

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

23892

ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAK SİSTEMLERİN
NÜMERİK METODLARLA ÇÖZÜMÜ ve MUKAYESESİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞ. MÜH. SALİH K. ÖNGÜL

İSTANBUL 1992

İş hayatıyla beraber bu çalışmayıda yürütmemi sağlayan değerli hocam Sayın Prof. Sinan ÇAĞDAŞ'la göstermiş olduğu tolerans ve yardımlardan dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAK SİSTEMLERİN NÜMERİK METODLARLA ÇÖZÜMÜ ve MUKAYESESİ	
ÖZET	iv
SUMMARY	v
I. SONLU FARKLAR METODU	1
I.1 İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadelerinin çıkartılması	1
I.2 Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin sonlu farklarla çözümü	8
I.2.1 Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi	11
I.2.2 Elastik zemine oturan ve muhtelif sınır şartlarına haiz olan dikdörtgen plakların sonlu fark denklemlerinin teşkili	17
I.2.2.1 Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hali	23
I.2.2.2 Elastik zemine oturan plağın dört kenarından ankastre mesnede oturması hali	26
I.2.2.3 Elastik zemine oturan plağın üç kenarından ankastre mesnede, bir kenarında sabit mesnede oturması hali	27
I.2.2.4 Elastik zemine oturan plağın komşu iki kenarının ankastre mesnede, diğer iki kenarında sabit mesnede oturması hali	28

I.2.2.5 Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer iki kenarında sabit mesnede oturması hali	30
I.2.2.6 Elastik zemine oturan plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer üç kenarının sabit mesnede oturması hali	31
II. SONLU ELEMENLAR METODU	34
II.1 Giriş	34
II.2 İnce plakların çözümü	36
II.3 Vırtüel işler prensibi	42
II.3.1 Elastik zeminin vırtüel işler teoremine etkisi	43
II.4 Plaklarda şekil fonksiyonları	44
II.5 Eleman düğüm etki vektörlerinin hesabı	58
II.5.1 Düzgün yayılı yükler için eleman düğüm etki vektörü	58
II.5.2 Lineer yayılı yükler için eleman düğüm etki vektörü	59
II.5.3 Tekil yükler için eleman düğüm etki vektörü	61
II.6 Sınır ve mesnet şartları	62
II.7 Elemandan sisteme geçiş	63
III. UYGULAMA	65
III.1 Tekil yükler altındaki kirişsiz temel plağının nümerik metodla çözümü	65
III.2 Elastik zemine oturan plakların bilgisayar programı ile çözümü	74
IV. BİLGİSAYAR PROGRAMININ AÇIKLANMASI	77

IV.1 İnce plakların çözümünü yapan programın akış diyagramı ve listesi	79
V. SONUÇ	92
VI. KAYNAKLAR	
VII. ÖZGEÇMİŞ	



Ö Z E T

Kalınlığı, taşıyıcı boyutları yanında çok küçük ve orta düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlemsel taşıyıcı sistemlere plak denir.

Plaklar; bina döşemelerinde, betonarme yüksek yapı temellerinde, su depolarında, betonarme istinat duvarlarında, ankrajlı betonarme perdelerde, limanlarda, stok sahalarında, yükleme boşaltma sahalarında, havalimanlarında, baca temellerinde, silo temellerinde ve köprülerde kullanılan taşıyıcı elamanlardır.

Zemin etkisinde olmayan plaklar için bir hayli çözüm elde edilmiş ve bu çözümler tablo ve abaklar halinde pratik olarak kullanılacak hale getirilmiştir.

Zemin etkisinin söz konusu olduğu plaklar ise yaklaşık metotlar kullanılarak çözülmüştür.

Bu çalışmada; Sonlu Farklar Metodu açıklanmış, iki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadeleri çıkartılmış ve çeşitli mesnet şartlarına göre çözümler yapılmıştır.

İkinci aşamada dikdörtgen sonlu elamanlar için çıkarılmış şekil fonksiyonları kullanılarak Elastik Zemine Oturan İnce Plakların çözümü yapılmıştır. Sonlu Elamanlar Metodu ile ince plakların çözümünü yapan bilgisayar programı geliştirilmiş ve bir örnekle izah edilmiştir. Daha sonra tekil yüklerle maruz kalan temel plağının çözümü yapılmıştır.

Sonuç olarak; bu iki çözüm karşılaştırılmış ve sonlu farklar yöntemi ile, sonlu elamanlar yöntemi mukayese edilmiştir.

SUMMARY

Plate is straight, plane surface structure whose thickness is slight compared to its other two dimension and loaded perpendicularly on its midplane.

Plates are load-carrying elements used in slabs of building, foundations of multy-storey reinforced building and of chimney and silo, water depots, reinforced retaining walls and anchored sheeds, ports, stoke and loading-unloading sites, airport runways and bridges.

Lots of solutions have been obtained for plates, ineffectuated by ground and have been brought into case of practically usable as tables and patterns whilst those, effected by ground, have been solved by using approximate methods.

In this study, Finite Difference Method was explained, finite difference expressions were derived for functions with two variables and adopted to several support conditions.

In the second stage, the solution of Thin Plates on Elastic Ground was obtained by using shape functions which was derived for rectangular finite elements. A computer program which solves thin plates by using Finite Element Method was developed and explained wiht an example. Then a foundation plate, on which concentrated load act, was solved.

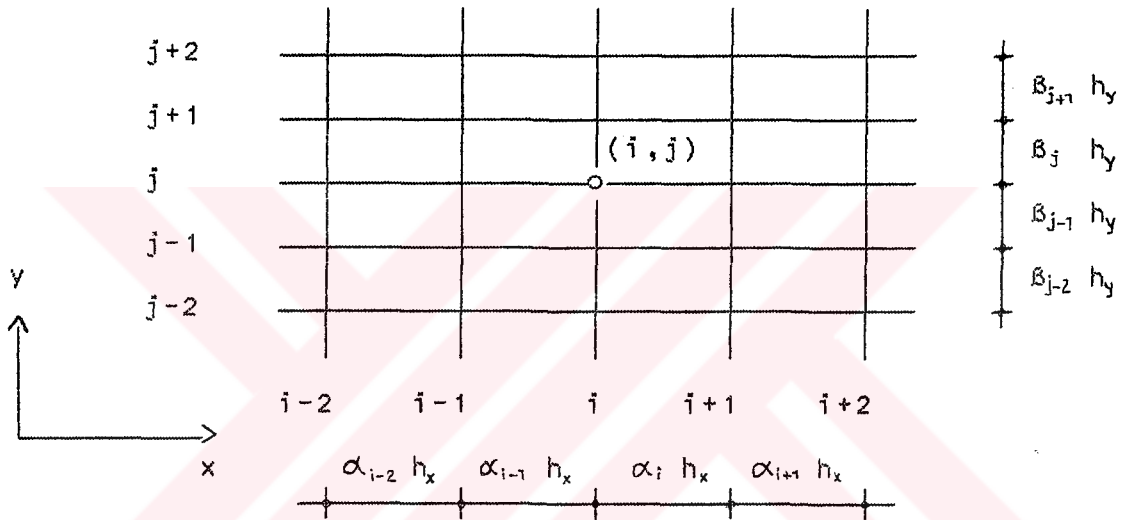
In conclution, these two solution methods, Finite Difference Method and Finite Element Method were compared.

ELASTİK ZEMİNE OTURAN PLAKLARIN NÜMERİK METODLARLA ÇÖZÜMÜ.

I. SONLU FARKLAR METODU

I.1 İki değişkenli fonksiyonlarda sonlu fark ifadelerinin çıkartılması.

x 'e ve y 'ye bağlı olan bir $w(x,y)$ fonksiyonunun türevleri sonlu farklarla ifade edilecektir.



ŞEKİL I.1

$w(x,y)$ fonksiyonunun herhangi bir (i,j) noktasındaki türevlerini sonlu farklarla ifade edebilmek için, Şekil I.1 de görüldüğü gibi, x ve y eksenlerine paralel doğrular çizerek bir ağı teşkil edelim.

y eksenine paralel doğruların aralıkları;

$$\alpha_{i-2} h_x , \alpha_{i-1} h_x , \alpha_i h_x , \dots \text{ ve}$$

x eksenine paralel doğruların aralıkları;

$$\beta_{j-2} h_y , \beta_{j-1} h_y , \beta_j h_y , \dots \text{ olsun.}$$

Özel hâl olarak aralıkları eşit olarak seçilirse,

$$\alpha_{i-2} = \alpha_{i-1} = \alpha_i = \dots = 1 \text{ ve}$$

$$\beta_{j-2} = \beta_{j-1} = \beta_j = \dots = 1 \text{ olacaktır.}$$

Önce y'yi sabit kabul edip, w(x,y) fonksiyonunun x'le göre kısmi türevleri bulunacaktır. Sonrada x'i sabit kabul edip, aynı fonksiyonun y'ye göre kısmi türevleri bulunacaktır. Buna göre, bilgilerimizden faydalanarak herhangi bir (i,j) noktasındaki kısmi türevler şu şekilde bulunabilir:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_{i,j} = \frac{w_{i-1,j} - w_{i+1,j}}{\alpha_{i-1} \cdot h_x + \alpha_i \cdot h_x} \quad (I.1)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i,j} = \frac{w_{i,j-1} - w_{i,j+1}}{\beta_{j-1} \cdot h_y + \beta_j \cdot h_y}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{i,j} &\cong \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{i,j} = \frac{(w_{i+1,j} - w_{i,j})/\alpha_i \cdot h_x - (w_{i,j} - w_{i-1,j})/\alpha_{i-1} \cdot h_x}{(\alpha_{i-1} \cdot h_x + \alpha_i \cdot h_x)/2} \\ &= \frac{2}{h_x^2 \cdot \alpha_i \cdot \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} \cdot \{ \alpha_i w_{i-1,j} - (\alpha_{i-1} + \alpha_i) w_{i,j} + \alpha_{i-1} w_{i+1,j} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{i,j} &\cong \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right)_{i,j} = \frac{(w_{i,j+1} - w_{i,j})/\beta_j \cdot h_y - (w_{i,j} - w_{i,j-1})/\beta_{j-1} \cdot h_y}{(\beta_{j-1} \cdot h_y + \beta_j \cdot h_y)/2} \\ &= \frac{2}{h_y^2 \cdot \beta_j \cdot \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \cdot \{ \beta_j w_{i,j-1} - (\beta_{j-1} + \beta_j) w_{i,j} + \beta_{j-1} w_{i,j+1} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}\right)_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{i,j} \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta y}\right)_{i,j} = \frac{(\Delta w / \Delta y)_{i-1,j} - (\Delta w / \Delta y)_{i+1,j}}{\alpha_{i-1} h_x + \alpha_i h_x} \\ &= \frac{1}{(\alpha_{i-1} + \alpha_i) (\beta_{j-1} + \beta_j) h_x h_y} \cdot (w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

(I.1) ifadelerinden faydalanarak, herhangi bir (i,j) noktasındaki:

$$\nabla^2 w_{i,j} = \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2}\right)_{i,j} \text{ değeri bulunabilir. Buradaki :}$$

$$\nabla^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \text{ değerine Laplace operatörü denir.}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{i,j} = & \left\{ \frac{2\alpha_i}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} \right\} \cdot w_{i-1,j} - \left\{ \frac{2(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} + \frac{2(\beta_{j-1} + \beta_j)}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right\} w_{i,j} \\ & \dots + \left\{ \frac{2\alpha_{i-1}}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} \right\} \cdot w_{i+1,j} \left\{ \frac{2\beta_j}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right\} \cdot w_{i,j-1} + \dots \\ & \dots + \left\{ \frac{2\beta_{j-1}}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)} \right\} \cdot w_{i,j+1} \quad (I.2) \end{aligned}$$

(I.1) ifadesinde :

$$(F1)_{i-1,j} = \frac{2\alpha_i}{h_x^2 \alpha_i \cdot \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)}$$

$$(F0)_{i,j} = - \frac{2(\alpha_{i-1} + \alpha_i)}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)} - \frac{2(\beta_{j-1} + \beta_j)}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

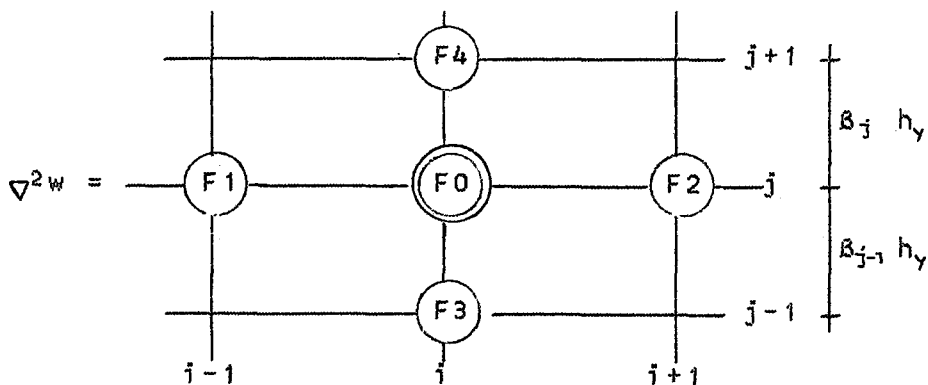
$$(F2)_{i+1,j} = \frac{2\alpha_{i-1}}{h_x^2 \alpha_i \alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} + \alpha_i)}$$

$$(F3)_{i,j-1} = \frac{2\beta_j}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

$$(F4)_{i,j+1} = \frac{2\beta_{j-1}}{h_y^2 \beta_j \beta_{j-1} (\beta_{j-1} + \beta_j)}$$

ile gösterilirse, (I.2) denklemi şu şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{i,j} = & (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + \dots \\ & \dots + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} \quad (I.4) \end{aligned}$$



ŞEKİL I.2

(I.4) denklemini şekil I.1 de görüldüğü gibi, şematik olarak ifade edebiliriz. Bu şemaya göre, F0 molekülü (i,j) noktası ile çakıştırıldığında, F1 ile (i-1,j) noktasına ait w değeri F2 ile (i+1,j) noktasına ait w değeri, F3 ile (i,j-1) noktasına ait w değeri ve F4 ile de (i,j+1) noktasına ait w değeri çarpılıp toplamı alınacaktır. Şimdi de:

$\nabla^4 w_{i,j} = \nabla^2 (\nabla^2 w)_{i,j}$ değerini bulalım. Şekil I.2 deki şemayı tatbik edersek:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w_{i,j} = & (F1)_{i-1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j} + \dots \\ & \dots + (F2)_{i+1,j} \cdot (\nabla^2 w)_{i+1,j} + (F3)_{i,j-1} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j-1} + \dots \\ & \dots + (F4)_{i,j+1} \cdot (\nabla^2 w)_{i,j+1} \end{aligned} \quad (I.5)$$

(I.5) denklemindeki $\nabla^2 w$ değerlerininide, aynı şemaya göre yazarsak:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 w)_{i-1,j} = & (F1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (F0)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F2)_{i,j} \cdot w_{i,j} + \dots \\ & \dots + (F3)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F4)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} \\ (\nabla^2 w)_{i,j} = & (F1)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (F0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + \dots \\ & \dots + (F3)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} \\ (\nabla^2 w)_{i+1,j} = & (F1)_{i,j} \cdot w_{i,j} + (F0)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (F2)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + \dots \\ & \dots + (F3)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (F4)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} \\ (\nabla^2 w)_{i,j-1} = & (F1)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + (F0)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + \dots \\ & \dots + (F3)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (F4)_{i,j} \cdot w_{i,j} \end{aligned}$$

Bu değerler (I.5) de yerine koyulursa:

$$\begin{aligned} (\nabla^4 w)_{i,j} = & \{ (F1)_{i-2,j} \cdot (F1)_{i-1,j} \} \cdot w_{i-2,j} + (F1)_{i-1,j} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i-1,j} \} \cdot w_{i-1,j} + \dots \\ & \dots + \{ (F0)_{i,j}^2 + (F1)_{i,j} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i,j} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F4)_{i,j} \cdot (F3)_{i,j-1} + \\ & \dots + (F3)_{i,j} \cdot (F4)_{i,j+1} \} \cdot w_{i,j} + (F2)_{i+1,j} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i+1,j} \} \cdot w_{i+1,j} + \dots \\ & \dots + \{ (F2)_{i+2,j} \cdot (F2)_{i+1,j} \} \cdot w_{i+2,j} + \{ (F3)_{i,j-2} \cdot (F3)_{i,j-1} \} \cdot w_{i,j-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + (F3)_{i,j-1} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i,j-1} \} \cdot w_{i,j-1} + (F4)_{i,j+1} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i,j+1} \} \cdot w_{i,j+1} \\
 & \dots + \{ (F4)_{i,j+2} \cdot (F4)_{i,j+1} \} \cdot w_{i,j+2} + \{ (F3)_{i+2,j-1} \cdot (F2)_{i+1,j} + \dots \\
 & \dots + (F2)_{i+1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1} \} \cdot w_{i+1,j-1} + \{ (F4)_{i+1,j+1} \cdot (F2)_{i+1,j} + \dots \\
 & \dots + (F2)_{i+1,j+1} \cdot (F4)_{i+1,j+1} \} \cdot w_{i+1,j+1} + \{ (F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j} + \dots \\
 & \dots + (F1)_{i-1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1} \} \cdot w_{i-1,j-1} + \{ (F4)_{i-1,j+1} \cdot (F1)_{i-1,j} + \dots \\
 & \dots + (F1)_{i-1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1} \} \cdot w_{i-1,j+1} \quad (I.6)
 \end{aligned}$$

(I.6) denkleminde:

$$\begin{aligned}
 (S1)_{i-2,j} &= (F1)_{i,j} \cdot (F1)_{i-1,j} \\
 (S2)_{i-1,j} &= (F1)_{i,j} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i-1,j} \} \\
 (S0)_{i,j} &= (F0)_{i,j}^2 + (F1)_{i,j} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i,j} \cdot (F1)_{i-1,j} + \dots \\
 & \dots + (F4)_{i,j} \cdot (F3)_{i,j-1} + (F3)_{i,j} \cdot (F4)_{i,j+1} \\
 (S3)_{i+1,j} &= (F2)_{i+1,j} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i+1,j} \} \\
 (S4)_{i+2,j} &= (F2)_{i+2,j} \cdot (F2)_{i+1,j} \\
 (S5)_{i,j-2} &= (F3)_{i,j-2} \cdot (F3)_{i,j-1} \\
 (S6)_{i,j-1} &= (F3)_{i,j-1} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i,j-1} \} \\
 (S7)_{i,j+1} &= (F4)_{i,j+1} \cdot \{ (F0)_{i,j} + (F0)_{i,j+1} \} \\
 (S8)_{i,j+2} &= (F4)_{i,j+2} \cdot (F4)_{i,j+1} \\
 (S9)_{i+1,j-1} &= (F3)_{i+1,j-1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j-1} \cdot (F3)_{i,j-1} \\
 (S10)_{i+1,j+1} &= (F4)_{i+1,j+1} \cdot (F2)_{i+1,j} + (F2)_{i+1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1} \\
 (S11)_{i-1,j-1} &= (F3)_{i-1,j-1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j-1} \cdot (F4)_{i,j-1} \\
 (S12)_{i-1,j+1} &= (F4)_{i-1,j+1} \cdot (F1)_{i-1,j} + (F1)_{i-1,j+1} \cdot (F4)_{i,j+1} \quad \text{ile gösterilirse,}
 \end{aligned} \quad (I.7)$$

(I.6) denklemi şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 (\nabla^4 w)_{i,j} &= (S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + (S0)_{i,j} \cdot w_{i,j} + \dots \\
 & \dots + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + \dots \\
 & \dots + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S7)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + \dots \\
 & \dots + (S9)_{i+1,j-1} \cdot w_{i+1,j-1} + (S10)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S11)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + \dots \\
 & \dots + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} \quad (I.8)
 \end{aligned}$$

$$F3=F4 = \frac{2 \cdot 1}{h_y^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{h_y^2}$$

$$F0 = - \frac{2 \cdot (1+1)}{h_x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+1)} - \frac{2 \cdot (1+1)}{h_y^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+1)} = - \frac{2(1+\delta^2)}{h_y^2 \cdot \delta^2}$$

$$S1=S4 = \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} \cdot \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} = \frac{1}{\delta^4 \cdot h_y^4}$$

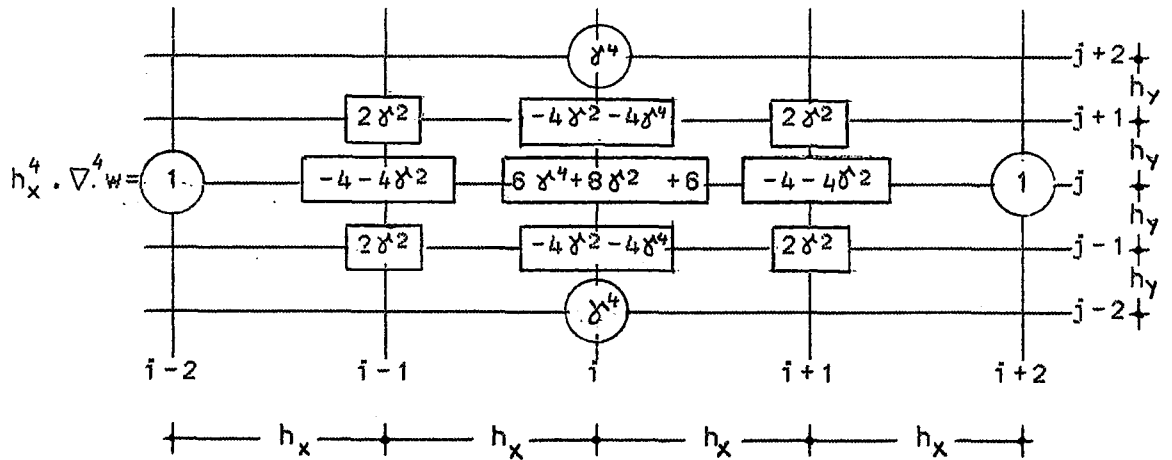
$$S2=S3=S6=S7 = \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} \left[- \frac{2(1+\delta^2)}{h_y^2} - \frac{2(1+\delta^2)}{h_y^2} \right] = - \frac{4(1+\delta^2)}{\delta^2 \cdot h_y^4}$$

$$S5=S8 = \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{h_y^2} = \frac{1}{h_y^4} \quad (I.9)$$

$$S9=S10=S11=S12 = \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} = \frac{2}{\delta^2 \cdot h_y^4}$$

$$S0 = 4 \cdot \frac{(1+\delta^2)^2}{\delta^4 \cdot h_y^4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} \cdot \frac{1}{\delta^2 \cdot h_y^2} + \frac{1}{h_y^2} \cdot \frac{1}{h_y^2} \right) = \frac{6\delta^4 + 8\delta^2 + 6}{\delta^4 \cdot h_y^4}$$

(I.9) daki değerler $\delta^4 \cdot h_y^4$ ile ęarpılarak yerine konulursa, Şekil I.4 te görülen Şema elde edilir.

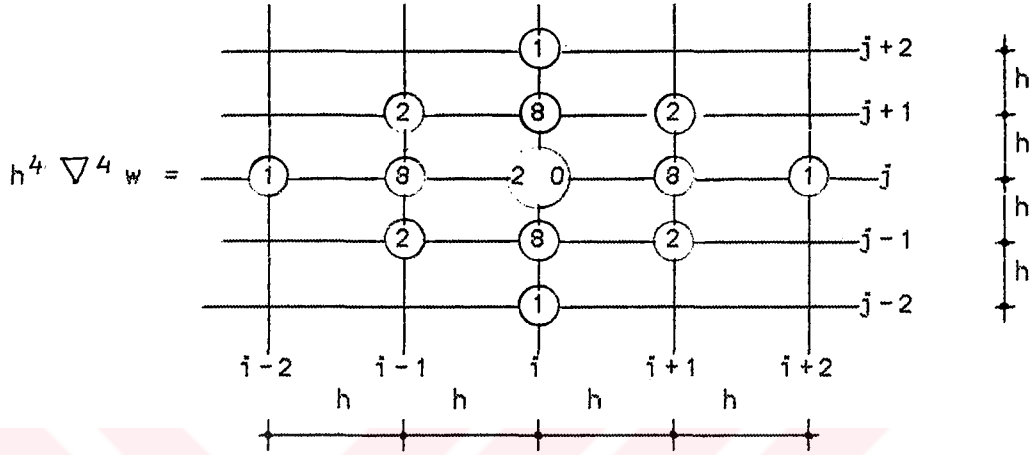


Şekil I.4

b-) İkinci zel durum olarak, x ve y doğrultularındaki ara-
lıkların birbirine eşit olması halinde ele alalım. Bu durum

da, $h_x=h_y=h$ olacağından $\lambda = 1$ olur.

Şekil I.4 te $\lambda = 1$ alınır, Şekil I.5 te görülen şema elde edilir.



