

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Dönet. Sil. kab. Say. Yön. Eği. Hes.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Koçak

1990

30-
150
182

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ins-

350007L

DÖNEL SİLİNDİRİK KABUKLARIN
SAYISAL YÖNTEMLERLE EĞİLMELİ HESABI

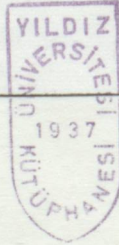
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ.MÜH. ALİ KOÇAK

İSTANBUL - 1990

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

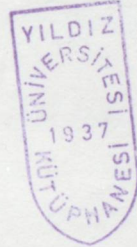
Kot : R 150
182
Alındığı Yer : FEN BİL.ENS.
Tarih : 21.10.1991
Fatura :
Fiyatı : 35.000. TL.
Ayniyat No : 1/15
Kayıt No : 47775
UDC : 624.378.242.
Ek :



YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DÖNEL SİLİNDİRİK KABUKLARIN
SAYISAL YÖNTEMLERLE EĞİLMELİ HESABI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞ.MÜH. ALİ KOÇAK

İSTANBUL - 1990

TEŞEKKÜR

ÇALIŞMALARIMA YÖN VEREN VE DEĞERLİ YARDIMLARINI GÖRDÜĞÜM
SAYIN YARD.DOÇ.DR.TÜRKAN KÖKSAL'A TEŞEKKÜRLERİMİ SUNARIM.

AYRICA TEZİMİN YAZIMINDA VE ÇİZİMLERİNDE BANA YARDIMCI OLAN
TEKNİK RESSAM MERAL ÇENDE'YE TEŞEKKÜRLERİMİ SUNARIM.

1.1.1) Giriş	1
1.1.2) Tez konusunun önemi ve gerekliliği	2
1.1.3) Tez konusunun sınırları	3
1.1.4) Tez konusunun amacı	3
1.1.5) Tez konusunun önemi	3
1.1.6) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.7) Tez konusunun önemi	3
1.1.8) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.9) Tez konusunun önemi	3
1.1.10) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.11) Tez konusunun önemi	3
1.1.12) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.13) Tez konusunun önemi	3
1.1.14) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.15) Tez konusunun önemi	3
1.1.16) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.17) Tez konusunun önemi	3
1.1.18) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.19) Tez konusunun önemi	3
1.1.20) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.21) Tez konusunun önemi	3
1.1.22) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.23) Tez konusunun önemi	3
1.1.24) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.25) Tez konusunun önemi	3
1.1.26) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.27) Tez konusunun önemi	3
1.1.28) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.29) Tez konusunun önemi	3
1.1.30) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.31) Tez konusunun önemi	3
1.1.32) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.33) Tez konusunun önemi	3
1.1.34) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.35) Tez konusunun önemi	3
1.1.36) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.37) Tez konusunun önemi	3
1.1.38) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.39) Tez konusunun önemi	3
1.1.40) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.41) Tez konusunun önemi	3
1.1.42) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.43) Tez konusunun önemi	3
1.1.44) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.45) Tez konusunun önemi	3
1.1.46) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.47) Tez konusunun önemi	3
1.1.48) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.49) Tez konusunun önemi	3
1.1.50) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.51) Tez konusunun önemi	3
1.1.52) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.53) Tez konusunun önemi	3
1.1.54) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.55) Tez konusunun önemi	3
1.1.56) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.57) Tez konusunun önemi	3
1.1.58) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.59) Tez konusunun önemi	3
1.1.60) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.61) Tez konusunun önemi	3
1.1.62) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.63) Tez konusunun önemi	3
1.1.64) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.65) Tez konusunun önemi	3
1.1.66) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.67) Tez konusunun önemi	3
1.1.68) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.69) Tez konusunun önemi	3
1.1.70) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.71) Tez konusunun önemi	3
1.1.72) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.73) Tez konusunun önemi	3
1.1.74) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.75) Tez konusunun önemi	3
1.1.76) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.77) Tez konusunun önemi	3
1.1.78) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.79) Tez konusunun önemi	3
1.1.80) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.81) Tez konusunun önemi	3
1.1.82) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.83) Tez konusunun önemi	3
1.1.84) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.85) Tez konusunun önemi	3
1.1.86) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.87) Tez konusunun önemi	3
1.1.88) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.89) Tez konusunun önemi	3
1.1.90) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.91) Tez konusunun önemi	3
1.1.92) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.93) Tez konusunun önemi	3
1.1.94) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.95) Tez konusunun önemi	3
1.1.96) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.97) Tez konusunun önemi	3
1.1.98) Tez konusunun gerekliliği	3
1.1.99) Tez konusunun önemi	3
1.1.100) Tez konusunun gerekliliği	3

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Sayfa No

ÖZET

SUMMARY

I. GİRİŞ

I.1. Konu ve Amaç 1

I.2. Konu ile ilgili çalışmalara toplu bakış 2

II. ELASTİSİTE TEORİSİ 3

II.1. Düzlem Şekil Değiştirme Hali 3

II.2. Düzlem Gerilme hali 5

III- DÖNEL SİLİNDİRİK KABUKLAR 7

III.1. Tarifler 7

III.2. Kabuller 7

III.3. Silindirik Kabuk Denklemlerini Oluşturan
Kuvvetler 8

III.4. Kabuk Denge Denklemleri 9

III.5. Kesit Tesirleri ve Kesit Momentleri 10

III.5.1. Kesit Tesirinin Çıkarılışına Ait Bir
Örnek 11

III.6. Mambran Gerilme Hali 12

III.7. Kabuk Elemanında Şekil Değiştirme Denklemleri 12

III.8. Kabuk Elemanında Elastisite (Bünye) Denklemleri 13

III.9. Kesit Tesirleri 13

IV- DÖNEL SİLİNDİRİK YÜKLENMİŞ DÖNEL SİLİNDİRİK KABUĞUN
EĞİLMELİ HESABI

IV.1. Sıvı Basıncına Maruz Silindirik Hazneler 15

IV.1.1) Hazne Denklemlerinin Çıkarılması 15

IV.1.2) Dönel Silindirik Kabuklerin ve Yüklerinin
Belirlenmesi 19

IV.1.2.a) Silindirik Basıncılı Boru 19

IV.1.2.b) Silindirik Sıvı Haznesi 19

IV.2. Silindirik Kabuğun Diferansiyel Denklemlerle
Çözümü 19

IV.2.1. Cidar Kalınlığı sabit haznenin diferansiyel Denklemlerinin İntegrasyonu	19
IV.2.2. Ankastre Cidarlı Silindirik Sıvı Haznesi	
IV.2.2.a) Sayısal Örnek	25
IV.2.3. Ankastre Cidarlı Silindirik Basınçlı Borular	30
IV.2.3.a) Sayısal Örnek	33
IV.3. Silindirik Kabuğun Sonlu Farklarla Çözümü	37
IV.3.1) Sonlu Farklar Metodu	37
IV.3.2) Sonlu Farklar Ağının Teşkil Edilmesi	37
IV.3.3) Ankastre Cidarlı Silindirik Sıvı Haznesi	41
IV.3.3.a) Sayısal Örnek	42
IV.3.4) Ankastre Cidarlı Silindirik Basınçlı Borular	49
IV.3.4.a) Sayısal Örnek	49
IV.3.5) Farklı Aralıklı Sonlu Frklar Yöntemi ile Çözüm	55
IV.3.5.a) Farklı Aralıklı Sonlu Farklar Ağının Teşkili	55
IV.3.5.b) Sayısal Örnek	56
V- SİMETRİK OLMAYAN YÜK DURUMUNDA SİLİNDİRİK KABUK ÇÖZÜMÜ	62
V.1) İki bağımsız Değişkene Bağlı Sonlu Farklar Metodu	62
V.1.1) Kartezyen Koordinatlarda Sonlu Farkların İki Değişkenli Fonksiyonlar için Uygulaması	62
V.1.2) Sınır Şartları	67
V.2) Diferansiyel Denklemin Teşkil Edilmesi	70
V.2.1) Kesit Tesirleri ve Momentlerinin Tespiti	73
V.2.2) Genel Mesnetlenme Şekillerine Göre Diferansiyel Denklemin Çıkarılması	74
V.2.3) Sonlu Farklarla Çözüm için x,y,z koordinatlarına bağlı olarak diferansiyel denklemin çıkarılması	77

VI. BÖLÜM	
SONUÇLAR	81
VI.1.1) Silindirik Su deposu sonuçlarının incelenmesi	81
VI.1.2) Basıncı Boruların Hesap Sonuçlarının Karşılaştırılması	86
KAYNAKLAR	90
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bu çalışmada, dönel silindirik kabukların çeşitli yüklemelerde diferansiyel denklemlerle ve sonlu farklar metodu ile eğilmeli hesabı üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde, konu ve amaç hakkında bilgiler verilip çalışmalara genel olarak bakılmıştır.

İkinci bölümde; çalışmalarıma yardımcı olmasından dolayı elastisite teorisi üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde; dönel silindirik kabukların tarifisi yapıp, kabul-ler ve denge denklemleri ile gerekli diğer denklemler çıkartılmıştır.

Dördüncü bölümde; dönel silindirik kabuğun, gaz basıncı ve sıvı basıncı durumunda hazne denklemleri çıkartılarak sayısal örnekler verilmiştir. Sayısal örnekler diferansiyel denklemlerle ve sonlu farklar metodlarıyla çözülmüştür.

Beşinci bölümde; dönel simetrik yük yerine simetrik olmayan bir toprak basıncı ele alınarak eğilme hesabı sonlu farklarla çözülmüştür.

Altıncı bölümde; diferansiyel denklemlerle çözülen örneklerle sonlu farklarla çözülen örnekler karşılaştırılmıştır. Ayrıca sıvı basıncına maruz silindirik depo çözümü aynı örneğin değişik çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, sonuçlar ve kaynaklar yer almaktadır.

SUMMARY

In this thesis, under various loadings, rotational cylindrical shells' deflection calculations with differential equations and with finite differences method are searched.

In the first chapter, information about the purpose and the subject and an overall look at the work are given.

In the second chapter, theory of elasticity, because of its contribution to my work, is concerned.

In the third chapter, after the rotational cylindrical shells are defined and the assumptions are stated, the equations of equilibrium and other required equations are evolved.

In the fourth chapter, when exposed to gas and hydrostatic pressure, shell's container equations are evolved and numerical examples are solved by differential equations and finite differences method.

In the fifth chapter, instead of rotational symmetric loading non symmetric soil pressure is considered and the deformation calculations are solved by finite differences method.

In the sixth chapter, the examples which are solved by differential equations and finite differences method are compared, and cylindrical container's exposed to hydrostatic pressure, solutions compared to same example's different solutions.

In the final chapter of the work the results and references take place.

BÖLÜM I

GİRİŞ

I.1. KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI

İnce elastik yüzeysel taşıyıcılar, yapı mühendisliğinde: çatı konstrüksiyonları, su hazneleri, silolar, soğutma kuleleri; endüstri yapılarında: yüksek baca gruplarının rüzgar yüklerine karşı koruyucu kuleleri, makine mühendisliğinin çeşitli dallarında: basınçlı kazanlar, uçak ve gemi gövdeleri gibi tekniğin birçok kesimlerinde uygulama alanı bulmaktadır.

Bu çalışmanın amacı; dönel silindirik kabukların, yüzey normali doğrultusunda olan üniform veya lineer yayılı gaz ve su basıncı, kısmi dış ve simetrik olmayan basınca maruz olması halinde, sınır durumlarına göre eğilme probleminin sayısal olarak çözümü yani kabuğun zarlarının, yer değiştirme bileşenlerinin nümerik olarak ve nokta nokta hesabıdır.

Hesaplama en yaygın olarak kullanılan metodlar: Sonlu farklar metodu, nümerik integrasyon metodu, sonlu elemanlar metodu en kullanışlı olanları arasında yer alır. Özellikle, sonlu elemanlar metodu, değişik yüklemelerin etkisinde ve çeşitli sınır şartlarına haiz kabuk sistemlerinde kolaylıkla uygulanabilmesi bakımından büyük önem kazanmaktadır. Esasen, bölgesel yüklemeler veya kenar bozucu tesirlerde, bölge civarında, istenildiği kadar sık eleman almak ve hesap algoritmasının çubuk teorisine benzer şekle dönüştürülebilme olanağı, bu metoda karşı olan eğilimi daha da arttırmaktadır. Bu metodda çözümün yakınsaklığı, sistemde seçilen eleman adedi, sonlu elemanın geometrik özellikleri ile yüzeyin geometrik özellikleri arasındaki uygunluk, kabuk kalınlığının değişim fonksiyonu, seçilen uç deplasman fonksiyonlarının mertebesi ve bazı yakınsaklık kriterlerini sağlama özelliğine bağlıdır. Nümerik integrasyon ve sonlu farklar metodu ise, diferansiyel sınır ve denge şartlarını sağlayan fonksiyonun seçilebi- len başka bir fonksiyonla yaklaşık olarak ifade edilebileceği kabu- lüne ve her noktadaki integral veya türev değerlerinin seçilen fonksi-

BÖLÜM I

GİRİŞ

I.1. KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI

İnce elastik yüzeysel taşıyıcılar, yapı mühendisliğinde: çatı konstrüksiyonları, su hazneleri, silolar, soğutma kuleleri; endüstri yapılarında: yüksek baca gruplarının rüzgar yüklerine karşı koruyucu kuleleri, makine mühendisliğinin çeşitli dallarında: basınçlı kazanlar, uçak ve gemi gövdeleri gibi tekniğin birçok kesimlerinde uygulama alanı bulmaktadır.

Bu çalışmanın amacı; dönel silindirik kabukların, yüzey normali doğrultusunda olan üniform veya lineer yayılı gaz ve su basıncı, kısmi dış ve simetrik olmayan basınca maruz olması halinde, sınır durumlarına göre eğilme probleminin sayısal olarak çözümü yani kabuğun zarlarının, yer değiştirme bileşenlerinin nümerik olarak ve nokta nokta hesabıdır.

Hesaplama en yaygın olarak kullanılan metodlar: Sonlu farklar metodu, nümerik integrasyon metodu, sonlu elemanlar metodu en kullanışlı olanları arasında yer alır. Özellikle, sonlu elemanlar metodu, değişik yüklemelerin etkisinde ve çeşitli sınır şartlarına haiz kabuk sistemlerinde kolaylıkla uygulanabilmesi bakımından büyük önem kazanmaktadır. Esasen, bölgesel yüklemeler veya kenar bozucu tesirlerde, bölge civarında, istenildiği kadar sık eleman almak ve hesap algoritmasının çubuk teorisine benzer şekle dönüştürülebilme olanağı, bu metoda karşı olan eğilimi daha da arttırmaktadır. Bu metodda çözümün yakınsaklığı, sistemde seçilen eleman adedi, sonlu elemanın geometrik özellikleri ile yüzeyin geometrik özellikleri arasındaki uygunluk, kabuk kalınlığının değişim fonksiyonu, seçilen uç deplasman fonksiyonlarının mertebesi ve bazı yakınsaklık kriterlerini sağlama özelliğine bağlıdır. Nümerik integrasyon ve sonlu farklar metodu ise, diferansiyel sınır ve denge şartlarını sağlayan fonksiyonun seçilebi- len başka bir fonksiyonla yaklaşık olarak ifade edilebileceği kabu- lüne ve her noktadaki integral veya türev değerlerinin seçilen fonksi-

yonun ordinatları cinsinden belirlenmesi esasına dayanmaktadır. Bu metodların formülasyonu için seçilen fonksiyon, genellikle bir polinomdur. Ordinat aralıklarının eşit seçilmesi ile elde edilen integral veya türev formüllerindeki katsayılar sabit sayılar olarak belirlenirler. Eşit aralık seçimi formülasyonu basitleştirirken, bölgesel tesirlerin önem kazandığı hallerde, bölge dışında gereğinden fazla nokta alınmasına sebep olabilmektedir.

Denklem takımının mertebesini artıran bu hususu önlemek için bazı çalışmalarda, sabit nokta aralığının istenen bölgelerde sabit oranda küçülmesini sağlayan formülasyonlar elde edilmiştir. Ancak bu halde de bölge dışındaki nokta aralıkları, bölge içerisindeki aralıklara bağlı olmaktadır.

Sonlu farklar metodunun yakınsaklığının, nokta aralıklarından başka, seçilen fonksiyon ve dolaylı olarak da kesme hatasının mertebesine bağlı olduğu bilinmektedir.

I.2.)Konu ile ilgili Çalışmalara Toplu Bakış

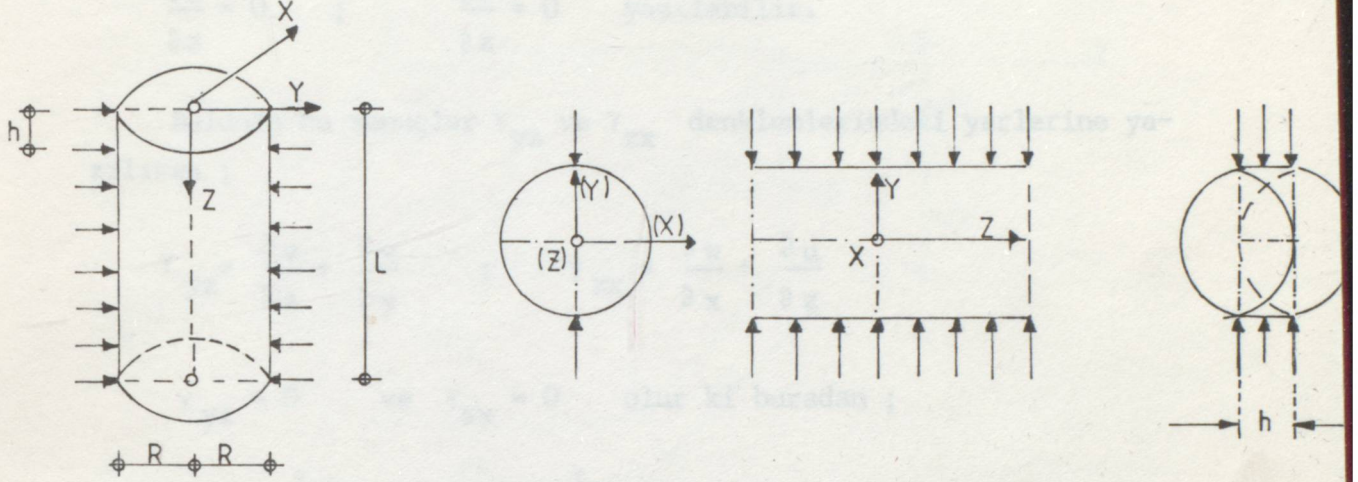
İnce elastik kabukların ve bunun önemli bir bölümünü teşkil eden dönel kabukların eğilmeli teorisini kapsayan genel bağıntılar ilk olarak LOVE tarafından verilmiştir. GIRKMANN, VLASOV, NOVOZHILOV ve başkaları LOVE'ın temel denklemlerine dayanarak kabukların özel şekillerine ait mambran ve eğilmeli çözümlerini vermektedirler.

SOARE sonlu farklar metodunu, dönel ve dönel olmayan kabuk sistemlerinin mambran çözümü için uygulamıştır. Burada, ikinci mertebe parabolden türetilerek elde edilmiş klasik sonlu fark denklemleri ile kabukların zati yüküne göre mambran hesabı yapılmıştır.

PENNY, TIMOSHENKO' nun diferansiyel denklemlerini dönel kabuklar için sonlu fark denklemlerine uygulayarak sonuca gitmektedir.

II- ELASTİSİTE TEORİSİ

II.1) DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ



Şekil 1.1.

Yarıçapı uzunluğuna nazaran küçük olan bir silindiri ele alalım. Bu silindir üzerine, aynı çap düzlemi üzerinde, ters yönde toplu olarak dengede oldukları kabul edilen düzgün yayılı iki çizgisel yük etki ettirilmiştir olsun. z eksenini silindir eksenine intibak eden bir x, y, z koordinat eksen takımı yardımıyla silindir noktaları tespit edilmiş olsun. Silindirin orta taraflarındaki gerilme durumu pratik olarak z'den bağımsız olacaktır. Bu bölgede z eksenine dik iki düzlem yardımıyla daire levhası şeklinde bir eleman çeki çıkartalım. Bu durumda kesitler deformasyondan sonra da düzlem kalacaklardır.

σ_x ve σ_y normal gerilmeleri ve bunların oluşturduğu enine büzülme x ve y ile değişeceğinden, sınır kesitlerinin düzlem kalması aynı zamanda bir σ_z gerilmesinin olmasıyla mümkün olacaktır.

Dik kesitlerin düzlem kalmasına dayanarak bu düzleme ait bütün noktaların aynı (w) miktarı kadar bir yer değiştirme yaparlar. Bunlar x ve y'den bağımsız olurlar ki;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Ayrıca z eksenine paralel doğrular üzerinde bulunan bütün noktalar aynı u ve v yerdeğişimine maruz kalır. Bundan dolayı bu yerdeğişirmeler z'den bağımsız olmalıdır ki;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Bulunan bu sonuçlar γ_{yz} ve γ_{zx} denklemlerindeki yerlerine yazılırsa ;

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \text{ve} \quad \gamma_{zx} = 0 \quad \text{olur ki buradan ;}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad \text{'den}$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad \text{ve} \quad \tau_{zx} = 0 \quad \text{bulunur.}$$

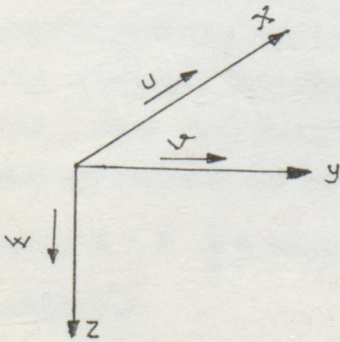
Buna göre düzlem şekil değiştirme halinde,

$\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ve $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ kayma gerilmeleri sıfırdır. Fakat düzlem gerilme halinden farklı olarak σ_z normal gerilmeleri vardır.

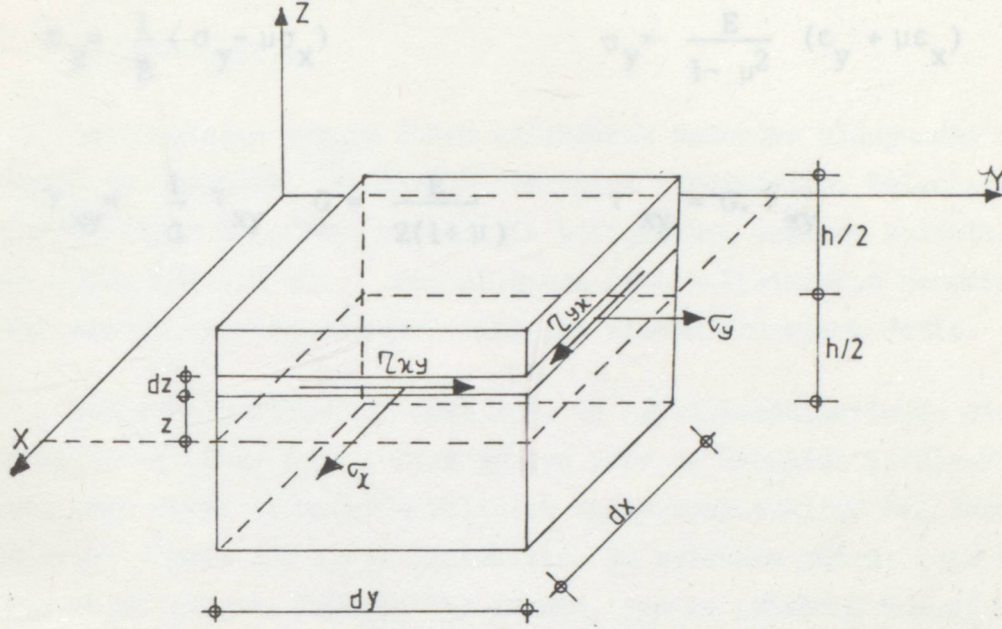
Sonuç

$$\gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{zx} = 0 \quad ; \quad \tau_{zx} = 0$$



II.2) DÜZLEM GERİLME HALİ



Şekil 2.1.

Levha ve plak orta düzlemine dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri yok sayılabilecek kadar küçüktür.

