 \cdot r_\varphi \quad (5.16)$$

olur. Burada  $f(\varphi)$  ifadesinde  $(\varphi)$  yerine  $(z)$  bağımsız değişkenini koymak daha uygun olabilir.

$$r_0 = r_\theta \cdot \sin \varphi, \quad r_\varphi \cdot d\varphi = \frac{dz}{\sin \varphi}$$

Bağıntılarını göz önüne alarak

$$f(\varphi) \cdot d\varphi = \gamma \cdot h \cdot r_0 \cdot r_\varphi \cdot d\varphi = \gamma \cdot h \cdot r_\theta \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dz}{\sin \varphi}$$

$$f(\varphi) \cdot d\varphi = \gamma \cdot h \cdot r_\theta \cdot dz$$

$$f(\varphi) \cdot d\varphi = \gamma \cdot h \cdot r_\theta \cdot dz$$

olur.  $\gamma$  sabit ise,  $f$  fonksiyonu

$$f(z) = h \cdot r_\theta \quad (5.17)$$

şeklinde çok basit hale dönüşür.

Şimdi sonlu farklar tekniğiyle sayısal integrasyon yoluyla dönel bir kabuğun, membran teorisi çerçevesinde, nümerik çözümünü sistematik biçimde ve tablolaştırarak verelim.

## 5.2 Hiperbolik Soğutma Kulesinin, Zati Simetrik Yük Altında, Sonlu Farklar Tekniğinden Yararlanarak Sayısal İntegrasyonla Mambran Çözümü.

### Veriler:

$z = 0$  da ..... paralel dairesinin yarıçapı  $r_0 = 12,750$  m.

$z = +44$  m. de .... paralel dairesinin, hiperbolik kulenin en alt çemberinin yarıçapı

$$r_{0,i} = 22,320 \text{ m.}$$

Hiperbolik kulenin yüksekliği  $H = 50$  m. Bunun 6 m. si,  $z = 0$  çemberinin üstünde, 44 m. si altındadır.

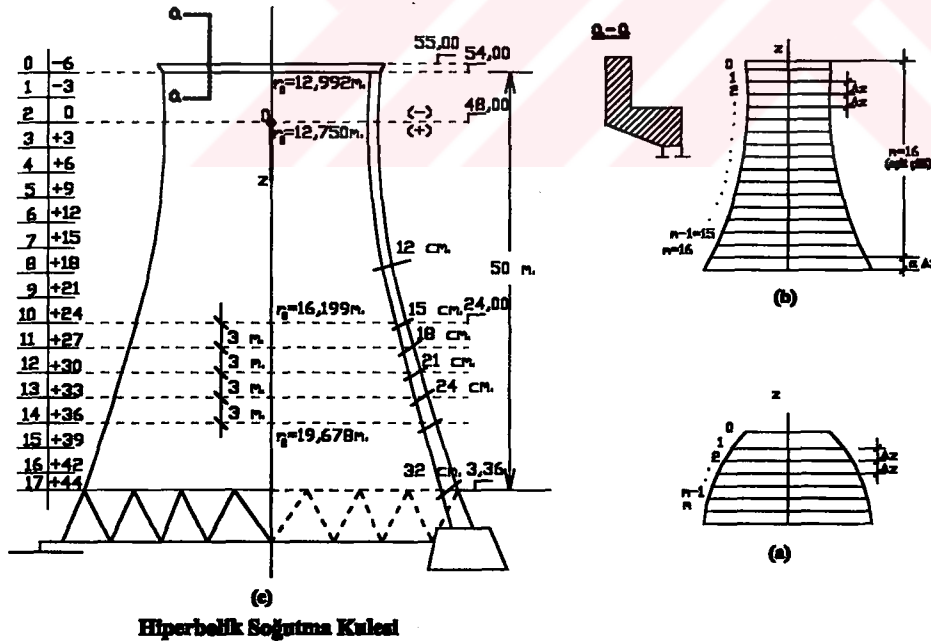
Hiperbolik kulenin kalınlığı, kabuk et kalınlığı, kabuğun en üst kenardan aşağı doğru 30 m. si  $h = 12$  cm. olacak şekilde lineer, doğrusal, artmaktadır.

Hiperbolik kabuğun malzemesi betonarme ve  $\gamma = 2,4 \text{ t/m}^3$  tür.

Yük, kabuk zati ağırlığıdır.

### İstenen:

Hiperbolik kabuğun, sonlu farklarla sayısal integrasyondan  $N_\varphi$ ,  $N_\theta$  kesit tesirlerinin bulunup, diyagramlarının çizimidir.



Şekil 5.3a,b,c

**Cözüm:****1-Hiperbol denklemleri**

Kartezyen koordinatlarda hiperbol meridyeninin denklemi

$$\frac{r_0^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

olup, burada b en büyük (alt çemberin) yarıçapını gösterir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$r_0 = r_{0,i} \text{ için } \dots\dots\dots z = z_i$$

diyerek

$$b = \frac{z_i}{\sqrt{\left(\frac{r_{0,i}}{a}\right)^2 - 1}}$$

(z) kotunun fonksiyonu olarak paralel dairesinin yarıçapı,

$$r_0 = r_{0,i} = a \sqrt{1 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanır. Hiperbol denkleminde

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dr_0} = \pm \frac{b}{a} \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 - a^2}} = \frac{r_0}{z} \operatorname{tg}^2 A$$

elde edilebilir. Burada  $\operatorname{tg} A = \frac{b}{a}$  dır. Bu da hiperbol meridyeninin asimptotlarının (0  $r_0$ ) eksenleriyle yaptıkları açıdır.