Şekil I.5

I.2 Dikdörtgen plaklarda klasik diferansiyel denklemin sonlu farklarla çözümü

Klasik Teoride elastik zemine oturan plakların diferansiyel denklemi:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (g - c \cdot w) \quad \text{şeklindedir. Bu diferansiyel denklemde:}$$

$w = w(x, y)$ gökme fonksiyonu

$g = g(x, y)$ yayılı yük fonksiyonu

$c = c(x, y)$ zemin fonksiyonu

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{plağın eğilme rijitliğidir.}$$

Bu diferansiyel denklemi, Şekil I.6 da görülen plağın herhangi bir (i, j) noktası için yazarsak:

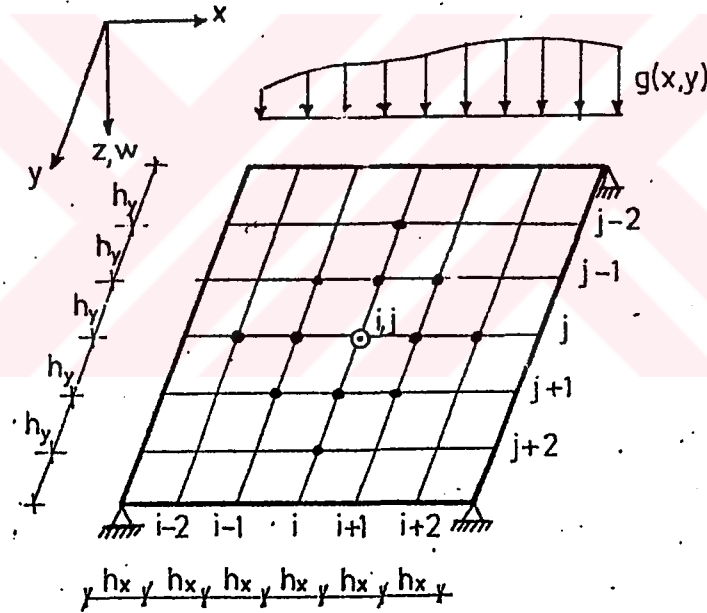
$$\nabla^4 w_{i,j} = \frac{g_{i,j}}{D} - k_{i,j} \cdot w_{i,j} \quad (I.10)$$

Burada:

$$\frac{c_{i,j}}{D} = k_{i,j} \quad \text{ile gösterilmiştir.}$$

(I.10) denklemindeki $\nabla^4 w_{i,j}$ değerlerini şekil I.3 teki şemadan faydalanıp yazarsak ve $k_{i,j} \cdot w_{i,j}$ değerini eşitliğin sol tarafına alırsak:

$$\begin{aligned} & (S1)_{i-2,j} \cdot w_{i-2,j} + (S2)_{i-1,j} \cdot w_{i-1,j} + \{(S0)_{i,j} + k_{i,j}\} \cdot w_{i,j} + (S3)_{i+1,j} \cdot w_{i+1,j} + \dots \\ & \dots + (S4)_{i+2,j} \cdot w_{i+2,j} + (S5)_{i,j-2} \cdot w_{i,j-2} + (S6)_{i,j-1} \cdot w_{i,j-1} + (S7)_{i,j+1} \cdot w_{i,j+1} + \dots \\ & \dots + (S8)_{i,j+2} \cdot w_{i,j+2} + (S9)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S10)_{i+1,j+1} \cdot w_{i+1,j+1} + (S11)_{i-1,j-1} \cdot w_{i-1,j-1} + \dots \\ & \dots + (S12)_{i-1,j+1} \cdot w_{i-1,j+1} = g_{i,j} / D \end{aligned} \quad (I.11)$$



Şekil I.6

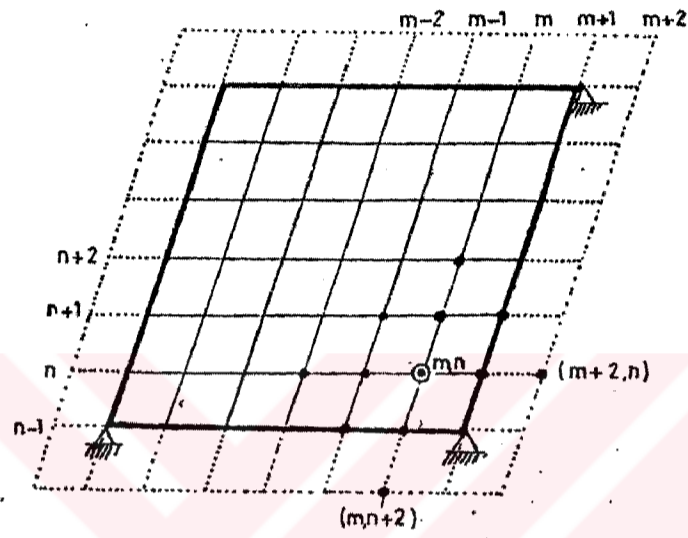
Şekil I.6 da görüldüğü gibi, x ve y eksenlerine paralel doğrular ağı çizilir. x eksenine dik doğruların aralıkları h_x ve y eksenine dik doğruların aralıklarını h_y olarak alalım. Bu doğrular ağının her noktası için I.11 denklemini yazılır. Bu şekilde elde edilecek denklem takımı çözüldürse, doğrular ağının her noktasındaki w çökme değerleri bulunmuş olur. Bu çökme değerleri bulunduktan sonra bunlar, sonlu

farklarla ifade edilen (I.12) kesit tesirleri denklemlerinde yerine konularak, bahis konusu noktalardaki kesit tesirleri elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
 (M_x)_{i,j} &= -D \cdot \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \nu \cdot \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} \\
 &= -D \left[\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} + \nu \cdot \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} \right] \\
 (M_y)_{i,j} &= -D \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} + \nu \cdot \frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} \right]_{i,j} \\
 &= -D \left[\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{h_y^2} + \nu \cdot \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{h_x^2} \right] \\
 (M_{xy})_{i,j} &= -D (1-\nu) \left[\frac{\Delta}{\Delta x} \cdot \left(\frac{\Delta w}{\Delta y} \right) \right]_{i,j} \\
 &= -\frac{D \cdot (1-\nu)}{4 \cdot h_x \cdot h_y} \cdot [w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}] \\
 (Q_x)_{i,j} &= -D \frac{\Delta}{\Delta x} \cdot \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} \\
 &= -\frac{D}{2 \cdot h_x} \cdot \left[\frac{w_{i-2,j} - 2w_{i-1,j} + 2w_{i+1,j} - w_{i+2,j}}{h_x^2} + \dots \dots \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots \dots + \frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{h_y^2} \right] \\
 (Q_y)_{i,j} &= -D \frac{\Delta}{\Delta y} \left[\frac{\Delta^2 w}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 w}{(\Delta y)^2} \right]_{i,j} \\
 &= -\frac{D}{2 \cdot h_y} \cdot \left[\frac{w_{i-1,j-1} - 2w_{i,j-1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i,j+1} - w_{i+1,j+1}}{h_x^2} + \dots \dots \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{w_{i,j-2} - 2w_{i,j-1} + 2w_{i,j+1} + w_{i,j+2}}{h_y^2} \right] \quad (I.12)
 \end{aligned}$$

şekil I.7 de görüldüğü gibi, plağın mesnedine yakın (m,n)

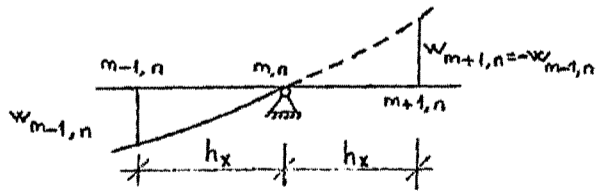
noktası için I.10 denklemi uygulanırken, fiktif bazı noktalar almak gerekecektir. Şekil I.7 de $(m+2, n)$ ve $(m, n+2)$ noktaları gibi. Bunun için, bu fiktif noktalardaki w fonksiyonlarının tarif edilmesi gerekir. Fiktif noktalardaki w fonksiyonlarının belirlenmesi için, plağın sınır şartlarından faydalanılır.



Şekil I.7

I.2.1 Dikdörtgen plaklarda sınır şartlarının sonlu farklarla ifadesi.

a- Plak sabit mesnede oturuyor ise



Şekil I.8

Bu durumda mesnet üzerindeki her noktada gökme ve moment değerleri sıfır olacaktır.

Yani:

$$w_{m, n} = 0$$

$$(M_x)_{m, n} = 0 \text{ olmalıdır. (I.13)}$$

(I.13) ifadesinden, $(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2})_{m,n} = 0$ olarak bulunur. Buna göre,

ifadesini (I.12.a) ya göre yazarsak:

$$(M_x)_{m,n} = -D \cdot (\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2})_{m,n} = 0 \quad \text{veya} \quad -\frac{D}{h_x^2} (w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) = 0$$

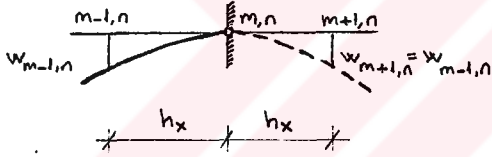
Burada $w_{m,n} = 0$ koyulursa:

$$w_{m-1,n} + w_{m+1,n} = 0 \quad \text{veya,}$$

$$w_{m+1,n} = -w_{m-1,n} \quad (I.14)$$

olarak elde edilir. Böylece, $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerinin, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değerine ters işaretli eşit olduğu sonucu çıkmış olur.

b- Plak ankastre mesnede oturuyor ise:



Şekil I.9

Bu durumda ankastre mesnet üzerindeki her noktada çökme ve dönme değerleri sıfır olacaktır. Yani: $w_{m,n} = 0$

$$(\frac{\partial w}{\partial x})_{m,n} = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

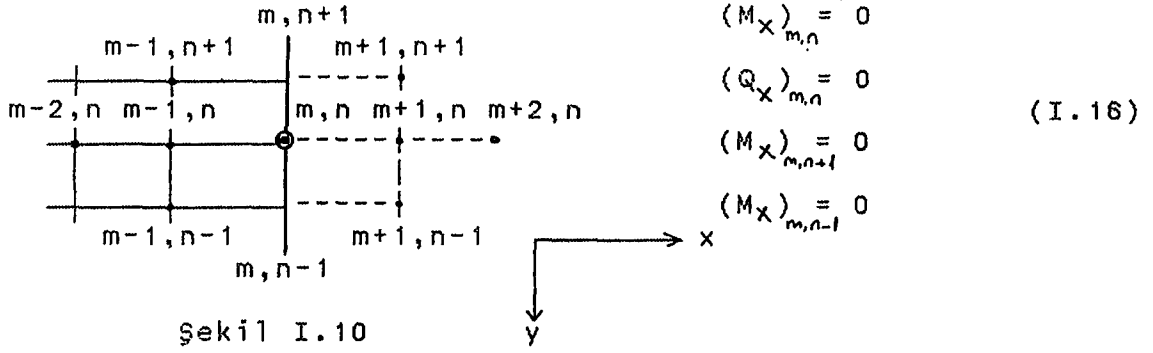
İkinci sınır şartını sonlu farklarla ifade edersek:

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = 0 \quad \text{yazabiliriz. Buradan: } w_{m+1,n} = w_{m-1,n} \quad (I.15)$$

bulunur ki, buna göre $(m+1,n)$ fiktif noktasındaki çökme değerlerinin, plağın $(m-1,n)$ noktasındaki çökme değerine eşit olduğu sonucu çıkar.

c- Plakta serbest uç bulunuyorsa:

Bu durumda, boş uçta her noktada moment ve kesme kuvveti sıfır olacaktır. Yani:



şekil I.10

(I.16) ifadelerini, (I.12) ye göre yazarsak:

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}) + \frac{Y}{h_y^2} (w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}) = 0$$

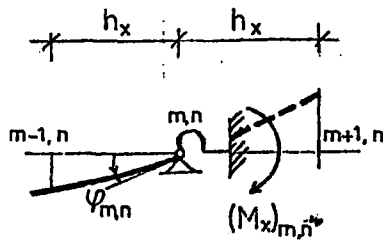
$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-2,n} - 2w_{m-1,n} + 2w_{m+1,n} - w_{m+2,n}) + \frac{1}{h_y^2} (w_{m-1,n-1} - 2w_{m-1,n} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n+1}) = 0 \quad (I.17)$$

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m+1,n+1}) + \frac{Y}{h_y^2} (w_{m,n} - 2w_{m,n+1} + w_{m,n+2}) = 0$$

$$\frac{1}{h_x^2} (w_{m-1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m+1,n-1}) + \frac{Y}{h_y^2} (w_{m,n-2} - 2w_{m,n-1} + w_{m,n}) = 0$$

Bu dört denklemden $(m+1, n)$, $(m+2, n)$, $(m+1, n-1)$, $(m+1, n+1)$ fiktif noktalarına ait çökme değerleri, plağın iç noktalarının çökme değerleri cinsinden bulunmuş olur.

d- Plak elastik olarak dönebilen ankastre mesnede oturuyorsa



Sekil I, 11

Elastik olarak dönebilen ankastre mesnette $w_{m,n} = 0$ ve ayrıca mesnette meydana gelecek $(M_x)_{m,n}$ momenti, $\phi_{m,n}$ dönmesiyle orantılı olacaktır.

$$(M_x)_{m,n} = -\rho \cdot \phi_{m,n}$$

Burada, ρ mesnedin dönme rijitli-

ğidir. Buradan :

$$\phi_{m,n} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,n} = -\frac{1}{\rho} (M_x)_{m,n} \text{ bulunur. } \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} = 0$$

olduğu dikate alınarak,(I.12.a) denklemine göre :

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)_{m,n} = \frac{1}{\rho} D \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2}\right)_{m,n}$$

olarak elde edilir. Bu denklemi sonlu farklarla ifade edersek:

$$\frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2h_x} = \frac{D}{\rho} \frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2}$$

Buradan:

$$w_{m+1,n} = \frac{1+2D/\rho h_x}{1-2D/\rho h_x} w_{m-1,n} \quad (I.18)$$

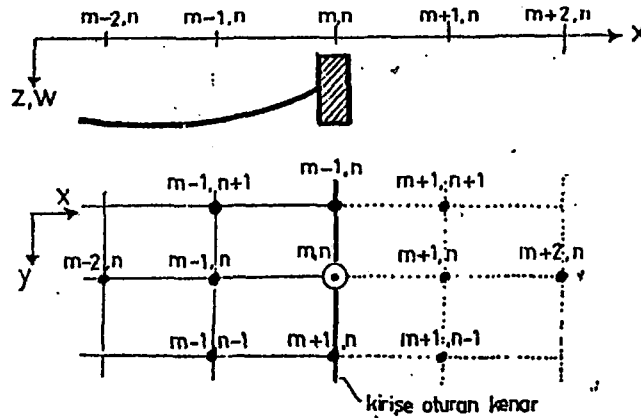
(m+1,n) fiktif noktasındaki çökme değeri,plağın (m-1,n) noktasındaki çökme değeri cinsinden bulunmuş olur.(I.18) denkleminde :

$$\eta = \frac{1+2D/\rho h_x}{1-2D/\rho h_x}$$

ile gösterilirse,bu denklemi:

$w_{m+1,n} = \eta w_{m-1,n}$ (I.19) şeklinde yazabiliriz. η değeri, -1 ve 1 extrem durumları arasında değişebilecektir.Mesnedin tam ankastre olması halinde $\eta = 1$, sabit mesnet olması halinde ise $\eta = -1$ olacaktır.

e- Plak elastik olarak çökebilien mesnede oturuyor ise:



Şekil I.12

Plak şekil I.12 de görüldüğü gibi,eğilme rijitliği E.I ve bu rulma rijitliği G.J olan bir mesnet kirişine oturuyor ise, plağın bu kenar boyunca çökme değerleri sıfır olmayıp kiri-

şin elastik eğrisinin değerlerine eşit olacaktır. Ayrıca, plağın kenarının dönmeside, kirişin burulmasına eşit olacaktır. z doğrultusunda, plaktan mesnet kirişine iletilen reaksiyon kuvveti:

$$(V_x)_{m,n} = (Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y})_{m,n} = D [\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y^2}]_{m,n}$$

Bu yayılı reaksiyon kuvveti, mesnet kirişine etkiyen yük olarak düşünülürse, kirişin elastik eğrisinin diferansiyel denklemi:

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y^2} \right]_{m,n} \quad (I.20)$$

şeklinde olacaktır. Diğer taraftan mesnet kirişindeki burulma momenti $G.J \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)$ olup, bu değer plağın $(M_x)_{m,n}$ eğilme momentine eşit olacaktır.

$$G.J. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_{m,n} = (M_x)_{m,n} \text{ veya (I.12.a) denkleminde faydalanarak}$$

$$G.J. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)_{m,n} = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{m,n} \quad (I.21)$$

yazabiliriz. (I.20) ve (I.21) denklemlerini sonlu fark ifadelerine göre yazarsak:

$$E.I \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{h_x^4} = D \cdot \left[\frac{-w_{m-2,n} + 2w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{2h_x^3} + \dots \right]$$

$$\dots + (2-\nu) \frac{1}{2h_x h_y} (-w_{m-1,n-1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n+1})$$

$$G.J \left(\frac{w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}}{4h_x h_y} \right) = -D \left[\frac{w_{m-1,n} - 2w_{m,n} + w_{m+1,n}}{h_x^2} + \dots \right]$$

$$\dots + \nu \cdot \frac{w_{m,n-1} - 2w_{m,n} + w_{m,n+1}}{h_y^2} \quad (I.22)$$

$$\frac{E.I}{h_x^3} - \frac{D}{2h_x^2} = B1$$

$$4B1 + \frac{D}{h_x^2} + \frac{D(2-\gamma)}{h_y^2} = B2$$

$$B2 + 2B1 = B3$$

$$\frac{D(2-\gamma)}{2h_y^2} = B4$$

$$\frac{G.J}{4 \cdot h_x \cdot h_y} = B5$$

$$\frac{D}{h_x^2} = B6$$

$$\frac{\gamma D}{h_y^2} = B7$$

ile gösterilirse, (I.22) denklemi:

$$B1 \cdot w_{m-2,n} - B2 \cdot w_{m-1,n} + B3 \cdot w_{m+1,n} + B1 \cdot w_{m+2,n} + B4 \cdot w_{m-1,n-1} + B4 \cdot w_{m-1,n+1} - B4 \cdot w_{m+1,n-1} - \dots \\ \dots - B4 \cdot w_{m+1,n+1} = 0 \quad (I.23)$$

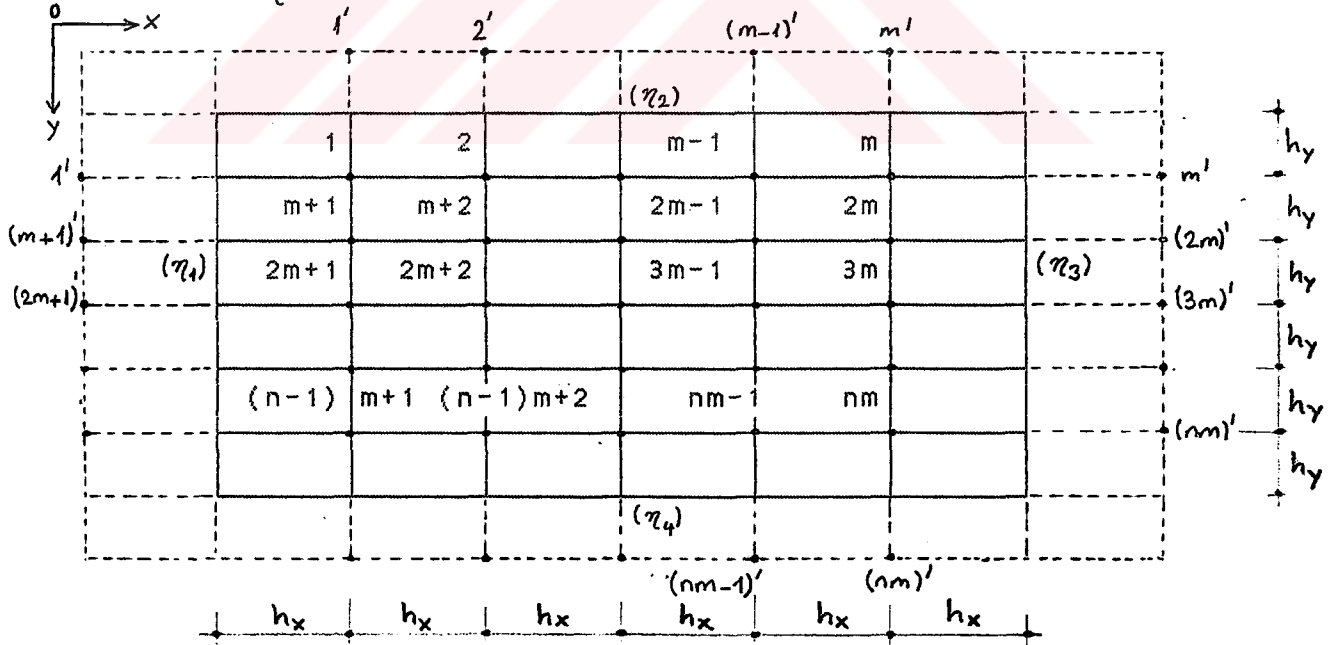
$$B5 \cdot w_{m-1,n-1} - B5 \cdot w_{m-1,n+1} - B5 \cdot w_{m+1,n-1} + B6 \cdot w_{m-1,n} - 2(B6+B7) \cdot w_{m,n} + B6 \cdot w_{m+1,n} + \dots \\ \dots + B7 \cdot w_{m,n-1} + B7 \cdot w_{m,n+1} + B5 \cdot w_{m+1,n+1} = 0$$

(I.23) denklemlerinde bilinmeyenler, fiktif noktalara ait

$w_{m+1,n}, w_{m+2,n}, w_{m+1,n-1}, w_{m+1,n+1}$ çökme değerleridir. Mesnet kirişi üzerindeki her noktaya (I.23) denklemleri uygulanırsa, bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımının çözümünden, her fiktif noktaya ait çökme değeri plağın iç noktalarındaki çökme değerleri cinsinden bulunabilir.

I.2.2 Elastik zemine oturan ve muhtelif sınır şartlarına haiz olan dikdörtgen plakların sonlu fark denklemlerinin teşkili.

Şekil I.13 te görülen, dört kenarından herhangi bir tarzda mesnetlenmiş, elastik zemine oturan plağı ele alalım. Plağı x yönünde aralarındaki mesafe h_x olacak şekilde $m+1$ aralığa y yönünde ise aralarındaki mesafe h_y olacak şekilde $n+1$ aralığa böldüğümüzü kabul edelim. Bu doğruların teşkil ettiği ağıın noktalarını $1, 2, 3, \dots, m, \dots, 2m, \dots, mn$ ile gösterelim. Bu doğrular ağıını plak dışındada devam ettirerek $1', 2', 3', \dots, m', \dots, mn'$ fiktif noktalarını alalım. Bu fiktif noktalardaki çökmeleri, (II.2.19) ifadesine göre iç noktalardaki çökme değerlerinin η gibi bir katsayıyla çarpımına eşit olacaktır.



Şekil I.13

Plağın dört kenarının istinat durumunu gösterecek katsayılar $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ olsun. (örneğin plak, dört kenarından sabit mesnetlere oturuyorsa $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1$ olacaktır.)

Şimdi plağın her ağ noktası için (I.10) diferansiyel denklemini, şekil I.3 teki şemayı uyguluyarak yazalım.

$$\begin{aligned} 1 \text{ noktası: } & S1. \eta_1 . w_1 + S2. 0 + (S0+k_1) . w_1 + S3. w_2 + S4. w_3 + S5. w_{2m+1} + \dots \\ & \dots + S6. w_{m+1} + S7. 0 + S8. \eta_2 . w_1 + S9. w_{m+2} + S10. 0 + S11. 0 + S12. 0 \\ & = g_1 / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ noktası: } & S1. 0 + S2. w_1 + (S0+k_2) . w_2 + S3. w_3 + S4. w_4 + S5. w_{2m+2} + S6. w_{m+2} + \dots \\ & \dots + S7. 0 + S8. \eta_2 . w_2 + S9. w_{m+3} + S10. 0 + S11. w_{m+1} + S12. 0 \\ & = g_2 / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ noktası: } & S1. w_1 + S2. w_2 + (S0+k_3) . w_3 + S3. w_4 + S4. w_5 + S5. w_{2m+3} + \dots \\ & \dots + S6. w_{m+3} + S7. 0 + S8. \eta_2 . w_3 + S9. w_{m+4} + S10. 0 + S11. w_{m+2} + S12. 0 \\ & = g_3 / D \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} m \text{ noktası: } & S1. w_{m-2} + S2. w_{m-1} + (S0+k_m) . w_m + S3. 0 + S4. \eta_3 . w_m + S5. w_{3m} + \dots \\ & \dots + S6. w_{2m} + S7. 0 + S8. \eta_2 . w_m + S9. 0 + S10. 0 + S11. w_{2m-1} + S12. 0 \\ & = g_m / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+1) \text{ nok.: } & S1. w_{m+1} . \eta_1 + S2. 0 + (S0+k_{m+1}) . w_{m+1} + S3. w_{m+2} + S5. w_{3m+1} + S6. w_{2m+1} \\ & \dots + S7. w_1 + S4. w_{m+3} + S8. 0 + S9. w_{2m+2} + S10. w_2 + S11. 0 + S12. 0 \\ & = g_{m+1} / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+2) \text{ nok.: } & S12. 0 + S2. w_{m+1} + (S0+k_{m+2}) . w_{m+2} + S3. w_{m+3} + S4. w_{m+4} + S5. w_{3m+2} + \dots \\ & \dots + S6. w_{2m+2} + S7. w_2 + S8. 0 + S9. w_{2m+3} + S10. w_3 + S11. w_{2m+1} + S12. w_1 \\ & = g_{m+2} / D \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} 2m \text{ noktası: } & S1. w_{2m-2} + S2. w_{2m-1} + (S0+k_{2m}) . w_{2m} + S3. 0 + S4. \eta_3 . w_{2m} + \dots \\ & \dots + S5. w_{4m} + S6. w_{3m} + S7. w_m + S8. 0 + S9. 0 + S10. 0 + S11. w_{3m-1} + S12. w_{m-1} \\ & = g_{2m} / D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2m+1) \text{ nok.: } & S1. \eta_1 . w_{2m+1} + S2. 0 + (S0+k_{2m+1}) . w_{2m+1} + S3. w_{2m+2} + S4. w_{2m+3} + S5. w_{4m+1} \\ & \dots + S6. w_{3m+1} + S7. w_{m+1} + S8. w_1 + S9. w_{3m+2} + S10. w_{m+2} + S11. 0 + S12. 0 \\ & = g_{2m+1} / D \end{aligned}$$

.....

(3m) noktası : $s1.w_{3m-2} + s2.w_{3m-1} + (s0+k_{3m}).w_{3m} + s3.0 + s4.\eta_3.w_{3m} + ..$
 $... + s5.w_{5m} + s6.w_{4m} + s7.w_{2m} + s8.w_m + s9.0 + s10.0 + s11.w_{5m-1}$
 $... + s12.w_{3m-1} = g_{3m} / D$

.....

(nm) noktası : $s1.w_{nm-2} + s2.w_{nm-1} + (s0+k_{nm}).w_{nm} + s3.0 + s4.\eta_3.w_{nm} + ..$
 $.. + s5.\eta_4.w_{nm} + s6.0 + s7.w_{(n-1)m} + s8.w_{(n-2)m} + s9.0 + s10.0 + ..$
 $.. + s11.0 + s12.w_{(n-1)m-1} = g_{nm} / D$

Bu denklemleri düzenleyip yazarsak;

$(s1.\eta_1 + s0 + s8.\eta_2 + k_1).w_1 + s3.w_2 + s4.w_3 + s6.w_{m+1} + s9.w_{m+2} + s5.w_{2m+1} = g_1 / D$
 $s2.w_1 + (s0 + s8.\eta_2 + k_2).w_2 + s3.w_3 + s4.w_4 + s11.w_{m+1} + s6.w_{m+2} + s9.w_{m+3} + ..$
 $... + s5.w_{2m+2} = g_2 / D$

$s1.w_1 + s2.w_2 + (s0 + s8.\eta_2 + k_3).w_3 + s3.w_4 + s4.w_5 + s11.w_{m+2} + s6.w_{m+3} + ..$
 $... + s9.w_{m+4} + s5.w_{2m+3} = g_3 / D$

.....

