

57433

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL ÇUBUK SİSTEMLERİN  
MAKRO ELEMANLA MATRİS ANALİZİ

İnş. Müh. Özgür AY

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında  
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. İrdesel GÖĞÜŞ

İSTANBUL 1996

## İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TEŞEKKÜR .....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1 GİRİŞ .....	1
1.1. MAKROELEMENLAR YOLUYLA YAPISAL ANALİZ.....	1
1.2. RİJİTLİK MATRİSİ METODU YAKLAŞIMIYLA MAKROELEMEN ANALİZ YÖNTEMİ.....	2
1.3. MAKROELEMENLARA AYIRMA YÖNTEMİYLE ANALİZ TEORİSİ.....	5
1.4. ORTAK DÜĞÜM NOKTALARININ ANKASTRE OLMASI DURUMUNDA MAKROELEMEN KUVVET VE DEPLASMANLARI.....	9
1.5. ORTAK DÜĞÜM NOKTALARININ SERBEST OLMASI DURUMUNDA MAKROELEMEN KUVVET VE DEPLASMANLARI.....	10
1.6. YAPI DEPLASMANLARI VE İÇ KUVVETLER.....	15
2.1. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK .....	16
3.1. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK-2 .....	27
3.2. SİSTEMİN SAP90 İLE YAPILMIŞ ÇÖZÜMÜ.....	63
4. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	69
EK1. MATRİS İNVERSİ ALMAK İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMI.....	70
KAYNAKLAR .....	72

## SEMBOL LİSTESİ

[  $K^k$  ] : k Makroelemanı için rijitlik matrisi

{  $U^k$  } : k Makroelemanı için dış yüklere bağlı deplasman vektörü

{  $P^k$  } : k Makroelemanı için dış yükler vektörü

{  $Q^k$  } : k Makroelemanı için sıcaklık değişiminden doğan dış yükler vektörü

{  $\bar{P}$  } : Efektif dış yükleme matrisi

{  $U_b$  } : Ortak sınır düğüm noktaları deplasman vektörü

{  $U_i$  } : İç düğüm noktası deplasman vektörü

{  $\bar{P}_b$  } : Ortak sınır düğüm noktaları reaksiyon kuvvetleri vektörü

{  $\bar{P}_i$  } : İç düğüm noktaları reaksiyon kuvvetleri vektörü

{  $\bar{S}_j^i$  } : Eleman yerel uç kuvvetleri

[  $K_b$  ] : Tüm yapı için, indirgenmiş toplam rijitlik matrisi

[ I ] : Birim Matris

[ 0 ] : Sıfır Matris

## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Makroelemanlarla analiz metodu akış şeması .....	3
Şekil 1.2 Makroelemanlara ayırma .....	4
Şekil 1.3 İndirgenmiş toplam rijitlik matrisinin oluşturulması .....	13
Şekil 1.4 Yapının ortak sınır düğüm noktası kuvvetlerinin belirlenmesi .....	14
Şekil 1.5 Delta kanatlı uçak için tipik makroeleman seçimi .....	15
Şekil 2.1 Kafes sistem .....	16
Şekil 2.2 Makroelemanlara bölünmüş kafes sistem .....	17
Şekil 3.1 Çubuk Sistem .....	27
Şekil 3.2 Sistemin Numaralandırılmış Hali .....	28
Şekil 3.3 Üç Makroelemana Bölünmüş Sistem .....	29
Şekil 3.4. Makroelemanların Ayrılmış Hali .....	30

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleŐmesinde, bana değerli zamanını ayıran ve yol gösteren çok kıymetli hocam Sayın Prof. İrdesel Göğüş'e, her an yanımda olan arkadaşım AraŐtırma Görevlisi Nuri Özhendeki'ye ve maddi, manevi her türlü desteği benden esirgemeyen aileme burada teŐekkürü bir borç bilirim.

Özgür Ay  
İstanbul - 1996



## ÖZET

Mühendislik uygulamalarında yüksek hızlı dijital bilgisayarların kullanımının günümüzde hızla yaygınlaşmasıyla matris metodlarının uygulamada kullanımı da o ölçüde artmıştır. Ancak büyük çubuk sistemlerin analizi sırasında çoğunlukla eldeki teknik imkanlarla sonuca ulaşmak güç olabilmektedir. Böyle hallerde yapı, elimizdeki bilgisayarın kapasitesiyle çözülebilecek daha küçük parçalara (Makroelemanlara) bölünebilir.

Yapının arzu edilen sayıda makroelemana bölünmesi tamamlandıktan sonra herbir makroeleman birbirinden bağımsız olarak analiz edilebilir. Tüm makroelemanların analizleri bittiğinde başlangıçtaki yapıyı oluşturmak üzere, belli kurallar dahilinde bu makroelemanlar yeniden biraraya getirilebilir.

Bu çalışmada ilk defa Przemieniecki (1960) tarafından geliştirilen makroelemanlar yoluyla yapısal analizin genel teorisi, rijitlik matrisi metodu yaklaşımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

İlk bölümde metodun kuralları detaylarıyla açıklanmış ve daha sonra da iki ayrı örnek üzerinde uygulama yapılmıştır.

İlk örnekte, düzlemsel bir kafes sistemin hem ortak sınır düğüm noktalarından hem de iç düğüm noktalarından birinde dış yük olması hali ele alınmıştır. Sistem iki ayrı makroelemana bölünmüş ve her bir eleman üzerinde ayrı ayrı işlem yapılarak sistemin bütün düğüm noktalarının deplasmanları hesaplanmıştır.

İkinci örnekte ise üç katlı bir düzlemsel çerçevenin çözümü gerçekleştirilmiştir. Sistemde her kat bağımsız bir makroeleman olarak seçilmiş ve üç ayrı makroelemandan oluşan sistemin çözümü yapılmıştır. Çözüm sonucunda tüm düğüm noktalarının deplasmanları ve tüm çubuk uç kuvvetleri hesaplanmıştır.

Her iki örneğin statik analizi ayrıca SAP90 adlı bilgisayar programıyla da yapılmış ve elde edilen sonuçlar örneklerin sonuna eklenmiştir.

Metod uygulanırken sıkça ihtiyaç duyulan matris inversi hesaplamaları için de geliştirilmiş Gauss-Jordan metoduna göre çözüm yapan bir bilgisayar programı yazılmıştır. (EK1)



## ABSTRACT

With the advent of high speed digital computers, matrix structural analysis has gained a great prominence throughout industry as a widely accepted method. But quite often the structural analyst is faced with structural problems which if analyzed as a whole will require computer storage which may exceed the available computer capacity. If and when such large scale problems arise, the structure may be partitioned into smaller structures (substructures) such that each substructure is small enough that it will fit the available computer core storage.

Once the substructure boundaries has been decided, each substructure can be analyzed separately. When all substructures are analyzed, they are assembled back together by implementing conditions of continuity at common boundaries.

In this study, it has been tried to explain the theory of analysis by structural partitioning which was developed by Przemieniecki (1960), using the stiffness matrix method approach.

In the first chapter, the method of analysis by structural partitioning is explained in details and in the preceding chapters the application of the method is shown on two different examples.

The first example is a planar truss structure with external loading on both interior and common boundary nodes, which has been analyzed by separating the system in to two substructures.

The second example illustrates the analysis of a two dimensional frame structure with three floors. Each floor is selected as a substructure for the analysis of this system and all nodal displacements and all frame element forces are calculated for the entire system.

Both of the examples have also been analyzed by using the SAP90 structural analysis program and the results that are obtained from the computer are also enclosed in this study to enable the comparison of results.

A computer program to calculate the inverse of matrices using advanced Gauss-Jordan method is also supplied in Appendix 1.

I believe that, the next point of study in this subject will be on three dimensional examples and for this reason, to produce a computer program for the complete algorithm of substructure-matrix method will be a great convenience for further studies.



# 1 GİRİŞ

## 1.1. MAKROELEMANLAR YOLUYLA YAPISAL ANALİZ

Günümüzde mühendisler, büyük çubuk sistemlerin bir bütün olarak analizinde sıklıkla mevcut bilgisayarların imkan verdiğiinden daha büyük kapasiteye ihtiyaç duymaktadırlar. Matris metodlarıyla analiz yöntemlerinin büyük yapılara uygulandığı durumlarda, yapı elemanlarının sayısı çoğunlukla eldeki bilgisayarın veya bilgisayar programlarının kapasitesini aşmaktadır. Böyle durumlarda sistem, sahip olduğumuz teknik imkanlarla çözülebilecek daha küçük parçalara bölünebilir.

Parçalara ayırma işlemi, bütün haldeki yapının istenilen sayıda ve keyfi seçilebilen sınırlara sahip alt yapı elemanlarına (makroelemanlara) bölünmesinden ibarettir. Hesap kolaylığı açısından bu bölme işleminin, fiziksel olarak uygun olan bir şekilde yapılması tercih edilmelidir.

Eğer her makroelemanın rijitlik veya süneklik özellikleri belirlenirse, her bir makroeleman bağımsız bir yapı elemanı olarak ayrı ayrı analiz edilebilir. Tüm makroelemanlar analiz edildikten sonra ortak sınırlarındaki süreklilik şartlarından yararlanılarak yeniden bir araya getirilebilir ve bu mantıkla tüm yapı için matris-deplasman veya matris-kuvvet metodlarıyla bir formülasyon geliştirilebilir.

Bu çalışmada, Przemieniecki (1960) tarafından geliştirilen makroelemanlar yoluyla yapısal analizin genel teorisi, rijitlik matrisi metodu yaklaşımıyla açıklanmaya çalışılmıştır.

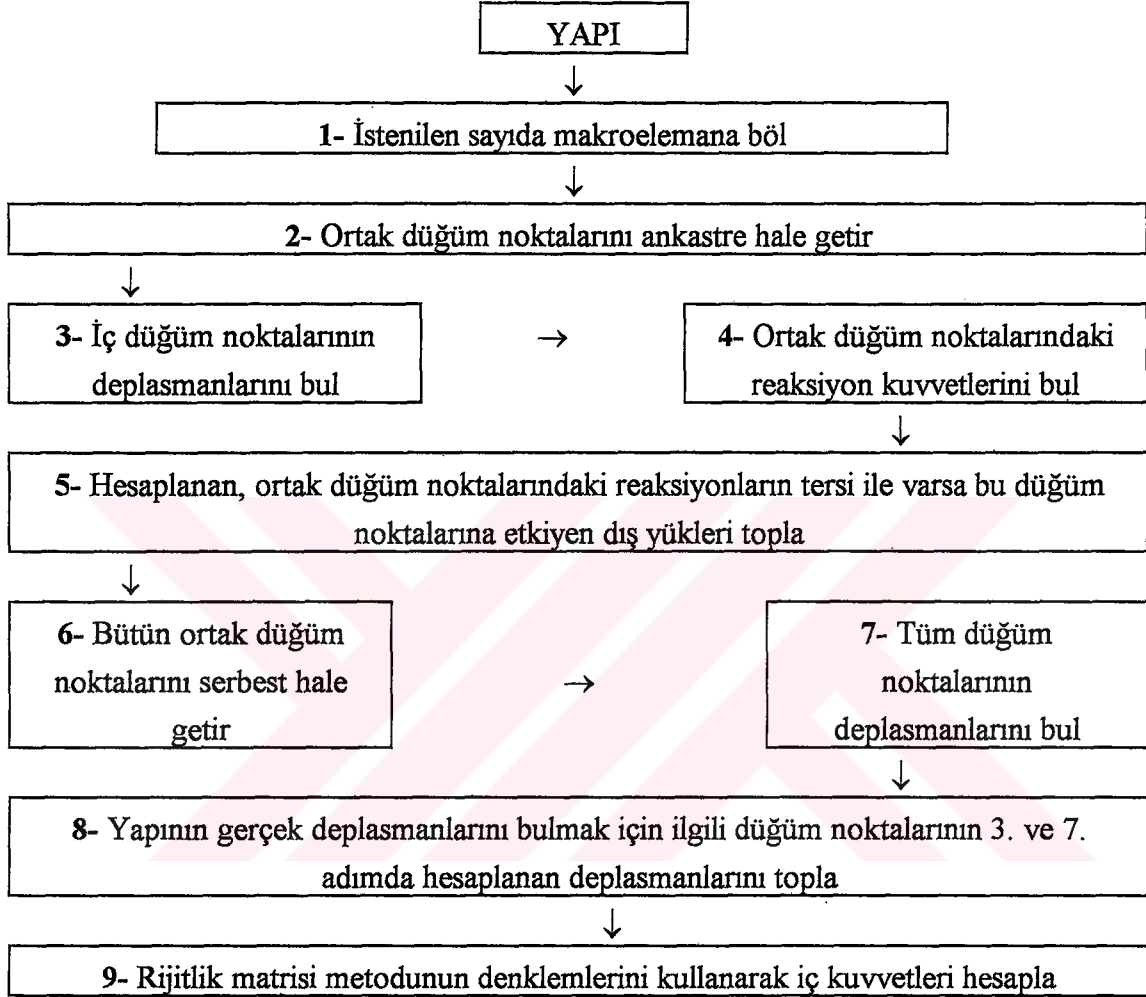
## 1.2. RİJİTLİK MATRİSİ METODU YAKLAŞIMIYLA MAKROELEMEN ANALİZ YÖNTEMİ

Makroelemanlarla analiz temelde bir gevşetme işlemine dayanır. Yapının istenilen sayıda makroelemana bölünmesi tamamlandıktan sonra, iki komşu makroelemanın ortak düğüm noktalarının tamamen ankastre olduğu varsayılır. Bu sayede her bir makroelemanın analizi ayrı ayrı yapılabilir ve iç düğüm noktalarındaki deplasmanlar hesaplanabilir. Deplasmanlar bilindiğinde ortak düğüm noktalarındaki reaksiyonlar bulunur ve bu noktalarda ilgili dış yüklerle birleştirilerek toplam sınır yüklemesi elde edilir.