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

Geriye kadar σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri, orta düzleme dik olan kesitlerde yer alır ve hepsi orta düzleme paraleldir. İnce levhalar halinde bunların, bütün h kalınlığı boyunca düzgün olarak yayıldığı kabul edilebilir. Bu takdirde hesaplar, gerçek gerilmelerin ortalama değerine göre yapılmış olur. Genel olarak bu gerilmeler x ve y koordinatlarına bağlıdır. Elastik olan enine deformasyonun etkisi altında levha kalınlığı değişeceğinden başlangıçta düzlem kalan $z = \pm \frac{1}{2} h$ sınır yüzleri deformasyon esnasında düzlem kalmayacaklardır.

$$\sigma_z \approx 0 \quad \text{ve} \quad \epsilon_z \approx 0 \quad \text{alındı.}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

III) DÖNEL SİLİNDİR KABUKLAR

III.1) Tarifler

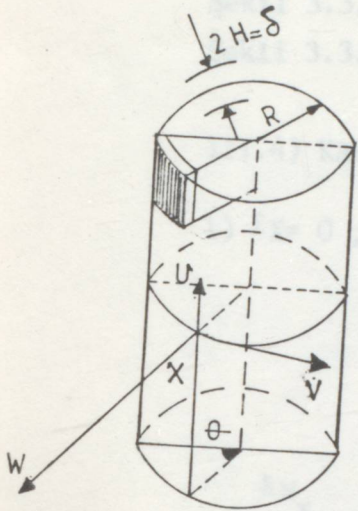
Çalışmamızın konusu dönel silindirik kabuklar olduğundan ilk olarak bu formdaki kabukların statüğünü belirtelim. Kalınlığı olan ve diğer boyutları ve eğrilik yarıçapları yanında kalınlığı küçük olan, her noktada kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri bir yüzey olan yüzeysel taşıyıcı sistemlere kabuk denir.

Kabuk kalınlıklarını ortalayan ve eğrilik eğrilerinden oluşan yüzeye orta yüzey denir. Orta yüzeye göre de kabuklar isimlendirilir. Yani kabuk işlemlerde kolaylık sağlayacak şekilde seçilecek bir referans yüzeyi ile tarif edilebilir. Bu referans yüzeyi çoğu kez orta yüzey alınır. Böylece bir kabuğu, sadece ortalama yüzeyi ve kalınlığıyla tarif etmek olanaklıdır.

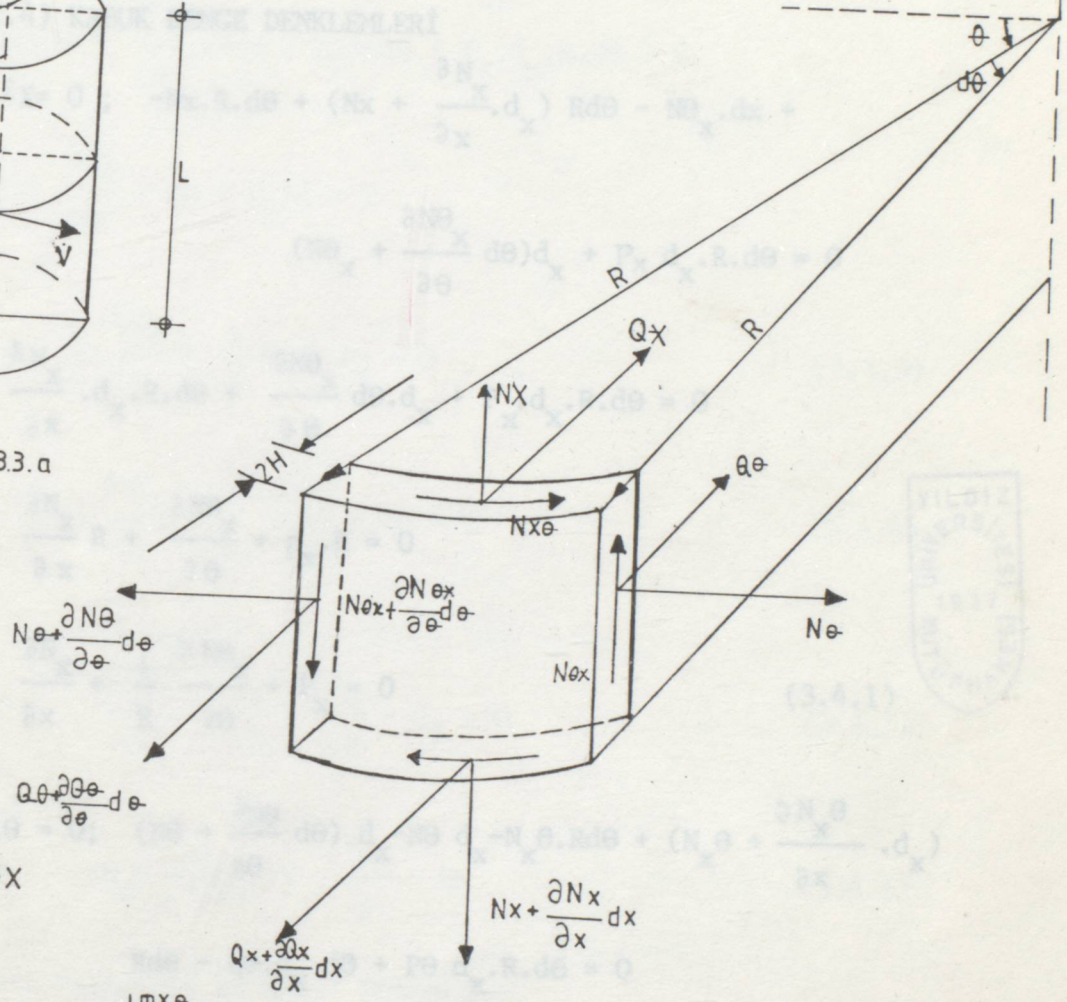
III.2) Kabuller

- a) Kabuk kalınlığı, kabuğun diğer boyutlarına nazaran küçüktür.
- b) Sehimler, kabuk kalınlığına göre küçüktür. (2.mertebe terimleri ihmal edilebilir.)
- c) Kabuk ortalama yüzeye dik doğrultuda tesir eden normal gerilmeler, ihmal edilebilecek kadar küçüktür.
- d) Deformasyondan önce kabuk yüzeyine dik olan bir doğru, deformasyondan sonra da dik ve o yüzeyin normali üzerinde olur. (Kirchhoff - Love hipotezi)
- e) Malzeme homojen ve lineer elastiktir. Hooke Kanunu geçerlidir.

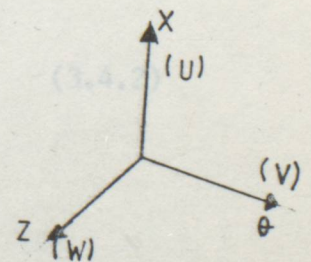
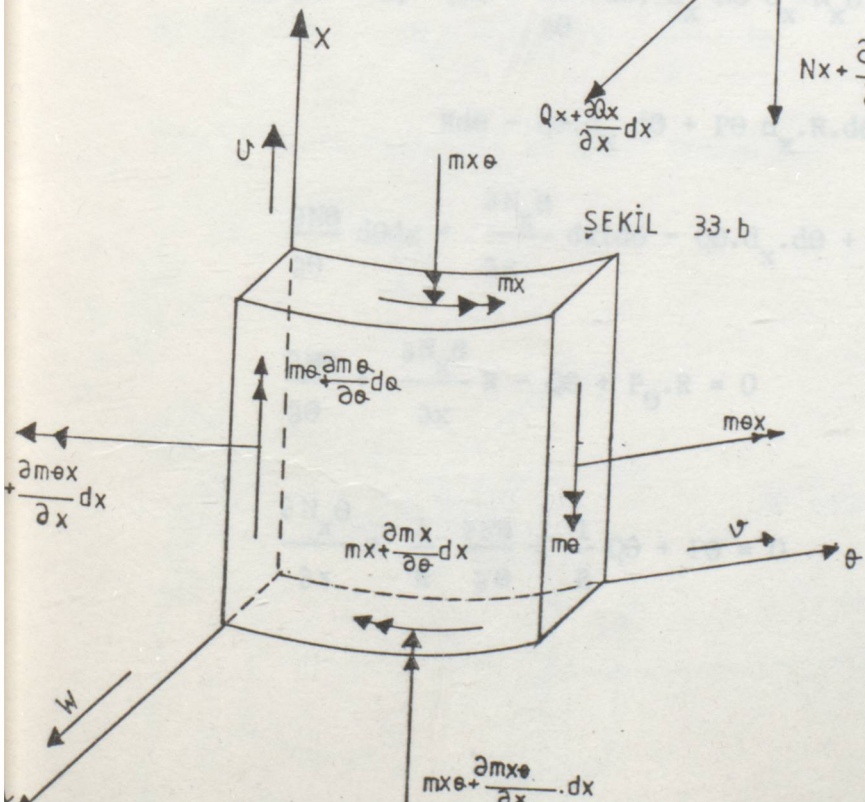
III.3) SİLİNDİRİK KABUK DENKLEMLERİNİ OLUŞTURAN KUVVETLER



ŞEKİL 33.a



ŞEKİL 33.b



Şekil 3.3. Silindirik kabuğun karakteristikleri

Şekil 3.3.a. Kabuk boyutları ve seçilen eksen takımı

Şekil 3.3.b. Kabuk elemanına etkiyen kesit tesirleri ve yönleri

Şekil 3.3.c. Kabuk elemanına etkiyen momentler.

III.4) KABUK DENGE DENKLEMLERİ

$$1) \Sigma X = 0 ; -N_x \cdot R \cdot d\theta + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot d_x) R d\theta - N_{\theta x} \cdot dx +$$

$$(N_{\theta x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta) d_x + P_x \cdot d_x \cdot R \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot d_x \cdot R \cdot d\theta + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} d\theta \cdot d_x + P_x \cdot d_x \cdot R \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} R + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + P_x \cdot R = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + P_x = 0 \quad (3.4.1)$$

$$2) \Sigma \theta = 0 ; (N_{\theta} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta) d_x - N_{\theta} d_x - N_x \theta \cdot R d\theta + (N_x \theta + \frac{\partial N_x \theta}{\partial x} \cdot d_x)$$

$$R d\theta - Q_{\theta} \cdot d_x \cdot d\theta + P_{\theta} \cdot d_x \cdot R \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} d\theta d_x + \frac{\partial N_x \theta}{\partial x} d_x d\theta - Q_{\theta} \cdot d_x \cdot d\theta + P_{\theta} \cdot d_x \cdot R \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_x \theta}{\partial x} R - Q_{\theta} + P_{\theta} \cdot R = 0$$

$$\frac{\partial N_x \theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} Q_{\theta} + P_{\theta} = 0 \quad (3.4.2)$$



$$3) \Sigma z = 0, -Q_x \cdot R d\theta + (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) R d\theta - Q_\theta dx + (Q_\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta) dx \quad (3.3.1 a-b)$$

$$+ N_\theta \cdot dx \cdot d\theta + P_z \cdot dx \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (3.3.2 a-b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx R d\theta + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} d\theta dx + N_\theta dx d\theta + P_z \cdot dx \cdot R \cdot d\theta = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} R + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + N_\theta + P_z \cdot R = 0$$

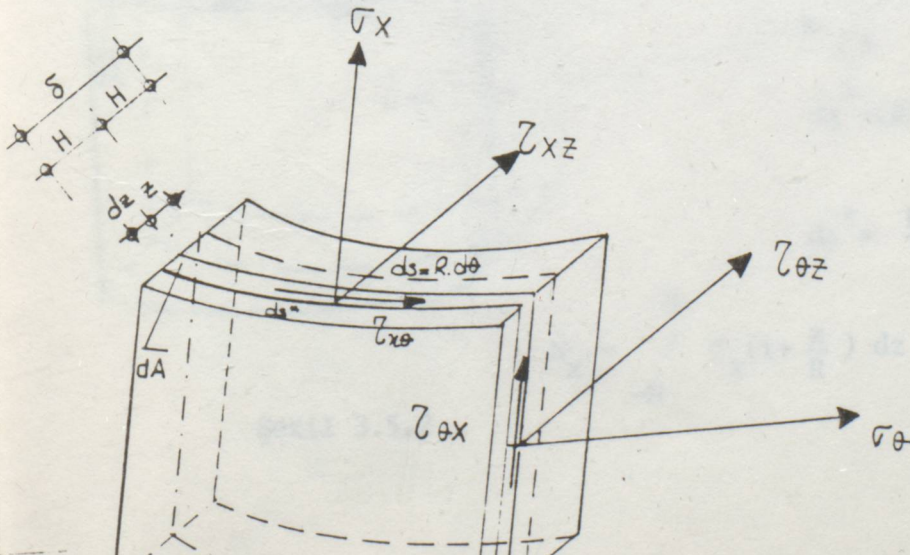
$$\frac{\partial Q_n}{\partial n} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} N_\theta + P_z = 0 \quad (3.4.3)$$

$$4) \Sigma M_x = 0 ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_x = 0 \quad (3.4.4)$$

$$5) \Sigma M_\theta = 0 ; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta = 0 \quad (3.4.5)$$

$$6) \Sigma M_z = 0 ; \quad (N_x \theta - N_{\theta x}) + \frac{M_{\theta x}}{R} = 0 \quad (3.4.6)$$

III.5) Kesit Tesirleri ve Kesit Momentleri



Şekil 3.5.1

$$N_x = \int_{-H}^H \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$N_\theta = \int_{-H}^H \sigma_\theta dz \quad (3.5.1 \text{ a-b})$$

$$N_{\theta x} = \int_{-H}^H \tau_{\theta x} dz$$

$$N_{x\theta} = \int_{-H}^H \tau_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3.5.2 \text{ a-b})$$

$$M_\theta = - \int_{-H}^H \sigma_\theta z dz$$

$$M_x = - \int_{-H}^H \sigma_x z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3.5.3 \text{ a-b})$$

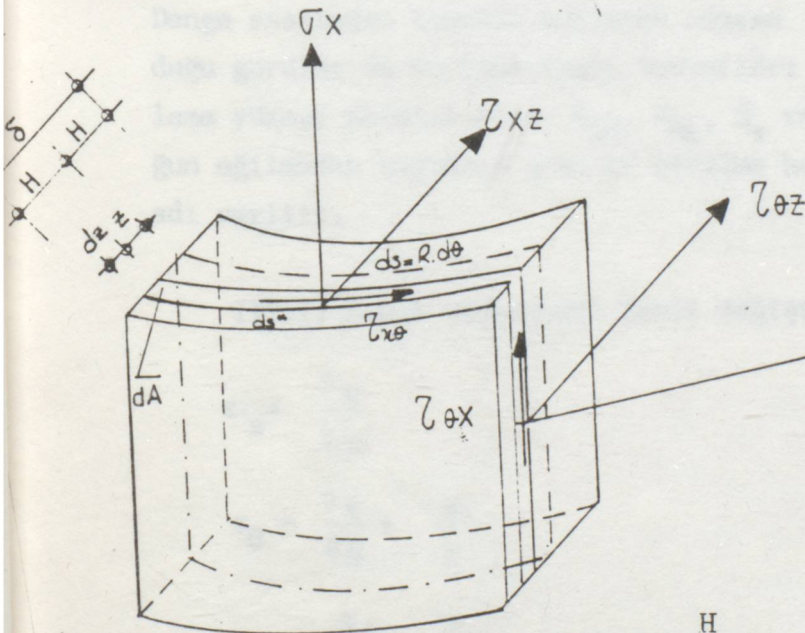
$$M_{\theta x} = - \int_{-H}^H \tau_{\theta x} z dz$$

$$M_{x\theta} = - \int_{-H}^H \tau_{x\theta} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3.5.4 \text{ a-b})$$

$$Q_\theta = + \int_{-H}^H \tau_{\theta z} dz$$

$$Q_n = \int_{-H}^H \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3.5.5 \text{ a-b})$$

III.5.1) Kesit tesirinin çıkarılışına bir örnek :



$$N_x = \int_{-H}^{+H} \sigma_x \cdot ds^* \cdot dz$$

$$ds^* = (R+z)d\theta$$

$$ds = R d\theta$$

$$d\theta = \frac{ds}{R}$$

$$ds^* = (R+z) \frac{ds}{R} = \left(\frac{R+z}{R}\right) \frac{ds}{1}$$

$$ds^* = \frac{R+z}{R} = 1 + \frac{z}{R}$$

$$N_x = \int_{-H}^H \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3.7.3)$$

Şekil 3.5.2

III.6) MAMBRAN GERİLME HALİ

Birçok hallerde ortalama yüzeye paralel olan gerilmelerin $\delta = 2H$ kabuk kalınlığınca üniform olarak yayıldığını ve dolayısıyla z'den bağımsız olduğunu kabul etmek mümkündür. Bu takdirde kesit tesiri ve kesit momentlerindeki gerilme bileşenleri integral dışına çıkarılarak kesit tesirlerinin integraldeki eğriliği oluşturan terimler düşerek kesit kuvvetleri için;

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} \text{ bulunur ve}$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = \tau_{x\theta} \cdot \delta = \tau_{\theta x}$$

$$N_x = \sigma_x \cdot \delta$$

$$N_\theta = \sigma_\theta \cdot \delta \text{ elde edilir.}$$

Kesit momentlerinin integrasyonundan ters olarak, sadece eğriliği olan terimler kalır, bunlarda ihmal edilerek;

$$m_x = m_\theta = m_{x\theta} = m_{\theta x} = 0 \text{ bulunur.} \quad (3.8.1)$$

Denge esasından hareket edilecek olursa Q_x ve Q_y 'nin de sıfır olduğu görülür ve böylece kesit kuvvetleri olarak geriye, hepsi ortalama yüzeye paralel olan $N_{x\theta}$, $N_{\theta x}$, N_x ve N_θ ifadeleri kalır. Kabuğun eğilmeden bağımsız olan bu gerilme haline membran gerilme hali adı verilir. (3.8.3)

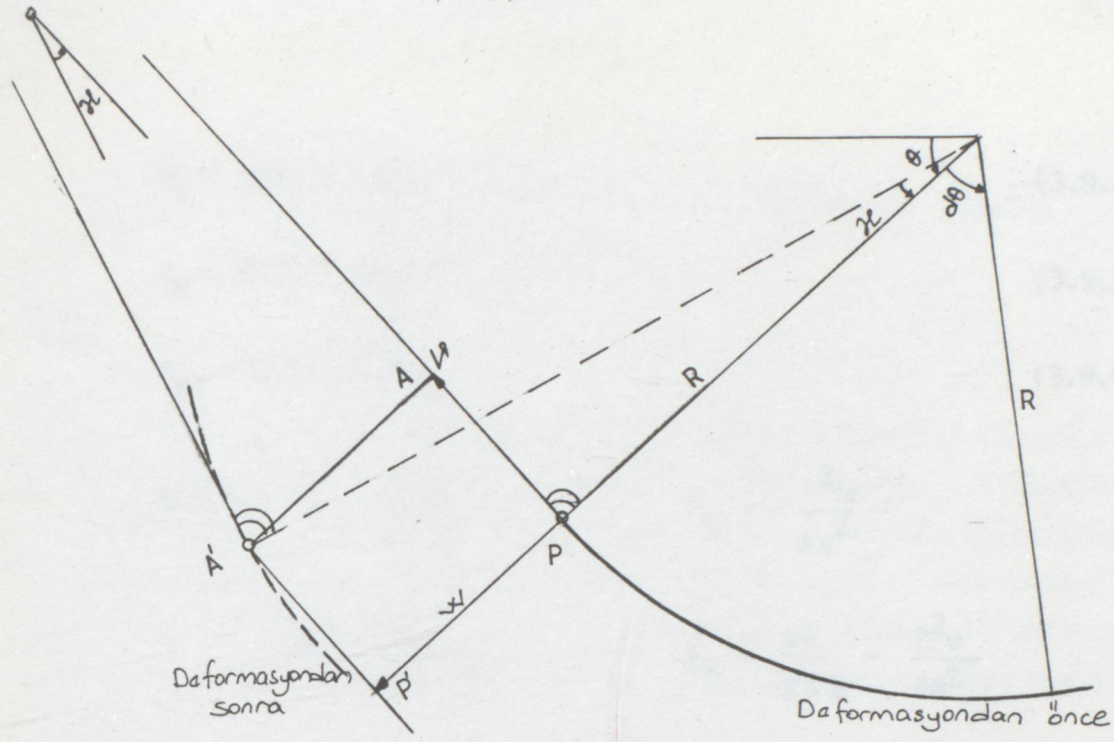
III.7) Kabuk elemanında Şekil değiştirme denklemleri

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.7.1)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \quad (3.7.2)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.7.3)$$

$$= \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.7.4)$$



Şekil 3.7.

III.8) Kabuk Elemanında elastisite (bünye) denklemleri

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) \quad (3.8.1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x) \quad (3.8.2)$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{1-\mu}{2} \gamma_{x\theta} \right) = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{x\theta} \quad (3.8.3)$$

III.9) Kesit Tesirleri

$$N = \sigma \cdot \delta$$

$$N_x = C (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) \quad (3.9.1)$$

$$N_\theta = C (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x) \quad (3.9.2)$$

$$N_{\theta x} = N_{x\theta} = C \frac{1-\mu}{2} \gamma_{x\theta} \quad (3.9.3)$$

$$m_x = D(K_x + \mu K_\theta) \quad (3.9.4)$$

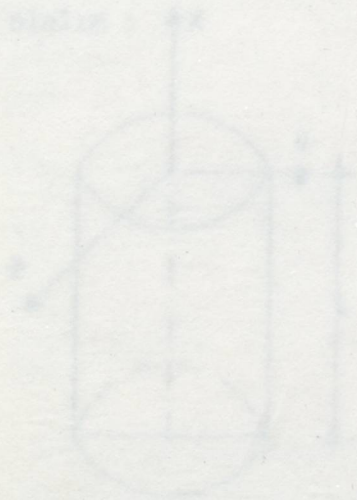
$$m_\theta = D(K_\theta + \mu K_x) \quad (3.9.5)$$

$$m_{x\theta} = D(1-\mu) K_{x\theta} \quad (3.9.6)$$

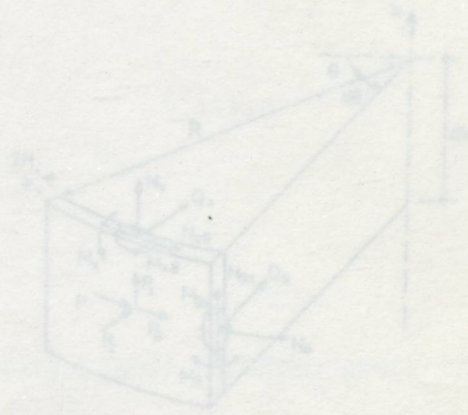
Burada; $C = \frac{E \delta}{1-\mu^2}$ $K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

$$D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad K_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$K_{x\theta} = \frac{\partial v}{R \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$$



Şekil 4.1.1.



Şekil 4.1.2.

4.1.1) Düzgün Gerilmede Çıkarılması

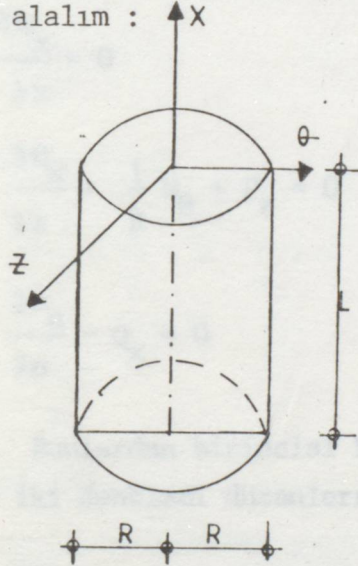
Düzgün gerilme ve homojen serbestçe deformasyon yapmasını sağlayan bir yapıda bir maddanın gerilme hali meydana gelir ki, $K_x = K_\theta = 0$, $K_{x\theta}$ kuvvetleri sıfır olur, M_θ kuvvetleri ise çapraz kuvvetlerdir. Fakat homojen bittirik olan parçalar (homojen) diğer deformasyonlara engel olacaktır, maddanın gerilme hali aynı, homojen kısım olduğu halinde de gerilme hali

IV. DÖNEL SİLİNDİRİK YÜKLENMİŞ DÖNEL SİLİNDİRİK KABUĞUN EĞİLMELİ HESABI

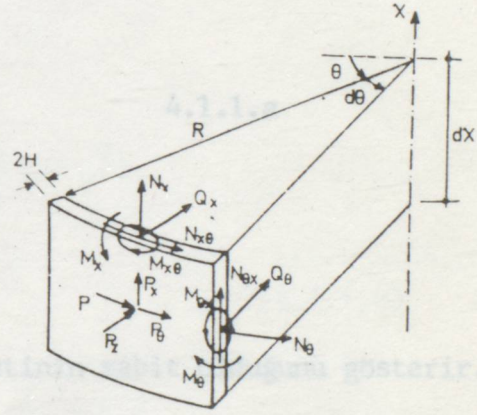
IV.1) Sıvı Basıncına Maruz Silindirik Hazneler

Tatbikatta sık sık eksenine göre simetrik olarak yayılmış kuvvetlerin tesirine maruz dairesel silindirlere ait problemlerle karşılaşırız. Buhar basıncının tesirine maruz silindirik kazanlardaki gerilme yayılışı, eksenleri düşey olan ve iç sıvı basıncıya maruz bırakılan silindirik kaplardaki gerilmeler ve üniform iç basınca maruz dairesel borulardaki gerilmeler bu çeşit problemlere örnek teşkil ederler.