$s1.w_{m-2} + s2.w_{m-1} + (s0 + s4.\eta_3 + s8.\eta_2 + k_m).w_m + s11.w_{2m-1} + s6.w_{2m} + ..$
 $... + s5.w_{3m} = g_m / D$

$s7.w_1 + s10.w_2 + (s0 + s1.\eta_1 + k_{m+1}).w_{m+1} + s3.w_{m+2} + s4.w_{m+3} + s6.w_{2m+1} + ..$
 $... + s9.w_{2m+2} + s5.w_{3m+1} = g_{m+1} / D$

$s12.w_1 + s7.w_2 + s10.w_3 + s2.w_{m+2} + (s0 + k_{m+2}).w_{m+2} + s3.w_{m+3} + s4.w_{m+4} + ..$
 $... + s11.w_{2m+1} + s6.w_{2m+2} + s9.w_{2m+3} + s5.w_{3m+2} = g_{m+2} / D$

$s12.w_{m-1} + s7.w_m + s1.w_{2m-2} + s2.w_{2m-1} + (s0 + s4.\eta_3 + k_{2m}).w_{2m} + s11.w_{3m-1} + ..$
 $... + s6.w_{3m} + s5.w_{4m} = g_{2m} / D$

$s8.w_1 + s7.w_{m+1} + s10.w_{m+2} + (s0 + s1.\eta_1 + k_{2m+1}).w_{2m+1} + s3.w_{2m+2} + s4.w_{2m+3} + ..$
 $... + s6.w_{3m+1} + s9.w_{3m+2} + s5.w_{4m+1} = g_{2m+1} / D$

$s8.w_m + s12.w_{2m-1} + s7.w_{2m} + s1.w_{3m-2} + s2.w_{3m-1} + (s0 + s4.\eta_3 + k_{3m}).w_{3m} + ..$
 $... + s6.w_{4m} + s11.w_{5m-1} + s5.w_{5m} = g_{3m} / D$

.....

$$S8 \cdot w_{(n-2)m} + S12 \cdot w_{(n-1)m-1} + S7 \cdot w_{(n-1)m} + S1 \cdot w_{nm-2} + S2 \cdot w_{nm-1} + \dots + (S0 + S4 \cdot \eta_3 + S5 \cdot \eta_4 + k_{nm}) \cdot w_{nm} = g_{nm} / D \quad (I.24)$$

(I.24) denklemleri, n.m bilinmeyenli bir denklem takımı teşkil ederler. Bu denklem takımından bilinmeyen

$w_1, w_2, w_3, \dots, w_m, \dots, w_{nm}$ çökme değerleri bulunabilir.

(I.24) denklemlerini matris formunda yazalım.

$[A] \cdot [W] = [P]$ veya, her iki tarafı $[A]^{-1}$ ile çarparsak:

$$[W] = [A]^{-1} \cdot [P]$$

Burada : $[W]$ Bilinmeyen çökme değerlerini gösteren vektör

$[A]$ Katsayılar matrisi

$[P]$ Yük vektörü

$$[W] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \\ w_{m+1} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{bmatrix} \quad [P] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_m \\ g_{m+1} \\ \vdots \\ g_{nm} \end{bmatrix} \quad h_x^4$$

A katsayılar matrisi (I.25) de verilmiştir. A katsayılar matrisini, alt matrislerle ifade edebiliriz. Bu şekilde alt matrislerle çalışmak bilgisayar

programlaması bakımından kolaylık sağlar. Aşağıda $[A1],$

$[A2], \dots, [A7]$ alt matrislerdir. $[0]$ ise sıfır matrisidir.

$$[A] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & m & 2m & 3m & \dots & (n-1)m & nm \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} [A1] & [A3] & [A4] & [0] & [0] & [0] \\ [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [0] & [0] \\ [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] & [0] \\ [0] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] & [A4] \\ [0] & [0] & [A6] & [A5] & [A2] & [A3] \\ [0] & [0] & [0] & [A6] & [A5] & [A7] \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ m \\ 2m \\ 3m \\ \vdots \\ (n-1)m \\ nm \end{array} \quad (I.26)$$

(I.25) ve (I.26) nin mukayesesinden alt matrisler şu şekilde bulunur :

	1	2	3	m	
[A1]=	$S_0 + \eta_1 S_1 + \eta_2 S_8 + k_1$	S_3	S_4			1
	S_2	$S_0 + \eta_2 S_8 + k_2$	S_3			2
	S_1	S_2			S_4	⋮
					$S_0 + \eta_2 S_8 + k_{m-1}$	⋮
			S_1	S_2	$S_0 + \eta_2 S_8 + \eta_3 S_4 + k_m$	m
	m+1	m+2	2m		

[A2]=	$S_0 + \eta_1 S_1 + k_{m+1}$	S_3	S_4			m+1
	S_2	$S_0 + k_{m+2}$	S_3			m+2
	S_1	S_2			S_4	⋮
					$S_0 + k_{2m-1}$	⋮
			S_1	S_2	$S_0 + \eta_3 S_4 + k_{2m}$	2m
	m+1	m+2	... 2m	2m+1	2m+2	... 3m

[A3]=	S_6	S_9				m+1
	S_{11}	S_6	S_9			m+2
			S_{11}	S_6	S_9	⋮
				S_{11}	S_6	2m

[A4]=	S_5					2m+1
		S_5				2m+2
						⋮
				S_5		⋮
					S_5	3m

[A5]=	1	2	...	m		
	S_7	S_{10}			1	
	S_{12}	S_7	S_{10}		2	
			S_{12}	S_7	S_{10}	⋮
				S_{12}	S_7	m

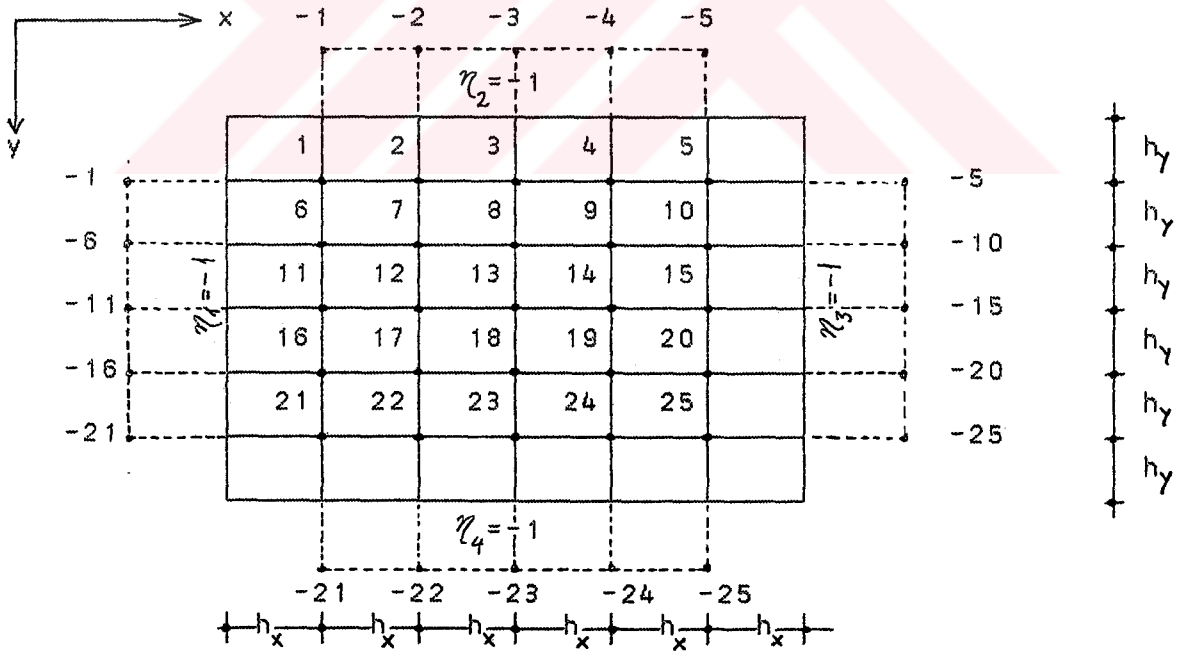
[A6]=	1	2	...	m		
	S_8				1	
		S_8			2	
					⋮	
				S_8	⋮	
					S_8	m

[A7]=

	$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	nm	
	$S_0+\eta_1 S_1+\eta_4 S_5+k_{(n-1)m+1}$	S_3	S_4		$(n-1)m+1$
	S_2	$S_0+\eta_4 S_5+k_{(n-1)m+2}$	S_3		$(n-1)m+2$
	S_1			S_4	\vdots
			S_2	$S_0+\eta_4 S_5+k_{nm-1}$	S_3
			S_1	S_2	$S_0+\eta_3 S_4+\eta_4 S_5+k_{nm}$

(I.27) de görülen alt matrisleri incelediğimizde, sınır şartlarının sadece [A1],[A2], ve [A7] matrislerine tesiri olduğunu görürüz. Bunların haricinde kalan alt matrisler ise sınır şartlarından bağımsızdır.

I.2.2.1 Elastik zemin üzerindeki dikdörtgen plağın dört kenarından sabit mesnetlere oturması hali.



Şekil I.14

Şekil I.14 te görüldüğü gibi, plağı x ve y doğrultularında altı eşit parçaya bölelim. Bu durumda $m=n=5$ olacaktır. Plak dört tarafından sabit mesnetlere oturduğu için, plak dışında alınacak fiktif noktalardaki çökme değerleri(I.14) ifadesine

göre, plağın iç noktalarına ait çökme değerlerinin ters işaretlisi olacaktır. Buna göre:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1 \text{ dir.}$$

Ayrıca y eksenine paralel doğruları h_x ve x eksenine paralel doğruların aralıkları h_y olarak seçildiğinden, şekil I.4 deki şemaya göre:

$$\begin{aligned} s_0 &= 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \\ s_1 &= s_4 = 1 \\ s_2 &= s_3 = -4 - 4\gamma^2 \\ s_5 &= s_8 = \gamma^4 \\ s_6 &= s_7 = -4\gamma^2 - 4\gamma^4 \\ s_9 &= s_{10} = s_{11} = s_{12} = 2\gamma^2 \end{aligned} \quad (I.28)$$

olacaktır. Bu değerleri kullanarak:

$$\begin{aligned} s_0 + s_1 \cdot \eta_1 + s_8 \cdot \eta_2 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\ s_0 + s_8 \cdot \eta_2 &= s_0 + s_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 \\ s_0 + s_8 \cdot \eta_2 + s_4 \cdot \eta_3 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\ s_0 + s_1 \cdot \eta_1 &= 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \\ s_0 + s_4 \cdot \eta_3 + s_5 \cdot \eta_4 &= 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \end{aligned} \quad (I.29)$$

olarak bulunur.

(I.28) ve (I.29) değerleri, (I.27) de verilen alt matrislerde yerine konulursa:

	1	2	3	4	5	
[A1]=[A7]=	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1			1
	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1		2
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1	3
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4$	$-4 - 4\gamma^2$	4
			1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_5$	5

[A2] =

	6	7	8	9	10	
	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1			6
	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1		7
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1	8
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_9$	$-4 - 4\gamma^2$	9
			1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_{10}$	10

(I.30)

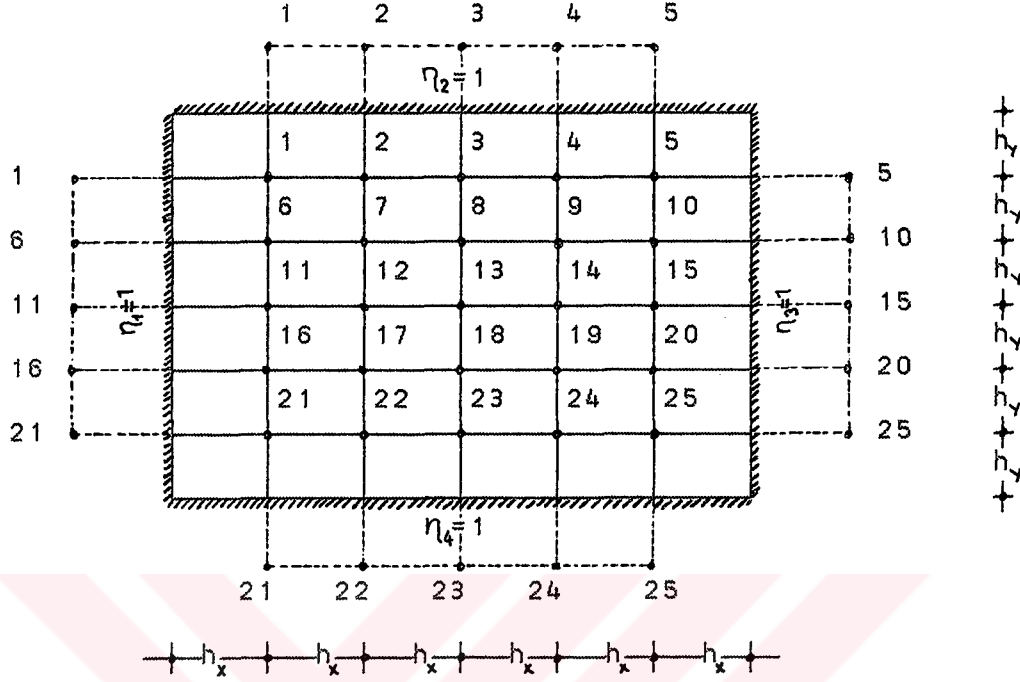
[A3] = [A5] =

	6	7	8	9	10	
	$-4\gamma^2 - 4\gamma^4$	$2\gamma^2$				1
	$2\gamma^2$	$-4\gamma^2 - 4\gamma^4$	$2\gamma^2$			2
		$2\gamma^2$	$-4\gamma^2 - 4\gamma^4$	$2\gamma^2$		3
			$2\gamma^2$	$-4\gamma^2 - 4\gamma^4$	$2\gamma^2$	4
				$2\gamma^2$	$-4\gamma^2 - 4\gamma^4$	5

[A4] = [A6] =

	11	12	13	14	15	
	γ^4					1
		γ^4				2
			γ^4			3
				γ^4		4
					γ^4	5

I.2.2.2 Elastik zemine oturan plağın dört kenarından ankastre mesnede oturması halii.



Şekil I.15

Bu durumda, plak dışında alınacak fiktif noktadaki çökme değerleri iç noktalardaki çökme değerlerine eşit olacağından $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 1$ dir.

Buna göre, (I.28) değerlerinden faydalanarak:

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

(I.31)

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_5 \cdot \eta_4 = S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad \text{olarak bulunur. Bu}$$

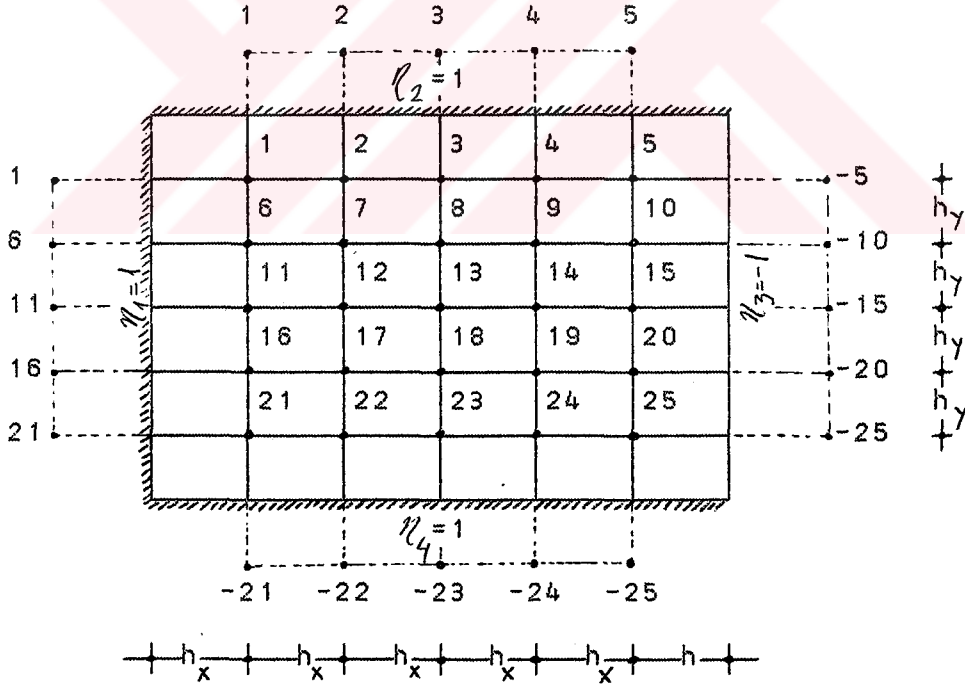
değerler (I.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

$$[A1] = [A7] = \begin{matrix} & \underset{1}{1} & \underset{2}{2} & \underset{3}{3} & \underset{4}{4} & \underset{5}{5} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{matrix} 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_1 \cdot h_x^4 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -4 - 4\gamma^2 \\ 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2 \cdot h_x^4 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 7 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3 \cdot h_x^4 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4 \cdot h_x^4 \\ -4 - 4\gamma^2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 - 4\gamma^2 \\ 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_5 \cdot h_x^4 \end{matrix} \end{matrix}$$

	6	7	8	9	10	
[A2] =	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_6 \cdot h_x^4$	$-4 - 4\delta^2$	1			6
	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_7 \cdot h_x^4$	$-4 - 4\delta^2$	1		7
	1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_8 \cdot h_x^4$	$-4 - 4\delta^2$	1	8
		1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_9 \cdot h_x^4$	$-4 - 4\delta^2$	9
			1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_{10} \cdot h_x^4$	10

[A3],[A4],[A5],[A6], alt matrisleri,(I.30) daki alt matrislerle aynıdır.

I.2.2.3 Elastik zemine oturan plağın üç kenarından ankastre mesnede,bir kenarındanda sabit mesnede oturması hali.



şekil I.16

Bu durumda $\eta_1 = \eta_2 = \eta_4 = 1$ ve $\eta_3 = -1$ alınmalıdır. Buna göre:

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_1 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 7$$

$$S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 7$$

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 6$$

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 + S_4 \cdot \eta_3 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 5 \quad (I.32)$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = 6\delta^4 + 8\delta^2 + 7$$

(I.32) değerleri, (I.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

$$[A1] = [A7] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 7\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_1 & -4 - 4\delta^2 & 1 & & \\ -4 - 4\delta^2 & 7\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_2 & -4 - 4\delta^2 & 1 & \\ 1 & -4 - 4\delta^2 & 7\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_3 & -4 - 4\delta^2 & 1 \\ & 1 & -4 - 4\delta^2 & 7\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_4 & -4 - 4\delta^2 \\ & & 1 & -4 - 4\delta^2 & 7\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_5 \end{array} \\ \end{array}$$

$$[A2] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_6 & -4 - 4\delta^2 & 1 & & \\ -4 - 4\delta^2 & 6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_7 & -4 - 4\delta^2 & 1 & \\ 1 & -4 - 4\delta^2 & 6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_8 & -4 - 4\delta^2 & 1 \\ & 1 & -4 - 4\delta^2 & 6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_9 & -4 - 4\delta^2 \\ & & 1 & -4 - 4\delta^2 & 6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_{10} \end{array} \\ \end{array}$$

Diğer alt matrisler, (I.30) da verilen alt matrislerle aynıdır.

I.2.2.4 Elastik zemine oturan plağın komşu iki kenarının ankastre mesnede, diğer iki kenarında sabit mesnede oturması hali.

Bu durumda $\eta_1 = \eta_4 = 1$ ve $\eta_2 = \eta_3 = -1$ alınmalıdır. Bu değerlere göre :

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = 5\delta^4 + 8\delta^2 + 7$$

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = 5\delta^4 + 8\delta^2 + 6$$

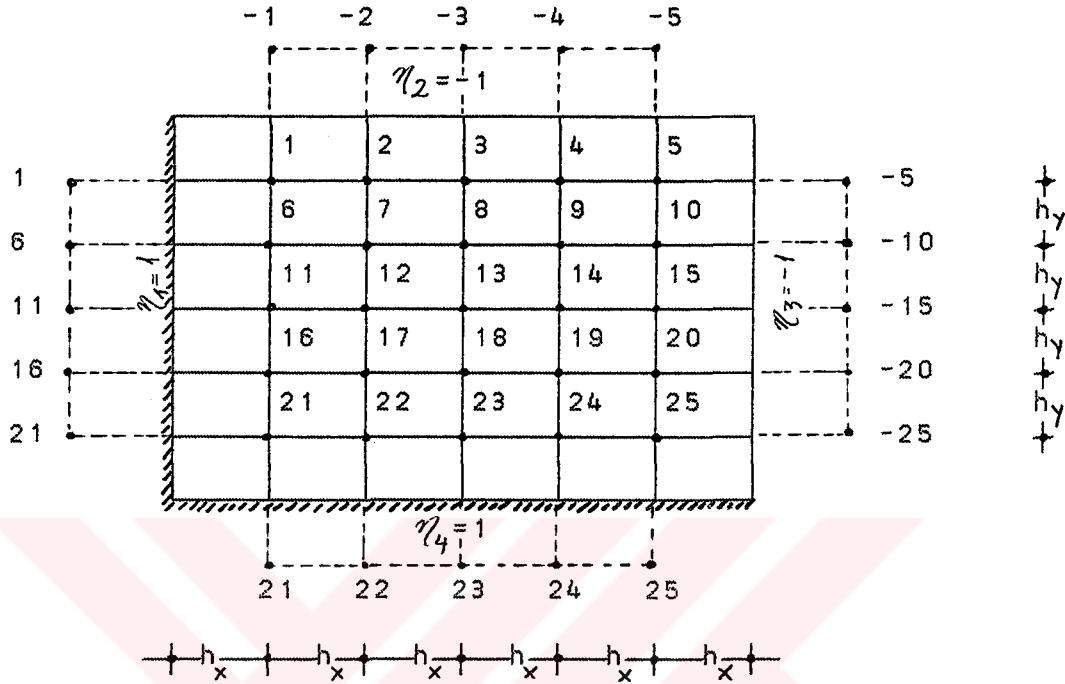
$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = 6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 \quad (I.33)$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 7$$

$$S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = 7\delta^4 + 8\delta^2 + 6$$

$$S_0 + S_5 \cdot \eta_4 + S_4 \cdot \eta_3 = 7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$S_0 + S_4 \cdot \eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 \quad \text{olarak bulunur.}$$



Şekil I.17

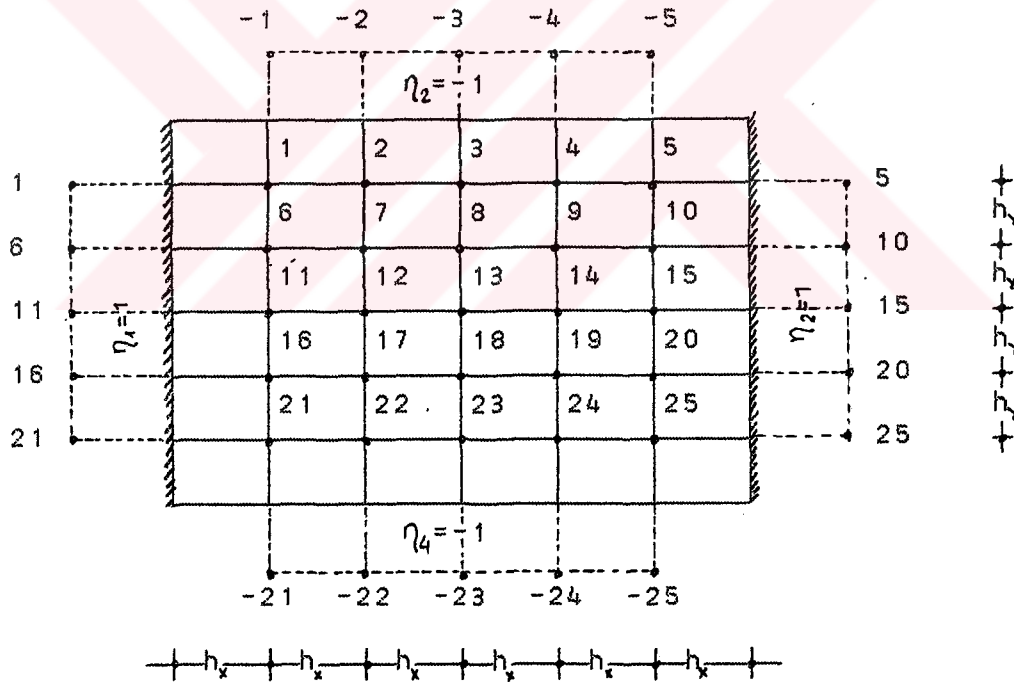
(I.33) değerleri, (I.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

	1	2	3	4	5	
[A1] =	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_1$	$-4 - 4\gamma^2$	1			1
	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2$	$-4 - 4\gamma^2$	1		2
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3$	$-4 - 4\gamma^2$	1	3
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4$	$-4 - 4\gamma^2$	4
			1	$-4 - 4\gamma^2$	$5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_5$	5
	6	7	8	9	10	
[A2] =	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_6$	$-4 - 4\gamma^2$	1			6
	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_7$	$-4 - 4\gamma^2$	1		7
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_8$	$-4 - 4\gamma^2$	1	8
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_9$	$-4 - 4\gamma^2$	9
			1	$-4 - 4\gamma^2$	$6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_{10}$	10

	21	22	23	24	25	
[A7] =	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_{21}$	$-4 - 4\gamma^2$	1			21
	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_{22}$	$-4 - 4\gamma^2$	1		22
	1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_{23}$	$-4 - 4\gamma^2$	1	23
		1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_{24}$	$-4 - 4\gamma^2$	24
			1	$-4 - 4\gamma^2$	$7\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5 + k_{25}$	25

Diğer alt matrisler, (I.30) da verilen matrislerle aynıdır.

I.2.2.5 Elastik zemine oturan plağın karşılıklı iki kenarının ankastre mesnede, diğer iki kenarının da sabit mesnede oturması hali.