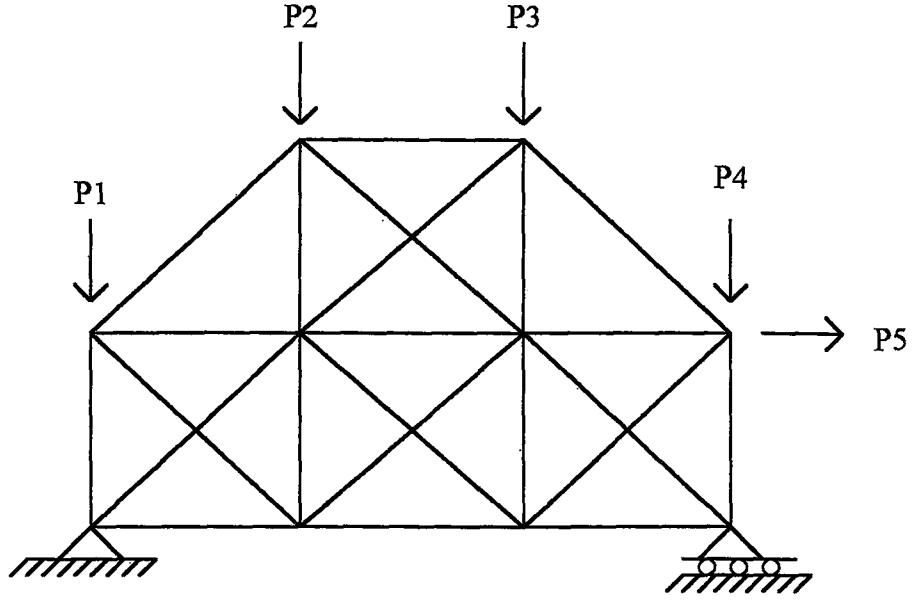
Doğal olarak sınır düğüm noktalarının deplasmanlarının çözümü, tüm yapının parçalara ayrılmadan çözümünde karşımıza çıkandan çok daha az sayıda bilinmeyen içermektedir. Dolayısıyla çalışacağımız matrisler göreceli olarak daha küçük boyutlarda olduklarından işlemlerde kolaylık sağlanmış olur.

Bu aşamalardan sonra ortak düğüm noktaları aynı anda serbest bırakılır ve iç düğüm noktalarının deplasmanları hesaplanır. Ortak düğüm noktalarının ankastre ve serbest olduğu iki durumda hesaplanan iki deplasmanın süperpoze edilmesi suretiyle de son ve gerçek deplasmanlar bulunmuş olur. Daha sonra ise normal, rijitlik matrisi metodunun denklemleri kullanılarak iç kuvvetler hesaplanır.

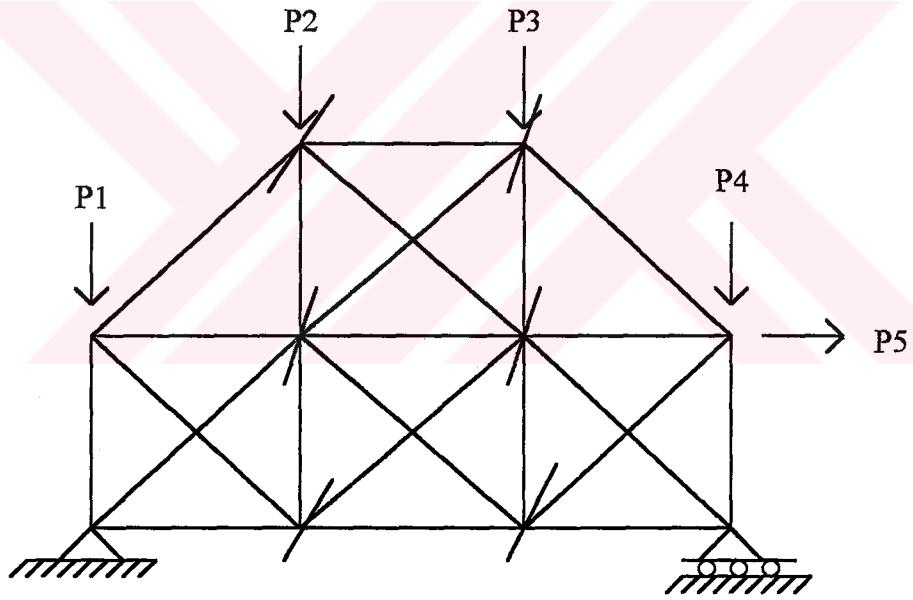
Aşağıda, makroelemanlara ayırma metodunda izlenecek adımlar şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 1.1



a) Yapının orjinal hali



b) Yapının 3 makroelemana bölünmüş hali

Şekil 1.2 Makroelemanlara Ayırma

### 1.3 MAKROELEMANLARA AYIRMA YÖNTEMİYLE ANALİZ TEORİSİ

Daha önceki çalışmalarda, düğüm noktalarında birbirine bağlı yapı elemanlarının birleşimi, olarak tanımlana gelen yapı, bu çalışma için, ortak düğüm noktalarında birbirine bağlı makroelemanların birleşimi olarak kabul edilecektir.

Yapı, ister yapı elemanlarının birleşiminden ve isterse makroelemanların birleşiminden oluşmuş olsun, kuvvetler ve deplasmanlar arasındaki fonksiyonel ilişkilerin matris denklem takımları cinsinden ifadesi aynı olacaktır.

K. makroeleman için bu ifade şu şekilde yazılabilir:

$$[K^k] \cdot \{U^k\} = \{P^k\} - \{Q^k\} \quad (1.1)$$

Denklemden  $[K^k]$  k. makroeleman için rijitlik matrisini,  $\{U^k\}$  dış yüklere bağlı deplasmanları temsil eden sütun matrisi,  $\{P^k\}$  dış yükleri ve  $\{Q^k\}$  da sıcaklık değişimine bağlı dış yükleri temsil etmektedir.

Analizin ilerleyen safhalarında kolaylık sağlaması bakımından burada  $\{\bar{P}\}$ , efektif dış yükleme matrisi aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

$$\{\bar{P}\} = \{P\} - \{Q\} \quad (1.2)$$

Bu tanımlamadan sonra (1.1) denklemini yeniden yazarsak

$$[K^k] \cdot \{U^k\} = \{\bar{P}^k\} \quad (1.3)$$

elde etmiş oluruz.

(1.3) denkleminde, ortak düğüm noktalarındaki kuvvetler ve deplasmanlar ile iç düğüm noktalarındaki kuvvetler ve deplasmanlar birbirinden ayrı şekilde ifade edilebilir. Bu amaçla denklem yeniden yazılırsa şu şekli alır:

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bi}] \\ [K_{ib}] & [K_{ii}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_b\} \\ \{\bar{P}_i\} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Burada b ve i indisleri, iki komşu makroeleman için sırasıyla ortak ve iç düğüm noktalarındaki kuvvet ve deplasmanları temsil etmektedir.

(b = boundry node, i = interior node)

Bundan sonra yapının toplam deplasmanlarını iki matrisin süperpozisyonu ile hesaplamak mümkün olabilecektir.

$$\{U\} = \{U^{(\alpha)}\} + \{U^{(\beta)}\} \quad (1.5)$$

$\alpha$  ve  $\beta$  indisleri sırasıyla, ortak düğüm noktalarının ankastre ve serbest olduğu durumları göstermektedir.

Başka bir şekilde ifade edilirse;  $\{U^{(\alpha)}\}$ ,  $\{U_b\} = 0$  iken  $\{\bar{P}_i\}$ den dolayı meydana gelen deplasmanları ifade eden sütun matris ve  $\{U^{(\beta)}\}$  da  $\{\bar{P}_i\} = 0$  iken  $\{U_b\}$  deplasmanlarının oluşmasına olanak verecek şekilde  $\{U^{(\alpha)}\}$  için düzeltme faktörüdür.

Böylece (1.5) denklemini yeniden yazılırsa

$$\{U\} = \begin{bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{U_b^{(\alpha)}\} \\ \{U_i^{(\alpha)}\} \end{bmatrix} \text{ sınırlar ankastre} + \begin{bmatrix} \{U_b^{(\beta)}\} \\ \{U_i^{(\beta)}\} \end{bmatrix} \text{ sınırlar serbest} \quad (1.5a)$$

elde edilmiş olur, ki burada son terim sınır düğüm noktalarının serbestleştirilmesinden doğan düzeltmedir.

Benzer şekilde  $\{\bar{P}\}$  dış kuvvetleri de bölünebilir.

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = \{\bar{\mathbf{P}}^{(\alpha)}\} + \{\bar{\mathbf{P}}^{(\beta)}\} \quad (1.6)$$

veya

$$\{\bar{\mathbf{P}}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{P}}_b\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{P}}_b^{(\alpha)}\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\alpha)}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{P}}_b^{(\beta)}\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\beta)}\} \end{bmatrix} \quad (1.6a)$$

(1.5a) ve (1.6a) denlemleri (1.4) denkleminde yerine yazılırsa ,

$$\begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bi}] \\ [K_{ib}] & [K_{ii}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_b^{(\alpha)}\} \\ \{U_i^{(\alpha)}\} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \{U_b^{(\beta)}\} \\ \{U_i^{(\beta)}\} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{P}}_b^{(\alpha)}\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\alpha)}\} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \{\bar{\mathbf{P}}_b^{(\beta)}\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\beta)}\} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Yukarıdaki tanımdan

$$\{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\beta)}\} = 0 \quad (1.8)$$

ve

$$\{\bar{\mathbf{P}}_i^{(\alpha)}\} = \{\bar{\mathbf{P}}_i\} \quad (1.8a)$$

Makroeleman sınırları ankastre kabul edildiğinde (1.4) denkleminde

$$\{U_b^{(\alpha)}\} = 0 \quad (1.9)$$

$$\{U_i^{(\alpha)}\} = [K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{\mathbf{P}}_i\} \quad (1.9a)$$

ve

$$\{\bar{\mathbf{P}}_b^{(\alpha)}\} = [K_{bi}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{\mathbf{P}}_i\} = \{\bar{\mathbf{R}}_b\} \quad (1.10)$$

olduğu açıkça görülmektedir.

Burada  $\{\bar{P}_b^{(\alpha)}\}$  matrisinin,  $\{\bar{P}_i\}$  iç kuvvetleri etkidiği zaman  $\{U_b\} = 0$  şartının sağlanabilmesi için gerekli sınır düğüm noktası reaksiyonlarını temsil ettiği unutulmamalıdır.

Makroeleman sınır düğüm noktaları, serbest olarak düşünüldüğünde ise,  $\{U^{(B)}\}$  deplasmanları (1.4) denkleminde şu şekilde bulunabilir:

$$\{U_i^{(B)}\} = -[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \cdot \{U_b^{(B)}\} \quad (1.11)$$

$$\{U_b^{(B)}\} = [K_b]^{-1} \cdot \{\bar{P}_b^{(B)}\} \quad (1.12)$$

Burada

$$[K_b] = [K_{bb}] - [K_{bi}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \quad (1.13)$$

dir ve sınır düğüm noktaları rijitlik matrisini temsil etmektedir.  $\{\bar{P}_b^{(B)}\}$  matrisi (1.6a) ve (1.10) denklemlerinden bulunabilir.

$$\{\bar{P}_b^{(B)}\} = \{\bar{P}_b\} - \{\bar{P}_b^{(\alpha)}\} = \{\bar{P}_b\} - [K_{bi}] [K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} = \{\bar{S}_b\} \quad (1.14)$$

Sınır düğüm noktalarının deplasmanları sıfıra eşitlendiği zaman makroelemanlar birbirlerinden tamamen izole edilmiş olurlar, öyleki, iç düğüm noktalarına etkiyen bir dış kuvvet sadece o makroelemanda deplasmana sebep olabilir. Buradan da açıkça anlaşıldığı üzere, sınır düğüm noktaları ankastre iken oluşan  $\{U_i^{(\alpha)}\}$  iç deplasmanlar, (1.9a) denklemi kullanılarak her makroeleman için ayrı ayrı hesaplanabilir.  $\{U_b^{(B)}\}$  sınır deplasmanları da (1.12) denkleminde elde edilebilir. Bu işlem  $[K_b]$  nin inversini içermektedir ki bu da toplam rijitlik matrisi  $[K]$  dan çok daha küçük boyutlara sahip bir matristir.

#### 1.4. ORTAK DÜĞÜM NOKTALARININ ANKASTRE OLMASI DURUMUNDA MAKROELEMEN KUVVET VE DEPLASMANLARI

Ortak düğüm noktalarının hareketinin engellendiği durumda (1.4) denklemini aşağıdaki şekle gelir :

$$\{U_b\} = \{U_b^{(\alpha)}\} = \{O\} \quad (1.15a)$$

$$\{U_i\} = \{U_i^{(\alpha)}\} \quad (1.15b)$$

$$\{\bar{P}_b\} = \{\bar{P}_b^{(\alpha)}\} = \{R_b^{(\alpha)}\} \quad (1.16a)$$

$$\{\bar{P}_i\} = \{\bar{P}_i^{(\alpha)}\} \quad (1.16b)$$

Burada  $\{R_b^{(\alpha)}\}$ , sıfır deplasman vektörü olan  $\{U_b^{(\alpha)}\}$  yı sağlayan tepki kuvvetlerini gösteren kolon vektördür.  $\{\bar{P}_i\}$  ise iç düğüm noktalarına etkiyen kuvvetleri temsil etmektedir.

Açıkça görülmektedir ki tüm yapının kesin çözümüne ulaşabilmek için öncelikle  $\{R_b^{(\alpha)}\}$  sınır reaksiyonları ve  $\{U_i^{(\alpha)}\}$  iç düğüm noktalarının yer değiştirmeleri hesaplanmalıdır.

Eğer (1.15) ve (1.16) denklemleri (1.4) denkleminde yerine konulursa  $[K^k]$  rijitlik matrisi tekil olmayan bir matris olur ve bu şekilde  $\{U_i^{(\alpha)}\}$  iç düğüm noktaları deplasmanları ile  $\{R_b^{(\alpha)}\}$  sınır reaksiyonları için bir çözüm elde edilebilir. k. makroeleman için bu yerine koyma işlemini gerçekleştirilirse

$$\begin{bmatrix} \{R_b^{k(\alpha)}\} \\ \{\bar{P}_i^k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{bb}^k] & [K_{bi}^k] \\ [K_{ib}^k] & [K_{ii}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{O\} \\ \{U_i^{k(\alpha)}\} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

(1.17) denklemini iç düğüm noktalarının yer değiştirmesi ve ortak sınır düğüm noktası reaksiyonları için çözümlerse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\{U_i^{k(\alpha)}\} = [K_{ii}^k]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i^k\} \quad (1.18)$$

ve

$$\{R_b^{k(\alpha)}\} = [K_{bi}^k] \cdot [K_{ii}^k]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i^k\} \quad (1.19)$$

## 1.5. ORTAK DÜĞÜM NOKTALARININ SERBEST OLMASI DURUMUNDA MAKROELEMAN KUVVET VE DEPLASMANLARI

İç yüklemeler altında  $[K^{(k)}_b]$  sınır rijitliklerini ve  $\{R^{(k)}_b\}$  reaksiyonlarını belirledikten sonra tüm makroeleman ortak sınır düğüm noktaları serbest hale getirilir. Bu işlemden sonra sınır reaksiyonları ve sınırlara etkiyen dış yükler dengede olmayacaklarından, oluşacak sınır reaksiyonları denge sağlanıncaya kadar yeni deplasmanlar meydana getirecektir.