İşaret anlaşmamız ise, kabuğun alt yarısı için (yani z artı iken) pozitif, üst kısmı için (yani z eksi iken) negatiftir. Burada

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{z^2}{r_0^2 \cdot \operatorname{tg}^4 A} \right)}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\mp \sqrt{1 + \left( \frac{r_0^2 \cdot \operatorname{tg}^4 A}{z^2} \right)}} \quad (5.19)$$

olduğu açıktır. Bu formüllerden yararlanarak  $\cot \varphi$  ve  $\operatorname{tg} \varphi$  değerleri trigonometrik tablolardan kolayca bulunabilir.

Asal eğrilik yarıçapları

$$r_\varphi = - \frac{a \cdot \sin^2 A \cdot \cos A}{(\cos^2 A - \cos^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{z^3}{b^2 \operatorname{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} \quad (5.20)$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin \varphi}$$

Şimdi problemimizin verilerinden yukarıdaki karakterlerin sayısal değerlerini bulalım.

$$b = \frac{44}{\sqrt{\left( \frac{22,320}{12,750} \right)^2 - 1}} = 30,622 \text{ m.}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{30,622}{12,750} = 2,40176 \dots \dots \dots \operatorname{tg}^2 A = 5,76843$$

$$\sin A = 0,923 \quad , \quad \cos A = 0,3843$$

## 2- Sonlu farklar ve sayısal integrasyon

Hiperbolik kuleyi dönme eksenine dik paralel düzlemlerle eşit aralıklarla ( $\Delta z = 3 \text{ m.}$ ) olacak şekilde çift sayıda onaltı parçaya ( $m = 16$ ) bölelim. En sondaki en alt dilim bu durumda

$$50 - 16 \times 3 = 2 \text{ m.} = \alpha \Delta z \quad \dots \dots \dots \alpha = \frac{2}{3}$$

olur. Kabuk kalınlığı ve değişim biçimi

$$h_z = h = 12 \text{ cm.} \dots\dots\dots (-6 \text{ m.}) \leq z \leq (+24 \text{ m.})$$

$$h_z = h + \alpha z = 0,12 + \frac{z}{100} \dots\dots\dots (+24 \text{ m.}) \leq z \leq (+44 \text{ m.})$$

olur. Şimdi önce  $h_z$ ,  $f_m$ ,  $f_{m-2,m}$ ,  $I_{\phi,m}$ ,  $p_z$ ,  $\rho$ ,  $N_\phi$ ,  $N_\theta$  değerlerinin hesabını ve sonra evvelce belirtilmiş diğer değerleri her bir birleşim paralelinde çizelge halinde verelim (Çizelge 5.1 ve 5.2).

Sayısal integrasyon metodunu uygulayabilmek için iki aralığın toplamını yapmak gerekir. Şöyle ki, iki eşit aralık için, Simpson yöntemiyle sonlu farklardan,

$$f_{m-2,m} = f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m \quad (5.21)$$

Örneğin  $m = 2$  için  $f_{0,2}$  aralığının integral fonksiyonu değeri

$$f_{0,2} = f_0 + 4f_1 + f_2 \quad (5.22)$$

olur. Son aralık için, denklem (5.13) den

$$\begin{aligned} f_{16-17} &= \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} \left[ -\alpha^2 f_{15} + (\alpha+1)(\alpha+3)f_{16} + (2\alpha+3)f_{17} \right] \\ &= -\frac{4}{45} f_{15} + \frac{11}{9} f_{16} + \frac{13}{15} f_{17} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Bu yukarıdaki terimleri  $m$  paraleline (ekine) kadar toplayarak,  $I_{\phi,m}$  integral değerini sayısal olarak elde ederiz.

$$I_{\phi,m} = \gamma \cdot \frac{\Delta z}{3} (f_{0,2} + f_{2,4} + \dots\dots\dots + f_{m-2,m}) \quad (5.24)$$

Son birleşim yeri içinde

$$I_{\phi,17} = \gamma \cdot \frac{\Delta z}{3} (f_{0,2} + f_{2,4} + \dots\dots\dots + f_{14,16} + f_{16,17}) \quad (5.25)$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

olur (5.13). Zati yük altında, dış yükün  $p_z$  normal bileşeni,

$$p_z = g \cdot \cos \varphi = \gamma \cdot h_z \cdot \cos \varphi \quad (5.26)$$

olur.  $p_z$  değeri de (Çizelge 5.2) de verilmiştir. Görüldüğü gibi kabuk üst yarısı için ( $z < 0$ );  $p_z$  ler pozitifdir.

$N_\theta$ 'nın hesabında, kısaltma için yararlandığımız,  $\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi}$  asal eğrilik yarıçaplarının oranıdır.  $r_\varphi$  ve  $r_\theta$  değerlerini (5.20) den bulabiliriz. Son olarak  $N_\varphi$  ve  $N_\theta$  ları da (5.15) den elde ederiz.

**3-** Şimdi örnek olarak,  $m = 2$  eki (birleşim paraleli) için sayısal hesabı adım adım verelim.

**3.1-** Ek (birleşim) yeri numarası;  $m = 2$

**3.2-** Ek yerinin  $z$  koordinatı, kotu;  $z = 0$

**3.3-** Bu  $z = 0$  yerinde kabuk kalınlığı;  $h_z = 12$  cm.

**3.4-**  $z = 0$  da paralel dairesinin eğrilik yarıçapı;  $r_\theta = 12,75$  m. (5.18) denkleminde bulunur.

**3.5-**  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  değerleri (5.19) formülünden bulunur.

**3.6-**  $r_\theta \cdot \sin \varphi$  yukarıda 5. ve 4. şıkta bulunan değerler çarpımıdır.

**3.7-**  $r_\theta$ , (5.20) denkleminde bulunur.

**3.8-**  $f_m$ , yani  $m = 2$  birleşimindeki fonksiyon değerinin tayini için (5.17) den,

$$f_{m=2} = f(z) = f(0) = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 12,750 = 1,53 \text{ m}^2$$

Burada  $r_\theta$  değeri  $m = 2$  için bulunan değer ve  $h_z = 0,12$  m. dir.