Şekil I.18

Bu durumda $\eta_1 = \eta_3 = +1$ ve $\eta_2 = \eta_4 = -1$ alınmalıdır. Bu değerlere göre :

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 + S_4 \cdot \eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = S_0 + S_4 \cdot \eta_3 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (I.34)$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = S_0 + S_5 \cdot \eta_4 + S_4 \cdot \eta_3 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

olarak elde edilir.

(I.34) değerleri, (I.27) alt matrislerinde yerine koyulursa:

$$[A1] = [A7] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_1 & -4 - 4\gamma^2 & 1 & & \\ -4 - 4\gamma^2 & 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_2 & -4 - 4\gamma^2 & 1 & \\ & -4 - 4\gamma^2 & 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_3 & -4 - 4\gamma^2 & 1 \\ & & -4 - 4\gamma^2 & 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_4 & -4 - 4\gamma^2 \\ & & & -4 - 4\gamma^2 & 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$[A2] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_6 & -4 - 4\gamma^2 & 1 & & \\ -4 - 4\gamma^2 & 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_7 & -4 - 4\gamma^2 & 1 & \\ 1 & -4 - 4\gamma^2 & 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_8 & -4 - 4\gamma^2 & 1 \\ & 1 & -4 - 4\gamma^2 & 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6 + k_9 & -4 - 4\gamma^2 \\ & & 1 & -4 - 4\gamma^2 & 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 + k_{10} \end{array} \\ \begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

I.2.2.6 Elastik zemine oturan plağın bir kenarının ankastre mesnede, diğer üç kenarının sabit mesnede oturması hali.

Bu durumda $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = -1$ ve $\eta_1 = 1$ alınmalıdır.

Buna göre:

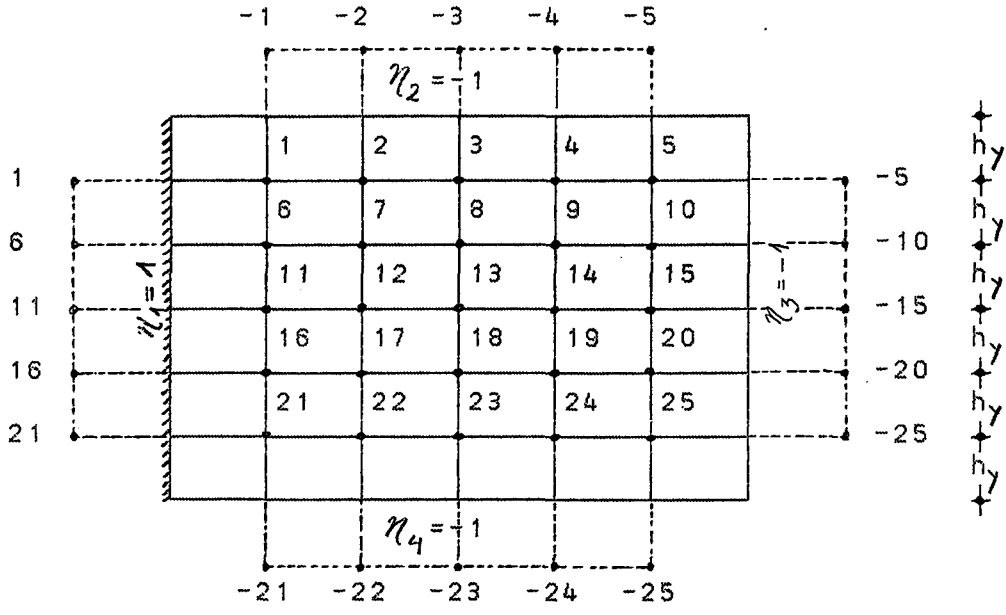
$$S_0 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 6$$

$$S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_2 = S_0 + S_4 \cdot \eta_3 + S_8 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 5$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_5 \cdot \eta_4 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7 \quad (I.35)$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 = 6\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$

$$S_0 + S_1 \cdot \eta_1 + S_8 \cdot \eta_2 = 5\gamma^4 + 8\gamma^2 + 7$$



Şekil I.19

	1	2	3	4	5	
[A1] = [A7] =	$5\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_1$	$-4 - 4\delta^2$	1			1
	$-4 - 4\delta^2$	$5\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_2$	$-4 - 4\delta^2$	1		2
	1	$-4 - 4\delta^2$	$5\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_3$	$-4 - 4\delta^2$	1	3
		1	$-4 - 4\delta^2$	$5\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_4$	$-4 - 4\delta^2$	4
			1	$-4 - 4\delta^2$	$5\delta^4 + 8\delta^2 + 5 + k_5$	5
	6	7	8	9	10	
[A2] =	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_6$	$-4 - 4\delta^2$	1			6
	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_7$	$-4 - 4\delta^2$	1		7
	1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_8$	$-4 - 4\delta^2$	1	8
		1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 6 + k_9$	$-4 - 4\delta^2$	9
			1	$-4 - 4\delta^2$	$6\delta^4 + 8\delta^2 + 7 + k_{10}$	10

Diğer alt matrisler (I.30) da verilen matrislerle aynıdır. Böylece her tip mesnet durumunda, [A] matrisinin teşkili

için gerekli olan alt matrisler belirlenmiş oldu.

Şayet mesnetler elastik ankastre şeklinde ise, (I.18) ifade-
sione göre:

$$\eta = \frac{1 + \frac{2 \cdot D}{\rho \cdot h}}{1 - \frac{2 \cdot D}{\rho \cdot h}} \quad \text{olarak hesaplanıp, yerine koyulmalı-}$$

dır.



II. SONLU ELAMANLAR METODU

II.1. Giriş

Sürekli ortam kendi şekline ve sınır şartlarına uygun sonlu sayıda yüzey veya çizgiye ayrılır ve bunların kesişme noktalarına düğüm noktası adı verilir. Düğüm noktalarındaki deplasmanlar sistemin bilinmeyen parametrelerini oluşturur.

Elde edilen sonlu elaman üzerine uzayda yüzey, düzlemde eğrisel bir çizgi oturtularak uygun bir yer değiştirme fonksiyonu seçilir. Bu fonksiyon yardımı ile düğüm noktası deplasmanları ifade edilir. Malzeme özelliklerinden ve başlangıç şekil değiştirmelerinden faydalanılarak gerilme durumu ifade edilir. Elemana etki eden kuvvetlerin düğüm noktalarına yığıldığı, bunların dış yükler ve sınır gerilmeleri ile dengede olduğu farz edilerek Eleman Rijitlik Matrisleri oluşturulur.

Eleman Rijitlik ve Yükleme Matrisleri (Düğüm Etki Vektörü) yardımı ile Sistem Rijitlik Matrisleri ve Sistem Düğüm Etki Vektörü oluşturulur. Sınır şartları uygulanarak denklem takımı çözülür. Düğüm noktası deplasmanları elde edilir. Her elemanda bilinen deplasmanlar yardımı ile gerilmeler hesaplanır.

Problemin çözümünün elde edilebilmesi için Tamlık şartının ve Uygunluk şartının sağlanmış olması gerekir.

Tamlık şartı: Eleman ne kadar küçük olursa olsun fonksiyonun kendisi ve maksimum türevinin elde edilebilme şartına denir.

Tamlık şartı sağlanamıyorsa fonksiyonun başına integ-

ralde geçen türev mertebesini sağlayacak büyüklükte bir polinom konmalıdır.

Uygunluk Şartı: Herhangi bir noktada maksimum türev mertebesinin en az bir düŐük mertebesinin sürekli olması Şartına denir.



II.2. İnce Plakların Çözümü

Eni ve boyu yanında yüksekliği ihmal edilebilen plaklara İnce Plak denir.

Problemin çözümünde yapılan varsayımlar:

1- Boyutlar yönünden (Geometrik yönden)

a) Plak kalınlığı diğer boyutların yanında çok küçüktür. $d \ll l_x, l_y$

Plak kalınlığı değişken olabilir.

b) Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir düzlemdir.

c) Yükler orta düzleme diktir.

d) İnce plakta deformasyonlar sonsuz küçük ve çökmeler plak kalınlığı yanında çok küçüktür.

w (düşey sehim) $\ll d$ (plak kalınlığı)

Büyük olma durumunda kalın plaklar konusuna girer. Bu kabul sonunda denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında ikinci mertebe etkiler ihmal edilecek ve süperpozisyon kuralı (Hook kanunu) geçerli olacaktır. Böylece denge denklemleri deforme olmamış plak üzerinde yazılabilecektir.

2- Malzeme yönünden

a) Malzeme homojendir. Yani malzemenin bütün noktaları aynı fiziki özelliğe sahiptir.

b) Malzeme lineer elastiktir. Hook kanunu geçerlidir.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\varepsilon = k \cdot \sigma$$

$$(k = 1 / E)$$

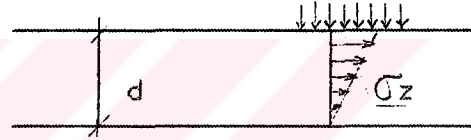
- c) Malzeme izotropdur. Yani her doğrultuda aynı elastik özelliğe ve davranışa sahiptir. Malzemede mekanik özellikler tesirlerin doğrultusuna bağlı olmayıp aynıdır. Anizotrop plaklar konunun dışındadır.

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} \quad E_x = E_y = E$$

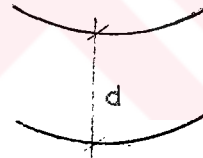
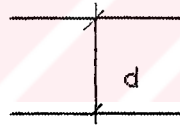
3- Diğer basitleştirici varsayımlar

- a) Plak orta düzlemine dik doğrultudaki normal gerilmeler ihmal edilebilecek mertebededir.

$$\sigma_z \cong 0$$



- b) Deformasyonda düşey yönde plak kalınlığı değişmemektedir.



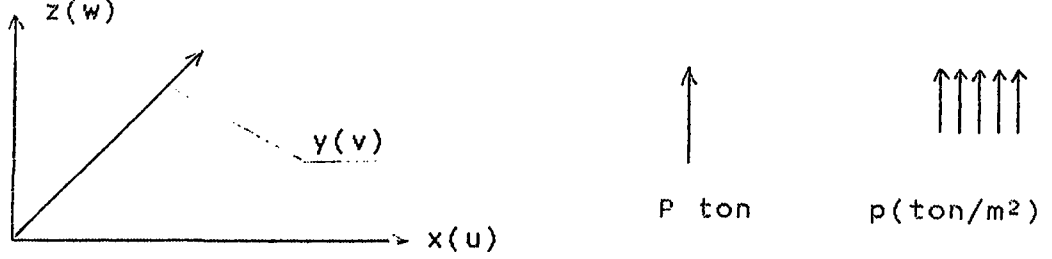
$$\epsilon_z \cong 0$$

$$\epsilon = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_z \cong 0 : \mu \cong 0,15 \cong 0,20$$

- c) Deformasyondan önce orta düzlemin herhangi bir noktasının normali, deformasyondan sonra meydana gelen elastik yüzeyin o noktadaki normali olarak kalır. Yani deformasyondan önce, orta düzlemin bir noktadaki normali üzerinde bulunan bir nokta deformasyondan sonra da elastik yüzeyin o noktadaki normali üzerinde bulunur. Bu çubuk sistemlerdeki Bernoulli-Navier hipotezine karşı gelen Kirschhoff-Love hipotezidir.

Koordinat sistemi ve yüklerin pozitif yönleri şekil II.1 deki gibi kabul edilmiştir.



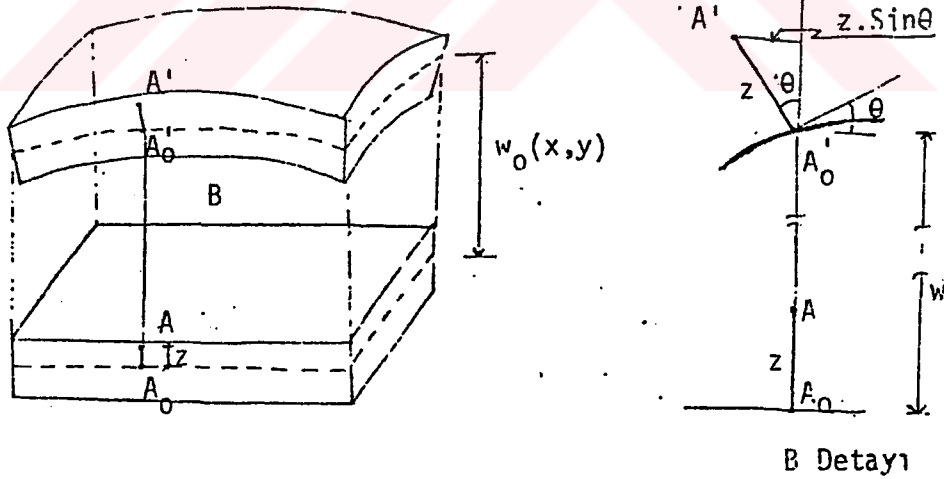
Şekil II.1

Şekil değiştirme ve gerilme bileşenlerini bulabilmek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

İnce plaklar sadece düzlemine dik doğrultuda deplasman yapar.

$$w(x,y) \neq 0 \quad u(x,y) = 0 \quad v(x,y) = 0$$

Şekil II.2'de dikdörtgen diferansiyel eleman ele alınmış deplasman bileşenleri gösterilmiştir.



Şekil II.2

Şekilden 1- $\overline{A_0 A'_0} = w_0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$

2- $\overline{A' A'_0} \perp$ Elastik yüzey

3- $\overline{A A_0} = z = \overline{A' A'_0}$

4- $\tan \theta = \partial w / \partial x$, $\sin \theta \approx 0 \approx \partial w / \partial x = \tan \theta$

$$5- u(x,y) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} A' \text{de}$$

$$6- w(x,y) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$7- w(x,y) = w_0 + z \cos \theta - z \quad ; \cos \theta \cong 1$$

$$w(x,y) = w_0 + z \cdot 1 - z = w_0(x,y)$$

deplasman bileşenleri bulunmuş olur.

Deformasyon bileşenleri:

A noktasında;

$$8- \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$9- \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$10- \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = -2 z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$11- \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$12- \gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Deformasyondan önce A' noktası elastik yüzeye diktir, deformasyondan sonra da elastik yüzeye dik olması şartından dolayı γ_{xz}, γ_{yz} sıfıra eşittir.

Lineer elastik malzemede gerilmeler:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \quad \sigma_x - \mu \sigma_y = \epsilon_x \cdot E$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \quad -\mu \sigma_x + \sigma_y = \epsilon_y \cdot E$$

$$\sigma_y = \epsilon_y \cdot E + \mu \sigma_x$$

$$\sigma_x - \mu(\epsilon_y \cdot E + \mu \sigma_x) = \epsilon_x \cdot E$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)$$

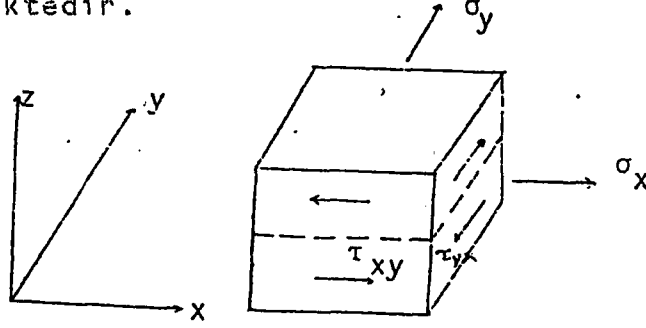
$$13- \sigma_x = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$14- \sigma_y = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

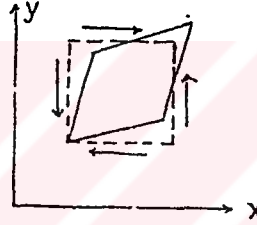
$$15- \tau_{xy} = -2 G z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$16- \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{yz} = 0$$

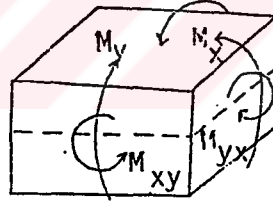
Şekillerde gerilme ve momentler için yapılan işaret kabulleri görülmektedir.



a/ Kayma ve normal gerilmeler için işaret kabulleri



b/ Açı bozunması için işaret kabulleri



c/ Eğilme ve burulma momentleri için işaret kabulleri

Şekil II.3 a,b,c

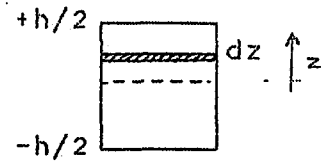
$$17- N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \, dz$$

$$N_x = 0, \quad N_y = 0$$

τ dan $N_{xy} = 0$ yazılır.

Eğilme momentleri için;

$$18- M = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma \, dz \cdot z$$



Şekil II.4

$$19- M_x = \frac{E \cdot h^3}{12 (1 - \mu^2)} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|$$

$$20- M_y = \frac{E \cdot h^3}{12 (1 - \mu^2)} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|$$

$$\bar{K} = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot \frac{1 - \mu}{1 - \mu}$$

$$21- M_x = \bar{K} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|$$

$$22- M_y = \bar{K} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|$$

$$23- M_{xy} = 2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{h^3}{12}$$

$$M_{xy} = \frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy} = -\bar{K} (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$24- \{\sigma\} = D \{\epsilon\} - D \{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ - \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix}$$

M_x, M_y, M_{xy} 'ler matris formunda yazılır ise

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{K} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ -\partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} - D\{\epsilon_0\} + \begin{Bmatrix} M_{ox} \\ M_{oy} \\ M_{oxy} \end{Bmatrix}$$

şeklını alır.

Bu ifadede ϵ_0 : Başlangıç deformasyonlarını

M_0 : Kesite var olan ön gerilmeleri göstermektedir.

II.3 Virtüel işler prensibi

$$A_i^* = A_d^*$$

$w_i \rightarrow$ Gerçek deplasmanlar } ise

$\epsilon_i \rightarrow$ Gerçek deformasyonlar

$\delta w_i \rightarrow$ Virtüel deplasmanları

$\delta \epsilon_i \rightarrow$ Virtüel deformasyonları göstermektedir.

Deformasyonlar ile deplasmanlar arasında $\delta \epsilon_i = L \delta w_i$

yazılabilir. Burada L operatörü

$$L = \begin{Bmatrix} \partial^2 / \partial x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 \\ \partial^2 / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \text{ dir.}$$

İç kuvvetlerin virtüel işi:

$$A_i^* = \int_F (L \delta w_i)^T D\{Lw\} dF - \int_F (L \delta w_i)^T D\{\epsilon\} dF + \int_F (L \delta w_i)^T$$

$\{\sigma_0\} dF$

$L \delta w_i \rightarrow$ virtüel deformasyonları,

$L.w_i \rightarrow$ hakiki deformasyonları göstermektedir.

Dış kuvvetlerin virtüel işi:

$$A_d^* = \int_F (\delta w)^T p dF + (\delta w)^T P + \int_{\Gamma_1} (\delta w)^T \bar{p} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)^T \bar{M} n d\Gamma_2$$

(1) (2) (3) (4)

Burada (1) nolu terim yayılı dış yüklerin,
(2) nolu terim münferit dış yüklerin,
(3) nolu terim çizgisel yayılı dış yüklerin,
(4) nolu terim çizgisel yayılı momentlerin virtüel dış işini ifade etmektedir.

II.3.1 Elastik zeminin virtüel işler teoremine etkisi

Plağın elastik zemine oturması sebebi ile yayılı yüklerin tesirine benzer etkiler doğmaktadır. Zeminin elastikliğinden hareketle yay modelinde olduğu gibi hangi kuvvetlerin meydana geleceğini ifade edebiliriz.

Bir yay modelinde $F = kx$ ($KG = KG/M * M$) dir.

Elastik zemin terimi ise $q_i = K_i \cdot w_i$ şeklinde yazılabilir.

Boyut analizi yapacak olursak

$$KG/M^2 = (KG/M^3) * M \text{ yayılı yuke benzer bir terim}$$

meydana geldiği görülür. Burada:

K_i : Zeminin i ' ince elemana etkileyen zemin yatak katsayısını

w_i : i ' inci noktadaki deplasmanı ve

q_i : i ' inci noktada meydana gelecek dış yükü ifade etmekte.

Bu bilgiler ışığında (1) nolu terimi tekrar yazacak olursak:

$$\int_F (\delta w)^T (p-q) dF = \int_F (\delta w)^T [p - K w(x,y)] dF$$

şeklını alır.

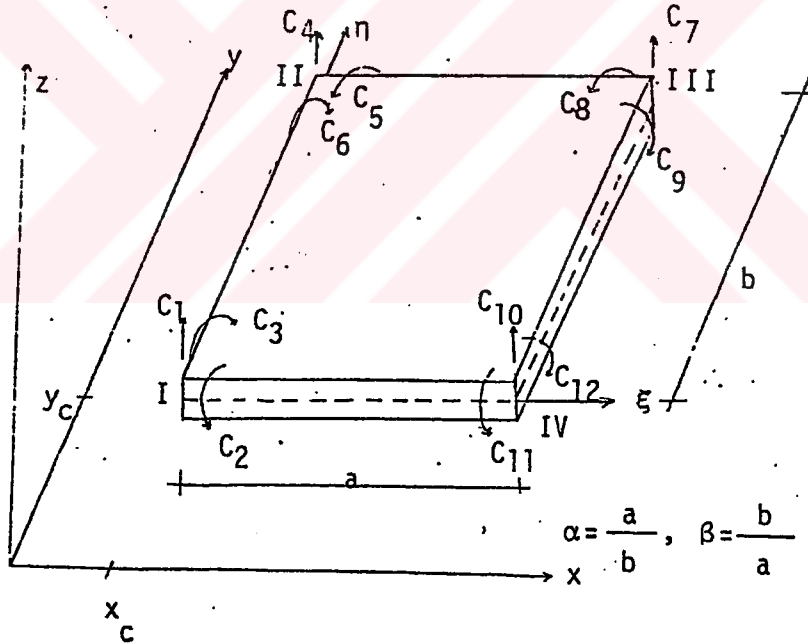
$$A_d^* - A_i^* = 0 \text{ olması şartından}$$

$$\int_F (\delta w)^T [p - Kw(x, y)] dF + (\delta w)^T \cdot P + \int_{\Gamma_1} (\delta w)^T \cdot \bar{p} d\Gamma_1 + \dots$$
$$\dots + \int_{\Gamma_2} \delta (\delta w / \delta n)^T \bar{M}_n d\Gamma_2 - \int_F (L \delta w)^T D \{Lw\} dF = 0$$

elde edilir.

II.4 Plaklarda şekil fonksiyonları

Plak geometrisi sebebi ile çalışmada dikdörtgen sonlu eleman kullanılmıştır. Şekil II.5 de dikdörtgen sonlu eleman ve seçilen bilinmeyenler görülmektedir. Tamlık şartını sağlatabilmek için C_1 süreklilikli bir eleman kullanılmıştır.



Şekil II.5

Şekil II.5 den $\xi = \frac{x - x_c}{a}$, $\eta = \frac{y - y_c}{b}$ yazılır.

Her düğüm noktasında 3 serbestlik derecesi olan bu dikdörtgen sonlu eleman 12 parametreden oluşan enterpolasyon fonksiyonu ile ifade edilebilir.

$$u^e(x, y) = C_1 N_1(x, y) + C_2 N_2(x, y) + C_3 N_3(x, y) + \dots + C_{12} N_{12}(x, y)$$

Burada $N_i(x, y)$: şekil fonksiyonlarını,

C_i : Katsayıları göstermektedir.

$N(x, y)$ şekil fonksiyonları için aşağıdaki polinom kullanılmıştır.

$$N_i(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i y_i + \alpha_5 x_i^2 + \alpha_6 y_i^2 + \alpha_7 x_i^2 y_i + \alpha_8 x_i y_i^2 + \dots + \alpha_9 x_i^3 + \alpha_{10} y_i^3 + \alpha_{11} x_i^3 y_i + \alpha_{12} x_i y_i^3$$

$$\frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y_i + 2\alpha_5 x_i + 2\alpha_7 x_i y_i + \alpha_8 y_i^2 + 3\alpha_9 x_i^2 + \dots + 3\alpha_{11} x_i^2 y_i + \alpha_{12} y_i^3$$

$$\frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_4 x_i + 2\alpha_6 y_i + \alpha_7 x_i^2 + 2\alpha_8 x_i y_i + 3\alpha_{10} y_i^2 + \dots + \alpha_{11} x_i^3 + 3\alpha_{12} x_i y_i^2$$

Elemanın I noktasında $u_e(x_1, y_1) = C_1$ 'e eşittir.

$u_e(x_1, y_1) = C_1 = C_1 N_1(x_1, y_1) + C_2 N_2(x_1, y_1) + \dots$ eşitliğin sağlanabilmesi için $N_1(x_1, y_1) = 1$ ve diğer bütün N_i ' ler sıfır olmak zorundadır. Diğer C_i ' ler içinde aynı değerlendirme yapılarak $N_i(x, y)$ şekil fonksiyonları tayin edilir.

Bu çalışmada dikdörtgen sonlu eleman için çıkartılmış şekil fonksiyonları kullanılacaktır.

