

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Tek Kad. ve İki Kad. Son. Far. Met.
ile Küçük Seh. İnce Plak Çöz.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Atilla Uyarın

1989

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 150
161

Alındığı Yer : FEN BİL. ENS.

Tarih : 17.10.1991

Fatura : 30.000. TL.

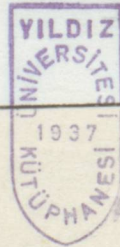
Fiyatı : 1/15

Ayniyat No : 47753

Kayıt No : 624. 378.242

UDC :

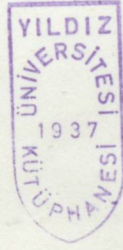
Ek :



YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEK KADEMELİ VE İKİ KADEMELİ SONLU
FARKLAR METODU İLE
KÜÇÜK SEHİMLİ İNCE PLAK ÇÖZÜMÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞ. MÜH. ATILLA UYARAN

İSTANBUL 1989

Bu tezin hazırlanmasında engin yardımlarını esirge-
meyen değerli hocam Prof. Dr. Ercüment KÖKSAL'a ve herza-
man manevi yardımlarıyla bana destek olan anneme içtenlik-
le teşekkür ederim.

Atilla UYARAN

Haziran 1989

Ö Z E T

Bu çalışmada küçük sehimli ince plakların tek kademeli ve iki kademeli sonlu farklar metodu ile çözümü incelenmiştir. Düzgün yayılı yük altındaki plak taşıyıcı elemanın diferansiyel denklemi çıkarılmıştır. Elde edilen plak diferansiyel denklemindeki diferansiyel terimler sonlu farklar şeklinde ifade edilmiştir. İç kuvvetleri de sonlu farklarla ifadelendirdikten sonra çözüm şekli belirlenmiştir. Üçgen prizma yüklü bir plak taşıyıcı elemanın ise, iki kademeli sonlu farklarla çözümü anlatılmıştır. Son bölümde metodun uygulanışını, değişik sınır şartlarında inceleyip gerçek değerlerle yaklaşıklığı hesaplanmıştır.

S U M M A R Y

In this study, solution of thin plates having small deflections by single-stage finite difference and multi-stage finite difference and methods is discussed. Differential equation of plate subjected to uniformly distributed load is obtained. Differential terms in this equation are expressed as finite differences. After expressing internal forces also as finite differences, type of solution is defined. In the case of triangular prismatic type of loading, two-stage finite difference method of solution is explained. Finally, application of this method for different boundary conditions is discussed and its closeness to real values is calculated.

İÇİNDEKİLER

Semboller

BÖLÜM 1.-Yüzeysel taşıyıcı sistemler.....	1
BÖLÜM 2.-Plak diferansiyel elemanında oluşan gerilmeler..	4
-Gerilmelerden dolayı oluşacak iç kuvvetler.....	6
-Diferansiyel geometride inceleme.....	7
-X ve Y yönlerindeki deformatsiyonların w deplasmanını cinsinden ifadesi.....	11
-Distorsiyonun w deplasmanı cinsinden ifadesi....	11
-Şekil değiştirmeler ile gerilmeler arasındaki bağıntılar.....	13
-Gerilmelerin sehimler cinsinden ifadelendirilmesi.....	14
-İç kuvvetlerin sehimler cinsinden ifadelendirilmesi.....	17
- M_x , M_y eğilme momentlerinin dış yük cinsinden ifadelendirilmesi.....	26
-Sınırlardaki kesme kuvvetinin w cinsinden ifadelendirilmesi.....	28
BÖLÜM 3.-Sonlu farklar metodunun esası.....	30
-Metodun çıkarılışı.....	30
-Dış yükün ve iç kuvvetlerin sonlu farklarla ifadelendirilmesi.....	42
-Sınır şartlarının incelenmesi.....	53
-Basit mesnetlenmiş, üçgen prizma yüklü taşıyıcı plak elemanın iki kademeli sonlu farklar metodu ile çözümü.....	56
-Uygulamalar.....	59
BÖLÜM 4.-Mukayese.....	79

SEMBO LLER

l, l_x, l_y	Açıklık boyları
d	Plak kalınlığı
x, y, z	Karteziyen koordinatlar
ζ, ζ_{xy}	Kayma gerilmesi
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normal gerilme bileşenleri
P	Birim alana gelen yük
μ	Poisson oranı
M_x, M_y	Birim boya gelen eğilme momenti
Q_x, Q_y	Birim boya gelen kesme kuvveti
u, v, z	X, Y, Z doğrultusunda yer değiştirmeler
V_x, V_y	Fiktif kesme kuvveti
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Birim deformatsiyon bileşenleri
γ_{xy}, γ_{yx}	Kayma deformatsiyonları
G	Kayma modülü
J	Atalet momenti
Δ	Laplace operatörü
∇	Hamilton operatörü
\mathcal{H}	Toplam moment
λ	Sonlu farklar ağı genişliği
E	Elastisite modülü
k, l, m, j, i, h	Sonlu farklar nokta kodları
a, b	X ve Y doğrultusunda plak boyutları
D	Plak eğilme rijitliği

Yükseklikler, Eğilimler ve Dönüşümler

Kalınlıklara, taşıma yüksekliği boyutları yanında çok küçük olan alanlardır. Bu tür taşıyıcıların orta noktalarında birleştirme yuvası "orta yuva" denir.

a- Orta yuva bir düzlem ise, bir dönüşüm taşıyıcı bu durumda olur. Dönüşüm taşıyıcılarda, bir yüklerin etki biçimine göre kendi içinde bölümlere ayrılır.

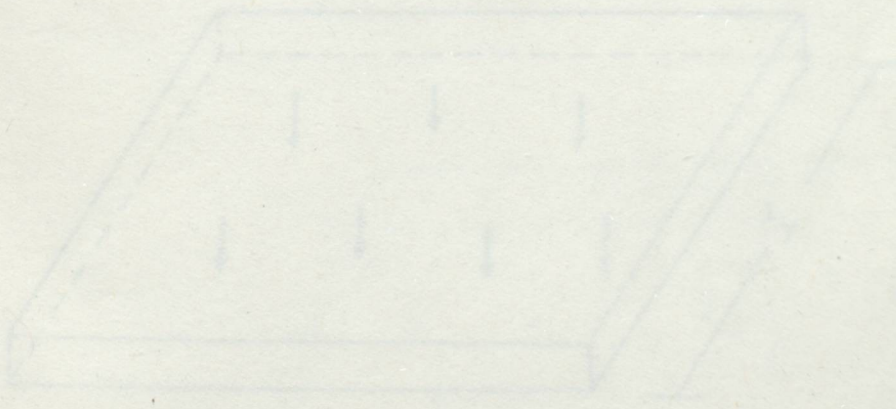
1 - 1) Bir yükler orta düzleme dik ise "Pisik taşıyıcı" diye konuşulur. Yani, orta düzlemin eğilmesi ile bir eğilim oluşur. Bu tür taşıyıcılara "pisik" denir. Dönüşüm yapıları bu tür taşıyıcılardan oluşmaktadır.

2 - 2) Bir yükler orta düzlem içinde etkiliyor ise bir "levha" oluşur. Bu durumda, taşıyıcılara stabilite problemleri doğabilir.

B Ö L Ü M I

3 - 3) Yükseklikler de kendi düzlemleri içinde yükler etki etmezler. Bunlarda bir eğilim, bir de eğilim sonucu oluşan eğilim vardır. Bu tür taşıyıcılarda yapılan bir çalışma sonucu şu şekilde sonuçlandırılır.

4 - 4) Dönüşüm yapılarında, pisik taşıyıcılar aynı şekilde değerlendirilir. Dönüşüm yapılarında etki ile ilgili problemler ve 3. bölümde belirtilenler aynı şekilde.



Şekil 1.1. Dönüşüm yapıları

Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler :

Kalınlıkları, taşıyıcı yöndeki boyutları yanında çok küçük olan sistemlerdir. Bu tür taşıyıcıların orta noktalarını birleştiren yüzeye " orta yüzey " denir.

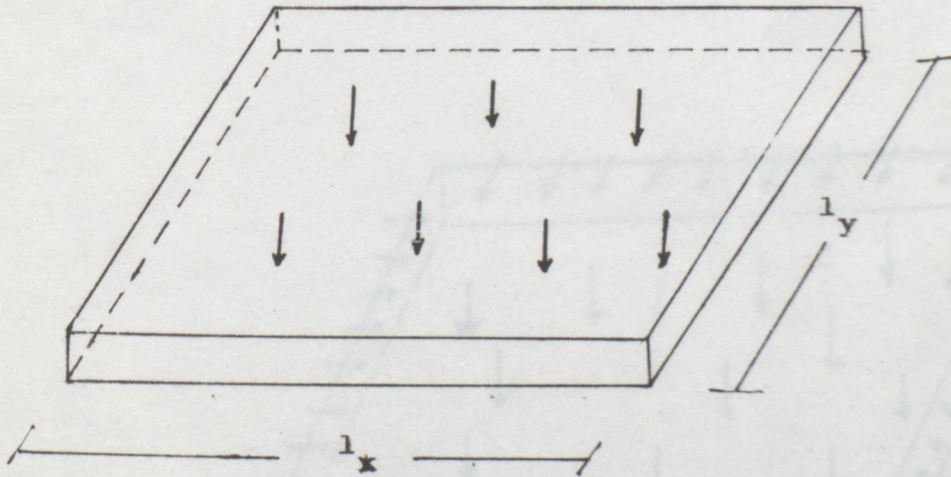
a- Orta yüzey bir düzlem ise, bir düzlemsel taşıyıcı söz konusu olur. Düzlemsel taşıyıcılarda, dış yüklerin etki biçimine göre kendi içinde bölümlere ayrılır.

a - 1) Dış yükler orta düzleme dik ise "Plak çalışması" söz konusudur. Yani, orta düzlemin eğilmesi ile bir elastik yüzey oluşmaktadır. Bu tür taşıyıcılara " plak " denir. Betonarme döşemeler plak cinsinden taşıyıcılardır.

a - 2) Dış yükler orta düzlem içinde etkiyor ise bir "levha" çalışması söz konusudur. Levhalarda stabilite problemleri önem kazanır.

a - 3) Yüksek kirişler de kendi düzlemleri içindeki yüklerin etkimesi altındadır. Bunlarda hem stabilite, hem de eğilme momenti etkisi vardır. Fakat kiriş teorisinde yapılan bazı varsayımlar burada geçerli değildir.

a - 4) Öngerilmeli döşemelerde, plak çalışması esas olmakla beraber, öngerilmeli kuvvetin etkisi ile stabilite problemi ve 2. mertebe momentleri önem kazanır.

