

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEMSEL ÇUBUK SİSTEMLERİN
LİNEER OLMAYAN ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİNİN
MATRİS METODLARIYLA İNCELENMESİ**

İnş. Müh. Ozan BAŞESKİ

F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programında

hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. İrdesel GÖĞÜŞ

Prof. İrdesel GÖĞÜŞ
İ. GÖĞÜŞ

İSTANBUL - 1997

Prof. Naci YÜCELER
Naci Yüceler

Doç. Dr. Görün ÖZGEN
Görün Özen

Bu tez çalışmasının tüm aşamalarında bana ışık tutup, yol gösteren ve bu çalışmanın oluşabilmesi için hiçbir yardımı esirgemeyen Sayın Hocam Prof. İrdesel GÖĞÜŞ'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER :

1. CİSİMLERİN STABİLİTESİ HAKKINDA GENEL AÇIKLAMALAR	1
2. DÜZLEMSEL ÇUBUK SİSTEMLERİN ELASTİK BÖLGEDE LİNEER OLMAYAN ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİNİN İNCELENMESİ	2
2.1 Lineer Olmayan Şekil Değişirme Durumu	4
2.2 Geometrik Lineer Olmayan Hesap Esasları	6
2.3 Kafes Sistemlerde Geometrik Rijitlik Matrisi	9
2.4 Düzlemsel Çubuk Sistemlerde Geometrik Rijitlik Matrisi	13
2.5 Yaklaşık Çözüm Metodlarından Newton-Raphson Yöntemi	18
2.6 Çubuk Sistemlerin Hesabında Newton-Raphson Metodu	24
2.7 Konunun Değerlendirmesi	29
3. SAYISAL UYGULAMALAR	30

ÖZET :

Y.T.Ü. Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanan bu çalışmada düzlemsel çubuk sistemlerin lineer olmayan şekil değiştirmeleri matris metodları yardımıyla incelenmiştir.

Konuyu iyi kavrayabilmek amacıyla birinci bölümde yapı elemanlarının stabilitesi ve stabilite probleminin genel kavramları hakkında genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra 2. bölümde elastik stabilite konusu ele alınmış ve elastik stabilitede probleme matrisyel şekilde yaklaşabilmek amacıyla yapılan kabuller sunulmuştur. Aynı şekilde bu kabullerin hangi gerekçelerle geçerliliklerini kaybettikleri anlatılmış, lineer olmayan hesap metodlarıyla çözüme ulaşmanın gerekliliği ortaya konulmuştur.

2.1 bölümünde lineer olmayan şekil değiştirme durumu açıklanmıştır. Orantılılık sınırının şekil değiştirme üzerindeki etkisi ve lineer olmayan şekil değiştirme konusunda yapılan idealizasyon konuları işlenmiştir.

2.2'de geometrik lineer olmayan hesap esasları konusuna anlatılmış olup, sonlu şekil değiştirmesi bulunan yapısal sistemlerin şekil değiştirmiş durumda yaptığımız idealizasyonlar ve ilk şekil değiştirmiş konumda yapılan ihmaller anlatılmıştır. Daha sonra da 1. Castigliano Teoremi açıklanmıştır.

Daha sonra lineer olmayan hesabın gerektirdiği oluşumlardan biri olan geometrik rijitlik matrisinin kafes sistem çubukları ve düzlemsel çubuk sistemler için nasıl bulunabileceği sırasıyla 2.3 ve 2.4 konularında anlatılmıştır.

2.5 konusunda bizim lineer olmayan hesapta kullanacağımız çözüm yöntemi olan Newton-Raphson Yöntemi açıklanmıştır. Konu dahilinde yükler yer değiştirme arasındaki bağıntının sınırları verilmiştir.

2.6'da çubuk sistemlerin hesabında Newton metodunun nasıl kullanılacağı açıklanmış ve iterasyonun esas bir akış diyagramı verilmek suretiyle anlatılmıştır.

2.7'de ise şimdiye kadar işlenmiş olan konunun genel bir değerlendirmesi yapılmıştır.

3. bölümde ise konuyla ilgili örnek problemimiz çözülmüştür.

SUMMARY :

In this study which is prepared as Y.T.Ü Master Thesis, non-linear deformations of 2-D frame systems in elastic region has been studied.

In order to fully understand this subject first of all general information about structural elements' stability and the facts of the stability problem have been given. Then in chapter 2 the assumptions made to apply matrical approach to the problem in elastic stability has been made. The reasons in which these made assumptions lost their validity and the necessity of non-linear calculation has been stated.

In part 2.1 non-linear deformations and assumptions have been explained

In part 2.2 geometric non-linear calculation principles have been explained and the idealizations of systems that have finite deformation in adjacent balance position and the negligence made in the adjacent position have been studied. Then the First Castigliano Theorem has been explained.

Then the formation of geometric rigidity matrix of truss systems and 2-D frame systems has been explained and compared in parts 2.3 and 2.4

In part 2.5 our solution method for non-linear deformation problems, Newton-Raphson Method has been explained. Within our subject limits, the limits of load-displacement relation has been studied.

Then in part 2.6 how to use this method in 2-D frame systems has been studied, and in order to achieve our goal a flow chart has been given.

In part 2.7 a general evaluation of the subject has been made.

Finally in part 3 a numerical application concerning Newton Raphson Iteration Method has been solved.

1. CİSİMLERİN STABİLİTESİ HAKKINDA GENEL AÇIKLAMALAR :

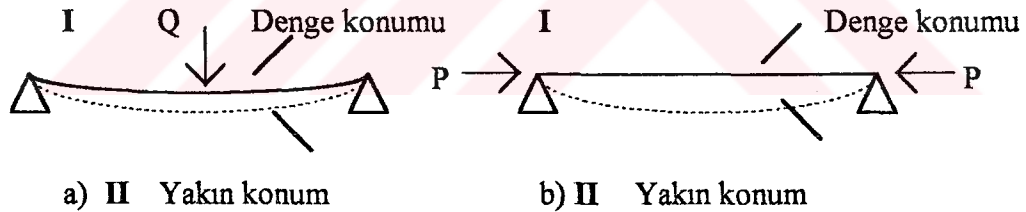
Stabilite Probleminin Genel Kavramları :

Şekil değiştirme cisim mekaniğinde dış etkiler altında dengede bulunan bir sistem için iki önemli problem bahis konusu olabilir.

Bunlardan birincisi, sistemde zorlamaların tehlikeli sınıra ne derece yaklaştığıdır ki bunun yanıtı sistemde iç kuvvet veya gerilme dağılışı ile ilgilidir. Eğer en büyük gerilme o cisim için izin verilen sınırı aşmış ise zaten sistemde arzulanan güvenlik kalmamış demektir. Bu tip problemler gerilme problemleri sınıfına girerler.

İkinci ve en az birincisi kadar önemli olan bir diğer sorun ise sistemin incelenen denge konumu ile ilgilidir. Bu tip problemlerde sistemin kararlılığı incelenir. Sistemin kararlı konumu bir kez bile bozulsa, tekrar ilk konumuna geri dönemez ve kararlı konumundan hızla uzaklaşarak göçebilir. Bu tip problemler ise stabilite problemleri olarak adlandırılırlar.

Esasında her iki tip problemde de yapının emniyeti bahis konusudur; fakat sistemin tehlikeli duruma girmesinde rol oynayan unsurlar değişiktir. İlk halde tehlikeli olarak görülen sadece fazla gerilme olduğu halde, diğerinde bu tehlikeye denge konumunun kararsızlığı sebep olmaktadır.



Şekil 1.1

Şekil 1.1 de Q yükü ile eğilen kirişin durumunu ele alalım. Burada I ile gösterilen denge konumunun kararlılığı hakkında bir endişe sözkonusu olamaz. Çünkü kiriş geçici etkilerle I konumundan saptırılarak II konumuna getirilecek olursa, etki ortadan kalkınca sistem tekrar eski konumuna yani I haline geri döner. I konumu kararlıdır. Bu şekilde karşılaştığımız tek sorun kirişin eğilmeden dolayı oluşan moment ve iç kuvvetlerin etkisiyle kırılıp kırılmayacağıdır.

Şekil 1.1 deki b hali içinse, aksenal P basınç kuvveti altında I ile gösterilen denge konumu daima kararlı değildir. Geçici sebeplerle çubuk I konumundan saptırılarak II konumuna getirilecek olursa, bozucu etkiler ortadan kalktıktan sonra bile

çubuk her zaman ilk duruma geri dönmeyebilir. Örneğin P yükü çok büyük veya çubuk çok narin olursa I durumunun kararlılığının araştırılması gerekmektedir.

Bir denge konumunun kararlılığının araştırılmasında belli başlı şu metodlar kullanılabilir :

- a) Dinamik metod
- b) Enerji metodu
- c) Statik metod

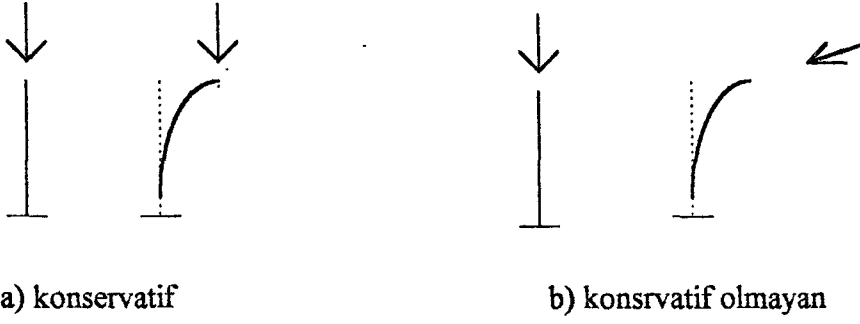
Dinamik metodla bozulmuş konumun zamanla değişimi incelenirken enerji metodunda ise sistemin sahip olduğu toplam potansiyel enerjinin minimum oluşu, konumun kararlılığı için bir kriter oluşturur. Statik metod da ise incelenen denge konumunun çok yakınında daha başka denge konumlarının bulunup bulunmadığı araştırılır.

2. DÜZLEMSEL ÇUBUK SİSTEMLERİN ELASTİK BÖLGEDE LİNEER OLMAYAN ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERİNİN İNCELENMESİ :

Düzlemsel çubuk sistemler için stabilite hesaplarının önemi uzun yıllardan beri bilinmektedir. Özellikle çelik yapılarda taşıyıcı sistemler için sadece gerilme hesapları ve elastik stabilite tahkikleri yapmanın yeterliliği tartışma konusudur.

Bir önceki konuda da bahsi geçen elastik stabilite konusunda taşıyıcı sistemi matrisyel açıdan çözebilmek için aşağıda sayılan kabulleri yapıyoruz :

- 1) Sistem kusursuzdur. Diğer bir deyişle çubuk eksenini ideal doğrudur.
- 2) Büyük şekil değiştirmeler için malzeme ideal elastik kabul edilmiştir. (Küçük şekil değiştirmeler)
- 3) Yükün konservatif olduğu, yani yük doğrultusunun şekil değiştirmeden sonra da aynı kaldığı kabul ediliyor.



Şekil 2.1 Konservatif ve konservatif olmayan yük

4) Sistemin kusursuz olması gereklidir ki dolayısıyla çubuk eksenini de bu varsayım ile bir doğrudur.

5) Başlangıç durumu 1 konumunun ϵ civarında tüm iç kuvvetler λ ile doğru orantılıdır.

$$F' = \lambda F$$

6) Orantılılık faktörü olan $\lambda > 0$ ile yük doğru orantılıdır. Dış yükler için $R' = \lambda R$ bağıntısı geçerlidir.

7) İnce cidarlı kesitlerde stabilite sınırı λ_k 'ya ulaşmadan önce buruşma başlayabilir.

8) Stabilite sınırına ulaşıncaya eğilme deformasyonlarının yanında kesit düzleminde dönme meydana gelebilir. Bu stabilite problemi eğilmeli burkulma, eğer kesme kuvveti de varsa yanal burkulma problemi olarak karşımıza çıkar

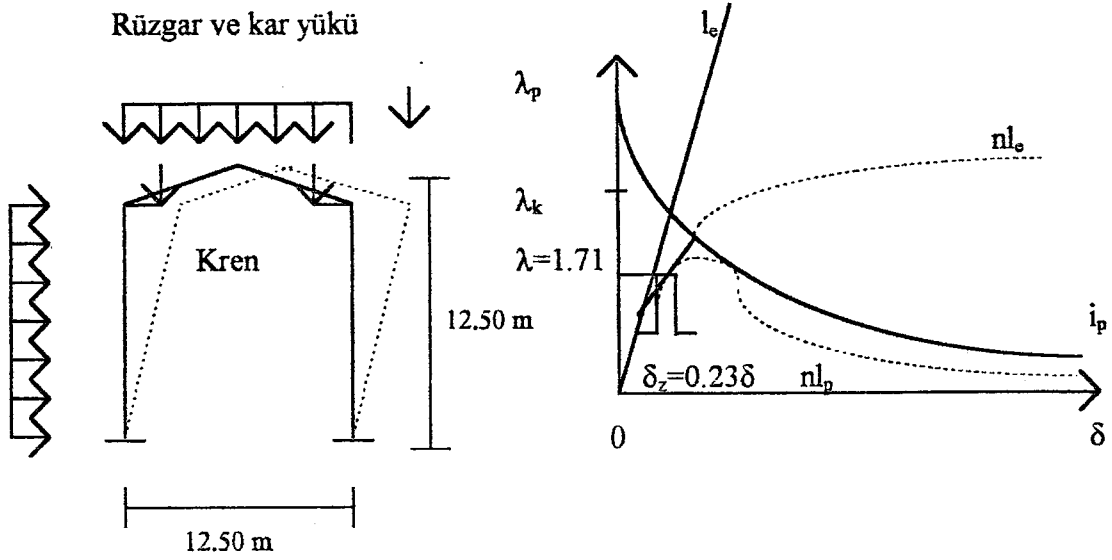
Yukarıda anlatılan ve bizim başlangıç için kabul ettiğimiz bu kabuller aslında gerçekte pek bağdaşmamaktadır çünkü sistemimizde bizim gözönüne almadığımız, fakat gerçekte varolan şu tip etkenler bulunmaktadır :

a) Büyük yer değiştirmeler ve bununla birlikte kuvvetlerin de yer değiştirmesi

b) Çubuk eksenleri tam doğrusal değildir.

Bu yüzden mühendislik problemlerinde yapıdaki iç kuvvetlerin dengesinde şekil değiştirmelerin etkisinin dikkate alınması ve hesapların bu esasa dayandırılarak yapılması gerekmektedir. Ancak bu tezin konusu dahilinde bulunan inceleme konusu için biz konservatif yük halinin mevcut olduğu varsayımını öngöreceğiz.

2.1 LİNEER OLMAYAN ŞEKİL DEĞİŞTİRME DURUMU :



Şekil 2.2

Bu bölümde geçerli olan kabulleri anlamak için bir çubuğun yukarıdaki şekilde standart yükler altında çelik yapı olarak hesabı görülmektedir. Ayrıca bu yüklerin λ katı olan bir yükleme hali için ise sistemin şekil değiştirme davranışı şematik olarak gösterilmiştir.

Şeklin yanındaki diyagramda da görüldüğü üzere 'nl_e' eğrisi lineer olmayan şekil değiştirme eğrisidir. Lineer elastik şekil değiştirme eğrisi ise (le) lineer olmayan şekil değiştirme eğrisinin teğetsel bir yaklaşımıdır. Yapı çeliği için bilinen orantılılık sınırı burada kullanılırsa ($\lambda=1.71$) lineer olmayan şekil değiştirme δ_z 'in toplam şekil değiştirme δ içindeki payı %23 civarındadır. Aynı zamanda orantılılık sınırı 1.71 olarak alındığında kalıcı şekil değiştirmelerin de gözönüne alınması gerekmektedir.

Malzemenin plastikleşmesi dikkate alındığında daha ileri safhalardaki şekil değiştirme davranışı 'npl' eğrisi ile gösterilmiş olup, bu eğri 'ip' ile gösterilmiş olan İdeal Plastik Şekil Değiştirme Eğrisiyle sınırlandırılmıştır. 'ip' nin maksimum değeri ideal plastik malzeme davranışının yük faktörü λ_p 'ye denk düşmektedir. Narin taşıyıcı elemanlarda Euler yükü λ_k hesap katsayısı ile ($\lambda=1.71$) taşıma gücü katsayısı λ_p arasında bulunmaktadır ki bu aynı zamanda stabilite probleminin kritik yüküdür. Hesap katsayısı olan $\lambda=1.71$ değerinde oluşan kalıcı (plastik) şekil değiştirmelerin etkisi emniyet gerilmesi değerinin azaltılması kaydıyla tahkiklerde gözönüne alınır.