Ortak sınır düğüm noktalarını serbest bıraktığımız taktirde (1.4) denklemindeki deplasman ve kuvvet vektörleri şu şekli alırlar:

$$\{\bar{P}_b^{(\beta)}\} = \{\bar{P}_b\} - \{R^{(\alpha)}_b\} \quad (1.20a)$$

$$\{\bar{P}_i\} = \{\bar{P}_i^{(\beta)}\} = \{O\} \quad (1.20b)$$

$$\{U_b\} = \{U_i^{(\beta)}\} \quad (1.21a)$$

$$\{U_i\} = \{U_i^{(\beta)}\} \quad (1.21b)$$

(1.19) denklemi (1.20) denkleminde yerine konulursa  $\{\bar{P}_b^{(\beta)}\}$  için aşağıdaki form elde edilir. Denklemi k. makroeleman için yazarsak.

$$\{\bar{P}_b^{k(\beta)}\} = \{\bar{P}_b^k\} - [K_{bi}^k] \cdot [K_{ii}^k]^{-1} \cdot \{P_i^k\} \quad (1.22)$$

(1.20) ve (1.21) denklemleri (1.4) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_b^{k(\beta)}\} \\ \{O\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{bb}^k] & [K_{bi}^k] \\ [K_{ib}^k] & [K_{ii}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{U_b^{k(\beta)}\} \\ \{U_i^{k(\beta)}\} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

(1.23) denkleminde, iç düğüm noktalarının yer değiştirmelerini, ortak sınır düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden ifade edilebileceği görülmektedir.

$$\{U_i^{k(\beta)}\} = - [K_{ii}^k]^{-1} \cdot [K_{ib}^k] \cdot \{U_b^{k(\beta)}\} \quad (1.24)$$

Yine (1.23) den ortak sınır düğüm noktası kuvvetleri

$$\{\bar{P}_b^{k(\beta)}\} = [K_{bb}^k] \{U_b^{k(\beta)}\} + [K_{bi}^k] \cdot \{U_i^{k(\beta)}\} \quad (1.25)$$

(1.24) denklemini (1.25) denkleminde yerine yazılırsa, kuvvetler ve bu kuvvetlere karşılık gelen yerdeğiştirmeler arasındaki fonksiyonel bağıntı aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$\{\bar{P}_b^{k(\beta)}\} = [K_b^k] \cdot \{U_b^{k(\beta)}\} \quad (1.26)$$

ki burada

$$[K_b^k] = \left[ [K_{bb}^k] - [K_{bi}^k] [K_{ii}^k]^{-1} [K_{ib}^k] \right] \quad (1.27)$$

dir.

$[K_b^k]$  rijitlik matrisi, k. makroelemanın sadece ortak düğüm noktalarına yaptığı rijitlik katkısını temsil etmektedir. Bu matris bundan sonra makroeleman indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılacaktır.

Tüm yapının ortak sınır düğüm noktalarının deplasmanlarını bulabilmek için bütün makroelemanların rijitlik katkıları süperpoze edilmelidir. Bu işlem sonucunda

$$\{\bar{P}_b^{(\beta)}\} = [K_b] \{U_b^{(\beta)}\} \quad (1.28)$$

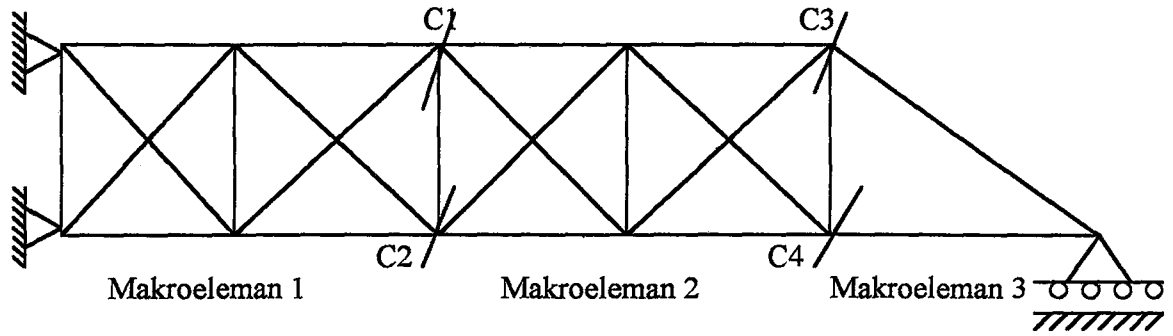
veya

$$\{U_b^{(\beta)}\} = [K_b]^{-1} \{\bar{P}_b^{(\beta)}\} \quad (1.29)$$

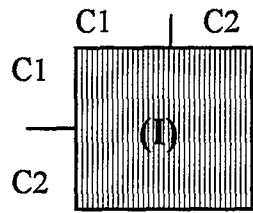
bulunur.

$[K_b]$  matrisi, sadece ortak düğüm noktası kuvvetlerine karşılık gelen ortak düğüm noktası deplasmanlarına bağlı olan ve tüm yapı için, indirgenmiş toplam rijitlik matrisidir. Bu matris şekil 1.3'de görüldüğü gibi tüm makroeleman matrislerini süperpoze ederek oluşturulur.

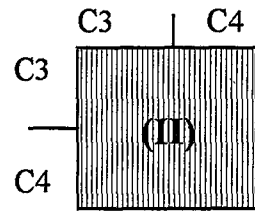
Benzer şekilde,  $\{\bar{P}_b^{(\beta)}\}$  kuvvet vektörü de bütün  $\{\bar{P}_b^{k(\beta)}\}$  makroeleman sınır kuvveti matrislerini şekil (1.4)'de görüldüğü gibi süperpoze ederek bulunur.



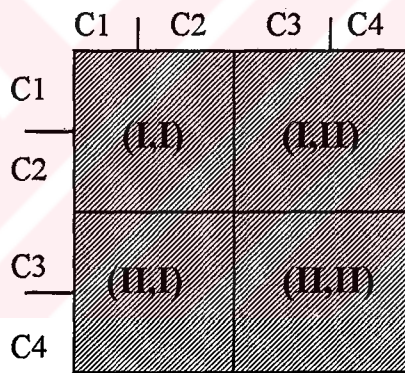
$$[K_b^1] =$$



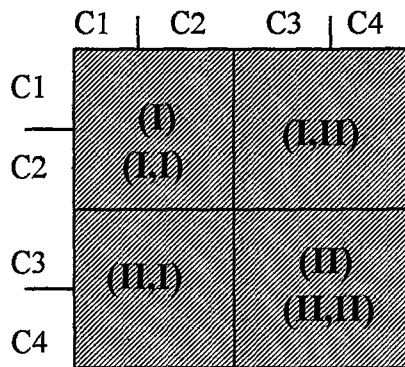
$$[K_b^3] =$$



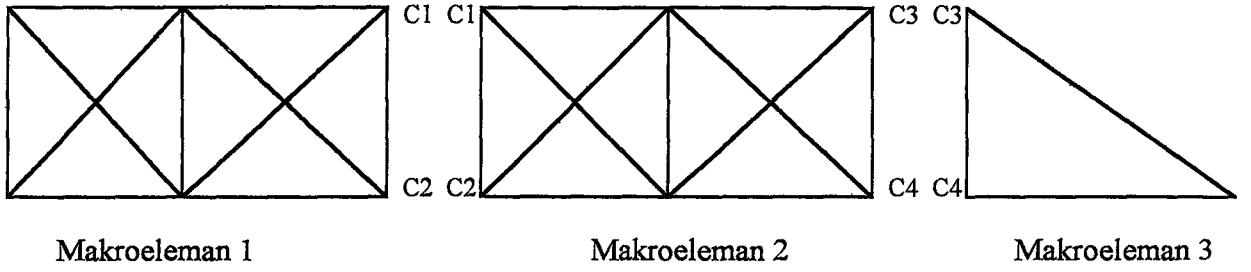
$$[K_b^2] =$$



$$[K_b] =$$



Şekil 1.3



a) Yapının parçalara ayrılmış hali

$$\{\bar{P}_b^{1(\beta)}\} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \{\bar{P}_b^{2(\beta)}\} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \{\bar{P}_b^{3(\beta)}\} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

b) Yapının ortak sınır kuvvet vektörleri

$$\{\bar{P}_b^{(\beta)}\} = \sum_i \{P_b^{i(\beta)}\} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

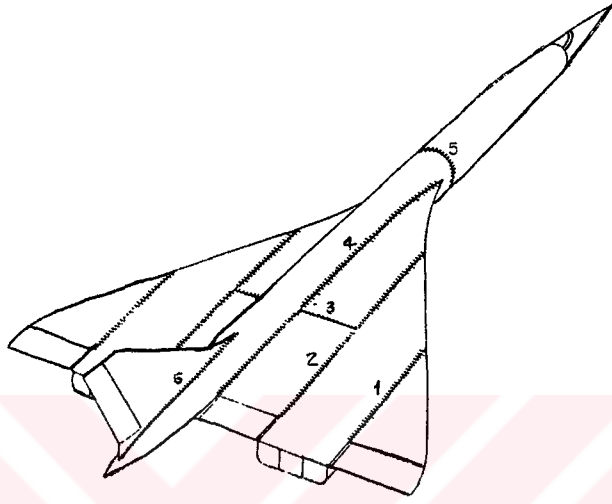
c) Yapının ortak sınır düğüm noktaları kuvvet vektörü

Şekil 1.4

$[K_b^k]$  makroeleman rijitlik matrisleri  $[K_b]$  tüm yapı rijitlik matrisinde yerine yazılırken, bu matristeki yerlerinin belirlenmesinde (1.28) denkleminde seçilen sıranın gözönüne alınması uygun olur.

Bazı makroelemanlar fiziksel olarak birbirleriyle ilişkili olmadıklarından, bunları birleştiren rijitlik matrisleri sıfıra eşit olacaklardır. Birleşim rijitlik matrisleri sadece birbirleriyle ortak sınırları olan makroelemanlar için ortaya çıktıklarından,

makroelemanlar ve deplasmanlar için numaralama sistemi belirlenmesi, aşamasında,  $[k_b^k]$  eleman alt matrislerinin ana diyagonal üzerinde bir bant matris oluşturacak şekilde ayarlanması avantajımıza olacaktır. Zira  $[K_b]^{-1}$  in hesaplanması için bantmatrislere özgü bir invers alma programı kullanıldığında hesaplama süresi önemli ölçüde kısılacaktır.



Şekil 1.5

Delta kanatlı bir uçak için tipik makroeleman seçimi Şekil (1.5)'de gösterilmiştir. Bu seçim sonucu  $[K_b]$  bir dördü bant matris şeklinde oluşmaktadır. Burada satır ve sütun numaraları makroeleman sınır numaralarını göstermektedir.

$$[K_b] = \begin{bmatrix} [1,1] & [1,2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [2,1] & [2,2] & [2,3] & [2,4] & 0 & 0 \\ 0 & [3,2] & [3,3] & [3,4] & 0 & 0 \\ 0 & [4,2] & [4,3] & [4,4] & [4,5] & [4,6] \\ 0 & 0 & 0 & [5,4] & [5,5] & [5,6] \\ 0 & 0 & 0 & [6,4] & [6,5] & [6,6] \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

## 1.6. YAPI DEPLASMANLARI VE İÇ KUVVETLER

Yapı üzerindeki ortak sınır düğüm noktalarının gerçek deplasmanları (1.29) denkleminde verilmiştir. Diğer iç düğüm noktalarının deplasmanları ise (1.9) ve (1.11) denklemleri birleştirilerek bulunabilir.

$$\{U_i^k\} = [K_{ii}^k]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i^k\} - [K_{ii}^k]^{-1} \cdot [K_{ib}^k] \cdot \{U_b^k\} \quad (1.31)$$

ve

$$\begin{bmatrix} \{U_b^k\} \\ \{U_i^k\} \end{bmatrix}_{\substack{\text{sınırlar} \\ \text{serbest}}} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{U_i^k\} \end{bmatrix}_{\substack{\text{sınırlar} \\ \text{ankastre}}} + \begin{bmatrix} \{I\} \\ -[K_{ii}^k]^{-1} \cdot [K_{ib}^k] \end{bmatrix} \cdot \{U_b^k\} \quad (1.32)$$

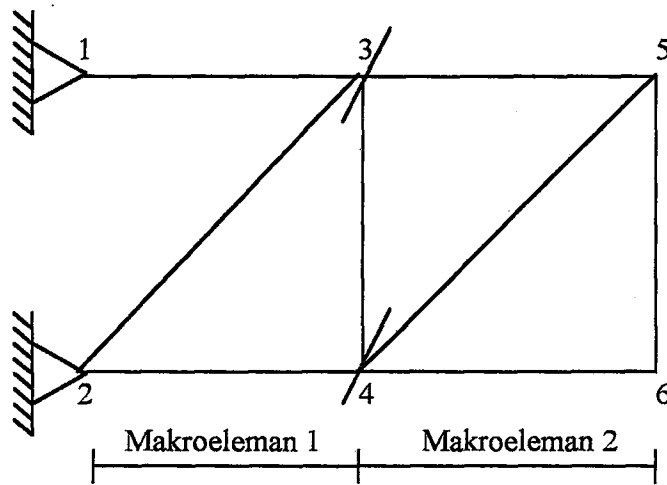
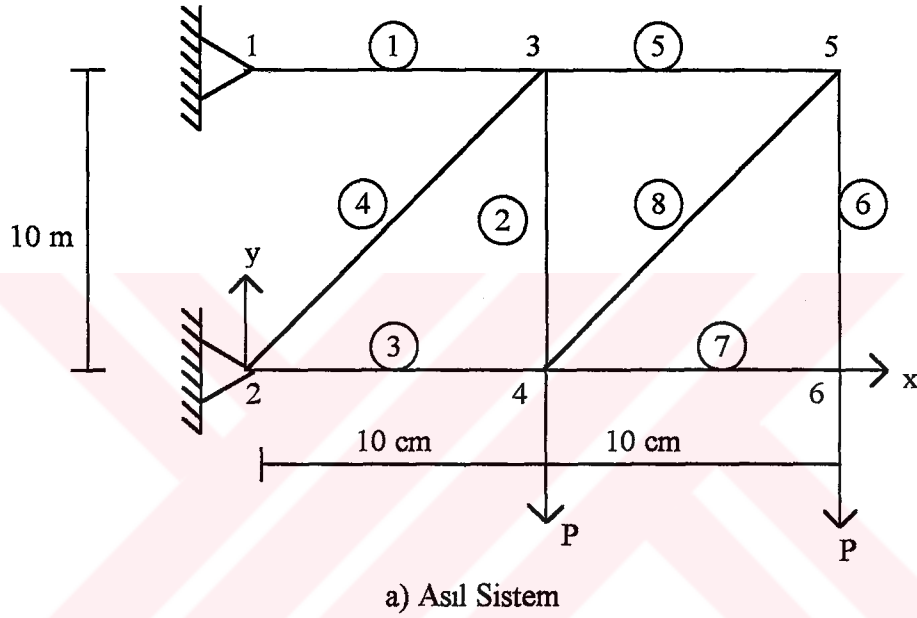
veya

$$\{U^k\}_{\substack{\text{sınırlar} \\ \text{serbest}}} = \{U^k\}_{\substack{\text{sınırlar} \\ \text{ankastre}}} + \begin{bmatrix} \text{Sınırların serbest} \\ \text{hale getirilme sinden} \\ \text{doğru deplasmanlar} \end{bmatrix} \quad (1.32a)$$

Bütün düğüm noktası deplasmanları bilindiğinde, yerdeğiştirmeler ve bunlara karşılık gelen kuvvetler arasındaki fonksiyonel bağıntılar kullanılarak bütün yapı elemanları için iç kuvvetler hesaplanabilir.