**3.9-**  $f_{m-2,m}$  değeri  $m = 2$  için bulunacak, 0 ila 2 aralığındaki sayısal integrasyon fonksiyonudur. (5.21) ve (5.17) den,

$$f_{2-2,2} = f_{2-2} + 4f_{2-1} + f_2, \quad f_{m-2,m} = f + 4f_{m-1} + f_m$$

$$f_{0,2} = f_0 + 4f_1 + f_2 = 1,5641 + 4 \times 1,5386 + 1,530 = 9,2485$$

10-  $\sum f_{m-2,m}$  değeri yani m birleşimine kadarki tüm aralıkların integrali, sayısal toplamıdır.

$$m = 2 \text{ için } \dots\dots\dots \sum f_{m-2,m} = \sum f_{0,2} = 0 + 9,2485 = 9,2485$$

$$\text{Yine örneğin, } m = 4 \text{ için } \dots\dots\dots \sum f_{2,4} = 9,2485 + 9,2485 = 18,4969$$

3.11-  $I_{\varphi,m}$  değerleri (5.24) ve (5.25) den,  $\sum f_{m-2,m}$  ile  $\frac{\gamma \Delta z}{3}$  ün çarpımıdır.

$$m = 2 \text{ için } \dots\dots\dots I_{\varphi,m} = I_{\varphi,2} = 9,2484 \times 2,6 = 24,046$$

3.12-  $N_{\varphi,m}$  değeri (5.15) den,

$$m = 2 \text{ için } \dots\dots\dots N_{\varphi,2} = -\frac{24,046}{12,750} = -1,886 \text{ t / m}$$

3.13-  $N_{\theta,m}$  değerleri (5.15) den,

$$m = 2 \text{ için } \dots\dots\dots N_{\theta,2} = -0 \times 12,750 + 1,886(-0,17336) = -0,3269 \text{ t/m.}$$

bulunur. Tüm bu işlemler her bir birleşim için yapıp çizelgeler halinde düzenlenebilir.

### 5.2.1 Sayısal Hesaplar

$$a = 12,75 \text{ m.}, b = 30,62238 \text{ m.}$$

$$m = 0 \text{ için ;}$$

$$z = -6, h_z = 0,12 \text{ m.},$$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{-6}{30,62238} \right)^2} = 12,992 \text{ m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-6^2}{12,992^2 \times 33,27479}}} = 0,9968$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{12,992^2 \times 33,27479}{-6^2}}} = -0,0798$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 12,992 \times 0,9968 = 12,951 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{12,992}{0,9968} = 13,03 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 13,03 = 1,564 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \tan^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{-6^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times -0,0798^3} = -78,57 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{13,03}{-78,57} = -0,1658$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\varphi = 2,4 \times 0,12 \times -0,0798 = -0,023 \text{ t/m}^2$$

$$f_{-2,0} = 0 \rightarrow \sum f_{m-2,m} = 0 \rightarrow N_\varphi = 0$$

$$\sigma_\varphi = \frac{N_\varphi}{h_z} = 0$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = 0,023 \times 13,03 - 0 = 0,300 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h_z} = \frac{0,3}{0,12} = 2,500 \text{ t/m}^2$$

$m = 1$  için;

$z = -3$ ,  $h_z = 0,12 \text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{-3}{30,62238}\right)^2} = 12,81 \text{ m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{-3^2}{12,811^2 \times 33,27479}}} = 0,9992$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{12,811^2 \times 33,27479}{-3^2}}} = -0,0406$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 12,811 \times 0,9992 = 12,801 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{12,811}{0,9992} = 12,82 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 12,82 = 1,539 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \tan^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{-3^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times -0,0406^3} = -74,79 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{12,82}{-74,79} = -0,1714$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\varphi = 2,4 \times 0,12 \times -0,0406 = -0,012 \text{ t/m}^2$$

$m = 2$  için ;

$z = 0$ ,  $h_z = 0,12 \text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{0}{30,62238}\right)^2} = 12,750 \text{ m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0^2}{12,750^2 \times 33,27479}}} = 1,000$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12,750^2 \times 33,27479}{0^2}}} \cong 0$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 12,750 \times 1,000 = 12,750 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{12,750}{1,000} = 12,75 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 12,75 = 1,530 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{\approx 0^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0^3} = -73,55 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{12,75}{-73,55} = -0,1734$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos \varphi = 2,4 \times 0,12 \times 0 = 0$$

$$f_{0,2} = f_0 + 4f_1 + f_2 = 1,564 + 4 \times 1,539 + 1,530 = 9,248 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 9,248 \text{ m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 9,248 = 22,196 \text{ t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin \varphi} = -\frac{22,196}{12,75 \times 1,000} = -1,741 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{1,741}{0,12} = -14,51 \text{ t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = 0 - (-1,741 \times -0,1734) = -0,302 \text{ t/m.} \rightarrow \sigma_\theta = -\frac{0,302}{0,12} = -2,51 \text{ t/m}^2$$

$m = 3$  için;

$z = +3 \text{ m.}, h_z = 0,12 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{3}{30,62238} \right)^2} = 12,81 \text{ lm.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3^2}{12,811^2 \times 33,27479}}} = 0,9992$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12,811^2 \times 33,27479}{3^2}}} = 0,0406$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 12,811 \times 0,9992 = 12,801 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{12,811}{0,9992} = 12,82 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 12,82 = 1,539 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{3^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,0406^3} = -74,79 \text{ m.}$$

$m = 4$  için ;