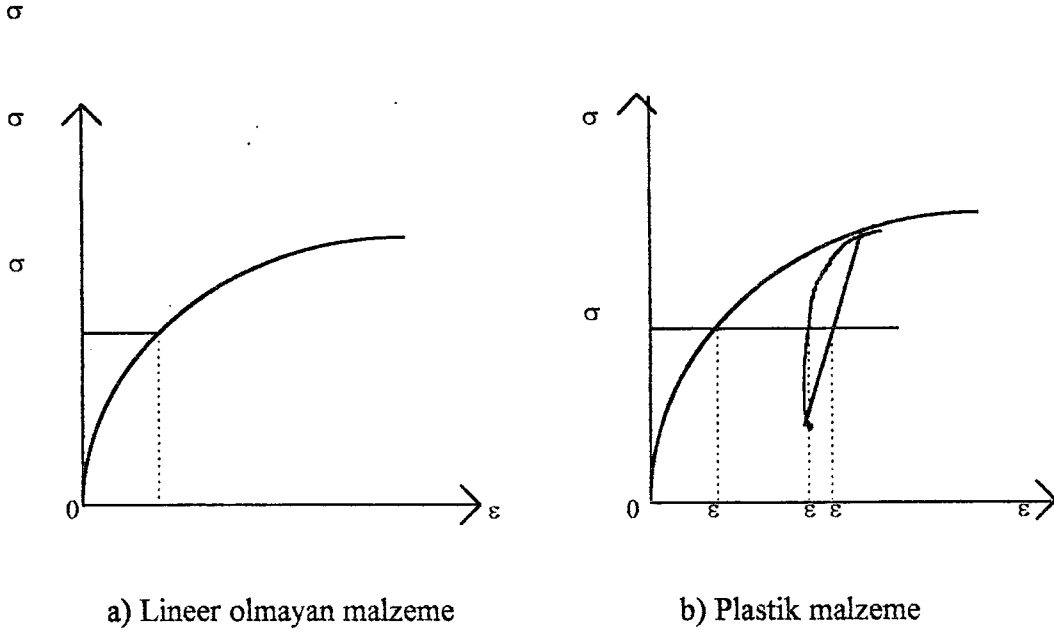
Çubuk sistemlerde genelde orantılılık sınırı hesaplarda kullandığımız yük faktörünün çok yakınlarındadır. İdeal burkulma yükü olan λ_k ise daima hesap yükünden büyük olmalıdır. İdeal burkulma yükü çubuğun narinliğine paralel olarak hesap yüküne yaklaşır ve narinliğin artması ile beraber şekil değiştirmeler orantsız bir şekilde artmaya başlar ve yukarıdaki diyagramda da göstermiş olduğumuz üzere lineer olmayan şekil değiştirme hesaplarının en çok ideal plastik limit yük eğrisi olan 'ip' eğrisine ulaşıncaya kadar geçerli olduğu sonucu bir kez daha ortaya çıkmış olur. Bu durumda kesikli çizgiyle çizilmiş olan A-B aralığı sadece teorik bir anlam taşır.

Lineer olmayan şekil değiştirme nedenlerini incelediğimizde, incelenen sistemlerin hepsinde bir idealize etme durumuyla karşı karşıyayız. Bu durumda hesapların basitleştirilmesi için lineer olamayan taşıyıcı sistem davranışlarını şu 2 gruba ayırmak mümkündür :

1) Fiziksel lineer olmama, yani lineer olmayan malzeme kanununun tüm etkilerini gözönüne almamız gereken bir durumdur.

2) Geometrik lineer olmama, lineer olmayan kinematik şartların ve elastik stabilitede olduğu gibi denge şartlarının tüm etkilerinin gözönüne alınması gereken bir durumdur.

Fiziksel lineer olmama durumunda malzeme lineer elastik değil tam aksine plastik bir davranış sergiler. Malzemenin σ gerilmeleri ve ϵ birim boydaki şekil değiştirmeler arasında belirgin bir ilişki olmadığından dolayı bu yöntemle çözüm çok zordur ve zaman alır. Fenomenolojik gerekçeli malzeme kanunları ile fiziksel lineer olmayan bir problemin çözülebilmesi ve bu halin hangi sınıra kadar geçerli olduğunun anlaşılabilmesi için plastisite teorisinin çok iyi bilinmesi gerekmektedir.



Şekil 2.3 Plastik lineer olmayan malzeme durumu

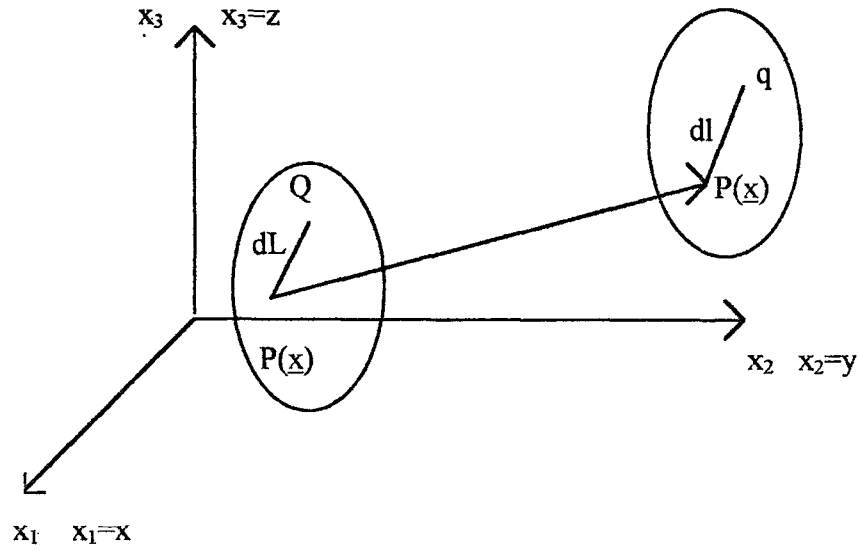
Yalnız bu teori çok karmaşık bir yapıya sahip olup, malzemenin plastik bölgesi için uygulanan hesap metodları hayli zordur ve bizim araştıracağımız konunun kapsamının dışında kalmaktadır. Bundan böyle ilerki bölümlerde Hooke yasasının kısıtlamasız olarak geçerli olduğunu varsayacağız.

Ancak geometrik olarak lineer olmayan bölgedeki çubuk sistemlerin hesabı için bazı ilave kısıtlamaların yapılması gerekmektedir ve araştırma konumuzun esası geometrik olarak lineer olmama teorisi baz alınarak yapılacaktır.

2.2 GEOMETRİK LİNEER OLMAYAN HESAP ESASLARI :

Elastik stabilite konusu incelenirken lineer olmayan rijitlik matrisi hesabında şekil değiştirmelerin sonsuz küçük olduğu hesabına tam uyulmadığı gözlemlenmektedir. Şöyleki, komşu konumun denge şartları formüle edilirken şekil değiştirmelerin sonsuz küçük olduğu kabulüne dayanarak türetilmiş olan Diferansiyel Denge Denklemleri ile sonlu şekil değiştirmeler beraber olarak kullanılmaktadır. Bu tip sonlu şekil değiştirmesi olan çubuk sistemleri komşu denge konumunda sadece lineerize ederek hesaplayabildiğimiz için ilk komşu konumda yaptığımız ihmalleri de

araştırmak zorundayız. Komşu konumda oluşan şekil değiştirmeler konusunu biraz açarsak :



Şekil 2.4 En genel durumda şekil değiştirme durumu

Bir çubuğun birim boy uzaması yani rölatif boy uzaması (x_2, x_3) düzlemine paralel bir düzlemde $P(\underline{x})$ noktasının x_1 eksenine doğrultusundaki birim boy uzaması

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{dL - dl}{dL} \quad (2.1)$$

Birim boy şekil değiştirmeler ise yer değiştirmelerin türevi olarak şöyle ifade edilebilir:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\delta w_{1,1}}{\delta x_1} = w_{1,1} \quad (2.2)$$

Yukarıda gösterilen bu denklemlerde belirtilen birim boy uzamaları aslında elamantr giriş teorisinin kavramlarıdır. ve sadece küçük şekil değiştirmeler için geçerlidir. Komşu konumdaki şekil değiştirme ise lineer olmayan şekil değiştirme tensörüyle tanımlanacaktır. Bu tensöre biz Lagrange Tensörü diyoruz.

$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{(w_{t,j} + w_{j,i})/2}_{\text{lineer}} + \underbrace{(w_{t,i} w_{t,j})^2}_{\text{kare kısım}} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \quad (2.4)$$

Şekil değiştirmeler $w_1=u_x$, $w_2=w_y$ ve $w_3=w_z$ x , y , z eksenleri doğrultusundaki şekik değiştirmelerdir. Bu tanımlama başlangıçta seçtiğimiz (\underline{x})'e göre verilmiştir. 2.3 denkleminin lineer kısmı lineer elastisite teorisinden bilinmekle beraber birim boy uzaması kısmı ε_{ij} , $i=j$ içindir. Aksi hal söz konusu ise yer değiştirmenin türevidir.

Şimdi de bir çubuğun yer değiştirme bağıntularına göre komşu konumdaki şekil değiştirme durumun yaklaşık olarak tanımlarsak :

$$U = \int_V \left\{ \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \right\} dV \quad (2.5)$$

Bu denklemde σ_{ij} gerilme tensörünün bileşenleridir ($i, j = 1, 2, 3$) ve V ise cismin hacmi olmaktadır. U ise dış yükler sonucu cismin yaptığı işi göstermektedir. Gerilmeleri birim boy şekil değiştirmeleri cinsinden ifade edebiliriz. Buna göre elastik cisimler için şekil değiştirme enerjisi de birim boy değiştirmesi cinsinden yazılabilir. Eğer yer değiştirme fonksiyonu ve bu fonksiyonun sınır değerleri belli ise şekil değiştirme enerjisi de bu değerlerin bir fonksiyonu olarak türetilir.

Bu açıkladıklarımızı küçük bir örnekle destekleyecek olursak, yer değiştirme fonksiyonu : $w_1 = ax^2 + bx + c$ olan ve ($w_2=w_3=0$) olan bire çubuğu ele alalım. Bu denklemden anlaşılacağı üzere bu bize tek eksenli birim boy uzamasını tanımlar ve lineer birim boy uzaması da :

$\varepsilon_{11} = 2ax + b$ şeklindedir. Hooke Kanununa göre lineer elastik bir cisim için :

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$$

Bu durumda şekil değiştirme enerjisi:

$$U = \int_V \left\{ \int_0^{\varepsilon_{11}} E \varepsilon_{11} d\varepsilon_{11} \right\} dV$$

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{11}^2 dV$$

En kesiti A değerinde olup, sabit olan ve boyu da l olan bir çubukta:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^l (2ax + b)^2 dx = \frac{EA}{2} \left(\frac{4a^2 l^3}{3} + 2abl^2 + b^2 l \right)$$

Görüldüğü üzere U şekil değiştirme enerjisi a, b, c sınır değerlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilmektedir. Bu sınır değerler yer değiştirme fonksiyonunun mesnet noktalarındaki değerleridir.

1.Castigliano Teoremi : Bir elastik cismin şekil değiştirme enerjisi genelleştirilmiş yer değiştirme, u_i cinsinden ifade edilebilirse, şekil değiştirme enerjisinin u_i 'ye göre 1. kısmın türevi, o yer değiştirmeyi oluşturacak olan S_i kuvvetini verir.

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = S_i \quad (2.6)$$

2. Castigliano Teoremi sadece elastik cisimler için geçerli olduğundan dolayı biz sadece 1. Teoremi kullanacağız.

2.3 KAFES SİSTEMLERDE GEOMETRİK RİJİTLİK MATRİSİ :

Bir kafes sistem elemanında yer değiştirme bileşenleri çubuğun sol ve sağ uçlarında ikiye tane olmak üzere toplam dört adettir.

Yer değiştirme bileşenleri : u_1, \dots, u_4

Bildiğimiz idealize etmenin dışında bir sabit enkesitli kafes sistem elemanı için yapılan kabuller şu şekildedir:

1) Yer değiştirme u_x 'in x'e göre türevi $u_{x,x}$ birden küçük bir sayıdır.

$$\left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 = 0 \quad (2.7)$$

$w_{z,x}$ 'in üçüncü ve daha yüksek üstleri ihmal edilebilir.

1) Çubuk basınç kuvveti Euler yükünden küçüktür. Fakat bu kabulün hesap sonunda kontrolü gerekmektedir.

Bu kabullerden sonra 2.4 denklemini şu şekilde irdelleyebiliriz.

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_z}{dx} \right)^2 \quad (2.8)$$

Birim boy şekil değişirmesi ϵ_{xx} , u_1 , u_2 , u_3 , u_4 cinsinden ifade edilecek olursa

$$\begin{aligned} u_x &= u_1 + \frac{u_3 - u_1}{l} x \\ w_z &= u_2 + \frac{u_4 - u_2}{l} x \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hooke Kanununa göre şekil değiştirme enerjisini yazacak olursak :

$$U = \frac{E}{2} \int_V \epsilon_{xx}^2 dV \quad (2.10)$$

Daha önce yazmış olduğumuz denklemler 2.10 ifadesinde yerine konulacak olursa bu denklem şöyle bir hal alır:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx}^2 &= \left[\frac{u_3 - u_1}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_4 - u_2}{l} \right)^2 \right]^2 \quad (2.11) \\ U &= \frac{E}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{u_3 - u_1}{l} \right)^2 + \left(\frac{u_3 - u_1}{l} \right) \left(\frac{u_4 - u_2}{l} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{u_4 - u_2}{l} \right)^4 \right] A dx \end{aligned}$$

Yukarıda sıralamış olduğumuz kabuller gözönüne alındığında bu ifade şu şekli alır :

$$\begin{aligned} U &= \frac{EA}{2l^2} \int_0^l \left[(u_3 - 2u_3u_1 + u_1^2) + \frac{1}{l} (u_3 - u_1)(u_4 - 2u_4u_2 + u_2^2) \right] dx \\ U &= \frac{EA}{2l} (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) + \frac{EA}{2l^2} (u_3 - u_1)(u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.12 ifadesini daha da sadeleştirmek mümkündür çünkü normal gerilmeler çubuk boyunca sabittir. Normal kuvvet F_1 ($F_1 > 0$: çekme) 2.8 denklemindeki 2. terimin ihmal edilmesi durumunda aşağıdaki hali alır:

$$\frac{F_1}{A} = \sigma_{xx} = E \frac{u_3 - u_1}{\ell} \quad \text{ya da başka bir gösterim tarzıyla}$$

$$F_1 = \frac{EA}{\ell} (u_3 - u_1) \quad (2.13)$$

F_1 değeri 2.12 denkleminde yerine konduğuz zaman

$$U = \frac{EA}{2\ell} (u_1^2 - 2u_1u_3 + u_3^2) + \frac{F_1}{2\ell} (u_2^2 - 2u_2u_4 + u_4^2) \quad (2.14)$$

Bu aşamadan sonra da 1. Castigliano Teoremini devreye sokarak aşağıdaki matrisyel bağıntıyı elde ederiz:

(Not: Şimdiye kadar denklemlerde kullanılan S ve u değerleri yerel koordinatlardaki değerlerdir. Bundan böyle yerel ve genel koordinatlardaki gösterimlerin karışmaması amacıyla yerel koordinatlar için aynı gösterimin üstü çizgilisi kullanılacaktır. Örneğin S_1 genel koordinatları belirtirken \bar{S}_1 yerel koordinatları ifade edecektir.)

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{F_1}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

lineer

geometrik

Yerel Koordinatlarda Rijitlik Matrisi

Eleman rijitlik matrisi aslında iki ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım şekil değiştirmiş durumdan bağımsızdır ve bildiğimiz lineer elastik durumu temsil etmektedir. İkinci matris ise komşu konumdaki şekil değiştirmeye bağlı olan F_1 normal kuvvetinden dolayı, komşu konumdaki şekil değiştirmeyi tanımlamaktadır. Tüm bu nedenlerden dolayı birinci kısım Elastik Rijitlik Matrisi, ikinci kısım da Geometrik Rijitlik Matrisi adını almaktadır.

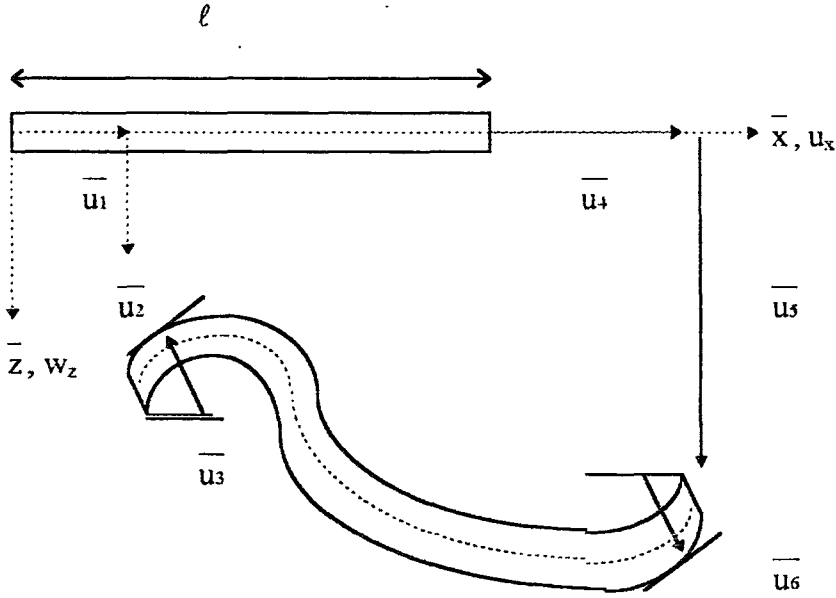
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \left\{ \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} + \frac{F_1}{\ell} \begin{bmatrix} s^2 & -cs & -s^2 & cs \\ -cs & c^2 & cs & -c^2 \\ -s^2 & cs & s^2 & -cs \\ cs & -c^2 & -cs & c^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Genel Koordinatlarda Rijitlik Matrisi

$$c = \cos\alpha = (x_r - x_1)/l_i$$

$$s = \sin\alpha = (z_r - z_1)/l_i$$

2.4 DÜZLEMSEL ÇUBUK SİSTEMLERDE GEOMETRİK RİJİTLİK MATRİSİ :



Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere bir düzlemsel çubuk elemanın şekil değiştirmemiş durumu ve ona çok yakın olan şekil değiştirmiş komşu konumu irdeleyelim:

Düzlemsel çubuk sistemlerde yapacağımız kabulleri şu şekilde sıralayabiliriz:

- 1) Kesme şekil değiştirmeleri eğilme şekil değiştirmeleri yanında ihmal edilecek kadar küçüktür.
- 2) Komşu konumdaki (şekil değiştirmiş durum) çubuğun eğriliği için şu ifade geçerlidir.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{dw_z}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dw_z}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2w_z}{dx^2} \quad (2.17)$$

3) $u_{x,x}$ 'in x 'e göre türevi 1'in yanında çok küçüktür.