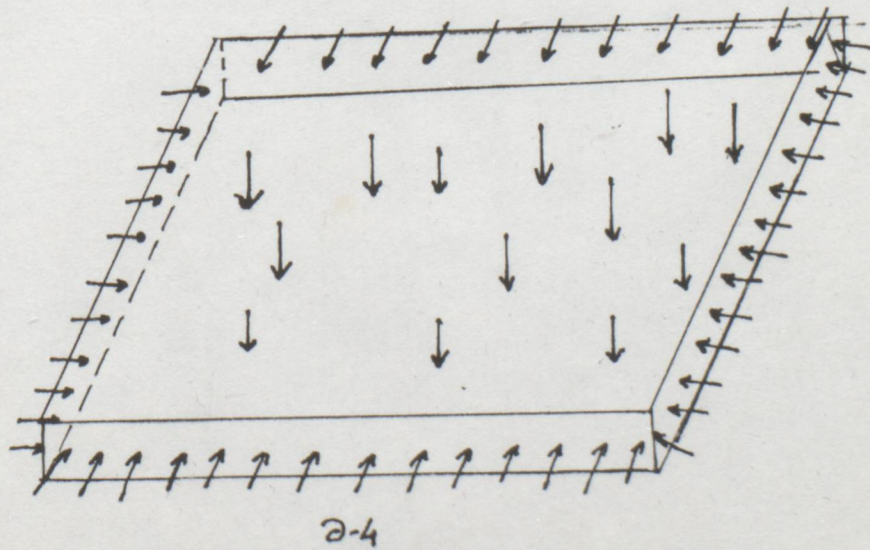
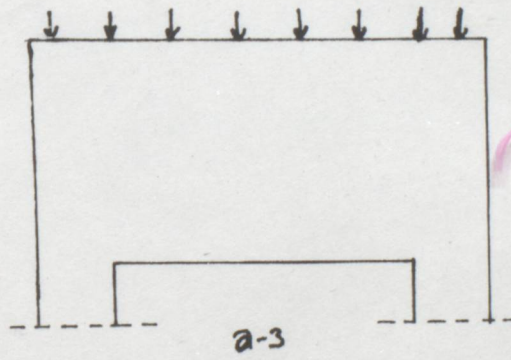
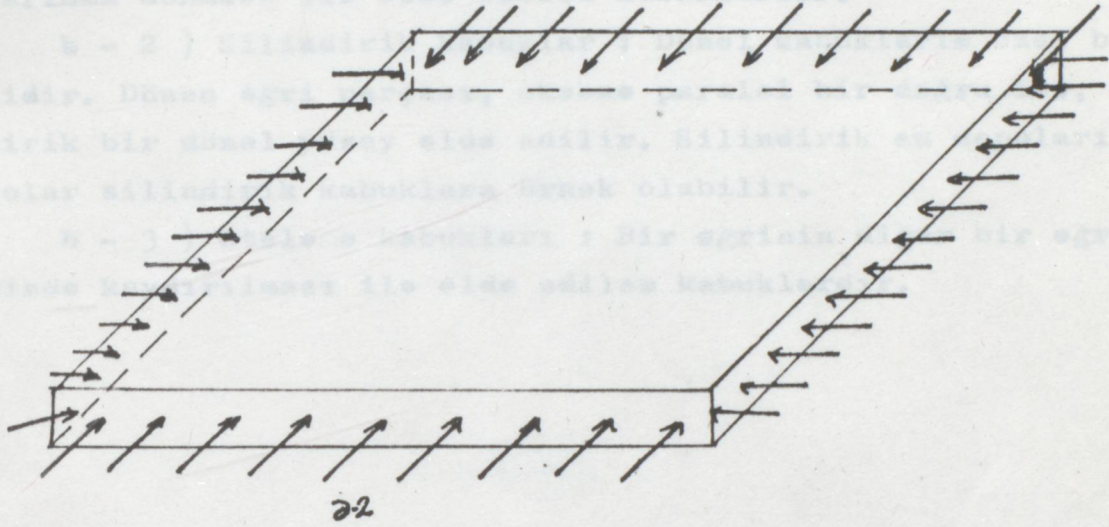


2 - Orta yüzey düzleşmiş, herhangi bir eğri yüzey ile
yüzeyde karşıt kabuk edilmis alır. Kabuklarda geometrik özellik
kaybolmuş gibi bazı aralarında sınırlanabilir.

2 - 1) Düz kabuklar : Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönüşü ile elde edilen kabuklardır.

2 - 2) Silindirik kabuklar : Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönüşü ile elde edilir. Düz kabuklardan farklı olarak, silindirik kabukların yüzeyleri düz değildir, silindirik yüzeyler silindirik kabuklara örnek olabilir.

2 - 3) Eğri kabuklar : Bir eğri parçasının bir eğri yüzey etrafında dönüşü ile elde edilen kabuklardır.

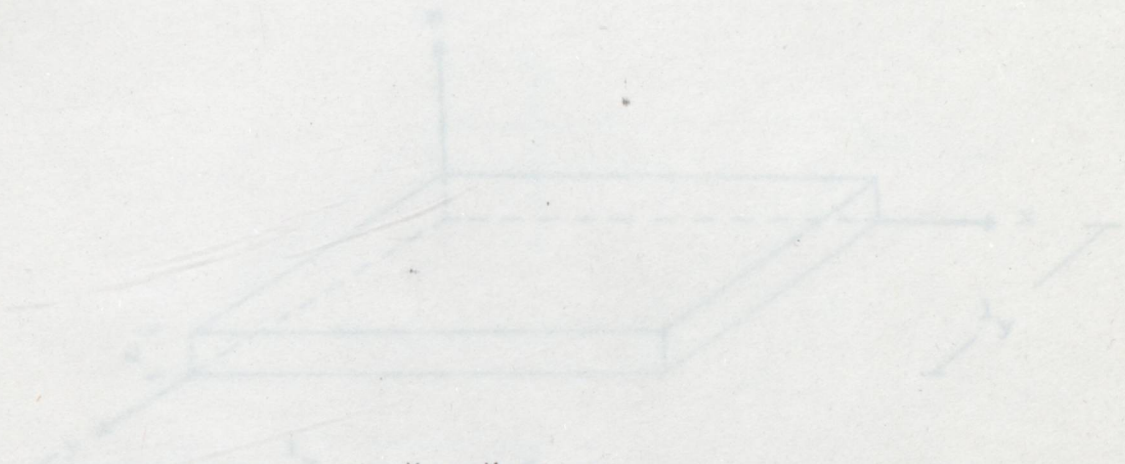


b - Orta yüzey düzlem değilse, herhangi bir eğri yüzey ise yüzeysel taşıyıcı kabuk adını alır. Kabuklarda geometrik özelliklerine göre kendi aralarında sınıflandırılabilir.

b - 1) Dönel kabuklar : Bir eğri parçasının bir eksen etrafında dönmesi ile elde edilen kabuklardır.

b - 2) Silindirik kabuklar : Dönel kabukların özel bir halidir. Dönen eğri parçası, eksene paralel bir doğru ise, silindirik bir dönel yüzey elde edilir. Silindirik su depoları, silolar silindirik kabuklara örnek olabilir.

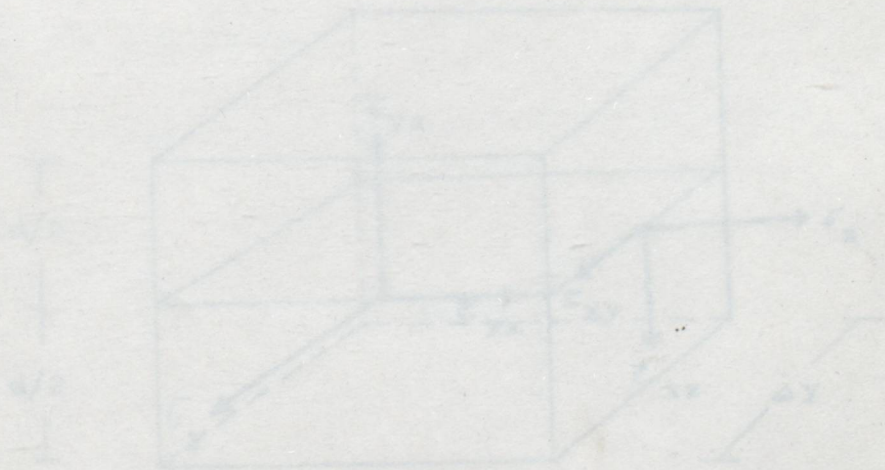
b - 3) Öteleme kabukları : Bir eğrinin diğer bir eğri üzerinde kaydırılması ile elde edilen kabuklardır.