Bu problemlerin çözümü için; gerekli problemleri çıkarmak için Şekil 4.1.2 gibi bir elemanı ve bu elemanın denge denklemlerini gözönüne alalım :



Şekil 4.1.1.



Şekil 4.1.2.

IV.1.1) Hazne Denklemlerinin Çıkarılması

Simetriden dolayı ve haznenin serbestçe deformasyon yapmasına mani olunmamışsa bu taktirde bir membran gerilme hali meydana gelir ki, $N_{xθ} = N_θ$ kesme kuvvetleri sıfır olur. $N_θ$ kuvvetleri ise çevre boyunca sabittir. Fakat hazneye bitişik olan parçalar (hazne tabanı) cidar deformasyonuna engel olacağından, membran gerilme hali bozular. Haznenin kısmen dolu olması halinde de gerilme hali

eğilmeden bağımsız olmaz. Bununla birlikte dönele simetriden dolayı N_{θ} ve N_x (basıncılı boruda N_n kuvveti oluşur, ancak sıvı haznesinde N_x kuvveti oluşmaz.) kesit kuvvetlerinin yanı sıra sadece m_n ve m_{θ} eğilme momentleri ile Q_x kesme kuvvetimeydana gelir. Silindirik haznenin basınçtan dolayı oluşan yük bileşenleri z doğrultusunda olacağından P_x ve P_{θ} yük bileşenleri de sıfır olur. Kısaca özetlersek ;

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = 0$$

$$m_{n\theta} = m_{\theta n} = 0$$

$$P_n = P_{\theta} = 0 \quad \text{ve burada } \tau_{\theta x} = 0 \text{ olduğundan } Q_{\theta} = 0 \text{ 'dır.}$$

Yukarıdaki terimleri III.4'de çıkartılan kabuk denge denklemlerine uygularsak;

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} N_{\theta} + P_z = 0 \quad 4.1.1.a$$

$$\frac{\partial m_n}{\partial n} - Q_x = 0$$

Bunlardan birincisi N_x kuvvetinin sabit olduğunu gösterir. Diğer iki denklemi düzenlersek;

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} N_{\theta} = -P_z$$

4.1.1.b

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

Bu iki denklemde N_{θ} , Q_x ve m_x bilinmeyenleri bulunmaktadır. Bu yüzden problemi çözmek için kabuğun orta yüzeyindeki noktaların yer değiştirmelerini gözönüne almak gerekir. Dönele simetriden dolayı çevre doğrultusundaki yerdeğiştirmenin v bileşeni sıfır olur. Dışarıya doğru olan yerdeğiştirmeyi de pozitif alırsak;

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_\theta = \frac{w}{R} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.1.1.g)$$

4.1.1.c

$$\epsilon_\theta = \frac{w}{R} \text{ olur.}$$

Hooke Kanunu'nu uygularsak;

$$N_x = \frac{E \delta}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) = \frac{E \delta}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{w}{R} \right) = 0$$

4.1.1.d

$$N_\theta = \frac{E \delta}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x) = \frac{E \delta}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Bu denklemlerin birincisinden ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \frac{w}{R}$$

ve ikincisinden

$$N_\theta = \frac{E \delta}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} - \mu^2 \frac{w}{R} \right) = \frac{E \delta}{1-\mu^2} \cdot \frac{w}{R} (1-\mu^2)$$

$$N_\theta = \frac{E \delta w}{R} \quad (4.1.1.e)$$

elde edilir.

Eğilme momentleri gözönüne alınırsa simetriden dolayı çevre doğrultusundaki eğriliğin değişmediği anlaşılır. w yer değişiminin dolayı, $\frac{1}{R}$ eğriliği $\frac{1}{R+w}$ olur. Burada meydana gelen m_θ eğilme momenti çok küçük olduğundan ihmal edilir.

Sadece $\mathcal{K}_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ eğriliği dikkate alınırsa,

$$m_x = D(K_x + \mu K_\theta)$$

$$K_\theta = 0, \quad K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad D = \frac{E \delta}{12(1-\mu^2)}$$

$$m_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ bulunur.} \quad (4.1.1.f)$$

Buradan e ve f denklemleri b denklemini düzenlenip yerine yazılırsa;

$$Q_x = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (4.1.1.g)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad \text{ikinci türevini alırsak;}$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\frac{1}{R} N_\theta - P_z$$

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_\theta = -P_z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{E \delta w}{R} = -P_z$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{R} \frac{E \delta w}{R} = -P_z$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E \delta w}{DR^2} = -\frac{P_z}{D} \quad \text{elde edilir.} \quad (4.1.1.h)$$

Burada;

$$\beta^4 = \frac{E \delta}{4R^2 D} = \frac{E \delta}{4R^2 \cdot \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2} \quad (4.1.1.j)$$

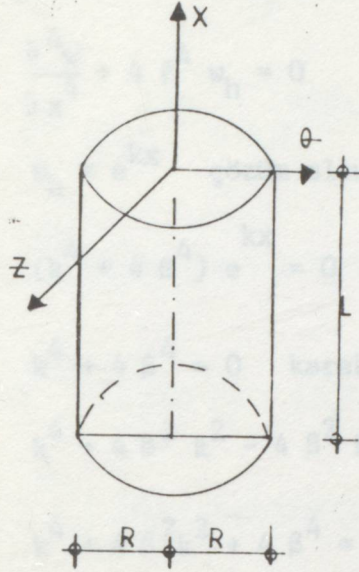
notasyonu kullanılarak 4.1.1.h denklemini şu basitleştirilmiş biçimde gösterilebilir :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \beta^4 w = -\frac{P_z}{D} \quad (4.1.1.k)$$

Bu denklemle dairesel silindirik kabukların simetrik deformasyonuna ait bütün problemler bu denklemlerin entegrasyonuna tatbik edilir.

IV.1.2) Dönel Silindirik Kabukların ve Yüklerinin Belirlenmesi

IV.1.2.a) Silindirik Basıncılı Boru



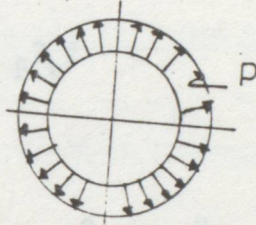
Şekil 4.1.2.a

Bu durumda $P_x = 0$, $P_y = 0$ ve
 $P_z = -P$ dir.

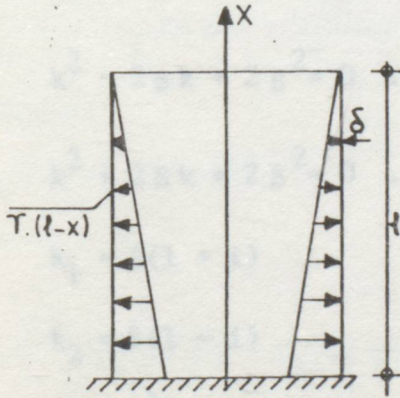
Buna göre iç kuvvetler;

$$N_\theta = PR$$

$$N_x = \frac{PR}{2}$$



IV.1.2.b) Silindirik Sıvı Haznesi



(Şekil 4.1.2.b)

$P_x = 0$, $P_y = 0$ ve

$$P_z = -\gamma(1-x)$$

Buna göre iç kuvvetler;

$$N_\theta = \gamma R(1-x)$$

$$N_x = 0$$

IV.2) Silindirik Kabuğun Diferansiyel Denklemlerle Çözümü

IV.2.1) Cidar Kalınlığı Sabit Haznenin Diferansiyel Denkleminin İntegrasyonu

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = -\frac{P_z}{D} \quad \text{silindirik kabuk denkleminin çözümü } w_h \text{ homojen}$$

çözümü ile $w_ö$ özel çözümün toplamı olarak;

$$w = w_h + w_ö \text{ şeklindedir.}$$

Homojen kısmı çözersek ;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \beta^4 w_h = 0$$

$$w_h = e^{kx} \text{ çözüm olsun.}$$

$$(k^4 + 4 \beta^4) e^{kx} = 0 \quad e^{kx} \neq 0 \quad (4.2.1.a)$$

$$k^4 + 4 \beta^4 = 0 \text{ karakteristik denklemi çözelim :}$$

$$k^4 + 4 \beta^2 k^2 - 4 \beta^2 k^2 + 4 \beta^4 = 0$$

$$k^4 + 4 \beta^2 k^2 + 4 \beta^4 = 4 \beta^2 k^2$$

$$(k^2 + 2 \beta^2)^2 = 4 \beta^2 k^2$$

$$k^2 + 2 \beta^2 = \pm 2 \beta k \quad (1)$$

$$k^2 + 2 \beta^2 = -2 \beta k \quad (2)$$

$$k^2 - 2 \beta k + 2 \beta^2 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

$$k^2 + 2 \beta k + 2 \beta^2 = 0 \quad \dots \quad (2) \text{ denklemlerinden;}$$

$$k_1 = \beta(1 + i)$$

$$k_3 = -\beta(1 + i)$$

$$k_2 = \beta(1 - i)$$

$$k_4 = -\beta(1 - i) \text{ bulunur. (4.2.1.b)}$$

$$w_h = e^{kx} \text{ çözümünde;}$$

$$w_1 = B_1 \cdot e^{k_1 x}$$

$$w_3 = B_3 \cdot e^{k_3 x}$$

$$w_2 = B_2 \cdot e^{k_2 x}$$

$$w_4 = B_4 \cdot e^{k_4 x} \quad (4.2.1.c)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
w_h &= B_1 e^{k_1 x} + B_2 e^{k_2 x} + B_3 e^{k_3 x} + B_4 e^{k_4 x} \\
&= B_1 e^{\beta(1+i)x} + B_2 e^{\beta(1-i)x} + B_3 e^{-\beta(1+i)x} + B_4 e^{-\beta(1-i)x} \\
&= e^{\beta x} [B_1 e^{i\beta x} + B_2 e^{-i\beta x}] + e^{-\beta x} [B_3 e^{-i\beta x} + B_4 e^{i\beta x}] \\
&= e^{\beta x} |B_1 \cos \beta x + i B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x - i B_2 \sin \beta x| + \\
&\quad e^{-\beta x} |B_3 \cos \beta x - i B_3 \sin \beta x + B_4 \cos \beta x + i B_4 \sin \beta x| \\
&= e^{\beta x} |(B_1 + B_2) \cos \beta x + i(B_1 - B_2) \sin \beta x| + \\
&\quad e^{-\beta x} |(B_3 + B_4) \cos \beta x + i(-B_3 + B_4) \sin \beta x|
\end{aligned}$$

$$B_1 + B_2 = C_1, \quad B_1 - B_2 = C_2, \quad B_3 + B_4 = C_3, \quad B_4 - B_3 = C_4$$

$$w_h = e^{\beta x} |C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x| + e^{-\beta x} |C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x|$$

bulunur.

$$w_{\ddot{o}} = f(x) \text{ dersek,}$$

$$w = w_h + w_{\ddot{o}}$$

$$w = e^{\beta x} |C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x| + e^{-\beta x} |C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x| + f(x) \quad (4.2.1.d)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dx} &= \frac{d f(x)}{dx} + \beta | e^{\beta x} |(\cos \beta x - \sin \beta x) C_1 + (\cos \beta x + \sin \beta x) C_2| + \\
&\quad e^{-\beta x} |-(\cos \beta x + \sin \beta x) C_3 + (\cos \beta x - \sin \beta x) C_4|
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 2 \beta^2 \left[e^{\beta x} (-4 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x) \right]$$

$$\frac{d^3 w}{dx^3} = 2 \beta^3 \left[e^{\beta x} [-C_1 (\cos \beta x + \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \sin \beta x)] + \right.$$

$$\left. e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x - \sin \beta x) + C_4 (\cos \beta x + \sin \beta x)] \right] \text{ dir.}$$

Kesit kuvvetleriyle kesit momentleri, w yer değişimi ve onun turevleri yardımıyla (4.1.1.e) (4.1.1.f) (4.1.1.g) denklemlerinden;

$$N_{\theta} = \frac{E \delta}{R} w \quad m_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

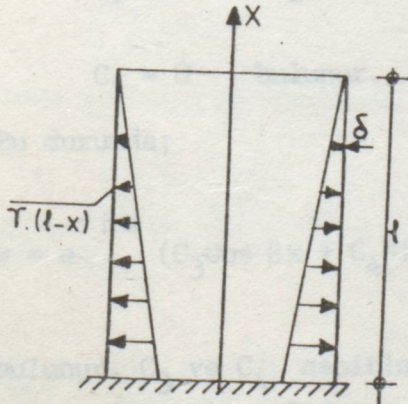
$Q_x = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ olarak elde edilir. w çözümündeki dört C sabiti sınır şartlarının sağlanması için yeterlidir. Bu sınır şartları, haznenin konstrüktif yapısından elde edilir.

IV.2.2) Ankastre cidarlı silindirik sıvı haznesi

Bu hazne Şekil 4.2.2.1'de gösterildiği gibi bir sıvı basıncına maruz bırakılırsa civardaki gerilme

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \beta^4 w = - \frac{P_2}{P}$ denklemini yardımıyla incelenebilir. Bu denkleminde

$$P_z = \gamma(1-x) \text{ koyarak } \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 \beta^4 w = - \frac{\gamma(1-x)}{D} \text{ elde edilir (a)}$$



Burada γ sıvının birim hacminin ağırlığıdır. Bu denklemin bir özel çözümü Őudur :

$$w_0 = - \frac{\gamma(1-x)}{4 \beta^4 D} \quad (b)$$

$$\beta^4 = \frac{E \delta}{4R^2 D} \text{ ifadesini yerine koyarak;}$$

$$w_0 = - \frac{\gamma(1-x)}{4 \cdot \frac{E \delta}{4R^2 D} \cdot D} = - \frac{\gamma(1-x) R^2}{E \delta} \quad (c)$$

Bu ifade, kenarları boşa ve çevre gerilmelerine maruz silindirik bir kabuktaki radyal genişlemeyi gösterir (4.2.1.d) ifadesinde $f(x)$ yerine (c) ifadesini koyarak denklemin tam çözümü için şunu elde ederiz :

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{\gamma(1-x) R^2}{E \delta} \quad (d)$$

Birçok hallerde δ cidar kalınlığı hem haznenin R yarıçapına hem de l yüksekliğine göre küçük olup kabuğu sonsuz uzun kabul edebiliriz. w 'nin hesabını yapmak için önce sınır şartlarından C_1, C_2, C_3, C_4 sabitlerinin hesaplanması gerekir. Üst kenar yani serbest uçta sınır şartları olarak

$$M_x = 0 \quad \text{ve} \quad Q_x = 0 \quad \text{alınabilir.}$$

$$M_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D 2 \beta^2 | e^{\beta l} (-C_1 \sin \beta l + C_2 \cos \beta l) | = 0$$

$$Q_x = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = D 2 \beta^3 | e^{\beta l} [-C_1 (\cos \beta l + \sin \beta l)] | = 0$$

$$-C_1 (\cos \beta l + \sin \beta l) = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$-C_1 \sin \beta l + C_2 \cos \beta l = 0$$

$$C_2 = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Bu durumda;

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{\gamma(1-x) R^2}{E \delta} \quad (e)$$

bulunur. C_3 ve C_4 sabitleri haznenin tabanındaki sınır şartlarından tayin edilebilir. Cidarın alt kenarı ankastre olduğuna göre (e) denklemi ;

$$(w)_{x=0} = 0 ; \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (\text{sınır şartları})$$

$$(w)_{x=0} = C_3 + \frac{\gamma R^2 1}{E \delta} = 0 \quad (f)$$

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \left[-\beta C_3 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \beta C_4 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) - \frac{\gamma R^2}{E \delta} \right]_{x=0}$$

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = \beta (C_4 - C_3) - \frac{\gamma R^2}{E \delta} = 0 \quad (g)$$

$$C_3 = - \frac{\gamma R^2 1}{E \delta} \quad C_4 = - \frac{\gamma R^2}{E \delta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \quad (h)$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sınır şartları bulunduğuna göre (e) ifadesi;

$$w = \frac{\gamma R^2}{E \delta} \left[(1-x) - e^{-\beta x} \left| 1 \cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right| \right]$$

$$w = \frac{\gamma R^2 1}{E \delta} \left[\left(1 - \frac{x}{1} \right) - e^{-\beta x} \left| \cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta 1} \right) \sin \beta x \right| \right] \quad (j)$$

Buna göre çevre doğrultusundaki N_θ kuvveti;

$$N_\theta = \frac{E \delta}{R} w = \frac{E \delta}{R} \left[\frac{\gamma R^2 1}{E \delta} \left[\left(1 - \frac{x}{1} \right) - e^{-\beta x} \left| \cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta 1} \right) \sin \beta x \right| \right] \right]$$

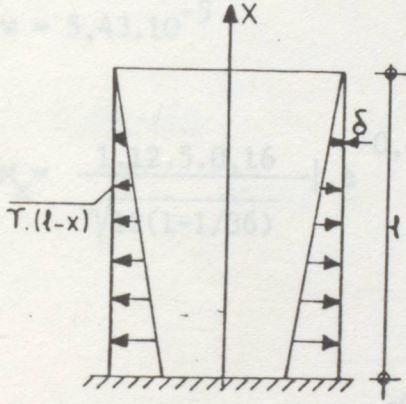
$$N_\theta = \gamma R 1 \left[\left(1 - \frac{x}{1} \right) - e^{-\beta x} \left| \cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta 1} \right) \sin \beta x \right| \right] \quad (k)$$

(j) ifadesinin ikinci türevinden eğilme momentini elde ederiz :

$$M_x = d \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2 \beta^2 \gamma R^2}{E \delta} \left| -e^{-\beta x} \sin \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) e^{-\beta x} \cos \beta x \right|$$

$$M_x = \frac{\gamma R l \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left| -e^{-\beta x} \sin \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) e^{-\beta x} \cos \beta x \right| \quad (1)$$

IV.2.2.a) Sayısal Örnek



Veriler

$$R = 12 \text{ m.} \quad l = 5.00 \text{ m.} \quad \delta = 0.16 \text{ m.}$$

$$\mu = \frac{1}{6} \quad \gamma = 1 \text{ t/m}^3$$

$$E = 10^7 \text{ t/m}^2$$

$$w = \frac{\gamma R l^2}{E \delta} \left| \left(1 - \frac{x}{l}\right) - e^{-\beta x} \left(\cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) \sin \beta x \right) \right|$$

$$N_\theta = \gamma R l \left| \left(1 - \frac{x}{l}\right) - e^{-\beta x} \left(\cos \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) \sin \beta x \right) \right|$$

$$M_x = \frac{\gamma R l \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} \left| -e^{-\beta x} \sin \beta x + \left(1 - \frac{1}{\beta l}\right) e^{-\beta x} \cos \beta x \right|$$

$$\beta = \sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2}} = \sqrt{\frac{3(1-1/36)}{144 \cdot 0,0256}} = 0,9431$$

x = 0 m. için

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} |1-1| = 0$$

x = 1,5 m. için

$$M_x = \frac{1.12.5.0,16}{\sqrt{12|1-1/36|}} \left| -e^0 \cdot \sin 0 + \left(1 - \frac{1}{0,9431.5}\right) e^0 \cdot \cos 0 \right| = 2,21$$

$$N_\theta = 1.12.5 \left| \left(1 - \frac{0}{5}\right) - e^0 \left| \cos 0 + \left(1 - \frac{1}{0,9431.5}\right) \sin 0 \right| \right| = 0$$

x = 0,5 m. için

$$w = 4,5.10^{-4} \left| 0,9 - e^{-0,47155} (\cos 0,47155 + 0,767933 \cdot \sin 0,47155) \right|$$

$$w = 5,43.10^{-5}$$

$$M_x = \frac{1.12.5.0,16}{\sqrt{12(1-1/36)}} \left| e^{-0,47155} \sin 0,47155 + \left(1 - \frac{1}{0,9431.5}\right) e^{-0,47155} \cdot \cos 0,47155 \right| = 0,43$$

$$N_\theta = 1.12.5 \left| \left(1 - \frac{0,5}{5}\right) - e^{-0,47155} (\cos 0,47155 + \left(1 - \frac{1}{0,9431.5}\right) \sin 0,47155) \right| = 7,24$$

x = 1.00 m. için

$$w = 4,5.10^{-4} \left| 0,8 - e^{-0,9431} (\cos 0,9431 + 0,787933 \cdot \sin 0,9431) \right| = 1,45.10^{-4}$$

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431.1} \sin 0,9431 + \left(1 - \frac{1}{0,9431.5}\right) e^{-0,9431} \cdot \cos 0,9431 \right| = -0,38$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{1}{5}\right) - e^{-0,9431} (\cos 0,9431 + 0,787933 \cdot \sin 0,9431) \right| = 19,37$$

x = 1,5 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 1,5} \sin(0,9431 \cdot 1,5) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 1,5} \right|$$

$$\cos(0,9431 \cdot 1,5) \Big| = 0,59$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{1,5}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 1,5} (\cos(0,9431 \cdot 1,5) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 1,5)) \right| = 28,38$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,7 - e^{-1,41465} (\cos 1,41465 + 0,787933 \cdot \sin 1,41465) \right| = 2,13 \cdot 10^{-4}$$

x = 2 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 2} \sin(0,9431 \cdot 2) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 2} \right|$$

$$\cos(0,9431 \cdot 2) \Big| = 0,50$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{2}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 2} (\cos(0,9431 \cdot 2) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 2)) \right| = 32,01$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,6 - e^{-1,8862} (\cos 1,8862 + 0,787933 \cdot \sin 1,8862) \right| = 2,40 \cdot 10^{-4}$$

x = 2,5 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 2,5} \sin(0,9431 \cdot 2,5) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 2,5} \right|$$

$$\cos(0,9431 \cdot 2,5) \Big| = -0,33$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{2,5}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 2,5} (\cos(0,9431 \cdot 2,5) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 2,5)) \right| = 30,86$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,5 - e^{-2,35775} (\cos 2,35775 + 0,787933 \cdot \sin 2,35775) \right| = 2,31 \cdot 10^{-4}$$

x = 3 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 3} \sin(0,9431 \cdot 3) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 3} \cos(0,9431 \cdot 3) \right| = -0,17$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{3}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 3} (\cos(0,9431 \cdot 3) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 3)) \right| = 26,51$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,4 - e^{-2,8293} (\cos 2,8293 + 0,787933 \sin 2,8293) \right| = 1,99 \cdot 10^{-4}$$

x = 3,5 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 3,5} \sin(0,9431 \cdot 3,5) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 3,5} \cos(0,9431 \cdot 3,5) \right| = -0,063$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{3,5}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 3,5} (\cos(0,9431 \cdot 3,5) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 3,5)) \right| = 20,46$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,3 - e^{-3,30085} (\cos 3,30085 + 0,787933 \cdot \sin 3,30085) \right| = 1,53 \cdot 10^{-4}$$

x = 4 m. için

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 4} \sin(0,9431 \cdot 4) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 4} \cos(0,9431 \cdot 4) \right| = 0,0029$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{4}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 4} (\cos(0,9431 \cdot 4) + 0,787933 \cdot \sin(0,9431 \cdot 4)) \right| = 13,76$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,20 - e^{-3,7724} (\cos 3,7724 + 0,787933 \cdot \sin 3,7724) \right| = 1,03 \cdot 10^{-4}$$

$x = 4,5 \text{ m. için}$

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 4,5} \sin(0,9431 \cdot 4,5) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 4,5} \cos(0,9431 \cdot 4,5) \right| = 0,00$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{4,5}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 4,5} (\cos(0,9431 \cdot 4,5) + 0,787933 \sin(0,9431 \cdot 4,5)) \right| = 6,99$$