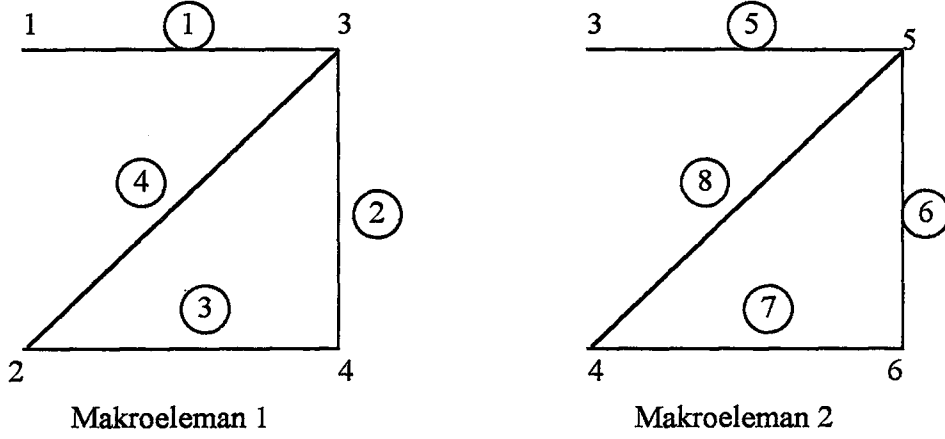
## 2.1. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK

Makroelemanlarla analiz metodunu daha iyi açıklayabilmek için Şekil (2.1)'de görülen düzlemsel kafes sistemin çözümü yapılacaktır. İşlemsel kolaylık açısından bütün çubukların aynı tip malzemeden yapılmış olduğu varsayılmaktadır. Bu malzemenin elastisite modülü  $10^7 \text{ kg/cm}^2$  dir. Bütün yatay ve düşey çubukların kesit alanı  $1 \text{ cm}^2$ , diğer çubukların  $\sqrt{2} \text{ cm}^2$  dir.



Şekil 2.1. Kafes Sistem

Yapıyı iki makroelemana bölerek analize başlıyoruz. Bundan sonraki adım Şekil (2.2)'de görülen makroelemanların her biri için rijitlik matrisini oluşturmaktır.



Şekil 2.2

5 Numaralı kaynakta 445. sayfada bulunan tablodan faydalanılarak

### 1. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_3^x \\ F_3^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

### 2. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_3^x \\ F_3^y \\ F_4^x \\ F_4^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_4^x \\ \delta_4^y \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

## 3. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_2^x \\ F_2^y \\ F_4^x \\ F_4^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

## 4. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_2^x \\ F_2^y \\ F_3^x \\ F_3^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

## 5. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_3^x \\ F_3^y \\ F_5^x \\ F_5^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_5^x \\ \delta_5^y \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

## 6. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_5^x \\ F_5^y \\ F_6^x \\ F_6^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_5^x \\ \delta_5^y \\ \delta_6^x \\ \delta_6^y \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

## 7. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_4^x \\ F_4^y \\ F_6^x \\ F_6^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_4^x \\ \delta_4^y \\ \delta_6^x \\ \delta_6^y \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

## 8. Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_4^x \\ F_4^y \\ F_5^x \\ F_5^y \end{bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_4^x \\ \delta_4^y \\ \delta_5^x \\ \delta_5^y \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

1 Makroelemanın toplam rijitlik matrisini elde etmek için ilgili çubukların eleman rijitlik matrisleri süperpoze edilirse, (Bakınız Şekil 1.3) :

$$[K^I] = 10^6 \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -0.5 & -0.5 & 1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \end{array} \quad (2.9)$$

2 Makroelemanın toplam rijitlik matrisini elde etmek için de aynı işlem yapılırsa:



$$[K_b^H] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - 10^6 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\begin{bmatrix} 15 \times 10^5 & 5 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 5 \times 10^5 & 15 \times 10^5 & 0 & -10^6 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & -10^6 & 0 & 10^6 \end{bmatrix}^{-1} x 10^6 \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$[K_{ii}]$$

$$[K_{ii}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000001 & -0.000001 & 0 & -0.000001 \\ -0.000001 & 0.000003 & 0 & 0.000003 \\ 0 & 0 & 0.000001 & 0 \\ -0.000001 & 0.000003 & 0 & 0.000004 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$[K_{ii}]^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$[K_b^H] = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$[K_b^H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \{0\} \quad (2.17)$$

Bütün sistem için ortak sınır indirgenmiş toplam rijitlik matrisini elde etmek üzere  $[K_b^I]$  ve  $[K_b^H]$  toplanırsa

$$[K_b] = [K_b^I] + [K_b^{II}] = 10^6 \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Sınır kuvvetlerini bulmak için (1.14) denkleminde

$$\{\bar{S}_b\} = \{\bar{P}_b\} - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} \quad (2.19)$$

$$\{\bar{S}_b\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} - 10^6 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & -1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \times 10^5 & 5 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 5 \times 10^5 & 15 \times 10^5 & 0 & -10^6 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & -10^6 & 0 & 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\{\bar{S}_b\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ P \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\{\bar{S}_b\} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ -P \\ -2P \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$\{U_b\}$  sınır deplasmanları (1.12) denkleminde

$$\{U_b\} = [K_b]^{-1} \cdot \{\bar{S}_b\} \quad (2.23)$$

$$\{U_b\} = \begin{bmatrix} 15 \times 10^5 & 5 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 5 \times 10^5 & 15 \times 10^5 & 0 & -10^6 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & -10^6 & 0 & 10^6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ -P \\ -2P \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\{U_b\} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3P \\ -7P \\ -P \\ -9P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_4^x \\ \delta_4^y \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$\{U_i\}$  düğüm noktalarının yer değiştirmeleri (1.31) denkleminde

$$\{U_i\} = [K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} - [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \cdot \{U_b\} \quad (2.26)$$

$$[K_{ii}]^{-1} \cdot \{P_i\} = \begin{bmatrix} 15x10^5 & 5x10^5 & 0 & 0 \\ 5x10^5 & 15x10^5 & 0 & -10^6 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & -10^6 & 0 & 10^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ 0 \\ -4P \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \cdot \{U_b\} = \begin{bmatrix} 15x10^5 & 5x10^5 & 0 & 0 \\ 5x10^5 & 15x10^5 & 0 & -10^6 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & -10^6 & 0 & 10^6 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3P \\ -7P \\ -P \\ -9P \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} -3P \\ 13P \\ P \\ 13P \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\{U_i\} = 10^{-6} \begin{bmatrix} P \\ -3P \\ 0 \\ -4P \end{bmatrix} - 10^{-6} \begin{bmatrix} -3P \\ 13P \\ P \\ 13P \end{bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 4P \\ -16P \\ -P \\ -1P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_5^x \\ \delta_5^y \\ \delta_6^x \\ \delta_6^y \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Bütün deplasmanları bildiğimize göre bütün iç kuvvetler bulunabilir.

Sistemi bir kez de SAP90 adlı bilgisayar programıyla çözersek aynı sonuçlara ulaştığımız görülür. Sonuçlar aşağıdaki gibidir:

## JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	R(Z)
1	.0000E+00	.0000E+00	-.7001E-06
2	.0000E+00	.0000E+00	-.7344E-06
3	.3000E-05	-.7001E-05	-.6372E-06
4	-.1000E-05	-.9001E-05	-.6858E-06
5	.4000E-05	-.1600E-04	-.6548E-06
6	-.1000E-05	-.1700E-04	-.6500E-06

REACTIONS AND APPLIED FORCES  
LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

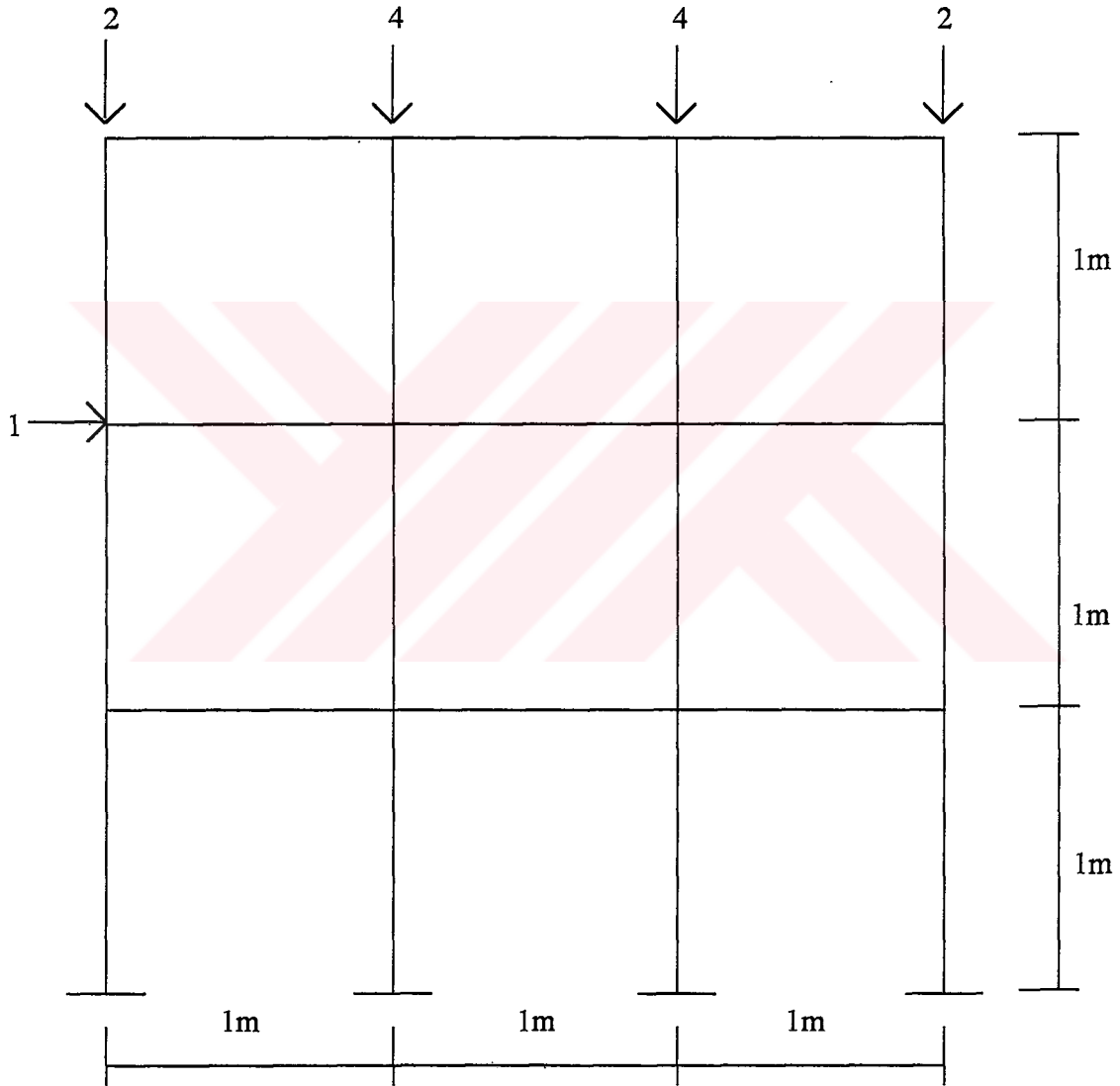
JOINT	F(X)	F(Y)	M(Z)
1	-3.0000	.0000	.0000
2	3.0000	2.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000
4	.0000	-1.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000
6	.0000	-1.0000	.0000
TOTAL	-.5892E-17	.0000E+00	.2119E-28