BÖLÜM 2

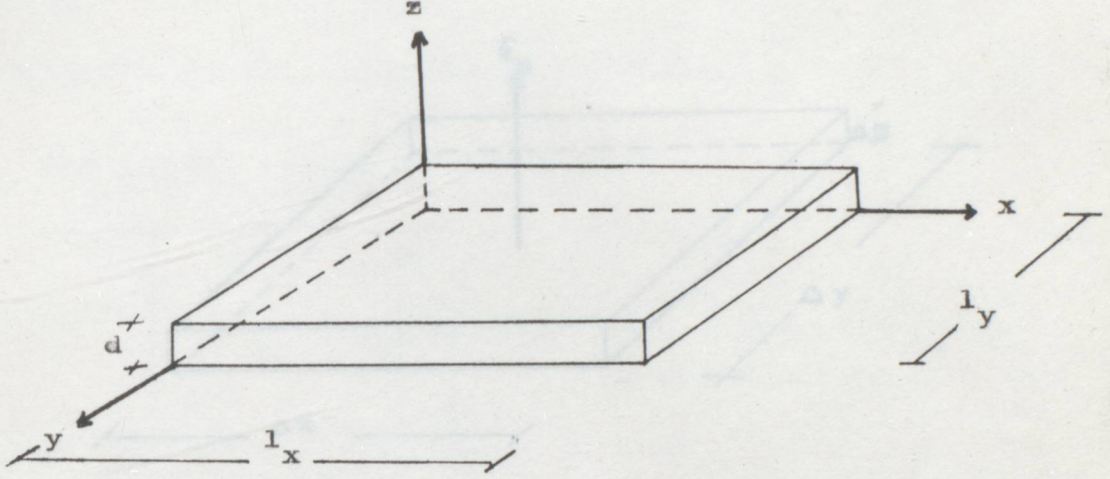
İzotrop bir malzeme için plak teorisinde kullanılan ν Poisson oranı, E Young modülü ve G kayma modülü arasında şu ilişkiyi sağlar:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



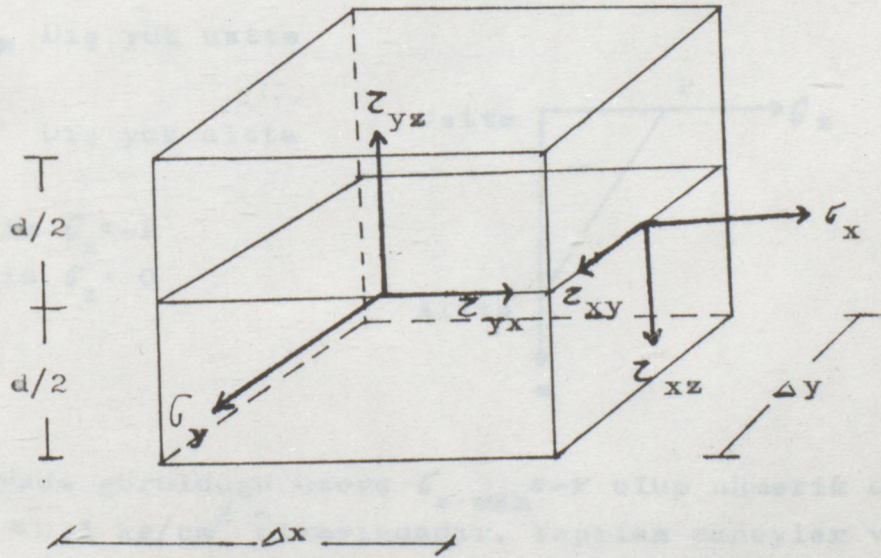
PLAK DİFRANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARTILMASI

Belirtilen diferansiyel elemanında Δx genişliğinde bir plak taşıyıcı elemanı ele alır.



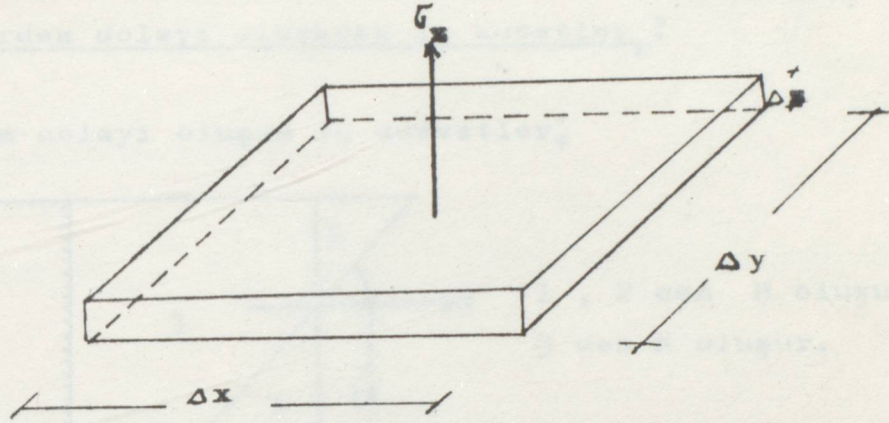
Yukarıda görülen plak taşıyıcı elemanında P düzgün yayılı yük altında diferansiyel inceleme yapılacaktır.

Plak diferansiyel elemanında oluşan gerilmeler.



$\sigma_z = 0$ Mantığı :

Belirtilen diferansiyel elemandan Δz kalınlığında bir plak taşıyıcı elemanı alalım.



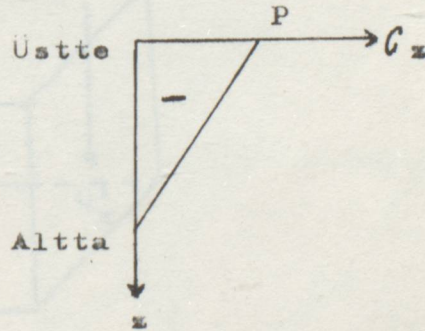
Δx , Δy , Δz boyutlarındaki bir diferansiyel elemanın z yönündeki $\sigma_z = 0$ kabul edilir. w (sehim) deplasman değeri Δz kalınlığına bağlı olmayıp X , Y yömlerindeki boyutlarına bağlıdır. Mukavemetten de bilindiği üzere şekil değiştirme ile gerilmeler arasında şöyle bir bağlantı mevcuttur.

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

σ_z → Dış yük üstte
 → Dış yük altta

$z = -d/2$ için $\sigma_z = -P$

$z = d/2$ için $\sigma_z = 0$

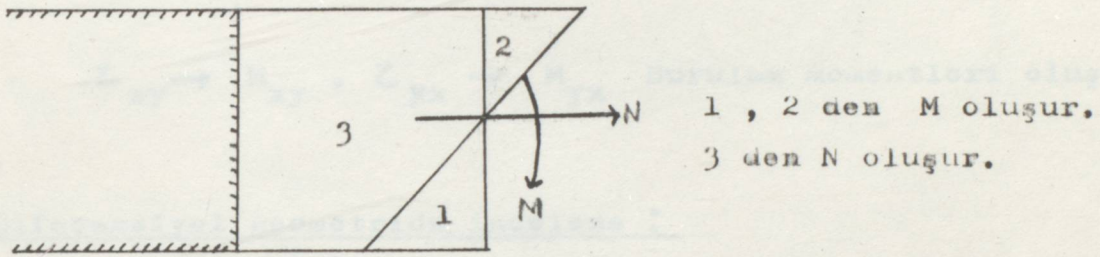


Burada görüldüğü üzere $\sigma_z \max = -P$ olup nümerik değer olarak $P = 0,1 \text{ kg/cm}^2$ civarındadır. Yapılan deneyler ve uygulamalardan da bilinir ki σ_x , σ_y gerilmeleri $50 \sim 100 \text{ kg/cm}^2$

arasında değişmektedir. Bu durumda σ_x , σ_y gerilmeleri yanında σ_z gerilmesinünerik bir anlam ifade etmez. ϵ_z şekil değiştirmesinde bu meydana 0 a yakın olacaktır. Dolayısıyla taşıyıcı plak diferansiyel elemanında yapılacak incelemede σ_z gerilmesini 0 kabul edebiliriz.