Deformasyon ifadesi aşağıdaki gibi yazılırsa:

$$\{ \epsilon \} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 [N_i(x, y) C_i]}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 [N_i(x, y) C_i]}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 [N_i(x, y) C_i]}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}$$

şeklini alır. Matris formda yazacak olursak

$$\{ \epsilon \} = \left[\begin{array}{ccc} N_{1xx}'' & N_{2xx}'' & \dots \dots \dots N_{12xx}'' \\ N_{1yy}'' & N_{2yy}'' & \dots \dots \dots N_{12yy}'' \\ -2N_{1xy}'' & -2N_{2xy}'' & \dots \dots \dots -2N_{12xy}'' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{12} \end{array} \right]$$

Dikdörtgen sonlu eleman için şekil fonksiyonları:

$$N^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi\eta - (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) - (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2b \\ -\xi(1-\eta)^2(1-\eta)a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 + \xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2b \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2\eta - \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2b \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta) + \xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta) a \end{bmatrix}$$

Burada şekil fonksiyonlarının x'le y'ye ve xy'ye göre

2. türevlerinden oluşan matrisi S_e matrisi adı verilir.

$$S_e = \begin{bmatrix} N_{1xx}'' & N_{2xx}'' & \dots & N_{12xx}'' \\ N_{1yy}'' & N_{2yy}'' & \dots & N_{12yy}'' \\ -2N_{1xy}'' & -2N_{2xy}'' & \dots & -2N_{12xy}'' \end{bmatrix}$$

Kısaca

$$\{\epsilon\} = S_e\{C_e\} \quad \text{ve} \quad D S_e = G_e \quad \text{denirse}$$

$$\{\sigma\} = \{M\} = G_e\{C_e\} - D\{\epsilon_0\} + \{\sigma_0\}$$

ifadesi bulunur. Bu bilgiler ışığında problem için

Virtüel işler teoremini tekrar yazacak olursak

$$\begin{aligned} & A_d - A_i = 0 \\ & \int_F (\delta w)^T [-K w(x,y)] dF + (\delta w)^T P - \int_F (L \delta w)^T D\{LW\} dF + \dots \\ & \dots + \int_F (\delta w)^T p dF + \int_{\Gamma_1} (\delta w)^T \bar{p} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \partial(\partial w / \partial n)^T \bar{M} d\Gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(\delta w)^T = [\delta(C_i N_i)]^T - N_i^T \delta C_i$$

$$w_i = LN_i \downarrow \{C_i\}$$

$$\{L w_i\} = LN_i C_i = \{\varepsilon_i\} = s_e \{C_i\}$$

$$\{L \delta w_i\} = \{\delta \varepsilon_i\} = s_e \{\delta C_e\} \text{ terimleri } A_i^* - A_d^* = 0$$

ifadesinde yerine konursa:

$$\{\delta C_e\}^T \left| \int_{F_e} s_e^T D s_e \{C_e\} dF_e + K \int_{F_e} N^T L N \downarrow \{C_e\} dF_e - \dots \right.$$

$$\dots - \int_{F_e} s_e^T D \{\varepsilon_o\} dF_e + \int_{F_e} s_e^T \{\sigma_o\} dF_e - \int_{F_e} N^T p dF_e - \dots$$

$$\dots - \int_{\Gamma_1} N^T \bar{p} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \partial / \partial \eta (N^T) \bar{M} d\Gamma_2 - \{p\} \left| = 0 \right.$$

$K_e \{C_e\} + f_e = 0$ denklemi elde edilir. Burada

K_e : Eleman rijitlik matrisi

C_e : Elemanda düğüm noktası deplasmanları

f_e : Eleman düğüm etki vektörüdür.

$$K_e = \left| \int_{F_e} s_e^T G_e dF_e + K \int_{F_e} N^T L N \downarrow dF_e \right| \{C_e\}$$

$$\{f_e\} = - \int_{F_e} s_e^T D \{\varepsilon_o\} dF_e + \int_{F_e} s_e^T \{\sigma_o\} dF_e - \int_{F_e} N^T p dF_e -$$

$$\dots - \int_{\Gamma_1} N^T \bar{p} d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \partial / \partial \eta (N^T) \bar{M} d\Gamma_2 - \{p\}$$

$$\int_{F_e} s_e^T G_e dF_e \text{ teriminin sonuçları "THEORY OF MATRIX$$

STRUCTURAL ANALYSIS" kitabından alınmıştır.

$$K \int_{F_e} N^T L N dF_e \text{ ifadesinden şekil fonksiyonlarının}$$

transpozesi ile satır matrisi çarpılmış ve yüzey integral-

leri alınıp "K" yatak katsayısı ile çarpılarak zemin etkisinden doğan 12x12 boyutunda Zemin Etki Matrisi elde edilmiştir.

$$K \int_{F_e} N^T L N J dF_e \text{ ifadesini lokal koordinatlara çevirirsek:}$$

$$\xi = (x-x_c)/a, \quad \eta = (y-y_c)/b \text{ idi.}$$

$$K \int_{F_e} N^T L N J dF_e = K \int_0^1 \int_0^1 N^T L N J |J| d\xi d\eta \text{ yazılabilir.}$$

bilir.

$$|J| = \left| \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} \right| \text{ x,y nini } \xi, \eta \text{ ya göre fonksiyonel determinanınin mutlak deęeridir.}$$

yonel determinanınin mutlak deęeridir.

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = |a.b|$$

$$K \int_{F_e} N^T L N J dx dy = K a b \int_0^1 \int_0^1 N^T L N J d\xi d\eta \text{ bulunur.}$$

Yukarıda bulunan ifade sonlu eleman üzerinde integre edilir ve elde edilecek 12x12 boyutundaki matris ile Eleman Rijidlik Matrisi toplanarak Elastik Zemine Oturan Radye Plaklar için Eleman Rijitlik Matrisi bulunmuş olur.

Elastik zeminin etkisini veren integral ifadesi açık şekilde Tablo II.1 de verilmiştir. Elastik zeminin katkısı zeminin yatak katsayısına ve elemanın oturma yüzeyine bağlı olarak değişmektedir. Yatak katsayısı ve elemanın oturma yüzeyi büyüdükçe Elastik Zeminin rijitliğe etkisi artmaktadır. Tablo II.1 aşağıda verilen şemadaki gibi düzenlenmiştir.

1		.		.	
.	M	.	I-I	.	Simetrik
.		.		.	
6	
7		.		.	
.		.		.	
.	M	.	II-I	M	II-II
12		.		.	
	1.....6.7.....12				

Eleman rijitlik matrisi ile zemin etkisinden doğan rijitlik matrisinin boyut analizi yapılırsa;

$$\int_{F_e} |s_e|^T D |s_e| dF_e = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{1}{a \cdot b} |E R|$$

$$= \frac{(\text{ton/m}^2) (\text{m}^3)}{\text{m}^2} |E R|$$

|Eleman Rijitlik Matrisi| = ton/m . |E R|

$$K \cdot \int_{F_e} N^T LN dF_e = K \cdot a \cdot b |E R|$$

$$= |\text{ton/m}^3| |\text{m}^2| |E R|$$

|Zemin Eleman Rijitlik Matrisi| = ton/m . |E R| olduğu görülür.

	1	2	3	4	5	6
1	$N_1 N_1 d\xi d\eta$					
2	$N_1 N_2 d\xi d\eta$	$N_2 N_2 d\xi d\eta$				
3	$N_1 N_3 d\xi d\eta$	$N_2 N_3 d\xi d\eta$	$N_3 N_3 d\xi d\eta$			
4	$N_1 N_4 d\xi d\eta$	$N_2 N_4 d\xi d\eta$	$N_3 N_4 d\xi d\eta$	$N_4 N_4 d\xi d\eta$		
5	$N_1 N_5 d\xi d\eta$	$N_2 N_5 d\xi d\eta$	$N_3 N_5 d\xi d\eta$	$N_4 N_5 d\xi d\eta$	$N_5 N_5 d\xi d\eta$	
6	$N_1 N_6 d\xi d\eta$	$N_2 N_6 d\xi d\eta$	$N_3 N_6 d\xi d\eta$	$N_4 N_6 d\xi d\eta$	$N_5 N_6 d\xi d\eta$	$N_6 N_6 d\xi d\eta$

Tablo-II.1 Her terim $\int_0^1 \int_0^1$ kadar integre edilerek ve k.a.b ile çarpılarak Elastik zemine oturan plaklar için Eleman Zemin Etki Matrisi bulunur. M.I.I.

	1	2	3	4	5	6
7	$N_1 N_7 d\xi dn$	$N_2 N_7 d\xi dn$	$N_3 N_7 d\xi dn$	$N_4 N_7 d\xi dn$	$N_5 N_7 d\xi dn$	$N_6 N_7 d\xi dn$
8	$N_2 N_8 d\xi dn$	$N_2 N_8 d\xi dn$	$N_3 N_8 d\xi dn$	$N_4 N_8 d\xi dn$	$N_5 N_8 d\xi dn$	$N_6 N_8 d\xi dn$
9	$N_1 N_9 d\xi dn$	$N_2 N_9 d\xi dn$	$N_3 N_9 d\xi dn$	$N_4 N_9 d\xi dn$	$N_5 N_9 d\xi dn$	$N_6 N_9 d\xi dn$
10	$N_1 N_{10} d\xi dn$	$N_2 N_{10} d\xi dn$	$N_3 N_{10} d\xi dn$	$N_4 N_{10} d\xi dn$	$N_5 N_{10} d\xi dn$	$N_6 N_{10} d\xi dn$
11	$N_1 N_{11} d\xi dn$	$N_2 N_{11} d\xi dn$	$N_3 N_{11} d\xi dn$	$N_4 N_{11} d\xi dn$	$N_5 N_{11} d\xi dn$	$N_6 N_{11} d\xi dn$
12	$N_1 N_{12} d\xi dn$	$N_2 N_{12} d\xi dn$	$N_3 N_{12} d\xi dn$	$N_4 N_{12} d\xi dn$	$N_5 N_{12} d\xi dn$	$N_6 N_{12} d\xi dn$

Tablo-II. Her terim $\int_0^1 \int_0^1$ kadar integrale edilerek ve K.a.b ile çarpılarak

Elastik zemine oturan plaklar için Eleman Zemin Etki Matrisi bulunur

M.II.I.

	7	8	9	10	11	12
7	$N_7 N_7 d\xi d\eta$					
8	$N_7 N_8 d\xi d\eta$	$N_8 N_8 d\xi d\eta$				
9	$N_7 N_9 d\xi d\eta$	$N_8 N_9 d\xi d\eta$	$N_9 N_9 d\xi d\eta$			
10	$N_7 N_{10} d\xi d\eta$	$N_8 N_{10} d\xi d\eta$	$N_9 N_{10} d\xi d\eta$	$N_{10} N_{10} d\xi d\eta$		
11	$N_7 N_{11} d\xi d\eta$	$N_8 N_{11} d\xi d\eta$	$N_9 N_{11} d\xi d\eta$	$N_{10} N_{11} d\xi d\eta$	$N_{11} N_{11} d\xi d\eta$	
12	$N_7 N_{12} d\xi d\eta$	$N_8 N_{12} d\xi d\eta$	$N_9 N_{12} d\xi d\eta$	$N_{10} N_{12} d\xi d\eta$	$N_{11} N_{12} d\xi d\eta$	$N_{12} N_{12} d\xi d\eta$

Tablo-III. Her terim $\int \int$ kadar integre edilerek ve K.a.b ile çarpılarak Elastik

zemine oturan plaklar için Eleman Zemin Etki Matrisi bulunur. M.II.II.

1	$(1-2\xi)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$(1-\xi)(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$1-6(1-\xi)-6\eta(1-\eta) \frac{2z}{ab}$
2	0	$(1-\xi)(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$(1-4\eta+3\eta^2) \frac{2z}{a}$
3	$-(2-3\xi)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	0	$(1-4\xi+3\xi^2) \frac{2z}{b}$
4	$(1-2\xi)\eta \frac{6z}{a^2}$	$-(1-\xi)(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$-1+6\xi(1-\xi)$ $+6\eta(1-\eta) \frac{2z}{ab}$
5	0	$(1-\xi)(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-\eta(2-3\eta) \frac{2z}{a}$
6	$-(2-3\xi) \frac{2z}{a}$	0	$(1-4\xi+3\xi^2) \frac{2z}{b}$
7	$-(1-2\xi)\eta \frac{6z}{a^2}$	$-\xi(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$1-6\xi(1-\xi)$ $-6\eta(1-\eta) \frac{2z}{ab}$
8	0	$\xi(1-3\eta) \frac{2z}{b}$	$\eta(2-3\eta) \frac{2z}{a}$
9	$-(1-3\xi)\eta \frac{2z}{a}$	0	$-\xi(2-3\xi) \frac{2z}{b}$
10	$-(1-2\xi)(1-\eta) \frac{6z}{a^2}$	$\xi(1-2\eta) \frac{6z}{b^2}$	$-1+6\xi(1-\xi)$ $+6\eta(1-\eta) \frac{2z}{ab}$
11	0	$\xi(2-3\eta) \frac{2z}{b}$	$-(1-4\eta+3\eta^2) \frac{2z}{a}$
12	$-(1-3\xi)(1-\eta) \frac{2z}{a}$	0	$\xi(2-3\xi) \frac{2z}{b}$

$S_e^T =$

1	$4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4v)$					
2	$ 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4v) b$	$ \frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1-v) b^2$				
3	$- 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4v) a$	$-uab$	$ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-v) a^2$			
4	$2(\beta^2 - 2\beta^{-2}) - \frac{1}{5}(14-4v)$	$- 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1v) b$	$ -\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4v) a$	$4(\beta^2 + \beta^{-2}) + \frac{1}{5}(14-4v)$		
5	$ 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-v) b$	$ \frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1-v) b^2$	0	$- 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4v) b$	$ \frac{4}{3}\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1-v) b^2$	
6	$- \beta^2 + \frac{1}{5}(1+4v) a$	0	$ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1-v) a^2$	$- 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4v) a$	uab	$ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-v) a^2$
1		2	3	4	5	6

Tablo-II.2. Dikdörtgen sonlu eleman rijitlik matrisi. Her terim

$|E h^3/12 \cdot (1-v^2) ab|$ ile çarpılacak $k_{I,1}$

7	$-2(\beta^2 + \beta^{-2})$ $+\frac{1}{5}(14-4u)$	$ \beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-u) b$	$ \beta^2 - \frac{1}{5}(1-u) a$	$-2(2\beta^2 - \beta^{-2})$ $-\frac{1}{5}(14-4u)$	$ \beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4u) b$	$ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-u) a$
8	$ \beta^{-2} - \frac{1}{5}(1-u) b$	$ \frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1-u) b^2$	0	$ \beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4u) b$	$ \frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1-u) b^2$	0
9	$ \beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-u) a$	0	$ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-u)a^2$	$- 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-u) a$	0	$ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-u) a^2$
10	$-2(2\beta^2 - \beta^{-2})$ $-\frac{1}{5}(14-4u)$	$ \beta^{-2} - \frac{1}{5}(1+4u) b$	$ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-u) a$	$-(\beta^2 + \beta^{-2})$ $+\frac{1}{5}(14-4u)$	$ \beta^{-2} - \frac{1}{5}(1-u) b$	$ \beta^2 - \frac{1}{5}(1-u) a$
11	$ \beta^{-2} - \frac{1}{5}(1+4u) b$	$ \frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{4}{15}(1-u) b^2$	0	$ \beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-u) b$	$ \frac{1}{3}\beta^{-2} + \frac{1}{15}(1-u) b^2$	0
12	$- 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1-u) a$	0	$ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{1}{15}(1-u) a^2$	$ \beta^2 + \frac{1}{5}(1-u) a$	0	$ \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{15}(1-u) a^2$
	1	2	3	4	5	6

Tablo-II.2 Dikdörtgen sonlu eleman Eleman rijitlik matrisi. Her terim

$|E h^3/12(1-u^2)ab$ ile çarpılacak $k_{II,I}$

7	$4(\beta^2 + \beta^{-2})$ $+\frac{1}{5}(14-4\nu)$								
8	$- 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4\nu) b$	$ \frac{4\beta^{-2} + \frac{4}{15}(1-\nu) b^2$	$-uab$						
9	$ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) a$	$ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) a^2$		$4(\beta^2 + \beta^{-2})$ $+\frac{1}{5}(14-4\nu)$					
10	$2(\beta^2 - 2\beta^{-2})$ $-\frac{1}{5}(14-4\nu)$	$ 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-\nu) b$	$ \beta^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) a$						
11	$- 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1-\nu) b$	$ \frac{2}{3}\beta^{-2} - \frac{1}{15}(1-\nu) b^2$	0	$ 2\beta^{-2} + \frac{1}{5}(1+4\nu) b$	$ \frac{4}{3}\beta^{-2} \cdot \frac{4}{15}(1-\nu) b^2$				
12	$ \beta^2 - \frac{1}{5}(1+4\nu) a$	0	$ \frac{2}{3}\beta^2 - \frac{4}{15}(1\nu) a^2$	$ 2\beta^2 + \frac{1}{5}(1+4\nu) a$	uab	$ \frac{4}{3}\beta^2 + \frac{4}{15}(1-\nu) a^2$			
	7	8	9	10	11	12			

Tablo-III.2 Dikdörtgen sonlu eleman rijitlik matrisi. Her terim

$|E h^3/12(1-\nu^2)$ ab ile çarpılacak k_{II,II}

II.5 Eleman Dügüm Etki Vektörlerinin Hesabı

II.5.1 Düzgün yayılı yükler için eleman dügüm etki vektörü:

$$\{f_{ed}\} = - \int_{F_e} N^T p dF_e \quad dF_e = a.b.d\xi d\eta$$

$$\{f_{ed}\} = - a.b.p \int_0^1 \int_0^1 N^T d\xi d\eta$$

$$-\{f_{ed}\} = a.b.p \int_0^1 \int_0^1 \begin{bmatrix} 1-\xi\eta-(3-2\xi)\xi^2(1-\eta)-(1-\eta)(3-2\eta)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2b \\ -\xi(1-\eta)^2(1-\eta)a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2+\xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2b \\ -\xi(1-\xi)^2.\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2\eta-\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2 b \\ (1-\xi)\xi^2 \eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta)+\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta) a \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

integralleri alınırsa;

$$\{f_{ed}\} = a.b.p(-1) \begin{bmatrix} 1/4 \\ b/24 \\ -a/24 \\ 1/4 \\ -b/24 \\ -a/24 \\ 1/4 \\ -b/24 \\ a/24 \\ 1/4 \\ b/24 \\ a/24 \end{bmatrix}$$

Düzgün yayılı yük için Eleman dügüm etki vektörü elde edilir. Burada a,b elemanın boyutlarını, p ise eleman üzerindeki düzgün yayılı yükü göstermektedir.

II.5.2 Lineer yayılı yükler için eleman düğüm etki vektörü:

$$p = q \cdot x \quad x = a\xi + \bar{x}$$

$$p = q \cdot (a\xi + \bar{x})$$

$$\{f_{e1}\} = - \int_{F_e} N^T q x dF_e$$

$$\{f_{e1}\} = - \int_0^1 \int_0^1 N^T q \cdot (a\xi + \bar{x}) a \cdot b \cdot d\xi d\eta$$

$$-\{f_{e1}\} = a^2 b q \int_0^1 \int_0^1 N^T \xi d\xi d\eta + a \cdot b \cdot q \int_0^1 \int_0^1 N^T \bar{x} d\xi d\eta \quad (1) \quad (2)$$

(2) nolu terimdeki \bar{x} lineer yayılı yükün artış yönünde

$$\bar{x}_i = \sum_{j=0}^{i-1} a_j \quad \text{şeklindedir. Bu ifade açık şekilde yazılırsa;}$$

Birinci sıradaki elemanlar için $\bar{x}_1 = 0$

İkinci sıradaki elemanlar için $\bar{x}_2 = 0 + a_1$

n'inci sıradaki elemanlar için $\bar{x}_n = 0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$

e eşittir. Şayet elemanların x eksenine paralel boyları aynı ise $\bar{x}_i = (i-1) \cdot a$ olur.

(2) nolu terim $a \cdot b \cdot q \left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \right) \int_0^1 \int_0^1 N^T d\xi d\eta$ şeklinde yazılırsa;

$$\{f_{e12}\} = a \cdot b \cdot q \left(\sum_{j=0}^{i-1} a_j \right) (-1) \left\{ \begin{array}{c} 1/4 \\ b/24 \\ -a/24 \\ 1/4 \\ -b/24 \\ -a/24 \\ 1/4 \\ -b/24 \\ a/24 \\ 1/4 \\ b/24 \\ a/24 \end{array} \right\}$$

elde edilir.

(1) nolu terim incelenirse;

$$\{f_{e11}\} = a^2 b q \int_0^1 \int_0^1 (-1) \begin{bmatrix} 1 - \xi \eta - (3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta) - (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2\xi \\ (1 - \xi)\eta(1 - \eta)^2 \xi b \\ -\xi(1 - \eta)^2(1 - \eta)\xi a \\ (1 - \xi)(3 - 2\eta)\eta^2 + \xi(1 - \xi)(1 - 2\xi)\eta\xi \\ -(1 - \xi)(1 - \eta)\eta^2 \xi b \\ -\xi(1 - \xi)^2 \eta \xi a \\ (3 - 2\xi)\xi^2 \eta - \xi \eta(1 - \eta)(1 - 2\eta)\xi \\ -\xi(1 - \eta)\eta^2 \xi b \\ (1 - \xi)\xi^2 \eta \xi a \\ (3 - 2\xi)\xi^2(1 - \eta) + \xi \eta(1 - \eta)(1 - 2\eta)\xi \\ \xi \eta(1 - \eta)^2 \xi b \\ (1 - \xi)\xi^2(1 - \eta)\xi a \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

elde edilir. Bütün bu integraller alındığında;

$$\{f_{e11}\} = -a^2 b q \begin{bmatrix} 3/40 \\ b/72 \\ -a/60 \\ 3/40 \\ -b/72 \\ -a/60 \\ 7/40 \\ -b/36 \\ a/40 \\ 7/40 \\ b/36 \\ a/40 \end{bmatrix}$$

sonucu elde edilir.

Lineer yayılı yükler için eleman düğüm etki vektörü;

$$\{f_{e1}\} = \{f_{e12}\} + \{f_{e11}\}$$

II.6 Sınır ve mesnet şartları

Genel olarak nerede bir mesnet var ise oradaki bilinmeyen sıfır kabul ederiz. ayrıca plakta simetrik durum söz konusu ise simetri eksenindeki dönmelerin sıfır olması şartlarından sınır şartlarını yazabiliriz.

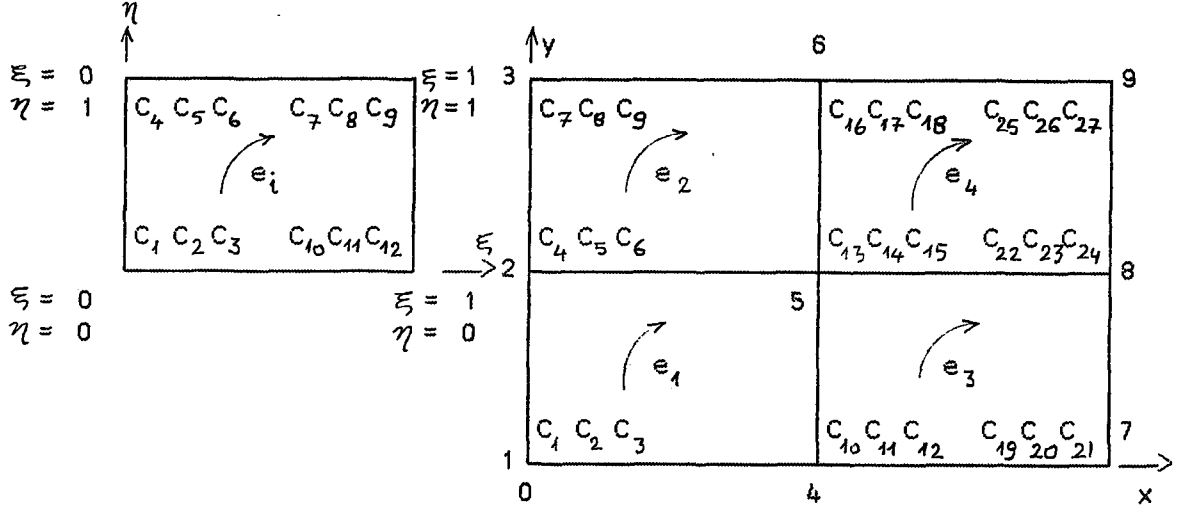
Probleme plak elastik zemine oturduğundan mesnet şartlarının varlığı otomatikman ortadan kalkmaktadır. Çünkü zeminin elastikiyetinden dolayı plağın her noktasında deplasmanlar meydana gelmektedir.

Plak x ve y eksenlerine göre simetrik olduğunda simetrik eksenlerde dönmeler (0) dır.

Sınır şartlarının sıfır olduğu terim $C_i = 0$ ise k_{ii} yerine 1 yazılır, sonra i' inci satır ve sütunun bütün değerleri yerine sıfır yazılır. Ve $f_i = 0$ yazılarak sınır şartı ifade edilmiş olur.

Elastik çöken ve dönen mesnetler pratik olarak ;
i ——— noktasında bir elastik dönen veya çöken mesnet varsa
i ——— k_{ii} ——— $k_{ii} + k$ şeklinde ifade edilir. Burada:
 k_{ii} = Rijitlik matrisinin (i,i) terimini
 k = yay katsayısını göstermektedir.

II.7 Elemandan sisteme geçiş:



Eleman DÜğüm Değeri		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Eleman No	Sistem DÜğüm Değeri	1	2	3	4	5	6	13	14	15	10	11	12
1		1	2	3	4	5	6	13	14	15	10	11	12
2		4	5	6	7	8	9	16	17	18	13	14	15
3		10	11	12	13	14	15	22	23	24	19	20	21
4		13	14	15	16	17	18	25	26	27	22	23	24

Üstteki şekilde örnek olarak sistem 4 adet sonlu elemana ayrılmış ve eleman düğüm değerleri ile sistem düğüm değerleri gösterilmiştir. Altındaki tablo ise bu değerleri topluca göstermektedir. Tabloda görülen sırada eleman düğüm değerlerinin birli ve ikili kombinezonları, sistemdeki her elemanın sistem düğüm değerlerinin birli ve ikili kombinezonları ile eşleştirilirse; birli kombinezonlardan sistem düğüm etki vektörü, ikili kombinezonlardan da sistem rijitlik matrisi oluşturulur.

Örnek olarak sistem rijitlik matrisindeki $K_s(13,14)$, sisten düğüm etki vektöründeki $f_s(14)$ terimlerini oluşturalım:

$$K_S(13,14) = K_{e1}(7,8) + K_{e2}(10,11) + K_{e3}(4,5) + K_{e4}(1,2)$$

$$f_S(14) = f_{e1}(8) + f_{e2}(11) + f_{e3}(5) + f_{e4}(2)$$

Böylece tüm sistem taranır ve elde edilecek K_S ve f_S 'den

$$K_S\{C\} + f_S = 0$$

lineer denklem sistemi kurulur. Bu denklem sistemi sınır ve mesnet şartları yazılarak bilinen bir yolla çözümlürse (Gauss eliminasyon metodu v.s.) düğüm noktası deplasmanları bulunur.

Gerilmelerin elde edilmesi:

Her elemanın köşe koordinatları S_e matrisinde yerlerine konur ve D Elastisite matrisi ile çarpılırsa 4 adet G_e gerilme matrisi elde edilir.

