57431

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS KUVVET METODUNDA HİPERSTATİK BİLİNMEYENLERİN OTOMATİK SEÇİMİ

İnş. Müh. Cüneyt M. ANADOLU

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yapı Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. İrdesel GÖĞÜŞ

İSTANBUL, 1996

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada kullanılan programın hazırlanmasında yardımcı olan İnş. Müh. M. Ziya YILDIRIM'a ,tezin oluşumunda yol gösteren tez danışmanı Prof. İrdesel GÖĞÜŞ'e ve uzun eğitim hayatım süresince destek olan aileme teşekkür ederim.

ÖZET

Bu çalışmada Gauss eliminasyon metodu ve satır değişimiyle matris kuvvet metodunda hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçimi ele alınmıştır.Çalışmada kuvvet metodu ana hatlarıyla anlatıldıktan sonra,matris-kuvvet metodunun temel eşitlikleri yazılmış ve tezin konusu olan hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçimi işlemi açıklanmıştır.

Matris-kuvvet metodunda hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçimi işlemi basit bir örnek üzerinde elle yürütüldükten sonra, otomatik seçim işlemi için geliştirilen program ile dördüncü dereceden hiperstatik taşıyıcı sistemin hiperstatik bilinmeyenleri seçilmiştir.

Çalışmada, kuvvet metoduyla çözümde özellikle yüksek dereceden hiperstatik sistemlerde,iki boyutlu taşıyıcılarda,çelik uzay taşıyıcı sistemlerde önemli bir aşama olan ve uygulayıcıya zorluk çıkaran hiperstatik bilinmeyenlerin seçimi önerilen metodla dışarıdan müdahale gerekmeden gerçekleştirilmiştir. İzostatik esas sistemin seçiminde uygulumacının birden fazla seçeneği vardır.Kuvvet metoduyla çözümde genişletilmiş denge matrisinin inversi alındığından,seçilen izostatik esas sistemde inversi alınabilir bir matrise karşılık gelmelidir. Bu yüzden bu adımı otomatik olarak gerçekleştirmek güvenli ve uygulamacı için kolay bir yoldur.

Günümüzde mühendislik problemlerinin çözümünde kuvvet metoduyla çözüm kullanılmıyorsa da çalışma kuvvet metodunun bilgisayar ile çözümde kullanılabileceğini göstermiştir.Bu çalışma için yapılan araştırma sırasında,metodun geliştirilerek iki boyutlu taşıyıcı sistemlerin de önerilen metodla çözüldüğü görülmüştür.

SUMMARY

When analyzing a statically indeterminate structure using the classical force method, we first reduce the structure to a statically determinate one which is not a mechanism, referred to as the primary structure. This is accomplished by introducing action release mechanisms in the structure which eliminate enough of its reactions or internal actions to render it statically determinate. The eliminated reactions or internal actions are referred to as the redundants of the structure. The choice of the redundants of a structure is not an unique. One way that it can be reduced to a statically determinate structure is by cutting it just above node releasing the three components of internal action. Another way of reducing to a statically determinate structure is by introducing hinges at one end of its elements. It can be shown that the choice of the redundants affects the condition of the matrix which must be inverted in analyzing a structure by the force method. Thus, it is desirable to choose redundants which do not result in a poorly conditioned matrix, that is, a matrix whose inverse is sensitive to roundoff errors of its terms.

In this thesis, we choose a primary structure from a statically indeterminate structure by a computer program, which uses Gauss elimination method and changing rows of the matrix of basic nodal actions of an element of a structure.

SEMBOL LİSTESİ

$\underline{F}^i$	: eleman bağımsız uç kuvveti
$\underline{S}^i$	: genel koordinatlarda eleman uç kuvvetleri
$\bar{\underline{S}}^i$	: yerel koordinatlarda eleman uç kuvvetleri
$\underline{R}$	: düğüm noktası yük vektörü
$\underline{X}$	: hiperstatik bilinmeyen vektörü
$\underline{r}$	: düğüm noktası yer değiştirme vektörü
$\underline{T}^j$	: yerel koordinatlarda eleman denge matrisi
$\underline{L}^i$	: eleman koordinat dönüşüm matrisi
$(\underline{a}^T)^i$	: eleman denge matrisi
$\underline{b}$	: statik transformasyon matrisi
$\underline{I}$	: birim matris
$\underline{f}$	: fleksibilite matrisi
$\underline{L}$	: alt üçgen matris
$\underline{U}$	: üst üçgen matris
$\underline{V}$	: permütasyon matrisi

KABULLER

a) Hesaplarda I. mertebe teorisi geçerlidir.

b) Malzeme ,lineer elastik , homojen ve izotroptur. Hooke kanunu geçerlidir.

c) Çubuklar , doğru eksenli , sabit kesitlidir.

d) Yükleme statiktir.

e) Süperpozisyon kanunu geçerlidir.

BÖLÜM 1 :KUVVET METODU

Kuvvet metodu genel hatları ile özetlenirse :

a) taşıyıcı sistemin hiperstatiklik derecesi belirlenir ve izostatik esas sistem seçilir,

b) izostatik esas sistemde dış yüklerin etkisiyle oluşan kesit tesirleri ve yer değiştirmeler hesaplanır,

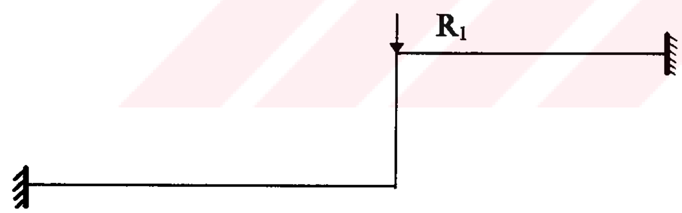
c) izostatik esas sistemde hiperstatik birim yüklemelerden oluşan kesit tesirleri ve yer değiştirmeler hesaplanır,

d) x_k hiperstatik bilinmeyenleri , taşıyıcı sistemde yazılan uygunluk şartlarından hesaplanır.Hiperstatik bilinmeyenlerin ve dış yüklerin oluşturduğu yer değiştirmelerin toplamı sıfırdır.