$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| 0,10 - e^{-4,24395} (\cos 4,24395 + 0,787933 \cdot \sin 4,24395) \right| = 5,24 \cdot 10^{-5}$$

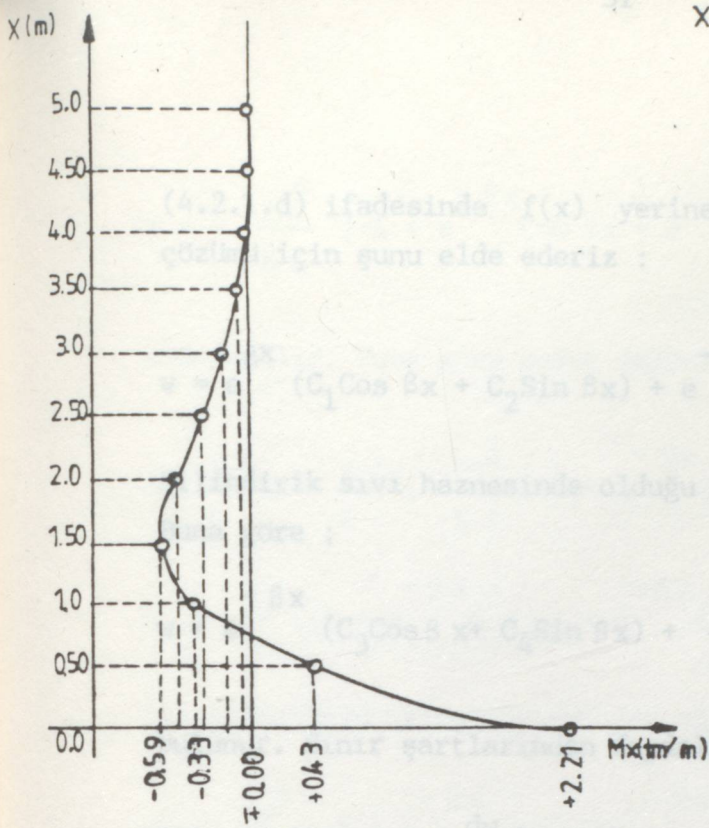
$x = 5 \text{ m. için}$

$$M_x = 2,7777 \left| -e^{-0,9431 \cdot 5} \sin(0,9431 \cdot 5) + 0,787933 \cdot e^{-0,9431 \cdot 5} \cos(0,9431 \cdot 5) \right| = 0,00$$

$$N_\theta = 60 \left| \left(1 - \frac{5}{5}\right) - e^{-0,9431 \cdot 5} (\cos(0,9431 \cdot 5) + 0,787933 \sin(0,9431 \cdot 5)) \right| = 0,42$$

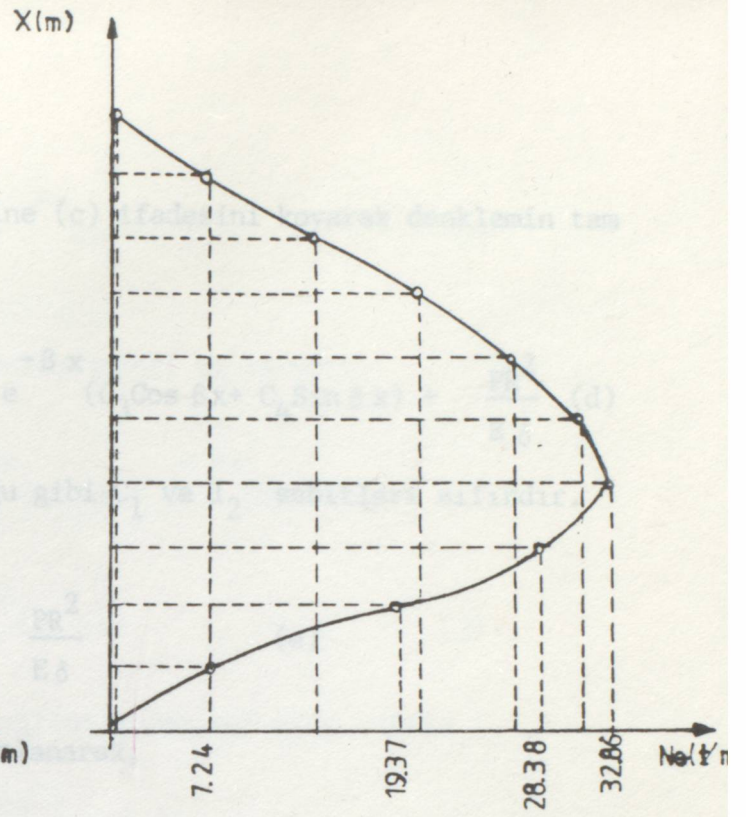
$$w = 4,5 \cdot 10^{-4} \left| -e^{-4,7155} (\cos 4,7155 + 0,787933 \cdot \sin 4,7155) \right| = 3,16 \cdot 10^{-6}$$

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
M_x (tm/m)	2,21	0,43	-0,38	-0,59	-0,50	-0,33	-0,17	-0,063	-0,0029	0,00	0,00
N_θ (t/m)	0,00	7,24	19,37	28,38	32,86	30,86	26,51	20,46	13,76	6,99	0,42
w (m)	0,00	$5,43 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$2,13 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$1,99 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$	$5,24 \cdot 10^{-5}$	$3,16 \cdot 10^{-6}$



Şekil 4.2.2.a

Anolitik çözüm

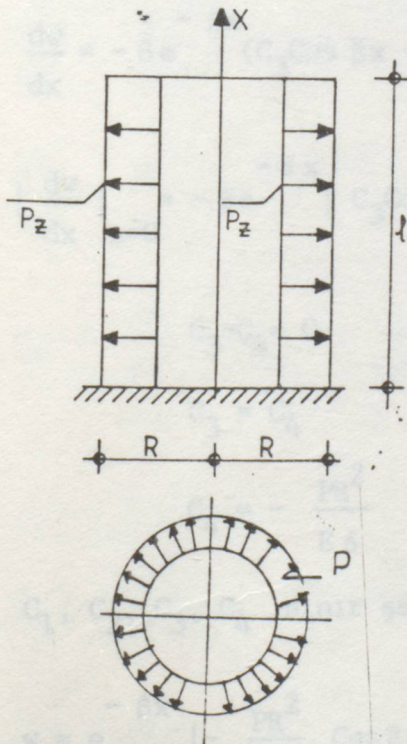


Şekil 4.2.2.b

Şekil 4.2.2.a) M_x 'in x'e bağlı olarak değişim grafiği

Şekil 4.2.2.b) $N_θ$ 'nın x'e bağlı olarak değişim grafiği

IV.2.3) Ankastre Cidarlı Silindirik Basıncılı Borular



Şekil 4.2.3.a

Bu iç basınca maruz silindirik boru Şekil 4.2.3.a'da görüldüğü gibi çevresel iç basınç durumunda ise;

$$P_z = -P \quad (a)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial X^4} + 4\beta^4 w = -\frac{P}{D} \quad (b)$$

olarak denklemi elde ederiz. Denklemnin özel çözümü ;

$$w_0 = -\frac{P}{4\beta^4 D} \quad \text{ve} \quad \beta^4 = \frac{E\delta}{4R^2 D} \quad \text{ifadesinden}$$

$$w_0 = -\frac{P}{4D} \cdot \frac{4R^2 D}{E\delta} = -\frac{PR^2}{E\delta} \quad (c) \text{ bulunur.}$$

(4.2.1.d) ifadesinde $f(x)$ yerine (c) ifadesini koyarak denklemin tam çözümünü için şunu elde ederiz :

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{PR^2}{E \delta} \quad (d)$$

Silindirik sıvı haznesinde olduğu gibi C_1 ve C_2 sabitleri sıfırdır. Buna göre ;

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{PR^2}{E \delta} \quad (e)$$

bulunur. Sınır şartlarından faydalanarak;

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

$$\left| e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \frac{PR^2}{E \delta} \right|_{x=0} = 0$$

$$C_3 = \frac{PR^2}{E \delta} = 0 \quad ; \quad C_4 = -\frac{PR^2}{E \delta} \quad (f)$$

$$\frac{dw}{dx} = -\beta e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + \beta e^{-\beta x} (-C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x)$$

$$\left| \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = -\beta e^{-\beta x} \left| C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x + C_3 \sin \beta x - C_4 \cos \beta x \right|_{x=0}$$

$$C_3 - C_4 = 0$$

$$C_3 = C_4$$

$$C_4 = -\frac{PR^2}{E \delta} \quad (g) \quad \text{bulunur.}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 sınır şartlarından ;

$$w = e^{-\beta x} \left| -\frac{PR^2}{E \delta} \cos \beta x - \frac{PR^2}{E \delta} \sin \beta x \right| + \frac{PR^2}{E \delta}$$

$$w = - \frac{PR^2}{E \delta} \left| -1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x \right| \quad (h)$$

elde edilir. Buna göre çevre doğrultusundaki N_{θ} kuvveti;

$$N_{\theta} = \frac{E \delta}{R} w = \frac{E \delta}{R} \left| - \frac{PR^2}{E \delta} (-1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x) \right|$$

$$N_{\theta} = -PR (-1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x) \quad (j)$$

(h) ifadesinin ikinci türevinden eğilme momentini elde ederiz :

$$w = - \frac{PR^2}{E \delta} \left| -1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x \right|$$

$$\frac{dw}{dx} = - \frac{PR^2}{E \delta} \left| -\beta e^{-\beta x} \cos \beta x - \beta e^{-\beta x} \sin \beta x - \beta e^{-\beta x} \sin \beta x + \beta e^{-\beta x} \cos \beta x \right|$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{PR^2}{E \delta} \left| 2\beta e^{-\beta x} \sin \beta x \right| = \frac{PR^2}{E \delta} 2\beta (e^{-\beta x} \sin \beta x) \quad (k)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{PR^2}{E \delta} 2\beta \left| -\beta e^{-\beta x} \sin \beta x + \beta e^{-\beta x} \cos \beta x \right|$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{PR^2}{E \delta} 2\beta^2 e^{-\beta x} \left| \cos \beta x - \sin \beta x \right| \quad (l)$$

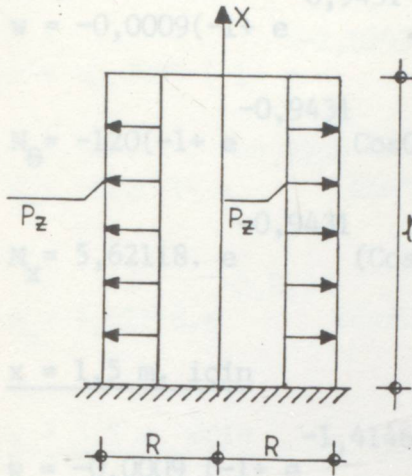
$$M_x = D \frac{d^2w}{dx^2} \quad D = \frac{E \beta^3}{12(1-\mu^2)} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2}}$$

$$\beta^2 = \frac{3(1-\mu^2)}{R \delta}$$

$$M_x = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{3(1-\mu^2)}{R \delta} \cdot 2 \cdot \frac{PR^2}{E \delta} e^{-\beta x} \left| \cos \beta x - \sin \beta x \right|$$

$$M_x = \frac{PR \delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} e^{-\beta x} \left| \cos \beta x - \sin \beta x \right| \quad (m)$$

IV.2.3.a) Sayısal Örnek

Veriler

$$R = 12 \text{ m.} \quad l = 5 \text{ m.} \quad \delta = 0,16 \text{ m.}$$

$$\mu = 1/6 \quad P = 1 \text{ Atü} = 1 \text{ kg/cm}^2 = 10 \text{ t/m}^2$$

$$\beta = 0,9431$$

$$w = -\frac{PR^2}{E\delta} \left| -1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x \right|$$

$$N_{\theta} = -PR \left| -1 + e^{-\beta x} \cos \beta x + e^{-\beta x} \sin \beta x \right|$$

$$M_x = \frac{PR\delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} e^{-\beta x} |\cos \beta x - \sin \beta x|$$

x = 0 m. için

$$w = -\frac{10 \cdot 144}{10^7 \cdot 0,16} |-1+1| = 0$$

$$N_{\theta} = -10 \cdot 12 \cdot |-1+1| = 0$$

$$M_x = \frac{10 \cdot 12 \cdot 0,16}{\sqrt{12(1-1/36)}} e^0 |\cos 0| = 5,62 \text{ tm/m.}$$

x = 0,5 m. için

$$w = -9 \cdot 10^{-4} \left(-1 + e^{-0,47155} \cos 0,47155 + e^{-0,47155} \sin 0,47155 \right) = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

$$N_{\theta} = -120 \left(-1 + e^{-0,47155} \cos 0,47155 + e^{-0,47155} \sin 0,47155 \right) = 19,27 \text{ t/m.}$$

$$M_x = 5,62118 \cdot e^{-0,47155} (\cos 0,47155 - \sin 0,47155) = 1,53 \text{ tm/m.}$$

x = 1,0 m. için

$$w = -0,0009(-1 + e^{-0,9431} \cdot \cos 0,9431 + e^{-0,9431} \sin 0,9431) = 4,11 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

$$N_{\theta} = -120(-1 + e^{-0,9431} \cos 0,9431 + e^{-0,9431} \sin 0,9431) = 54,73 \text{ t/m.}$$

$$M_x = 5,62118 \cdot e^{-0,9431} (\cos 0,9431 - \sin 0,9431) = -0,486 \text{ tm/m.}$$

x = 1,5 m. için

$$w = -0,0009(-1 + e^{-1,41465} \cos 1,41465 + e^{-1,41465} \sin 1,41465) = 6,50 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120(-1 + e^{-1,41465} \cos 1,41465 + e^{-1,41465} \sin 1,41465) = 86,66$$

$$M_x = 5,62118 \cdot e^{-1,41465} (\cos 1,41465 - \sin 1,41465) = -1,14$$

x = 2 m. için

$$w = -0,0009(-1 + e^{-1,8862} \cos 1,8862 + e^{-1,8862} \sin 1,8862) = 8,13 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120(-1 + e^{-1,8862} \cos 1,8862 + e^{-1,8862} \sin 1,8862) = 108,35$$

$$M_x = 5,62118 \cdot e^{-1,8862} (\cos 1,8862 - \sin 1,8862) = -1,08$$

x = 2,5 m. için

$$w = -0,0009(-1 + e^{-2,35775} \cos 2,35775 + e^{-2,35775} \sin 2,35775) = 9,00 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120(-1 + e^{-2,35775} \cos 2,35775 + e^{-2,35775} \sin 2,35775) = 120,03$$

$$M_x = 5,62118 \cdot e^{-2,35775} (\cos 2,35775 - \sin 2,35775) = -0,75$$

x = 3 m. için

$$w = -0,0009 (-1 + e^{-2,8293} \cos 2,8293 + e^{-2,8293} \sin 2,8293) = 9,34.10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120 (-1 + e^{-2,8293} \cos 2,8293 + e^{-2,8293} \sin 2,8293) = 124,57$$

$$M_x = 5,62118.e^{-2,8293} (\cos 2,8293 - \sin 2,8293) = -0,42$$

x = 3,5 m. için

$$w = -0,0009 (-1 + e^{-3,30085} \cos 3,30085 + e^{-3,30085} \sin 3,30085) = 9,38.10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120 (-1 + e^{-3,30085} \cos 3,30085 + e^{-3,30085} \sin 3,30085) = 125,07$$

$$M_x = 5,62118.e^{-3,30085} (\cos 3,30085 - \sin 3,30085) = -0,17$$

x = 4 m. için

$$w = -0,0009 (-1 + e^{-3,7724} \cos 3,7724 + e^{-3,7724} \sin 3,7724) = 9,29.10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120 (-1 + e^{-3,7724} \cos 3,7724 + e^{-3,7724} \sin 3,7724) = 123,86$$

$$M_x = 5,62118.e^{-3,7724} (\cos 3,7724 - \sin 3,7724) = -0,028$$

x = 4,5 m. için

$$w = -0,0009 (-1 + e^{-4,24395} \cos 4,24395 + e^{-4,24395} \sin 4,24395) = 9,17.10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120 (-1 + e^{-4,24395} \cos 4,24395 + e^{-4,24395} \sin 4,24395) = 122,3$$

$$M_x = 5,62118.e^{-4,24395} (\cos 4,24395 - \sin 4,24395) = 0,036$$

$x = 5 \text{ m. için}$

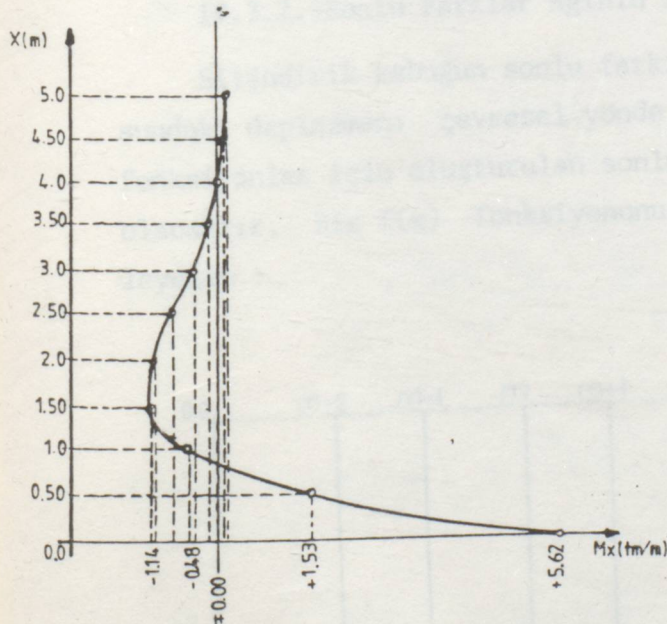
$$w = -0,0009 (-1 + e^{-4,7155} \cos 4,7155 + e^{-4,7155} \sin 4,7155) = 9,08.10^{-4}$$

$$N_{\theta} = -120 (-1 + e^{-4,7155} \cos 4,7155 + e^{-4,7155} \sin 4,7155) = 121,07$$

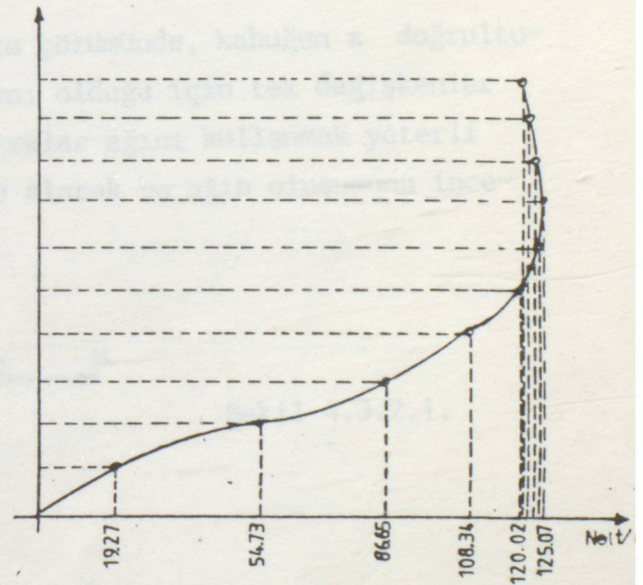
$$M_x = 5,62118.e^{-4,7155} (\cos 4,7155 - \sin 4,7155) = 0,05$$

x	0	0,5	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
N_{θ} (t/m)	0	19,27	54,73	86,65	108,34	120,02	124,56	125,07	123,86	122,3	121,07
M_x (tm/m)	5,62	1,53	-0,48	-1,14	-1,08	-0,75	-0,42	-0,17	-0,028	-0,036	0,05
w (m)	0	1,45.10 ⁻⁴	4,11.10 ⁻⁴	6,5.10 ⁻⁴	8,13.10 ⁻⁴	9.10 ⁻⁴	9,34.10 ⁻⁴	9,38.10 ⁻⁴	9,29.10 ⁻⁴	9,17.10 ⁻⁴	9,08.10 ⁻⁴

Hesap Sonuçları Tablosu



Şekil 4.2.3.b



Şekil 4.2.3.c

Şekil 4.2.3.b) M_x 'in x 'e bağlı değişim grafiği

Şekil 4.2.3.c) N_θ 'nın x 'e bağlı değişim grafiği

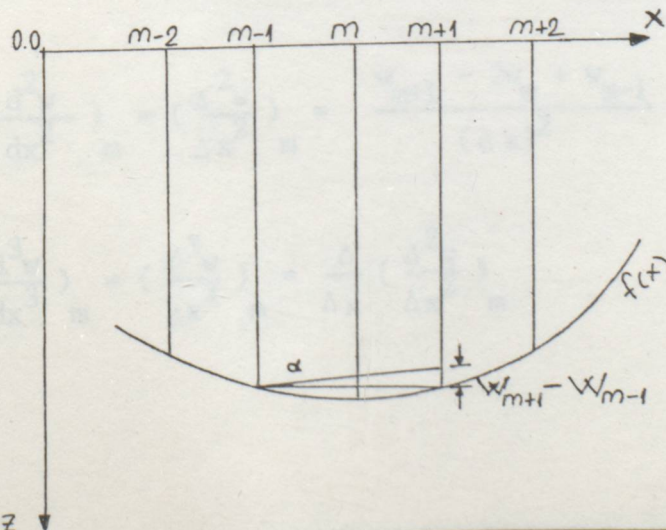
IV.3) Silindirik Kabuğun Sonlu Farklarla Çözümü

IV.3.1.) Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar metodu, analitik çözümü güç olan, uygulama alanı çok geniş yaklaşık bir nümerik metottur. Metodun özü diferansiyel denklemi sonlu farklardan (finite differences) oluşan bir yaklaşık cebirsel denkleme dönüştürmektir. Bunun uygulaması problemin ele alış şekline göre değişir. Analitik çözüm, bilinmeyenlerin sürekli bir fonksiyonunu verir. Bu, bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarında bilinmeyenin ifadesini yerine koyarak, doğrudan orta yüzeyin istenen her noktasında bilinmeyen değerini tayin edebiliriz, demektir. Bunun aksine, nümerik hesapta, ancak önceden tespit edilmiş olan bir düğüm noktaları ağının bu düğüm noktalarına isabet eden bilinmeyenlerin değerlerini belirleyebilir. Diğer noktalardaki bilinmeyenleri ise enterpolasyonla bulabiliriz. Çözümler; analitik olarak diferansiyel denklemlerin integrasyonu ile, sayısal olarak ise; bir lineer cebrik sistemler takımının çözümü ile elde edilirler.

IV.3.2.) Sonlu Farklar Ağının Teşkil Edilmesi

Silindirik kabuğun sonlu farklarla çözümünde, kabuğun z doğrultusundaki deplasmanı çevresel yönde aynı olduğu için tek değişkenler fonksiyonları için oluşturulan sonlu farklar ağını kullanmak yeterli olacaktır. Bir $f(x)$ fonksiyonunu ele alarak bu ağın oluşumunu inceleyelim :



Şekil 4.3.2.1.

$X_m - X_{m-1} = X_{m+1} - X_m = \Delta X$ olsun. Bu eğrinin m noktasındaki teğetiğinin eğimini sonlu farklar cinsinden ifade edersek :

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_m \cong \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_m \text{ olur.}$$

$$\text{(İleri değer) : } \frac{w_{m+1} - w_m}{\Delta X} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta X} \right)_{m+1,m}$$

$$\text{(Geri değer) : } \frac{w_m - w_{m-1}}{\Delta X} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta X} \right)_{m,m-1}$$

$$\text{Ortalama değer : } \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m+1,m} + \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,m-1} \right|$$

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_m = \frac{w_{m+1} - w_m}{2 \Delta X} + \frac{w_m - w_{m-1}}{2 \Delta X} = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \Delta X}$$

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_m = \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_m = \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2 \Delta X} \quad (\text{a})$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_m = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_m = \frac{1}{\Delta x} \left| \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m+1,m} - \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,m-1} \right|$$

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_m = \frac{1}{\Delta x} \left| \frac{w_{m+1} - w_m}{\Delta x} - \frac{w_m - w_{m-1}}{\Delta x} \right| = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_m = \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_m = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{b})$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_m = \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} \right)_m = \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_m$$

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_m = \phi(x)_m = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad \text{dersek;}$$

$$\left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} \right)_m = \left(\frac{\Delta \phi(x)_m}{\Delta x} \right)_m \quad \text{olur.}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x} (\phi(x)_m) = \left(\frac{\Delta \phi(x)_m}{\Delta x} \right)_m = \frac{\phi_{m+1} - \phi_{m-1}}{2 \Delta x}$$

$$\phi_{m+1} = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + w_m}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m-1} = \frac{w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_m = \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} \right)_m = \frac{\frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + w_m}{(\Delta x)^2} - \frac{w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^2}}{2 \Delta x}$$

$$= \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + w_m - w_m + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3} \right)_m = \left(\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} \right)_m = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2(\Delta x)^3} \quad (c)$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_m = \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \right)_m$$

$$\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_m = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} = \phi(x)_m$$

$$\left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \right)_m = \left(\frac{\Delta^2 \phi(x)_m}{(\Delta x)^2} \right)_m = \frac{\phi_{m+1} - 2\phi_m + \phi_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m+1} = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + w_m}{(\Delta x)^2}$$

$$\phi_{m-1} = \frac{w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \right)_m = \frac{\frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + w_m}{(\Delta x)^2} - 2 \left| \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} \right| + \frac{w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4} \right)_m = \left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \right)_m = \frac{w_{m+2} - 4w_{m+1} + 6w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}}{(\Delta x)^4} \quad (d)$$

a,b,c,d'den faydalanarak sonlu farklar için katsayılar şemasını çıkartabiliriz.