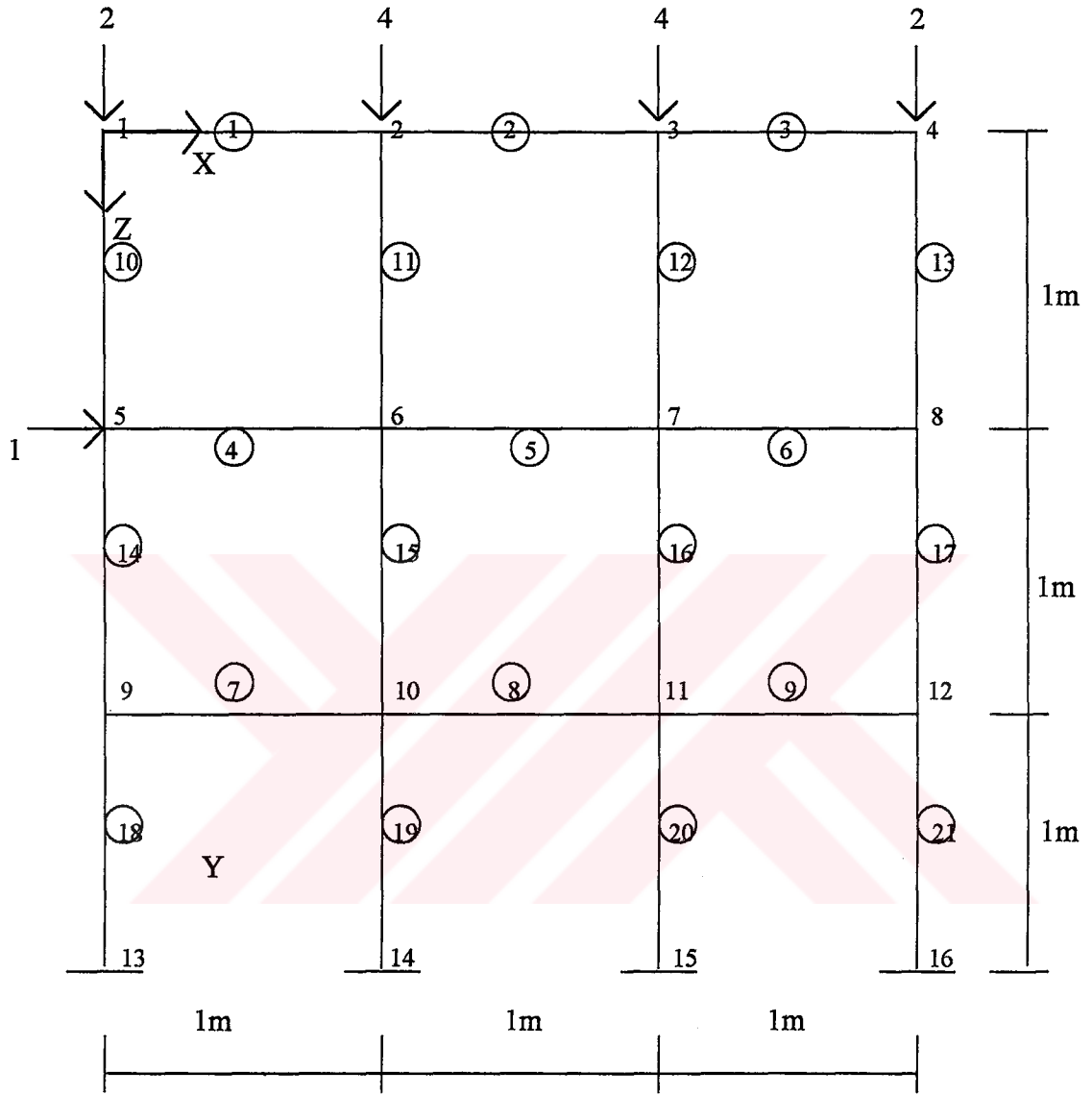
FRAME		ELEMENT		FORCES		1-3	
ELT LOAD		DIST		1-2 PLANE		AXIAL	
PLANE		AXIAL					
ID	COND	EN	DI	SHEAR	MOMENT	FORCE	SHEAR
MOMENT	TORQ						
1 -----							
1	1	.000				3.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				3.000	
2 -----							
2	1	.000				2.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				2.000	
3 -----							
3	1	.000				-1.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				-1.000	
4 -----							
4	1	.000				-2.828	
		.000		.000	.000		
		14.142		.000	.000		
		14.142				-2.828	
5 -----							
5	1	.000				1.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				1.000	
6 -----							
6	1	.000				1.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				1.000	
7 -----							
7	1	.000				.000	
		.000		.000	.000		
		10.000		.000	.000		
		10.000				.000	
8 -----							
8	1	.000				-1.414	
		.000		.000	.000		
		14.142		.000	.000		
		14.142				-1.414	

### 3.1. ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEK -2

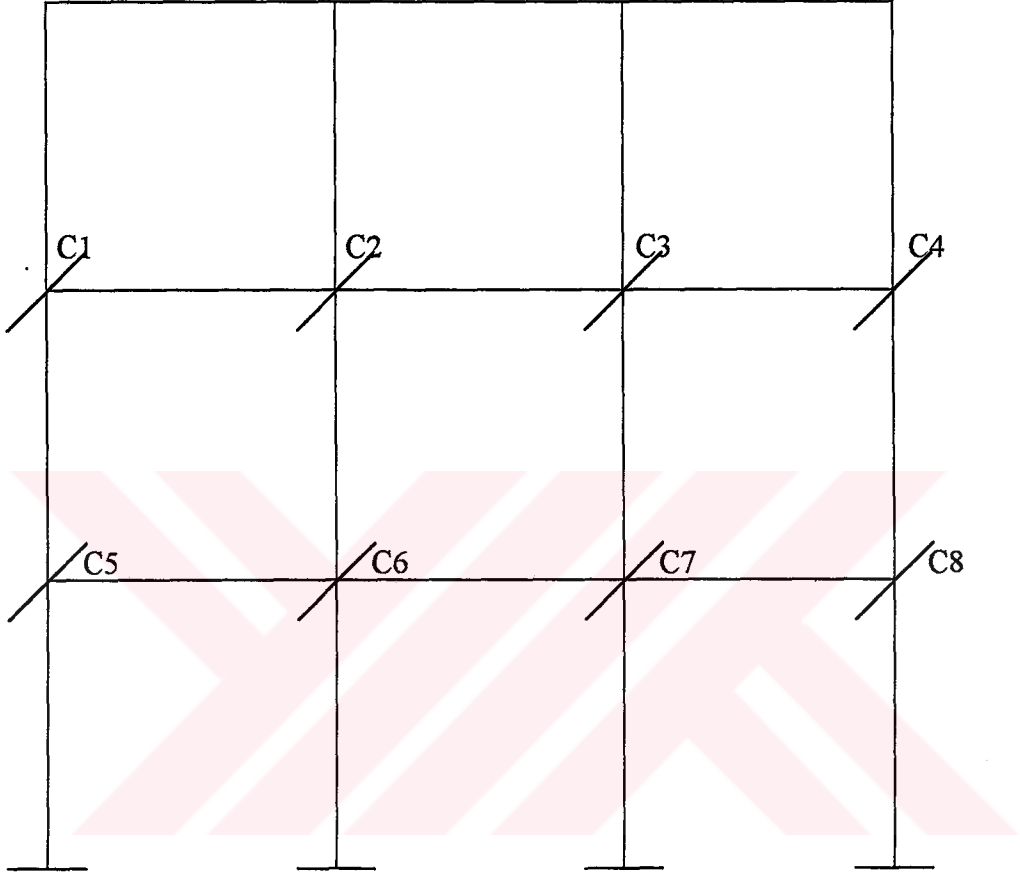
Metodun detaylarını daha iyi görebilmek için bu kez biraz daha karmaşık bir örnek üzerinde çalışılacaktır. Şekil (3.1) de görülen üç katlı düzlemsel çubuk sistem 3 makroelemana bölünerek çözülecektir. Örnekte, bütün elemanların kesit alanlarının  $A=6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , atalet momentlerinin  $I=6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  ve elastisite modülünün de  $E = 1.48 \cdot 10^9 \text{ kg / cm}^2$  olduğu varsayımı yapılmıştır.



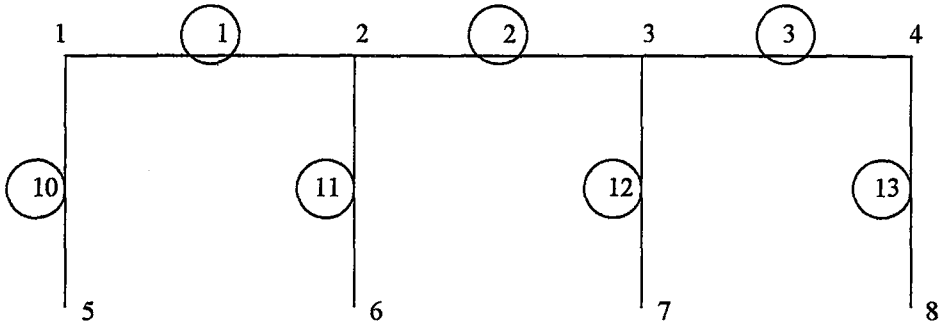
Şekil 3.1 Çubuk Sistem



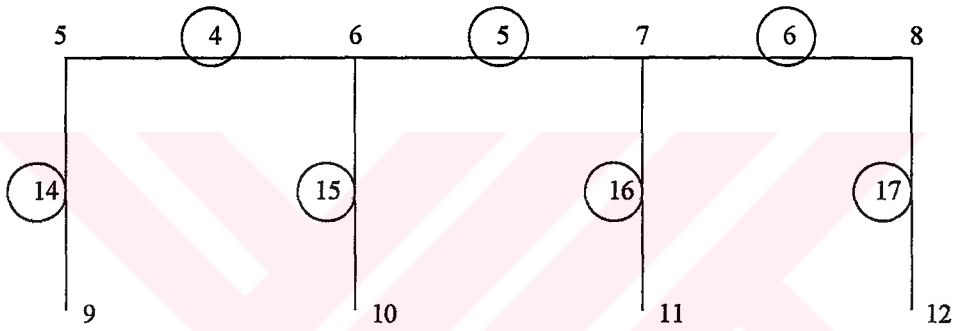
Şekil 3.2 Sistemin Numaralandırılmış Hali



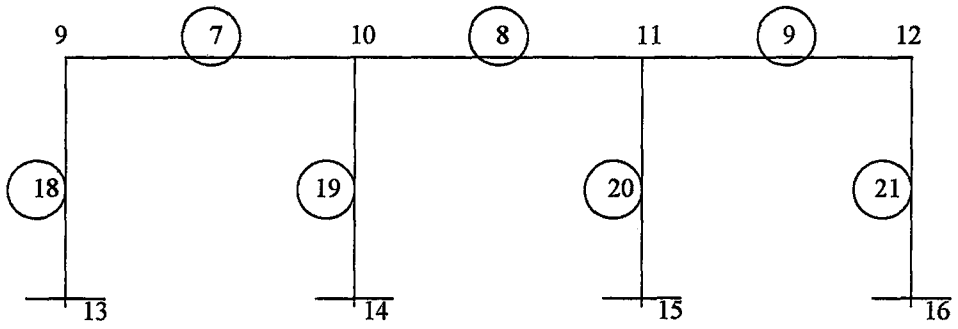
Şekil 3.3 Üç Makroelemana Bölünmüş Sistem



Makroeleman 1



Makroeleman 2



Makroeleman 3

Şekil 3.4 Makroelemanların Ayrılmış Hali

Analizin bu aşamasında her makroeleman için rijitlik matrisi oluşturulacaktır. Bu amaçla çubukların eleman rijitlik matrisleri 5 numaralı kaynakta 451. ve 452. sayfalardaki tablolardan yararlanılarak şu şekilde elde edilir.

### 1.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_1^\theta \\ F_2^x \\ F_2^y \\ F_2^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \delta_1^\theta \\ \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_2^\theta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

### 2.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_2^x \\ F_2^y \\ F_2^\theta \\ F_3^x \\ F_3^y \\ F_3^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_2^\theta \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_3^\theta \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

### 3.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_3^x \\ F_3^y \\ F_3^\theta \\ F_4^x \\ F_4^y \\ F_4^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_3^\theta \\ \delta_4^x \\ \delta_4^y \\ \delta_4^\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

## 4.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_5^x \\ F_5^y \\ F_5^\theta \\ F_6^x \\ F_6^y \\ F_6^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_5^x \\ \delta_5^y \\ \delta_5^\theta \\ \delta_6^x \\ \delta_6^y \\ \delta_6^\theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

## 5.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_6^x \\ F_6^y \\ F_6^\theta \\ F_7^x \\ F_7^y \\ F_7^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_6^x \\ \delta_6^y \\ \delta_6^\theta \\ \delta_7^x \\ \delta_7^y \\ \delta_7^\theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

## 6.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_7^x \\ F_7^y \\ F_7^\theta \\ F_8^x \\ F_8^y \\ F_8^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_7^x \\ \delta_7^y \\ \delta_7^\theta \\ \delta_8^x \\ \delta_8^y \\ \delta_8^\theta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

## 7.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_9^x \\ F_9^y \\ F_9^\theta \\ F_{10}^x \\ F_{10}^y \\ F_{10}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_9^x \\ \delta_9^y \\ \delta_9^\theta \\ \delta_{10}^x \\ \delta_{10}^y \\ \delta_{10}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

## 8.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_{10}^x \\ F_{10}^y \\ F_{10}^\theta \\ F_{11}^x \\ F_{11}^y \\ F_{11}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{10}^x \\ \delta_{10}^y \\ \delta_{10}^\theta \\ \delta_{11}^x \\ \delta_{11}^y \\ \delta_{11}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

## 9.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_{11}^x \\ F_{11}^y \\ F_{11}^\theta \\ F_{12}^x \\ F_{12}^y \\ F_{12}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11}^x \\ \delta_{11}^y \\ \delta_{11}^\theta \\ \delta_{12}^x \\ \delta_{12}^y \\ \delta_{12}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

## 10.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_1^x \\ F_1^y \\ F_1^\theta \\ F_5^x \\ F_5^y \\ F_5^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \delta_1^\theta \\ \delta_5^x \\ \delta_5^y \\ \delta_5^\theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

## 11.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_2^x \\ F_2^y \\ F_2^\theta \\ F_6^x \\ F_6^y \\ F_6^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_2^\theta \\ \delta_6^x \\ \delta_6^y \\ \delta_6^\theta \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

## 12.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_3^x \\ F_3^y \\ F_3^\theta \\ F_7^x \\ F_7^y \\ F_7^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_3^\theta \\ \delta_7^x \\ \delta_7^y \\ \delta_7^\theta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

## 13.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_4^x \\ F_4^y \\ F_4^\theta \\ F_8^x \\ F_8^y \\ F_8^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_4^x \\ \delta_4^y \\ \delta_4^\theta \\ \delta_8^x \\ \delta_8^y \\ \delta_8^\theta \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

## 14.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_5^x \\ F_5^y \\ F_5^\theta \\ F_9^x \\ F_9^y \\ F_9^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_5^x \\ \delta_5^y \\ \delta_5^\theta \\ \delta_9^x \\ \delta_9^y \\ \delta_9^\theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

## 15.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_6^x \\ F_6^y \\ F_6^\theta \\ F_{10}^x \\ F_{10}^y \\ F_{10}^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_6^x \\ \delta_6^y \\ \delta_6^\theta \\ \delta_{10}^x \\ \delta_{10}^y \\ \delta_{10}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

16.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_7^x \\ F_7^y \\ F_7^\theta \\ F_{11}^x \\ F_{11}^y \\ F_{11}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_7^x \\ \delta_7^y \\ \delta_7^\theta \\ \delta_{11}^x \\ \delta_{11}^y \\ \delta_{11}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

17.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_8^x \\ F_8^y \\ F_8^\theta \\ F_{12}^x \\ F_{12}^y \\ F_{12}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_8^x \\ \delta_8^y \\ \delta_8^\theta \\ \delta_{12}^x \\ \delta_{12}^y \\ \delta_{12}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

18.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_9^x \\ F_9^y \\ F_9^\theta \\ F_{13}^x \\ F_{13}^y \\ F_{13}^\theta \end{bmatrix} = 2EI / L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_9^x \\ \delta_9^y \\ \delta_9^\theta \\ \delta_{13}^x \\ \delta_{13}^y \\ \delta_{13}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

19.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_{10}^x \\ F_{10}^y \\ F_{10}^\theta \\ F_{14}^x \\ F_{14}^y \\ F_{14}^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{10}^x \\ \delta_{10}^y \\ \delta_{10}^\theta \\ \delta_{14}^x \\ \delta_{14}^y \\ \delta_{14}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

20.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_{11}^x \\ F_{11}^y \\ F_{11}^\theta \\ F_{15}^x \\ F_{15}^y \\ F_{15}^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{11}^x \\ \delta_{11}^y \\ \delta_{11}^\theta \\ \delta_{15}^x \\ \delta_{15}^y \\ \delta_{15}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

21.Çubuk

$$\begin{bmatrix} F_{12}^x \\ F_{12}^y \\ F_{12}^\theta \\ F_{16}^x \\ F_{16}^y \\ F_{16}^\theta \end{bmatrix} = 2EI/L \times \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 3 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{12}^x \\ \delta_{12}^y \\ \delta_{12}^\theta \\ \delta_{16}^x \\ \delta_{16}^y \\ \delta_{16}^\theta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Matrisler yeniden düzenlenirse 1 - 9 numaralı çubuklar için :

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

10 - 21 numaralı çubuklar için :

$$10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

matrisleri elde edilir.