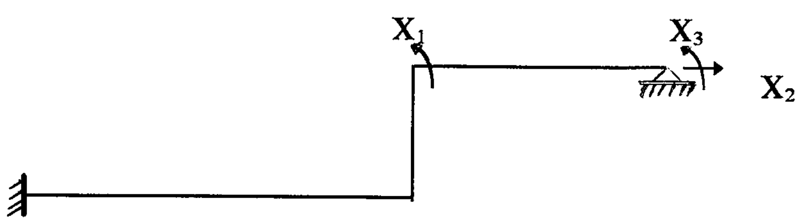
$$\delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + \delta_{ip} X_\rho + \delta_{i0} = 0$$

e) taşıyıcı sistemde , kesit tesirleri ve yer değiştirmeler süperpozisyon prensibiyle hesaplanır.

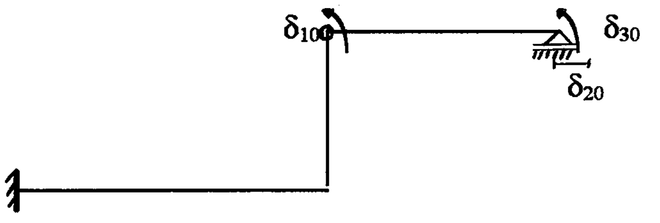
Şekil 1' deki örnek taşıyıcı sistem üzerinde yukarıda yazılan maddeler açıklanmıştır.



a) 3. dereceden hiperstatik taşıyıcı sistem

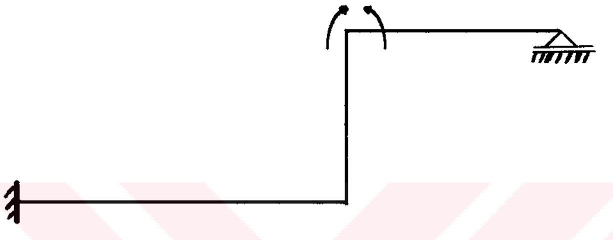


b) izostatik esas sistemin seçimi ve hiperstatik bilinmeyenlerin belirlenmesi



c) izostatik esas sistemde yer değiştirmelerin hesabı

$\longrightarrow \delta_{10}$, δ_{20} , δ_{30}



d) izostatik esas sistemde hiperstatik birim yüklemelerinden oluşan yer değiştirmelerin hesabı

$X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0 \longrightarrow$ δ_{11} , δ_{21} , δ_{31}

($X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$ δ_{12} , δ_{22} , δ_{32}

$X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 1$ δ_{13} , δ_{23} , δ_{33})

e) uygunluk şartlarının yazılması

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{20} = 0$$

$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{30} = 0$$

f) kesit tesirlerinin ve yer değiştirmelerin , izostatik esas sistemde dış yüklerden ve hiperstatik birim yüklemelerin süperpozisyonuyla hesabı.

Kuvvet metodunda,izostatik esas sistemin seçimi önemli bir aşamadır. Seçilen taşıyıcı sistem stabil olmalıdır. İzostatik esas sistem seçimi,taşıyıcı sistemde elemanlara mafsal ilave edilmesi,mesnet şartlarının değiştirilmesi anlamına gelir. Bu işlem, hiperstatiklik derecesi yüksek olan sistemlerde , uzaysal taşıyıcılarda kolaylıkla uygulanamaz.

Matris-kuvvet metodunda klasik statiğin yukarıda özetlediğimiz çözümü, programlamaya uygun hale getirilmiştir. Bundan sonraki bölümde önce matris-kuvvet metodu kısaca tanıtılacak, sonra hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçimi için önerilen metod anlatılacaktır.

BÖLÜM 2

2.1. MATRİS-KUVVET METODU

a) $(\underline{a}^T)_{nxp}$ denge matrisi oluşturulur. Hiperstatik sistemlerde $(\underline{a}^T)$ denge matrisi kare değildir.

b) İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

c) $(\underline{a}^T)$ denge matrisine $p\text{-}n = \rho$ adet birim satır vektör eklenerek $(\underline{a}^T)_{pxp}$ denge matrisi kare hale getirilir. $(\underline{a}^T)_{pxp}$ matrisine genişletilmiş denge matrisi adı verilir. Bu işlem klasik statikte , taşıyıcı sistemde çubuklara mafsal eklenmesi , mesnet şartlarının değiştirilmesine karşılık gelir.

d) Genişletilmiş denge matrisi $(\underline{a}^T)_{pxp}$ nin inversi hesaplanır.

e) $(\underline{a}^T)^{-1}$ n sütun ve ρ sütun olarak alt matrislere ayrılarak $\underline{b}_0$ ve $\underline{b}_x$ belirlenir.

f) $\underline{f}^{\,i}$ eleman fleksibilite matrislerinden toplam sistem diag $\underline{f}$ matrisi oluşturulur.

g) $\underline{F}_{11} = \underline{b}_x{}^T\underline{f}\;\underline{b}_x$ ve $\underline{F}_{10} = \underline{b}_x{}^T\underline{f}\;\underline{b}_0$ matrisleri hesaplanır.

h) $\underline{X} = -\underline{F}_{11}{}^{-1}\,\underline{F}_{10}\,\underline{R}$ eşitliğiyle hiperstatik bilinmeyenler hesaplanır.

ı) $\underline{F} = \underline{b}_0\underline{R} + \underline{b}_x\underline{X}$ eşitliğiyle eleman bağımsız uç kuvvetleri hesaplanır.

$\underline{S} =$ diag $(\underline{a}^T)^i\underline{F}$ eşitliğiyle eleman uç kuvvetleri genel koordinatlarda hesaplanır.

$\underline{S}^{\,i} = \underline{T}^i\;\underline{F}^{\dagger}$ eşitliğiyle eleman uç kuvvetleri yerel koordinatlarda hesaplanır.

j) $\underline{r} = \underline{b}_0\,\underline{f}\;\underline{F}$ eşitliğiyle düğüm noktaları yer değiştirmeleri hesaplanır.

Yukarıdaki kısa özetten anlaşılacağı gibi matris-kuvvet metodunda genişletilmiş denge matrisinin oluşturulmasından sonraki adımlar programlamaya uygundur.Hiperstatik taşıyıcı sistemlerde denge matrisi kare değildir.Denge matrisinin inversi hesaplanarak statik transformasyon matrisi elde edilir.Bu aşamada denge matrisine sistemin hiperstatiklik derecesi kadar birim satır eklenerek denge matrisi kare hale getirilir.Bu matrise genişletilmiş denge matrisi adı verilir. Genişletilmiş denge matrisinin elde edilmesi adımında çözüme müdahale gerekir.Bu çalışmada önerilen Gauss eliminasyon metoduyla bu adım programlamaya uygun hale getirilecektir.