$z = +6 \text{ m.}, h_z = 0,12 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{6}{30,62238}\right)^2} = 12,992 \text{ m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{6^2}{12,992^2 \times 33,27479}}} = 0,9968$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12,992^2 \times 33,27479}{6^2}}} = 0,0798$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 12,992 \times 0,9968 = 12,951 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{12,992}{0,9968} = 13,03 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 13,03 = 1,564 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{6^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,0798^3} = -78,57 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\phi} = \frac{13,03}{-78,57} = -0,1659$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\phi = 2,4 \times 0,12 \times 0,798 = 0,023 \text{ t/m}^2$$

$$f_{2,4} = f_2 + 4f_3 + f_4 = 1,530 + 4 \times 1,539 + 1,564 = 9,248 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 9,248 + 9,248 = 18,496 \text{ m}^2$$

$$I_\phi = 2,4 \times 18,496 = 44,393 \text{ t}$$

$$N_\phi = -\frac{I_\phi}{r_0 \cdot \sin\phi} = -\frac{44,939}{12,951} = -3,428 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_\phi = -\frac{3,428}{0,12} = -28,56 \text{ t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\phi \cdot \rho = -0,023 \times 13,03 - (-2,856 \times -0,1659) = -0,868 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{0,868}{0,12} = -7,23 \text{ t/m}^2$$

m = 5 için;

z = +9m., hz = 0,12 m.,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{9}{30,62238}\right)^2} = 13,289 \text{ m.}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9^2}{12,289^2 \times 33,27479}}} = 0,9932$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12,289^2 \times 33,27479}{9^2}}} = 0,1166$$

$$r_0 \cdot \sin\phi = 13,289 \times 0,9932 = 13,198 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\phi} = \frac{13,289}{0,9932} = 13,38 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 13,38 = 1,606 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \text{Cos}^3 \varphi} = -\frac{9^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,1166^3} = -85,01 \text{ m}.$$

$m = 6$  için ;

$$z = +12 \text{ m.}, h_z = 0,12 \text{ m.},$$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{12}{30,62238} \right)^2} = 13,694 \text{ m}.$$

$$\text{Sin} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{12^2}{13,694^2 \times 33,27479}}} = 0,9887$$

$$\text{Cos} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{13,694^2 \times 33,27479}{12^2}}} = 0,1502$$

$$r_0 \cdot \text{Sin} \varphi = 13,694 \times 0,9887 = 13,539 \text{ m}.$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\text{Sin} \varphi} = \frac{13,694}{0,9887} = 13,85 \text{ m}.$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 13,85 = 1,662 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \text{Cos}^3 \varphi} = -\frac{12^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,1502^3} = -94,30 \text{ m}.$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{13,85}{-94,30} = -0,1469$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \text{Cos} \varphi = 2,4 \times 0,12 \times 0,1502 = 0,043 \text{ t / m}^2$$

$$f_{4,6} = f_4 + 4f_5 + f_6 = 1,564 + 4 \times 1,606 + 1,662 = 9,6489 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 18,496 + 9,6489 = 28,146 \text{ m}^2$$

$$I_{\varphi} = 2,4 \times 28,146 = 67,550t$$

$$N_{\varphi} = -\frac{I_{\varphi}}{r_0 \cdot \sin \varphi} = -\frac{67,550}{13,539} = -4,989t/m \rightarrow \sigma_{\varphi} = -\frac{4,989}{0,12} = -41,58t/m^2$$

$$N_{\theta} = -p_z \cdot r_{\theta} - N_{\varphi} \cdot \rho = -0,043 \times 13,85 - (-4,989 \times 0,1469) = -1,332t/m.$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{1,332}{0,12} = -11,10t/m^2$$

m = 7 için;

z = +15m., hz = 0,12 m.,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{15}{30,62238}\right)^2} = 14,197m.$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{15^2}{14,197^2 \times 33,27479}}} = 0,9836$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{14,197^2 \times 33,27479}{15^2}}} = 0,1802$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 14,197 \times 0,9836 = 13,965m.$$

$$r_{\theta} = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{14,197}{0,9836} = 14,43m.$$

$$f_m = h_z \cdot r_{\theta} = 0,12 \times 14,43 = 1,732m^2$$

$$r_{\varphi} = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \tan^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{15^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,1802^3} = -106,70m.$$

m = 8 için ;

z = +18m., hz = 0,12 m.,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{18}{30,62238}\right)^2} = 14,790 \text{ m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{18^2}{14,790^2 \times 33,27479}}} = 0,9785$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{14,790^2 \times 33,27479}{18^2}}} = 0,2064$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 14,790 \times 0,9785 = 14,471 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{14,790}{0,9785} = 15,12 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 15,12 = 1,814 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \lg^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{18^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2064^3} = -122,54 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{15,12}{-122,54} = -0,1233$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos \varphi = 2,4 \times 0,12 \times 0,2064 = 0,059 \text{ t/m}^2$$

$$f_{6,8} = f_6 + 4f_7 + f_8 = 1,662 + 4 \times 1,732 + 1,814 = 10,404 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 28,146 + 10,404 = 38,550 \text{ m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 38,550 = 92,520 \text{ t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin \varphi} = -\frac{92,520}{14,471} = -6,393 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{6,393}{0,12} = -53,28 \text{ t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = -0,059 \times 15,12 - (-6,393 \times -0,1233) = -1,687 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1,687}{0,12} = -14,06 \text{ t/m}^2$$

$m = 9$  için;

$z = +21\text{m.}$ ,  $h_z = 0,12 \text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{21}{30,62238}\right)^2} = 15,460\text{m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{21^2}{15,460^2 \times 33,27479}}} = 0,9734$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{15,460^2 \times 33,27479}{21^2}}} = 0,2292$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 15,460 \times 0,9734 = 15,048\text{m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{15,460}{0,9734} = 15,88\text{m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 15,88 = 1,906\text{m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{21^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2292^3} = -142,18\text{m.}$$