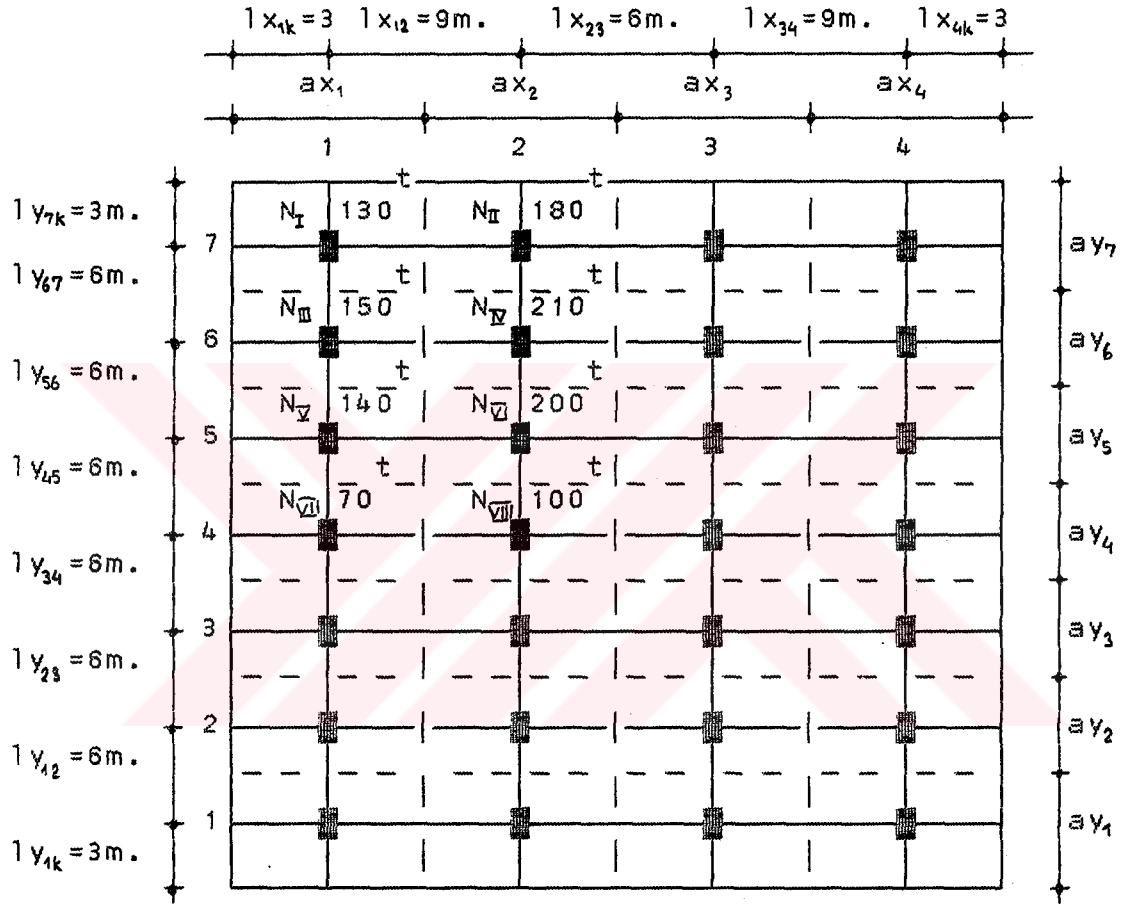
Her elemanın düğüm noktası deplasmanları o elemana ait G_e gerilme matrisleri ile çarpılarak

$$\{\sigma\} = G_e\{C_e\}$$

köşe gerilmeleri bulunur. Aynı düğümde birleşen eleman köşelerindeki gerilmelerin aritmetik ortalaması alınarak sistem düğüm noktasının gerilme bileşenleri bulunur.

III. Uygulama:

III.1 Tekil yükler altındaki kirişsiz temel plağının nümerik metodla çözümü:



a) Etki alanlarındaki fiktif taban basınçları:

Yük etki alanı boyutları:

$$ax_1 = ax_2 = ax_3 = ax_4 = 7.5m.$$

$$ay_1 = ay_2 = ay_3 = ay_4 = 6.0m.$$

Köşe kolonlar için fiktif net taban basınçları:

$$G'_I = \frac{N_I}{ax_1 \cdot ay_1} = \frac{130}{7.5 \cdot 6.0} = 2.88 \text{ t/m}^2$$

Kenar kolonlar için fiktif net taban basınçları:

$$\sigma'_{II} = \frac{N_{II}}{ax_2 \cdot ay_1} = \frac{180}{7.5 \cdot 6.0} = 4.0 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma'_{III} = \frac{N_{III}}{ax_1 \cdot ay_2} = \frac{150}{7.5 \cdot 6.0} = 3.33 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma'_{V} = \frac{N_{V}}{ax_1 \cdot ay_3} = \frac{140}{7.5 \cdot 6.0} = 3.11 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma'_{VII} = \frac{N_{VII}}{ax_1 \cdot ay_4} = \frac{70}{7.5 \cdot 6.0} = 1.55 \text{ t/m}^2$$

Ara kolonlar için fiktif net taban basınçları:

$$\sigma'_{IV} = \frac{N_{IV}}{ax_2 \cdot ay_2} = \frac{210}{7.5 \cdot 6.0} = 4.66 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma'_{VI} = \frac{N_{VI}}{ax_3 \cdot ay_3} = \frac{200}{7.5 \cdot 6.0} = 4.44 \text{ t/m}^2$$

$$\sigma'_{VIII} = \frac{N_{VIII}}{ax_2 \cdot ay_4} = \frac{100}{7.5 \cdot 6.0} = 2.22 \text{ t/m}^2$$

b) Temel plağı eğilme momentlerinin hesabı:

Eğilme momentlerinin bulunmasında temel plağı x ve y yönünde plak şeritlerine ayrılarak gözülebilir.

1) x yönünde ara plak şeritleri:

$$N_{x1} = N_{x4} = 130 \text{ t.}, \quad N_{x2} = N_{x3} = 180 \text{ t.}$$

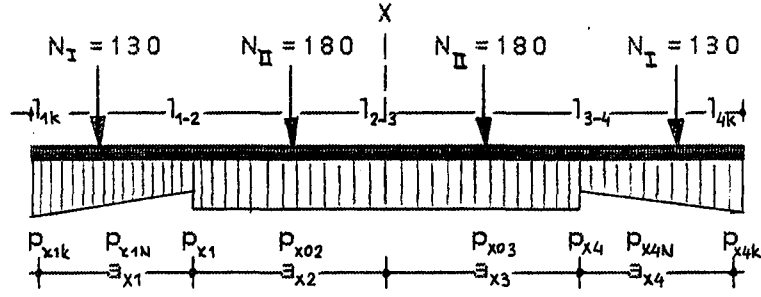
$$ax_1 = ax_2 = ax_3 = ax_4 = 7.5 \text{ m.}$$

$$\text{Çıkma uzunlukları; } l_{x1k} = 3\text{m.} < l_{1,2} / 2.5 = 9 / 2.5 = 3.6\text{m.}$$

koşulu sağlandığından, fiktif taban basıncı kenar bölgelerde dıştaki değeri içtekinin iki katı olan standart yamuk olarak alınacaktır.

Fiktif taban basınçları:

$$p_{x1} = p_{x4} = \frac{2}{3} \frac{N_{x1}}{ax_1} = \frac{2}{3} \frac{130}{7.5} = 11.55 \text{ t/m}$$



Şekil 1.

$$P_{x1k} = P_{x4k} = 2p_{x1} = 23.11 \text{ t/m}$$

$$P_{x1N} = P_{x4N} = (1 + l_{x12} / 2a_{x1}) * p_{x1} = (1 + 9.0 / 2 * 7.5) * 11.55 = 18.48 \text{ t/m}$$

$$P_{x02} = P_{x03} = N_{x2} / a_{x2} = 180 / 7.5 = 24 \text{ t/m} = p_{x23}$$

$$P_{x12} = P_{x34} = (p_{x1N} + p_{x1} + 2p_{x02}) / 4 = (18.48 + 11.55 + 2 * 24) / 4 = 19.51 \text{ t/m}$$

Mesnet momentleri:

$$M_{x1} = M_{x4} = \left(10 + \frac{l_{x12}}{a_{x1}}\right) \frac{p_{x1} \cdot l_{x1k}^2}{12} = \left(10 + \frac{9}{7.5}\right) \frac{11.55 * 3^2}{12} = 97.02 \text{ tm}$$

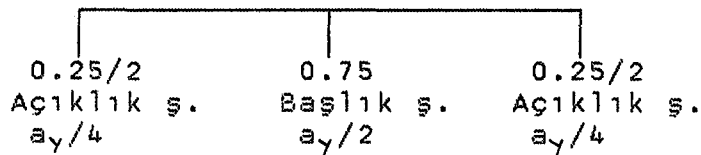
$$M_{x02} = M_{x03} = \frac{N_{x2} a_{x2}}{8} = \frac{180 * 7.5}{8} = 168.75 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 2/3 M_{x02} = 2/3 * 168.75 = 112.5 \text{ tm}$$

Örneğimizde x yönündeki $a_{y2} = 6\text{m}$ genişlikli ara plak şeridi

momentleri başlık şeritlerine aşağıdaki oranlarda dağıtılır:

Mesnet momentleri için



Eğilme momentleri TS 500'e göre $a_y/2$ genişliğinde başlık

(kolon) ve $a_y/2$ genişliğinde açıklık (orta) şeritlerine (a_y

etki genişliğinin küçük olanıdır) üsteki oranlarda dağıtılır

Başlık şeridi için: $a_{y2} / 2 = 3.0\text{m}$ genişliğinde

Mesnet momentleri:

$$M_{x1} = M_{x4} = 0.75 * 97.02 / 3.0 = 24.25 \text{ tm}$$

$$M_{x02} = M_{x03} = 0.75 * 112.5 / 3.0 = 28.12 \text{ tm}$$

$$N_{x1} = N_{x4} = 150 \text{ t.} \quad , \quad N_{x2} = N_{x3} = 210 \text{ t.}$$

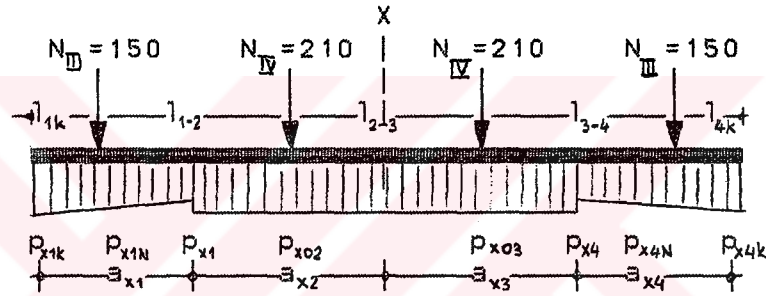
$$a_{x1} = a_{x2} = a_{x3} = a_{x4} = 7.5 \text{ m.}$$

$$\text{Çıkma uzunlukları; } l_{x1k} = 3\text{m.} < l_{1,2}/2.5 = 9/2.5 = 3.6\text{m.}$$

koşulu sağlandığından, fiktif taban basıncı kenar bölgelerde dıştaki değeri içtekinin iki katı olan standart yamuk olarak alınacaktır.

Fiktif taban basınçları:

$$P_{x1} = P_{x4} = \frac{2}{3} \frac{N_{x1}}{a_{x1}} = \frac{2}{3} \frac{150}{7.5} = 13.33 \text{ t/m}$$



Şekil 2.

$$P_{x1k} = P_{x4k} = 2P_{x1} = 26.66 \text{ t/m}$$

$$P_{x1N} = P_{x4N} = (1 + l_{x1-2}/2a_{x1}) * P_{x1} = (1 + 9.0/2*7.5) * 13.33 = 21.33 \text{ t/m}$$

$$P_{x02} = P_{x03} = N_{x2} / a_{x2} = 210/7.5 = 28 \text{ t/m} = P_{x23}$$

$$P_{x1-2} = P_{x3-4} = (P_{x1N} + P_{x1} + 2P_{x02}) / 4 = (21.33 + 13.33 + 2*28) / 4 = 22.66 \text{ t/m}$$

Mesnet momentleri:

$$M_{x1} = M_{x4} = \left(10 + \frac{l_{x1-2}}{a_{x1}}\right) \frac{P_{x1} \cdot l_{x1k}^2}{12} = \left(10 + \frac{9}{7.5}\right) \frac{13.33 \cdot 3^2}{12} = 111.97 \text{ tm}$$

$$M_{x02} = M_{x03} = \frac{N_{x2} a_{x2}}{8} = \frac{210 \cdot 7.5}{8} = 196.87 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 2/3 M_{x02} = 2/3 * 196.87 = 131.25 \text{ tm}$$

Başlık şeridi için mesnet momentleri: $a_{y2}/2 = 3.0\text{m}$ genişliğinde

$$M_{x1} = M_{x4} = 0.75 * 111.97 / 3.0 = 27.99 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 0.75 * 131.25 / 3.0 = 32.81 \text{ tm}$$

$$N_{x1} = N_{x4} = 140 \text{ t.}, \quad N_{x2} = N_{x3} = 200 \text{ t.}$$

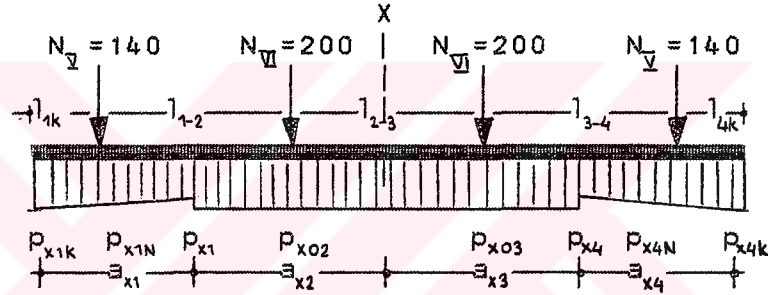
$$a_{x1} = a_{x2} = a_{x3} = a_{x4} = 7.5 \text{ m.}$$

$$\text{Çıkma uzunlukları; } l_{x1k} = 3\text{m.} < l_{1,2} / 2.5 = 9 / 2.5 = 3.6\text{m.}$$

koşulu sağlandığından, fiktif taban basıncı kenar bölgelerde dıştaki değeri içtekinin iki katı olan standart yamuk olarak alınacaktır.

Fiktif taban basınçları:

$$p_{x1} = p_{x4} = \frac{2}{3} \frac{N_{x1}}{a_{x1}} = \frac{2}{3} \frac{140}{7.5} = 12.44 \text{ t/m}$$



Şekil 3.

$$p_{x1k} = p_{x4k} = 2p_{x1} = 24.88 \text{ t/m}$$

$$p_{x1N} = p_{x4N} = (1 + l_{x1-2} / 2a_{x1}) * p_{x1} = (1 + 9.0 / 2 * 7.5) * 12.44 = 19.90 \text{ t/m}$$

$$p_{x02} = p_{x03} = N_{x2} / a_{x2} = 200 / 7.5 = 26.66 \text{ t/m} = p_{x23}$$

$$p_{x1-2} = p_{x3-4} = (p_{x1N} + p_{x1} + 2p_{x02}) / 4 = (19.9 + 12.44 + 2 * 26.66) / 4 = 21.4 \text{ t/m}$$

Mesnet momentleri:

$$M_{x1} = M_{x4} = \left(10 + \frac{l_{x1-2}}{a_{x1}}\right) \frac{p_{x1} \cdot l_{x1k}^2}{12} = \left(10 + \frac{9}{7.5}\right) \frac{12.44 * 3^2}{12} = 104.49 \text{ tm}$$

$$M_{x02} = M_{x03} = \frac{N_{x2} a_{x2}}{8} = \frac{200 * 7.5}{8} = 187.5 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 2/3 M_{x02} = 2/3 * 187.5 = 125 \text{ tm}$$

Başlık seridi için mesnet momentleri: $a_{y2} / 2 = 3 \text{ m}$ genişliğinde

$$M_{x1} = M_{x4} = 0.75 * 104.79 / 3.0 = 26.12 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 0.75 * 125 / 3.0 = 31.25 \text{ tm}$$

$$N_{x1} = N_{x4} = 70 \text{ t.} \quad , \quad N_{x2} = N_{x3} = 100 \text{ t.}$$

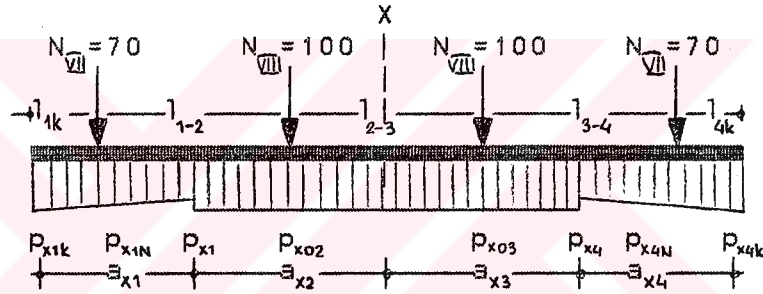
$$a_{x1} = a_{x2} = a_{x3} = a_{x4} = 7.5 \text{ m.}$$

$$\text{Çıkma uzunlukları; } l_{x1k} = 3\text{m.} < l_{1,2} / 2.5 = 9 / 2.5 = 3.6\text{m.}$$

koşulu sağlandığından, fiktif taban basıncı kenar bölgelerde dıştaki değeri içtekinin iki katı olan standart yamuk olarak alınacaktır.

Fiktif taban basınçları:

$$p_{x1} = p_{x4} = \frac{2}{3} \frac{N_{x1}}{a_{x1}} = \frac{2}{3} \frac{70}{7.5} = 6.22 \text{ t/m}$$



Şekil 4.

$$P_{x1k} = P_{x4k} = 2p_{x1} = 12.44 \text{ t/m}$$

$$P_{x1N} = P_{x4N} = (1 + l_{x1-2} / 2a_{x1}) * p_{x1} = (1 + 9.0 / 2 * 7.5) * 6.22 = 9.95 \text{ t/m}$$

$$P_{x02} = P_{x03} = N_{x2} / a_{x2} = 100 / 7.5 = 13.33 \text{ t/m} = P_{x23}$$

$$P_{x1-2} = P_{x3-4} = (P_{x1N} + P_{x1} + 2P_{x02}) / 4 = (9.95 + 6.22 + 2 * 13.33) / 4 = 10.71 \text{ t/m}$$

Mesnet momentleri:

$$M_{x1} = M_{x4} = \left(10 + \frac{l_{x12}}{a_{x1}}\right) \frac{P_{x1} \cdot l_{x1k}^2}{12} = \left(10 + \frac{9}{7.5}\right) \frac{6.22 * 3^2}{12} = 52.25 \text{ tm}$$

$$M_{x02} = M_{x03} = \frac{N_{x2} a_{x2}}{8} = \frac{100 * 7.5}{8} = 93.75 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 2/3 M_{x02} = 2/3 * 93.75 = 62.5 \text{ tm}$$

Başlık seridi için mesnet momentleri: $a_{y2} / 2 = 3.0\text{m}$ genişliğinde

$$M_{x1} = M_{x4} = 0.75 * 52.25 / 3.0 = 13.06 \text{ tm}$$

$$M_{x2} = M_{x3} = 0.75 * 62.5 / 3.0 = 15.63 \text{ tm}$$

Dengelenmiş mesnet momentleri:

$$M_{\gamma_2} = M_{\gamma_6} = 2/3 * M_{\gamma_{02}} = 2/3 * 157.5 = 105 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_3} = M_{\gamma_5} = 2/3 * M_{\gamma_{03}} = 2/3 * 150 = 100 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_4} = 2/3 * M_{\gamma_{04}} = 2/3 * 75 = 50 \text{ tm.}$$

Başlık şeridi için mesnet momentleri: $a_{\gamma_2}/2=3$ m.genişliğinde

$$M_{\gamma_1} = M_{\gamma_7} = 0.75 * 135/3 = 33.75 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_2} = M_{\gamma_6} = 0.75 * 105/3 = 26.25 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_3} = M_{\gamma_5} = 0.75 * 100/3 = 25.0 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_4} = 0.75 * 50/3 = 12.5 \text{ m.}$$

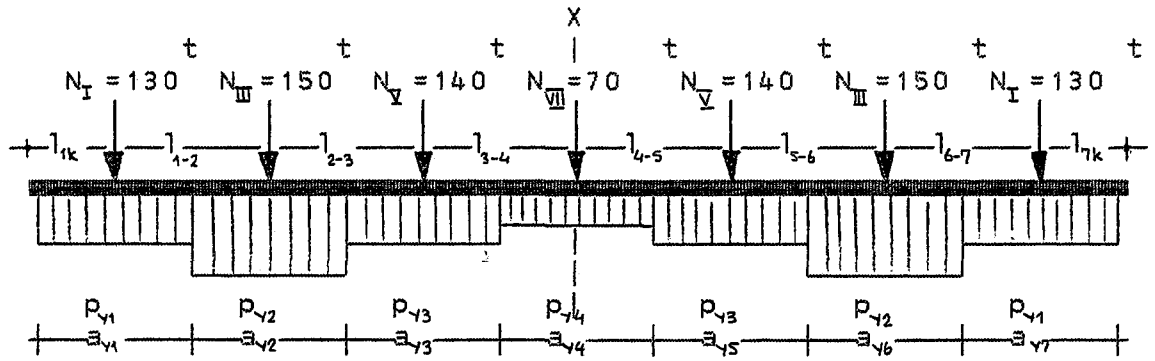
$$N_{\gamma_1} = N_{\gamma_7} = 130 \text{ t.} \quad , \quad N_{\gamma_2} = N_{\gamma_6} = 150 \text{ t.}$$

$$N_{\gamma_3} = N_{\gamma_5} = 140 \text{ t.} \quad , \quad N_{\gamma_4} = 70 \text{ t.}$$

$$a_{\gamma_1} = a_{\gamma_2} = a_{\gamma_3} = a_{\gamma_4} = a_{\gamma_5} = a_{\gamma_6} = a_{\gamma_7} = 6\text{m.}$$

Bu yöndeki çıkma boyları $l_{\gamma_{1k}} = 3\text{m.} > l_{1-2} / 2.5 = 6/2.5 = 2.4$

olduğundan, kenar etki alanlarındaki fiktif taban basınçları da üniform alınır.



Şekil 6

$$P_{\gamma_1} = P_{\gamma_7} = N_{\gamma_1} / a_{\gamma_1} = 130/6.0 = 21.66 \text{ t/m.}$$

$$P_{\gamma_2} = P_{\gamma_6} = N_{\gamma_2} / a_{\gamma_2} = 150/6.0 = 25 \text{ t/m.}$$

$$P_{\gamma_3} = P_{\gamma_5} = N_{\gamma_3} / a_{\gamma_3} = 140/6.0 = 23.33 \text{ t/m.}$$

$$P_{\gamma_4} = N_{\gamma_4} / a_{\gamma_4} = 70/6.0 = 11.66 \text{ t/m.}$$

$$M_{\gamma_1} = M_{\gamma_7} = \frac{P_{\gamma_1} \cdot l_{\gamma_1}^2}{2} = \frac{21.66 \cdot 3^2}{2} = 97.44 \text{ tm.}$$

Ara mesnetler için ilk yaklaşım momentleri:

$$M_{\gamma_{02}} = M_{\gamma_{06}} = \frac{N_{\gamma_2} \cdot a_{\gamma_2}}{8} = \frac{150 \cdot 6.0}{8} = 112.5 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_{03}} = M_{\gamma_{05}} = \frac{N_{\gamma_3} \cdot a_{\gamma_3}}{8} = \frac{140 \cdot 6.0}{8} = 105 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_{04}} = \frac{N_{\gamma_4} \cdot a_{\gamma_4}}{8} = \frac{70 \cdot 6.0}{8} = 52.5 \text{ tm.}$$

Dengelenmiş mesnet momentleri:

$$M_{\gamma_2} = M_{\gamma_6} = 2/3 \cdot M_{\gamma_{02}} = 2/3 \cdot 112.5 = 75 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_3} = M_{\gamma_5} = 2/3 \cdot M_{\gamma_{03}} = 2/3 \cdot 105 = 70 \text{ tm.}$$

$$M_{\gamma_4} = 2/3 \cdot M_{\gamma_{04}} = 2/3 \cdot 52.5 = 35 \text{ tm.}$$

Başlık seridi için mesnet momentleri: $a_{\gamma_2} / 2 = 3$ m.genişliğinde

$$M_{\gamma_1} = M_{\gamma_7} = 0.75 \cdot 97.47 / 3 = 24.36 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_2} = M_{\gamma_6} = 0.75 \cdot 75 / 3 = 18.75 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_3} = M_{\gamma_5} = 0.75 \cdot 70 / 3 = 17.5 \text{ m.}$$

$$M_{\gamma_4} = 0.75 \cdot 35 / 3 = 8.75 \text{ m.}$$

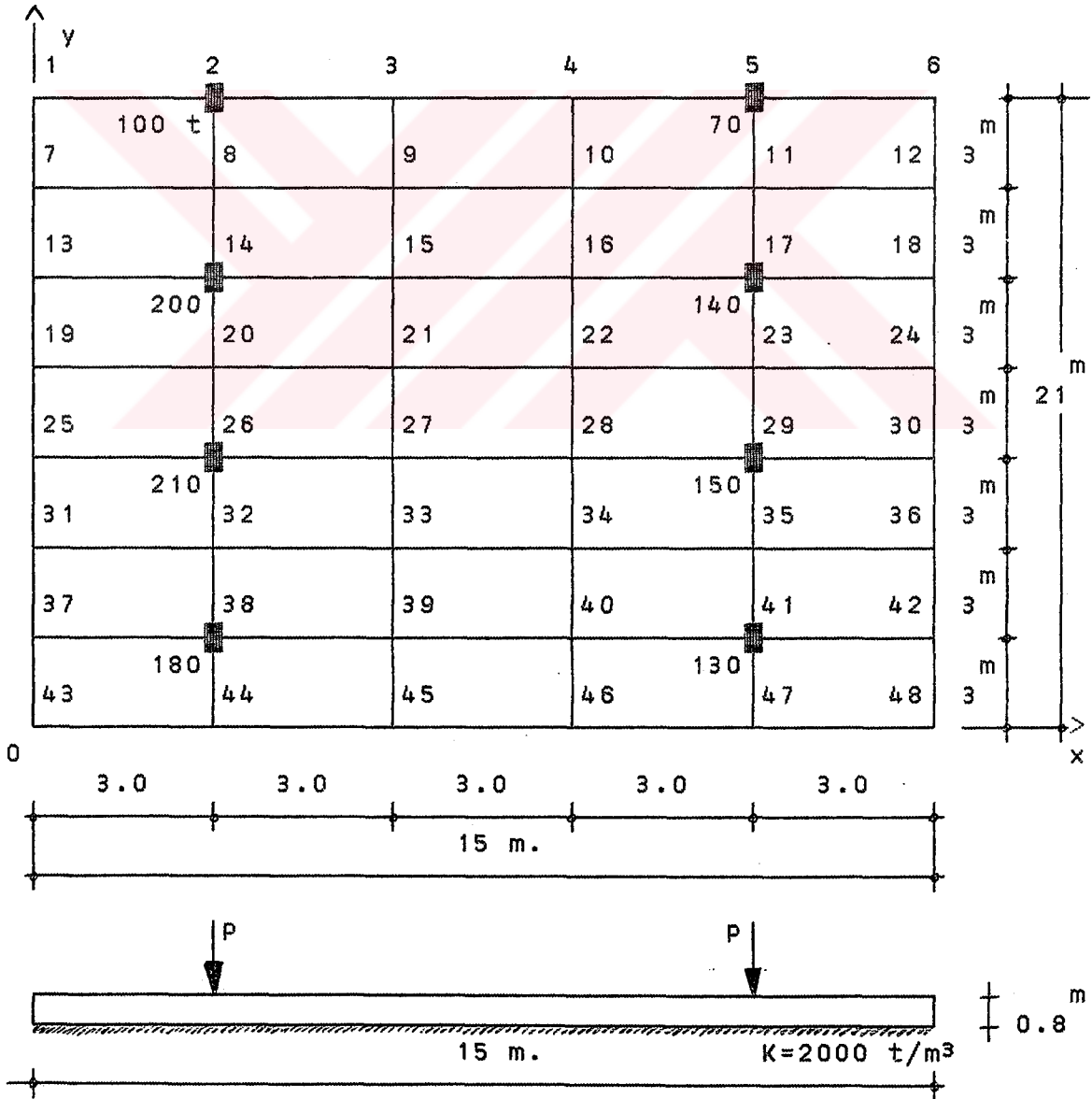
III.2 Elastik zemine oturan plakların bilgisayar programı ile çözümü:

Elastik zemine oturan, boyutları ve yükleme durumu şekilde verilen plağın analizi:

Malzeme sabitleri : $E=2,1 \cdot 10^6$ t/m², $\nu=1/6$

Zemin yatak katsayısı : 2000 t/m³

Sınır ve mesnet şartları, simetri eksenlerinde $x \rightarrow 0$
 $y \rightarrow 0$ deplasmanları (0).