Türev	Katsayılar					Çarpan
w'		(-1)		(+1)		$\frac{1}{2\Delta x}$
w''		(+1)	(-2)	(+1)		$\frac{1}{(\Delta x)^2}$
w'''	(-1)	(+2)		(-2)	(+1)	$\frac{1}{2(\Delta x)^3}$
wIV	(+1)	(-4)	(+6)	(-4)	(+1)	$\frac{1}{(\Delta x)^4}$
Nokta	↓ m-2	↓ m-1	↓ m	↓ m+1	↓ m+2	

Tablo 4.3.2.1. Kirişte türevlerin sonlu farklarla ifadesi için katsayılar şeması.

IV.3.3) Ankastre Cidarlı Silindirik Sıvı Haznesi

Bölüm IV.3.2'de çıkartılan sonlu farklar ağından faydalanarak sıvı basıncına maruz haznenin çözümünde "w" deplasmanları çevresel yönde aynı olduğu için yapabiliriz.

Diferansiyel denklemler yardımıyla çözdüğümüz sayısal örnekleri sonlu farklar yardımıyla da çözebiliriz.

Katsayılar şemasından bulacağımız sonuç 4.dereceden türev değerleridir ki denkleminiz ;

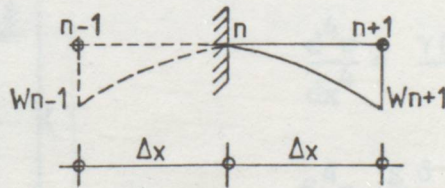
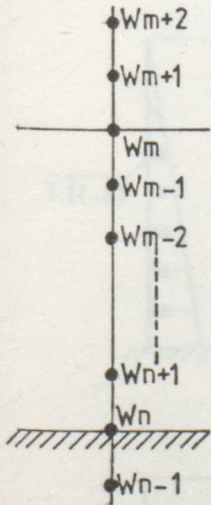
$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \beta^4 w = \frac{\gamma(1-x)}{D} \quad \text{dir ve ikinci taraf}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\gamma(1-x)}{D} - 4 \beta^4 w \quad \text{olacaktır.}$$

SINIR ŞARTLARI

Çözümün tam olması için, diferansiyel denklemin çözümü yetmez, sınır şartlarının da sağlanması gerekir. Bunun için merkez noktası, sınır üzerine taşınır ve haznenin fiktif olarak devam ettiği varsayılır.

a) Ankastre kenar ise:



$$1) w_n = 0$$

$$2) \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_n = 0$$

$$\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2 \Delta x} = 0$$

$$w_{n+1} = w_{n-1}$$

ŞEKİL 3.3.1.

b) Boşta kenar için

$$1) M_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1} = 0$$

$$w_{m+1} = 2w_m - w_{m-1}$$

$$2) Q_x = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2(\Delta x)^3} = 0$$

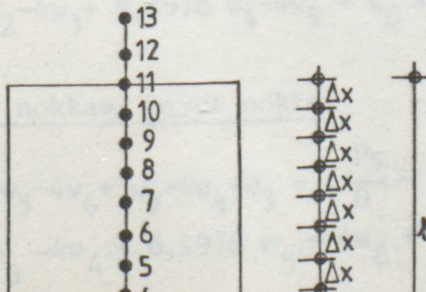
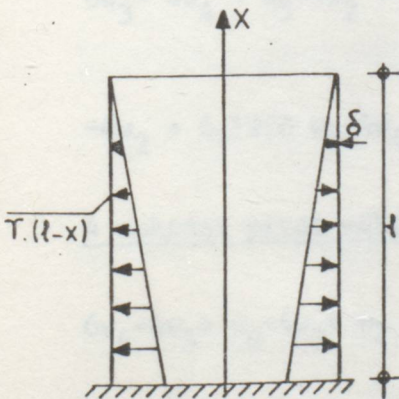
$$w_{m+2} - 2(2w_m - w_{m-1}) + 2w_{m-1} - w_{m-2} = 0$$

$$w_{m+2} - 4w_m + 2w_{m-1} + 2w_{m-1} - w_{m-2} = 0$$

$$w_{m+2} = 4w_m - 4w_{m-1} + w_{m-2}$$

Bilinmeyen w_{m-1} , w_{m+1} , w_{m+2} noktalarını bu sınır şartlarından faydalanarak bilinenler cinsinden yazarak diferansiyel denklemin çözümünü istediğimiz aralıklarda bulmuş oluruz ki bu aralıklar önceki çözümlerde ele alınan aralıklar olarak ele alabiliriz.

IV.3.3.a) Sayısal örnek



$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{\gamma(1-x)}{D}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\gamma(1-x)}{D} - 4\beta^4 w$$

$$\beta^4 = \frac{E\delta}{4R^2 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2}$$

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad \Delta x = \frac{l}{12} = \frac{5}{12} = 0,4167$$

$$\beta^4 = \frac{3(1-1/36)}{(12)^2 \cdot (0,16)^2} = 0,7912$$

$$M_x = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$Q_x = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = D \frac{w_{m+2} - 2w_{m+1} + 2w_{m-1} - w_{m-2}}{2(\Delta x)^3}$$

$$N_\theta = \frac{E \delta}{R} w$$

Sınır şartlarından faydalanarak w_0, w_1, w_{12}, w_{13} noktalarını diğer bilinen noktalar cinsinden yazalım :

$$1) w_1 = 0$$

$$2) w_{12} = 2w_{11} - w_{10}$$

$$w_0 = w_2$$

$$w_{13} = 4w_{11} - 4w_{10} + w_9$$

2 noktası pivot nokta

$$6w_2 - 4w_3 + w_4 - 4w_1 + w_0 = \left| \frac{P_2}{D} - 4\beta^4 w_2 \right| (\Delta X)^4$$

$$7,1978 w_2 - 4w_3 + w_4 = \frac{P_2}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (1)$$

3 noktası pivot nokta

$$6w_3 - 4w_4 + w_5 - 4w_2 + w_1 = \left| \frac{P_3}{D} - 4\beta^4 w_3 \right| (\Delta X)^4$$

$$-4w_2 + 6,1978 w_3 - 4w_4 + w_5 = \frac{P_3}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (2)$$

4 noktası pivot nokta

$$6w_4 - 4w_5 + w_6 - 4w_3 + w_2 = \left| \frac{P_4}{D} - 4\beta^4 w_4 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_2 - 4w_3 + 6,1978 w_4 - 4w_5 + w_6 = \frac{P_4}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (3)$$

5 noktası pivot nokta

$$6w_5 - 4w_6 + w_7 - 4w_4 + w_3 = \left| \frac{P_5}{D} - 4\beta^4 w_5 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_3 - 4w_4 + 6,1978 w_5 - 4w_6 + w_7 = \frac{P_5}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (4)$$

6 noktası pivot nokta

$$6w_6 - 4w_7 + w_8 - 4w_5 + w_4 = \left| \frac{P_6}{D} - 4\beta^4 w_6 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_4 - 4w_5 + 6,1978w_6 - 4w_7 + w_8 = \frac{P_6}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (5)$$

7 noktası pivot nokta

$$6w_7 - 4w_8 + w_9 - 4w_6 + w_5 = \left| \frac{P_7}{D} - 4\beta^4 w_7 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_5 - 4w_6 + 6,1978 w_7 - 4w_8 + w_9 = \frac{P_7}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (6)$$

8 noktası pivot nokta

$$6w_8 - 4w_9 + w_{10} - 4w_7 + w_6 = \left| \frac{P_8}{D} - 4\beta^4 w_8 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_6 - 4w_7 + 6,1978 w_8 - 4w_9 + w_{10} = \frac{P_8}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (7)$$

9 noktası pivot nokta

$$6w_9 - 4w_{10} + w_{11} - 4w_8 + w_7 = \left| \frac{P_9}{D} - 4\beta^4 w_9 \right| (\Delta X)^4$$

$$w_7 - 4w_8 + 6,1978 w_9 - 4w_{10} + w_{11} = \frac{P_9}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (8)$$

10 noktası pivot nokta

$$6w_{10} - 4w_{11} + w_{12} - 4w_9 + w_8 = \left| \frac{P_{10}}{D} - 4\beta^4 w_{10} \right| (\Delta X)^4$$

$$w_8 - 4w_9 + 5,1978w_{10} - 2w_{11} = \frac{P_{10}}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (9)$$

11 noktası pivot nokta

$$6w_{11} - 4w_{12} + w_{13} - 4w_{10} + w_9 = \left| \frac{P_{11}}{D} - 4\beta^4 w_{11} \right| (\Delta X)^4$$

$$2w_9 - 4w_{10} + 2,1978 w_{11} = \frac{P_{11}}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (10)$$

$\frac{(\Delta X)^4}{D} = a$ diyelim ve her noktaya karşılık gelen p kuvvetlerini yazarak

denklemleri yeniden düzenleyelim.

$$7,1978w_2 - 4w_3 + w_4 = 4,5a \quad (1)$$

$$-4w_2 + 6,1978w_3 - 4w_4 + w_5 = 4a \quad (2)$$

$$w_2 - 4w_3 + 6,1978w_4 - 4w_5 + w_6 = 3,5a \quad (3)$$

$$w_3 - 4w_4 + 6,1978w_5 - 4w_6 + w_7 = 3a \quad (4)$$

$$w_4 - 4w_5 + 6,1978w_6 - 4w_7 + w_8 = 2,5a \quad (5)$$

$$w_5 - 4w_6 + 6,1978w_7 - 4w_8 + w_9 = 2a \quad (6)$$

$$w_6 - 4w_7 + 6,1978w_8 - 4w_9 + w_{10} = 1,5a \quad (7)$$

$$w_7 - 4w_8 + 6,1978w_9 - 4w_{10} + w_{11} = a \quad (8)$$

$$w_8 - 4w_9 + 5,1978w_{10} - 2w_{11} = 0,5a \quad (9)$$

$$2w_9 - 4w_{10} + 2,1978w_{11} = 0 \quad (10)$$

7,1978	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	w_2	4,5a
-4	6,1978	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	w_3	4,0a
1	-4	6,1978	-4	1	0	0	0	0	0	0	w_4	3,5a
0	1	-4	6,1978	-4	1	0	0	0	0	0	w_5	3a
0	0	1	-4	6,1978	-4	1	0	0	0	0	w_6	2,5a
0	0	0	1	-4	6,1978	-4	1	0	0	0	w_7	2a
0	0	0	0	1	-4	6,1978	-4	1	0	0	w_8	1,5a
0	0	0	0	0	1	-4	6,1978	-4	1	0	w_9	a
0	0	0	0	0	0	1	-4	5,1978	-2	0	w_{10}	0,5a
0	0	0	0	0	0	0	2	-4	2,1978	0	w_{11}	0

Bu denklemlerin çözümünden;

$$w_2 = 3,90328a \quad w_5 = 13,72602a \quad w_8 = 8,55385a \quad w_{11} = -0,023763a$$

$$w_3 = 9,02787a \quad w_6 = 13,07780a \quad w_9 = 5,73372a$$

$$w_4 = 12,51646a \quad w_7 = 11,11740a \quad w_{10} = 2,85380a$$

x = 0 m. için

$$w_1 = 0$$

$$M_x = D \frac{w_2 + w_2}{(\Delta x)^2} = D \cdot \frac{2 \cdot 3,90328}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{(\Delta x)^4}{D} = 2 \cdot 3,90328 (\Delta x)^2 = 1,95$$

$$N_\theta = \frac{E \delta}{R} w = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 0 = 0,00 \quad a = \frac{(0,15)^4}{3510,8571} = 17,8 \cdot 10^{-6}$$

x = 0,5 m. için

$$w_2 = 3,90328 \cdot a = 3,90328 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 0,69 \cdot 10^{-4} \quad D = \frac{10^7 \cdot (0,16)^3}{12(1-1/36)} = 3510,8571$$

$$M_x = (w_3 - 2w_2) (\Delta x)^2 = (9,02787 - 2 \cdot 3,90328) (0,5)^2 = 0,31$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 0,69 \cdot 10^{-4} = 9,2$$

x = 1 m. için

$$w_3 = 9,02787 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 1,6 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_4 - 2w_3 + w_2) (\Delta x)^2 = (12,51646 - 2 \cdot 9,02787 + 3,90328) (0,5)^2 = -0,40$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,6 \cdot 10^{-4} = 21,33$$

x = 1,5 m. için

$$w_4 = 12,51646 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 2,23 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_5 - 2w_4 + w_3) (\Delta x)^2 = (13,72602 - 2 \cdot 12,51646 + 9,02787) (0,5)^2 = -0,57$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 2,23 \cdot 10^{-4} = 29,73$$

x = 2 m. için

$$w_5 = 13,72602 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 2,44 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_6 - 2w_5 + w_4) (\Delta x)^2 = (13,07780 - 2 \cdot 13,72602 + 12,51646) (0,5)^2 = 0,47$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 2,44 \cdot 10^{-4} = 32,53$$

x = 2,5 m. için

$$w_6 = 13,07780 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 2,32 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_7 - 2w_6 + w_5) (\Delta x)^2 = (11,1174 - 2 \cdot 13,0778 + 13,72602) (0,5)^2 = -0,33$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 2,32 \cdot 10^{-4} = 30,93$$

x = 3,0 m. için

$$w_7 = 11,1174 \cdot 17,80 \cdot 10^{-6} = 1,98 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_8 - 2w_7 + w_6) (\Delta x)^2 = (8,55385 - 2 \cdot 11,1174 + 13,0778) (0,5)^2 = -0,16$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,98 \cdot 10^{-4} = 26,40$$

x = 3,5 m. için

$$w_8 = 8,55385 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 1,52 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_9 - 2w_8 + w_7) (\Delta x)^2 = (5,73372 - 2 \cdot 8,55385 + 11,1174) (0,5)^2 = -0,064$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,52 \cdot 10^{-4} = 20,27$$

x = 4 m. için

$$w_9 = 5,73372 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 1,02 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_{10} - 2w_9 + w_8) (\Delta x)^2 = (2,8538 - 2 \cdot 5,73372 + 8,55385) (0,5)^2 = -0,015$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,02 \cdot 10^{-4} = 13,60$$

x = 4,5 m. için

$$w_{10} = 2,8538 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 0,51 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_{11} - 2w_{10} + w_9) (\Delta x)^2 = (-0,023763 - 2 \cdot 2,8538 + 5,73372) (0,5)^2 = 0,00$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 0,51 \cdot 10^{-4} = 6,80$$

x = 5 m. için

$$w_{11} = -0,023763 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 0,00$$

$$M_x = (w_{12} - 2w_{11} + w_{10}) (\Delta x)^2 = (2w_{11} - w_{10} - 2w_{11} + w_{10}) (\Delta x)^2 = 0,00$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 0,00 = 0,00$$

x	0,00	0,5	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
w	0,00	0,69.10 ⁻⁴	1,6.10 ⁻⁴	2,23.10 ⁻⁴	2,44.10 ⁻⁴	2,32.10 ⁻⁴	1,98.10 ⁻⁴	1,52.10 ⁻⁴	1,02.10 ⁻⁴	0,51.10 ⁻⁴	0,00
M _x	1,95	0,31	-0,40	-0,57	-0,47	-0,33	-0,16	-0,064	-0,015	0,00	0,00
N _θ	0,00	9,20	21,33	29,73	32,53	30,93	26,40	20,27	13,60	6,80	0,00

IV.3.4) Ankastre Cidarlı Silindirik Basıncılı Borular

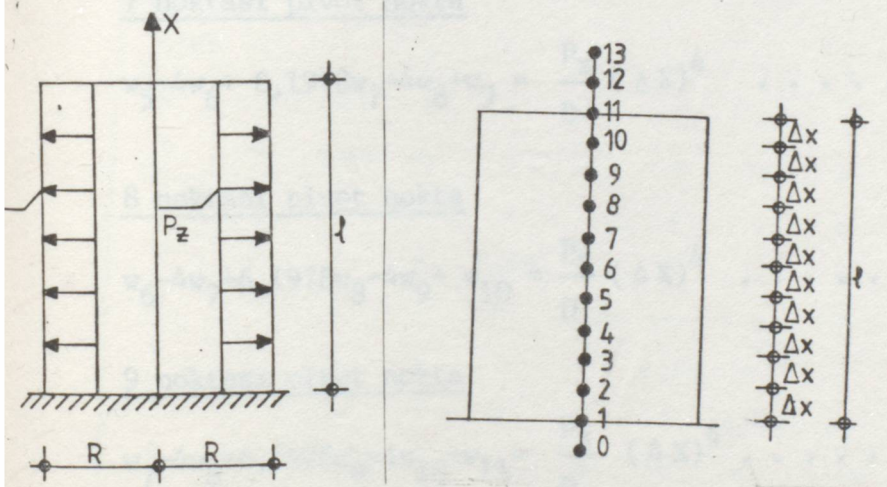
Tabana ankastre oturan ve üst ucu serbest olan basınçlı boruların diferansiyel denklemlerle çözüm şekli bölüm IV.2.2'de anlatılmış ve bölüm IV.2.2.a'da da sayısal çözümü yapılmıştı. Bu bölümde ise, aynı örneğin sonlu farklarla çözümü üzerinde duracağız.

Bölüm IV.3.3.'de çıkartılan sınır şartları aynı olup sadece denklemin ikinci tarafı yükten dolayı farklı olacaktır. Bu denklem;

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \beta^4 w = \frac{P_z}{D} \quad \text{olup ikinci taraf;}$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{P_z}{D} - 4 \beta^4 w \quad \text{olacaktır.}$$

IV.3.4.a) Sayısal Örnek



ŞEKİL 3.3.4.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{P_z}{D} - 4 \beta^4 w$$

$$\Delta X = \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

$$\beta^4 = \frac{E \delta}{4R^2 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 \delta^2}$$

$$\beta^4 = 0,7912$$

2 noktası pivot nokta

$$6w_2 - 4w_3 + w_4 - 4w_1 + w_0 = \left| \frac{P_z}{D} - 4 \beta^4 w_2 \right| (\Delta X)^4$$

$$7,1978w_2 - 4w_3 + w_4 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \quad \dots \dots \dots (1)$$

3 noktası pivot nokta

$$-4w_2 + 6,1978w_3 - 4w_4 + w_5 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (2)$$

4 noktası pivot nokta

$$w_2 - 4w_3 + 6,1978w_4 - 4w_5 + w_6 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (3)$$

5 noktası pivot nokta

$$w_3 - 4w_4 + 6,1978w_5 - 4w_6 + w_7 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (4)$$

6 noktası pivot nokta

$$w_4 - 4w_5 + 6,1978w_6 - 4w_7 + w_8 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (5)$$

7 noktası pivot nokta

$$w_5 - 4w_6 + 6,1978w_7 - 4w_8 + w_9 = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (6)$$

8 noktası pivot nokta

$$w_6 - 4w_7 + 6,1978w_8 - 4w_9 + w_{10} = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (7)$$

9 noktası pivot nokta

$$w_7 - 4w_8 + 6,1978w_9 - 4w_{10} + w_{11} = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (8)$$

10 noktası pivot nokta

$$w_8 - 4w_9 + 5,1978w_{10} - 2w_{11} = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (9)$$

11 noktası pivot nokta

$$2w_9 - 4w_{10} + 2,1978w_{11} = \frac{P_z}{D} (\Delta X)^4 \dots \dots \dots (10)$$

$P_z = 10 \text{ t/m}^2$ ve $a = \frac{(\Delta X)^4}{D}$ alınarak denklemleri yeniden düzenlersek;

$$w_2 = 10,06158a \quad w_5 = 46,23899a \quad w_8 = 52,53301a$$

$$w_3 = 25,06353a \quad w_6 = 50,66806a \quad w_9 = 52,04783a$$

$$w_4 = 37,83285a \quad w_7 = 52,36011a \quad w_{10} = 51,37461a$$

$$w_{11} = 50,68831a$$

$$a = \frac{(\Delta x)^4}{D} \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$a = \frac{(0,5)^4}{3510,8571} = 17,80 \cdot 10^{-6} \quad D = \frac{10^7 \cdot (0,16)^3}{12(1-1/36)} = 3510,8571$$

x = 0 durumunda

$$w_1 = 0.00$$

$$M_x = (w_2 + w_2) (\Delta x)^2 = 2 \cdot 10,06158 \cdot (0,5)^2 = 5,03$$

$$N_\theta = 0.00$$

x = 0,5 m. için

$$w_2 = 10,06158 \cdot 17,80 \cdot 10^{-6} = 1,79 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_3 - 2w_2) (\Delta x)^2 = (25,06353 - 2 \cdot 10,06158) (0,5)^2 = 1,24$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,79 \cdot 10^{-4} = 23,86$$

x = 1 m. için

$$w_3 = 25,06353 \cdot 17,80 \cdot 10^{-6} = 4,46 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_4 - 2w_3 + w_2) (\Delta x)^2 = (37,83285 - 2 \cdot 25,06353 + 10,06158) (0,5)^2 = -0,55$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 4,46 \cdot 10^{-4} = 59,47$$

x = 1,5 m. için

$$w_4 = 37,83285 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 6,73 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_5 - 2w_4 + w_3) (\Delta x)^2 = (46,23899 - 2 \cdot 37,83285 + 25,06353) (0,5)^2 = -1,10$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 6,73 \cdot 10^{-4} = 89,73$$

x = 2 m. için

$$w_5 = 46,23899 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 8,23 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_6 - 2w_5 + w_4) (\Delta x)^2 = (50,66806 - 2 \cdot 46,23899 + 37,83285) (0,5)^2 = -1,00$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 8,23 \cdot 10^{-4} = 109,73$$

x = 2,5 m. için

$$w_6 = 50,66806 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_7 - 2w_6 + w_5) (\Delta x)^2 = (52,36011 - 2 \cdot 50,66806 + 46,23899) (0,5)^2 = -0,70$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 120$$

x = 3,0 m. için

$$w_7 = 52,36011 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 9,32 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_8 - 2w_7 + w_6) (\Delta x)^2 = (52,53301 - 2 \cdot 52,36011 + 50,66806) (0,5)^2 = -0,38$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9,32 \cdot 10^{-4} = 124,27$$

x = 3,5 m. için

$$w_8 = 52,53301 \cdot 17,80 \cdot 10^{-6} = 9,35 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_9 - 2w_8 + w_7) (\Delta x)^2 = (52,04783 - 2 \cdot 52,53301 + 52,36011) (0,5)^2 = -0,16$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9,35 \cdot 10^{-4} = 124,67$$

x = 4,0 m. için

$$w_9 = 52,04783 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 9,26 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_{10} - 2w_9 + w_8) (\Delta x)^2 = (51,37461 - 2 \cdot 52,04783 + 52,53301) (0,5)^2 = -0,047$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9,26 \cdot 10^{-4} = 123,47$$

x = 4,5 m. için

$$w_{10} = 51,37461 \cdot 17,8 \cdot 10^{-6} = 9,14 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_{11} - 2w_{10} + w_9) (\Delta x)^2 = (50,68831 - 2 \cdot 51,37461 + 52,04783) (0,5)^2 = -0,003$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9,14 \cdot 10^{-4} = 121,87$$

x = 5 m. için

$$w_{11} = 50,68831 \cdot 17,80 \cdot 10^{-6} = 9,02 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = (w_{12} - 2w_{11} + w_{10}) (\Delta x)^2 = (2w_{11} - w_{10} - 2w_{11} + w_{10}) (\Delta x)^2 = 0,00$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 9,02 \cdot 10^{-4} = 120,27$$

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
w	0	1,79.10 ⁻⁴	4,46.10 ⁻⁴	6,73.10 ⁻⁴	8,23.10 ⁻⁴	9.10 ⁻⁴	9,32.10 ⁻⁴	9,35.10 ⁻⁴	9,26.10 ⁻⁴	9,14.10 ⁻⁴	9,02.10 ⁻⁴
M _x	5,03	1,24	-0,55	-1,10	-1,0	-0,70	-0,38	-0,16	-0,047	-0,003	0.00
N _e	0	23,86	59,47	89,73	109,73	120	124,27	124,67	123,47	121,87	120,27

IV.3.5) 4.bölümde inceleyip çözümünü yaptığımız silindirik kabuğun, incelenen nokta aralıklarını eşit olarak seçtik. Halbuki seçtiğimiz sınır şartlarına bağlı olarak aralıkları daha iyi şekilde seçmemiz gerekebilir. Örneğin, bizim çalışmamızda ankastre kısma yakın yerlerde daha sık aralıklarda, boşa kenarda ise daha seyrek aralıklarda çalışmamız yeterli olabilir.