$m = 10$  için ;

$z = +24\text{m.}$ ,  $h_z = 0,12 \text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{24}{30,62238}\right)^2} = 16,199\text{m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{24^2}{16,199^2 \times 33,27479}}} = 0,9686$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16,199^2 \times 33,27479}{24^2}}} = 0,2488$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 16,199 \times 0,9686 = 15,690 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{16,199}{0,9686} = 16,73 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,12 \times 16,73 = 2,007 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \tan^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{24^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2488^3} = -166,01 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{16,73}{-166,01} = -0,1007$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos \varphi = 2,4 \times 0,12 \times 0,2488 = 0,072 \text{ t/m}^2$$

$$f_{8,10} = f_8 + 4f_9 + f_{10} = 1,814 + 4 \times 1,906 + 2,007 = 11,445 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 38,550 + 11,445 = 49,995 \text{ m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 49,995 = 119,987 \text{ t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin \varphi} = -\frac{119,987}{15,690} = -7,647 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{7,647}{0,12} = -6,373 \text{ t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = -0,072 \times 16,73 - (-7,647 \times -0,1007) = -1,969 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1,969}{0,12} = -16,41 \text{ t/m}^2$$

$m = 11$  için;

$z = +27 \text{ m.}, h_z = 0,15 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{27}{30,62238} \right)^2} = 16,998 \text{ m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{27^2}{16,998^2 \times 33,27479}}} = 0,9641$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16,998^2 \times 33,27479}{27^2}}} = 0,2655$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 16,998 \times 0,9641 = 16,388\text{m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{16,998}{0,9641} = 17,63\text{m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,15 \times 17,63 = 2,645\text{m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{27^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2655^3} = -197,47\text{m.}$$

$m = 12$  için ;

$z = +30\text{m.}$ ,  $h_z = 0,18\text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{30}{30,62238}\right)^2} = 17,849\text{m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{30^2}{17,849^2 \times 33,27479}}} = 0,9601$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{17,849^2 \times 33,27479}{30^2}}} = 0,2797$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 17,849 \times 0,9601 = 17,136\text{m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{17,849}{0,9601} = 18,59\text{m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,18 \times 18,59 = 3,346\text{m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{30^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2797^3} = -228,01\text{m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{18,59}{-228,01} = -0,085$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\varphi = 2,4 \times 0,18 \times 0,2797 = 0,121 \text{ t/m}^2$$

$$f_{10,12} = f_{10} + 4f_{11} + f_{12} = 2,007 + 4 \times 2,645 + 3,346 = 15,932 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 49,995 + 15,932 = 65,926 \text{ m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 65,926 = 158,223 \text{ t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin\varphi} = -\frac{158,223}{17,136} = -9,233 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{9,233}{0,18} = -51,30 \text{ t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = -0,121 \times 18,59 - (-9,233 \times -0,0815) = -3,000 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{3,000}{0,18} = -16,66 \text{ t/m}^2$$

$m = 13$  için;

$z = +33 \text{ m.}, h_z = 0,21 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{33}{30,62238} \right)^2} = 18,744 \text{ m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{33^2}{18,744^2 \times 33,27479}}} = 0,9564$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{18,744^2 \times 33,27479}{33^2}}} = 0,2919$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 18,744 \times 0,9564 = 17,928 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{18,744}{0,9564} = 19,60 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,21 \times 19,60 = 4,116 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \text{Cos}^3 \varphi} = -\frac{33^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,2919^3} = -267,09 \text{ m.}$$

$m = 36$  için ;

$z = +36 \text{ m.}, h_z = 0,24 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{36}{30,62238} \right)^2} = 19,678 \text{ m.}$$

$$\text{Sin} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{36^2}{19,678^2 \times 33,27479}}} = 0,9532$$

$$\text{Cos} \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{19,678^2 \times 33,27479}{36^2}}} = 0,3023$$

$$r_0 \cdot \text{Sin} \varphi = 19,678 \times 0,9532 = 18,758 \text{ m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\text{Sin} \varphi} = \frac{19,678}{0,9532} = 20,64 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,24 \times 20,64 = 4,955 \text{ m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \text{Cos}^3 \varphi} = -\frac{36^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,3023^3} = -312,20 \text{ m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{20,64}{-312,20} = -0,0661$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \text{Cos} \varphi = 2,4 \times 0,24 \times 0,3023 = 0,174 \text{ t/m}^2$$

$$f_{12,14} = f_{12} + 4f_{13} + f_{14} = 3,346 + 4 \times 4,116 + 4,955 = 24,763 \text{ m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 65,926 + 24,763 = 90,690 \text{ m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 90,690 = 217,655 \text{ t}$$

$$N_{\varphi} = -\frac{I_{\varphi}}{r_0 \cdot \sin \varphi} = -\frac{217,655}{18,758} = -11,604 \text{ t/m} \rightarrow \sigma_{\varphi} = -\frac{11,604}{0,24} = -48,35 \text{ t/m}^2$$

$$N_{\theta} = -p_z \cdot r_{\theta} - N_{\varphi} \cdot \rho = -0,174 \times 20,64 - (-11,604 \times -0,0661) = -4,362 \text{ t/m.}$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{4,362}{0,24} = -18,24 \text{ t/m}^2$$

$m = 15$  için;