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)^2 \approx 0.$$

Birim boy uzaması için aşağıdaki formül geçerli olur:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw_y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw_z}{dx}\right)^2 \right] \text{ uzama \u0131kel de\u011fi\u015ftirmesi}$$

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)^2 \cong 0 \quad \left(\frac{dw_y}{dx}\right)^2 \cong 0 \quad \text{kesme \u0131kel de\u011fi\u015ftirmesi}$$

Bu kabullerden sonra form\u00fcl\u00fcn sadele\u015fmif hali ise \u015f\u00f6yledir:

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_z}{dx}\right)^2 - z \left(\frac{d^2w_z}{dx^2}\right) \quad (2.18)$$

uzama e\u011filme

Elemanter \u00e7ubuk teorisini hatırlarsak, yukarıdaki denklemin e\u011filmeyle ilgili kısmının bize yabancı gelmemesi gerekir. Pozitif bir e\u011filik pozitif bir birim boy uzamasına i\u015fare eder. Yani $z < 0$ i\u00e7in $\epsilon_{xx} > 0$ ve $z > 0$ i\u00e7in ise $\epsilon_{xx} < 0$ durumuyla kar\u015fla\u015fırız. Berneoulli teoremine g\u00f6re kesit \u00fczerinde birim boy uzamaları lineerdir.ve bu de\u011ferleri 2.18 form\u00fcl\u00fcn\u00fcn ilgili kısmından bulabiliriz.

Bu anlattıklarımızı a\u015fa\u011fıdaki \u00f6rnek \u00fczerinde anlatalım:

$$u_x = a_0 + a_1 \bar{x}$$

(2.19)

$$w_z = b_0 + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{x}^2 + b_3 \bar{x}^3$$

$a_i, b_i = \text{sabit}$

Böyle bir durumda daha önceden yaptığımız kabullerle yüklenmemiş bir çubuğun şekil değiştirmesi küçük şekil değiştirme durumunda tam olarak belirlenebilir. Yüklenmemiş çubukta çubuk eksenini doğrultusundaki şekil değiştirmeler daima lineerdir. Çubuk eksenine dik doğrultudakiler ise daima üçüncü dereceden bir eğridir.

Yukarıda verilen şeklimiz baz alınarak hesaplanan sınır şartları ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_1 &= \bar{u}_x(0) = a_0 \\
 \bar{u}_4 &= \bar{u}_x(\ell) = a_0 + a_1 \ell \\
 \bar{u}_2 &= \bar{w}_z(0) = b_0 \\
 \bar{u}_5 &= \bar{w}_z(\ell) = b_0 + b_1 \ell + b_2 \ell^2 + b_3 \ell^3 \\
 \bar{u}_3 &= -\frac{dw_z(0)}{dx} = -b_1 \\
 \bar{u}_6 &= -\frac{dw_z(\ell)}{dx} = -b_1 - 2b_2 \ell - 3b_3 \ell^2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Denklemlerden de anlaşılacağı üzere altı bilinmeyenli altı denklemleri sınır değer problemine göre çözebiliriz.

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \bar{u}_1 \\
 a_1 &= \frac{\bar{u}_4 - \bar{u}_1}{\ell} \\
 b_0 &= \bar{u}_2 \\
 b_1 &= -\bar{u}_3 \\
 b_2 &= 3 \frac{(\bar{u}_5 - \bar{u}_2)}{\ell^2} + \frac{(2\bar{u}_3 + \bar{u}_6)}{\ell} \\
 b_3 &= 2 \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_5)}{\ell^3} + \frac{(\bar{u}_3 + \bar{u}_6)}{\ell^2}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

1.18 ifadesinde belirttiğimiz birim boy şekil değiştirmeler de u_i ' ye bağlı olarak ifade edilebilir.

$$U = \frac{E}{2} \int_V \epsilon_{xx}^2 dV$$

$$dV = dA d\bar{x}$$

$$dA = d\bar{y} d\bar{z}$$

$$U = \frac{E}{2} \int_{x=0}^{\ell} \int_A \left[\left(\frac{d\bar{u}_x}{d\bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{d^2\bar{w}_z}{d\bar{x}^2} \right)^2 \bar{z}^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d\bar{w}_z}{d\bar{x}} \right)^4 - 2 \left(\frac{d\bar{u}_x}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d^2\bar{w}_z}{d\bar{x}^2} \right) \bar{z} - \left(\frac{d^2\bar{w}_z}{d\bar{x}^2} \right) \left(\frac{d\bar{w}_z}{d\bar{x}} \right)^2 \bar{z} + \left(\frac{d\bar{u}_x}{d\bar{x}} \right) \left(\frac{d\bar{w}_z}{d\bar{x}} \right)^2 \right] dA d\bar{x} \quad (2.22)$$

Eğer x ekseninin kesitin ağırlık merkezinden geçtiğini kabul edersek o zaman:

$$\int_A \bar{z} dA = 0 \quad (2.23)$$

Bu durumda kesitin A ağırlık merkezini tanımlayan eşitliği bulmuş oluyoruz. Böylece $w_{z,x}$ 'in üç ve daha fazla üstlerini ihmal edersek şu sonuca ulaşırız:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{du_x}{dx} \right)^2 dx + \frac{EI_y}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{d^2w_z}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{du_x}{dx} \right) \left(\frac{dw_z}{dx} \right)^2 dx \quad (2.24)$$

Bu integral denklemler u_i cinsinden ifade edilip, ara hesaplar yapıldığında şu sonuca ulaşırız:

$$U = \frac{EA}{2\ell} \left[(\bar{u}_1^2 - 2\bar{u}_1\bar{u}_2 + \bar{u}_2^2) + \frac{2}{\ell} (\bar{u}_4 - \bar{u}_1) \left(\frac{3}{5}\bar{u}_2^2 + \frac{\ell^2}{15}\bar{u}_3^2 + \frac{3}{5}\bar{u}_5^2 + \frac{\ell^2}{15}\bar{u}_6^2 - \frac{\ell}{10}\bar{u}_2\bar{u}_3 - \frac{6}{5}\bar{u}_2\bar{u}_5 - \frac{\ell}{10}\bar{u}_2\bar{u}_6 + \frac{\ell}{10}\bar{u}_3\bar{u}_5 - \frac{\ell^2}{30}\bar{u}_3\bar{u}_6 + \frac{\ell}{10}\bar{u}_5\bar{u}_6 \right) \right] + \frac{2EI_y}{\ell^3} (3\bar{u}_2^2 + \ell^2\bar{u}_3^2 + 3\bar{u}_5^2 + \ell^2\bar{u}_6^2 - 3\ell\bar{u}_2\bar{u}_3 - 6\bar{u}_2\bar{u}_5 - 3\ell\bar{u}_2\bar{u}_6 + 3\ell\bar{u}_3\bar{u}_5 + \ell^2\bar{u}_3\bar{u}_6 + 3\ell\bar{u}_5\bar{u}_6) \quad (2.25)$$

$$F_1 = \frac{EA}{\ell} (\bar{u}_4 - \bar{u}_1) \text{ olduğuna göre Castigliano Teoreminin kullanılmasıyla}$$

düzlemsel çubuk sistemlerin rijitlik bağıntısını bulmuş oluruz.

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{S}_4 \\ \bar{S}_5 \\ \bar{S}_6 \end{bmatrix} = \frac{EI_y}{\ell^3} \begin{bmatrix} Ae^2/l_y & 0 & 0 & -Ae^2/l_y & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6\ell & 0 & -12 & -6\ell \\ 0 & -6\ell & 4\ell^2 & 0 & 6\ell & 2\ell^2 \\ -Ae^2/l_y & 0 & 0 & Ae^2/l_y & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6\ell & 0 & 12 & 6\ell \\ 0 & -6\ell & 2\ell^2 & 0 & 6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} + F_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5\ell & -1/10 & 0 & -6/5\ell & -1/10 \\ 0 & -1/10 & 2\ell/15 & 0 & 1/10 & -\ell/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5\ell & 1/10 & 0 & 6/5\ell & 1/10 \\ 0 & -1/10 & -\ell/30 & 0 & 1/10 & 2\ell/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_6 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

lineer

geometrik

Yukarıda düzlemsel çubukların yerel koordinatlardaki rijitlik matrisi gösterilmiştir. Genel koordinatlardaki rijitlik matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$\underline{k}_i^g = \frac{F_1}{30\ell} \begin{bmatrix} 36s^2 & -36cs & 3s\ell & -36s^2 & 36cs & 3s\ell \\ -36cs & 36c^2 & -3c\ell & 36cs & -36c^2 & -3c\ell \\ 3s\ell & -3c\ell & 4\ell^2 & -3s\ell & 3c\ell & -\ell^2 \\ -36s^2 & 36cs & -3s\ell & 36s^2 & -36cs & -3s\ell \\ 36cs & -36c^2 & 3c\ell & -36cs & 36c^2 & 3c\ell \\ 3s\ell & -3c\ell & -\ell^2 & -3s\ell & 3c\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$c = \cos\alpha = (x_r - x_\ell) / \ell_i$$

$$s = \sin\alpha = (z_r - z_\ell) / \ell_i$$

Lineer çözüme baktığımız zaman $\underline{k}_e^i = \underline{k}^i$ şeklinde yazılmış olduğunu görürüz. Lineer olmayan yani komşu şekil değiştirme durumunda oluşan rijitlik matrisi ile elastik stabilitede elde edilen rijitlik matrisi karşılaştırmak istersek :

Elastik stabilitede aynı geometrik rijitlik matrisi çubuğun lineer olmayan şekil değiştirme bağıntılarını lineerleştirerek ve aynı zamanda komşu konumdaki denge şartları gözönüne alınarak yazılmış ve kirişin diferansiyel denklemi olarak da

$$\frac{d^2 w_z}{dx} = -\frac{M_y}{EI_y} \text{ dikkate alınmıştır.}$$

Biz burada geometrik rijitlik matrisini bulmak için büyük şekil değiştirmelerden hareket ederek, Lagrange şekil değiştirme tensöründen türetme yolunu kullandık. Aynı zamanda kiriş diferansiyel denklemine uygun şekil değiştirmeler seçilmiştir. İki durumda da elde edilen sonuçlar aynıdır. Yani kabuller ve ihmaller her iki durumda da eşittir. Görüldüğü üzere geometrik rijitlik matrisinin Castigliano Teoremi kullanılarak

şekil değiştirme enerjisinden elde edilmesi nispeten kolay ve genelde tercih edilen bir yoldur.

2.5 YAKLAŞIK ÇÖZÜM METODLARINDAN NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ:

Stabilite probleminin çözümünde düğüm noktası kuvvetlerinin orantılılık faktörü olan λ 'ya lineer olarak bağlı olduğu varsayımında bulunmuştuk. Stabilite eşıtlіęimiz:

$$\underline{K}(\lambda \underline{F})\underline{r} = \lambda \underline{R} \quad (2.28)$$

şeklinde özetlenebilir.

Fakat bu anlattıklarımız lineer olmayan şekil değiştirmeler için geçerli değildir. Böyle bir durumda denge denklemlerinin n tane lineer olmayan eşıtlikten meydana gelmiş olduğunu kabul edelim ve bu denklemler $\underline{r}^T = [\underline{rS}]$ şeklinde olsun.

$$\underline{g}(\underline{r}) = \underline{R} \quad \underline{g}^{n \times 1} \quad (2.29)$$

\underline{r} 'nin çok açık bir çözümüne ulaşamadığımız için mühendislikte sıkça kullanılan bir teknikte, yani iterasyonlar yaparak sonuca yaklaşmak yoluyla problemi çözmek mümkündür. Bizim burada kullanacağımız metod Newton-Raphson Metodu'dur.

$$g_i(\underline{r}) = R_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

Newton iterasyon yöntemine başlayabilmek için öncelikle Jakobi matrisi başlangıç durumu olan \underline{r}^v matrisinin hesaplanması gerekir. Jakobi matrisi \underline{g} 'nin kısmi türevidir.

$$\underline{J}^v \equiv \underline{J}(\underline{r}) = \frac{\partial \underline{g}(\underline{r})}{\partial \underline{r}} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial r_j}$$

\underline{r}^v 'nün civarında şu bağıntı geçerlidir.

$$\underline{g}(\underline{r}^v + \partial \underline{r}) = \underline{g}(\underline{r}) + \underline{J}^v \partial \underline{r} = \underline{R} \quad (\text{Taylor Serisi}) \quad (2.32)$$

$\partial \bar{\mathbf{r}}$ yerine $\Delta \bar{\mathbf{r}}$ yazılırsa:

$\partial \bar{\mathbf{r}} \equiv \Delta \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}^{\nu+1} - \bar{\mathbf{r}}^{\nu}$ şeklinde yazılır ve sonuç olarak Newton-Raphson iterasyon metoduna göre sonuç şöyle olur:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{\nu} \bar{\mathbf{r}}^{\nu+1} &= \mathbf{R} - \mathbf{g}(\bar{\mathbf{r}}) + \mathbf{J}^{\nu} \bar{\mathbf{r}}^{\nu} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{r}}) - \mathbf{J}^{\nu} \bar{\mathbf{r}}^{\nu} + \mathbf{J}^{\nu} \bar{\mathbf{r}}^{\nu+1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

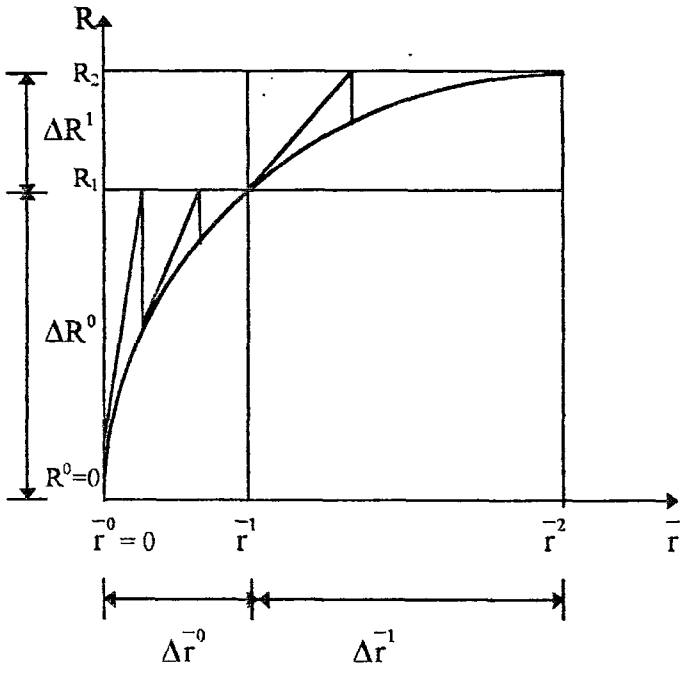
Yapısal sistemlerin iterasyon metoduyla hesaplarında başlangıç değeri $\bar{\mathbf{r}}^{\nu}$ 'nün verilmiş olan bir \mathbf{R}^k dış yük vektörü için $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{r}}^{\nu}) = \mathbf{R}^k$ denge şartını sağlaması gerekmektedir. Bu iterasyon gerçekleştirilirken her yeni adımda \mathbf{J} yeniden hesaplanır ve 2.33 denklemini her keresinde yeniden çözülür.

Aşağıdaki şekilde bir serbestliği olan bir sistemde bu iterasyonla elde edilen değerler gösterilmiştir. Birinci şekilde her iterasyon için yeni bir teğetsel yaklaşım \mathbf{J} hesaplanmış, diğer şekilde ise $\bar{\mathbf{r}}^{\nu}$ 'nün artışı önceden verilmiş olan ϵ_r 'den küçük oluncaya kadar aynı \mathbf{J} teğetsel yaklaşımı geçerli kabul edilmiştir.

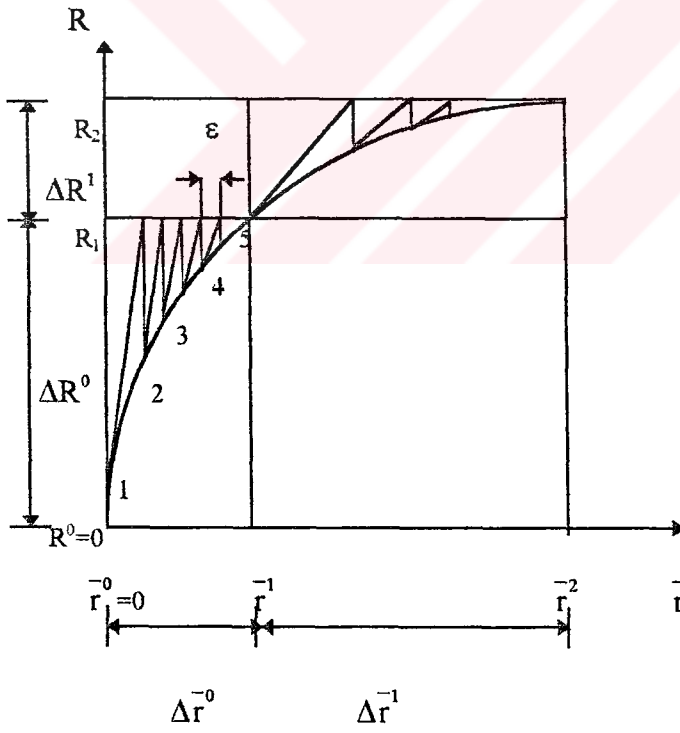
Çok boyutlu durumlarda ϵ_r $\bar{\mathbf{r}}$ ile karşılaştırılır.

$$\left\| \bar{\mathbf{r}}^{\nu+1} - \bar{\mathbf{r}}^{\nu} \right\| < \epsilon_r \quad (2.34)$$

Bu eşitsizlik sağlandığı zaman yeni bir Jakobi matrisi hesaplanacaktır. Bu yöntemle modifiye edilmiş Newton-Raphson Metodu denir. Birinci durumda \mathbf{J} 'nin her noktada hesaplanması gerekir ve bulunan değer 2.33 denkleminde yerine konularak denklem her keresinde yeniden çözülür. Oysa diğer durumda yalnızca 2.33 eşitliğini çözmek yeterlidir ve bu durum bize daha çok nokta ile çalışma olanağı sağlar.