Şimdi, farklı aralıklı sonlu farklar ağını çıkartıp silindirik kabuğun aralığını seçelim. Ancak, çözülen örnekleri karşılaştırmamız açısından önceki örneklerde kullandığımız noktaları kullanacağız.

IV.3.5.a) Farklı Aralıklı Sonlu Farklar Ağının Teşkil Edilmesi

Burada sadece sonuçları vermeye yetineceğiz.

$$\alpha = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n - X_{n-1}} = \frac{\Delta X_{n+1}}{\Delta X_n}$$

$$\frac{dw_n}{dx} = \frac{w_{n+1} - w_n}{\alpha \Delta X_n}$$

$$\frac{d^2 w_n}{dx^2} = \frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \frac{\alpha w_{n-1} - (1+\alpha) w_n + w_{n+1}}{(\Delta X_n)^2}$$

$$\frac{d^3 w_n}{dx^3} = \frac{4}{\alpha(1+\alpha)} \cdot \frac{-\alpha^3 w_{n-1} + \alpha(1+\alpha+\alpha^2) w_n - (1+\alpha+\alpha^2) w_{n+1} + w_{n+2}}{(\Delta X_n)^3}$$

$$\frac{d^4 w_n}{dx^4} = \frac{8}{\alpha^3(1+\alpha)^3} \cdot \frac{\alpha^6 w_{n-2} - \alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2) w_{n-1} + \alpha(1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2) w_n - (1+\alpha)(1+\alpha^2) w_{n+1} + w_{n+2}}{(\Delta X_n)^4}$$

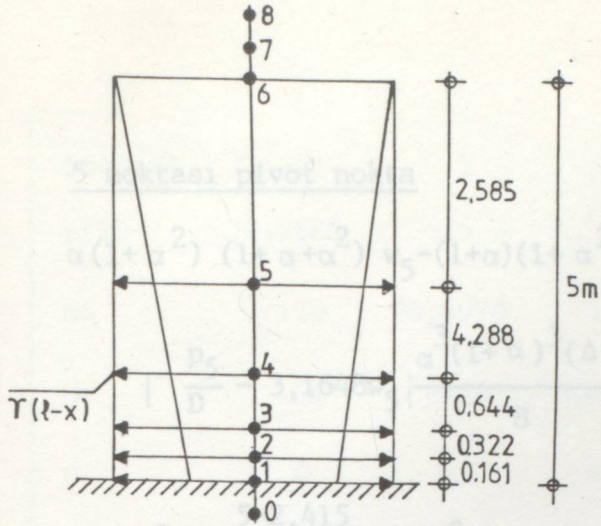
Türev	Katsayılar					Çarpan
w^{IV}	α^6	$-\alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2)$	$\alpha(1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2)$	$-(1+\alpha)(1+\alpha^2)$	1	$\frac{8}{\alpha^3(1+\alpha)^3} \frac{1}{(\Delta X_n)^4}$
Nokta	n-2	n-1	n	n+1	n+2	

Tablo IV.3.5) Farklı aralıklı sonlu farklar ağı katsayıları şeması.

IV.3.5.b) Sayısal Örnek

Burada sadece farklı aralıkların olması durumunda sonuçları inceleyeceğimizden silindirik su deposunun çözümünü ele almamız yeterli olacaktır. Böylece birden fazla çözümü karşılaştırıp bir sonuca varabiliriz.

Bu örnekte ankastre mesnete yakın yerlerde sonuçların doğruluğu açısından sık aralık, boşa kenara yakın yerlerde daha serbest aralıklar kullanacağız.



ŞEKİL 3.5.b.

$$\alpha = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n - X_{n-1}} = \frac{\Delta X_{n+1}}{\Delta X_n}$$

Sınır şartlarından;

$$w_0 = w_2$$

$$w_1 = 0$$

$$w_7 = 2w_6 - w_5$$

$$w_8 = 4w_6 - 4w_5 + w_4$$

2 noktası pivot nokta

$$\alpha (1+\alpha^2)(1+\alpha^2) w_2 - (1+\alpha)(1+\alpha^2) w_3 + w_4 + \alpha^6 w_0 = \left| \frac{P_2}{D} - 3,1648w_2 \right| \frac{\alpha^3(1+\alpha)^3(\Delta X_n)^4}{8}$$

$$\alpha = \frac{0,483 - 0,161}{0,161 - 0} = 2$$

$$134,057 w_2 - 15w_3 + w_4 = 0,08778/D \quad (1)$$

3 noktası pivot nokta

$$\alpha (1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2) w_3 - (1+\alpha)(1+\alpha^2) w_4 + w_5 - \alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2) w_2 =$$

$$\left| \frac{P_3}{D} - 3,1648w_3 \right| \frac{\alpha^3(1+\alpha)^3(\Delta X_n)^4}{8}$$

$$\alpha = \frac{1,127 - 0,483}{0,483 - 0,161} = 2$$

$$-120w_2 + 70,9186 w_3 - 15 w_4 + w_5 = 1,311/D \quad \dots (2)$$

4 noktası pivot nokta

$$(1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2) w_4 - (1+\alpha)(1+\alpha^2) w_5 + w_6 - \alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2) w_3 + \alpha^6 w_2 =$$

$$\left| \frac{P_4}{D} - 3,1648w_4 \right| \frac{\alpha^3(1+\alpha)^3(\Delta X_n)^4}{8}$$

$$\alpha = \frac{2,415 - 1,127}{1,127 - 0,483} = 2$$

$$64w_2 - 120w_3 + 84,6978w_4 - 15w_5 + w_6 = 17,3227/D \quad \dots (3)$$

5 noktası pivot nokta

$$\alpha(1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2)w_5 - (1+\alpha)(1+\alpha^2)w_6 + w_7 - \alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2)w_4 + \alpha^6w_3 =$$

$$\left| \frac{P_5}{D} - 3,1648w_5 \right| \frac{\alpha^3(1+\alpha)^3(\Delta X_n)^4}{8}$$

$$\alpha = \frac{5-2,415}{2,415-1,127} = 2$$

Denklemlerin çözümünden:

$$64w_3 - 120w_4 + 304,1654w_5 - 13w_6 = 192,082/D \quad \dots \quad (4)$$

6 noktası pivot nokta

$$\alpha(1+\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2)w_6 - (1+\alpha)(1+\alpha^2)w_7 + w_8 - \alpha^3(1+\alpha)(1+\alpha^2)w_5 + \alpha^6w_4 =$$

$$\left| \frac{P_6}{D} - 3,1648w_6 \right| \frac{\alpha^3(1+\alpha)^3(\Delta X_n)^4}{8}$$

$$\alpha = \frac{5}{5-2,415} = 2$$

$$65w_4 - 109w_5 + 3859,506w_6 = 0 \quad \dots \quad (5)$$

Denklemleri yeniden düzenleyip matris formuna getirirsek;

$$134,057w_2 - 15w_3 + w_4 = 0,08778/D \quad \dots \quad (4)$$

$$-120w_2 + 70,9186w_3 - 15w_4 + w_5 = 1,311/D \quad \dots \quad (2)$$

$$64w_2 - 120w_3 + 84,6978w_4 - 15w_5 + w_6 = 17,3227/D \quad \dots \quad (3)$$

$$64w_3 - 120w_4 + 304,1654w_5 - 13w_6 = 192,082/D \quad \dots \quad (4)$$

$$65w_4 - 109w_5 + 3859,506w_6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 134,057 & -15 & 1 & 0 & 0 \\ -120 & 70,9186 & -15 & 1 & 0 \\ 64 & -120 & 84,6978 & -15 & 1 \\ 0 & 64 & -120 & 304,1654 & -13 \\ 0 & 0 & 65 & -109 & 3859,506 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0,08778/D \\ 1,311/D \\ 17,3227/D \\ 192,082/D \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denklemlerin çözümünden;

$$w_2 = 0,0126/D$$

$$D = \frac{E \cdot \delta^3}{12(1-\mu^2)} = \frac{10^7 \cdot (0,16)^3}{12(1-1/36)}$$

$$w_3 = 0,2146/D$$

$$D = 3510,8571$$

$$w_4 = 0,5418/D$$

$$w_5 = 0,8158/D$$

$$w_6 = 0,01391/D \quad \text{bulunur.}$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_{x+1} - 2w_x + w_{x-1}}{(\Delta X)^2}$$

$$N_\theta = \frac{E \delta}{R} w$$

x = 0 m. için

$$w_1 = 0,00$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_2 + w_2}{(\Delta X_n)^2} = 1,75$$

$$N_\theta = 0,00$$

$$x = 0,161 \text{ m. için}$$

$$w_2 = 0,0126/3510,8571 = 3,59 \cdot 10^{-6}$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_3 - 2w_2 + w_1}{(\Delta X_n)^2} = 1,53$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 3,59 \cdot 10^{-6} = 0,48$$

x	0,00	0,161	0,483	1,127	2,415	5,00
w_n		$3,59 \cdot 10^{-6}$	$6,11 \cdot 10^{-5}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$	$3,96 \cdot 10^{-6}$
M_x	1,75	1,53	0,30	-0,45	-0,32	0,00
N_θ			8,15	20,53	30,93	0,00

$$x = 0,483 \text{ m. için}$$

$$w_3 = 0,2146/3510,8571 = 6,11 \cdot 10^{-5}$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_4 - 2w_3 + w_2}{(\Delta X_n)^2} = 0,30$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 6,11 \cdot 10^{-5} = 8,15$$

$$x = 1,127 \text{ m. için}$$

$$w_4 = 0,5418/3510,8571 = 1,54 \cdot 10^{-5}$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_5 - 2w_4 + w_3}{(\Delta X_n)^2} = -0,45$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 1,54 \cdot 10^{-5} = 20,53$$

$$x = 2,415 \text{ m. için}$$

$$w_5 = 0,8158/3510,8571 = 2,32 \cdot 10^{-4}$$

$$M_x = D \cdot \frac{w_6 - 2w_5 + w_4}{(\Delta X_n)^2} = -0,32$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 2,32 \cdot 10^{-4} = 30,93$$

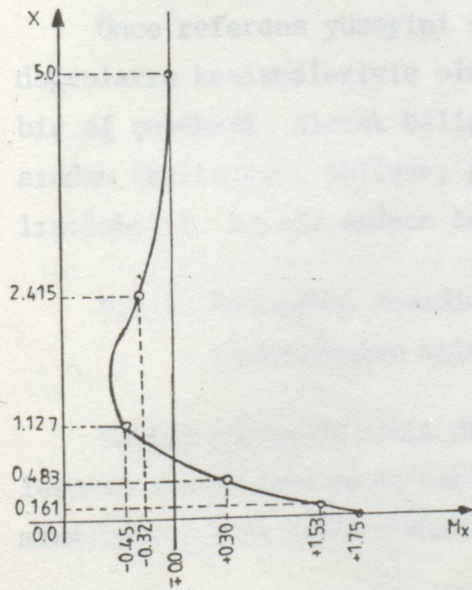
$x = 5$ m. için

$$w_6 = 0,01391/3510,8571 = 3,96 \cdot 10^{-6}$$

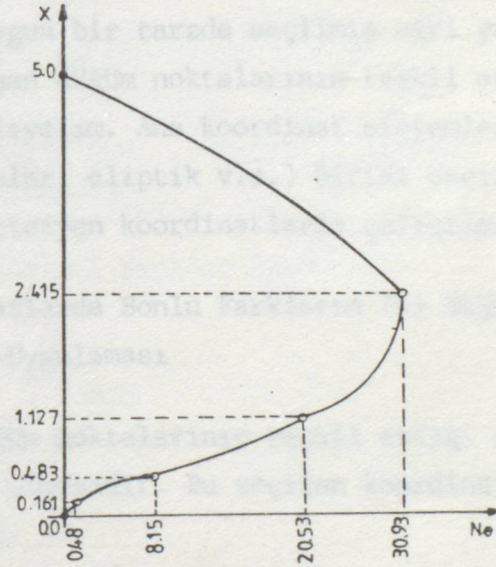
$$M_x = D \cdot \frac{w_7 - 2w_6 + w_5}{(\Delta X_n)^2} = 0,00$$

$$N_\theta = \frac{10^7 \cdot 0,16}{12} \cdot 3,96 \cdot 10^{-6} = 0,00$$

x	0,00	0,161	0,483	1,127	2,415	5,00
w	0,00	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$6,11 \cdot 10^{-5}$	$1,54 \cdot 10^{-5}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$	$3,96 \cdot 10^{-6}$
M_x	1,75	1,53	0,30	-0,45	-0,32	0,00
N_θ	0,00	0,48	8,15	20,53	30,93	0,00



Şekil 4.3.5.a



Şekil 4.3.5.b

Farklı aralıklı sonlu farklarla çözüm

V. BÖLÜM

SİMETRİK OLMAYAN YÜK DURUMUNDA SİLİNDİRİK KABUK ÇÖZÜMÜ

Şu ana kadar yaptığımız örneklerin hepsinde yükümüz dönel simetrik idi. Bu bölümde dönel simetrik olmayan yüklerin üzerinde duracağız.

Yükümüzün silindir çevresince olmasından dolayı deplasmanların da çevresel olarak aynı olmasından dolayı kirişler için kullanılan sonlu farklar ağıyla çözüm yapmamız yeterli olmuştu. Ancak simetrik olmayan yükten dolayı deplasmanlar farklı olacağından iki bağımsız değişkene ait sonlu farklarla çalışmamız gerekir.

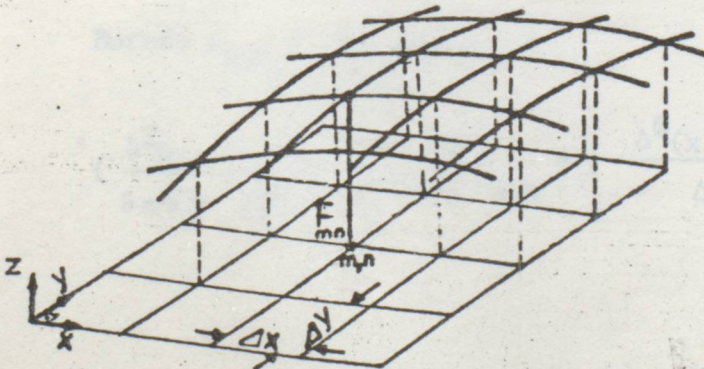
V.1) İKİ BAĞIMSIZ DEĞİŞKENE BAĞLI SONLU FARKLAR METODU

Sonlu Farklar Metodu, iki bağımsız değişkene bağlı bilinmeyen bir fonksiyon haline de uygulanabilir.

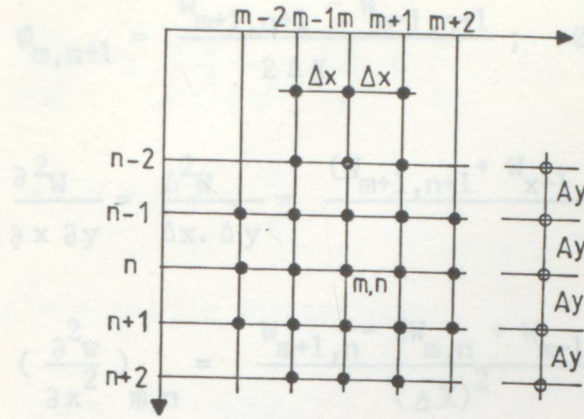
Önce referans yüzeyini uygun bir tarzda seçilmiş eğri ya da doğruların kesişmeleriyle oluşan düğüm noktalarının teşkil ettiği bir ağ şebekesi olarak belirleyelim. Ana koordinat sistemleri arasından (kartezyen, oblique, polar, eliptik v.s.) birisi seçilerek çalışılabilir. Burada sadece kartezyen koordinatlarla çalışılacaktır.

V.1.1) Kartezyen Koordinatlarda Sonlu Farkların İki Değişkenli Fonksiyonlar için Uygulaması

Dikkat edilecek nokta düğüm noktalarının teşkil ettiği ağın gözlerinin dikdörtgen ya da kare olmasıdır. Bu seçilen koordinat sistemine uygun olarak belirlenir.



Şekil 5.1.1.a



Şekil 5.1.1.b) Sonlu Farklar Ağı

(x,n) noktasını merkez nokta kabul ederek; ΔX ve ΔY genişliğindeki dilimlere ayrılan ağı, kesim noktalarındaki sehimleri (w) sonlu farklar olarak gösterdiğimizizi düşünelim :

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_m \approx \frac{W_{m-2,n} - 4W_{m-1,n} + 6W_{m,n} - 4W_{m+1,n} + W_{m+2,n}}{(\Delta X)^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_m \approx \frac{W_{m,n-2} - 4W_{m,n-1} + 6W_{m,n} - 4W_{m,n+1} + W_{m,n+2}}{(\Delta Y)^4}$$

İki değişkene göre alınan türevleri yeniden incelersek :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{m,n} \approx \frac{W_{m+1,n} - W_{m-1,n}}{2\Delta X} = \phi_{m,n}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{m,n} \approx \frac{W_{m,n+1} - W_{m,n-1}}{2\Delta Y}$$

Burada $\phi_{m,n} = \phi_{(x,y)_{m,n}}$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{m,n} = \frac{\Delta}{\Delta Y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{m,n} = \left| \frac{\Delta \phi_{(x,y)}}{\Delta Y} \right|_{m,n} = \frac{\phi_{m,n-1} - \phi_{m,n+1}}{2\Delta Y}$$

$$\phi_{m,n+1} = \frac{W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1}}{2 \Delta X}; \quad \phi_{m,n-1} = \frac{W_{m+1,n-1} - W_{m-1,n-1}}{2 \Delta X}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\Delta^2 W}{\Delta x \cdot \Delta y} = \frac{(W_{m+1,n+1} + W_{x-1,n-1}) - (W_{x-1,n+1} + W_{m+1,n-1})}{4 \Delta X \Delta Y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_{m,n} = \frac{W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}}{(\Delta X)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_{m,n} = \frac{W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}}{(\Delta Y)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{m,n} = \frac{\Delta^2 W}{\Delta x^2 \Delta y^2} = \frac{\Delta^2}{\Delta y^2} \left(\frac{\Delta^2 W}{\Delta x^2} \right) = \frac{\Delta^2 \phi}{\Delta y^2} = \frac{\phi_{m,n+1} - 2\phi_{m,n} + \phi_{m,n-1}}{(\Delta Y)^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta^4 W}{\Delta X^2 \Delta Y^2} \right)_{m,n} &= \frac{(W_{m+1,n+1} - 2W_{m,n+1} + W_{x-1,n+1}) - 2(W_{x+1,n} - 2W_{x,n} + W_{x-1,n})}{(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2} + \\ &+ \frac{W_{x+1,n-1} - 2W_{x,n-1} + W_{x-1,n-1}}{(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{x,n} &= \left(\frac{\Delta^4 W}{\Delta X^2 \Delta Y^2} \right)_{x,n} = \frac{4W_{m,n} - 2(W_{m,n+1} + W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + W_{m,n-1})}{(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2} + \\ &+ \frac{W_{x+1,n+1} + W_{x-1,n+1} + W_{x+1,n-1} + W_{x-1,n-1}}{(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2} \end{aligned}$$

Δ = Laplace Operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{olarak alınır}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{P}{D}$$

$$\Delta \Delta W = \Delta^2 W = \frac{P}{D}$$

$\Delta^2 W = \nabla W$ ile gösterilirse

$$\nabla W = \frac{P}{D} \text{ olur.}$$

$$\nabla W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \text{ ifadesindeki türevlerin yerlerine}$$

yukarıda deplasman cinsinden bulduğumuz türevler yazılırsa,

$$\frac{W_{x-2,n} - 4W_{x-1,n} + 6W_{x,n} - 4W_{x+1,n} + W_{x+2,n}}{(\Delta X)^4} +$$

$$+ \frac{8W_{x,n} - 4(W_{x,n+1} + W_{x+1,n} + W_{x-1,n} + W_{x,n-1}) + 2(W_{x+1,n+1} + W_{x-1,n+1} + W_{x+1,n-1} + W_{x-1,n-1})}{(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2}$$

$$+ \frac{W_{x,n-2} - 3W_{x,n-1} + 6W_{x,n} - 4W_{x,n+1} + W_{x,n+2}}{(\Delta Y)^4} = \frac{P(x,y)}{D} \text{ bulunur.}$$

Dikdörtgen ağ olması durumunda bu sonucu buluruz. Denklemin her iki tarafı $(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2$ ile çarpılır ve

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \alpha \text{ denilirse denklem ;}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \alpha \quad \Delta x^2 = \alpha^2 \Delta y^2$$

$$\Delta y$$

$$\Delta x^2 \Delta y^2 = \alpha^2 \Delta y^4$$

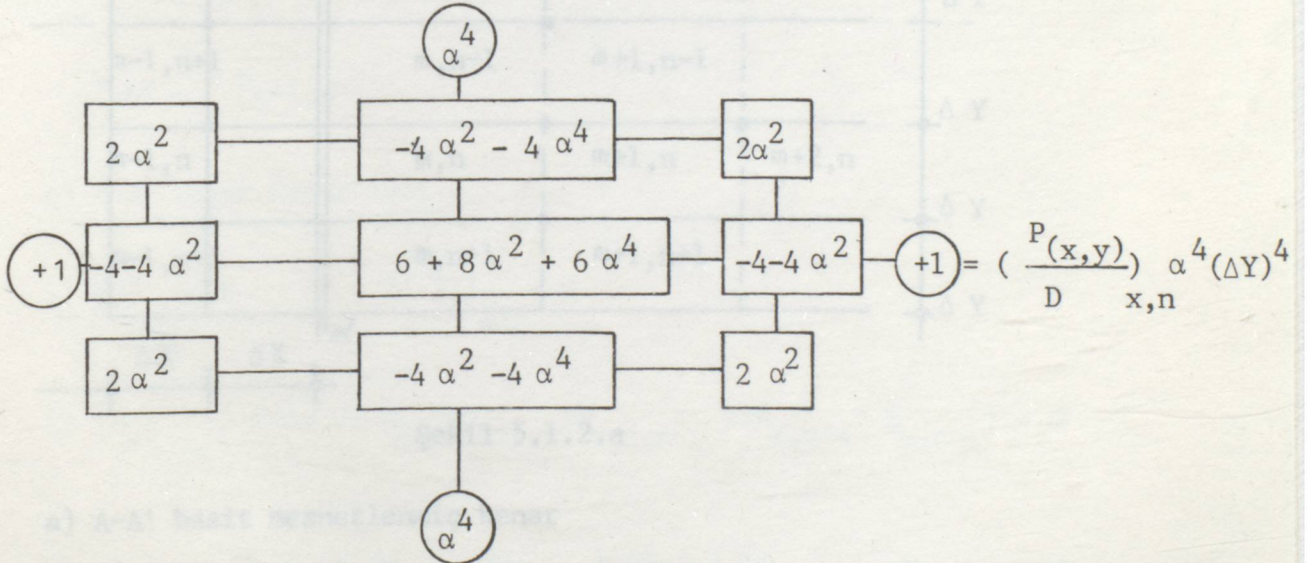
$$\Delta x = \alpha \cdot \Delta y$$

$$\begin{aligned}
& W_{x,n} \left[6 \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + 8 \right] - 4 \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) (W_{x-1,n} + W_{x+1,n}) + (1 + \alpha^2) (W_{x,n-1} + W_{x,n+1}) \right. \\
& \left. + 2(W_{x+1,n+1} + W_{x-1,n+1} + W_{x+1,n-1} + W_{x-1,n-1}) + \frac{1}{\alpha^2} (W_{x-2,n} + W_{x+2,n}) \right] \\
& \left. + \alpha^2 (W_{x,n-2} + W_{x,n+2}) \right] = \frac{P(x,y)}{D} \alpha^2 (\Delta Y)^4 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