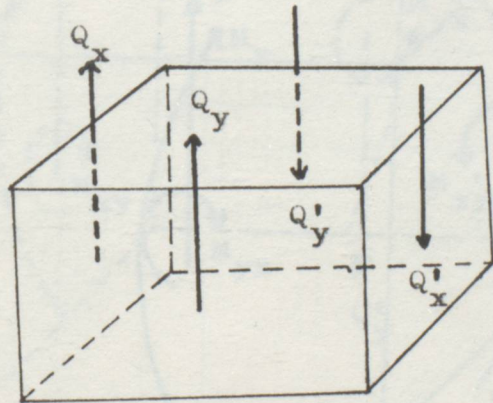
Gerilmelerden dolayı oluşacak iç kuvvetler :

σ_x , σ_y den dolayı oluşan iç kuvvetler;



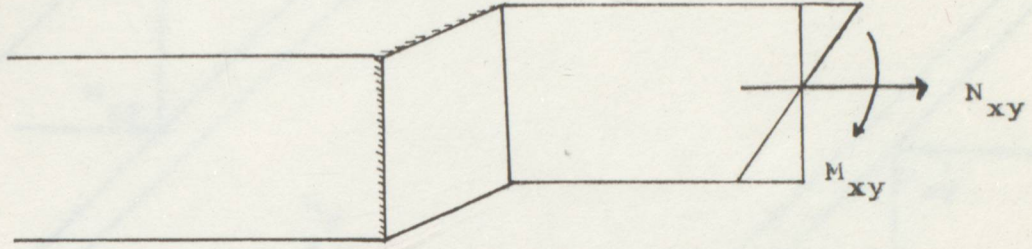
Plak teorisinde de gördüğümüz gibi taşıyıcı elemanın N (normal kuvvet) taşınması halinde elemanın çalışması levha çalışması oluşturmaktadır. Dolayısıyla plak çalışma şeklini incelediğimizden N normal kuvveti ihmal edilecektir. σ_x , σ_y gerilmelerinden dolayı M_x , M_y moment iç kuvvetleri oluşur.

τ_{xz} , τ_{yz} den dolayı oluşan iç kuvvetler :



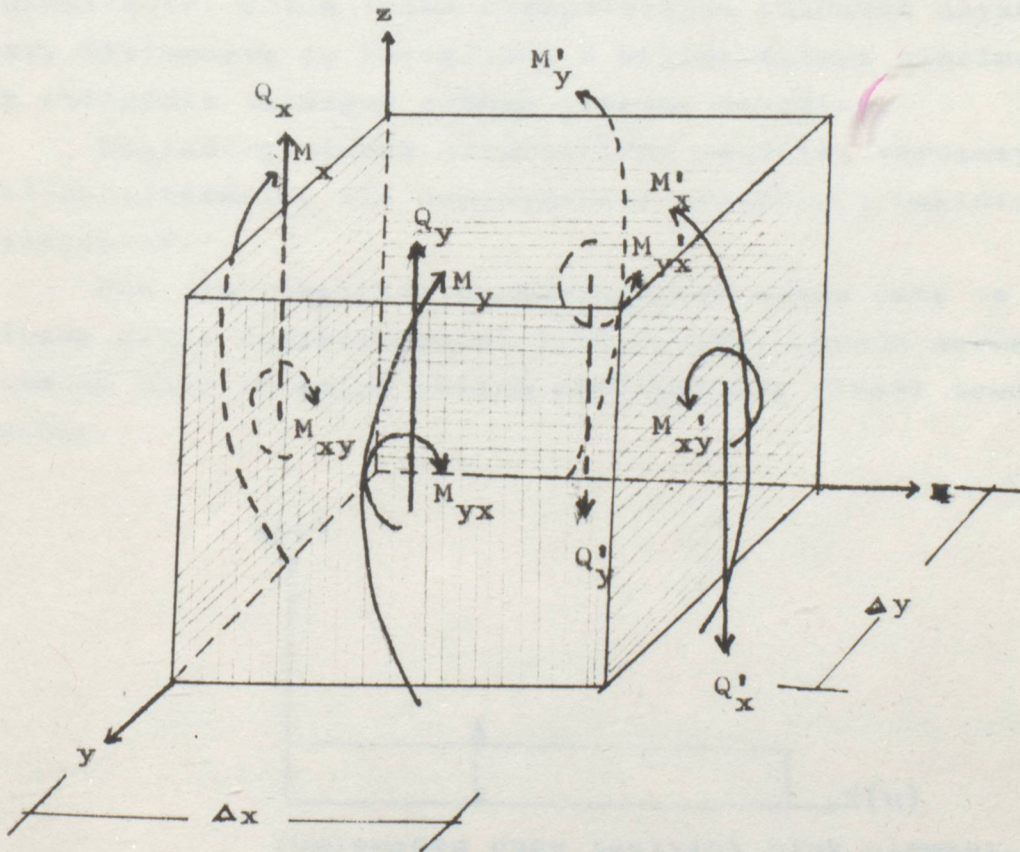
$\tau_{xz} \rightarrow Q_x$, $\tau_{yz} \rightarrow Q_y$ oluşur.

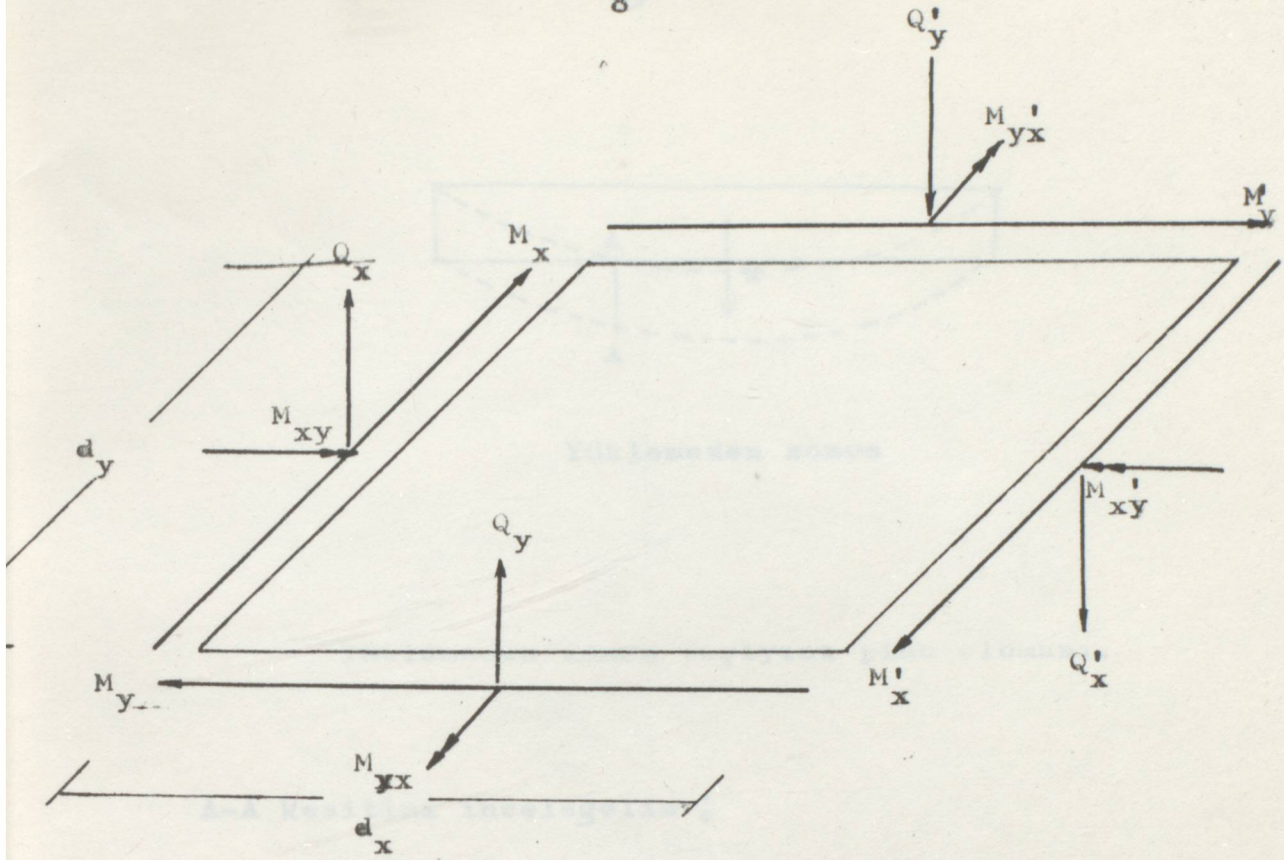
z_{xy} , z_{yx} den dolayı oluşan iç kuvvetler :



$z_{xy} \rightarrow M_{xy}$, $z_{yx} \rightarrow M_{yx}$ Burulma momentleri oluşur.

Diferansiyel geometride inceleme :



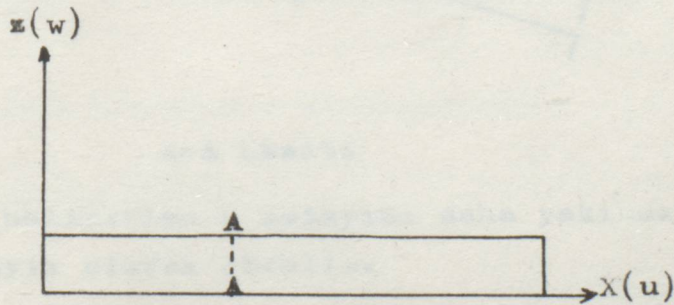


Diferansiyel elemanda iç kuvvetler.

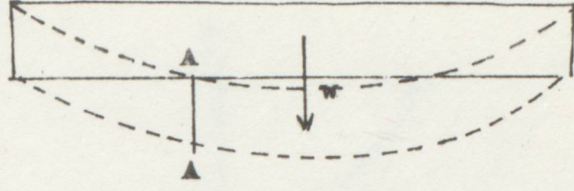
Burada görüldüğü gibi 6 adet bilinmeyen iç kuvvet bulunmaktadır. Çözüm içten hiperstatığın çözümüne dayanmaktadır. Bilinmeyen iç kuvvetleri W deplasmanları cinsinden ifade ettiğimiz taktirde çözüme ulaşmış olacağız.

Başlangıç olarak diferansiyel geometri yardımıyla şekil değiştirmeler ile deplasmanlar arasındaki bağıntı çıkarılacaktır.