Şekil a) Newton-Raphson Yöntemi



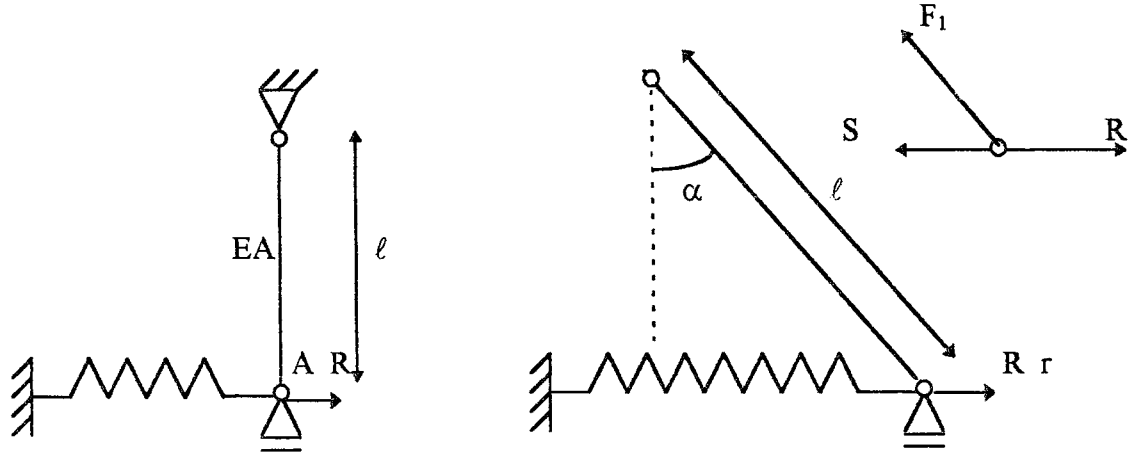
Şekil b) Modifiye Edilmiş Newton-Raphson Yöntemi

$\|\bar{\Gamma}^{v+1} - \bar{\Gamma}^v\| < \varepsilon_r$ olduğu zaman \bar{J} 'nin inversinin hesaplanması gerekmektedir. \bar{J} 'nin inversinin hesaplanması uzun ve zaman alıcı bir iş olduğundan dolayı taşıyıcı sistemlerde genelde ikinci yöntem olan Modifiye Edilmiş Newton-Raphson Yöntemi kullanılmaktadır. ε_r 'nin büyük bir değer alması halinde ilk ve ikinci durumlar iç içe girer. Eğer $\det(\bar{J})$ çok küçük ise bu sefer de nümerik zorluklarla karşılaşırız. Böyle bir durum gerçekte bir boyutlu sistemdeki yatay teğete karşılık gelmektedir.

2.33 denkleminin böyle bir durumda kesin çözümü yoktur. Şekil değiştirme $\bar{\Gamma}$ yük sabit kaldığı halde artar. Fakat bu durum en başta yaptığımız malzeme ile ilgili kabullerle bağdaşmadığından dolayı kapsam dışı bırakılmıştır. İncelememizde yapı malzemesi lineer elastik bölgede kalmaktadır. Vurgu problemlerinde de özel bir durumla karşılaşmaktayız. Bu tip problemlerde yatay teğete kadar ulaşılır fakat yapı sistemi geometrisini değiştirerek tekrar kararlı başka bir konuma ulaşır ki bu konu da ilgi alanımız dışındadır.

Tüm bu sebeplerden dolayı biz yükü yer değiştirme arasında belirli bir bağıntı bulunan bölgede araştırma yapacağız. Bu anlattıklarımızı küçük bir örnekle pekiştirmek istersek:

A noktasında dengeyi yazmak istersek : $-S - F_1 \sin \alpha + \lambda R = 0$



Yay rijitliği = E_k

$$S = (E_k) r$$

$$F_1 = EA \left(\frac{\ell'}{\ell - 1} \right)$$

$$\frac{\ell'}{\ell} = \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{\tan^2 \alpha + 1}}$$

$$\tan \alpha = \frac{r}{\ell}$$

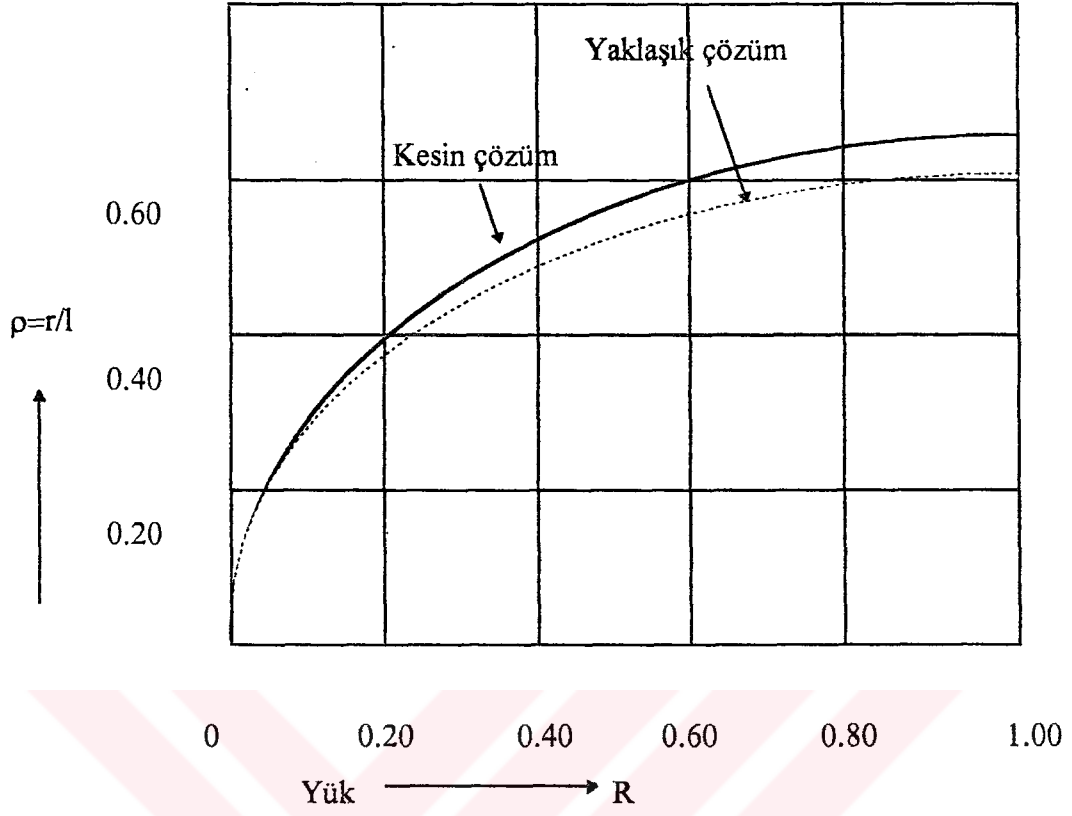
Bu değerleri denge formülünde yerine yazarsak:

$$-E_k r - EA \left(\sqrt{\left(\frac{r}{\ell} \right)^2 + 1} - 1 \right) \frac{r/\ell}{\sqrt{\left(\frac{r}{\ell} \right)^2 + 1}} + R = 0$$

$$\rho = \frac{r}{\ell}$$

$$R = E_k \ell \rho + \frac{EA \left(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1 \right)}{\sqrt{\rho^2 + 1}} \rho$$

Aşağıdaki şekilde $R(\rho)$ 'nin yük-şekil değişirme diyagramı verilmiştir.



Jakobi matrislerini hesaplayabilmemiz için şu denklemlerden faydalanmamız gerekmektedir.

$$g_1: \quad E_k \ell \rho + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}} F_1 = R$$

$$g_2: \quad EA(\sqrt{\rho^2 + 1} - 1) - F_1 = 0$$

Şimdi Jakobi matrislerini hesaplayalım:

$$J_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial \rho} = E_k \ell + (\rho^2 + 1)^{-3/2}$$

$$J_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial F_1} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}}$$

$$J_{21} = \frac{\partial g_2}{\partial \rho} = \frac{EA}{\sqrt{\rho^2 + 1}}$$

$$J_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial F_1} = -1$$

$\rho=0$ ve $\Delta R=0.2$ değerleri alınarak iteratif yöntemle 2.33 formülü yardımıyla hesaplanabilir.

2.6 ÇUBUK SİSTEMLERİN HESABINDA NEWTON-RAPHSON METODU:

\underline{R}^m dış yüküyle yüklü bir çubuk sistemde Dış yük vektörüne bağlı olarak düğüm noktaları yer değiştirmeleri \underline{r}^m ve de çubuk uç kuvvetleri de \underline{S}^m olsun. Bu vektörlerin bilinmesi durumunda şekil değiştirmeler ve şekil değiştirme eğrisi hesaplanabilir. Bilindiği üzere süperpozisyon prensibi sadece lineer bölgede geçerlidir.

Yükleme fonksiyonunu parametrik bir fonksiyon olarak alalım:

$$R_i = R_i(\lambda)$$

$R(\lambda)$ 'yı yük hikayesi olarak tanımlayacağız ve problemimizde λ 'yı statik yükün zaman faktörü olarak göstereceğiz. Yük hikayesi aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

$$\underline{R}_1^0 = \underline{0}$$

$$\underline{R}_1^1 = \underline{R}^0 + \Delta \underline{R}^1 \quad (2.35)$$

$$\underline{R}^n = \underline{R}^{n-1} + \Delta \underline{R}^n$$

Yükün artış miktarı için de şöyle olduğunu varsayalım:

$$\|\Delta \underline{R}\| = \sqrt{\Delta \underline{R}^T \Delta \underline{R}} \quad (2.36)$$

Yük artışının çok küçük olduğunu ve \underline{R}^k ve \underline{R}^{k+1} yükleri arasında bir \underline{R} yükü ve bu yüke karşılık gelen bir \underline{r} yer değiştirme vektörü olduğunu varsayalım.

Şimdi iteratif yolla hesaba gelirsek:

$$\underline{S}_+ \equiv \underline{F}_1$$

$$\bar{\underline{S}} = \underline{k}_e \bar{\underline{u}} + \underline{k}_s (\bar{\underline{S}}^0) \bar{\underline{u}}$$

2.33 'e göre yer değiştirme ve kesit tesirleri iterasyonları:

$$\underline{R} = \underline{g}(\bar{\underline{r}}^v) + \underline{J}^v (\bar{\underline{r}}^{v+1} - \bar{\underline{r}}^v)$$

$$\bar{\underline{r}}^T = [\underline{S} \underline{r}]$$

$$\bar{\underline{S}}^{v+1} = \underline{k}_e \bar{\underline{u}}^{v+1} + \underline{k}_s (\bar{\underline{S}}^v) \bar{\underline{u}}^{v+1} \quad (2.37)$$

Düğüm noktaları için iterasyon geometrik rijitlik matrisinin türevinden bulunur. Her $\bar{\underline{r}}^v$ şekil değiştirmeli başlangıç durumu için \underline{k}_e elastik rijitlik matrisi de bu şekil değiştirmeye bağlı olarak değişecektir.

Sistemin geometrisi $\bar{\underline{S}}$ 'nin değişmesiyle değiştirgi için iterasyonun $\bar{\underline{r}}$ üzerinden yapılması daha uygundur. Aşağıda v ifadesiyle bu iterasyon verilmiştir:

$$\bar{\underline{S}}^{v+1} = \underline{k}_e (\bar{\underline{r}}^v) \bar{\underline{u}}^{v+1} + \underline{k}_s (\bar{\underline{S}}^v) \bar{\underline{u}}^{v+1} \quad (2.38)$$

Çubuk uç şekil değiştirmeleri komşu şekil değiştirme konumu $\bar{\underline{r}}^{v+1}$ ile kinematik şartla birbirine bağlıdır.

$$\begin{aligned} \bar{\underline{u}}^{v+1} &= \underline{C}^T \bar{\underline{r}}^{v+1} \\ \underline{C} \bar{\underline{S}}^{v+1} &= \underline{R}^k \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.39 denklemlerinde \underline{R}^k önceden verilmiş olan dış yüklerdir. 2.37 eşitliğini 2.39'daki ilgili ifadeyle birleştirirsek şu ifade ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}
[\underline{\mathbf{K}}^o(\underline{\mathbf{r}}^v) + \underline{\mathbf{K}}^s(\underline{\mathbf{S}}^v)]\underline{\mathbf{r}}^{v+1} &= \underline{\mathbf{R}}^k \\
\underline{\mathbf{K}}^o(\underline{\mathbf{r}}^v) &= \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{k}}_o(\underline{\mathbf{r}}^v)\underline{\mathbf{C}}^T \\
\underline{\mathbf{K}}^s(\underline{\mathbf{S}}^v) &= \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{k}}_s(\underline{\mathbf{S}}^v)\underline{\mathbf{C}}^T
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Çubuk uç kuvvetlerini bulmak için ise şöyle buluruz :

$$\underline{\mathbf{S}}^{v+1} = [\underline{\mathbf{k}}_o(\underline{\mathbf{r}}^v) + \underline{\mathbf{k}}_s(\underline{\mathbf{S}}^v)]\underline{\mathbf{C}}^T\underline{\mathbf{r}}^{v+1} \tag{2.41}$$

Hata sınırı eğer ε değerinden küçük olursa o zaman iterasyonu keseriz:

$$\frac{\|\underline{\mathbf{r}}^{v+1} - \underline{\mathbf{r}}^v\|}{\|\underline{\mathbf{r}}^v\|} + \frac{\|\underline{\mathbf{S}}^{v+1} - \underline{\mathbf{S}}^v\|}{\|\underline{\mathbf{S}}^v\|} < \varepsilon \tag{2.42}$$

Bu aşamada iteratif hesap yoluyla bulunan şekil değiştirmeler $\underline{\mathbf{R}}^k$ yükünün gerçek düğüm noktası yer değiştirmelerine oldukça yakındır.

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{r}}^k &= \underline{\mathbf{r}}^{v+1} \\
\underline{\mathbf{S}}^k &= \underline{\mathbf{S}}^{v+1}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.40 matris denklmi denge konumlarında pozitif tanımlıdır:

$$\det(\underline{\mathbf{K}}^o(\underline{\mathbf{r}}^v) + \underline{\mathbf{K}}^s(\underline{\mathbf{S}}^v)) > 0$$

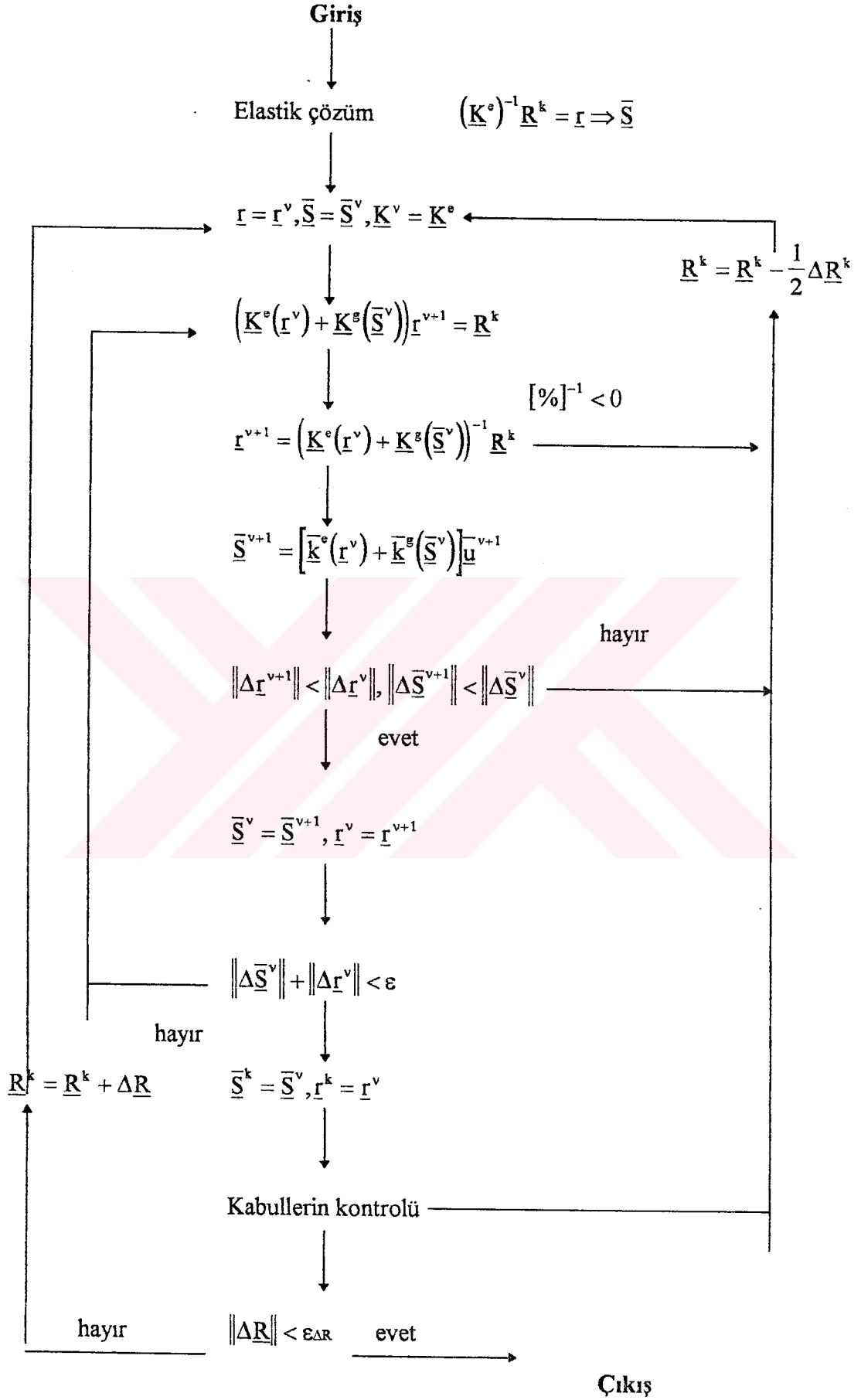
Aynı zamanda:

$$\det(\underline{\mathbf{K}}^o + \underline{\mathbf{K}}^s) \leq 0 \tag{2.44}$$

Bu duruma göre $\underline{\mathbf{R}}^k$ son iterasyon basamağından başlamak üzere $(\underline{\mathbf{R}}^{k-1}, \underline{\mathbf{r}}^{k-1}, \underline{\mathbf{S}}^{k-1})$ daha küçük yük adımlarıyla hesaba devam edilir. Eğer son yük basamağı olan $\underline{\mathbf{R}}^n$ 'e erişilemezse son iterasyondan bulunan değer izin verilen yük olarak kabul edilir. Lineer hesap yöntemiyle kıyaslırsak her adımdaki hesap miktarı çok daha fazladır. Genelde kabul edilen sonuca 10 ila 20 adım arasında ulaşılır. Bu yüzden yaptığımız hesapların bu tip problemlerin çözümünde kullanılan hazır birtakım bilgisayar programlarıyla kontrolünün yapılması iyi olur. Yapacağımız bir akış diyagramı ile hesap yolunu göstereyim. Yalnız öncelikle bu akış diyagramı için yapılacak kabuller şöyle sıralanabilir:

- a) Hesabın başlangıcında ilk toplam rijitlik matrisinin pozitif tanımlı olduğunun kontrolü
- b) Her adım arasında hesabın kabullerinin geçerli olup olmadığıın bakılması
- c) Her yük adımında oluşan gerilmelerin kontrolü





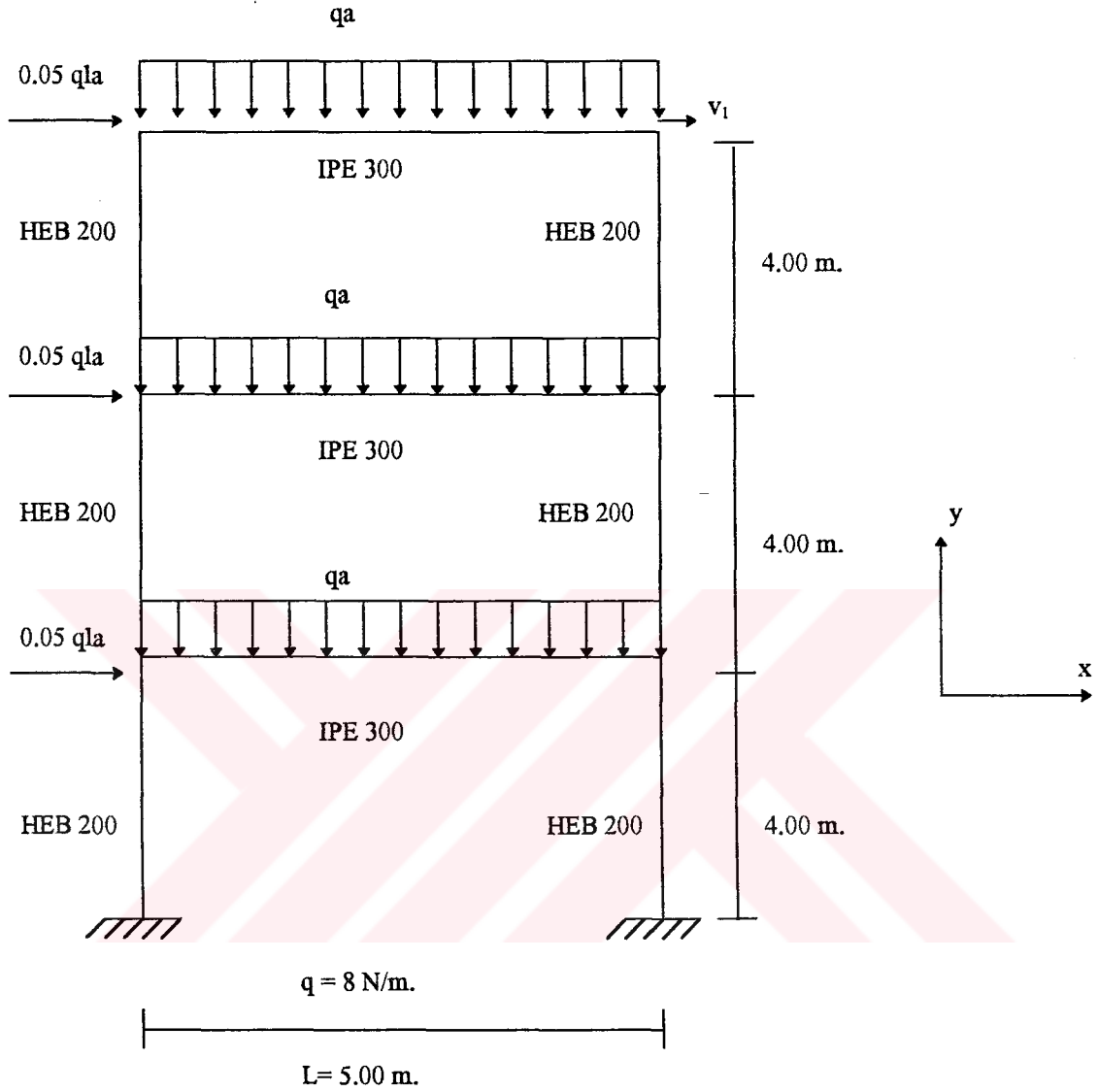
2.7. KONUNUN GENEL DEĞERLENDİRMESİ :

Günümüzde taşıyıcı sistemlerin dengesi şekil değiştirmiş sistem üzerinde hesaplanmaktadır. Yapi statüğünde lineer olmayan şekil değiştirmeye göre yapılan bu tip hesaplar “İkinci Mertebe Teorisi” adıyla adlandırılır. Bu teoride gerek hesap yöntemi ve gerekse şartnamelerde nasıl bir yol izleneceği açıkça belirtilmiştir. Chwalla bu teoriyi ilk kez kafes sistemlerde uygulayarak “Denge Denklemlerinde Elastik Şekil Değiştirmelerin Gözönüne Alınması” olarak tanımlamıştır.

Gerçekte hesapları yaparken yaptığımız ihmallere ki buna örnek olarak bir eğilme çubuğunda eğriliğin yaklaşık olarak ele alınması gösterilebilir; ikinci mertebe teorisiyle tam olarak bağdaşmamaktadır. Denge denklemlerinde şekil değiştirmelerin gözönüne alınması gereklidir. Eğrilik konusunun kesin hesaplara girmesi konusu da incelenmiştir ve Euler'den beri bu tip hesaplara “Elastica problemleri” adı verilmektedir. Elastik eğrinin ikinci türevinin yaklaşık olarak eğriliğe eşit kabul edilmesi, plastik hesap için yeterli olmaktadır. Yaptığımız bu kabul açıkladığımız hesabın ana kabulüdür ve bu nedenle çubuk sistemlerin stabilite hesabının iteratif yöntemle ve geometrik rijitlik matrisiyle çözümü ikinci mertebe teorisinin yaklaşık bir çözümüdür. Zaten bu teoride kesin bir çözüm yoktur. Daima lineer olmayan denklem takımlarının çözümü gerekmektedir ve bu denklemler sadece iterasyonla çözülebilir. Geometrik rijitlik matrisi yardımıyla yaptığımız iterasyon oldukça doğruya yakın bir yaklaşımı bize verir. Daha fazla ve daha küçük elemanlarla çalışmak suretiyle Elastica problemleri çözülebilmektedir. Fakat bu denli doğru ve kesin bir çözüme hiçbir zaman ihtiyaç duyulmaz.

Eğer sistemin çubuklarının elastik eğrisinin eğriliği çubuk boyunca değişiyorsa, bir başlangıç şekil değiştirme durumundan başlamanın hiçbir anlamı kalmamaktadır. Böyle durumlarda çubuklar küçük elemanlara bölünür ve hesapları yapılır. Aksi halde bulduğumuz sonuç matematiksel olarak doğru bile gözükse taşıyıcı sistemin gerçek durumunu bize yansıtmaz.

3. SAYISAL UYGULAMALAR:



$$E = 2 \times 10^7 \text{ t/m}^2$$

Yukarıdaki şekilde geometrisi ve yükleme şekli verilen, çelik profillerden oluşmuş düzlemsel çubuk sistemde “a” parametresine bağlı olarak artan dış yükler sonucunda sistemin geometrik lineer olmayan hesabı Newton-Raphson Yaklaşım Yöntemi kullanılarak incelenecektir. Hesap lineer olmayan akış diyagramı için verdiğimiz şekil baz alınarak sürdürülecektir.

Yükleme yüksüz durumdan hareket edilerek parametrik olarak verilmiştir.

IPE 300, bildiğimiz geniş başlıklı I çubuğudur, HEB 200 de yüksekliği ve başlık genişliği birbirine eşit olan bir I çubuğudur ve ülkemizde fazlaca bilinmediği ve kullanılmadığı için bu profille ilgili bilgileri bir gözden geçirelim.

HEB 200 : $b = 200 \text{ mm}$
 $h = 200 \text{ mm}$
 $t = 15 \text{ mm}$
 $s = 9 \text{ mm}$
 $W = 61.3 \text{ kg/m}$
 $F = 78.1 \text{ cm}^2$
 $I_y = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^4$

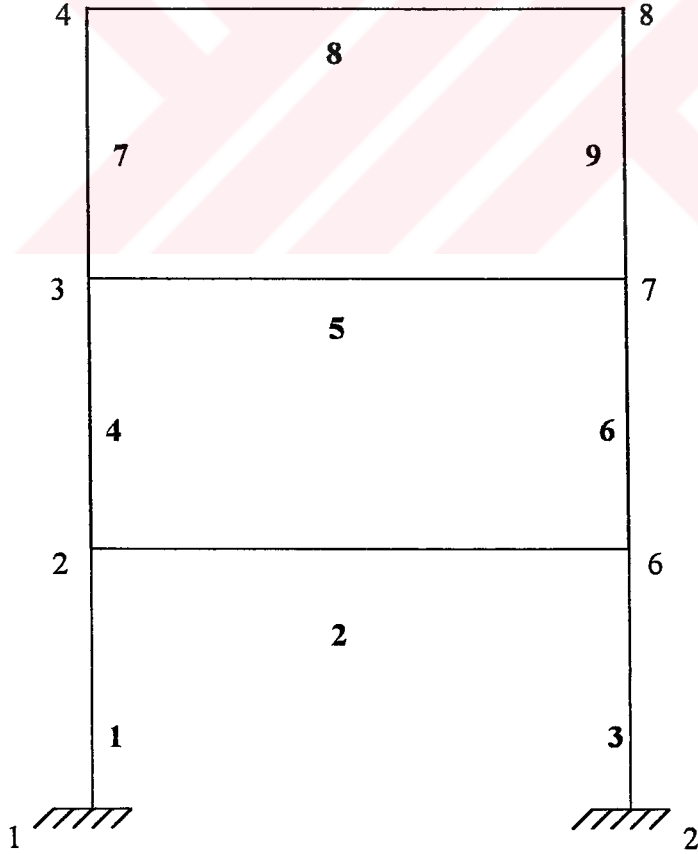
IPE 300 : $I_y = 6.04 \times 10^{-6} \text{ m}^4$

Düğüm Noktaları Tablosu		
No	x (cm)	y (cm)
1	0	0
2	0	400
3	0	800
4	0	1200
5	500	0
6	500	400
7	500	800
8	500	1200

Eleman Tablosu					
No	1	r	L (cm)	cos α	sin α
1	1	2	400	0	1
2	2	6	500	1	0
3	5	6	400	0	1
4	2	3	400	0	1
5	3	7	500	1	0
6	6	7	400	0	1
7	3	4	400	0	1
8	4	8	500	1	0
9	7	8	400	0	1

Elastik Rijitlik Matrisi \underline{K}^e ve Geometrik Rijitlik Matrisi \underline{K}^g direkt yöntemle bulunması:

Serbestlik Eleman	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	4	5	6															
2	1	2	3							4	5	6						
3										4	5	6						
4	1	2	3	4	5	6												
5				1	2	3							4	5	6			
6										1	2	3	4	5	6			
7				1	2	3	4	5	6									
8							1	2	3							4	5	6
9													1	2	3	4	5	6



$$\underline{k}_e^i = \frac{2EI_y}{\ell} \begin{bmatrix} 6s^2/\ell^2 & -6sc/\ell^2 + c_1sc & 3s/\ell & -6s^2/\ell^2 - c_1c^2 & 6sc/\ell^2 - c_1sc & 3s/\ell \\ & 6c^2/\ell^2 + c_1s^2 & -3c/\ell & 6sc/\ell^2 - c_1sc & -6c^2/\ell^2 - c_1s^2 & -3c/\ell \\ & & 2 & -3s/\ell & 3c/\ell & 1 \\ \text{sim} & & & 6s^2/\ell^2 + c_1c^2 & -6sc/\ell^2 + c_1sc & -3s/\ell \\ & & & & 6c^2/\ell^2 + c_1s^2 & 3c/\ell \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^i = \frac{F_1}{30\ell} \begin{bmatrix} 36s^2 & -36cs & 3sl & -36s^2 & 36cs & 3sl \\ & 36c^2 & -3cl & 36cs & -36s^2 & -3cl \\ & & 4\ell^2 & -3sl & 3cl & -\ell^2 \\ \text{sim} & & & 36s^2 & -36cs & -3sl \\ & & & & 36c^2 & 3cl \\ & & & & & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

Öncelikle çözüme her elemanın elastik rijitlik matrislerini bularak başlayalım.

1 Numaralı Eleman Elastik Rijitlik Matrisi (Genel Koordinatlarda):

$$\frac{2EI_y}{\ell} = \frac{2 \times 2 \times 10^7 \times 2 \times 10^{-5}}{4} = 200 \text{tm}$$

$$c_1 = A / 2I_y = 0.0195$$

$$c = \cos \alpha = 0$$

$$s = \sin \alpha = 1$$

$$\underline{k}_e^1 = \begin{bmatrix} 75 & 0 & 150 & -75 & 0 & 150 \\ 0 & 3.90 & 0 & 0 & -3.90 & 0 \\ 150 & 0 & 400 & -150 & 0 & 200 \\ -75 & 0 & -150 & 75 & 0 & -150 \\ 0 & -3.90 & 0 & 0 & 3.90 & 0 \\ 150 & 0 & 200 & -150 & 0 & 400 \end{bmatrix}$$

Bu eleman rijitlik matrisi 3, 4, 6, 7 ve 9 nolu elemanlar için yukarıdaki gibi aynıdır.

2 nolu Eleman İçin Elastik Rijitlik Matrisi (Genel Koordinatlarda) :

$$\frac{2EI_y}{\ell} = \frac{2 \times 2 \times 10^7 \times 6.04 \times 10^{-6}}{5} = 48.32 \text{tm}$$

$$c_1 = A / 2I_y = 0.0445$$

$$c = \cos \alpha = 1$$

$$s = \sin \alpha = 0$$

$$\underline{k}_e^2 = \begin{bmatrix} 2.15 & 0 & 0 & -2.15 & 0 & 0 \\ 0 & 11.60 & -28.992 & 0 & -11.60 & -28.992 \\ 0 & -28.992 & 96.64 & 0 & 28.992 & 48.32 \\ -2.15 & 0 & 0 & 2.15 & 0 & 0 \\ 0 & -11.60 & 28.992 & 0 & 11.60 & 28.992 \\ 0 & -28.992 & 48.32 & 0 & 28.992 & 96.64 \end{bmatrix}$$

Bu eleman rijitlik matrisi 5 ve 8 nolu elemanlar için de geçerlidir.

Toplam Sistem Elastik Rijitlik Matrisinin Direkt Yöntemle Oluşturulması :

0.0048	-0.0177	-0.0018	-0.0208	-0.0196	-0.0093	-0.0616	-0.0198	-0.0103	-0.0506	0.0177	-0.0146	-0.0896	0.0196	-0.0066	-0.1126	0.0198	-0.0056
-0.0143	0.1228	-0.0052	-0.0471	0.1084	-0.0098	-0.0688	0.1069	-0.0105	-0.0574	0.1336	-0.0152	-0.1005	0.1480	-0.0077	-0.1284	0.1495	-0.0068
-0.0026	-0.0078	-0.0002	-0.0122	-0.0086	-0.0039	-0.0295	-0.0087	-0.0044	-0.0241	0.0078	-0.0069	-0.0427	0.0086	-0.0031	-0.0533	0.0087	-0.0025
-0.0297	-0.0694	-0.0136	-0.1037	-0.0608	-0.0244	-0.2167	-0.0599	-0.0296	-0.1820	0.0694	-0.0524	-0.3218	0.0608	-0.0233	-0.3995	0.0599	-0.0182
-0.0419	0.0749	-0.0172	-0.1190	0.2297	-0.0188	-0.1973	0.2189	-0.0193	-0.1242	0.1815	-0.0362	-0.2212	0.2831	-0.0148	-0.2731	0.2939	-0.0122
-0.0132	-0.0169	-0.0051	-0.0312	-0.0107	-0.0028	-0.0468	-0.0100	-0.0044	-0.0400	0.0169	-0.0115	-0.0708	0.0107	-0.0050	-0.0867	0.0100	-0.0035
-0.0907	-0.1459	-0.0377	-0.2590	-0.1118	-0.0426	-0.4182	-0.0923	-0.0365	-0.3575	0.1459	-0.1032	-0.6327	0.1118	-0.0449	-0.7777	0.0923	-0.0327
-0.0448	0.0698	-0.0185	-0.1266	0.2153	-0.0197	-0.1930	0.3788	-0.0123	-0.1313	0.1866	-0.0385	-0.2340	0.2975	-0.0156	-0.2726	0.3905	-0.0049
-0.0164	-0.0205	-0.0066	-0.0434	-0.0139	-0.0057	-0.0549	-0.0052	0.0006	-0.0464	0.0205	-0.0135	-0.0824	0.0139	-0.0057	-0.0996	0.0052	-0.0036
-0.0108	-0.0140	-0.0048	-0.0345	-0.0155	-0.0066	-0.0620	-0.0156	-0.0069	-0.0253	0.0140	-0.0081	-0.0525	0.0155	-0.0059	-0.0753	0.0156	-0.0056
0.0143	0.1336	0.0052	0.0471	0.1480	0.0098	0.0888	0.1495	0.0105	0.0574	0.1228	0.0152	0.1005	0.1084	0.0077	0.1284	0.1069	0.0068
-0.0071	-0.0081	-0.0031	-0.0221	-0.0090	-0.0041	-0.0390	-0.0091	-0.0042	-0.0205	0.0081	-0.0044	-0.0351	0.0090	-0.0032	-0.0473	0.0091	-0.0031
-0.0695	-0.0910	-0.0299	-0.2148	-0.0848	-0.0398	-0.3765	-0.0841	-0.0400	-0.1982	0.0910	-0.0560	-0.3455	0.0848	-0.0273	-0.4522	0.0841	-0.0272
0.0419	0.1815	0.0172	0.1190	0.2831	0.0188	0.1973	0.2939	0.0193	0.1242	0.0749	0.0362	0.2212	0.2297	0.0148	0.2731	0.2189	0.0122
-0.0237	-0.0316	-0.0102	-0.0727	-0.0270	-0.0133	-0.1263	-0.0265	-0.0132	-0.0675	0.0316	-0.0200	-0.1208	0.0270	-0.0077	-0.1514	0.0265	-0.0079
-0.1546	-0.2063	-0.0662	-0.4720	-0.1787	-0.0856	-0.8156	-0.1599	-0.0839	-0.4497	0.2063	-0.1303	-0.7955	0.1787	-0.0561	-0.9729	0.1599	-0.0415
0.0448	0.1866	0.0185	0.1266	0.2975	0.0197	0.1930	0.3905	0.0123	0.1313	0.0698	0.0385	0.2340	0.2153	0.0156	0.2726	0.3788	0.0049
-0.0198	-0.0269	-0.0084	-0.0590	-0.0210	-0.0102	-0.0969	-0.0124	-0.0095	-0.0596	0.0269	-0.0176	-0.1066	0.0210	-0.0069	-0.1184	0.0124	0.0007

$K_e^{-1} =$

1 nolu elemanın geometrik rijitlik matrisi :

$$\underline{k}_g^1 = F_1 \begin{bmatrix} 0.30 & 0 & 0.10 & -0.30 & 0 & 0.10 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.30 & 0 \\ & & 0.533 & -0.10 & 0 & -0.133 \\ & & & 0.30 & 0 & -0.10 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.533 \end{bmatrix}$$

Bu geometrik eleman rijitlik matrisi 3, 4, 6, 7 ve 9 nolu elemanlar için yukarıdaki gibi aynıdır.