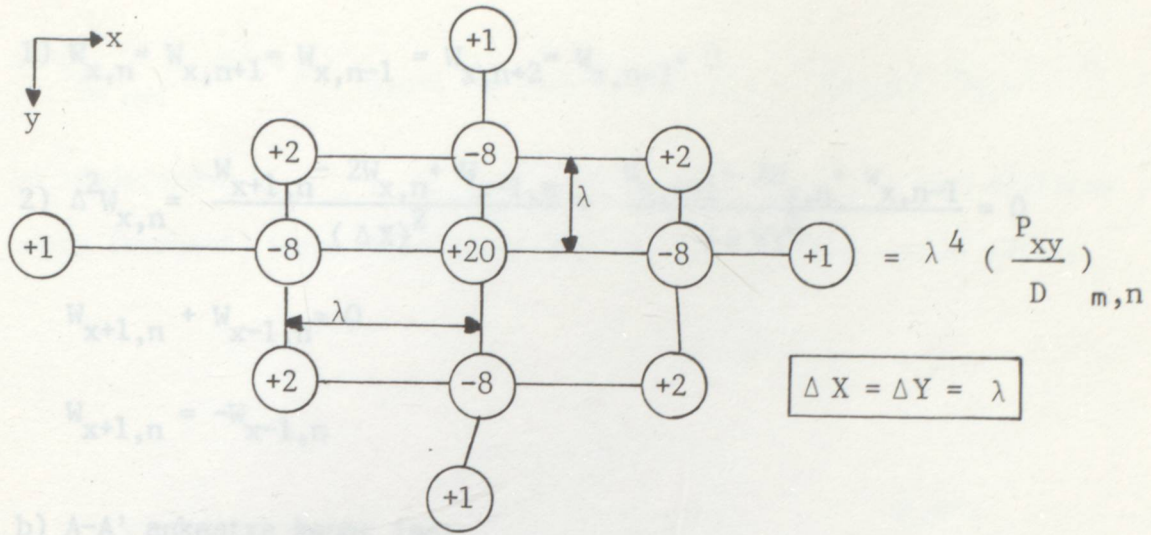
$\Delta X = \Delta Y$ olarak yani kare ağ alınması durumunda denklem;

$$\begin{aligned}
& 20W_{x,n} - 8(W_{x-1,n} + W_{x+1,n} + W_{x,n-1} + W_{x,n+1}) + 2(W_{x+1,n+1} + W_{x-1,n+1} + \\
& W_{x+1,n-1} + W_{x-1,n-1}) + (W_{x-2,n} + W_{x+2,n} + W_{x,n-2} + W_{x,n+2}) = \frac{P}{D} (\Delta Y)^4
\end{aligned}$$

$\Delta X = \alpha \Delta Y$ yani dikdörtgen bir şebeke olması halinde sonlu farklar ağı;

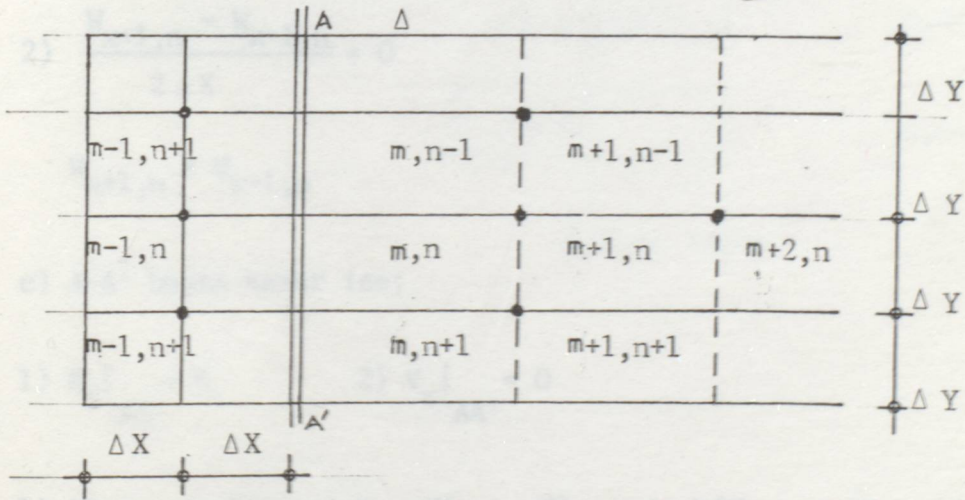


$\Delta X = \Delta Y$ ($\alpha = 1$) yani kare bir şebeke olması halinde sonlu farklar ağı;



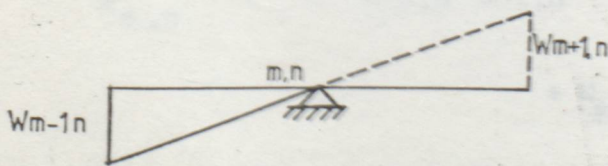
V.1.2) SINIR ŞARTLARI

Sonlu farklar metoduyla kabuk çözümünde, kabuk elemanının sınır şartlarından faydalanılır. Bunun için merkez noktası, sınır üzerine taşınır ve elemanın fiktif olarak devam ettiği varsayılır.



Şekil 5.1.2.a

a) A-A' basit mesnetlenmiş kenar



$$1) W|_{AA'} = 0$$

$$2) \Delta^2 W|_{AA'} = 0$$

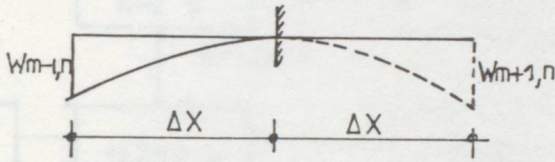
$$1) W_{x,n} = W_{x,n+1} = W_{x,n-1} = W_{x,n+2} = W_{x,n-2} = 0$$

$$2) \Delta^2 W_{x,n} = \frac{W_{x+1,n} - 2W_{x,n} + W_{x-1,n}}{(\Delta X)^2} + \frac{W_{x,n+1} - 2W_{x,n} + W_{x,n-1}}{(\Delta Y)^2} = 0$$

$$W_{x+1,n} + W_{x-1,n} = 0$$

$$W_{x+1,n} = -W_{x-1,n}$$

b) A-A' ankastre kenar ise;



$$1) W|_{AA'} = 0 \quad 2) \frac{\partial W}{\partial x} |_{AA'} = 0$$

$$1) W_{x,n} = W_{x,n-1} = W_{x,n+1} = W_{x,n+2} = 0$$

$$2) \frac{W_{x+1,n} - W_{x-1,n}}{2\Delta X} = 0$$

$$W_{x+1,n} = W_{x-1,n}$$

c) A-A' boşta kenar ise;

$$1) M_x|_{AA'} = 0 \quad 2) V_x|_{AA'} = 0$$

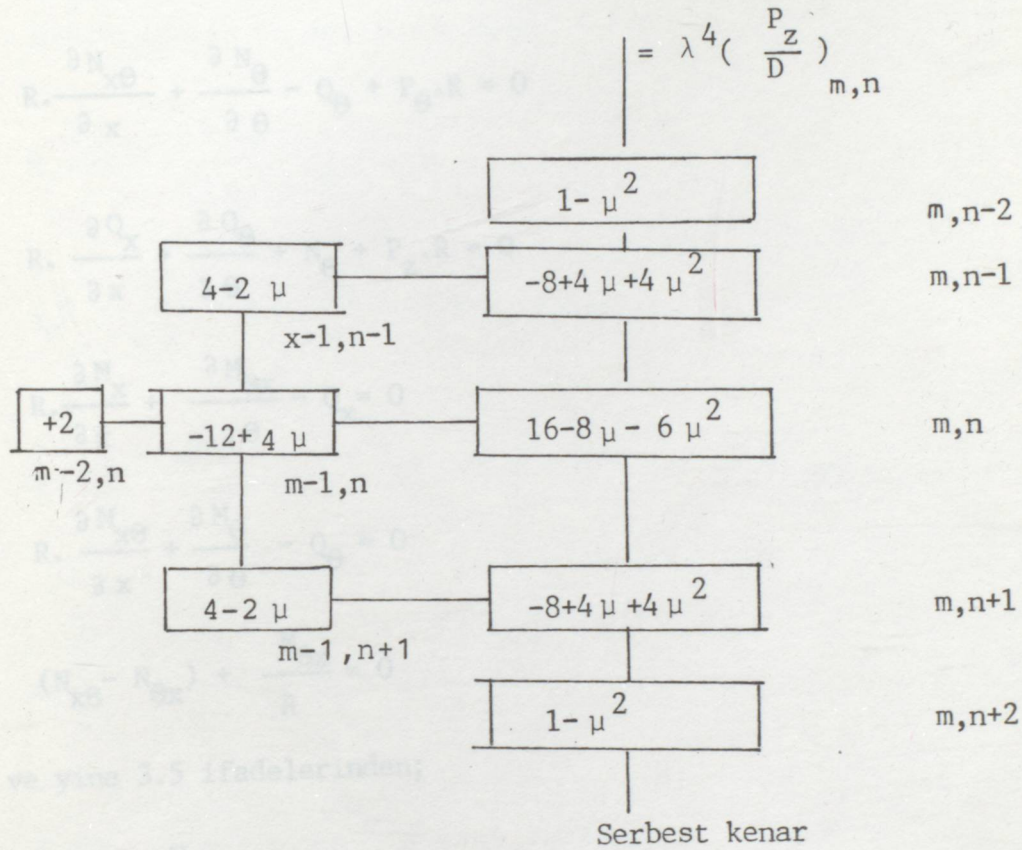
$$1) (M_x)_{m,n} = -2(1+\mu) W_{m,n} + W_{m+1,n} + W_{m-1,n} + \mu(W_{m,n+1} + W_{m,n-1}) = 0$$

$$2) (V_x)_{m,n} = 2(3-\mu) (W_{m-1,n} - W_{m+1,n}) + (2-\mu) (W_{m+1,n-1} - W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n-1} + W_{m-1,n+1}) + W_{m+2,n} - W_{m-2,n} = 0$$

$$3) M_x|_{m,n-1} = -2(1+\mu) W_{m,n-1} + W_{m-1,n-1} + W_{m+1,n-1} + \mu(W_{m,n-2} + W_{m,n}) = 0$$

$$4) M_{x_{m,n+1}} = -2(1+\mu) W_{m,n+1} + W_{m-1,n+1} + W_{m+1,n+1} + \mu (W_{m,n+2} + W_{m,n}) = 0$$

Bu ifadelerden $W_{m+2,n}$; $W_{m+1,n}$; $W_{m+1,n-1}$; $W_{m+1,n+1}$ yok edilirse boşta (serbest) kenar için aşağıdaki katsayılar şeması elde edilir.



V.2) Diferansiyel denklemin teşkil edilmesi

3.4 ve 3.5 bölümlerinde aşağıdaki denklemleri bulmuştuk.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + P_x = 0$$

$$R \cdot \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta} + P_{\theta} \cdot R = 0$$

$$R \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} + N_{\theta} + P_z \cdot R = 0$$

$$R \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x = 0$$

$$R \cdot \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta} = 0$$

$$(N_{x\theta} - N_{\theta x}) + \frac{M_{\theta x}}{R} = 0$$

ve yine 3.5 ifadelerinden;

$$N_{x\theta} = \int_{-H}^H \tau_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$N_{\theta x} = \int_{-H}^H \tau_{\theta x} dz$$

$$M_{\theta x} = - \int_{-H}^H \tau_{\theta x} \cdot z \cdot dz \quad \text{bulunmuştur.}$$

$N_{x\theta}$, $N_{\theta x}$ ve $M_{\theta x}$ değerleri 3.4 denklemlerinde yerlerine yazılırsa;

$$\int_{-H}^H \tau_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz - \int_{-H}^H \tau_{\theta x} dz + \frac{\int_{-H}^H \tau_{\theta x} \cdot z \cdot dz}{R} = 0$$

$$\int_{-H}^H \left(\tau_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{R} \right) - \tau_{\theta x} - \frac{\tau_{\theta x} \cdot z}{R} \right) dz = 0 \quad (5.2.4)$$

$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta}$ olduğuna göre denklem gerçekleşir. Diğer denklemler içerisinde kesme kuvvetlerini yok etmek suretiyle bilinmeyen sekiz kesit büyüklüğünü içeren üç denklem bulunur.

$$R \cdot \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta} \cdot R = 0 \quad (3.4.5)$$

$$Q_{\theta} R = \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + R \cdot \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} \quad \text{türevi alınır;}$$

$$R \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial \theta^2} + R \cdot \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} \quad (5.2.1) \text{ elde edilir.}$$

$$R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - R Q_x = 0 \quad (3.4.4)$$

$$R Q_x = R \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} \quad \text{türevi alınır;}$$

$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{\theta}}{\partial x \partial \theta} \quad (5.2.2) \text{ elde edilir.}$$

Bu iki denklemi diğer üç denklemde yerlerine koyarsak;

$$R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + R P_x = 0 \quad (5.2.3)$$

$$R \cdot \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + R P_{\theta} = 0$$

$$R^2 \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + R \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - R \cdot \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + R^2 P_\theta = 0 \quad (5.2.4)$$

$$R \cdot N_\theta + \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + R^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + R \cdot \frac{\partial^2 M_{\theta x}}{\partial x \partial \theta} + R^2 P_z = 0 \quad (5.2.5)$$

Hooke kanunundan ;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{xz} + \mu \epsilon_{\theta z}) \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_{\theta z} + \mu \epsilon_{xz})$$

$$\tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{x\theta z} \quad \text{olduğu bilinmektedir.}$$

Daha önceden ortalama yüzey için bulunan "ε" değerlerini ortalama yüzeyden z kadar uzaklıktaki bir mesafe için yazarsak;

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + w_z \right)$$

$$\gamma_{x\theta z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

Şekil 3.7 incelendiğinde, P ve P' noktaları şekil değiştirmeden sonra A ve A' noktalarına gelir. $w_z = w$ olduğuna göre;

$$u_z = u, z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \dots \dots \quad 5.2.6$$

$$u_z = v \cdot \frac{R+z}{R} - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \frac{R+z}{R+z+w} \quad \text{yazılabilir. Bu ifadedeki } w \text{ faktörü}$$

a+z'nin yanında ihmal edilebilir. Böylece,

$$v_z = v \frac{R+z}{R} - \frac{z}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \dots \dots \quad 5.2.7 \quad \text{bulunur.}$$

5.2.6 ve 5.2.7, ϵ_{xz} , $\epsilon_{\theta z}$ ve $\gamma_{x\theta z}$ de yerlerine yazılırsa,

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots \quad 5.2.8$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{R(R+z)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{R+z} \dots \dots \dots \quad 5.2.9$$

$$\gamma_{x\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{R+z}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{z}{R} + \frac{z}{R+z} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \quad 5.2.10$$

ifadeleri elde edilir.

V.2.1) Kesit momentleri ve kesit kuvvetleri 5.2.8, 5.2.9 ve 5.2.10 da bulunan terimler Hooke kanunundan bulunan ifadelerde yerlerine yazılırsa;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{z}{R(R+z)} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{R+z} \right) \right] \quad 5.2.11$$

ve bunun yardımıyla $h = 1/2 \delta$ koyarak;

$$N_x = \frac{E \delta}{(1-\mu^2)R} \left(R \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu w \right) - \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{elde edilir ki;}$$

$$C = \frac{E \delta}{1-\mu^2} \quad \text{ve} \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad \text{denirse ve yukarıdaki işlemlerin}$$

benzerlerinden ;

$$N_x = \frac{C}{R} \left(R \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu w \right) - \frac{D}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots \dots \dots \quad 5.2.12$$

$$N_\theta = \frac{C}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w + \mu R \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{D}{R^3} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \dots \dots \dots \quad 5.2.13$$

$$N_{x\theta} = \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{C}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad 5.2.14$$

$$N_{\theta x} = \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{C}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + R \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + R \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \quad 5.2.15$$

$$M_x = \frac{D}{R^2} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - R \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{v}{\theta} \right) \dots \quad 5.2.16$$

$$M_\theta = \frac{D}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu \cdot R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dots \quad 5.2.17$$

$$M_{x\theta} = (1-\mu) \frac{D}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \quad 5.2.18$$

$$M_{\theta x} = (1-\mu) \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} R \frac{\partial v}{\partial x} \right) \dots \quad 5.2.19$$

Yine benzer bir çalışma şeklinde Q_x ve Q_θ kesme kuvvetleri, ortalama yüzeye ait yer değiştirme bileşenleri cinsinden, ifade edilmiş olur.

$$Q_x = \frac{D}{R^3} \left(R^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{(1+\mu)}{2} R \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

$$Q_\theta = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - (1-\mu) R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad 5.2.20 \text{ (a-b)}$$

V.2.2) Genel mesnetlenme şekillerine göre diferansiyel denklemin çıkarılması

Farklı sınır şartlarının mevcut olması halinde kesin inceleme çok zordur. Bu durumda K.MIESEL tarafından bulunan ve sekizinci mertebeden

üç simültane diferansiyel denklemin (u,v,w değişkenlerine göre) integrasyonu ile ilgili bir metottür.

Boruların keyfi bir şekilde yüklenme ve mesnetlenmesi halinde çözüm, yüzey kuvvetlerinin dağılımından meydana gelen eğilme tesirleri dikkate alınmazsa, yüzey kuvvetlerine tekabül eden mambran çözümü ile 5.2.12-5.2.21 ifadelerinin 5.2.4 - 5.2.5 ifadelerindeki yerlerine yazılmalarından meydana gelen denklemin homogen kısmına ait çözümün süperpozisyonundan elde edilir. (Esas denklem için kaynak (2) sayfa 601).

Bu kenar probleminin çözümü, aşağıdaki önemsiz ve basitleştirici kabuller yapmak, sekizinci mertebeden bir tek diferansiyel denklemin integrasyonu ile olmaktadır. Bu basitleştirici kabullerden sonra aşağıdaki ifadeler oluşur :

$$M_x = \frac{D}{R^2} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

$$M_\theta = \frac{D}{R^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$Q_x = \frac{D}{R^2} \left(R^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + R \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} \right)$$

$$Q_\theta = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + R^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{Lablasien operatörü ve } F_{x,\theta} \text{ ya bağlı bir gerilme}$$

fonksiyonu olarak ele alıp Airy gerilme fonksiyonunu seçersek;

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{x\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \theta}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = F'$, $\frac{\partial F}{\partial \theta} = F''$, $\lambda = n \pi \frac{R}{L}$ ile gösterirsek ve u, v, w 'yi serilere

açarsak;

$$u = \sum U_{mn} \cos m \frac{\theta}{R} \cos \lambda \frac{x}{R}$$

$$v = \sum v_{mn} \sin m \frac{\theta}{R} \sin \lambda \frac{x}{R}$$

$$w = \sum w_{mn} \cos m \frac{\theta}{R} \sin \lambda \frac{x}{R}$$

Sınır şartından dolayı ; $x = 0$ için $u = w = 0$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

Buradan Dischinger'in çözüm yöntemi olan

$$m^8 + m^6 (2-4 \lambda^2) + m^4 (1-8 \lambda^2 + 6 \lambda^4) + m^2 (-4 \lambda^2 + 6 \lambda^4 - 4 \lambda^6) + (4 \lambda^4 + \lambda^8 + \frac{\lambda^4}{\theta}) = 0$$

Böylece λ 'nın her değerine, aşağıda verilen şekilde, sekiz adet m değeri tekabül eder.

$$m_1 = j_1 + i.k_1$$

$$m_5 = j_2 + i.k_2$$

$$m_2 = j_1 - i.k_1$$

$$m_6 = j_2 - i.k_2$$

$$m_3 = -j_1 + i.k_1$$

$$m_7 = -j_2 + i.k_2$$

$$m_4 = -j_1 - i.k_1$$

$$m_8 = -j_2 - i.k_2$$

Bu köklerden herbiri için, U_{mn} 'nin fonksiyonu olarak V_{mn} ve W_{mn} katsayılarını verirler. U_{mn} 'nin sekiz değeri, kabuğun her iki teğeti için dörder sınır şartı olmak üzere toplam olarak sekiz sınır şartından tesbit edilir. Bunlar ya $N_{\theta x}$, Q_{θ} , N_{θ} ve $N_{\theta x}$ 'i tesbit eden iç kuvvet şartları veya u, v, w ve $dw/d\theta$ yı tesbit eden deformasyon şartlarıdır.

5.2.3) Sonlu Farklarla çözüm için x, y, z koordinatlarına Bağlı Olarak Diferansiyel Denklemin Çıkarılması

Daha önce çıkardığımız kabuk denge denklemlerini x, y, z koordinatlarında yeniden yazarsak;

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \frac{Q_x}{R} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{Q_y}{R} + P_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_x}{R} + \frac{N_y}{R} - P_z = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0$$

Yüklemeyi sadece z yönünde alalım. ve N 'lerin yanında $\frac{Q_x}{R}$ ile

$\frac{Q_y}{R}$ 'yi ihmal edersek ;

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{olduğuna göre}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

(a)

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_x}{R} + \frac{N_y}{R} + P_z = 0$$

(b)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w$$

(c)

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$Q_{xy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w \quad \text{bulunur.}$$

(d)

Airy gerilme fonksiyonlarını kullanarak (c) ve (d)'de bulduğumuz değerleri (b)'de yerine koyarsak;

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w - D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + P_z = 0$$

$$\Delta_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{dersek;}$$

$$\Delta_k F - D \Delta^2 W + P_z = 0 \quad (e)$$

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} = 0$$

$$D \left| \frac{\partial^3 U_x}{\partial x^3} - \left(\frac{1}{R} + \frac{\mu}{R} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 U_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 U_x}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 U_y}{\partial y^3} - \left(\frac{1}{R} + \frac{\mu}{R} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial y^2} \right| = 0$$

$$\Delta F = N_x + N_y = D(1 + \mu) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} - \frac{W}{R} \cdot 2 \right)$$

$$\Delta \left| \Delta F - D(1 + \mu) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} - 2 \frac{W}{R} \right) \right| = 0$$

$$\Delta^2 F - D \left| \frac{\mu(1 + \mu)}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\mu(1 + \mu)}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1 + \mu}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1 + \mu}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right| = 0$$

$$\Delta^2 F + D \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{(1 + \mu^2)}{R} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot \frac{(1 - \mu^2)}{R} \right| = 0$$

$$\Delta^2 F + E \delta \Delta_k W = 0 \quad (f)$$

$$\text{Sonuçta } \Delta_k F - D \Delta^2 W + P_z = 0$$

$\Delta^2 F + E \delta \Delta_k W = 0$ olarak birisi 2.dereceden diğeri 4. dereceden olan iki denklem elde ederiz. Görüldüğü gibi denklemler F ve W'ye bağlı.

Bundan sonra çift indisli sonlu farklar ağından 2. türevli ve IV. türevli olan ağı kullanarak ve kabuğumuzu açarak her noktadaki F ve W'yi yazarak aldığımız nokta sayısı kadar denklem elde ederiz ki bu da önceki çözümümüzden farklı bir çözüm değildir.

Bulunan F ve W'yi kullanarak w ile momentleri, F ile de diğer kesit zorlarını hesaplayabiliriz.

VI. BÖLÜM

SONUÇLAR

Dairesel silindirik kabuklar, çeşitli yüklerin etkisinde bir takım yöntemlerle çözülmüş ve aşağıda karşılaştırmaları ve açıklamaları yapılmıştır.

VI .1.1) Silindirik su deposu sonuçlarının incelenmesi

Bu karşılaştırmaların ilki silindirik su depolarının örneklerine ait karşılaştırmalardır. Bölüm IV.2 ve Bölüm IV.3 de diferansiyel denklemlerle ve sonlu farklarla çözülen örnekler; aynı örneğin kaynak (6) ve kaynak (7) de çözüm sonucu çıkan neticelerle karşılaştırılacaktır. Ayrıca sonuçların diyagramları da çizilip, kaynak çözümlerde çıkan diyagramlarla bizim çözümümüz sonucunda çıkan diyagramlar karşılaştırılacaktır. Yani silindirik su deposu örneği;

a) Diferansiyel denklemlerle, eşit aralıklı sonlu farklarla bulunan sonuçlar ve kaynak çözümü sonuçları,

b) Diferansiyel denklemler, eşit aralıklı sonlu farklar ve aralıkları eşit olmayan sonlu farklarla çözüm sonucu oluşan diyagramlar, kaynak diyagramlarla karşılaştırılacaktır.