Çift simetriden çeyrek plak 144 serbestlik derecesine sahip 35 sonlu elemana ayrılmış ve düğüm noktası deplasmanları ile düğüm noktası moment değerleri bulunmuştur. Sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

DUGUM NOKTASI DEPLASMANLARI

W	-0.002702	-0.002750	-0.001635	-0.001320	-0.001859	-0.001590
OX	0.000000	0.000187	0.000322	-0.000107	-0.000071	0.000136
OY	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

W	-0.002638	-0.002422	-0.001610	-0.001305	-0.001623	-0.001572
OX	0.000000	0.000186	0.000255	-0.000060	-0.000067	0.000052
OY	0.000005	0.000005	0.000004	0.000004	0.000004	0.000005

W	-0.002738	-0.002783	-0.001665	-0.001348	-0.001890	-0.001625
OX	0.000000	0.000189	0.000323	-0.000108	-0.000072	0.000135
OY	0.000015	0.000014	0.000012	0.000012	0.000014	0.000015

W	-0.002726	-0.002507	-0.001680	-0.001375	-0.001708	-0.001661
OX	0.000000	0.000190	0.000260	-0.000064	-0.000070	0.000050
OY	0.000021	0.000024	0.000017	0.000018	0.000026	0.000023

W	-0.002833	-0.002894	-0.001745	-0.001433	-0.002015	-0.001738
OX	0.000000	0.000191	0.000331	-0.000119	-0.000077	0.000139
OY	-0.000005	-0.000004	0.000001	0.000003	0.000004	0.000006

W	-0.002668	-0.002457	-0.001662	-0.001377	-0.001709	-0.001681
OX	0.000000	0.000183	0.000249	-0.000065	-0.000072	0.000040
OY	-0.000056	-0.000060	-0.000036	-0.000029	-0.000040	-0.000029

W	-0.002487	-0.002535	-0.001508	-0.001236	-0.001772	-0.001549
OX	0.000000	0.000173	0.000293	-0.000109	-0.000075	0.000111
OY	-0.000118	-0.000106	-0.000094	-0.000084	-0.000081	-0.000082

W	-0.001864	-0.001662	-0.001047	-0.000831	-0.001104	-0.001129
OX	0.000000	0.000150	0.000195	-0.000057	-0.000067	0.000017
OY	-0.000235	-0.000336	-0.000183	-0.000162	-0.000259	-0.000163

DUGUN NOKTALARI MOMENT DEGERLERI

DUGUN NO	1----	2----	3----	4----	5----	6----
MX TON*M/M	-1.8	-24.8	0.8	1.2	-17.7	-0.7
MY TON*M/M	13.8	-29.2	15.2	14.0	-19.8	3.9
MXY TON*M/M	2.3	-0.1	0.4	-0.3	-0.1	0.3
DUGUN NO	7----	8----	9----	10----	11----	12----
MX TON*M/M	4.3	19.0	3.4	2.9	13.8	1.9
MY TON*M/M	-1.0	-7.0	8.4	9.5	-5.4	1.2
MXY TON*M/M	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
DUGUN NO	13----	14----	15----	16----	17----	18----
MX TON*M/M	-1.5	-24.5	1.0	1.5	-17.4	-0.4
MY TON*M/M	13.8	-29.2	15.3	14.1	-19.8	4.0
MXY TON*M/M	0.0	0.0	-0.1	0.0	0.0	0.0
DUGUN NO	19----	20----	21----	22----	23----	24----
MX TON*M/M	4.0	19.1	3.2	2.8	14.0	1.7
MY TON*M/M	-1.1	-7.2	8.6	9.7	-5.6	1.2
MXY TON*M/M	0.0	-0.1	-0.1	0.2	0.1	-0.1
DUGUN NO	25----	26----	27----	28----	29----	30----
MX TON*M/M	-3.4	-27.2	-0.2	0.4	-19.9	-1.8
MY TON*M/M	14.5	-30.8	15.7	14.6	-21.3	4.3
MXY TON*M/M	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.1
DUGUN NO	31----	32----	33----	34----	35----	36----
MX TON*M/M	2.7	17.3	2.0	1.6	12.6	0.7
MY TON*M/M	-1.3	-7.1	8.1	9.2	-5.5	1.3
MXY TON*M/M	0.0	0.3	0.5	-0.2	0.0	0.4
DUGUN NO	37----	38----	39----	40----	41----	42----
MX TON*M/M	-5.8	-24.8	-2.5	-1.8	-18.5	-4.0
MY TON*M/M	12.2	-27.5	13.7	12.8	-19.2	3.8
MXY TON*M/M	0.3	0.3	0.4	0.0	0.0	0.0
DUGUN NO	43----	44----	45----	46----	47----	48----
MX TON*M/M	1.6	4.8	1.1	0.9	3.4	0.8
MY TON*M/M	-2.9	-5.7	5.9	6.9	-4.6	0.5
MXY TON*M/M	-0.4	0.6	2.7	-1.4	-0.2	2.7

IV. Bilgisayar programının açıklanması.

Bu program FORTRAN IV Programlama dili ile yazılmıştır.

Program giriş verileri sonlu elemanın eni, boyu ve zeminin yatak katsayısıdır. Bu bilgiler program içinde okutulmaktadır.

Data A9, B9, YAKA /,...../

A9 = Elemanın x eksenine paralel boyu

B9 = Elemanın y eksenine paralel boyu

YAKA = Zemin yatak katsayısı

Plak çözümü için geliştirilen bilgisayar programının giriş verileri program içinde okutulmaktadır. Bu programa önce giriş verilerinin nasıl girileceği anlatıldı. Bir sonra gelen kayıta ise DATA deyimi ile bu bilgilerin verilmesi sağlanmıştır.

Program giriş verilerinin hazırlanmasında dikkat edilecek husus plağın kısa kenarının y eksenine ile çalıştırılması ve kısa kenar kanar boyunca numaralandırılmasıdır. Böylece hem bant genişliği minimum olmakta hemde program her elemandaki düğüm noktası parametrelerini doğru olarak oluşturmaktadır. Şayet plak üzerinde üçgen yayılı yük var ise üçgen yükün başlangıç noktasından ve yükün artış yönüne dik olarak numara verilmelidir. Yük $q(x)$ ise numaralama y eksenine paralel, $q(y)$ ise x eksenine paralel numaralanmalıdır.

Program giriş bilgilerinin oluşturulmasından sonra ilk elemandaki sistem düğüm parametrelerini oluşturmakta daha sonra elemanın rijitlik ve yük matrisini oluşturmakta, bu matrisleri sistem rijitlik ve yük matrisine yerleştirmektedir. 2. eleman için sistem düğüm parametrelerini oluşturduk-

tan sonra eleman rijitlik ve yük matrislerinin farklı olup olmadığını kontrol etmekte, farklı halde yeniden hesaplamaktadır. Aynı işe önce bildiği rijitlik ve yük matrislerinden sisteme geçmektedir. Bu işlemi eleman sayısı kere yaparak sistem rijitlik ve yük matrislerini kurmaktadır.

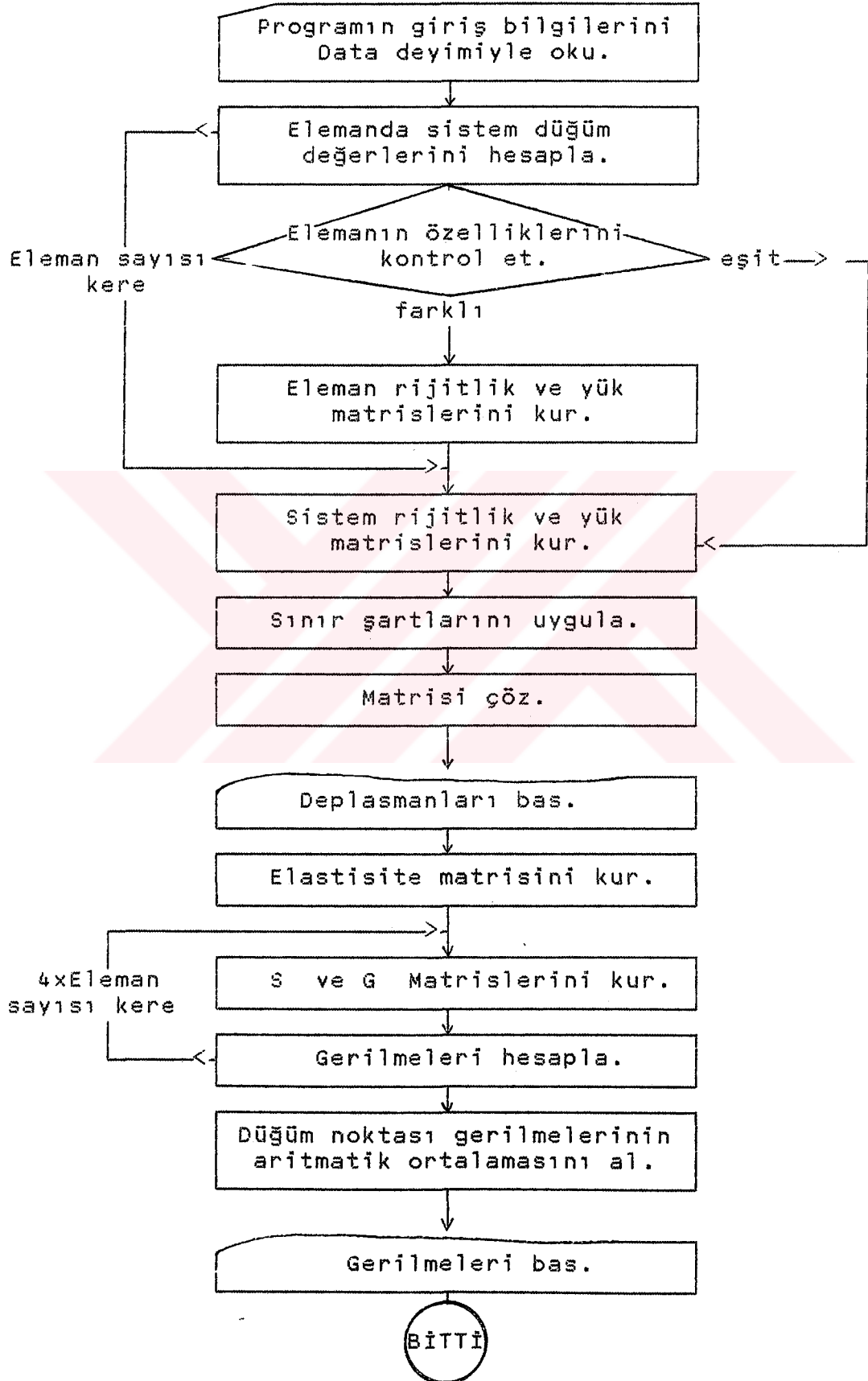
Girişte verilmiş sınır şartlarını uygulayarak Gauss Eliminasyon metodu ile matrisi çözmekte ve düğüm noktası deplasmanlarını hesaplamaktadır.

Elastisite matrisini ve S_e matrisini kurarak köşe koordinatlarını koymaktadır. Elastisite matrisi ile S_e matrislerini çarparak G_e gerilme matrisini hesaplamaktadır.

Her eleman köşesi için G_e ile eleman deplasmanlarını çarparak köşe gerilmelerini hesaplamakta, düğümde birleşen gerilmelerin aritmetik ortalamasını alarak düğüm noktasına ait M_x , M_y , M_{xy} moment değerlerini yazmaktadır.

Plak çözümü için geliştirilen programın datalar kısmı incelendiğinde görülürki, program sabit kalınlıklı, düzgün, üçgen yayılı ve tekil yüklere maruz ve aynı yatak katsayısına sahip zemine oturan plakların yanında farklı kalınlıkta bölgesel düzgün yayılı, üçgen yayılı yüklere maruz, farklı yatak katsayısına sahip zeminlere oturan ince plaklarında çözümünü yapmaktadır. Çizgisel yüklerde düğüm noktalarına tekil yükler gibi etkitilerek göz önüne alınabilir.

IV.1 İnce Plakların Çözümünü Yapan Programın Akış Diyagramı:



```
C   ****BU PROGRAM İNŞ.MÜH. SALIH K. ONGUL TARAFINDAN YAPILMISTIR****
C   *****SONLU ELEMAN DEPLASMAN METODU**FINITE ELEMENT METHOD*****
C   **ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN *GOMULU,ACIK,COK GOZLU,
C   SU DEPOLARININ*BETONARME İSTİNAT DUVARLARININ*ANKRAJLI BETON
C   ARME PERDELERİN*DOSEME PLAKLARININ*DİKDORTGEN SONLU ELEMANLAR
C   İLE DUGUM NOKTASI DEPLASMANLARININ VE MOMENTLERİNİN HESABI*****
C   *****MATRIS VE DIZI BOYUTLARI*****
C   INTEGER ABC
C   DIMENSION ABC(15,15,12),BAC(15,15,4,3),CBA(15,15,4,3)
C   DIMENSION H(3,3),SE(3,12),GE(3,12),SG(15,15,4,3),SF(1 5,15, 4,3)
C   DIMENSION XBOY(16),DEP(16),KAR(16),G1(16),G2(16),G3(1 6)
C   DIMENSION YV(300),C(420),KF(420),SR(420,420),KE(120)
C   DIMENSION ER(12,12),DYY(12),UYU(12),A(12),MB(12),IFAR U(120 )
C   DIMENSION IFARX(120),IFARY(120),IFARZ(120),IFARS(120) ,IFAR D(120)
C   *DATA DIZİLERİ*HER DIZI BOYUTU İLGİLİ DATA SAYISINA ESİTTİR.**
C   DIMENSION XEN(1),YBOY(1),ZKAL(1),ZEYKS(1),TEYUK(8),DYYUK(1)
C   DIMENSION JFARX(1),JFARY(1),JFARZ(1),JFARS(1),UYUUK(1)
C   DIMENSION JFART(8),JFARD(1),JFARU(1),JSNIR(14),JFREL(1)
C   *****PROGRAM GİRİŞ VERİLERİ*****DATALAR*****
C   E:PLAK'IN YAPILDIĞI MALZEMENİN ELASTİSİTE MODULU.....TON/M**2
C   V:PLAK'IN YAPILDIĞI MALZEMENİN POISSON KATSAYISI.....
C   DATA E/2100000./,V/.16667/
C   N:PLAGİN KISA KENARINDAKİ ELEMAN SAYISI.....
C   N1:PLAGİN UZUN KENARINDAKİ ELEMAN SAYISI.....
C   DATA N/5 /,N1/7 /
C   JFARX:X EKS. PARELEL ,FARKLI UZUNLUKTA ,ELEMAN NUM.DİZİSİ.....
C   DATA JFARX/ 1 /
C   XEN:JFARX'DEKİ ELEMANLARIN X EKS.PARELEL UZUNLUKLARI....METRE.
C   DATA XEN/ 3.0 /
C   JFARY:Y EKS. PARELEL ,FARKLI UZUNLUKTA ,ELEMAN NUM.DİZİSİ.....
C   DATA JFARY/ 1 /
C   YBOY:JFARY'DEKİ ELEMANLARIN Y EKS. PARELEL UZUNLUKLARI...METRE.
C   DATA YBOY/ 3.0 /
C   JFARZ:FARKLI KALINLIKTAKİ ELEMAN NUM. DİZİSİ.....
C   DATA JFARZ/ 1 /
C   ZKAL:JFARZ'DEKİ ELEMANLARIN KALINLIKLARI.....METRE.
C   DATA ZKAL/ 0.80 /
C   JFARS:ZEMİN YATAK KATSAYISI FARKLI ELEMAN NUM.DİZİSİ.....
C   DATA JFARS/ 1 /
C   ZEYKS:JFARS'TAKİ ELEMANLARIN ZEMİN YATAK KATSAYILARI...TON/M**3
C   DATA ZEYKS/2000.0 /
C   JFART:TEKİL YÜKLERLE ÇAKISAN DEPLASMAN NUM.DİZİSİ.....
C   DATA JFART/4,13,40,49,76,85,112,121 /
C   TEYUK:JFART'TAKİ SIRA İLE TEKİL YÜK DEĞERLERİ DİZİSİ.....TON..
C   DATA TEYUK/-100.,-70.0,-200.,-140.,-210.,-150.,-180.,-130. /
C   JFARD:FARKLI DÜZGÜN YAYILI YÜKLÜ ELEMAN NUM. DİZİSİ.....
C   DATA JFARD/ 1 /
C   DYYUK:JFARD'DEKİ ELEMANLARIN DÜZ. YAYILI YÜK DEĞERLERİ.TON/M**2
C   DATA DYYUK/0.0 /
C   JFARU:FARKLI ÜÇGEN YAYILI YÜKLÜ ELEMAN NUM. DİZİSİ.....
C   DATA JFARU/ 1 /
C   UYUUK:JFARU'DAKİ ELEMANLARIN ÜÇGEN YAY. YÜK DEĞERLERİ..TON/M**2
C   DATA UYUUK/ 0.0 /
C   JSNIR:SIFIR OLAN DEPLASMAN NUMARALARI DİZİSİ.....
C   DATA JSNIR/2,3,6,9,12,15,18,20,38,56,74,92,110,128 /
```

```
C      JFREL:ENI,BOYU VEYA YUKSEKLIGI FARKLI ELEMAN NUM.DIZISI.....
DATA JFREL/ 1 /
C      MFX:JFARX DIZISININ BOYUTU MFY:JFARY DIZISININ BOYUTU
C      MFZ:JFARZ DIZISININ BOYUTU MFS:JFARS DIZISININ BOYUTU
C      MFT:JFART DIZISININ BOYUTU MFD:JFARD DIZISININ BOYUTU
C      MFU:JFARU DIZISININ BOYUTU MSS:JSMIR DIZISININ BOYUTU
C      MFE:JFREL DIZISININ BOYUTU
DATA MFX/ 1 /,MFY/ 1 /,MFZ/ 1 /,MFS/1 /
DATA MFT/ 8 /,MFD/ 1 /,MFU/1 /,MSS/ 14 /,MFE/1 /
C      PROGRAMA GECEM SABITLER VE SAYACLARIN BASLANGIC DEGERLERI.....
DATA IL2,IR2,JA,JJ2,JJ3,JJ4,JK1,JK2,KI5,KKK,KSA,NT/12* 0/
DATA IL1,IL3,IR1,JI1,KK1,AK1,AK2,PT,Z/-2,3,1,1,1,.0,1.,.0,1./
DATA JJ5,JJ6,JJ7,JJ8,JJ9,JJ10,JJ11,JJ12/8*0/
WRITE(6,4000)
WRITE(6,3100)N,N1,E,V
WRITE(6,3200) ( XEN(I1),I1=1,MFX)
WRITE(6,3300) ( YBOY(I2),I2=1,MFY)
WRITE(6,3400) ( ZKAL(I3),I3=1,MFZ)
WRITE(6,3500) ( ZEYKS(I4),I4=1,MFS)
WRITE(6,3600) ( JFART(I5),I5=1,MFT)
WRITE(6,3700) ( TEYUK(I1),I1=1,MFT)
WRITE(6,3800) ( DYYUK(I2),I2=1,MFD)
WRITE(6,3900) ( UYYUK(I3),I3=1,MFU)
WRITE(6,3950) ( JSMIR(I4),I4=1,MSS)
WRITE(6,3960) ( JFREL(I5),I5=1,MFE)
IP1=N1+1
IBS=(N+1)*(N1+1)*3
M=N1*N
IE2=M+N1-1
IS=N+1
IP=IS
DO 88 I=1,IBS
IF(I.LT.(M+1)) KE(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARZ(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARS(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARD(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARU(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARX(I)=0
IF(I.LT.(M+1)) IFARY(I)=0
YV(I)=0.0
C(I)=0.0
KF(I)=0
DO 88 J=1,IBS
88 SR(I,J)=0.0
C      *** KONTROL DIZILERININ OLUSTURULMASI *****
DO 801 I=1,N1
DO 802 J=1,MFY
802 IFARY(JFARY(J))=JFARY(J)
DO 803 J=1,MFY
803 JFARY(J)=JFARY(J)+N
801 CONTINUE
DO 804 I=1,MFX
804 IFARX(JFARX(I))=JFARX(I)
DO 805 I=1,MFZ
805 IFARZ(JFARZ(I))=JFARZ(I)
```

```
DO 806 I=1,MFS
806 IFARS(JFARS(I))=JFARS(I)
DO 807 I=1,MFD
807 IFARD(JFARD(I))=JFARD(I)
DO 808 I=1,MFU
808 IFARU(JFARU(I))=JFARU(I)
DO 809 I=1,MFT
809 YV(JFART(I))=TEYUK(I)
DO 810 I=1,MSS
810 KF(JSNIR(I))=JSNIR(I)
DO 811 I=1,MFE
811 KE(JFREL(I))=JFREL(I)
C   *** PLAK'IN KISA KENARI Y EKSENİ İLE ÇAKISTIRILARAK VE KISA KENAR
C   BOYUNCA NUMARALANARAK OLUSTURULAN SİSTEM DUGUM DEGERLERİ*****
DO 100 I=1,12
IF(I.GT.8) GO TO 101
A(I)=I
GO TO 100
101 IF(I.GT.9) GO TO 102
A(I)=3*N+I
GO TO 100
102 A(I)=3*N+I-6
100 CONTINUE
WRITE(6,3970)
WRITE(6,1000)
WRITE(6,1001)
DO 103 I=1,IE2
DO 104 J=1,12
IF(I.EQ.1)GO TO 105
A(J)=A(J)+3
105 MB(J)=A(J)
104 CONTINUE
IF(IS.EQ.I) GO TO 109
KSA=KSA+1
DO 106 J=1,12
106 ABC(IR1,(I-IR2*IP),J)=MB(J)
IF(KSA.EQ.60) WRITE(6,2222)
WRITE(6,1002) KSA,(MB(J),J=1,12)
DO 160 K=1,4
DO 160 L=1,3
JA=JA+1
IF(JA.EQ.13) JA=JA-12
BAC(IR1,(I-IR2*IP),K,L)=MB(JA)
160 CBA(IR1,(I-IR2*IP),K,L)=MB(JA)
C   ***** *A*
C   ** DEGİSİK ÖZELLİKLI ELEMANLARIN KONTROLU **.....
JJ3=JJ3+1
FARET=0.0
IF(JJ3.NE.IFARX(JJ3)) GO TO 165
JJ4=JJ4+1
A9=XEN(JJ4)
FARET=1.0
165 IF(JJ3.NE.IFARY(JJ3)) GO TO 166
JJ5=JJ5+1
B9=YBOY(JJ5)
```

```
FARET=1.0
IF(MFY.EQ.JJ5) JJ5=0
166 IF(JJ3.NE.IFARZ(JJ3)) GO TO 167
    JJ6=JJ6+1
    P=ZKAL(JJ6)
    FARET=1.0
167 IF(JJ3.NE.IFARS(JJ3)) GO TO 168
    JJ7=JJ7+1
    YKS=ZEYKS(JJ7)
    FARET=1.0
168 IF(JJ3.NE.IFARD(JJ3)) GO TO 169
    JJ8=JJ8+1
    DUZYA=DYYUK(JJ8)
    FARET=1.0
169 IF(JJ3.NE.IFARU(JJ3)) GO TO 170
    JJ9=JJ9+1
    GAMA=UYYUK(JJ9)
    FARET=1.0
170 IF(FARET.EQ.0.0.AND.(I-IR2*IP).EQ.1) GO TO 184
    IF(FARET.NE.1.0) GO TO 500
```

C ***** *H*

C ELEMEN RIJITLIK MATRISININ OLUSTURULMASI.....

D1=E*P*P*P/((1.-V*V)*12.)

A3=(1.-V)/5.

A1=4.*A3/3.

A4=(1.+4.*V)/5.

A2=A3/3.

A5=(14.-4.*V)/5.