2 nolu elemanın geometrik rijitlik matrisi :

$$\underline{k}_g^2 = F_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0.24 & -0.10 & 0 & 0 & -0.10 \\ & & 0.667 & 0 & 0.10 & -0.167 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0.24 & 0.10 \\ & & & & & 0.667 \end{bmatrix}$$

Yukarıda yazılmış olan geometrik eleman rijitlik matrisi 5 ve 8 nolu elemanlar için de geçerlidir.

Problemin Elastik Çözümü:

Öncelikle $a = 10$ olarak alıyoruz.

Bulduğumuz elastik rijitlik matrisinin inversini alarak, $a=10$ için bulunan \underline{R} dış yük vektörü ile çarparsak \underline{r} yer değiştirme vektörünü buluruz. $a=10$ için bulunan dış yük vektörü ve yer değiştirme vektörleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\underline{R}^I = \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \end{bmatrix} \quad \underline{r}^I = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.3186 \\ 0.000509 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^2 = \begin{bmatrix} 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \end{bmatrix} \quad \underline{I}^2 = \begin{bmatrix} 0.001296 \\ -0.02953 \\ 0.000525 \\ 0.003979 \\ -0.04876 \\ 0.000714 \\ 0.006921 \\ -0.05935 \\ 0.00069 \\ 0.000837 \\ -0.03201 \\ 0.000462 \\ 0.004697 \\ -0.0538 \\ 0.001518 \\ 0.00969 \\ -0.06373 \\ 0.001018 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^4 = \begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \end{bmatrix} \quad \underline{I}^4 = \begin{bmatrix} 0.002592 \\ -0.05906 \\ 0.001049 \\ 0.007959 \\ -0.09753 \\ 0.001428 \\ 0.013842 \\ -0.1187 \\ 0.001381 \\ 0.001674 \\ -0.06402 \\ 0.000924 \\ 0.009394 \\ -0.1076 \\ 0.003036 \\ 0.01938 \\ -0.12746 \\ 0.002036 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{R}}^6 = \begin{bmatrix} 0.012 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0.012 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0.012 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0 \\ -0.12 \\ -0.10002 \\ 0 \\ -0.12 \\ -0.10002 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{r}}^6 = \begin{bmatrix} 0.003888 \\ -0.08859 \\ 0.001574 \\ 0.011938 \\ -0.14629 \\ 0.002142 \\ 0.020762 \\ -0.17804 \\ 0.002071 \\ 0.00251 \\ -0.09603 \\ 0.001385 \\ 0.01409 \\ -0.1614 \\ 0.004555 \\ 0.029071 \\ -0.19119 \\ 0.003055 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{R}}^8 = \begin{bmatrix} 0.016 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0.016 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0.016 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0 \\ -0.16 \\ -0.13336 \\ 0 \\ -0.16 \\ -0.13336 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{r}}^8 = \begin{bmatrix} 0.005184 \\ -0.11812 \\ 0.002098 \\ 0.015918 \\ -0.19505 \\ 0.002855 \\ 0.027683 \\ -0.23739 \\ 0.002762 \\ 0.003347 \\ -0.12803 \\ 0.001847 \\ 0.018787 \\ -0.2152 \\ 0.006073 \\ 0.038761 \\ -0.25492 \\ 0.004073 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^{10} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0.02 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0.02 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0 \\ -0.2 \\ -0.1667 \\ 0 \\ -0.2 \\ -0.1667 \end{bmatrix} \quad \underline{I}^{10} = \begin{bmatrix} 0.00648 \\ -0.14765 \\ 0.002623 \\ 0.019897 \\ -0.24382 \\ 0.003569 \\ 0.034604 \\ -0.29674 \\ 0.003452 \\ 0.004184 \\ -0.16004 \\ 0.002309 \\ 0.023484 \\ -0.26901 \\ 0.007591 \\ 0.048451 \\ -0.31864 \\ 0.005091 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^{12} = \begin{bmatrix} 0.024 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0.024 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0.024 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0 \\ -0.24 \\ -0.2004 \\ 0 \\ -0.24 \\ -0.2004 \end{bmatrix} \quad \underline{I}^{12} = \begin{bmatrix} 0.007776 \\ -0.17718 \\ 0.003147 \\ 0.023877 \\ -0.29258 \\ 0.004283 \\ 0.041525 \\ -0.35609 \\ 0.004143 \\ 0.005021 \\ -0.19205 \\ 0.002771 \\ 0.028181 \\ -0.32281 \\ 0.009109 \\ 0.058141 \\ -0.38237 \\ 0.006109 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^{14} = \begin{bmatrix} 0.028 \\ -0.28 \\ -0.23338 \\ 0.028 \\ -0.28 \\ -0.23338 \\ 0.028 \\ -0.28 \\ -0.23338 \\ 0 \\ -0.28 \\ -0.23338 \\ 0 \\ -0.28 \\ -0.23338 \\ 0 \\ -0.28 \\ -0.23338 \end{bmatrix} \quad \underline{r}^{14} = \begin{bmatrix} 0.009072 \\ -0.20671 \\ 0.003672 \\ 0.027856 \\ -0.34134 \\ 0.004997 \\ 0.048445 \\ -0.41544 \\ 0.004833 \\ 0.005857 \\ -0.22406 \\ 0.003232 \\ 0.032877 \\ -0.37661 \\ 0.010627 \\ 0.067831 \\ -0.4461 \\ 0.007127 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}^{16} = \begin{bmatrix} 0.032 \\ -0.32 \\ -0.26672 \\ 0.032 \\ -0.32 \\ -0.26672 \\ 0.032 \\ -0.32 \\ -0.26672 \\ 0 \\ -0.32 \\ -0.26672 \\ 0 \\ 0.32 \\ -0.26672 \\ 0 \\ 0.32 \\ -0.26672 \end{bmatrix} \quad \underline{r}^{16} = \begin{bmatrix} 0.010367 \\ -0.23624 \\ 0.004197 \\ 0.031836 \\ -0.3901 \\ 0.005711 \\ 0.055366 \\ -0.47478 \\ 0.005523 \\ 0.006694 \\ -0.25607 \\ 0.003694 \\ 0.037574 \\ -0.43041 \\ 0.012146 \\ 0.077522 \\ -0.50983 \\ 0.008146 \end{bmatrix}$$

Newton-Raphson İterasyonu ile çözüm :

1. iterasyon:

Elastik çözümden $a=10$ için elde ettiğimiz değerler şöyledir :

$$\underline{R}^1 = \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0.002 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \\ 0 \\ -0.02 \\ -0.01667 \end{bmatrix} \quad \underline{r}^1 = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.3186 \\ 0.000509 \end{bmatrix}$$

Bu sonuçlara göre \underline{S} iç kuvvetler vektörünü elastik yöntemle hesaplırsak şöyle bir sonuçla karşılaşırız.

0.057583
0.009255
-0.04474
-0.05758
-0.00925
0.007719
0.000494
7.85E-05
0.000572
-0.00049
-7.8E-05
-0.00094
0.062417
-0.00325
-0.01658
-0.06242
 $\underline{S}_1 =$ 0.003255
0.029599
0.037505
0.007748
-0.02496
-0.0375
-0.00775
-0.00603
-0.00077
-0.00314
-0.00186
0.000771
0.003136
0.017576
0.042495
-0.00375
-0.04532
-0.0425
0.003748
0.060317
0.020641
0.004977
-0.00878
-0.02064
-0.00498
0
-0.00298
0.000641
-0.00554
0.002977
-0.00064
0.002375
0.019359
-0.00298
0.030954
-0.01936
0.002977
-0.01905

$$\left[\underline{K}_e(r^1) + \underline{K}_g(S^1) \right] x_{r_2} = \underline{R}^1$$

Bu aşamada öncelikle elemanların geometrik rijitlik matrislerini bulup, sonradan sistemin geometrik rijitlik matrisini aynen elastik rijitlik matrisinde olduğu gibi bulmalıyız.

\underline{S} iç kuvvetler vektörünü bulduğumuza göre buna göre \underline{F}_1 normal kuvvet vektörü de şöyle oluşur :

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0.05758 \\ 0.05758 \\ 0.00049 \\ 0.00049 \\ 0.06242 \\ 0.06242 \\ 0.03751 \\ 0.03751 \\ -0.00077 \\ -0.00077 \\ 0.0425 \\ 0.0425 \\ 0.02064 \\ 0.02064 \\ -0.00298 \\ -0.00298 \\ 0.01936 \\ 0.01936 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^1 = \begin{bmatrix} 0.017 & 0 & 0.005758 & -0.017 & 0 & 0.005758 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.017 & 0 \\ & & 0.0307 & -0.005758 & 0 & -0.00766 \\ & & & 0.017 & 0 & -0.005758 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.0307 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00012 & -0.00005 & 0 & 0 & -0.00005 & 0 \\ & 0.00033 & 0 & 0.00005 & -0.00008 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0.00012 & 0.00005 & 0 \\ & & & & & 0.00033 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^3 = \begin{bmatrix} 0.0187 & 0 & 0.006242 & -0.0187 & 0 & 0.006242 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.0187 & 0 \\ & & 0.0333 & -0.006242 & 0 & -0.0083 \\ & & & 0.0187 & 0 & -0.006242 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^4 = \begin{bmatrix} 0.0113 & 0 & 0.003751 & -0.013 & 0 & 0.00375 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.013 & 0 \\ & & 0.02 & -0.003751 & 0 & -0.005 \\ & & & 0.0113 & 0 & -0.003751 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0002 & 0.00008 & 0 & 0 & 0.00008 & 0 \\ & -0.0005 & 0 & -0.00008 & 0.00013 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -0.0002 & -0.00008 & 0 \\ & & & & & -0.0005 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^6 = \begin{bmatrix} 0.013 & 0 & 0.00425 & -0.013 & 0 & 0.00425 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.013 & 0 \\ & & 0.0226 & -0.00425 & 0 & -0.0057 \\ & & & 0.013 & 0 & -0.00425 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.0226 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^7 = \begin{bmatrix} 0.0062 & 0 & 0.00206 & -0.0062 & 0 & 0.00206 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.0062 & 0 \\ & & 0.011 & -0.00206 & 0 & -0.0027 \\ & & & 0.0062 & 0 & -0.00206 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.011 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -0.0007 & 0.0003 & 0 & 0 & 0.0003 \\ & & -0.002 & 0 & -0.0003 & 0.0005 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -0.0007 & -0.0003 \\ & & & & & -0.002 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_g^9 = \begin{bmatrix} 0.0058 & 0 & 0.0019 & -0.0058 & 0 & 0.0019 \\ & 0 & 0 & 0 & -0.0058 & 0 \\ & & 0.0103 & -0.0019 & 0 & -0.0026 \\ & & & 0.0058 & 0 & -0.0019 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0.0103 \end{bmatrix}$$

Bu sonuçlara göre sistemin geometrik rijitlik matrisi de şöyle oluşur:

0.005	-0.02	-0	-0.02	-0.02	-0.01	-0.06	-0.02	-0.01	-0.05	0.018	-0.01	-0.09	0.02	-0.01	-0.11	0.02	-0.01
-0.01	0.124	-0.01	-0.05	0.111	-0.01	-0.09	0.109	-0.01	-0.06	0.135	-0.02	-0.1	0.15	-0.01	-0.13	0.152	-0.01
-0	-0.01	-0	-0.01	-0.01	-0	-0.03	-0.01	-0	-0.02	0.008	-0.01	-0.04	0.009	-0	-0.05	0.009	-0
-0.03	-0.07	-0.01	-0.1	-0.06	-0.02	-0.22	-0.06	-0.03	-0.18	0.069	-0.05	-0.32	0.061	-0.02	-0.4	0.06	-0.02
-0.04	0.077	-0.02	-0.12	0.233	-0.02	-0.2	0.223	-0.02	-0.12	0.184	-0.04	-0.22	0.287	-0.01	-0.27	0.298	-0.01
-0.01	-0.02	-0.01	-0.03	-0.01	-0	-0.05	-0.01	-0	-0.04	0.017	-0.01	-0.07	0.011	-0	-0.09	0.01	-0
-0.09	-0.15	-0.04	-0.26	-0.11	-0.04	-0.42	-0.09	-0.04	-0.36	0.146	-0.1	-0.63	0.112	-0.04	-0.78	0.093	-0.03
-0.04	0.072	-0.02	-0.13	0.219	-0.02	-0.19	0.383	-0.01	-0.13	0.189	-0.04	-0.23	0.302	-0.02	-0.27	0.395	-0
-0.02	-0.02	-0.01	-0.04	-0.01	-0.01	-0.05	-0.01	5E-04	-0.05	0.021	-0.01	-0.08	0.014	-0.01	-0.1	0.005	-0
-0.01	-0.01	-0	-0.03	-0.02	-0.01	-0.06	-0.02	-0.01	-0.03	0.014	-0.01	-0.05	0.016	-0.01	-0.08	0.016	-0.01
0.014	0.135	0.005	0.047	0.15	0.01	0.089	0.152	0.01	0.057	0.124	0.015	0.101	0.111	0.008	0.129	0.109	0.007
-0.01	-0.01	-0	-0.02	-0.01	-0	-0.04	-0.01	-0	-0.02	0.008	-0	-0.04	0.009	-0	-0.05	0.009	-0
-0.07	-0.09	-0.03	-0.21	-0.08	-0.04	-0.38	-0.08	-0.04	-0.2	0.091	-0.06	-0.35	0.085	-0.03	-0.45	0.084	-0.03
0.042	0.184	0.017	0.119	0.287	0.019	0.198	0.298	0.019	0.124	0.077	0.036	0.221	0.233	0.015	0.273	0.223	0.012
-0.02	-0.03	-0.01	-0.07	-0.03	-0.01	-0.13	-0.03	-0.01	-0.07	0.032	-0.02	-0.12	0.027	-0.01	-0.15	0.026	-0.01
-0.15	-0.21	-0.07	-0.47	-0.18	-0.09	-0.82	-0.16	-0.08	-0.45	0.206	-0.13	-0.8	0.179	-0.06	-0.97	0.16	-0.04
0.045	0.189	0.018	0.127	0.302	0.02	0.193	0.395	0.012	0.131	0.072	0.038	0.234	0.219	0.016	0.273	0.383	0.005
-0.02	-0.03	-0.01	-0.06	-0.02	-0.01	-0.1	-0.01	-0.01	-0.06	0.027	-0.02	-0.11	0.021	-0.01	-0.12	0.012	7E-04

(Ke+Kg)⁻¹=

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{C}^T \underline{r}_2$$

$$\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}_2 = \left[\underline{k}_s(\underline{r}_1) + \underline{k}_g(\underline{S}_1) \right] \underline{u}_2$$

$$\bar{\underline{S}}_2 = \underline{L}_d^T \underline{S}_2$$

$S_2 =$

-0.00925
0.058231
-0.04478
0.009247
-0.05849
0.007675
0.000494
9.38E-05
0.000539
-0.00049
-9E-05
-0.00097
0.003274
0.06303
-0.0166
-0.00327
-0.06333
0.029667
-0.00773
0.037752
-0.02497
0.007732
-0.03827
-0.006
-0.00077
-0.00314
-0.00188
0.000773
0.003127
0.017584
0.003797
0.042718
-0.04535
-0.0038
-0.04328
0.060459
-0.00497
0.020633
-0.00879
0.004967
-0.02097
-0.01111
-0.00298
0.000665
-0.00556
0.002983
-0.00067
0.002373
0.003007
0.019349
0.031018
-0.00301
-0.01969
-0.01904

0.058231
0.009247
-0.04478
-0.05849
-0.00925
0.007675
0.000494
9.38E-05
0.000539
-0.00049
-9E-05
-0.00097
0.06303
-0.00327
-0.0166
 $\bar{S}_2 = -0.06333$
0.003274
0.029667
0.037752
0.007728
-0.02497
-0.03827
-0.00773
-0.006
-0.00077
-0.00314
-0.00188
0.000773
0.003127
0.017584
0.042718
-0.0038
-0.04535
-0.04328
0.003797
0.060459
0.020633
0.004967
-0.00879
-0.02097
-0.00497
0
-0.00298
0.000665
-0.00556
0.002983
-0.00067
0.002373
0.019349
-0.00301
0.031018
-0.01969
0.003007
-0.01904

$$\|\Delta r_2\| < \|\Delta r_1\| \quad \|\Delta S_2\| < \|\Delta S_1\|$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix} \quad r_1 = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.03186 \\ 0.000509 \end{bmatrix} \quad \Delta r_2 = \begin{bmatrix} 9.98 \times 10^{-7} \\ -0.00023 \\ 4.87 \times 10^{-7} \\ 3.35 \times 10^{-6} \\ -0.00038 \\ 7.21 \times 10^{-7} \\ 6.44 \times 10^{-6} \\ -0.00042 \\ 8.37 \times 10^{-7} \\ 7.76 \times 10^{-7} \\ -0.00024 \\ 4.76 \times 10^{-7} \\ 4.18 \times 10^{-6} \\ -0.00038 \\ 1.41 \times 10^{-6} \\ 8.99 \times 10^{-6} \\ -0.00043 \\ 1.11 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.03186 \\ 0.000509 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.03186 \\ 0.000509 \end{bmatrix}$$