Bir plak taşıyıcı elemanının yüklemeye önce ve sonra oluşan şekil değişimini inceleyelim. Burada normalin yüklemeye önce ve sonra düzlem kesitine dik olması temel alınacaktır.



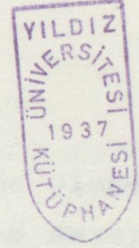
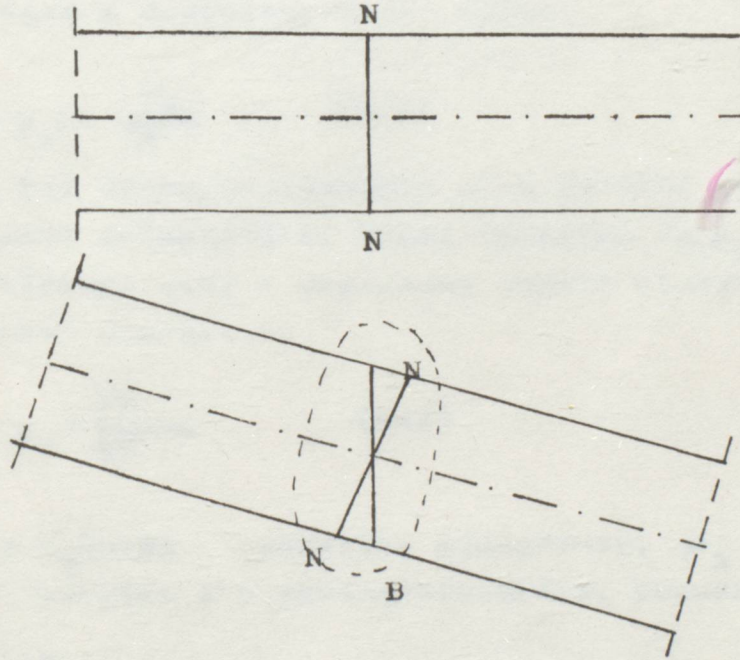
Yüklemeye önce taşıyıcı plak elemanı.



Yüklemeden sonra

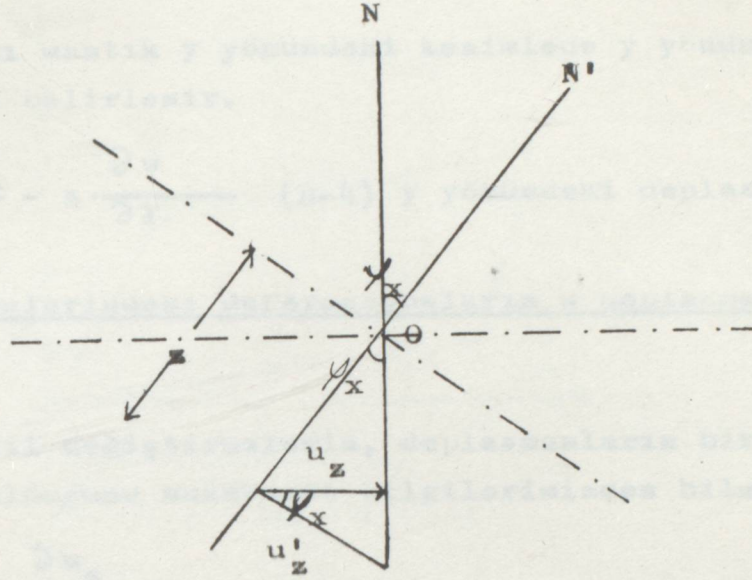
Yüklemeden sonra taşıyıcı plak elemanı.

A-A kesitini inceleyelim :



A-A Kesiti

Burağa belirtilen B detayını daha yakından inceleyerek değişimi detaylı olarak görelim.



B detayı.

Plağın x doğrultusundaki eğimi:

$$\operatorname{tg} \psi_x = - \frac{u'_z}{z} \quad (\text{B-1})$$

Buradaki (-) değer, deplasmanın x'in pozitif yönünde olmayışından ileri gelmektedir. Diğer taraftan $\operatorname{tg} \psi_x$ in B detayında da görüleceği gibi W deplasman değeri cinsinden ifade etmemiz mümkün olacaktır.

$$\operatorname{tg} \psi_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{B-2})$$

$u_z = u'_z \cos \psi_x$ değerine eşdeğerdir. ψ_x çok küçük olması \cos değerini 1'e yaklaştıracaktır. Bundan dolayı $u_z = u'_z$ diyebiliriz.

1 ve 2 denklemlerinin denkliğinden :

$$\operatorname{tg} \psi_x = \frac{-u_z}{z} = \frac{-\partial w}{\partial x}$$

$$u_x = - z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{B-3}) \text{ x yönündeki deplasman.}$$

Aynı mantık y yönündeki kesimlerde y yönünde oluşan deplasman belirlenir.

$$v_z = - z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{B-4}) \text{ y yönündeki deplasman.}$$

X ve Y yönlerindeki deformasyonların w deplasmanı cinsinden ifadesi.

Şekil değiştirmelerin, deplasmanların birinci türevine eşit olduğunu mukavemet bilgilerimizden bilmekteyiz.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_z}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

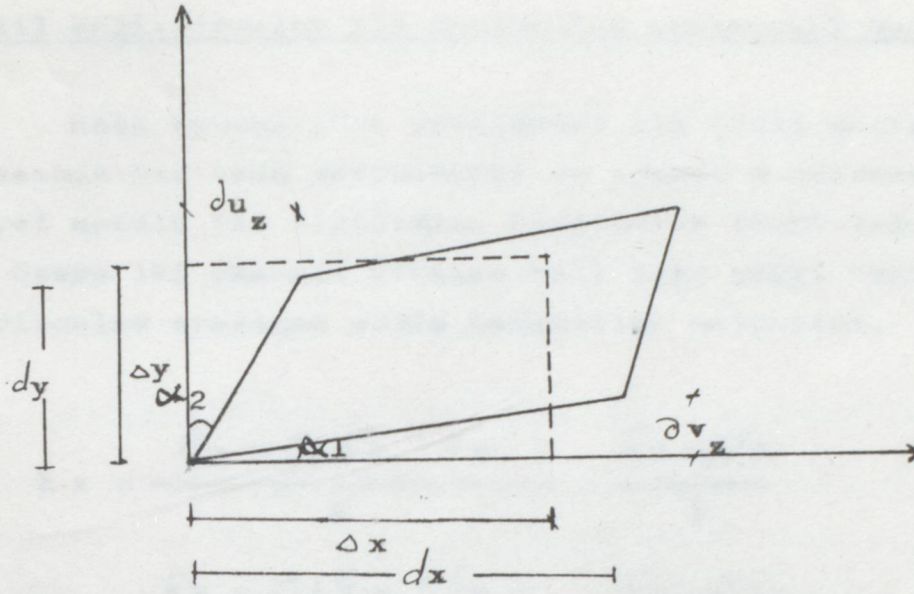
3 ve 4 denklemleriyle u,v deplasmanlarını w cinsinden ifade etmiştik. Bu değerleri 5 denklemlerindeki yerlerine yerleştirdiğimiz takdirde şekil değiştirmeleri w deplasmanları cinsinden ifade etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{- z \cdot \partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{- z \cdot \partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{B-6}) \quad \text{denklemleri elde edilir.}$$

Taşıyıcı elemanımız dış yük ile yüklendiği zaman deplasman yapmaktadır. Bunun yanında taşıyıcı elemanda açı değişimi oluşmaktadır. Açı değişiminin de w deplasman değeri cinsinden ifade etmemiz gerekmektedir.

Distorsiyonun (Açı değişimi) w deplasmanı cinsinden ifadesi:

Bunun için plak taşıyıcı elemanının yük altında deformasyonu incelenecektir.



$$\alpha_1 = \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Toplam açı değişimi $\alpha_1 + \alpha_2$

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (B-7)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y \cdot \partial x}$$

Bu değerleri 7 denkleminde

yerlerine koyalım. Böylece distorsiyonu w cinsinden ifade etmiş oluruz.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = -z \cdot \frac{2 \cdot \partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \quad (B-8) \text{ elde edilir.}$$

Şekil değiştirmeler ile gerilmeler arasındaki bağıntılar.

Hook kanuna göre gerilmeler ile Şekil değiştirmeler arasında bir oran mevcutturki bu oranda o malzemenin elastisite modülü ile ilgilidir. Elastisite teorisinden bilindiği üzere iki eksenli gerilme hali için Şekil değiştirme ile gerilmeler arasında Şöyle bağıntılar mevcuttur.