$z = +39 \text{ m.}, h_z = 0,27 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{39}{30,62238} \right)^2} = 20,646 \text{ m.}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{39^2}{20,646^2 \times 33,27479}}} = 0,9503$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{20,646^2 \times 33,27479}{39^2}}} = 0,3112$$

$$r_0 \cdot \sin \varphi = 20,646 \times 0,9503 = 19,620 \text{ m.}$$

$$r_{\theta} = \frac{r_0}{\sin \varphi} = \frac{20,646}{0,9503} = 21,72 \text{ m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_{\theta} = 0,27 \times 21,72 = 5,866 \text{ m}^2$$

$$r_{\varphi} = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3 \varphi} = -\frac{39^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,3112^3} = -363,81 \text{ m.}$$

$m = 16$  için ;

$z = +42 \text{ m.}, h_z = 0,30 \text{ m.},$

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left( \frac{42}{30,62238} \right)^2} = 21,642 \text{ m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{42^2}{21,642^2 \times 33,27479}}} = 0,9478$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{21,642^2 \times 33,27479}{42^2}}} = 0,31889$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 21,642 \times 0,9478 = 20,512\text{m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{21,642}{0,9478} = 22,83\text{m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,30 \times 22,83 = 6,850\text{m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3\varphi} = -\frac{42^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,31889^3} = -422,44\text{m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{22,83}{-422,44} = -0,0541$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\varphi = 2,4 \times 0,30 \times 0,3189 = 0,230\text{t/m}^2$$

$$f_{14,16} = f_{14} + 4f_{15} + f_{16} = 4,955 + 4 \times 5,866 + 6,850 = 35,267\text{m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 90,690 + 35,267 = 125,957\text{m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 125,957 = 302,296\text{t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin\varphi} = -\frac{302,296}{20,512} = -14,738\text{t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{14,738}{0,30} = -49,13\text{t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = -0,230 \times 22,83 - (-14,738 \times -0,0541) = -6,039\text{t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{6,039}{0,30} = -20,13\text{t/m}^2$$

$m = 17$  için ;

$z = +44\text{m.}$ ,  $h_z = 0,32 \text{ m.}$ ,

$$r_0 = 12,75 \times \sqrt{1 + \left(\frac{44}{30,62238}\right)^2} = 22,320\text{m.}$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{44^2}{22,320^2 \times 33,27479}}} = 0,9463$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{22,320^2 \times 33,27479}{44^2}}} = 0,32338$$

$$r_0 \cdot \sin\varphi = 22,32 \times 0,9463 = 21,121\text{m.}$$

$$r_\theta = \frac{r_0}{\sin\varphi} = \frac{22,320}{0,9463} = 23,59\text{m.}$$

$$f_m = h_z \cdot r_\theta = 0,32 \times 23,59 = 7,548\text{m}^2$$

$$r_\varphi = -\frac{z^3}{b^2 \cdot \text{tg}^2 A \cdot \cos^3\varphi} = -\frac{44^3}{30,62238^2 \times 5,76843 \times 0,32338^3} = -422,44\text{m.}$$

$$\rho = \frac{r_\theta}{r_\varphi} = \frac{23,59}{-465,67} = -0,0507$$

$$p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\varphi = 2,4 \times 0,32 \times 0,3234 = 0,248\text{t/m}^2$$

$$f_{16,17} = -\frac{4}{45}f_{15} + \frac{11}{9}f_{16} + \frac{13}{15}f_{17} = -\frac{4}{45} \times 5,866 + \frac{11}{9} \times 6,850 + \frac{13}{15} \times 7,548 = 14,3924\text{m}^2$$

$$\sum f_{m-2,m} = 125,957 + 14,392 = 140,350\text{m}^2$$

$$I_\varphi = 2,4 \times 140,350 = 336,838\text{t}$$

$$N_\varphi = -\frac{I_\varphi}{r_0 \cdot \sin\varphi} = -\frac{336,838}{21,121} = -15,948\text{t/m} \rightarrow \sigma_\varphi = -\frac{15,948}{0,32} = -49,84\text{t/m}^2$$

$$N_\theta = -p_z \cdot r_\theta - N_\varphi \cdot \rho = -0,248 \times 23,59 - (-15,948 \times -0,0507) = -6,666\text{t/m.}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{6,666}{0,32} = -20,83\text{t/m}^2$$