2.2. MATRİS-KUVVET METODUNDA HİPERSTATİK BİLİNMEYENLERİN OTOMATİK SEÇİMİ

$(\underline{a}^T)_{nxp}$ boyutunda taşıyıcı sistem denge matrisidir. ρ = p-n taşıyıcı sistemin hiperstatiklik derecesidir. $(\underline{a}^T)_{nxp}$ denge matrisine ρ adet sıfır satır eklenir.Hiperstatik bilinmeyenlerin belirlenmesi için genişletilmiş denge matrisinde pivot eleman aranır.

Pivot eleman arama işlemi , matrisin her sütununda mutlak değerce en büyük eleman belirlenerek,esas köşegene yerleştirilmesidir.Bu işlemde,matrisin satırları arasında yer değiştirilir.

İncelenen sütunda sıfırdan farklı bir eleman yoksa , denge matrisine eklenen sıfır satırıyla ilgili satır arasında satır değişikliği yapılır ve sıfır satırında esas köşegene 1 değeri verilir. Bu işlem sonucunda hiperstatik bilinmeyenler seçilmiş olur.Seçim işlemi sırasında sistemin hiperstatiklik derecesinden fazla hiperstatik bilinmeyen belirlenmesi sistemin labil olduğunu gösterir.

Pivot eleman belirlenmesi ve hiperstatik bilinmeyenlerin seçimi sırasında yapılan satır değişikleri,satır değişim vektöründe saklanır.Satır değişim vektörü hesaplarda $\underline{G}$ sembolü ile gösterilmiştir. Satır değişim vektöründen $\underline{V}$ permütasyon matrisi oluşturulur.

Bu işlem tamamlandığında genişletilmiş denge matrisi alt ve üst üçgen matrislere ayırılır. $\underline{L}$ alt üçgen matrisinin, $\underline{U}$ üst üçgen matrisinin sembolü olsun.

$\underline{A} \times \underline{x} = \underline{b}$ formunda bir eşitliğin çözülmesi gerekir. (2.2.1)

Yukarıdaki eşitliğin matris kuvvet metodundaki karşılıkları yazılarak çözümü yazılırsa,

$$\underline{F} = \underline{b}_o \times \underline{R} + \underline{b}_x \times \underline{X} \tag{2.2.2}$$

$$(\underline{a}^T) \times \underline{b}_o = \underline{I}_n \tag{2.2.3}$$

$$(\underline{a}^T) \times \underline{b}_x = \underline{0} \tag{2.2.4}$$

Bundan sonraki adım bo ve bx matrislerinin belirlenmesidir.

(2.2.3) eşitliği matris formunda yazıldığında,

$$\left[\frac{\underline{a}^T}{\underline{\hat{I}}}\right] \times \underline{b}_0 = \left[\frac{\underline{I}}{\underline{0}}\right] \tag{2.2.5}$$

(2.2.4) eşitliği matris formunda yazıldığında,

$$\left[\frac{\underline{\underline{a}}^{T}}{\underline{\hat{I}}}\right] \times \underline{b}_x = \left[\frac{\underline{0}}{\underline{I}}\right] \tag{2.2.6}$$

Gauss eliminasyon metodu ve satır değişimiyle elde edilen genişletilmiş denge matrisi için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$(\underline{\tilde{a}}^{T}) \equiv \underline{\mathbf{L}} \times \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}} \left[\frac{\underline{a}^{T}}{\underline{\hat{I}}}\right] \tag{2.2.7}$$

(2.2.7) eşitliği sağdan $\underline{b}_x$ matrisi ile çarpıldığında ,

$$\underline{\mathbf{L}} \times \underline{\mathbf{U}} \times \underline{\mathbf{b}}_x = \underline{V}^{T} \times \left[\frac{\underline{0}}{\underline{I}}\right] \equiv \underline{\hat{I}^{T}} \tag{2.2.8}$$

$$\underline{L}^{-1} \times \underline{\hat{I}}^{T} = \underline{\hat{I}}^{T} \tag{2.2.9}$$

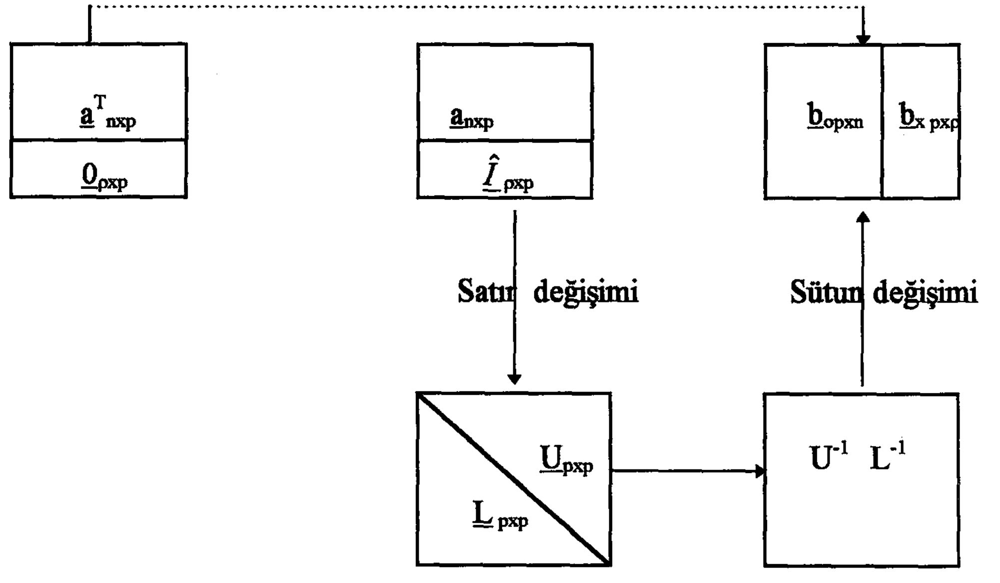
$$\underline{U} \times \underline{b}_x = \underline{\hat{I}}^{T} \tag{2.2.10}$$