1 Numaralı makroelemanın toplam rijitlik matrisini elde etmek için ilgili çubukların eleman rijitlik matrisleri süperpoze edilirse :







Makroeleman ortak sınır rijitlik matrisini oluşturmak için

$$[K_b] = [K_{bb}] - [K_{bi}] \cdot [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \quad (3.27)$$

denklemini kullanılacaktır.

$$[K_{bb}] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$[K_{bi}] = 10^6 \times \begin{bmatrix} -12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$[K_{ii}] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 13 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -6 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 8 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 25 & 0 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 6 & 0 & 12 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 0 & 25 & 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 0 & 12 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 13 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$[K_{ii}]^{-1} = 10^{-6} \times$$

0.180129	-0.108753	-0.217234	0.0382738	0.0223539	-0.058772	0.0030732	0.0463718	-0.00133	-0.003232	0.0390271	0.0075152
-0.108753	0.5504722	0.2144798	-0.10091	0.3022133	0.2071189	-0.063284	0.1242081	0.1243409	-0.039027	0.0231084	0.0740114
-0.217234	0.2144798	0.4804874	-0.081237	-0.050987	0.1081731	-0.003043	-0.088501	-0.001854	0.0075152	-0.074011	-0.01879
0.0382738	-0.10091	-0.081237	0.1301389	-0.015203	-0.128998	0.021894	0.0528281	-0.028417	0.0030732	0.0832845	-0.003043
0.0223539	0.3022133	-0.050987	-0.015203	0.3378844	0.0303938	-0.052828	0.2358942	0.1131897	-0.046372	0.1242081	0.088501
-0.058772	0.2071189	0.1081731	-0.128998	0.0303938	0.2817925	-0.028417	-0.11317	0.0449198	-0.00133	-0.124341	-0.001854
0.0030732	-0.063284	-0.003043	0.021894	-0.052828	-0.028417	0.1301389	0.0152028	-0.128998	0.0382738	0.1009099	-0.081237
0.0463718	0.1242081	-0.088501	0.0528281	0.2358942	-0.11317	0.0152028	0.3378844	-0.030394	-0.022354	0.3022133	0.0509873
-0.00133	0.1243409	-0.001854	-0.028417	0.1131897	0.0449198	-0.128998	-0.030394	0.2817925	-0.058772	-0.207117	0.1081731
-0.003232	-0.039027	0.0075152	0.0030732	-0.046372	-0.00133	0.0382738	-0.022354	-0.058772	0.180129	0.1087529	-0.217234
0.0390271	0.0231084	-0.074011	0.0832845	0.1242081	-0.124341	0.1009099	0.3022133	-0.207117	0.1087529	0.5504722	-0.21448
0.0075152	0.0740114	-0.01879	-0.003043	0.088501	-0.001854	-0.081237	0.0509873	0.1081731	-0.217234	-0.21448	0.4804874

(3.31)

$$[K_{ib}] = 10^6 \times$$

-12	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-12	0	6	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-6	0	2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-12	0	6	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-6	0	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-12	0	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6	0	2

(3.32)

ve bu matrisler formüle yerine konulup gerekli işlemler yapılırsa

$$[K_b^T] = 10^6 \times$$

0.7862798	-0.005843	-0.539137	-0.693038	0.0375566	0.414742	-0.060929	-0.007456	0.0575513	-0.012316	-0.024257	0.0187159
-0.005843	0.4485278	-0.211558	-0.031782	-0.302213	-0.191228	0.0133881	-0.124208	-0.131025	0.0242573	-0.023108	-0.08814
-0.539137	-0.211558	0.8870987	0.4443209	0.032189	-0.382448	0.0781002	0.0932291	-0.05074	0.0187159	0.0881401	0.0031532
-0.693038	-0.031782	0.4443209	1.4029018	8.888E-05	-0.888254	-0.848838	0.0450816	0.3959804	-0.060929	-0.013388	0.0781002
0.0375566	-0.302213	0.032189	8.888E-05	0.6823156	-0.030428	-0.045082	-0.235894	-0.090829	0.0074562	-0.124208	-0.093229
0.414742	-0.191228	-0.382448	-0.888254	-0.030428	1.2357357	0.3959804	0.0908289	-0.278848	0.0575513	0.131025	-0.05074
-0.060929	0.0133881	0.0781002	-0.848838	-0.045082	0.3959804	1.4029018	-8.89E-05	-0.888254	-0.693038	0.0317824	0.4443209
-0.007456	-0.124208	0.0932291	0.0450816	-0.235894	0.0908289	-8.89E-05	0.6823156	0.0304282	-0.037557	-0.302213	-0.032189
0.0575513	-0.131025	-0.05074	0.3959804	-0.090829	-0.278848	-0.888254	0.0304282	1.2357357	0.414742	0.1912257	-0.382448
-0.012316	0.0242573	0.0187159	-0.060929	0.0074562	0.0575513	-0.693038	-0.037557	0.414742	0.7862798	0.005843	-0.539137
-0.024257	-0.023108	0.0881401	-0.013388	-0.124208	0.131025	0.0317824	-0.302213	0.1912257	0.005843	0.4485278	0.2115581
0.0187159	-0.08814	0.0031532	0.0781002	-0.093229	-0.05074	0.4443209	-0.032189	-0.382448	-0.539137	0.2115581	0.8870987

(3.33)



Üç makroelemanı için ise 13,14,15 ve 16 numaralı düğüm noktaları sabit mesnet olduklarından ,

$$[K_b^{III}] = 10^6 \times \begin{bmatrix} 13 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -6 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 8 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 25 & 0 & 0 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & 6 & 0 & 12 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 0 & 25 & 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 0 & 12 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 13 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Bütün sistem için ortak sınır indirgenmiş toplam rijitlik matrisini elde etmek için  $[K_b^I]$ ,

$[K_b^I]$  ve  $[K_b^I]$  matrislerinin ilgili düğüm noktaları çakışacak şekilde toplanırsa şu sonuç

elde edilir :





$$[K_{bi}][K_{ii}]^{-1} =$$

-0.668145	-0.005843	-0.155897	-0.091885	0.0375588	0.0882241	-0.018821	-0.007458	0.027087	-0.006305	-0.024257	0.0105581
0.1087529	-0.650472	-0.21448	0.1008099	-0.302213	-0.207117	0.0832845	-0.124208	-0.124341	0.0390271	-0.023108	-0.074011
0.8483063	-0.211558	-0.382489	0.1071693	0.032189	-0.140285	0.0123533	0.0932291	-0.01189	-0.004363	0.0881401	0.0115111
-0.108855	-0.031782	0.0878031	-0.79989	8.886E-05	-0.186803	-0.089824	0.0450818	0.0714818	-0.028885	-0.013388	0.0478359
-0.022354	-0.302213	0.0508673	0.0152028	-0.337884	-0.030394	0.0528281	-0.235894	-0.11317	0.0453718	-0.124208	-0.089501
0.1120992	-0.191228	-0.155075	0.5288411	-0.030428	-0.198391	0.0733294	0.0908289	-0.080885	0.0157781	0.131025	-0.021984
-0.028895	0.0133681	0.0478359	-0.089824	-0.045082	0.0714918	-0.79989	-8.88E-05	-0.186803	-0.108855	0.0317824	0.0978031
-0.045372	-0.124208	0.089501	-0.052828	-0.235894	0.1131697	-0.015203	-0.337884	0.0303938	0.0223539	-0.302213	-0.050987
0.0157781	-0.131025	-0.021984	0.0733294	-0.060629	-0.080885	0.5288411	0.0304282	-0.198391	0.1120992	0.1912257	-0.155075
-0.006305	0.0242573	0.0105581	-0.018821	0.0074582	0.027087	-0.091885	-0.037557	0.0882241	-0.858145	0.005843	-0.155897
-0.039027	-0.023108	0.0740114	-0.083284	-0.124208	0.1243409	-0.10091	-0.302213	0.2071189	-0.108753	-0.650472	0.2144796
-0.004363	-0.08814	0.0115111	0.0123533	-0.093229	-0.01189	0.1071693	-0.032189	-0.140285	0.8483063	0.2115581	-0.382489

(3.40)

$$[K_{bi}][K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} =$$

0.0602
-2.85284
0.2508
0.0903
-3.14716
0.1204
-0.0903
-3.14716
-0.1204
-0.0602
-2.85284
-0.25084

(3.41)

$$\{\bar{S}_b\} = \{\bar{P}_b\} - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} =$$

0.838799331
2.852842809
-0.25083612
-0.090301
3.147157191
-0.12040134
0.090301003
3.147157191
0.120401338
0.080200889
2.852842809
0.25083612

(3.42)

$\{U_b\}$  Sınır deplamanları (1.12) denklemi kullanılarak bulunabilir.

$$\{U_b\} = [K_b]^{-1} \cdot \{\bar{S}_b\}$$

(3.43)

0.54653	-0.3474	-0.3032	0.33762	-0.0831	-0.2403	0.24544	0.12516	-0.1944	0.21458	0.30542	-0.1787	0.19544	-0.2668	-0.3086	0.11078	-0.0381	-0.1786	0.07512	0.08829	-0.1231	0.0631	0.20643	-0.111
-0.3474	1.03658	0.36001	-0.3388	0.64428	0.55576	-0.3182	0.30339	0.30316	-0.3054	0.01375	0.27337	-0.0836	0.50342	-0.0806	0.33079	0.16363	0.16793	-0.0837	0.16363	-0.0837	-0.0843	0.00215	0.16056
-0.3032	0.36001	0.44484	-0.2458	0.04412	0.21803	-0.1893	-0.1308	0.1555	-0.1787	0.24544	0.14312	-0.0414	0.1724	0.11796	-0.0687	0.0408	0.1247	-0.0687	0.10627	-0.0623	-0.0539	-0.1689	0.08656
0.33762	-0.3388	-0.2458	0.43405	-0.1003	0.6005	0.08343	-0.1187	0.45183	0.14602	-0.1252	0.30339	0.13078	-0.0304	0.33082	0.05047	-0.0288	0.28085	0.05236	-0.0237	0.22473	0.05632	-0.0288	0.1636
-0.0831	0.64428	0.04412	-0.1003	0.6005	0.08343	-0.1187	0.45183	0.14602	-0.1252	0.30339	0.13078	-0.0304	0.33082	0.05047	-0.0288	0.28085	0.05236	-0.0237	0.22473	0.05632	-0.0288	0.1636	0.08186
-0.2403	0.36578	0.21803	-0.2458	0.08343	0.33883	-0.213	-0.146	0.17873	-0.1944	-0.3032	0.1555	-0.0844	0.16831	0.1242	-0.04	0.05233	0.10456	-0.0608	0.10456	-0.0608	0.11228	-0.0584	-0.1639
0.24544	-0.3182	-0.1893	0.28812	-0.1187	0.45183	0.33883	-0.213	-0.146	0.17873	-0.1944	-0.3032	0.1555	-0.0844	0.16831	0.1242	-0.04	0.05233	0.10456	-0.0608	0.10456	-0.0608	0.11228	-0.0584
0.12516	0.30339	-0.1308	0.1555	-0.1787	0.24544	0.30316	-0.3054	0.01375	0.27337	-0.0836	0.50342	-0.0806	0.33079	0.16363	0.16793	-0.0837	0.16363	-0.0837	0.10627	-0.0623	-0.0539	-0.1689	0.08656
0.12516	0.30339	-0.1308	0.1555	-0.1787	0.24544	0.30316	-0.3054	0.01375	0.27337	-0.0836	0.50342	-0.0806	0.33079	0.16363	0.16793	-0.0837	0.16363	-0.0837	0.10627	-0.0623	-0.0539	-0.1689	0.08656
-0.1944	0.30316	0.1555	-0.213	0.14602	0.17873	-0.1944	-0.3032	0.1555	-0.0844	0.16831	0.1242	-0.04	0.05233	0.10456	-0.0608	0.10456	-0.0608	0.11228	-0.0584	-0.1639	0.10413	-0.1639	
0.21458	-0.3054	-0.1787	0.24544	-0.1252	0.30339	0.13078	-0.0304	0.33082	0.05047	-0.0288	0.28085	0.05236	-0.0237	0.22473	0.05632	-0.0288	0.28085	0.05236	-0.0237	0.22473	0.05632	-0.0288	0.1636
0.30542	0.01375	0.27337	-0.0836	0.50342	-0.0806	0.33079	0.16363	0.16793	-0.0837	0.16363	-0.0837	0.10627	-0.0623	-0.0539	-0.1689	0.08656	-0.1786	0.07512	0.08829	-0.1231	0.0631	0.20643	-0.111
-0.1787	0.27337	0.14312	-0.1893	0.13078	0.1555	-0.2458	-0.0441	0.21803	-0.3032	-0.36	0.44484	-0.0539	0.15888	0.08658	-0.0607	0.06232	0.10827	-0.0687	0.10827	-0.0687	-0.0414	-0.1724	0.11786
0.19544	-0.0836	-0.0414	0.10818	-0.0304	-0.0644	0.07388	0.02884	-0.0584	0.0631	0.08434	-0.0539	0.12552	-0.0801	-0.1223	0.04124	-0.0072	-0.0586	0.02282	0.03363	-0.0355	0.01827	0.06362	-0.0317
-0.2686	0.50342	0.1724	-0.2588	0.33082	0.16831	-0.2271	0.1636	0.16389	-0.2064	0.00215	0.15988	-0.0801	0.53423	0.18391	-0.0869	0.31467	0.1827	-0.0728	0.10438	-0.0384	-0.0675	0.06034	-0.0317
-0.3068	0.17205	0.11786	-0.1856	0.05047	0.1242	-0.1283	-0.082	0.10613	-0.111	-0.1606	0.08658	-0.1223	0.18391	0.28135	-0.0632	0.10201	-0.0211	-0.0838	0.03345	0.03523	-0.047	0.02282	0.07277
0.11078	-0.0808	-0.0687	0.15144	-0.0288	-0.04	0.08248	0.02373	-0.0608	0.07612	0.0837	-0.0607	0.04124	-0.0869	-0.0632	0.10201	-0.0211	-0.0838	0.03345	0.03523	-0.047	0.02282	0.07277	-0.0384
-0.0381	0.33079	0.0488	-0.0884	0.28085	0.05233	-0.1001	0.22473	0.05674	-0.0883	0.16363	0.06232	-0.072	0.31467	0.00238	-0.0211	0.3178	0.04155	-0.0352	0.22643	0.08284	-0.0386	0.1413	0.0675
-0.1785	0.16783	0.1247	-0.225	0.05238	0.10456	-0.1481	-0.0583	0.11228	-0.1231	-0.164	0.10827	-0.0586	0.1827	0.10438	-0.0386	0.04155	0.21084	-0.047	-0.0828	0.07617	-0.0355	-0.1413	0.08034
0.07512	-0.0837	-0.0687	0.09248	-0.0237	-0.0808	0.15144	0.0288	-0.04	0.08248	0.02373	-0.0608	0.07612	0.0837	-0.0607	0.04124	-0.0869	-0.0632	0.10201	-0.0838	0.03345	0.03523	-0.047	0.02282
0.08829	0.16363	-0.0823	0.10014	0.22473	-0.0587	0.08843	0.28085	-0.0523	0.03009	0.33079	-0.0488	0.03363	0.1413	-0.0675	0.03523	0.22643	-0.0386	-0.047	0.10201	0.02114	-0.0838	0.04124	0.08686
-0.1231	0.16387	0.10827	-0.1481	0.05632	0.11228	-0.225	-0.0524	0.10456	-0.1785	-0.1679	0.1247	-0.0585	0.14131	0.08034	-0.047	0.08284	0.07617	-0.0838	-0.0415	0.21084	-0.0586	-0.1827	0.10438
0.0831	-0.0843	-0.0539	0.07388	-0.0286	-0.0584	0.10818	0.03038	-0.0644	0.18544	0.0836	-0.0414	0.01827	-0.0636	-0.0317	0.02282	-0.0336	-0.0355	0.04124	0.00718	-0.0586	0.12552	0.06008	-0.1223
0.20643	0.00215	-0.1588	0.22708	0.1636	-0.1639	0.25879	0.33082	-0.1683	0.26863	0.50342	-0.1724	0.06362	0.00881	-0.1186	0.07277	0.1413	-0.1413	0.08686	0.31467	-0.1827	0.09008	0.53423	-0.1839
-0.111	0.16056	0.08656	-0.1283	0.08186	0.10613	-0.1856	-0.0505	0.1242	-0.3086	-0.1721	0.11786	-0.0317	0.11876	0.05489	-0.0384	0.0675	0.08034	-0.0632	-0.0024	0.10438	-0.1223	0.1839	0.29135