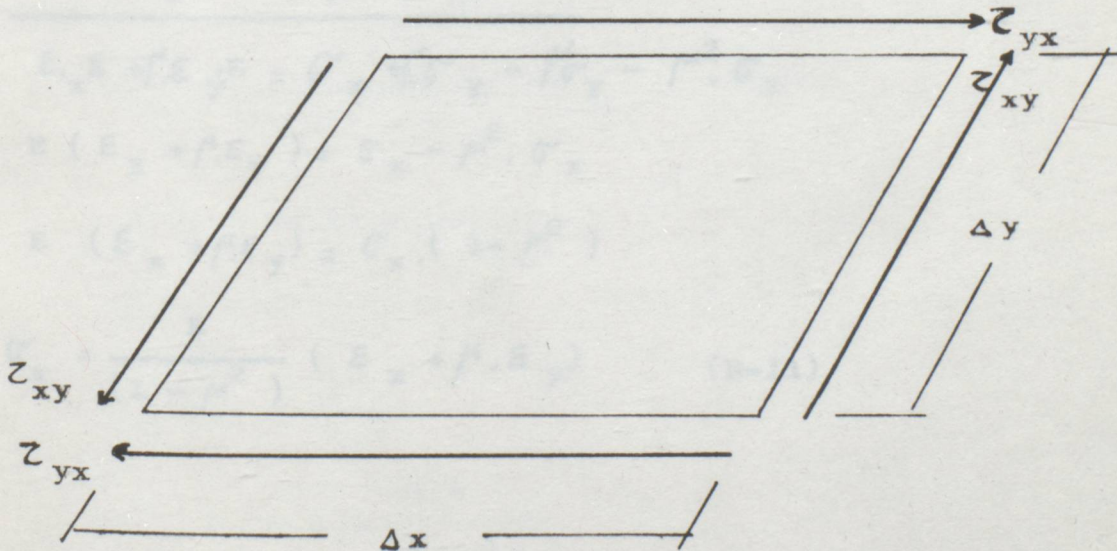
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} \quad (B-9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = \frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (B-10)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (\text{Kayma modülü})$$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ nk plak dzleminde z-z eksenine göre moment aldığımız zaman $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ olduğu grlr.



$$\sum M_{z-z} = 0$$

$$(z_{yx} \cdot \Delta x) \cdot \frac{\Delta y}{2} + (z_{yx} \cdot \Delta x) \cdot \frac{\Delta y}{2} - (z_{xy} \cdot \Delta y) \cdot \frac{\Delta x \cdot 2}{2} = 0$$

$$z_{xy} - z_{yx} = 0 \longrightarrow z_{xy} = z_{yx}$$

Gerilmelerin sehimler cinsinden ifadelendirilmesi:

9 ve 10 formüllerinden gerilmeleri çekip şekil değiştirmeler cinsinden ifade edeceğiz. Şekil değiştirmeleri daha önce 6 ve 8 formüllerinde w cinsinden ifade etmiştik buradaki değerlerini yerlerine koyduğumuz takdirde gerilmeler w cinsinden ifade edilmiş olur.

9 nolu denklemden

$$\varepsilon_x \cdot E = \sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y \cdot E = \sigma_y - \mu \cdot (\sigma_x)$$

Bu iki denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \cdot E &= \sigma_x - \mu \cdot \sigma_y \\ + \mu \cdot (\varepsilon_y \cdot E &= \sigma_y - \mu \cdot \sigma_x) \\ \hline \varepsilon_x \cdot E + \mu \cdot \varepsilon_y \cdot E &= \sigma_x + \mu \cdot \sigma_y - \mu \cdot \sigma_y - \mu^2 \cdot \sigma_x \\ E (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) &= \sigma_x - \mu^2 \cdot \sigma_x \\ E (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) &= \sigma_x \cdot (1 - \mu^2) \\ \sigma_x &= \frac{E}{(1 - \mu^2)} (\varepsilon_x + \mu \cdot \varepsilon_y) \quad (B-11) \end{aligned}$$

Yine aynı şekilde hareket ederek σ_y gerilmesinin de şekil değiştirmeler cinsinden ifadelendirebiliriz.

$$\begin{aligned} \mu (\epsilon_x \cdot E &= \sigma_x - \mu \sigma_y) \\ + \epsilon_y \cdot E &= \sigma_y - \mu \sigma_x \\ \hline E (\mu \epsilon_x + \epsilon_y) &= \sigma_y - \mu^2 \sigma_y \\ E (\epsilon_y + \mu \epsilon_x) &= \sigma_y (1 - \mu^2) \end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \mu^2)} (\epsilon_y + \mu \sigma_x) \quad (B-12)$$

10 nolu denklemden faydalanarak kayma gerilmesinin de şekil değiştirme modülü cinsinden ifade edebiliriz.

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{z_{xy}}{G} = \frac{z_{yx}}{G}$$

$$z_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

$$z_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \cdot \gamma_{xy} \quad (B-13)$$

6 ve 8 denklemlerinden ;

$$\epsilon_x = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\gamma_{xy} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}$$

Diferansiyel terimlerde gösterim kolaylığı sağlanması

için terim notasyonu yapalım.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w''_{xx} \quad \frac{\partial w}{\partial y^2} = w''_{yy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w'_x \quad \frac{\partial w}{\partial y} = w'_y$$

Buna göre ;

$$\varepsilon_x = -z w''_{xx}$$

$$\varepsilon_y = -z w''_{yy}$$

$$\gamma_{xy} = -2z w''_{xy}$$

11, 12 ve 13 denklemlerinde bu eşitlikleri yerlerine koyalım.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \mu^2)} (-z \cdot w''_{xx} - \mu z \cdot w''_{yy})$$

$$\sigma_x = - \frac{E \cdot z}{(1 - \mu^2)} (w''_{xx} + \mu \cdot w''_{yy}) \quad (B-14)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 - \mu^2)} (-z \cdot w''_{yy} - \mu \cdot z \cdot w''_{xx})$$

$$\sigma_y = - \frac{E \cdot z}{(1 - \mu^2)} (w''_{yy} + \mu \cdot w''_{xx}) \quad (B-15)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{2 \cdot E}{2(1 + \mu)} \cdot z \cdot w''_{xy}$$

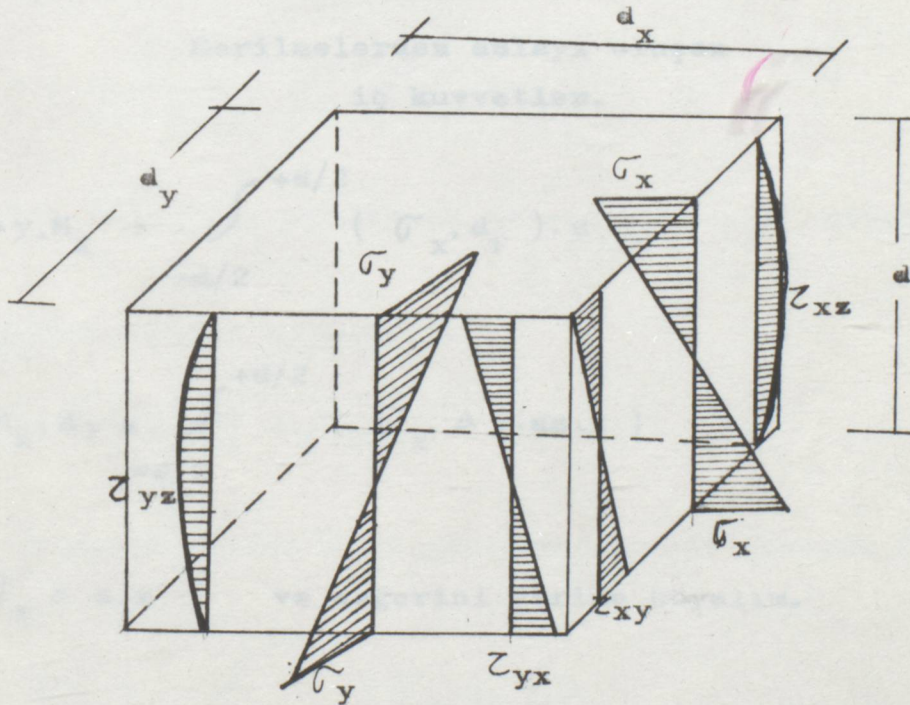
$$\tau_{xy} = - \frac{E \cdot z}{(1 + \mu)} \cdot w'_{xy} \quad (B-16)$$

14 , 15 , 16 nolu denklemler ile gerilmeleri deplasman cinsinden ifade ettik. Bu denklemlerde görüleceği gibi gerilmeler w lerin birer fonksiyonlarıdır.

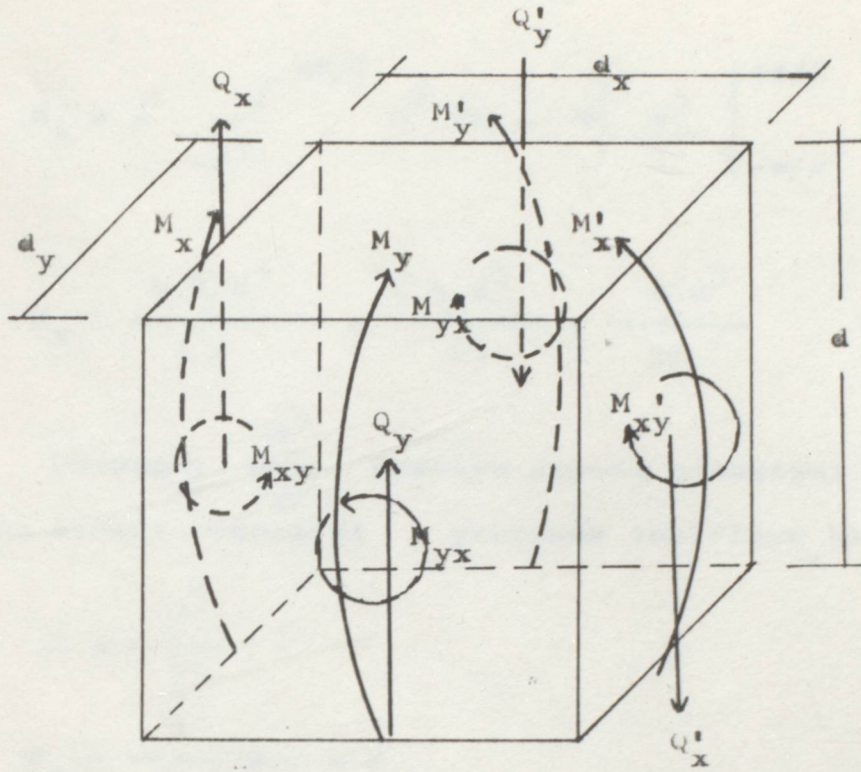
$$\begin{array}{lcl} \sigma_x = f_1(w) & \longrightarrow & \sigma_x = a \cdot z \\ \sigma_y = f_2(w) & \longrightarrow & \sigma_y = b \cdot z \\ \tau_{xy} = f_3(w) & \longrightarrow & \tau_{xy} = c \cdot z \end{array}$$

Şeklinde gösterilebilir.