(2.2.7) eşitliği sağdan $\underline{b}_0$ matrisi ile çarpıldığında ,

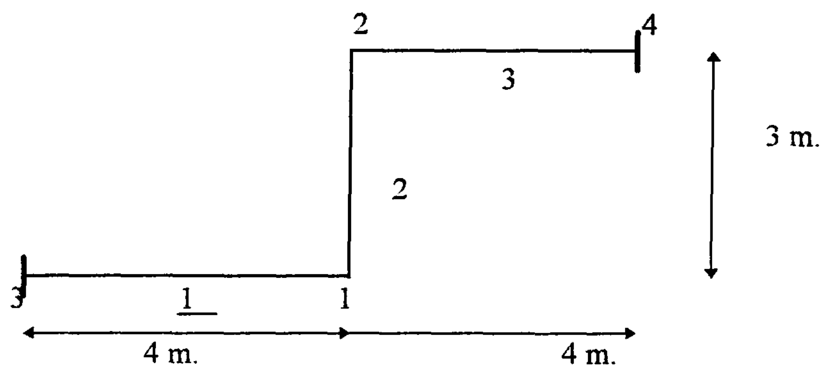
$$\underline{\mathbf{L}} \times \underline{\mathbf{U}} \times \underline{\mathbf{b}}_0 = \underline{V}^{T} \times \left[\frac{\underline{I}}{\underline{0}}\right] \equiv \underline{\tilde{I}} \tag{2.2.11}$$

(2.2.10) ve (2.2.11) eşitliklerinden $\underline{b}_0$ ve $\underline{b}_x$ matrisleri ileri ve geri yürütme işlemleri ile hesaplanabilir.

$\underline{b}_x$ ve $\underline{b}_0$ matrislerinin hesabı aşağıda verilen şemada özetlenebilir



ÖRNEK 1:



Düğüm Noktası Tablosu

No	X(m.)	Z(m.)
1	4	0
2	4	3
3	0	0
4	8	3

Eleman Tablosu

No	l	r	l (m.)	cos α	sin α
1	3	1	4	1	0
2	1	2	3	0	1
3	2	4	4	1	0

Eleman denge matrisleri (*):

$$(a^1)^T = (a^3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (a^2)^T = \begin{bmatrix} 0 & .33 & .33 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -.33 & -.33 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* Bkz.:Kaynak 4 Sayfa (444-458)

Toplam sistem denge matrisi ($\underline{a}^T$) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{6x9}$$

Taşıyıcı sistem 3. dereceden hiperstatiktir.($\underline{a}^T$) denge matrisi 3 sıfır eklenerek kare hale getirilir ve ($\underline{a}^T$) genişletilmiş denge matrisinin hesabına başlanır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Genişletilmiş denge matrisi ve satır değişim vektörü yukarıdaki gibi oluşturulduktan sonra 1. adıma geçilir.

1. adım : 1. sütunda mutlak değerce en büyük eleman esas köşegen üzerindedir.

$$(\underline{a}^T)^1_{11} = \max \left\{ \left| \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^0_{i1} \right| \right\} \qquad i = 1\,,2\,,3........,9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 1. sütununun $(\underline{\tilde{a}}^T)^0$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i1} = \left(\underline{\tilde{a}}^0\right)^T_{i1} \,/\, \left(\underline{\tilde{a}}^0\right)^T_{11} \qquad i = 2\,,..........,9$$

$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^1$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^1_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^0_{ij} - \underline{L}_{i1} \times \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^0_{1j} \qquad i = 2\,,........,9 \text{ ve } j = 2\,,..........,9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^1$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2. adım : 2. sütunda mutlak değerce en büyük eleman esas köşegen üzerindedir.

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{22} = max\left\{\left|\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^1_{i2}\right|\right\} \qquad i = 2,\ldots\ldots, 9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 2. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^1$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i2} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^1_{i2} / \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{22} \qquad i = 3,\ldots\ldots\ldots, 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^1_{ij} - \underline{L}_{i2} \times \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^1_{2j} \qquad i = 3 ,\ldots\ldots, 9 \text{ ve } j = 3 ,\ldots\ldots\ldots, 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

3. adım : 3. sütunda mutlak değerce en büyük eleman esas köşegen üzerindedir.

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^3_{33} = max\left\{\left|\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{i3}\right|\right\} \qquad i = 3,........, 9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 3. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i3} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{i3} / \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^3_{33} \qquad i = 4,..........., 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^3$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^3_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{ij} - \underline{L}_{i3} \times \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^2_{3j} \qquad i = 4,........, 9 \text{ ve } j = 4,.........., 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^3$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4. adım : 4. sütunda mutlak değerce en büyük eleman 5. satırdadır. 4. satırla 5. satır yer değiştirir.

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{44} = max\left\{\left|\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^3_{i4}\right|\right\} \qquad i = 4,\ldots\ldots.., 9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 4. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^3$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i4} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^3_{i4} / \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{44} \qquad i = 5\ldots\ldots\ldots.., 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4$matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^3_{ij} - \underline{L}_{i4} \times \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^3_{4j} \qquad i = 5,\ldots\ldots.., 9 \text{ ve } j = 5,\ldots\ldots\ldots, 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

5. adım : 5. sütunda mutlak değerce en büyük eleman esas köşegen üzerindedir.

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{55} = max\left\{\left|\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{i5}\right|\right\} \qquad i = 5,........, 9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 5. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i5} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{i5} / \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{55} \qquad i = 5,..........., 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{ij} - \underline{L}_{i5} \times \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^4_{5j} \qquad i = 6,........, 9 \text{ ve } j = 6,.........., 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

6. adım : 6. sütunda mutlak değerce en büyük eleman esas köşegen üzerindedir.

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6_{66} = max\left\{\left|\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6_{i6}\right|\right\} \qquad i = 6,\ldots\ldots\ldots, 9$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 6. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i6} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{i6} / \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6_{66} \qquad i = 7,\ldots\ldots\ldots\ldots, 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{ij} - \underline{L}_{i6} \times \left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^5_{6j} \qquad i = 7,\ldots\ldots\ldots, 9 \text{ ve } j = 7,\ldots\ldots\ldots\ldots, 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}}^T\right)^6$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

7. adım : 7. sütunda sıfırdan farklı eleman yoktur.Taşıyıcı sistemin ilk hiperstatik bilinmeyeni $\underline{F}_1^3$ bağımsız çubuk uç kuvveti olarak belirlenmiş olur.7. sütunda esas köşegene 1 değeri verilir.