	0.057583	0.058231	0.000648
	0.009255	0.009247	-7.8E-06
	-0.04474	-0.04478	-4.6E-05
	-0.05758	-0.05849	-0.0009
	-0.00925	-0.00925	7.75E-06
	0.007719	0.007675	-4.4E-05
	0.000494	0.000494	4.77E-07
	7.85E-05	9.38E-05	1.53E-05
	0.000572	0.000539	-3.3E-05
	-0.00049	-0.00049	-4.8E-07
	-7.8E-05	-9E-05	-1.2E-05
	-0.00094	-0.00097	-2.7E-05
	0.062417	0.06303	0.000613
	-0.00325	-0.00327	-2E-05
	-0.01658	-0.0166	-1.7E-05
	-0.06242	$\bar{S}_2 = -0.06333$	-0.00092
$\underline{S}_1 =$	0.003255	0.003274	1.96E-05
	0.029599	0.029667	6.88E-05
	0.037505	0.037752	0.000247
	0.007748	0.007728	-2.1E-05
	-0.02496	-0.02497	-1.3E-05
	-0.0375	-0.03827	-0.00076
	-0.00775	-0.00773	1.62E-05
	-0.00603	-0.006	3.15E-05
	-0.00077	-0.00077	-1.8E-06
	-0.00314	-0.00314	-1.4E-06
	-0.00186	-0.00188	-2.6E-05
	0.000771	0.000773	1.78E-06
	0.003136	0.003127	-9E-06
	0.017576	0.017584	7.85E-06
	0.042495	0.042718	0.000222
	-0.00375	-0.0038	-4.9E-05
	-0.04532	-0.04535	-3E-05
	-0.0425	-0.04328	-0.00079
	0.003748	0.003797	4.9E-05
	0.060317	0.060459	0.000142
	0.020641	0.020633	$\Delta \underline{S}_2 =$ -8E-06
	0.004977	0.004967	-9.9E-06
	-0.00878	-0.00879	-7.2E-06
	-0.02064	-0.02097	-0.00033
	-0.00498	-0.00497	9.87E-06
	0	0	0
	-0.00298	-0.00298	-5.5E-06
	0.000641	0.000665	2.46E-05
	-0.00554	-0.00556	-1.6E-05
	0.002977	0.002983	5.48E-06
	-0.00064	-0.00067	-2.6E-05
	0.002375	0.002373	-2.7E-06
	0.019359	0.019349	-1E-05
	-0.00298	-0.00301	-3E-05
	0.030954	0.031018	6.4E-05
	-0.01936	-0.01969	-0.00034
	0.002977	0.003007	2.97E-05
	-0.01905	-0.01904	6.01E-06

0.057583
0.009255
-0.04474
-0.05758
-0.00925
0.007719
0.000494
7.85E-05
0.000572
-0.00049
-7.8E-05
-0.00094
0.062417
-0.00325
-0.01658
-0.06242
 $\Delta \underline{S}_1 =$ 0.003255
0.029599
0.037505
0.007748
-0.02496
-0.0375
-0.00775
-0.00603
-0.00077
-0.00314
-0.00186
0.000771
0.003136
0.017576
0.042495
-0.00375
-0.04532
-0.0425
0.003748
0.060317
0.020641
0.004977
-0.00878
-0.02064
-0.00498
0
-0.00298
0.000641
-0.00554
0.002977
-0.00064
0.002375
0.019359
-0.00298
0.030954
-0.01936
0.002977
-0.01905

2. iterasyon :

$a=20$ için çözüm: 1. iterasyon sonunda bulunan \underline{S} ve r vektörleri baz alınacak olduğuna göre öncelikle yeni bir \underline{F}_1 vektörü bulmamız gerekmektedir.

$$\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.05849 \\ -0.00049 \\ -0.06333 \\ -0.038 \\ 0.00077 \\ -0.043 \\ -0.021 \\ 0.003 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{K}_e(\underline{r}^1) + \underline{K}_g(\underline{S}^1) \right] \underline{x} \underline{r}_2 = \underline{R}^1$$

Yeni durum yük vektörümüz ise :

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0.004 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \\ 0 \\ -0.04 \\ -0.03334 \end{bmatrix}$$

Bilindiği üzere sistem elastik rijitlik matrisimiz her zaman için aynı kalmaktadır. Bu durumda r_2 yer değiştirme vektörünü bulabilmemiz için öncelikle elemanların daha sonra da sistemin yeni duruma göre geometrik rijitlik matrislerini hesaplamamız gerekmektedir.

$$\underline{k}_1^g = \begin{bmatrix} -0.0175 & 0 & -0.00585 & 0.0175 & 0 & -0.0585 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0175 & 0 \\ -0.00585 & 0 & -0.312 & 0.00585 & 0 & 0.0078 \\ 0.0175 & 0 & 0.00585 & -0.0175 & 0 & 0.00585 \\ 0 & 0.0175 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0585 & 0 & 0.0078 & 0.00585 & 0 & -0.312 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_2^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00012 & 0.000049 & 0 & 0 & 0.000049 \\ 0 & 0.000049 & -0.00033 & 0 & -0.000049 & 0.000082 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.000049 & 0 & -0.00012 & -0.000049 \\ 0 & 0.000049 & 0.000082 & 0 & -0.000049 & -0.00033 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_3^g = \begin{bmatrix} -0.019 & 0 & -0.0063 & 0.019 & 0 & -0.0063 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.019 & 0 \\ -0.0063 & 0 & -0.0338 & 0.0063 & 0 & 0.00842 \\ 0.019 & 0 & 0.0063 & -0.019 & 0 & 0.0063 \\ 0 & 0.019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0063 & 0 & 0.00842 & 0.0063 & 0 & -0.0338 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_4^g = \begin{bmatrix} -0.011 & 0 & -0.0038 & 0.011 & 0 & -0.0038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.011 & 0 \\ -0.0038 & 0 & -0.02 & 0.0038 & 0 & 0.005 \\ 0.011 & 0 & 0.0038 & -0.011 & 0 & 0.0038 \\ 0 & 0.011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0038 & 0 & 0.005 & 0.0038 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_5^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000185 & -0.000077 & 0 & 0 & -0.000077 \\ 0 & -0.000077 & 0.00051 & 0 & 0.000077 & -0.000128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000077 & 0 & 0.000185 & 0.000077 \\ 0 & -0.000077 & -0.000128 & 0 & 0.000077 & 0.00051 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_6^g = \begin{bmatrix} -0.013 & 0 & -0.0043 & 0.013 & 0 & -0.0043 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.013 & 0 \\ -0.0043 & 0 & -0.023 & 0.0043 & 0 & 0.0057 \\ 0.013 & 0 & 0.0043 & -0.013 & 0 & 0.0043 \\ 0 & 0.013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0043 & 0 & 0.0057 & 0.0043 & 0 & -0.023 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_7^g = \begin{bmatrix} -0.0063 & 0 & -0.0021 & 0.0063 & 0 & -0.0021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0063 & 0 \\ -0. & 0 & -0.011 & 0.0021 & 0 & 0.0028 \\ 0.0063 & 0 & 0.0021 & -0.0063 & 0 & 0.0021 \\ 0 & 0.0063 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0021 & 0 & 0.0028 & 0.0021 & 0 & -0.011 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_8^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00072 & -0.0003 & 0 & 0 & -0.0003 \\ 0 & -0.0003 & 0.002 & 0 & 0.0003 & 0.0005 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003 & 0 & 0.00072 & 0.0003 \\ 0 & -0.0003 & 0.0005 & 0 & 0.0003 & 0.002 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_9^g = \begin{bmatrix} -0.006 & 0 & -0.002 & 0.006 & 0 & -0.002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.006 & 0 \\ -0.002 & 0 & -0.011 & 0.002 & 0 & 0.0027 \\ 0.006 & 0 & 0.002 & -0.006 & 0 & 0.002 \\ 0 & 0.006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.002 & 0 & 0.0027 & 0.002 & 0 & -0.011 \end{bmatrix}$$

0.0048	-0.018	-0.002	-0.021	-0.02	-0.009	-0.061	-0.02	-0.01	-0.05	0.0176	-0.014	-0.089	0.0195	-0.007	-0.112	0.0197	-0.006
-0.014	0.1218	-0.005	-0.047	0.1066	-0.01	-0.088	0.1048	-0.01	-0.057	0.1322	-0.015	-0.1	0.1458	-0.008	-0.127	0.1471	-0.007
-0.003	-0.008	-2E-04	-0.012	-0.009	-0.004	-0.029	-0.009	-0.004	-0.024	0.0077	-0.007	-0.042	0.0085	-0.003	-0.053	0.0086	-0.003
-0.029	-0.069	-0.013	-0.103	-0.06	-0.024	-0.215	-0.06	-0.029	-0.181	0.0688	-0.052	-0.32	0.0603	-0.023	-0.397	0.0594	-0.018
-0.042	0.0733	-0.017	-0.118	0.2268	-0.019	-0.196	0.2155	-0.019	-0.123	0.179	-0.036	-0.219	0.2794	-0.015	-0.271	0.2898	-0.012
-0.013	-0.017	-0.005	-0.031	-0.011	-0.003	-0.046	-0.01	-0.004	-0.04	0.0167	-0.011	-0.07	0.0106	-0.005	-0.086	0.0099	-0.004
-0.09	-0.145	-0.037	-0.257	-0.111	-0.042	-0.415	-0.092	-0.038	-0.355	0.1447	-0.103	-0.628	0.1107	-0.045	-0.772	0.0914	-0.032
-0.045	0.068	-0.018	-0.126	0.212	-0.02	-0.192	0.3749	-0.012	-0.13	0.1839	-0.038	-0.232	0.2933	-0.015	-0.27	0.3859	-0.005
-0.016	-0.02	-0.007	-0.043	-0.014	-0.006	-0.054	-0.005	0.0006	-0.046	0.0203	-0.013	-0.082	0.0137	-0.006	-0.099	0.0051	-0.004
-0.011	-0.014	-0.005	-0.034	-0.015	-0.007	-0.062	-0.016	-0.007	-0.025	0.0138	-0.008	-0.052	0.0153	-0.006	-0.075	0.0155	-0.006
0.0142	0.1322	0.0052	0.0467	0.1458	0.0097	0.0881	0.1471	0.0104	0.0568	0.1218	0.015	0.0995	0.1066	0.0077	0.1271	0.1049	0.0067
-0.007	-0.008	-0.003	-0.022	-0.009	-0.004	-0.039	-0.009	-0.004	-0.02	0.008	-0.004	-0.035	0.0089	-0.003	-0.047	0.009	-0.003
-0.069	-0.09	-0.03	-0.213	-0.084	-0.04	-0.374	-0.083	-0.04	-0.196	0.0901	-0.055	-0.342	0.0839	-0.027	-0.448	0.0833	-0.027
0.0416	0.1791	0.0171	0.1181	0.2795	0.0186	0.1957	0.2899	0.0191	0.123	0.0734	0.0359	0.219	0.2269	0.0146	0.2703	0.2156	0.0121
-0.024	-0.031	-0.01	-0.072	-0.027	-0.013	-0.125	-0.026	-0.013	-0.067	0.0313	-0.02	-0.12	0.0267	-0.008	-0.15	0.0262	-0.008
-0.154	-0.204	-0.066	-0.469	-0.177	-0.085	-0.81	-0.159	-0.083	-0.445	0.2043	-0.129	-0.788	0.1768	-0.056	-0.963	0.1582	-0.041
0.0445	0.1839	0.0184	0.1257	0.2934	0.0196	0.1914	0.3859	0.0121	0.1301	0.0681	0.0381	0.2318	0.2121	0.0154	0.2698	0.3751	0.0047
-0.02	-0.027	-0.008	-0.059	-0.021	-0.01	-0.098	-0.012	-0.009	-0.059	0.0267	-0.017	-0.106	0.0207	-0.007	-0.117	0.0122	0.0007

(Ke+Kg)⁻¹=

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.029 \\ 0.0005 \\ 0.004 \\ -0.048 \\ 0.0007 \\ 0.0069 \\ -0.059 \\ 0.0007 \\ 0.0008 \\ -0.032 \\ 0.0005 \\ 0.0047 \\ -0.053 \\ 0.0015 \\ 0.0096 \\ -0.063 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{u}}_2 = \underline{\mathbf{C}}^T \mathbf{r}_2$$

$$\underline{\mathbf{s}}_2 = \left[\underline{\mathbf{k}}_e(\underline{\mathbf{r}}_1) + \underline{\mathbf{k}}_g(\underline{\mathbf{S}}_1) \right] \underline{\mathbf{u}}_2$$

$$\bar{\underline{\mathbf{s}}}_2 = \underline{\mathbf{L}}_d^T \underline{\mathbf{s}}_2$$

0
0
0
0.0013
-0.029
0.0005
0.0013
-0.029
0.0005
0.0008
-0.032
0.0005
0
0
0
0.0008
-0.032
0.0005
u2= 0.0013
-0.029
0.0005
0.004
-0.048
0.0007
0.004
-0.048
0.0007
0.0047
-0.053
0.0015
0.0008
-0.032
0.0005
0.0047
-0.053
0.0015
0.004
-0.048
0.0007
0.0069
-0.059
0.0007
0.0069
-0.059
0.0007
0.0096
-0.063
0.001
0.0047
-0.053
0.0015
0.0096
-0.063
0.001

S2=
-0.019
0.113
-0.089
0.0185
-0.114
0.015
0.001
7E-05
0.0014
-1E-03
-7E-05
-0.002
0.0064
0.1225
-0.033
-0.006
-0.123
0.0586
-0.016
0.0734
-0.05
0.0155
-0.074
-0.012
-0.002
-0.006
-0.004
0.0015
0.0063
0.035
0.0074
0.0832
-0.09
-0.007
-0.084
0.1197
-0.01
0.0406
-0.017
0.0099
-0.041
-0.022
-0.006
0.0012
-0.011
0.0059
-0.001
0.0047
0.0059
0.038
0.0615
-0.006
-0.039
-0.038

0.1130043
0.0185401
-0.08932
-0.113514
-0.018513
0.0150473
0.0009904
7.43E-05
0.0013932
-0.00099
-6.7E-05
-0.001708
0.1225015
-0.006403
-0.03306
-0.123101
0.0064033
0.0586204
0.073408
0.0155305
-0.049849
-0.074257
-0.01553
-0.01237
-0.001509
-0.006295
S2= -0.003527
0.0015089
0.0062766
0.0350388
0.0831683
-0.007394
-0.090253
-0.084268
0.0073937
0.119661
0.0405529
0.0099347
-0.017443
-0.041225
-0.009935
0
-0.005885
0.0012246
-0.010983
0.0058848
-0.001312
0.0047174
0.0379921
-0.005885
0.0614965
-0.038688
0.0058848
-0.038057

$$\|\Delta r_2\| < \|\Delta r_1\| \quad \|\Delta S_2\| < \|\Delta S_1\|$$

$$r_2 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.029 \\ 0.0005 \\ 0.004 \\ -0.048 \\ 0.0007 \\ 0.0069 \\ -0.059 \\ 0.0007 \\ 0.0008 \\ -0.032 \\ 0.0005 \\ 0.0047 \\ -0.053 \\ 0.0015 \\ 0.0096 \\ -0.063 \\ 0.001 \end{bmatrix} \quad r_1 = \begin{bmatrix} 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix} \quad \Delta r_2 = \begin{bmatrix} 0.000643 \\ -0.014106 \\ 0.00026 \\ 0.001972 \\ -0.023304 \\ 0.00352 \\ 0.003422 \\ -0.028457 \\ 0.00034 \\ 0.000413 \\ 0.015324 \\ 0.000227 \\ 0.002314 \\ -0.025787 \\ 0.000747 \\ 0.004772 \\ -0.030615 \\ 0.0005 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 r_1 = \begin{bmatrix} 0.000649 \\ -0.015 \\ 0.000263 \\ 0.001993 \\ -0.02476 \\ 0.000358 \\ 0.003467 \\ -0.0301 \\ 0.000346 \\ 0.000419 \\ -0.01624 \\ 0.000231 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.000761 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.00051 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 r_0 = \begin{bmatrix} 0.000648 \\ -0.01476 \\ 0.0000262 \\ 0.00199 \\ -0.02438 \\ 0.000357 \\ 0.00346 \\ -0.02967 \\ 0.000345 \\ 0.000418 \\ -0.016 \\ 0.000231 \\ 0.002348 \\ -0.0269 \\ 0.000759 \\ 0.004845 \\ -0.03186 \\ 0.000509 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \Delta r_1 = \begin{bmatrix} 1E-06 \\ -0.00024 \\ 0.000237 \\ 3E-06 \\ -0.00038 \\ 1E-06 \\ 7E-06 \\ -0.00043 \\ 1E-06 \\ 1E-06 \\ -0.00024 \\ 0 \\ 5E-06 \\ -0.00038 \\ 2E-06 \\ 9E-06 \\ -0.00043 \\ 1E-06 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

0.1130043
0.0185401
-0.08932
-0.113514
-0.018513
0.0150473
0.0009904
7.43E-05
0.0013932
-0.00099
-6.7E-05
-0.001708
0.1225015
-0.006403
-0.03306
-0.123101
0.0064033
0.0586204
-0.073408
0.0155305
-0.049849
-0.074257
-0.01553
-0.01237
-0.001509
-0.006295
S2= -0.003527
0.0015089
0.0062766
0.0350388
0.0831683
-0.007394
-0.090253
-0.084268
0.0073937
0.119661
0.0405529
0.0099347
-0.017443
-0.041225
-0.009935
0
-0.005885
0.0012246
-0.010983
0.0058848
-0.001312
0.0047174
0.0379921
-0.005885
0.0614965
-0.038688
0.0058848
-0.038057