İç kuvvetlerin sehimler cinsinden ifadelendirilmesi:



Bir plak diferansiyel elemanda oluşan gerilmeler.



Gerilmelerden dolayı oluşan
iç kuvvetler.

$$\Delta y \cdot M_x = \int_{-d/2}^{+d/2} (\sigma_x \cdot d_f) \cdot z$$

$$M_x \cdot \Delta y = \int_{-d/2}^{+d/2} (\sigma_x \cdot \Delta y \cdot dz \cdot z)$$

$\sigma_x = a \cdot z$ ve değerini yerine koyalım.

$$\Delta y \cdot M_x = \int_{-d/2}^{+d/2} a \cdot z \cdot \Delta y \cdot dz \cdot z$$

$$M_x = a \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 \cdot dz = a \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-d/2}^{+d/2}$$

$$M_x = \frac{a \cdot 2 \cdot d^3}{3 \cdot 8} = \frac{2 \cdot a \cdot d^3}{24} = \frac{a \cdot d^3}{12}$$

Buradaki $\frac{d^3}{12}$ kesitin atalet momentini verir. Bu birim atalet momentini J şeklinde tarifleyebiliriz.

$$J = \frac{d^3}{12}$$

$$M_x = \frac{d^3}{12} \cdot a = a \cdot J$$

a nın değerini yerine koyalım.

$$a = - \frac{E \cdot J}{(1 - \mu^2)} (w''_{xx} + \mu \cdot w''_{yy})$$

İşlem kolaylığı açısından $\frac{E \cdot J}{(1 - \mu^2)} = D$ diyelim.

$D =$ Plak eğilme rijitliği.

$$M_x = - D \cdot (w''_{xx} + \mu \cdot w''_{yy}) \quad (B-17)$$

M_y Momenti içinde aynı şekilde hareket edersek :

$$M_y \cdot \Delta x = \int_{-d/2}^{+d/2} (\sigma_y \cdot d_f) \cdot z$$

$$M_y \cdot \Delta x = \int_{-d/2}^{+d/2} (b \cdot z \cdot d_f) \cdot z$$

$$M_y \cdot \Delta x = \int_{-d/2}^{+d/2} b \cdot z^2 \cdot \Delta x \, dz$$

$$M_y = \int_{-d/2}^{+d/2} b \cdot z^2 \cdot dz$$

$$M_y = b \cdot \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-d/2}^{+d/2}$$

$$M_y = b \cdot \frac{d^3}{12} = b J$$

b değerini yerine koyalım :

$$M_y = - \frac{E \cdot d^3}{(1 - \mu^2) 12} (w_{yy}'' + \mu \cdot w_{xx}'')$$

$$M_y = - D (w_{yy}'' + \mu \cdot w_{xx}'') \quad (B-18)$$

Şimdide M_{xy} burulma momentini bulalım.

$$M_{xy} \cdot \Delta x = \int_{-d/2}^{+d/2} (c_{xy} \cdot d_f) \cdot z$$

$$M_{xy} \cdot \Delta x = \int_{-d/2}^{+d/2} c \cdot z^2 \cdot \Delta x \cdot dz$$

$$M_{xy} = c \int_{-d/2}^{+d/2} z^2 dz$$

$$M_{xy} = c \cdot \frac{d^3}{12}$$

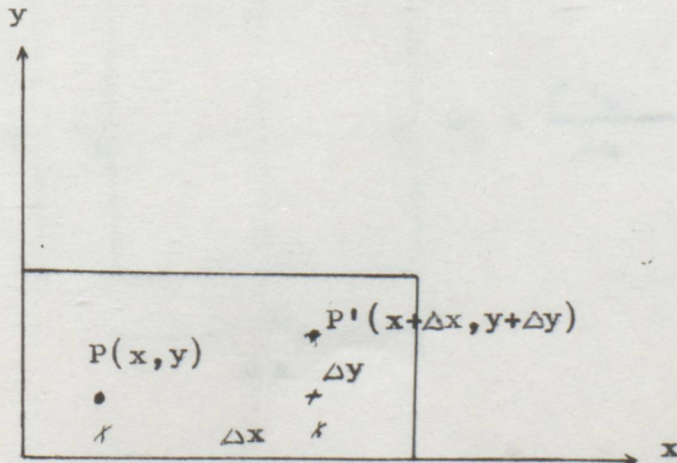
c değerini yerine koyalım.

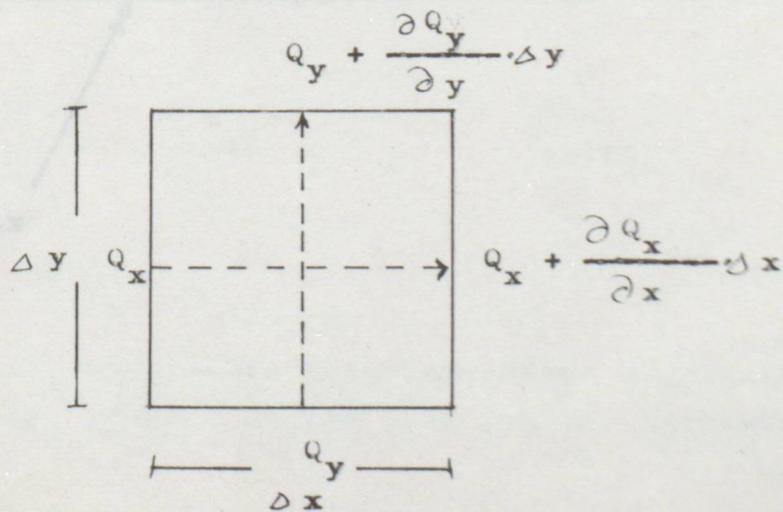
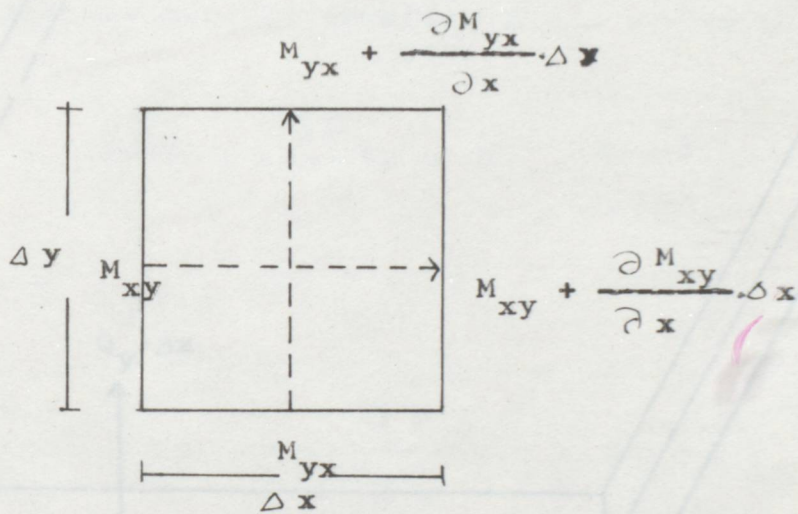
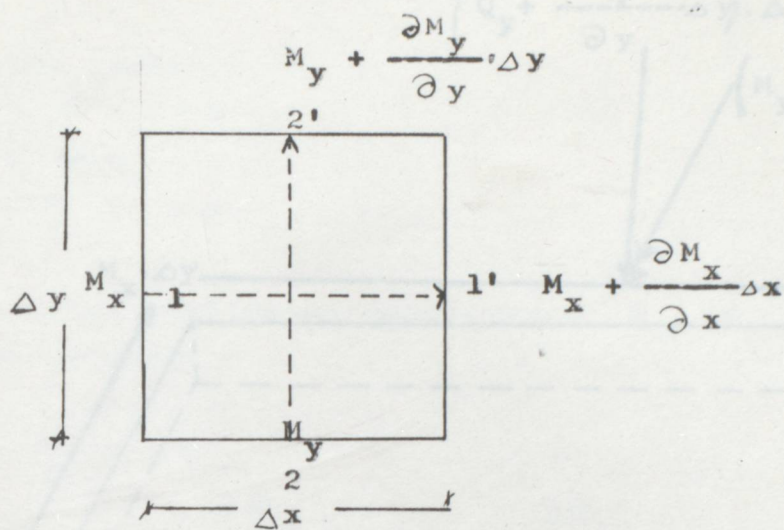
$$M_{xy} = - \frac{E, J}{(1 + \mu)} w_{xy}$$