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{77} = 1$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisinin 7. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^6$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{i7} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^6_{i7} / \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{77} \qquad i = 8,\ 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{ij} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^6_{ij} - \underline{L}_{i7} \times \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^6_{7j} \qquad i = 8,\ 9 \text{ ve } j = 8,\ 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

8. adım : 8. sütunda sıfırdan farklı eleman yoktur. Taşıyıcı sistemin ikinci hiperstatik bilinmeyeni $\underline{F}_2^3$ bağımsız çubuk uç kuvveti olarak belirlenmiş olur. 8. sütunda esas köşegene 1 değeri verilir.

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^8_{88} = 1$$

$\underline{\mathrm{L}}$ alt üçgen matrisinin 8. sütununun $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7$ matrisinden hesabı :

$$\underline{L}_{98} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{98} / \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^8_{88} \qquad \mathrm{i} = 9$$

$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^8$ matrisinin diğer elemanlarının hesabı :

$$\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^8_{99} = \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{99} - \underline{L}_{98} \times \left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^7_{89} \qquad \mathrm{i} = 9 \text{ ve } \mathrm{j} = 9$$

Bu işlemlerin sonucunda $\left(\underline{\tilde{a}^T}\right)^8$ matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

9. adım : 9. sütundaki $\left(\underline{\tilde{a}}^{T}\right)^{9}_{99} = 0$ olduğundan , taşıyıcı sistemin üçüncü hiperstatik bilinmeyeni $\underline{F}^{3}_{3}$ olarak belirlenmiştir.

$$\left(\underline{\tilde{a}}^{T}\right)^{9}_{99} = 1$$

Bu işlemlerin sonucunda denge matrisi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & .33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{9x9} \qquad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$\underline{L}$ alt üçgen matrisi :

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \underline{0} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{U}$ üst üçgen matrisi :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .33 & -.33 & 0 & 0 & 0 \\ & .25 & .25 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & -.25 & -.25 \\ & & \underline{0} & & -.33 & -.33 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

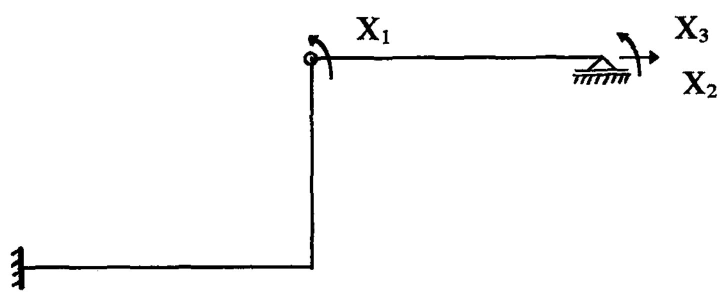
$\underline{V}$ permütasyon matrisi :

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\hat{I}}$ birim matrisi :

$$\underline{\hat{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yapılan işlemler sonucunda belirlenen izostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler şekilde gösterilmiştir.



Bu işlemler sonucunda $\underline{b}_0$, $\underline{b}_x$ matrisleri ileri ve geri yürütme işlemleri ile hesaplanır :

$$\underline{U} \times \underline{b}_x = \underline{\hat{I}}^T \qquad (2.2.4)$$

eşitliğinde geri yürütme işlemi yapılarak $\underline{b}_x$ matrisi :

$$\underline{b}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & .25 & -.25 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\underline{b}_0$ matrisi ileri ve geri yürütme işlemleri ardarda yürütülerek hesaplanır :

$$\underline{L} \times \underline{U} \times \underline{b}_0 = \underline{V}^T \times \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

İleri yürütme işleminde,

$\underline{U} \times \underline{b}_o = \underline{y}$ olarak adlandırıldığında,

$$\underline{L} \times \underline{y} = \underline{V}^T \times \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$ **eşitliğinden $\underline{y}$ matrisi hesaplanır.**