$\underline{S}_1 =$

0.058231
0.009247
-0.04478
-0.05849
-0.00925
0.007675
0.000494
9.38E-05
0.000539
-0.00049
-9E-05
-0.00097
0.06303
-0.00327
-0.0166
-0.06333
0.003274
0.029667
0.037752
0.007728
-0.02497
-0.03827
-0.00773
-0.006
-0.00077
-0.00314
-0.00188
0.000773
0.003127
0.017584
0.042718
-0.0038
-0.04535
-0.04328
0.003797
0.060459
0.020633
0.004967
-0.00879
-0.02097
-0.00497
0
-0.00298
0.000665
-0.00556
0.002983
-0.00067
0.002373
0.019349
-0.00301
0.031018
-0.01969
0.003007
-0.01904

$\Delta S_2 =$

0.0548
0.0093
-0.045
-0.055
-0.009
0.0074
0.0005
-2E-05
0.0009
-5E-04
2E-05
-7E-04
0.0595
-0.003
-0.016
-0.06
0.0031
0.029
0.0357
0.0078
-0.025
-0.036
-0.008
-0.006
-7E-04
-0.003
-0.002
0.0007
0.0031
0.0175
0.0405
-0.004
-0.045
-0.041
0.0036
0.0592
0.0199
0.005
-0.009
-0.02
-0.005
0
-0.003
0.0006
-0.005
0.0029
-6E-04
0.0023
0.0186
-0.003
0.0305
-0.019
0.0029
-0.019

3. iterasyon :**a=40 için problemin çözümü :**

Öncelikle son iterasyondan elde edilen \underline{S} ve r vektörleri ışığında, yeni K_g sistem geometrik rijitlik matrisinin bulunması için F_1 vektörünü bulmalıyız:

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.029 \\ 0.0005 \\ 0.0039 \\ -0.048 \\ 0.0007 \\ 0.0069 \\ -0.0586 \\ 0.0007 \\ 0.0008 \\ -0.0316 \\ 0.00046 \\ 0.0047 \\ -0.053 \\ 0.0015 \\ -0.0096 \\ -0.063 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.11351 \\ -0.00099 \\ -0.1231 \\ -0.07426 \\ 0.001509 \\ -0.08427 \\ -0.04123 \\ 0.005885 \\ -0.03869 \end{bmatrix}$$

$$\left[\underline{K}_e(\underline{r}^1) + \underline{K}_g(\underline{S}^1) \right] \underline{x}_{r_2} = \underline{R}^1$$

Yük vektörü ise :

$$\underline{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0.008 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \\ 0 \\ -0.08 \\ -0.06668 \end{bmatrix}$$

r_2 yer değiştirme vektörünü bulmak için sistemin geometrik rijitlik matrisinin hesaplanması gerekmektedir.

0.005	-0.018	0	-0.02	-0.02	-0.009	-0.06	-0.02	-0.01	-0.1	0.018	-0.015	-0.09	0.0196	-0.007	-0.11	0.0198	-0.006
-0.014	0.12	-0.01	-0.05	0.105	-0.01	-0.09	0.103	-0.01	-0.1	0.131	-0.015	-0.101	0.144	-0.008	-0.13	0.1451	-0.007
-0.003	-0.008	0	-0.01	-0.009	-0.004	-0.03	-0.009	-0.004	0	0.008	-0.007	-0.043	0.0086	-0.003	-0.05	0.0087	-0.003
-0.03	-0.069	-0.01	-0.1	-0.061	-0.024	-0.22	-0.06	-0.03	-0.2	0.069	-0.052	-0.322	0.0607	-0.023	-0.4	0.0598	-0.018
-0.042	0.071	-0.02	-0.12	0.223	-0.019	-0.2	0.212	-0.019	-0.1	0.178	-0.036	-0.221	0.2767	-0.015	-0.27	0.2867	-0.012
-0.013	-0.017	-0.01	-0.03	-0.011	-0.003	-0.05	-0.01	-0.004	0	0.017	-0.012	-0.071	0.0107	-0.005	-0.09	0.01	-0.004
-0.091	-0.146	-0.04	-0.26	-0.112	-0.043	-0.42	-0.093	-0.039	-0.4	0.146	-0.103	-0.634	0.1117	-0.045	-0.78	0.0923	-0.033
-0.045	0.065	-0.02	-0.13	0.208	-0.02	-0.19	0.371	-0.012	-0.1	0.182	-0.038	-0.234	0.2902	-0.016	-0.27	0.3823	-0.005
-0.016	-0.021	-0.01	-0.04	-0.014	-0.006	-0.05	-0.005	0.0005	0	0.021	-0.013	-0.082	0.0138	-0.006	-0.1	0.0052	-0.004
-0.011	-0.014	0	-0.03	-0.015	-0.007	-0.06	-0.016	-0.007	0	0.014	-0.008	-0.053	0.0155	-0.006	-0.08	0.0156	-0.006
0.014	0.131	0.005	0.047	0.144	0.0098	0.089	0.145	0.0105	0.06	0.121	0.0151	0.1003	0.1045	0.0077	0.128	0.1026	0.0068
-0.007	-0.008	0	-0.02	-0.009	-0.004	-0.04	-0.009	-0.004	0	0.008	-0.004	-0.035	0.009	-0.003	-0.05	0.0091	-0.003
-0.07	-0.091	-0.03	-0.22	-0.085	-0.04	-0.38	-0.084	-0.04	-0.2	0.091	-0.056	-0.346	0.0846	-0.027	-0.45	0.084	-0.027
0.042	0.178	0.017	0.119	0.277	0.0188	0.197	0.287	0.0193	0.12	0.071	0.0362	0.2211	0.2234	0.0148	0.273	0.2117	0.0122
-0.024	-0.032	-0.01	-0.07	-0.027	-0.013	-0.13	-0.026	-0.013	-0.1	0.032	-0.02	-0.121	0.0269	-0.008	-0.15	0.0264	-0.008
-0.155	-0.206	-0.07	-0.47	-0.179	-0.086	-0.82	-0.16	-0.084	-0.5	0.206	-0.13	-0.796	0.1784	-0.056	-0.97	0.1597	-0.041
0.045	0.182	0.018	0.127	0.29	0.0197	0.193	0.382	0.0123	0.13	0.065	0.0385	0.234	0.2082	0.0156	0.273	0.3707	0.0049
-0.02	-0.027	-0.01	-0.06	-0.021	-0.01	-0.1	-0.012	-0.009	-0.1	0.027	-0.018	-0.107	0.0209	-0.007	-0.12	0.0124	0.0007

$(Ke+Kg)^{-1} =$

$$\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.0026 \\ -0.057 \\ 0.0011 \\ 0.008 \\ -0.095 \\ 0.0014 \\ 0.0139 \\ -0.116 \\ 0.0014 \\ 0.0017 \\ -0.062 \\ 0.0009 \\ 0.0094 \\ -0.105 \\ 0.0031 \\ 0.0195 \\ -0.124 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}_2 = \underline{C}^T \underline{r}_2$$

$$\underline{S}_2 = \left[\underline{k}_s(\underline{r}_1) + \underline{k}_g(\underline{S}_1) \right] \underline{u}_2$$

$$\bar{\underline{S}}_2 = \underline{L}_d^T \underline{S}_2$$

0
0
0
0.003
-0.057
0.001
0.003
-0.057
0.001
0.002
-0.062
9E-04
0
0
0
0.002
-0.062
9E-04
u2= 0.003
-0.057
0.001
0.008
-0.095
0.001
0.008
-0.095
0.001
0.009
-0.105
0.003
0.002
-0.062
9E-04
0.009
-0.105
0.003
0.008
-0.095
0.001
0.014
-0.116
0.001
0.014
-0.116
0.001
0.019
-0.124
0.002
0.009
-0.105
0.003
0.019
-0.124
0.002

S2=

-0.037
0.224
-0.179
0.037
-0.224
0.031
0.002
1E-04
0.003
-0.002
-1E-04
-0.003
0.013
0.241
-0.066
-0.013
-0.243
0.119
-0.031
0.144
-0.101
0.031
-0.147
-0.024
-0.003
-0.013
-0.007
0.003
0.013
0.071
0.015
0.163
-0.182
-0.015
-0.167
0.242
-0.02
0.083
-0.036
0.02
-0.082
-0.045
-0.012
0.002
-0.022
0.012
-0.003
0.01
0.012
0.075
0.124
-0.012
-0.077
-0.076

$\underline{S}_2 =$

0.2235
0.0371
-0.179
-0.224
-0.037
0.0311
0.002
0.0001
0.0028
-0.002
-1E-04
-0.003
0.2407
-0.013
-0.066
-0.243
0.0132
0.119
0.1436
0.0311
-0.101
-0.147
-0.031
-0.024
-0.003
-0.013
-0.007
0.0031
0.0127
0.071
0.1631
-0.015
-0.182
-0.167
0.0151
0.2422
0.0826
0.02
-0.036
-0.082
-0.02
0
-0.012
0.0023
-0.022
0.012
-0.003
0.0098
0.0746
-0.012
0.1239
-0.077
0.012
-0.076

$$\|\Delta r_2\| < \|\Delta r_1\| \quad \|\Delta S_2\| < \|\Delta S_1\|$$

$$\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0.0026 \\ -0.057 \\ 0.0011 \\ 0.008 \\ -0.095 \\ 0.0014 \\ 0.0139 \\ -0.116 \\ 0.0014 \\ 0.0017 \\ -0.062 \\ 0.0009 \\ 0.0094 \\ -0.105 \\ 0.0031 \\ 0.0195 \\ -0.124 \\ 0.002 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0.00129 \\ -0.029 \\ 0.0005 \\ 0.003965 \\ -0.04806 \\ 0.0007 \\ 0.0069 \\ -0.05856 \\ 0.000686 \\ 0.000832 \\ -0.03156 \\ 0.000458 \\ 0.0047 \\ -0.05307 \\ 0.0015 \\ 0.0096 \\ -0.0629 \\ 0.001 \end{bmatrix} \quad \underline{\Delta r}_2 = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ -0.02825 \\ 0.00053 \\ 0.004028 \\ -0.04664 \\ 0.0007 \\ 0.007022 \\ -0.05696 \\ 0.0007 \\ 0.00085 \\ -0.03075 \\ 0.00047 \\ 0.00477 \\ -0.05175 \\ 0.0015 \\ 0.0098 \\ -0.06142 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \underline{r}_1 = \\ \begin{bmatrix} 0.00129 \\ -0.029 \\ 0.0005 \\ 0.003965 \\ -0.04806 \\ 0.0007 \\ 0.0069 \\ -0.05856 \\ 0.000686 \\ 0.000832 \\ -0.03156 \\ 0.000458 \\ 0.0047 \\ -0.05307 \\ 0.0015 \\ 0.0096 \\ -0.0629 \\ 0.001 \end{bmatrix} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \underline{r}_0 = \\ \begin{bmatrix} 0.0006 \\ -0.015 \\ 0.00026 \\ 0.0019 \\ -0.02476 \\ 0.00036 \\ 0.0035 \\ -0.0301 \\ 0.00035 \\ 0.00042 \\ -0.01624 \\ 0.00023 \\ 0.002353 \\ -0.02728 \\ 0.00076 \\ 0.004854 \\ -0.03229 \\ 0.0005 \end{bmatrix} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \underline{\Delta r}_1 = \\ \begin{bmatrix} 0.00643 \\ -0.01411 \\ 0.00026 \\ 0.001972 \\ -0.0233 \\ 0.000352 \\ 0.003422 \\ -0.02846 \\ 0.00034 \\ 0.000413 \\ -0.01532 \\ 0.000227 \\ 0.0023 \\ -0.026 \\ 0.00075 \\ 0.0048 \\ -0.03061 \\ 0.0005 \end{bmatrix} \end{array}$$

	0.2235		0.113
	0.0371		0.0185
	-0.179		-0.089
	-0.224		-0.114
	-0.037		-0.019
	0.0311		0.015
	0.002		0.001
	0.0001		7E-05
	0.0028		0.0014
	-0.002		-1E-03
	-1E-04		-7E-05
	-0.003		-0.002
	0.2407		0.1225
	-0.013		-0.006
	-0.066		-0.033
	-0.243		-0.123
	0.0132		0.0064
	0.119		0.0586
	0.1436		0.0734
	0.0311		0.0155
	-0.101		-0.05
	-0.147		-0.074
	-0.031		-0.016
	-0.024		-0.012
	-0.003		-0.002
$\underline{s}_2 =$	-0.013	$\underline{s}_1 =$	-0.006
	-0.007		-0.004
	0.0031		0.0015
	0.0127		0.0063
	0.071		0.035
	0.1631		0.0832
	-0.015		-0.007
	-0.182		-0.09
	-0.167		-0.084
	0.0151		0.0074
	0.2422		0.1197
	0.0826		0.0406
	0.02		0.0099
	-0.036		-0.017
	-0.082		-0.041
	-0.02		-0.01
	0		0
	-0.012		-0.006
	0.0023		0.0012
	-0.022		-0.011
	0.012		0.0059
	-0.003		-0.001
	0.0098		0.0047
	0.0746		0.038
	-0.012		-0.006
	0.1239		0.0615
	-0.077		-0.039
	0.012		0.0059
	-0.076		-0.038

	0.111		0.0548
	0.019		0.0093
	-0.09		-0.045
	-0.11		-0.055
	-0.02		-0.009
	0.016		0.0074
	1E-03		0.0005
	5E-05		-2E-05
	0.001		0.0009
	-0		-5E-04
	-0		2E-05
	-0		-7E-04
	0.118		0.0595
	-0.01		-0.003
	-0.03		-0.016
	-0.12		-0.06
	0.007		0.0031
	0.06		0.029
	0.07		0.0357
	0.016		0.0078
	-0.05		-0.025
	-0.07		-0.036
	-0.02		-0.008
	-0.01		-0.006
	-0		-7E-04
dS ₂ =	-0.01	dS ₁ =	-0.003
	-0		-0.002
	0.002		0.0007
	0.006		0.0031
	0.036		0.0175
	0.08		0.0405
	-0.01		-0.004
	-0.09		-0.045
	-0.08		-0.041
	0.008		0.0036
	0.123		0.0592
	0.042		0.0199
	0.01		0.005
	-0.02		-0.009
	-0.04		-0.02
	-0.01		-0.005
	0		0
	-0.01		-0.003
	0.001		0.0006
	-0.01		-0.005
	0.006		0.0029
	-0		-6E-04
	0.005		0.0023
	0.037		0.0186
	-0.01		-0.003
	0.062		0.0305
	-0.04		-0.019
	0.006		0.0029
	-0.04		-0.019

İterasyonun bundan sonraki kısımları tek tek gösterilmeyip, aradığımız r_{8x} için değerler aşağıda verilen tabloda toplu halde gösterilmiştir.

Yük değişkeni (a)	Elastik hesap için r_{8x} yer değiştirmesi (cm)	Lineer olmayan hesap için r_{8x} yer değiştirmesi (cm)
10	0.485	0.49
20	0.96	0.97
40	1.94	1.95
80	3.88	3.92
120	5.81	5.88
160	7.75	7.90
200	9.69	9.90
240	11.63	11.95
300	14.54	15.08
500	24.23	25.32
1000	48.45	51.45
1500	72.68	77.62

Bu problemde görüldüğü üzere hesaplanan çelik profillerin I_y atalet momentleri beton kirişlere göre küçük olduğundan yüklerin meydana getirdikleri yer ve şekil değiştirmeler çok daha fazla boyutta olmaktadır. Yüklerimiz çok yüksek mertebelere ulaşmadığı halde elde ettiğimiz (elastik ve plastik hesap yoluyla) karşılık gelen büyük yer değiştirmeler bize sistemin bu profillerle ve bu geometrisiyle fazla dayanıklı olmadığını, seçilen profillerin bu açıklıkları geçmekte yetersiz kalacağını göstermektedir. Problemden de anlaşılacağı üzere değişken yükler arttıkça iki tip çözüm arasındaki sonuç farklılıkları daha belirgin bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Biz genelde bir çerçevenin statik hesabını yaparken birinci merteye teorisi kullanırız, yani hesaplar şekil değiştirmemiş sistem üzerinden yapılmaktadır. Yukarıdaki tablodan da anlaşılacağı üzere yükler fazla büyük değilse iki tip çözüm arasında kayda değer bir fark ortaya çıkmamaktadır. Bu yüzden birinci merteye teorisiyle daha pratik ve hızlı bir şekilde hesap yapmak daha yerinde olacaktır. Yalnız sistemde narin profiller (atalet momenti çok küçük) bulunuyorsa ve de yükler büyük ise o zaman ikinci merteye teorisine göre hesap yapmamız, yani sistemin geometrisini de gözönünde bulundurmamız gerekmektedir. Bu yol oldukça uzun ve karmaşık bir yoldur ve daima birbiri ardına iterasyonlarla sonuca yaklaşılır. Kesin bir çözüm hiçbir zaman yoktur. Fakat her zaman için gerçek duruma en yakın sonucu verir .



ÖZGEÇMİŞ :

Doğum Tarihi : 5 Mayıs 1972

Doğum Yeri : İstanbul

Eğitim Geçmişi :

1978-1983 Bahariye İlkokulu
1983-1990 İstanbul Özel Amerikan Robert Lisesi
1990-1994 Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
1994- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat
Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Programına giriş

KAYNAKLAR :

-Lawo-Thierauf, Stabtragwerke: Matrizenmethoden der Statik und Dynamik,
Teil I: Statik (273-349)

-Tauchert, Th R. : Energy Principles in Structural Mechanics, New York
McGraw-Hill, 1974

-M. İnan : Cisimlerin Mukavemeti, 1967

-A. Çakıroğlu : Hiperstatik Sistemlerin Hesap Metodları, 1961

-S. Timoshenko : Elastik Stabilite Teorisi, 1963