(3.44)

$$[K_b]^{-1} = 10^{-6} \times$$

$$\{U_b\} = 10^{-6} \times$$

0.57015
5.81338
-0.4003
0.34014
5.85605
-0.2853
0.24283
6.16433
-0.1494
0.18385
6.28624
-0.0818
0.18165
2.73454
-0.3025
0.10138
2.96074
-0.174
0.0845
3.09712
-0.1286
0.0769
3.2076
-0.1172

(3.45)

ve  $\{U_i\}$  iç düğüm noktalarının yer değiştirmeleri (1.31) denklemi kullanılarak

$$\{U_i\} = [K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} - [K_{ii}]^{-1} \cdot [K_{ib}] \cdot \{U_b\}$$

(3.46)

$$[K_{ii}]^{-1} \cdot \{\bar{P}_i\} = 10^{-6} \times$$

-0.135462
-2.852843
0.2809366
-0.075251
-3.147157
0.1855818
0.0752808
-3.147157
-0.185552
0.1354815
-2.852843
-0.2809366

(3.47)

$$[K_{ii}]^{-1} [K_{ib}] \cdot \{U_b\} = 10^{-6} \times$$

-0.703407
6.3193511
0.168809
-0.548481
6.1285684
0.214608
-0.494418
5.9009894
0.2434788
-0.50107
5.6511131
0.2568509

(3.48)

$$\{U_i\} = 10^{-6} \times$$

1.0200962
8.4938443
-0.55367
0.6954306
9.0584382
-0.429207
0.3474688
9.2860352
-0.028878
0.1843805
9.1618823
0.1279097

(3.49)

Bütün deplasmanları bildiğimize göre bütün iç kuvvetler bulunabilir.

Çubuk iç kuvvetlerinin hesabı için (3.1) ila (3.21) numaralı denklemlerde bulduğumuz deplasmanları yerlerine yazarsak şu sonuçları elde ederiz :

1.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^1 \\ \bar{S}_2^1 \\ \bar{S}_3^1 \\ \bar{S}_4^1 \\ \bar{S}_5^1 \\ \bar{S}_6^1 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 1.0201 \\ 8.4936 \\ -0.554 \\ 0.6954 \\ 9.0584 \\ -0.429 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^1 \\ \bar{S}_2^1 \\ \bar{S}_3^1 \\ \bar{S}_4^1 \\ \bar{S}_5^1 \\ \bar{S}_6^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3247 \\ -0.88 \\ 0.3157 \\ -0.325 \\ 0.8803 \\ 0.5646 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

2.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 \\ \bar{S}_2^2 \\ \bar{S}_3^2 \\ \bar{S}_4^2 \\ \bar{S}_5^2 \\ \bar{S}_6^2 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.6954 \\ 9.0584 \\ -0.429 \\ 0.3475 \\ 9.286 \\ -0.029 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^2 \\ \bar{S}_2^2 \\ \bar{S}_3^2 \\ \bar{S}_4^2 \\ \bar{S}_5^2 \\ \bar{S}_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.348 \\ 0.0173 \\ -0.409 \\ -0.348 \\ -0.017 \\ 0.3917 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

3.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^3 \\ \bar{S}_2^3 \\ \bar{S}_3^3 \\ \bar{S}_4^3 \\ \bar{S}_5^3 \\ \bar{S}_6^3 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.3475 \\ 9.286 \\ -0.029 \\ 0.1844 \\ 9.1619 \\ 0.1279 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^3 \\ \bar{S}_2^3 \\ \bar{S}_3^3 \\ \bar{S}_4^3 \\ \bar{S}_5^3 \\ \bar{S}_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1631 \\ 0.8956 \\ -0.605 \\ -0.163 \\ -0.896 \\ -0.291 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

4.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^4 \\ \bar{S}_2^4 \\ \bar{S}_3^4 \\ \bar{S}_4^4 \\ \bar{S}_5^4 \\ \bar{S}_6^4 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.5702 \\ 5.6134 \\ -0.4 \\ 0.3401 \\ 5.9561 \\ -0.285 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^4 \\ \bar{S}_2^4 \\ \bar{S}_3^4 \\ \bar{S}_4^4 \\ \bar{S}_5^4 \\ \bar{S}_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.0014 \\ -0.116 \\ -0.23 \\ -0.001 \\ 0.1144 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

5.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^5 \\ \bar{S}_2^5 \\ \bar{S}_3^5 \\ \bar{S}_4^5 \\ \bar{S}_5^5 \\ \bar{S}_6^5 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.3401 \\ 5.9561 \\ -0.285 \\ 0.2429 \\ 6.1643 \\ -0.149 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^5 \\ \bar{S}_2^5 \\ \bar{S}_3^5 \\ \bar{S}_4^5 \\ \bar{S}_5^5 \\ \bar{S}_6^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0972 \\ 0.1085 \\ -0.19 \\ -0.097 \\ -0.109 \\ 0.0816 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

6.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^6 \\ \bar{S}_2^6 \\ \bar{S}_3^6 \\ \bar{S}_4^6 \\ \bar{S}_5^6 \\ \bar{S}_6^6 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.2429 \\ 6.1643 \\ -0.149 \\ 0.194 \\ 6.2662 \\ -0.082 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^6 \\ \bar{S}_2^6 \\ \bar{S}_3^6 \\ \bar{S}_4^6 \\ \bar{S}_5^6 \\ \bar{S}_6^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049 \\ 0.163 \\ -0.149 \\ -0.049 \\ 0.0163 \\ -0.014 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

7.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^7 \\ \bar{S}_2^7 \\ \bar{S}_3^7 \\ \bar{S}_4^7 \\ \bar{S}_5^7 \\ \bar{S}_6^7 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1816 \\ 2.7345 \\ -0.302 \\ 0.1014 \\ 2.9607 \\ -0.174 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^7 \\ \bar{S}_2^7 \\ \bar{S}_3^7 \\ \bar{S}_4^7 \\ \bar{S}_5^7 \\ \bar{S}_6^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0803 \\ 0.1443 \\ -0.201 \\ -0.08 \\ -0.144 \\ 0.0563 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

8.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^8 \\ \bar{S}_2^8 \\ \bar{S}_3^8 \\ \bar{S}_4^8 \\ \bar{S}_5^8 \\ \bar{S}_6^8 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1014 \\ 2.9607 \\ -0.174 \\ 0.0845 \\ 3.0971 \\ -0.129 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^8 \\ \bar{S}_2^8 \\ \bar{S}_3^8 \\ \bar{S}_4^8 \\ \bar{S}_5^8 \\ \bar{S}_6^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0169 \\ 0.1789 \\ -0.135 \\ -0.017 \\ -0.179 \\ -0.044 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

9.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^9 \\ \bar{S}_2^9 \\ \bar{S}_3^9 \\ \bar{S}_4^9 \\ \bar{S}_5^9 \\ \bar{S}_6^9 \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.0845 \\ 3.0971 \\ -0.129 \\ 0.0769 \\ 3.2076 \\ -0.117 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^9 \\ \bar{S}_2^9 \\ \bar{S}_3^9 \\ \bar{S}_4^9 \\ \bar{S}_5^9 \\ \bar{S}_6^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0076 \\ 0.149 \\ -0.086 \\ -0.008 \\ -0.149 \\ -0.063 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

10.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{10} \\ \bar{S}_2^{10} \\ \bar{S}_3^{10} \\ \bar{S}_4^{10} \\ \bar{S}_5^{10} \\ \bar{S}_6^{10} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 1.0201 \\ 8.4936 \\ -0.554 \\ 0.5702 \\ 5.6134 \\ -0.4 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{10} \\ \bar{S}_2^{10} \\ \bar{S}_3^{10} \\ \bar{S}_4^{10} \\ \bar{S}_5^{10} \\ \bar{S}_6^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.325 \\ 2.8803 \\ -0.316 \\ 0.3247 \\ -2.88 \\ -0.009 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

11.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{11} \\ \bar{S}_2^{11} \\ \bar{S}_3^{11} \\ \bar{S}_4^{11} \\ \bar{S}_5^{11} \\ \bar{S}_6^{11} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.6954 \\ 9.0584 \\ -0.429 \\ 0.3401 \\ 5.9561 \\ -0.285 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{11} \\ \bar{S}_2^{11} \\ \bar{S}_3^{11} \\ \bar{S}_4^{11} \\ \bar{S}_5^{11} \\ \bar{S}_6^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.023 \\ 3.1024 \\ -0.156 \\ 0.0233 \\ -3.102 \\ 0.1323 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

12.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{12} \\ \bar{S}_2^{12} \\ \bar{S}_3^{12} \\ \bar{S}_4^{12} \\ \bar{S}_5^{12} \\ \bar{S}_6^{12} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.3475 \\ 9.286 \\ -0.029 \\ 0.2429 \\ 6.1643 \\ -0.149 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{12} \\ \bar{S}_2^{12} \\ \bar{S}_3^{12} \\ \bar{S}_4^{12} \\ \bar{S}_5^{12} \\ \bar{S}_6^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1849 \\ 3.1217 \\ 0.213 \\ -0.185 \\ -3.122 \\ -0.028 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

13.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{13} \\ \bar{S}_2^{13} \\ \bar{S}_3^{13} \\ \bar{S}_4^{13} \\ \bar{S}_5^{13} \\ \bar{S}_6^{13} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1844 \\ 9.1619 \\ 0.1279 \\ 0.194 \\ 6.2662 \\ -0.082 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{13} \\ \bar{S}_2^{13} \\ \bar{S}_3^{13} \\ \bar{S}_4^{13} \\ \bar{S}_5^{13} \\ \bar{S}_6^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1631 \\ 2.8956 \\ 0.291 \\ -0.163 \\ -2.896 \\ -0.128 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

14.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{14} \\ \bar{S}_2^{14} \\ \bar{S}_3^{14} \\ \bar{S}_4^{14} \\ \bar{S}_5^{14} \\ \bar{S}_6^{14} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.5702 \\ 5.6134 \\ -0.4 \\ 0.1816 \\ 2.7345 \\ -0.302 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{14} \\ \bar{S}_2^{14} \\ \bar{S}_3^{14} \\ \bar{S}_4^{14} \\ \bar{S}_5^{14} \\ \bar{S}_6^{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4453 \\ 2.8788 \\ 0.1248 \\ -0.445 \\ -2.879 \\ 0.3205 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

15.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{15} \\ \bar{S}_2^{15} \\ \bar{S}_3^{15} \\ \bar{S}_4^{15} \\ \bar{S}_5^{15} \\ \bar{S}_6^{15} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.3401 \\ 5.9561 \\ -0.285 \\ 0.1014 \\ 2.9607 \\ -0.174 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{15} \\ \bar{S}_2^{15} \\ \bar{S}_3^{15} \\ \bar{S}_4^{15} \\ \bar{S}_5^{15} \\ \bar{S}_6^{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1095 \\ 2.9953 \\ -0.057 \\ -0.11 \\ -2.995 \\ 0.166 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

16.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{16} \\ \bar{S}_2^{16} \\ \bar{S}_3^{16} \\ \bar{S}_4^{16} \\ \bar{S}_5^{16} \\ \bar{S}_6^{16} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.2429 \\ 6.1643 \\ -0.149 \\ 0.0845 \\ 3.0971 \\ -0.129 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{16} \\ \bar{S}_2^{16} \\ \bar{S}_3^{16} \\ \bar{S}_4^{16} \\ \bar{S}_5^{16} \\ \bar{S}_6^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2331 \\ 3.0672 \\ 0.0958 \\ -0.233 \\ -3.067 \\ 0.1374 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