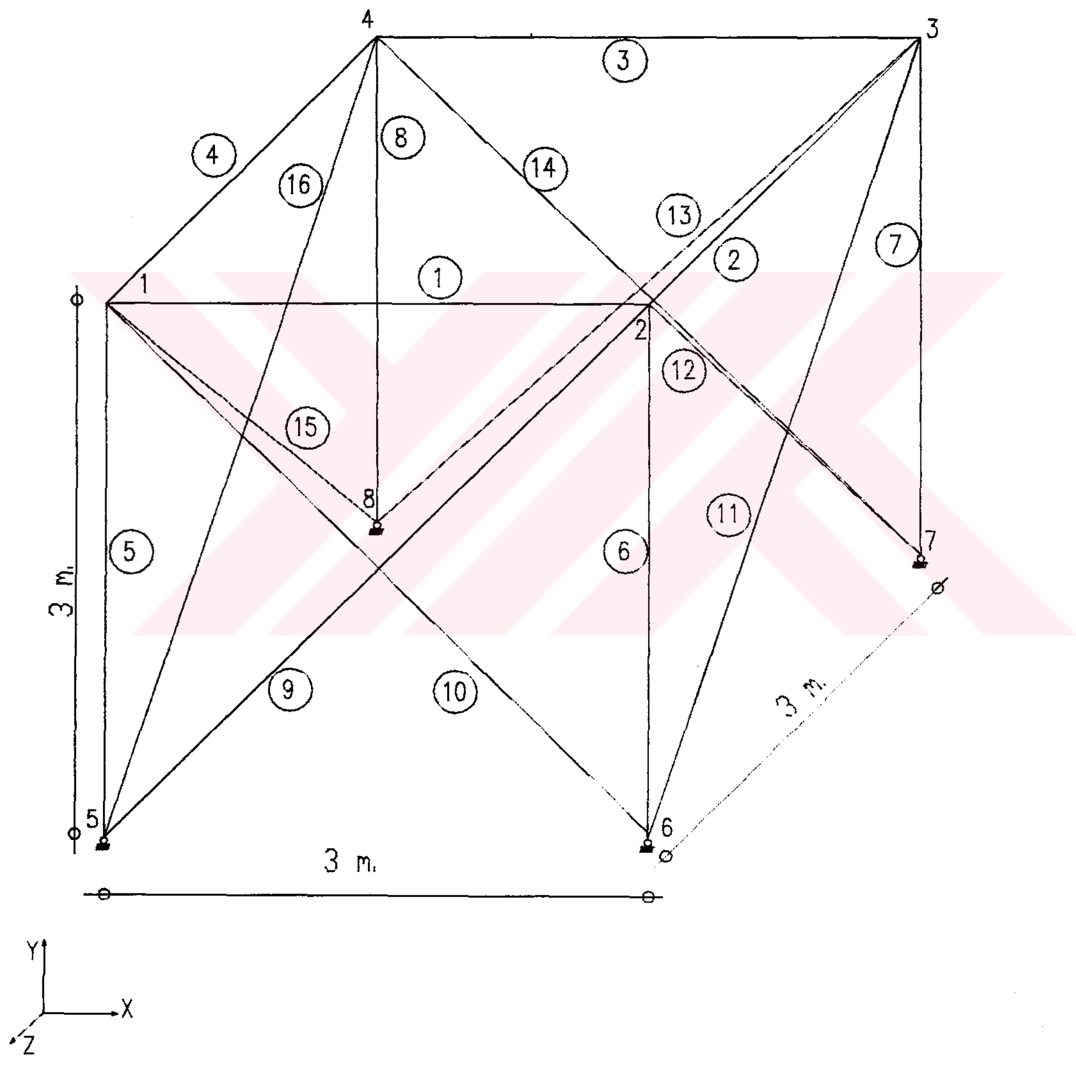
Geri yürütme işleminde,

$\underline{U} \times \underline{b}_0 = \underline{y}$ eşitliğinden $\underline{b}_o$ hesaplanır.

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ÖRNEK 2 :



Düğüm Noktası Tablosu

No	X	Y	Z
1	0	3	0
2	3.	3	0
3	3	3	3
4	0	3	3
5	0	0	0
6	3	0	0
7	3	0	3
8	0	0	3

Eleman Tablosu

No	l	r	l(m)	ΔX	ΔY	ΔZ	c_{11}	c_{12}	c_{13}
1	1	2	3	3	0	0	1	0	0
2	2	3	3	-3	0	0	0	0	1
3	3	4	3	-3	0	0	-1	0	0
4	1	4	3	0	0	3	0	0	1
5	1	5	3	0	-3	0	0	-1	0
6	2	6	3	0	-3	0	0	-1	0
7	3	7	3	0	-3	0	0	-1	0
8	4	8	3	0	-3	0	0	-1	0
9	2	5	4.24	-3	-3	0	-c	-c	0
10	1	6	4.24	3	-3	0	c	c	0
11	3	6	4.24	0	-3	-3	0	-c	-c
12	2	7	4.24	0	-3	3	0	-c	c
13	3	8	4.24	-3	-3	0	-c	-c	0
14	4	7	4.24	3	-3	0	c	-c	0
15	4	5	4.24	0	-3	-3	0	-c	-c
16	1	8	4.24	0	-3	3	0	-c	c

c=0.707

(a^T) denge matrisi,

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0
\end{bmatrix}
$$

Örnek 1'de ayrıntılı açıklanan işlemler uygulanarak yukarıdaki taşıyıcı sistem için bulunan genişletilmiş denge matrisi, satır değişim vektörü, $\underline{b}_0$, $\underline{b}_x$ ve seçilen izostatik esas sistem aşağıda gösterilmiştir.

$\left(\tilde{a}^T\right)$ genişletilmiş denge matrisi,

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & -c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c & -c \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$\underline{G}^T$ satır değişim vektörü :

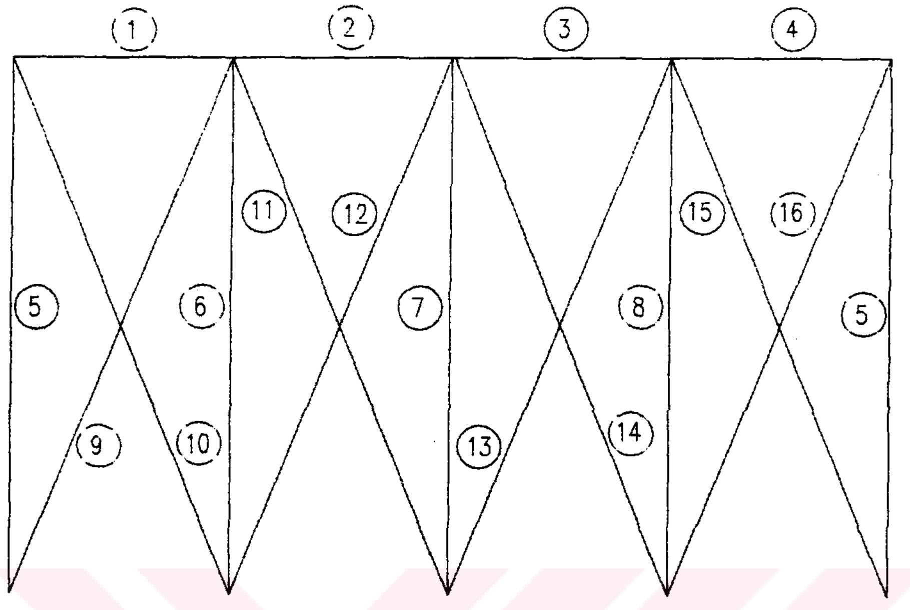
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 8 & 11 & 4 & 13 & 9 & 14 & 10 & 12 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$\underline{b}_0$ matrisi