Çizelge 5.1 Hesap tablosu

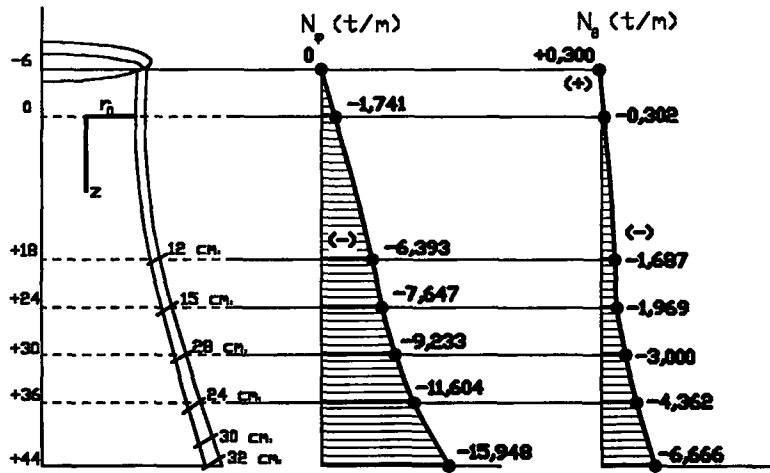
| Paralel<br>Eğri<br>Yeni<br>Ek<br>m | Z<br>m | $h_z$<br>cm | $r_0$<br>m | Cotφ    | Sinφ   | $r_0 \cdot \text{Sinφ}$<br>m | $r_\theta$<br>m | $f_m =$<br>$h_z \cdot r_\theta$<br>$m^2$ | $f_{m-2,m}$<br>$m^2$ | $\Sigma f_{m-2,m}$<br>$m^2$ | $I_{\phi,m}$<br>T | $N_\phi$<br>t/m | Cosφ    | $r_\phi$<br>m | $\rho =$<br>$\frac{r_\theta}{r_\phi}$ | $p_z = \gamma h_z$<br>Cosφ<br>t/m <sup>2</sup> | $p_z \cdot r_\theta$<br>t/m | $\frac{N_\phi}{N_\phi \cdot \rho}$<br>t/m | $N_\theta$<br>t/m | $\left(\frac{N_\phi}{h_z}\right) =$<br>$\frac{\sigma_\phi}{h_z}$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\left(\frac{N_\theta}{h_z}\right) =$<br>$\frac{\sigma_\theta}{h_z}$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|------------------------------------|--------|-------------|------------|---------|--------|------------------------------|-----------------|------------------------------------------|----------------------|-----------------------------|-------------------|-----------------|---------|---------------|---------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0                                  | -6     | 12          | 12,992     | -0,0800 | 0,9968 | 12,951                       | 13,03           | 1,564                                    |                      |                             |                   | 0               | -0,0798 | -78,57        | -0,1658                               | -0,023                                         | -0,300                      | 0                                         | +0,300            | 0                                                                                      | 0,250                                                                                      |
| 1                                  | -3     | 12          | 12,811     | -0,0406 | 0,9992 | 12,801                       | 12,82           | 1,539                                    |                      |                             |                   |                 | -0,0406 | -74,79        | -0,1714                               | -0,012                                         | -0,150                      |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 2                                  | 0      | 12          | 12,750     | 0       | 1,0000 | 12,750                       | 12,75           | 1,530                                    | 9,2485               | 9,2485                      | 22,196            | -1,741          | 0       | -73,55        | -0,1734                               | 0                                              | 0                           | $\frac{-1,741}{0,302}$                    | -0,302            | -1,451                                                                                 | -0,251                                                                                     |
| 3                                  | +3     | 12          | 12,811     | 0,0406  | 0,9992 | 12,801                       | 12,82           | 1,539                                    |                      |                             |                   |                 | 0,0406  | -74,79        | -0,1714                               | 0,012                                          | 0,150                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 4                                  | +6     | 12          | 12,992     | 0,0800  | 0,9968 | 12,951                       | 13,03           | 1,564                                    | 9,2484               | 18,497                      | 44,393            | -3,428          | 0,0798  | -78,57        | -0,1658                               | 0,023                                          | 0,300                       | $\frac{-3,428}{0,569}$                    | -0,868            | -2,856                                                                                 | -0,723                                                                                     |
| 5                                  | +9     | 12          | 13,289     | 0,1174  | 0,9932 | 13,198                       | 13,38           | 1,606                                    |                      |                             |                   |                 | 0,1166  | -85,01        | -0,1574                               | 0,034                                          | 0,449                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 6                                  | +12    | 12          | 13,694     | 0,1519  | 0,9887 | 13,539                       | 13,85           | 1,662                                    | 9,6489               | 28,146                      | 67,550            | -4,989          | 0,1502  | -94,30        | -0,1469                               | 0,043                                          | 0,599                       | $\frac{-4,989}{0,733}$                    | -1,332            | -4,158                                                                                 | -1,110                                                                                     |
| 7                                  | +15    | 12          | 14,197     | 0,1831  | 0,9836 | 13,965                       | 14,43           | 1,732                                    |                      |                             |                   |                 | 0,18017 | -106,70       | -0,1353                               | 0,052                                          | 0,749                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 8                                  | +18    | 12          | 14,790     | 0,2109  | 0,9785 | 14,471                       | 15,12           | 1,814                                    | 10,404               | 38,549                      | 92,520            | -6,393          | 0,2064  | -122,54       | -0,1233                               | 0,059                                          | 0,899                       | $\frac{-6,393}{0,789}$                    | -1,687            | -5,328                                                                                 | -1,406                                                                                     |
| 9                                  | +21    | 12          | 15,460     | 0,2355  | 0,9734 | 15,048                       | 15,88           | 1,906                                    |                      |                             |                   |                 | 0,2292  | -142,18       | -0,1118                               | 0,066                                          | 1,048                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 10                                 | +24    | 12          | 16,199     | 0,2568  | 0,9686 | 15,690                       | 16,72           | 2,007                                    | 11,447               | 49,995                      | 119,987           | -7,647          | 0,2488  | -166,01       | -0,1007                               | 0,072                                          | 1,198                       | $\frac{-7,647}{0,770}$                    | -1,969            | -6,373                                                                                 | -1,641                                                                                     |
| 11                                 | +27    | 15          | 16,998     | 0,2754  | 0,9641 | 16,388                       | 17,63           | 2,645                                    |                      |                             |                   |                 | 0,2655  | -194,47       | -0,0907                               | 0,096                                          | 1,658                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 12                                 | +30    | 18          | 17,849     | 0,2914  | 0,9601 | 17,136                       | 18,59           | 3,346                                    | 15,932               | 65,927                      | 158,223           | -9,233          | 0,2797  | -228,01       | -0,0815                               | 0,121                                          | 2,247                       | $\frac{-9,233}{0,753}$                    | -3,000            | -5,130                                                                                 | -1,666                                                                                     |
| 13                                 | +33    | 21          | 18,744     | 0,3052  | 0,9564 | 17,928                       | 19,59           | 4,116                                    |                      |                             |                   |                 | 0,2919  | -267,09       | -0,0734                               | 0,147                                          | 2,883                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 14                                 | +36    | 24          | 19,678     | 0,3171  | 0,9532 | 18,758                       | 20,64           | 4,955                                    | 24,763               | 90,690                      | 217,655           | -11,604         | 0,3023  | -312,20       | -0,0661                               | 0,174                                          | 3,595                       | $\frac{-11,604}{0,767}$                   | -4,362            | -4,835                                                                                 | -1,818                                                                                     |
| 15                                 | +39    | 27          | 20,646     | 0,3275  | 0,9503 | 19,620                       | 21,72           | 5,866                                    |                      |                             |                   |                 | 0,31120 | -363,81       | -0,0597                               | 0,202                                          | 4,381                       |                                           |                   |                                                                                        |                                                                                            |
| 16                                 | +42    | 30          | 21,642     | 0,3364  | 0,9478 | 20,51                        | 22,83           | 6,850                                    | 35,267               | 125,96                      | 302,296           | -14,738         | 0,31889 | -422,44       | -0,0541                               | 0,230                                          | 5,242                       | $\frac{-14,738}{0,797}$                   | -6,039            | -4,913                                                                                 | -2,013                                                                                     |
| 17                                 | +44    | 32          | 22,320     | 0,3417  | 0,9463 | 21,121                       | 23,59           | 7,548                                    | 14,393               | 140,35                      | 336,838           | -15,948         | 0,32338 | -465,67       | -0,0507                               | 0,248                                          | 5,858                       | $\frac{-15,948}{0,808}$                   | -6,666            | -4,984                                                                                 | -2,083                                                                                     |