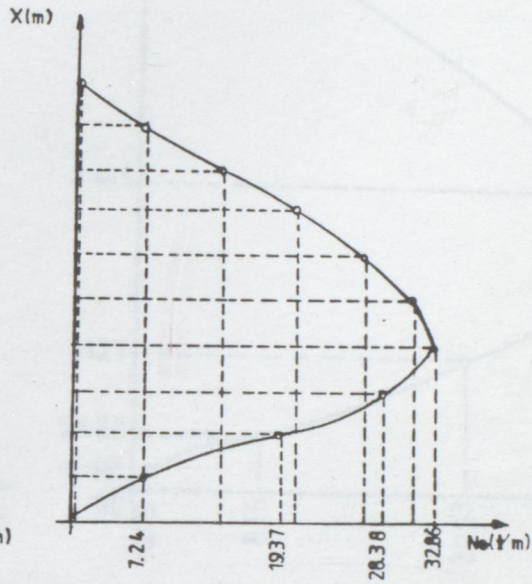
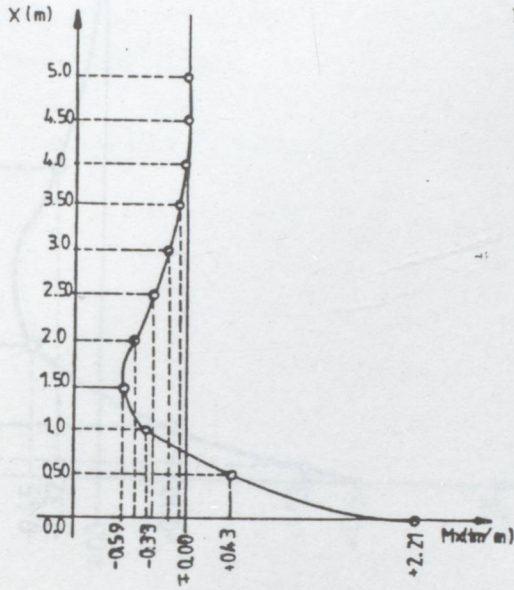
a) Çözüm sonuçlarının karşılaştırılması.

x	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
w ₁	0,00	$5,43 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$2,13 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$	$1,99 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$	$5,24 \cdot 10^{-5}$	$3,16 \cdot 10^{-6}$
w ₂	2,21	$6,90 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$2,23 \cdot 10^{-4}$	$2,44 \cdot 10^{-4}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$	$1,98 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-4}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	0,00
M _{x1}	1,95	0,43	-0,38	-0,59	-0,50	-0,33	-0,17	-0,063	-0,0029	0,00	0,00
M _{x2}	2,21	0,31	-0,40	-0,57	-0,47	-0,33	-0,16	-0,064	-0,015	0,00	0,00
M _{xkay6}	2,23	0,43	-0,38	-0,59	-0,51	-0,34	-0,18	-0,07	-0,02	0,00	0,00
M _{xkay7}	0,00	0,44	-0,38	-0,59	-0,51	-0,34	-0,18	-0,08	-0,02	0,00	0,00
N _{e1}	0,00	7,24	19,37	28,38	32,86	30,86	26,51	20,46	13,76	6,99	0,42
N _{e2}	0,00	9,20	21,33	29,73	32,53	30,93	26,40	20,27	13,60	6,80	0,00
N _{ekay6}	0,00	7,24	19,37	28,30	32,03	30,93	26,62	20,57	13,70	6,79	-0,23
N _{ekay7}	0,04	7,32	19,13	28,66	31,81	30,86	26,57	20,46	13,59	6,84	0,00

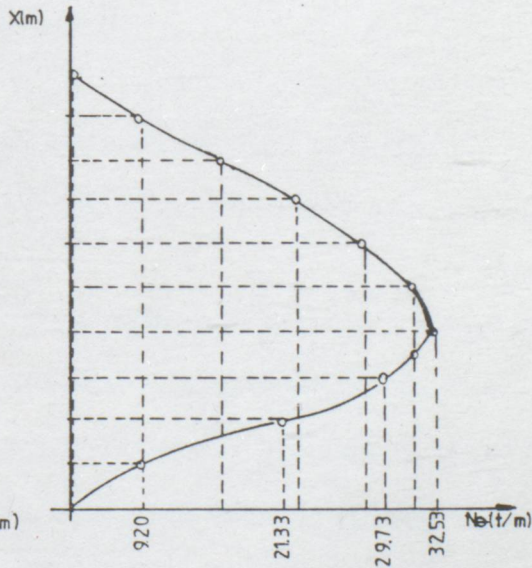
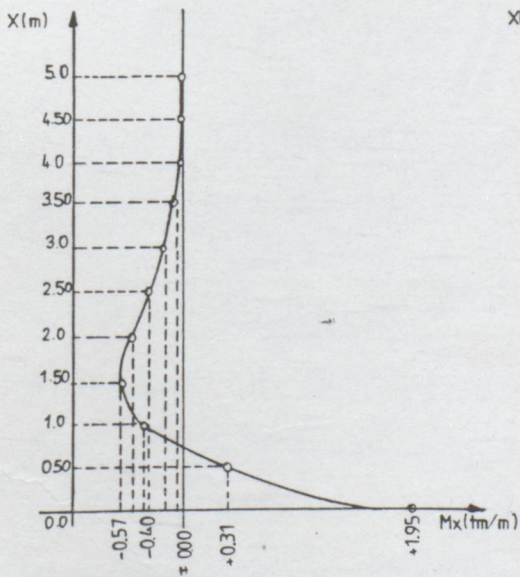
- Satır 1. Kesitin kabuk alt kenarından ölçülen uzaklığı
- Satır 2. Kabuğun diferansiyel denklemler sonucunda bulunan w deplasmanları.
- Satır 3. Kabuğun eşit aralıklı sonlu farklarla çözümü sonunda bulunan w deplasmanları
- Satır 4. Kabuğun diferansiyel denklemler sonucunda bulunan M_x momentleri
- Satır 5. Kabuğun sonlu farklarla çözümü sonunda bulunan M_x momentleri
- Satır 6. Kaynak (6) dan alınan M_x değerleri
Kaynak (6): A TRUPIA'nın ince, elastik, dönel kabuk sistemlerinin statik, dinamik ve ikinci mertebe teorisine göre hesabı için bir metod adlı doktora tezi
- Satır 7. Kaynak (7) den alınan M_x değerleri
Kaynak (7): N.Kumbasar ve F.Keskinel'in Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar adlı kitapları.
- Satır 8. Kabuğun diferansiyel denklemler sonucunda bulunan N_θ değerleri
- Satır 9. Kabuğun sonlu farklarla çözümü sonunda bulunan N_θ değerleri
- Satır 10. Kaynak (6) dan alınan N_θ değerleri
- Satır 11. Kaynak (7) den alınan N_θ değerleri

Çözümlerimizi incelediğimizde sonlu farklarla çözdüğümüz kabuk sonuçları ankastre mesnete yakın yerlerde yaklaşık çözümler vermektedir. Bu nedenle ankastre mesnete yakın yerlerde daha sık ağ seçmemiz yerinde olacaktır. Bu sık ağa ait çözüm şeklini "b" şıkında diyagramlar üzerinde inceleyeceğiz. Diyagramlardan da görüleceği gibi ankastre mesnete yakın yerlerde sık ağ kullandığımızda kesin sonuca daha net ulaşabiliriz.

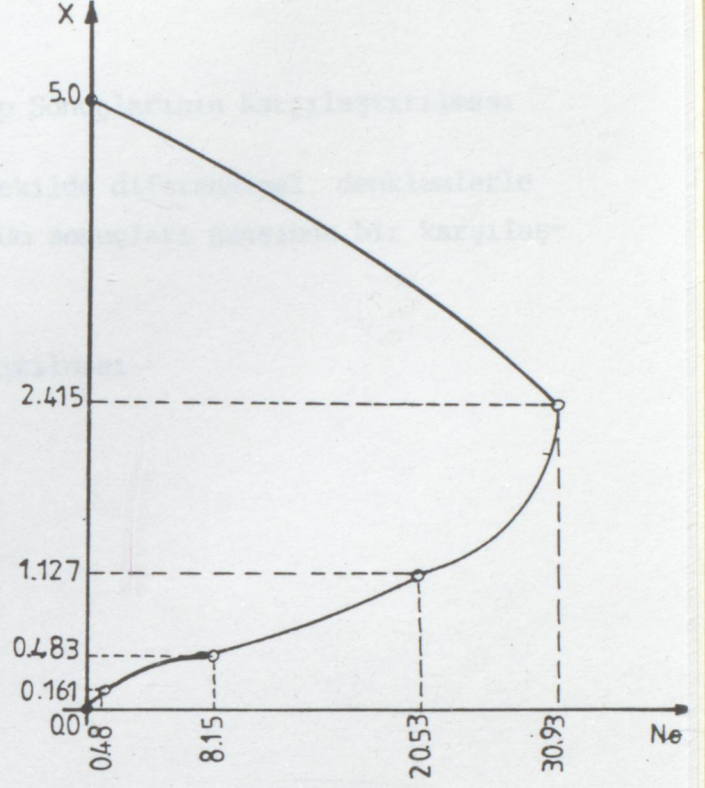
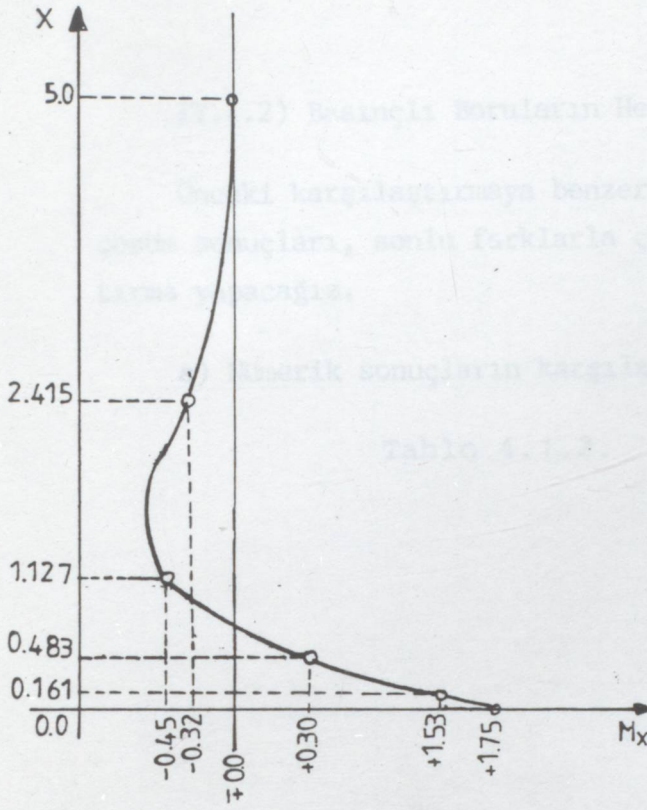
b) Diyagramların karşılaştırılması



Analitik çözüm



Sonlu farklarla çözüm



Farklı aralıklı sonlu farklarla çözüm

1. Satır : Diferansiyel denklemin sağ tarafındaki üyelerin toplamı
2. Satır : Aynı aralıklı sonlu farklar yöntemi kullanılarak bulunan N_0 değerleri
3. Satır : Diferansiyel denklemler sisteminde bulunan N_1 değerleri
4. Satır : Aynı aralıklı sonlu farklar yöntemi kullanılarak bulunan N_2 değerleri
5. Satır : Diferansiyel denklemler sisteminde bulunan N_3 değerleri
6. Satır : Aynı aralıklı sonlu farklar yöntemi kullanılarak bulunan N_4 değerleri
7. Satır : Diferansiyel denklemler sisteminde bulunan N_5 değerleri

IV.1.2) Basınçlı Boruların Hesap Sonuçlarının Karşılaştırılması

Önceki karşılaştırmaya benzer şekilde diferansiyel denklemlerle çözüm sonuçları, sonlu farklarla çözüm sonuçları arasında bir karşılaştırma yapacağız.

a) Nümerik sonuçların karşılaştırılması

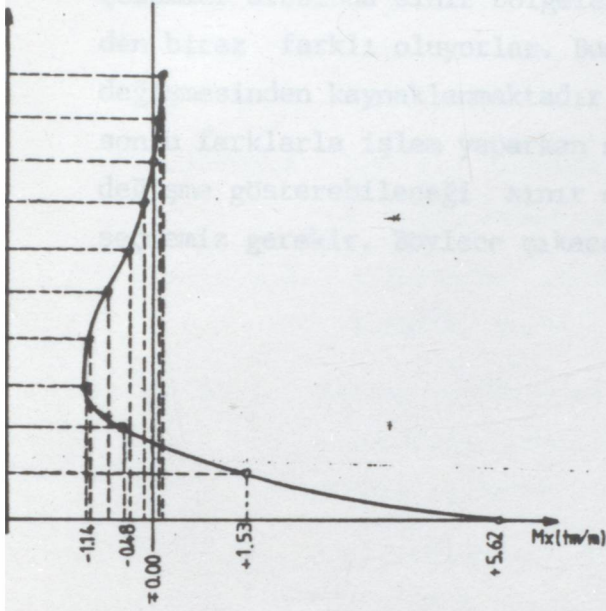
Tablo 4.1.2.

1. Satır : Kesitin kabuk alt kenarından ölçülen uzaklığı
2. Satır : Eşit aralıklı sonlu farklar metodu sonucunda bulunan w değerleri
3. Satır : Diferansiyel denklemler sonucunda bulunan w değerleri
4. Satır : Sonlu farklar metodu sonucunda bulunan M_x değerleri
5. Satır : Diferansiyel denklemler sonucunda bulunan M_x değerleri
6. Satır : Sonlu farklar metodu sonucunda bulunan N_θ değerleri
7. Satır : Diferansiyel denklemler sonucunda bulunan N_θ değerleri

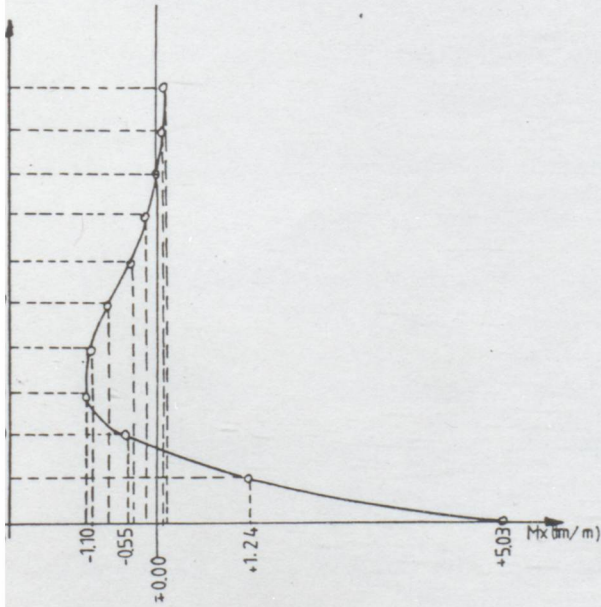
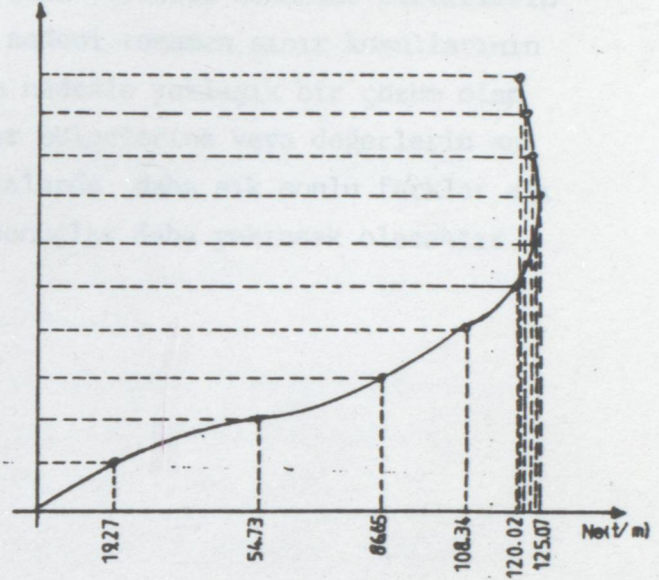
x	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
w_1	0,00	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$4,64 \cdot 10^{-4}$	$6,73 \cdot 10^{-4}$	$8,23 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9,32 \cdot 10^{-4}$	$9,35 \cdot 10^{-4}$	$9,26 \cdot 10^{-4}$	$9,14 \cdot 10^{-4}$	$9,02 \cdot 10^{-4}$
w_2	0,00	$1,45 \cdot 10^{-4}$	$4,11 \cdot 10^{-4}$	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$8,13 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9,34 \cdot 10^{-4}$	$9,38 \cdot 10^{-4}$	$9,29 \cdot 10^{-4}$	$9,17 \cdot 10^{-4}$	$9,08 \cdot 10^{-4}$
M_{x1}	5,03	1,24	-0,55	-1,10	-1,0	-0,70	-0,38	-0,16	-0,047	-0,003	0,00
M_{x2}	5,62	1,53	-0,48	-1,14	-1,08	-0,75	-0,42	-0,17	-0,028	-0,036	0,05
$N_{\theta 1}$	0,00	23,86	59,47	89,73	109,73	120	124,27	124,67	123,47	121,87	120,27
$N_{\theta 2}$	0,00	19,27	54,73	86,65	108,34	120,02	124,56	125,07	123,86	122,30	121,07

Tablo 4.1.2.

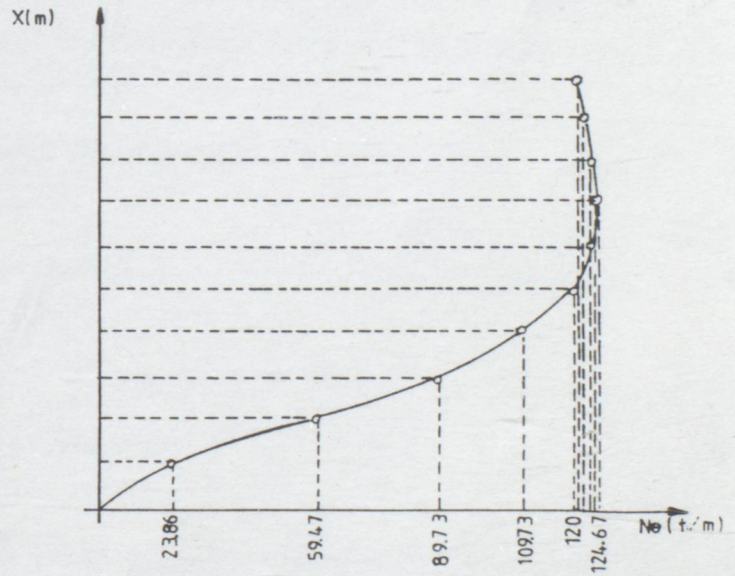
b) Diyagramların karşılaştırılması.



Analitik çözüm



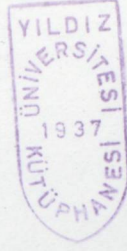
Sonlu farklarla çözüm



KAYNAKLAR

Nümerik sonuç değerlerinden ve diyagramlardan da görüleceği gibi çözümler arasında sınır bölgelere yakın yerlerde sonuçlar birbirlerinden biraz farklı oluyorlar. Bunun nedeni tamamen sınır koşullarının değişmesinden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle yaklaşık bir çözüm olan sonlu farklarla işlem yaparken sınır bölgelerine veya değerlerin ani değişme gösterebileceği sınır noktalarda daha sık sonlu farklar ağı seçmemiz gerekir. Böylece çıkacak sonuçlar daha yakınsak olacaktır.

- 3) VEASOV, V. S., Allgemeine Schwingungstheorie und ihre Anwendung in der Technik, Verlag, Berlin 1968.
- 4) KOKSAL, J., Boyuna ve Yataysal Kesit Keskinlikleri İçin Silindirik Kalkınların Sıfır Elemanlar Yöntemi ile Stabilite İncelmesi, Doktora Tezi, Y.Ü. 1982.
- 5) SCARF, R., Application des Equations aux Differences Finies au Calcul des Coques, Mémoires de l'Académie des Sciences de la République Socialiste de Roumanie, 1962.
- 6) TRUPIA, A. L., Ince, Elastik, Kesit Keskinlik Elemanlarının Statik, Dinamik ve Diğer Mekanik Özellikleri Üzerine İncelme ve Bir Modelin Geliştirilmesi, Y.Ü. 1974.
- 7) ESDERİS, F., KAPLAN, P., Keskinlik Teorileri ve Diğer Konular, İ.T.Ü. İstanbul, 1976.
- 8) JINCHENKO, N., ÖZGEN, R., KAPLAN, P., Plak ve Kabuklar Teorisi, İ.T.Ü. İstanbul, 1974.
- 9) ÖZGEN, R., Keskinlik Teorileri, İ.T.Ü. İstanbul, 1975.
- 10) KAPLAN, P., Plak Teorisi ve Uygulamaları, Y.Ü. İstanbul, 1982.
- 11) SZILARD, R., Theory and Methods of Plates, Pergamon, 1969.
- 12) KOKSAL, J., Silindirik Kabukların Dinamik Değerleri İncelmesi Üzerine İncelme, Doktora Tezi, İ.T.Ü. 1975.
- 13) ÖZGEN, R., Silindirik Keskinlik Üzerine Keskinlik Elemanlarında Limit Analizi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. 1982.
- 14) ÇELİK, İ. S., Çelik Elemanlar, Plating ve Keskinlik Üzerine İncelme ve Uygulamaları, İ.T.Ü. İstanbul, 1974.



KAYNAKLAR

- 1) LOVE,A.E.H., A Treatise on the Mathematical theory of elasticity. Fourth edition, Dover Publications, Inc. Nev York, N.y. 1944.
- 2) GIRKMANN,K. Çeviri: TAMEROĞLU,S., Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, C.I-II, İstanbul,1964.
- 3) VLASOV,W,S. Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendug in der Technik, Verlag, Berlin 1958.
- 4) KÖKSAL,T., Boyuna ve dairesel ayırık nervürlerle rijitlendirilmiş silindirik kabukların sonlu elemanlar yöntemi ile stabilite hesabı, Doktora Tezi, Y.Ü. 1982.
- 5) SOARE,M., Application des Equations aux Differences Fihies au Calcul des Coques, Editions de L'Acade'mie de la Re'publique Socialiste de Roumanie, 1962.
- 6) TRUPIA,A.L., İnce, Elastik, Dönel Kabuk Sistemlerinin Statik, Dinamik ve İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesabı için Bir Metod Doktora Tezi, İ.T.Ü. 1974.
- 7) KESKİNEL,F., KUMBASAR,N., Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, İ.T.Ü. İstanbul, 1976.
8. TİMOSHENKO,S., Çeviri: İNAN,M., SÖNMEZ,F., Plak ve Kabuklar Teorisi, İ.T.Ü. İstanbul,1964.
- 9) ÖZDEN,K., Dönel Kabuklar, İ.T.Ü. İstanbul,1975.
- 10) BERKTAY,İ., Plak Teorisi ve Uygulamaları Y.Ü. İstanbul,1988.
- 11) SZILARD,R., Theory and Analysis of Plates Prentice-Hall, INC. 1974.
- 12) KÖKSAL,E., Silindirik Kabukların Başlangıç Değerleri Metodları ile Hesabı, Doktora Tezi, İ.T.Ü. 1975.
- 13) ÖZGEN,K., Silindirik Kabukların Genel Yükler Altında Limit Analizi Doktora Tezi, İ.T.Ü. 1972.
- 14) ÇETMELİ,E., Çubuk Sistemler, Plaklar ve Kabukların Hesabı için Tablolar Uluğ Kitabevi, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Ali KOÇAK, Hafik-Sivas'ta 1965 yılında doğmuştur. 1983 yılında İnşaat Teknik Lisesi'ni bitirip aynı yıl Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girip 1987 yılında Yapı opsiyonundan mezun olmuştur. 1988 yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Masif Yapılar Kürsüsü'ne araştırma görevlisi olarak girmiştir. Halen aynı kürsüde çalışmaktadır.