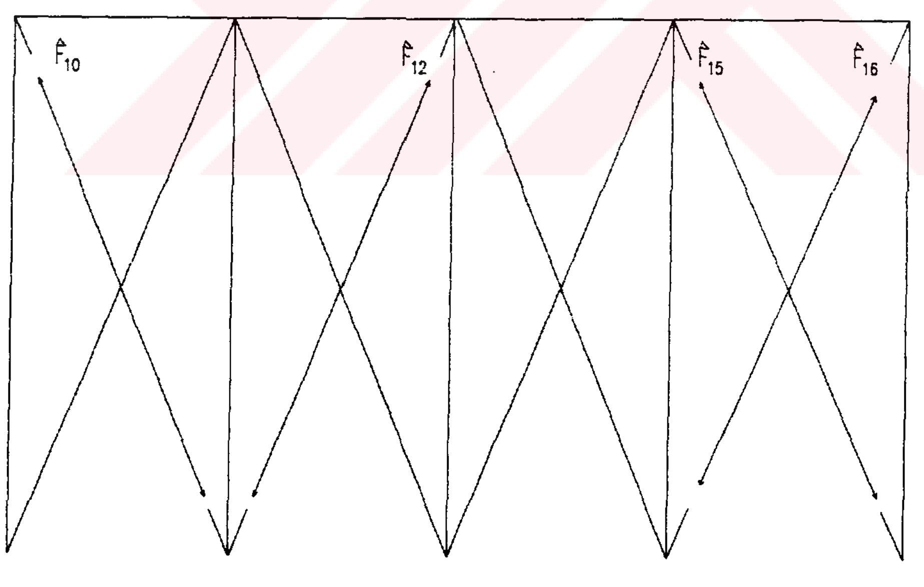
$$\begin{bmatrix}
-c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 \\
0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\
0 & 0 & -,5 & -,5 & 0 & 0 & -,5 & -,5 & 0 & 0 & -,5 & -,5 \\
0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0 & -c \\
c & 0 & 0 & -c & c & 0 & 0 & -c & c & 0 & 0 & -c \\
-c & -c & 0 & 0 & -c & -c & 0 & 0 & -c & -c & 0 & 0 \\
0 & -c & -,5 & -,5 & 0 & -c & -,5 & -,5 & 0 & -c & -,5 & -,5 \\
0 & 0 & ,207 & -,5 & 0 & 0 & ,207 & -,5 & 0 & 0 & ,207 & -,5 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & c & 0 & 0 & c & c & 0 & 0 & c & c \\
0 & 0 & c & c & 0 & 0 & c & c & 0 & 0 & c & c \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$\underline{b}_x$ matrisi

$$\begin{bmatrix}
-c & 0 & 0 & 0 \\
0 & -c & 0 & 0 \\
0 & 0 & -.5 & -.5 \\
0 & 0 & 0 & -c \\
c & 0 & 0 & -c \\
-c & -c & 0 & 0 \\
0 & -c & -.5 & -.5 \\
0 & 0 & .207 & -,5 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c & c \\
0 & 0 & c & c \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$



TAŞIYICI SİSTEM AÇILIMI



SEÇİLEN İZOSTATİK ESAS SİSTEM

SONUÇ

Bu çalışmada matris-kuvvet metodunda hiperstatik bilinmeyenlerin Gauss eliminasyon metodu ve satır değişimiyle otomatik seçimi ele alınmıştır.

Matris-kuvvet metoduyla çözümde,hiperstatik taşıyıcı sistemlerde oluşturulan denge matrisi kare değildir.Denge matrisinin kare hale getirilmesi (izostatik esas sistem seçimi) zorunludur.Yüksek dereceden hiperstatik sistemlerde izostatik esas sistem seçimi güçtür.Seçilen izostatik esas sistem labil olmamalıdır.Ayrıca seçilen izostatik sistemle oluşturulan genişletilmiş denge matrisinin inversi alınabilir olmalıdır.

Uygulamada,hesaplamanın bilgisayar ile yapıldığı düşünüldüğünde,izostatik esas sistem seçiminin güvenilir bir yöntemle programlanması,uygulayıcının işini kolaylaştıracaktır.Önerilen metod ve geliştirilen program, bu açıdan yararlı olabilecektir.

Bu çalışma sınırlarına dahil edilmeyen,hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçiminde yükün taşıyıcı sistemde en kısa dolaşımının gözönüne alınması ve genişletilmiş denge matrisinin band matris haline getirilmesiyle,program daha verimli hale getirilebilir. Bu çalışmanın araştırma aşamasında, Topçu'nun (1978) çalışmasında üç boyutlu taşıyıcı sistemleri ve plakları çözdüğü görülmüştür.

Bununla birlikde hiperstatik bilinmeyenlerin otomatik seçimi işleminde, taşıyıcı sistemin hiperstatiklik derecesi ρ denge matrisi satır sayısı m'den büyük olmamalıdır.

KAYNAKLAR

Armenakas,A.E.,1990.Modern Structural Analysis:The Matrix Method Approach Mc Graw-Hill Publishing.

Çakıroğlu,A.,Çetmeli,E.,1990.Yapı Statiği Cilt 1-2.Beta Yayınları

Göğüş,İ.,1993.Yapı Sistemlerinin Hesabında Matris Metotları 1-2 Ders Notları

Lawo-Thierauf,1980.Stabtragwerke:Matrizenmethoden der Statik und Dynamik Teil 1:Statik.Vieweg Verlag.

Szilard,R.,1982.Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik.Band1.Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn.

Topçu,A.,1978.Ein Beitrag zur systematischen Berechnung finiter Elementtragwerke nach der Kraftmethode.Dissertation.

Zurmühl,R.,1950.Matrizen;Eine Darstellung für Ingenieure.Springer Verlag.

Zurmühl,R.,1961.Matrizen und ihre technischen Anwendungen.Springer Verlag.