Hazırlanmış olan Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 de tüm diğer eklerdeki değerleri görmek mümkündür. Çizelge 5.1 de  $p_z$  değerinin,  $p_z = \gamma \cdot h_z \cdot \cos\phi$  olarak ve  $\gamma$  değerinin  $\rho = \frac{r_\theta}{r_\phi}$  olarak tarif ve tayin edildiğine dikkat edilmelidir.

Çizelge 5.2 Zati ağırlık altında kesit tesirleri çizelgesi

| $N_\phi$<br>t/m | $N_\theta$<br>t/m | $\sigma_\phi$<br>kg/cm <sup>2</sup> | $\sigma_\theta$<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|-----------------|-------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 0               | +0,300            | 0                                   | +0,250                                |
| -1,741          | -0,302            | -1,451                              | -0,251                                |
| -3,428          | -0,868            | -2,856                              | -0,723                                |
| -4,989          | -1,332            | -4,158                              | -1,110                                |
| -6,393          | -1,687            | -5,328                              | -1,406                                |
| -7,647          | -1,969            | -6,373                              | -1,641                                |
| -9,233          | -3,000            | -5,130                              | -1,666                                |
| -11,604         | -4,362            | -4,835                              | -1,818                                |
| -14,738         | -6,039            | -4,913                              | -2,013                                |
| -15,948         | -6,666            | -4,984                              | -2,083                                |

4- Bütün bu değerler bulunduktan sonra  $N_\phi$ ,  $N_\theta$  kesit tesiri diyagramları çizilir Şekil 5.4.



Şekil 5.4

## 6. SONUÇLAR

Genel kabukların genel denklemleri verildikten sonra Çizelge 4.1 yardımıyla genel dönel kabuğun denklemleri yani denge denklemleri, elastisite ve kinematik bağıntıları doğrudan elde edilmiştir. Buradan dönel kabuğun mambran denklemlerine gelinmiştir. Daha sonra çözümde yararlandığımız sonlu farklar tekniği ile ilgili özellikler açıklanmış ve bunun hiperboloid kabuğun dönel simetrik yük altında elde edilen mambran denklemlerinin çözümünde daha açık bir ifadeyle sayısal integrasyonunda kullanılışı verilmiştir. Örnek olarak sayısal bir çözüm yapılmış ara işlemler tablolaştırılmış ve kesit tesirleri diyagramları açık bir şekilde verilmiştir. Çözüm yaparken formüller diğer değişik sayısal yani verilere uygun olacak şekilde düzenlenmiştir. Yine tablolarda değişik uygulamalara olanak sağlayacak ve kolaylık getirecek şekilde düzenlenmiştir. Sonuç olarak değişik yük ve boyutta dönel kabuk verileri için çözümlemeye uygun ve bilgisayar programlamasına kolayca olanak sağlayacak şekilde tablo ve formülasyon geliştirilmiştir.

Elde edilen sayısal çözümlerin literatürdekilerle karşılaştırılmasında benzer sonuçlar elde edilmiştir. Örnek olarak ; Soares' in hiperboloit kabukların dönel yük altında kesit tesirlerini veren denklemler.

**KAYNAKLAR**

Belesh at Soares, (1969), Calculation des Coques Paraboloids et Hiperboloids, Dunod, Paris.

Brush O., Almroth, O., (1975), Buckling of Bars Plates and Shells, Mc Graw-Hill.

Çağdaş, S., (1976), Elastik Zemin Oturan Taşıyıcı Sistemlerin Nümerik Metotlarla (Sonlu Farklarla) Çözümü, YTÜ, İstanbul.

Fischer, L., (1969), The Theory of Thin Elastic Shells, Holland Publishing Co., Holland.

Flügge, W., (1960), Stresses in Shells, Springer-Verlag.

Köksal E. & T., (1996) Çubuk Plak Kabuk Stabilitesi, YTÜ, İstanbul.

Köksal, T., (1994), The Finite Differences Analysis of Elliptic Hyperbolic and Revolution Paraboloid Shells, IASS bulletin Vol. 3.5, Madrid.



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi 18.01.1974

Doğum yeri Ankara

Lise 1987-1990 Kartal Orhangazi Lisesi

Lisans 1990-1995 Gaziantep Üniversitesi Mühendislik Fak.  
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Çalıştığı kurumlar

1995-1996 Derya Gemi İnş. A.Ş.

1996-1998 Spor Yapı Ltd. Şti.

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**