B=B9/A9

B3=B*B

B4=1./B3

B1=4.*(B3+B4)

B2=2.*(B3-2.*B4)

B5=2.*(2.*B3-B4)

F1=A9*A9

F2=B9*B9

F3=A9*B9

Y=YKS*F3

D=D1/F3

C ***** *R*

ER(1,1)=D*(B1+A5)+.137064*Y

ER(1,2)=B9*((2.*B4+A4)*D+.0182936*Y)

ER(1,3)=-A9*((2.*B3+A4)*D+.0182936*Y)

ER(1,4)=(B2-A5)*D+.0486509*Y

ER(1,5)=B9*((2.*B4+A3)*D-.010873*Y)

ER(1,6)=A9*((A4-B3)*D-.0078968*Y)

ER(1,7)=(A5-B1/2.)*D+.015835*Y

ER(1,8)=B9*((B4-A3)*D-.0046031*Y)

ER(1,9)=A9*((A3-B3)*D+.0046031*Y)

ER(1,10)=-.048509*Y-(A5+B5)*D

ER(1,11)=B9*((B4-A4)*D+.0078968*Y)

ER(1,12)=A9*((.010873*Y-(2.*B3+A3)*D))

C ***** *E*

ER(2,2)=F2*((4.*B4/3.+A1)*D+.0031746*Y)

ER(2,3)=-F3*(V*D+.0025*Y)

ER(2,4)=B9*(.010873*Y-(2.*B4+A3)*D)
ER(2,5)=F2*((2.*B4/3.-A2)*D-.0023809*Y)
ER(2,6)=-.0016667*Y*F3
ER(2,7)=B9*((A3-B4)*D+.0046031*Y)
ER(2,8)=F2*((B4/3.+A2)*D-.0011904*Y)
ER(2,9)=.0011111*Y*F3
ER(2,10)=B9*((B4-A4)*D+.0078968*Y)
ER(2,11)=F2*((2.*B4/3.-A1)*D+.0015872*Y)
ER(2,12)=-ER(2,6)

C ***** *T*

ER(3,3)=F1*((4.*B3/3.+A1)*D+.0031746*Y)
ER(3,4)=A9*((A4-B3)*D-.0078968*Y)
ER(3,5)=ER(2,12)
ER(3,6)=F1*((2.*B3/3.-A1)*D+.0015872*Y)
ER(3,7)=A9*((B3-A3)*D-.0046031*Y)
ER(3,8)=ER(2,9)
ER(3,9)=F1*((B3/3.+A2)*D-.0011904*Y)
ER(3,10)=A9*((2.*B3+A3)*D-.010873*Y)
ER(3,11)=ER(2,6)
ER(3,12)=F1*((2.*B3/3.-A2)*D-.0023809*Y)

C ***** *T*

ER(4,4)=D*(B1+A5)+.137064*Y
ER(4,5)=-B9*((2.*B4+A4)*D+.0182936*Y)
ER(4,6)=-A9*((2.*B3+A4)*D+.0182936*Y)
ER(4,7)=.0486408*Y-(B5+A5)*D
ER(4,8)=B9*((A4-B4)*D-.0078968*Y)
ER(4,9)=A9*(.010873*Y-(2.*B3+A3)*D)
ER(4,10)=(A5-B1/2.)*D+.0156349*Y
ER(4,11)=B9*((A3-B4)*D+.0046031*Y)
ER(4,12)=A9*((A3-B3)*D+.0046031*Y)

C ***** *j*

ER(5,5)=F2*((A1+4.*B4/3.)*D+.0031786*Y)
ER(5,6)=F3*(V*D+.0025*Y)
ER(5,7)=B9*((A4-B4)*D-.0078968*Y)
ER(5,8)=F2*((2.*B4/3.-A1)*D+.0015873*Y)
ER(5,9)=ER(2,6)
ER(5,10)=B9*((B4-A3)*D-.0046031*Y)
ER(5,11)=F2*((A2+B4/3.)*D-.0011904*Y)
ER(5,12)=-ER(3,8)

```
C *****
ER(6,6)=F1*((A1+B3*4./3.)*D+.0031786*Y)
ER(6,7)=A9*((2.*B3+A3)*D-.010858*Y)
ER(6,8)=-ER(2,6)
ER(6,9)=F1*((2.*B3/3.-A2)*D-.0023809*Y)
ER(6,10)=A9*((B3-A3)*D-.0046031*Y)
ER(6,11)=-ER(3,8)
ER(6,12)=F1*((B3/3.+A2)*D-.0011904*Y)
C ***** * *
ER(7,7)=D*(B1+A5)+.137064*Y
ER(7,8)=-B9*((2.*B4+A4)*D+.0182936*Y)
ER(7,9)=A9*((2.*B3+A4)*D+.0182936*Y)
ER(7,10)=D*(B2-A5)+.0486508*Y
ER(7,11)=B9*(.010873*Y-(2.*B4+A3)*D)
ER(7,12)=A9*((B3-A4)*D+.0078968*Y)
C ***** *0*
ER(8,8)=((A1+4.*B4/3.)*D+.0031746*Y)*F2
ER(8,9)=-F3*(Y*D+.0025*Y)
ER(8,10)=B9*((2.*B4+A3)*D-.010873*Y)
ER(8,11)=F2*((2.*B4/3.-A2)*D-.0031746*Y)
ER(8,12)=-ER(3,5)
C ***** *2*
ER(9,9)=F1*((A1+4.*B3/3.)*D+.0031746*Y)
ER(9,10)=A9*((B3-A4)*D+.0078968*Y)
ER(9,11)=ER(3,5)
ER(9,12)=F1*((2.*B3/3.-A1)*D+.0015872*Y)
C ***** *D*
ER(10,10)=(B1+A5)*D+.1370635*Y
ER(10,11)=B9*((2.*B4+A4)*D+.0182936*Y)
ER(10,12)=ER(7,9)
C ***** *E*
ER(11,11)=F2*((4.*B4/3.+A1)*D+.0031746*Y)
ER(11,12)=F3*(Y*D+.0025*Y)
C ***** *H*
ER(12,12)=F1*((4.*B3/3.+A1)*D+.0031746*Y)
C ***** *j*
DO 306 K=1,12
DO 306 L=1,12
IF(K.EQ.L) GO TO 306
ER(L,K)=ER(K,L)
306 CONTINUE
C ***** *R*
C DUZGUN YAYILI YUK VEKTORU...ELEMEN DUGUM ETKI MATRISI.....
DYY(1)=DUZYA*F3/4.
DYY(2)=DUZYA*F3*B9/24.
DYY(3)=DUZYA*F3*A9*(-1)/24.
DYY(4)=DYY(1)
DYY(5)=-DYY(2)
DYY(6)=DYY(3)
DYY(7)=DYY(1)
DYY(8)=DYY(5)
DYY(9)=-DYY(6)
DYY(10)=DYY(1)
DYY(11)=DYY(2)
DYY(12)=DYY(9)
```

```
C          ***** *,*
C      UCGEN YAYILI YUK VEKTORU...ELEMEN DUGUM ETKI MATRISI.....
184 IF((I-IR2*IP).NE.1) GO TO 185
      XBOY(1)=0.0
      KAN=IR1
      XBOY(KAN+1)=XBOY(KAN)+A9
185 GAMAX=F3*GAMA
      UYY(1)=GAMAX*(XBOY(KAN)/4.+A9*3./40.)
      UYY(2)=GAMAX*(XBOY(KAN)/24.+A9/72.)*B9
      UYY(3)=-GAMAX*(XBOY(KAN)/24.+A9/60.)*A9
      UYY(4)=UYY(1)
      UYY(5)=-UYY(2)
      UYY(6)=UYY(3)
      UYY(7)=GAMAX*(XBOY(KAN)/4.+A9*7./40.)
      UYY(8)=-GAMAX*(XBOY(KAN)/24.+A9/36.)*B9
      UYY(9)=GAMAX*(XBOY(KAN)/24.+A9/40.)*A9
      UYY(10)=UYY(7)
      UYY(11)=-UYY(8)
      UYY(12)=UYY(9)
C          ***** * *
C      SISTEM RIJITLIK MATRISI VE SISTEM YUK MATRISININ OLUSTURULMASI....
C          ***** *S*
500 DO 107 K=1,12
      KL=A(K)
      C(KL)=C(KL)+DYY(K)+UYY(K)
      DO 108 L=1,12
      KR=MB(L)
      SR(KL,KR)=SR(KL,KR)+ER(K,L)
108 CONTINUE
107 CONTINUE
      GO TO 103
109 IS=IS+IP
      IR1=IR1+1
      IR2=IR2+1
103 CONTINUE
C      **** SISTEM RIJITLIK MATRISINE SINIR SARTLARININ UYGULANMASI ****
      WRITE(6,4000)
      DO 188 I=1+IBS
188 YV(I)=YV(I)+C(I)
      WRITE(6,3000)
      WRITE(6,2020)(YV(I),I=1,IBS)
      WRITE(6,3000)
      DO 110 I=1,IBS
      DO 110 J=1,IBS
      IF(KF(I).EQ.I) GO TO 111
      IF(KF(J).NE.J) GO TO 110
111 SR(I,J)=0.0
      IF(I.EQ.J)SR(I,J)=1.0
      IF(I.EQ.KF(I)) YV(I)=0.0
110 CONTINUE
C          ***** *E*
C      SISTEM RIJITLIK MATRISININ COZUMU *****
C      UCGENLESTIRME*****
      KK=IBS
      NM1=KK-1
```

```
DO 114 K=1,NM1
  KP1=K+1
  DO 714 I=KP1,KK
    P=SR(I,K)/SR(K,K)
    YV(I)=YV(I)-P*YV(K)
  DO 814 J=KP1,KK
814 SR(I,J)=SR(I,J)-P*SR(K,J)
714 CONTINUE
114 CONTINUE
C GERIYE DOGRU COZUMU BULMA*****
  YV(KK)=YV(KK)/SR(KK,KK)
  DO 115 K=2,KK
    I=KK-K+1
    IPI=I+1
    B=0.0
    DO 116 J=IPI,KK
116 B=B+SR(I,J)*YV(J)
115 YV(I)=(YV(I)-B)/SR(I,I)
C ***** *M*
  DO 117 I=1,IBS
117 C(I)=YV(I)
  WRITE(6,4000)
  WRITE(6,1005)
  IT1=0
  DO 119 I=1,IP1
    IL1=IL1+IL2
    IL2=(N+1)*3*I
180 J=IL1
120 J=J+IL3
    IT1=IT1+1
    DEP(IT1)=C(J)
    IF(J.EQ.(IL2-2))GO TO 121
    IF(J.EQ.IL2)GO TO 181
    IF(J.EQ.(IL2-1))GO TO 122
    GO TO 120
122 IL1=IL1+1
    WRITE(6,1008)(DEP(IT1),IT1=1,IP)
    IT1=0
    GO TO 180
121 IL1=IL1+1
    WRITE(6,1009)(DEP(IT1),IT1=1,IP)
    IT1=0
    GO TO 180
181 IL1=-2
    WRITE(6,1007)(DEP(IT1),IT1=1,IP)
    IT1=0
    WRITE(6,3000)
119 CONTINUE
C ELASTSITE MATRISI*****
  H(1,1)=1.
  H(1,2)=V
  H(1,3)=0.0
  H(2,1)=V
  H(2,2)=1.
  H(2,3)=0.0
```

```
H(3,1)=0.0
H(3,2)=0.0
H(3,3)=(1.-V)/2
C GERILMELER.....
210 JJ2=JJ2+1
    IF(JJ2.NE.IFARX(JJ2)) GO TO 171
    JJ10=JJ10+1
    A9=XEN(JJ10)
171 IF(JJ2.NE.IFARY(JJ2)) GO TO 172
    JJ11=JJ11+1
    B9=YBOY(JJ11)
    IF(MFY.EQ.JJ11) JJ11=0
172 IF(JJ2.NE.IFARZ(JJ2)) GO TO 200
    JJ12=JJ12+1
    P=ZKAL(JJ12)
    D1=E*P*P*P/((1.-V*V)*12.)
200 AK=AK1
    AI=AK1
    GO TO 204
201 AK=AK1
    AI=AK2
    GO TO 204
202 AK=AK2
    AI=AK2
    GO TO 204
203 AK=AK2
    AI=AK1
204 C1=2.*Z/A9
    C2=6.*Z/(A9*A9)
    C3=2.*Z/B9
    C4=6.*Z/(B9*B9)
    C5=2.*Z/A9
    C6=2.*Z/B9
    C7=2.*Z/(A9*B9)
    A1=1.-AK
    A2=1.-2.*AK
    A3=1.-3.*AK
    A4=2.-3.*AK
    A5=1.-4.*AK+3.*AK*AK
    B1=1.-AI
    B2=1.-2.*AI
    B3=1.-3.*AI
    B4=2.-3.*AI
    B5=1.-4.*AI+3.*AI*AI
C ***** * *
SE(1,1)=A2*B1*C2
SE(1,2)=0.0
SE(1,3)=-A4*B1*C1
SE(1,4)=A2*AI*C2
SE(1,5)=0.0
SE(1,6)=-A4*AI*C1
SE(1,7)=-A2*AI*C2
SE(1,8)=0.0
SE(1,9)=-A3*AI*C1
SE(1,10)=-A2*B1*C2
```

```
SE(1,11)=0.0
SE(1,12)=-A3*B1*C1
C ***** *F*
SE(2,1)=A1*B2*C4
SE(2,2)=A1*B4*C3
SE(2,3)=0.0
SE(2,4)=-A1*B2*C4
SE(2,5)=A1*B3*C3
SE(2,6)=0.0
SE(2,7)=-AK*B2*C4
SE(2,8)=AK*B3*C3
SE(2,9)=0.0
SE(2,10)=AK*B2*C4
SE(2,11)=AK*B4*C3
SE(2,12)=0.0
C ***** *E*
SE(3,1)=(1.-6.*AK*A1-6.*AI*B1)*C7
SE(3,2)=B5*C5
SE(3,3)=-A5*C6
SE(3,4)=-SE(3,1)
SE(3,5)=-AI*B4*C5
SE(3,6)=A5*C6
SE(3,7)=SE(3,1)
SE(3,8)=-SE(3,5)
SE(3,9)=-AK*A4*C6
SE(3,10)=SE(3,4)
SE(3,11)=-SE(3,2)
SE(3,12)=-SE(3,9)
C ***** *H*
JK2=JK2+1
DO 130 M=1,3
DO 130 L=1,12
GE(M,L)=0.0
DO 130 K=1,3
130 GE(M,L)=GE(M,L)+H(M,K)*SE(K,L)
IF(JJ1.EQ.1) GO TO 141
IF(JJ1.EQ.KE(JJ1).AND.I1.EQ.0) GO TO 484
141 IF(JK2.NE.1) GO TO 486
I=0
I1=0
J=0
605 I=I+1
601 J=J+1
602 I1=I1+1
DO 137 J1=1,3
SG(I,J,I1,J1)=0.0
DO 137 K=1,12
137 SG(I,J,I1,J1)=SG(I,J,I1,J1)+D1*GE(J1,K)*C(ABC(I,J ,K))
IF(JJ1.EQ.KE(JJ1))WRITE(6,2035)I,J,I1,((GE(M,L),L =1,12 ),M=1, 3)
IF(I1.EQ.1) GO TO 201
IF(I1.EQ.2) GO TO 202
IF(I1.EQ.3) GO TO 203
IF(I1.EQ.4) GO TO 200
486 IF(I1.LT.4) GO TO 602
I1=0
```

```
      JJ1=JJ1+1
      IF(JJ1.EQ.((N*N1)+1)) GO TO 484
      IF(JJ1.EQ.KE(JJ1)) GO TO 210
484  IF(J.LT.N) GO TO 601
      J=0
      IF(I.LT.N1) GO TO 605
      I=0
```

```
C      ***** *
C      BIR DUGUMDE BIRLESEN ELEMAN KOSE GERILMELERINI TOPLAR VE ORTALAMASINI
C      ALARAK DUGUM NOKTASI GERILMELERINI HESAPLAR.....
      WRITE(6,4000)
      WRITE(6,1010)
      DO 400 I=1,N1
      DO 415 J=1,N
      DO 416 K=1,4
      DO 417 L=1,3
      SF (I,J,K,L)=0.0
      PT=0
      DO 615 K1=1,N1
      DO 616 L1=1,N
      DO 617 M=1,4
      DO 600 M1=1,3
      IF(BAC(I,J,K,L).NE.CBA(K1,L1,M,M1)) GO TO 600
      SF (I,J,K,L)=SF (I,J,K,L)+SG(K1,L1,M,M1)
      PT=PT+1
600  CONTINUE
617  CONTINUE
616  CONTINUE
615  CONTINUE
      SF(I,J,K,L)=SF(I,J,K,L)/PT
417  CONTINUE
416  CONTINUE
415  CONTINUE
400  CONTINUE
```

```
C      ***** *
      DO 402 I=1,IP
402  KAR(I)=I
      WRITE(6,1013){KAR(I),I=1,IP}
      IZ2=IP
      DO 408 I=1,N1
      L=0
      DO 410 J=1,N
      KLM=1
      IF(J.EQ.N) KLM=2
      DO 410 K=1,KLM
      L=L+1
      G1(L)=SF(I,J,K,1)
      G2(L)=SF(I,J,K,2)
      G3(L)=SF(I,J,K,3)
410  CONTINUE
      WRITE(6,1015){G1(M),M=1,IP}
      WRITE(6,1016){G2(M),M=1,IP}
      WRITE(6,1017){G3(M),M=1,IP}
      DO 403 IZ1=1,IP
      IZ2=IZ2+1
```

```
403 KAR(IZ1)=I22
WRITE(6,1013)(KAR(IZ1),IZ1=1,IP)
KKK=KKK+1
IF(KKK.NE.N1) GO TO 408
L=0
DO 411 J=1,N
KLM=1
IF(J.EQ.N) KLM=2
DO 411 KC=1,KLM
L=L+1
K=5-KC
G1(L)=SF(I,J,K,1)
G2(L)=SF(I,J,K,2)
G3(L)=SF(I,J,K,3)
411 CONTINUE
WRITE(6,1015)(G1(M),M=1,IP)
WRITE(6,1016)(G2(M),M=1,IP)
WRITE(6,1017)(G3(M),M=1,IP)
408 CONTINUE
GO TO 5000
C ***** FORMATLAR *****
1000 FORMAT(15X,'ELEMEN DUGUM DEGERLERI',/,14X,'1',4X,'2',4X,'3',4X,'4',
*,4X,'5',4X,'6',4X,'7',4X,'8',4X,'9',3X,'10',3X,'11',3X,'12',/)
1001 FORMAT(1X,'ELEMEN NO',5X,'SISTEM DUGUM DEGERLERI')
1002 FORMAT(4X,I3,3X,12I5)
1005 FORMAT(10X,'DUGUM NOKTASI DEPLASMANLARI',/)
1007 FORMAT(1X,'OY',5X,10F11.6,/)
1008 FORMAT(1X,'OX',4X,10F11.6)
1009 FORMAT(1X,'W',4X,10F11.6)
1010 FORMAT(/,1X,'DUGUM NOKTALARI MOMENT DEGERLERI',/)
1013 FORMAT(1X,'DUGUM NO',8X,I3,16('----',I3))
1015 FORMAT(1X,'MX',2X,'TON*M/M',1X,17F7.1)
1016 FORMAT(1X,'MY',2X,'TON*M/M',1X,17F7.1)
1017 FORMAT(1X,'MXY',1X,'TON*M/M',1X,17F7.1,/)
4000 FORMAT('1',///,4X,10('**'),1X,'S.K. ONGUL.',1X,75('**'),/)
2020 FORMAT(/,5X,'SISTEM DUGUM ETKI VEKTORU',/,50(/,1X,8F11.5))
2035 FORMAT(1X,'DEGISIK ELEMEN KOSELERINDE GE GERILME MATRISLERI',
*,2X,'I=',I2,3X,'J=',I2,3X,'I1=',I2,3(/,1X,12F8.4),/)
2222 FORMAT(1X,'ELEMEN NO SISTEM DUGUM DEGERLERI')
3000 FORMAT(/)
3100 FORMAT(5X,'PROBLEM :',/,10X,'VERILER :',/,19X,'N=',I2,10X,'N1=',I2
*,10X,'E=',F9.1,' TON/M**2',10X,'V=',F9.7,/)
3200 FORMAT(19X,'XEN DIZISI :',9(6(F4.2,' M '),/,33X))
3300 FORMAT(19X,'YBOY DIZISI :',9(6(F4.2,' M '),/,33X))
3400 FORMAT(19X,'ZKAL DIZISI :',9(6(F4.2,' M '),/,33X))
3500 FORMAT(19X,'ZEYKS DIZISI :',9(6(F7.1,' T/M**3'),/,33X))
3600 FORMAT(19X,'JFART DIZISI :',9(6(I4,4X),/,33X))
3700 FORMAT(19X,'TEYUK DIZISI :',9(8(F5.1,' TON'),/,33X))
3800 FORMAT(19X,'DYVYUK DIZISI :',9(6(F5.2,' T/M**2'),/,33X))
3900 FORMAT(19X,'UYVYUK DIZISI :',9(6(F5.2,' T/M**2'),/,33X))
3950 FORMAT(19X,'JSNIR DIZISI :',9(8(I4,4X),/,33X))
3960 FORMAT(19X,'JFREL DIZISI :',9(6(I4,4X),/,33X))
3970 FORMAT('1',///,4X,100('**'),/,4X,5('**** COZUM **** '))
5000 STOP
END
```

V. Sonuç

Elastik zemine oturan sistemlerin differansiyel denkleminin teorik metodlarla çözümü, ancak yük şartlarının ve sınır şartlarının matematiksel olarak kolayca ifade edilebilen sistemler için mümkün olmaktadır. Buna karşılık bu şartların karışık olduğu durumlarda, çözüm zorlaşmakta ve hatta bazı hallerde tam çözüm bulmak mümkün olmuyor. Diğer taraftan bir problemin belirli bir yük ve sınır şartı altında tam çözümü yapılırsa bile yük durumu ve sınır şartları değiştiğinde problemi birçok kez gözlemek gerekmektedir.

İşte bütün bu zorluklar nümerik metodların önem kazanmasına sebep olmuştur. Bilgisayar programlarına her türlü yük ve sınır şartlarını hazırlamak mümkün olduğundan teorik çözüm ortadan kalkar.

Sonlu farklar metodunda, differansiyel denklemin çözümü için belirli aralıklar seçilerek fonksiyonun türevlerini bu aralık noktalarında aldığı değerleri sonlu farklarla ifade edildi. Her aralık noktası için differansiyel denklemi, sonlu farkları ifade eden bir denklem halinde yazıldı. Bu denklemlerle birlikte, sınır şartlarını gösteren denklemler, bir denklem takımında oluşturuldu. Bu denklem takımı çözümlenerek, her nokta için fonksiyonun değeri nümerik olarak bulunmuş oldu.

Sonlu elemanlar metodunda, plağımız istenilen aralıklarda sonlu parçaya ayrılır. Eldeki sonlu elemana bir yüzey veya çizgi oturtularak uygun bir yerdeğiştirme fonksiyonu seçilir. Daha sonra şekil fonksiyonları yardımıyla Eleman Rijitlik Matrisleri ve Yükleme Matrisleri oluşturulur. Bura-

danda Eleman Düşüm Etki Vektörüne geçilir. Bu metoddaki hassas nokta şekil fonksiyonlarının sisteme uygun bir şekilde seçilmesidir. Bu seçim sayesinde çözüm kolaylaşmaktadır. Bu yöntemdede her adımda karşımıza uzunca integral alınması gereken denklemler çıkmaktadır. Bunların çoğu gözülerek tablolar haline getirilmiştir.

Plağın sonlu farklarla çözümünde, plak üzerinde q yayılı yükün oluşu daha sağlıklı sonuç vermektedir. Zira sistem üzerinde etkiyen tekil yük ve tekil momentler varsa bu yükleri küçük bir mesafede yayılı tarzda düşünmek gerekecektir. Çünkü tekil yük ve momentlerin olduğu noktalar yakınında bir süreksizlik meydana gelmektedir. Sonlu elemanlar metodunda ise böyle bir durum yoktur. Plak üzerindeki her genişit yükleme için sağlıklı bir çözüm alınabilmektedir. Örneğimizde tekil yüklerle yüklenmiş bir plak ele alınmıştır. Nümerik olarak gözölmüş ve bilgisayar programı çıktıları ile karşılaştırılmıştır. Sonuçların birbirine yakın oldukları görölmüştür.

Sonuçta; sonlu farklar yöntemini, üniform yayılı yüklerde kullanmanın daha sağlıklı olduğu görölmüştür. Diğer yüklemelerde yeterince hassas sonuç alınamamaktadır. Çözmek istenilen plağın nokta ve aralık sayısı arttıkça her iki yöntemi elle çözmek imkansız duruma gelmektedir. Bunun yanında differansiyel ifadelerden dolayı problemde hata yapma riski fazlalaşmaktadır. Bu yüzden her iki yöntemdede bilgisayar programlarına yönelinmiş ve bu konularda çeşitli programlar yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- /1/ ÇAĞDAŞ, Sinan Prof. "Elastik zemine oturan plakların sonlu farklarla çözümü"
- /2/ KÖŞEOĞLU, Sadık İnş. Yük. Müh. "Yüzeysel Temeller II"
- /3/ BERKTAY, İlhan Prof. "Plak Teorisi Ders Notları"
- /4/ SZILARD, R. "Theory and Analysis of Plates", Prentice - Hall, INC., 1974
- /5/ TIMOSHENKO, S. "Theory of Plates and Shells" MC Graw-Hill Book Company, INC.
- /6/ GIRKMANN, Karl Dr. "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler"
- /7/ EYÜBOĞLU, B. "Çözümlü problemlerle Fortran IV" 1979
- /8/ CELASUN, Hüseyin Prof. Dr. "Yapı Sistemleri Matris Analizi ve Sonlu Elemanlar Metodu" E.D.M.M.A.

ÖZGEÇMİŞ

Salih Keskiner ÖNGÜL, 1967 yılında İstanbul'da doğdu. İlk öğrenimini Bakırköy İlkokulu'nda, orta öğrenimini Bakırköy Merkez Lisesi'nde tamamladı. 1984 yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümüne girdi. Lisansüstü öğrenimi boyunca projecilik hizmetlerinde çalıştı. 1989 yılında 5 yıl olan lisans öğrenimini tamamladı. Halen Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Lisansüstü öğrenimi görmektedir.