EK 1 : HAZIRLANAN PROGRAM

```
10 REM YÜKSEK LİSANS  TEZ ÇALIŞMASI
20 REM MATRİS KUVVET METODUNDA HİPERSTATİK BİLİNMEYENLERİN OTOMATİK SEÇİMİ
30 REDIM A(M, N): REDIM B(M, N): REDIM C(M, N): REDIM D(M, N): REDIM F(M): REDIM G(M):REDIM H(M): REDIM E(M,N)
40 INPUT "DENGE MATRİSİNİN SATIR SAYISINI GİRİNİZ="; R
50 INPUT "SIFIR SATIRI BAŞLANGIÇ NUMARASINI GİRİNİZ="; Z
60 INPUT "GENİŞLETİLMİŞ DENGE MATRİSİNİN SATIR SAYISINI GİRİNİZ="; M: N = M
70 REM MATRİSİN OKUNMASI
80 FOR I = 1 TO M
90 FOR J = 1 TO N
100 READ A(I, J)
110 F(I) = I
120 PRINT "A("; I; J; ")="; A(I, J),
130 NEXT J
140 NEXT I: PRINT
150 E = 1
160 REM ALTPROGRAMA GECIS
170 GOSUB 1050
180 FOR I = 1 TO M
190 FOR J = 1 TO N
200 PRINT "A("; I; J; ")="; A(I, J),
210 NEXT J
220 NEXT I: PRINT
230 REM MATRİSİN İŞLEM ADIMINDA SÜTUNDAKİ DEĞİŞİKLİKLERİN YAPILMASI
240 FOR S = 1 TO M
250 FOR T = 1 TO N
260 B(S, T) = A(S, T)
270 C(S, T) = A(S, T)
280 NEXT T
```

```
290 NEXT S
300 FOR I = (E + 1) TO M
310 C(I, E) = A(I, E) / A(E, E)
320 NEXT I
330 FOR I = 1 TO M
340 FOR J = 1 TO N
350 A(I, J) = C(I, J)
360 PRINT "A("; I; J; ")="; A(I, J),
370 NEXT J
380 NEXT I: PRINT
390 E = E + 1: IF E = M + 1 THEN 530
400 REM MATRİSİN DİĞER ELEMANLARININ YER DEĞİŞTİRMESİ
410 FOR I = E TO M
420 FOR J = E TO M
430 D(I, J) = A(I, J) - A(I, (E - 1)) * A((E - 1), J)
440 PRINT "A("; I; J; ") = "; D(I, J),
450 NEXT J
460 NEXT I: PRINT
470 FOR I = E TO M
480 FOR J = E TO M
490 A(I, J) = D(I, J)
500 NEXT J
510 NEXT I
520 GOTO 160
530 PRINT : PRINT " SATIR DEĞİŞİM VEKTÖRÜ": FOR I = 1 TO M
540 PRINT "F("; I; ")="; F(I);
550 NEXT I
560 FOR I = 1 TO M
570 FOR J = 1 TO M
580 B(I, J) = 0
590 C(I, J) = 0
600 D(I, J) = 0
610 NEXT J
620 NEXT I
630 FOR I = 1 TO M
```

```
640 FOR J = 1 TO I
650 B(I, J) = A(I, J)
660 NEXT J: NEXT I
670 FOR I = 1 TO M
680 B(I, I) = 1
690 NEXT I
700 FOR I = M TO 1 STEP -1
710 FOR J = M TO I STEP -1
720 C(I, J) = A(I, J)
730 NEXT J: NEXT I
740 FOR I = 1 TO M
750 D(I, I) = 1
760 NEXT I
770 PRINT : FOR I = 1 TO M
780 FOR J = 1 TO N
790 PRINT "A("; I; J; ")="; A(I, J),
800 NEXT J
810 NEXT I
880 DATA -1,0,0,0,0,0,0,0,0,-.707,0,0,0,0,0,0
890 DATA 0,0,0,0,1,0,0,0,0,-.707,0,0,0,0,0,.707
900 DATA 0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-.707
910 DATA 1,0,0,0,0,0,0,0,.707,0,0,0,0,0,0,0
920 DATA 0,0,0,0,0,1,0,0,.707,0,0,.707,0,0,0,0
930 DATA 0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-.707,0,0,0,0
940 DATA 0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,.707,0,0,0
950 DATA 0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,.707,0,.707,0,0,0
960 DATA 0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,.707,0,0,0,0,0
970 DATA 0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-.707,0,0
980 DATA 0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,.707,-.707,0
990 DATA 0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-.707,0
1000 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1010 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1020 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1030 DATA 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
1040 END
```

```
1050 REM SÜTUNDAKİ MUTLAK DEĞERCE EN BÜYÜK ELEMANIN BULUNMASI
1060 EB = 0
1070 FOR I = E TO M
1080 ENBÜY = ABS(A(I, E))
1090 IF ENBÜY > EB THEN EB = ENBÜY: SAT = I
1100 IF ENBÜY = EB THEN EB = EB
1110 NEXT I
1120 IF EB = 0 AND E > R THEN 1260
1130 IF EB = 0 AND E <= R THEN 1150
1140 GOTO 1400
1150 IF E + 1 > M THEN A(E, E) = 1
1160 IF E + 1 > M THEN B(E, E) = 1
1170 IF E + 1 > M THEN C(E, E) = 1
1180 IF E + 1 > M THEN D(E, E) = 1
1190 IF E + 1 > M THEN 1490
1200 A(Z, E) = 1
1210 B(Z, E) = 1
1220 C(Z, E) = 1
1230 D(Z, E) = 1
1240 IF E <= R THEN SAT = Z
1250 IF E <= R THEN 1310
1260 IF E > R THEN A(E, E) = 1
1270 IF E > R THEN B(E, E) = 1
1280 IF E > R THEN C(E, E) = 1
1290 IF E > R THEN D(E, E) = 1
1300 GOTO 1490
1310 REM SATIRLARIN YER DEĞİŞTİRMESİ
1320 I = SAT
1330 FOR K = 1 TO M
1340 B(E, K) = A(E, K)
1350 A(E, K) = A(Z, K)
1360 A(Z, K) = B(E, K)
1370 NEXT K
1380 Z = Z + 1
```

```
1390 GOTO 1460
1400 I = SAT
1410 FOR K = 1 TO M
1420 B(E, K) = A(E, K)
1430 A(E, K) = A(I, K)
1440 A(I, K) = B(E, K)
1450 NEXT K
1460 G(E) = F(E)
1470 F(E) = F(I)
1480 F(I) = G(E)
1490 REM SATIR SÜTUN BİTTİ
1500 RETURN
```

EK 2 : ELEMAN DENGE MATRİS TABLOLARI *

a tipi düzlem çubuk için eleman denge matrisi,

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{vmatrix} -c & s/l & s/l \\ -s & -c/l & -c/l \\ 0 & 1 & 0 \\ c & -s/l & -s/l \\ s & c/l & c/l \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$

Uzay kafes çubuğu için eleman denge matrisi,

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{vmatrix} -c_{11} \\ -c_{12} \\ -c_{13} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix}$$

$\cos\alpha = c_{ij}$

$c_{11}=(x_2-x_1)/l$

$c_{12}=(y_2-y_1)/l$

$c_{13}=(z_2-z_1)/l$

* Bkz. Kaynak 4, Sayfa 444-458

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi : 17 Haziran 1970

Doğum Yeri : Ankara

Eğitim	: 1976-1981	Aydoğdu İlkokulu (İzmir)
	1981-1988	İstanbul Lisesi
	1989-1993	Y.T.Ü. İnş. Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü
	1993-	Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Halen bir mühendislik bürosunda proje mühendisi olarak çalışıyor.