17.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{17} \\ \bar{S}_2^{17} \\ \bar{S}_3^{17} \\ \bar{S}_4^{17} \\ \bar{S}_5^{17} \\ \bar{S}_6^{17} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.194 \\ 6.2662 \\ -0.082 \\ 0.0769 \\ 3.2076 \\ -0.117 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{17} \\ \bar{S}_2^{17} \\ \bar{S}_3^{17} \\ \bar{S}_4^{17} \\ \bar{S}_5^{17} \\ \bar{S}_6^{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2121 \\ 3.0586 \\ 0.1416 \\ -0.212 \\ -3.059 \\ 0.0704 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

18.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{18} \\ \bar{S}_2^{18} \\ \bar{S}_3^{18} \\ \bar{S}_4^{18} \\ \bar{S}_5^{18} \\ \bar{S}_6^{18} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1816 \\ 2.7345 \\ -0.302 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{18} \\ \bar{S}_2^{18} \\ \bar{S}_3^{18} \\ \bar{S}_4^{18} \\ \bar{S}_5^{18} \\ \bar{S}_6^{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3651 \\ 2.7345 \\ -0.12 \\ -0.365 \\ -2.735 \\ 0.485 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

19.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{19} \\ \bar{S}_2^{19} \\ \bar{S}_3^{19} \\ \bar{S}_4^{19} \\ \bar{S}_5^{19} \\ \bar{S}_6^{19} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.1014 \\ 2.9607 \\ -0.174 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{19} \\ \bar{S}_2^{19} \\ \bar{S}_3^{19} \\ \bar{S}_4^{19} \\ \bar{S}_5^{19} \\ \bar{S}_6^{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1729 \\ 2.9607 \\ -0.088 \\ -0.173 \\ -2.961 \\ 0.2604 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

20.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{20} \\ \bar{S}_2^{20} \\ \bar{S}_3^{20} \\ \bar{S}_4^{20} \\ \bar{S}_5^{20} \\ \bar{S}_6^{20} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.0845 \\ 3.0971 \\ -0.129 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{20} \\ \bar{S}_2^{20} \\ \bar{S}_3^{20} \\ \bar{S}_4^{20} \\ \bar{S}_5^{20} \\ \bar{S}_6^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2424 \\ 3.0971 \\ -0.007 \\ -0.242 \\ -3.097 \\ 0.2498 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

21.Çubuk :

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{21} \\ \bar{S}_2^{21} \\ \bar{S}_3^{21} \\ \bar{S}_4^{21} \\ \bar{S}_5^{21} \\ \bar{S}_6^{21} \end{bmatrix} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & -6 & 12 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.0769 \\ 3.2076 \\ -0.117 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1^{21} \\ \bar{S}_2^{21} \\ \bar{S}_3^{21} \\ \bar{S}_4^{21} \\ \bar{S}_5^{21} \\ \bar{S}_6^{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2197 \\ 3.2076 \\ -0.007 \\ -0.22 \\ -3.208 \\ 0.227 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

### 3.2 SİSTEMİN SAP90 İLE YAPILMIŞ ÇÖZÜMÜ :

Sistemi SAP90 adlı bilgisayar programıyla çözmek için aşağıdaki giriş bilgileri hazırlanmıştır:

```

SYSTEM
L=1
:
JOINTS
1  X=0  Y=0  Z=0
4  X=3
16 Z=3
13 X=0  Q=1,13,4,16,4,1
:
RESTRAINTS
1 13 1 R=0,1,0,1,0,1
13 16 1 R=1,1,1,1,1,1
:
FRAME
NM=1
1  A=675E-6  I=675E-6,675E-6  E=1481481481
1 2 1  M=1  LP=2,0  G=2,1,1,1
4 6 5  G=2,1,1,1
7 10 9  G=2,1,1,1
10 1 5  G=2,4,4,4
11 2 6  G=2,4,4,4
12 3 7  G=2,4,4,4
13 4 8  G=2,4,4,4
:
LOADS
1  F=0,0,2,0,0,0  L=1
2  F=0,0,4,0,0,0
3  F=0,0,4,0,0,0
4  F=0,0,2,0,0,0
5  F=1,0,0,0,0,0

```

## JOINT DISPLACEMENTS

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Z)	R(Y)
1	.1020E-05	.8494E-05	-.5537E-06
2	.6954E-06	.9058E-05	-.4292E-06
3	.3475E-06	.9286E-05	-.2888E-07
4	.1844E-06	.9162E-05	.1279E-06
5	.5702E-06	.5613E-05	-.4003E-06
6	.3401E-06	.5956E-05	-.2853E-06
7	.2429E-06	.6164E-05	-.1494E-06
8	.1940E-06	.6266E-05	-.8158E-07
9	.1816E-06	.2735E-05	-.3025E-06
10	.1014E-06	.2961E-05	-.1740E-06
11	.8450E-07	.3097E-05	-.1286E-06
12	.7690E-07	.3208E-05	-.1172E-06
13	.000000	.000000	.000000
14	.000000	.000000	.000000
15	.000000	.000000	.000000
16	.000000	.000000	.000000

## R E A C T I O N S   A N D   A P P L I E D   F O R C E S

LOAD CONDITION    1 -    FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Z)	M(Y)
1	.0000	2.0000	.0000
2	.0000	4.0000	.0000
3	.0000	4.0000	.0000
4	.0000	2.0000	.0000
5	1.0000	.0000	.0000
6	.0000	.0000	.0000
7	.0000	.0000	.0000
8	.0000	.0000	.0000
9	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000
12	.0000	.0000	.0000
13	-.3651	-2.7345	.4850
14	-.1729	-2.9607	.2604
15	-.2424	-3.0971	.2498
16	-.2197	-3.2076	.2270
TOTAL	-.1665E-15	.4441E-15	.1222E+01

FRAME ELEMENT FORCES					
ELT	LOAD	DIST	1-2 PLANE		AXIAL
ID	COND	ENDI	SHEAR	MOMENT	FORCE
1 -----					
	1	.000			-.325
		.000	.880	-.565	
		1.000	.880	.316	
		1.000			-.325
2 -----					
	1	.000			-.348
		.000	-.017	-.392	
		1.000	-.017	-.409	
		1.000			-.348
3 -----					
	1	.000			-.163
		.000	-.896	.291	
		1.000	-.896	-.605	
		1.000			-.163
4 -----					
	1	.000			-.230
		.000	-.001	-.114	
		1.000	-.001	-.116	
		1.000			-.230
5 -----					
	1	.000			-.097
		.000	-.109	-.082	
		1.000	-.109	-.190	
		1.000			-.097
6 -----					
	1	.000			-.049
		.000	-.163	.014	
		1.000	-.163	-.149	
		1.000			-.049
7 -----					
	1	.000			-.080
		.000	-.144	-.056	
		1.000	-.144	-.201	
		1.000			-.080
8 -----					
	1	.000			-.017
		.000	-.179	.044	
		1.000	-.179	-.135	
		1.000			-.017

FRAME ELEMENT FORCES					
ELT	LOAD	DIST	1-2 PLANE		AXIAL
ID	COND	ENDI			
	SHEAR	MOMENT	FORCE		
-----					
9	1	.000			-2.880
		.000	-.149	.063	
		1.000	-.149	-.086	
		1.000			-2.880
-----					
10	1	.000			-2.880
		.000	-.325	.316	
		1.000	-.325	-.009	
		1.000			-2.880
-----					
11	1	.000			-3.102
		.000	-.023	.156	
		1.000	-.023	.132	
		1.000			-3.102
-----					
12	1	.000			-3.122
		.000	.185	-.213	
		1.000	.185	-.028	
		1.000			-3.122
-----					
13	1	.000			-2.896
		.000	.163	-.291	
		1.000	.163	-.128	
		1.000			-2.896
-----					
14	1	.000			-2.879
		.000	.445	-.125	
		1.000	.445	.321	
		1.000			-2.879
-----					
15	1	.000			-2.995
		.000	.110	.057	
		1.000	.110	.166	
		1.000			-2.995

FRAME ELEMENT FORCES					
ELT	LOAD	DIST		1-2 PLANE	AXIAL
	ID	COND	ENDI	SHEAR	MOMENT
-----					
16	1	.000			-3.067
		.000	.233	-.096	
		1.000	.233	.137	
		1.000			-3.067
-----					
17	1	.000			-3.059
		.000	.212	-.142	
		1.000	.212	.070	
		1.000			-3.059
-----					
18	1	.000			-2.735
		.000	.365	.120	
		1.000	.365	.485	
		1.000			-2.735
-----					
19	1	.000			-2.961
		.000	.173	.088	
		1.000	.173	.260	
		1.000			-2.961
-----					
20	1	.000			-3.097
		.000	.242	.007	
		1.000	.242	.250	
		1.000			-3.097
-----					
21	1	.000			-3.208
		.000	.220	.007	
		1.000	.220	.227	
		1.000			-3.208

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, büyük çubuk sistemlerin hesap kolaylığı açısından, gerekli olan hallerde daha küçük parçalara bölünerek analizinin mümkün olduğu gösterilmiştir. Bu işlem için kullanılan denklemler ve formülasyon detaylarıyla anlatılmış ve nihayetinde metodun uygulaması ikinci bölümde yer alan kafes sistem ve daha ayrıntılı olarak da üçüncü bölümde yer alan üç katlı çerçeve sistem üzerinde yapılmıştır. Her iki örnek sistemin ayrıca SAP90 programıyla statik analizi yapılmış ve aynı sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca hesaplamalarda sıkça gereken matris inversi alma işlemlerini geliştirilmiş Gauss-Jordan metoduyla gerçekleştiren bir bilgisayar programı da yazılmıştır. (EK 1)

Bundan sonraki aşamada, çalışmanın üç boyutlu örneklerle zenginleştirilerek tüm algoritmanın bir bilgisayar programına dönüştürülmesinin daha ileri çalışmalar için büyük kolaylık sağlayacağı inancındayım.

## EK1-MATRİS İNVERİSİ ALMAK İÇİN BİLGİSAYAR PROGRAMI

```

10 REM GELİSTİRİLMİS GAUSS-JORDAN METODU İLE MATRİS İNVERİSİ HESABI
20 CLS
30 PRINT "İNVERİSİ ALINACAK MATRİSİN BOYUTUNU GIRINIZ": INPUT N: CLS
40 DIM A(N, N): DIM E(N): DIM F(N): DIM G(N)
50 PRINT "İNVERİSİ ALINACAK MATRİS:": PRINT
60 FOR I = 1 TO N
70 FOR J = 1 TO N
80 READ A(I, J)
90 PRINT A(I, J); ", ";
100 NEXT J
110 PRINT
120 NEXT I
130 PRINT
140 DET = 1
150 FOR I = 1 TO N
160 REM PIVOT ARAMA
170 PV = 0
180 FOR J = 1 TO N
190 IF G(J) = 1 THEN GOTO 280
200 FOR K = 1 TO N
210 IF G(K) > 1 THEN GOTO 790
220 IF G(K) = 1 THEN GOTO 270
230 IF PV >= ABS(A(J, K)) THEN GOTO 270
240 RW = J
250 CL = K
260 PV = ABS(A(J, K))
270 NEXT K
280 NEXT J
290 G(CL) = G(CL) + 1
300 E(I) = RW: F(I) = CL
310 REM SATIR DEĞİSTİRME
320 IF RW = CL THEN GOTO 400
330 DET = -DET
340 FOR J = 1 TO N
350 KG = A(RW, J)
360 A(RW, J) = A(CL, J)
370 A(CL, J) = KG
380 NEXT J
390 REM PIVOT ELEMANA BÖLME
400 PIVOT = A(CL, CL)
410 DET = DET * PIVOT
420 A(CL, CL) = 1
430 FOR J = 1 TO N
440 A(CL, J) = A(CL, J) / PIVOT
450 NEXT J
460 REM İNVERGEME
470 FOR J = 1 TO N
480 IF J = CL THEN GOTO 540

```

```

490 SI = A(J, CL)
500 A(J, CL) = 0
510 FOR K = 1 TO N
520 A(J, K) = A(J, K) - A(CL, K) * SI
530 NEXT K
540 NEXT J
550 NEXT I
560 REM KOLON DEGISTIRME
570 FOR I = 1 TO N
580 K = N + 1 - I
590 IF E(K) = F(K) THEN GOTO 670
600 RW = E(K)
610 CL = F(K)
620 FOR J = 1 TO N
630 KD = A(J, RW)
640 A(J, RW) = A(J, CL)
650 A(J, CL) = KD
660 NEXT J
670 NEXT I
680 GOTO 810
690 PRINT "MATRISIN DETERMINANTI="; DET
700 PRINT
710 PRINT "MATRISIN INVERSI:"; PRINT
720 FOR I = 1 TO N
730 FOR J = 1 TO N
740 PRINT A(I, J); " ";
750 NEXT J
760 PRINT
770 NEXT I
780 END
790 PRINT "BU MATRIS TEKILDIR,INVERSI ALINAMAZ !"
800 GOTO 780
810 FOR I = 1 TO N
820 IF G(I) <> 1 THEN GOTO 790
830 NEXT I
840 IF ABS(DET) <= .0001 THEN GOTO 790
850 GOTO 690
860 REM INVERSI ALINACAK MATRISIN DATASI
870 DATA 13,0,6,-1,0,0,0,0,0,0,0
880 DATA 0,13,-6,0,-12,-6,0,0,0,0,0
890 DATA 6,-6,8,0,6,2,0,0,0,0,0
900 DATA -1,0,0,14,0,6,-1,0,0,0,0
910 DATA 0,-12,6,0,25,0,0,-12,-6,0,0
920 DATA 0,-6,2,6,0,12,0,6,2,0,0
930 DATA 0,0,0,-1,0,0,14,0,6,-1,0,0
940 DATA 0,0,0,0,-12,6,0,25,0,0,-12,-6
950 DATA 0,0,0,0,-6,2,6,0,12,0,6,2
960 DATA 0,0,0,0,0,-1,0,0,13,0,6
970 DATA 0,0,0,0,0,0,-12,6,0,13,6
980 DATA 0,0,0,0,0,0,-6,2,6,6,8

```

**KAYNAKLAR**

- [1] Göğüş, İ., "Yapı Sistemlerinin Çözümünde Matris Metodları Ders Notları", Y.T.Ü., İstanbul, (1993)
- [2] Przemieniecki, Z. S., "Theory of Matrix Structural Analysis", Air Force Institute of Technology, USA, (1968)
- [3] Azar, J.J., "Matrix Structural Analysis", University of Tulsa, (1972).
- [4] Kratzig, W., "Theorie und Berechnungsmethoden Statisch Unbestimmter Stabtragwerke", Berlin, (1960)
- [5] Lawo-Thierauf, "Matrizen Methoden der Statik und Dynamik, Teil 1: Statik", Germany
- [6] Çakıroğlu, A., Özden E., Özmen G., "Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metodları ve Elektronik Hesap Makinası Programları", Cilt I-II , İ.T.Ü., (1992)