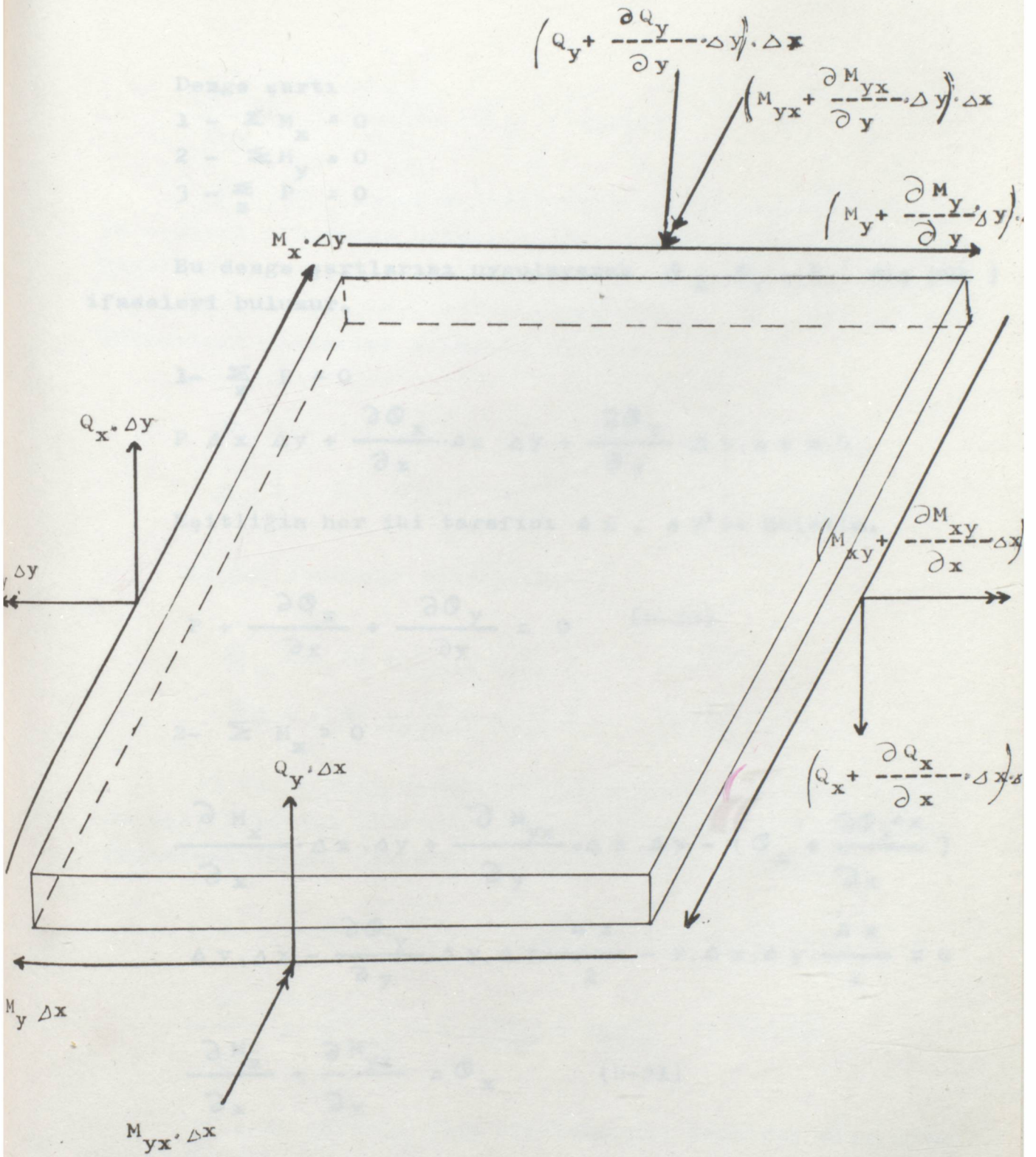
$$M_{xy} = - (1 - \mu) \cdot D \cdot w'_{xy} \quad (B-19)$$

Şu aşamada M_x , M_y , M_{xy} momentlerini sehimler cinsinden ifade etmiş oluyoruz. \mathcal{O}_x , \mathcal{O}_y kesme kuvvetlerini ise, plak diferansiyel elemanının iç kuvvetlerin artışındaki dengeden faydalanarak bulacağız.

Plak diferansiyel elemanının bir noktasından kalkıp ikinci bir noktasına ulaşıldığında burada iç kuvvetlerde değişme olduğu göreceğiz. Birinci dereceden değişimi statik olduğundan bunu göz önüne alarak iç kuvvetlerdeki artışları inceleyelim.







Denge şartı

$$1 - \sum M_x = 0$$

$$2 - \sum M_y = 0$$

$$3 - \sum P = 0$$

Bu denge şartlarını uygulayarak θ_x, θ_y, P (dış yük) ifadeleri bulunur.

$$1- \sum P = 0$$

$$P \Delta x \Delta y + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \Delta y \Delta x = 0$$

Eşitliğin her iki tarafını $\Delta x, \Delta y$ 'ye bölelim.

$$P + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = 0 \quad (B-20)$$

$$2- \sum M_x = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \Delta x \Delta y - \left(\theta_x + \frac{\partial \theta_x \Delta x}{\partial x} \right)$$

$$\Delta y \Delta x - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \frac{\Delta x}{2} - P \Delta x \Delta y \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \theta_x \quad (B-21)$$

$$3- \sum M_y = 0$$

θ_x ifadesinin hesaplanmasında uygulanan işlemler

θ_y ifadesi içinde aynı şekilde uygulanır.

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \Theta_y \quad (B-22)$$

Θ_x , Θ_y kesme kuvvetlerini eğilme momenti ve burulma momenti cinsinden bulmuş olduk. w deplasmanı cinsinden ifadelendirmek için eğilme momentlerinin ve burulma momentlerinin formül 17 , 18 , 19 daki değerlerini 20 , 21 , 22 formüllerinde yerlerine koymamız gerekir.

$$\Theta_x = - D. (w_{xxx}''' + w_{yyx}'') - (1 - \mu) . D. w_{xyy}''$$

$$\Theta_y = - D. (w_{yyy}'' + w_{xxy}''') - (1 - \mu) . D. w_{yxx}''$$

bu iki denklemi düzenlersek :

$$\Theta_x = - D. (w_{xxx}''' + w_{xyy}'') \quad (B-23)$$

$$\Theta_y = - D. (w_{yyy}'' + w_{yxx}'') \quad (B-24)$$

23 ve 24 nolu formüllerdeki değerleri 20 nolu formülde eşitliklerini yerlerine koyduğumuz taktirde dış yükü w deplasman değeri cinsinden ifadelendirmiş oluruz.

$$- P = - D. (w_{xxxx}'''' + w_{xxyy}'''') - D. (w_{yyyy}'''' + w_{xxyy}'''')$$

$$\frac{P}{D} = w_{xxxx}'''' + 2. w_{xxyy}'''' + w_{yyyy}'''' \quad (B-26)$$

26 nolu formülü plak diferansiyel denklemi diye nitelendiriyoruz. Gösterim kolaylığı açısından matematiksel notasyonu 26 nolu formüle uygulayalım.

Δ Laplace operatörü

∇ Hamilton operatörü

$$\Delta A = A''_{xx} + A''_{yy}$$

$$\Delta w = w''_{xx} + w''_{yy}$$

$$\Delta^2 w = (\Delta w)''_{xx} + (\Delta w)''_{yy}$$

$$\Delta^2 w = w''''_{xxxx} + w''''_{yyxx} + w''''_{xxyy} + w''''_{yyyy}$$

Bu değerleri 26 nolu denklemden yerine koyalım.

$$\frac{P}{D} = \Delta^2 w$$

$$\Delta^2 \frac{P}{D} = \nabla^2$$

$$\frac{P}{D} = \nabla^2 w \quad (B-25)$$

M_x, M_y Eğilme momentlerinin P (dış yük) cinsinden ifadelennmesi:

M_x, M_y eğilme momentlerini daha önce 17 ve 18 nolu formüllerde w cinsinden ifadelendirmiştik. P dış yükü 26 nolu formülde w cinsinden ifadelendirmiştik. Buna göre iki farklı terim aynı terimle karşılık bulabiliyorlarsa farklı terimleri birbirini cinsinden ifadelendirebiliriz.

$$(\Delta w)'_x = w''''_{xxx} + w''''_{yyx}$$

$$Q_x = -D \cdot (\Delta w)'_x$$

$$Q_x = -D \cdot \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$Q_y = -D \cdot (\Delta w)'_y$$

$$Q_y = -D \cdot \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$M_x = -D \cdot (w_{xx}'' + \mu \cdot w_{yy}''')$$

$$M_y = -D \cdot (w_{yy}'' + \mu \cdot w_{xx}''')$$

M_x , M_y yi taraf tarafa toplayalım.

$$M_x + M_y = -D \cdot (w_{xx}'' + \mu \cdot w_{yy}'' + w_{yy}'' + \mu \cdot w_{xx}''')$$

$$M_x + M_y = -D \cdot ((1 + \mu) \cdot w_{xx}'' + (1 + \mu) \cdot w_{yy}''')$$

$$M_x + M_y = -D \cdot (1 + \mu) \cdot (w_{xx}'' + w_{yy}''')$$

$$\frac{M_x + M_y}{(1 + \mu)} = -D \cdot (w_{xx}'' + w_{yy}''')$$

$$\frac{M_x + M_y}{(1 + \mu)} = \mathcal{M} \quad \text{olsun,}$$

$$\mathcal{M} = -D \cdot (w_{xx}'' + w_{yy}''')$$

$$\Delta w = (w_{xx}'' + w_{yy}''') \quad \text{olduğundan}$$

$$\mathcal{M} = -D \cdot \Delta w$$

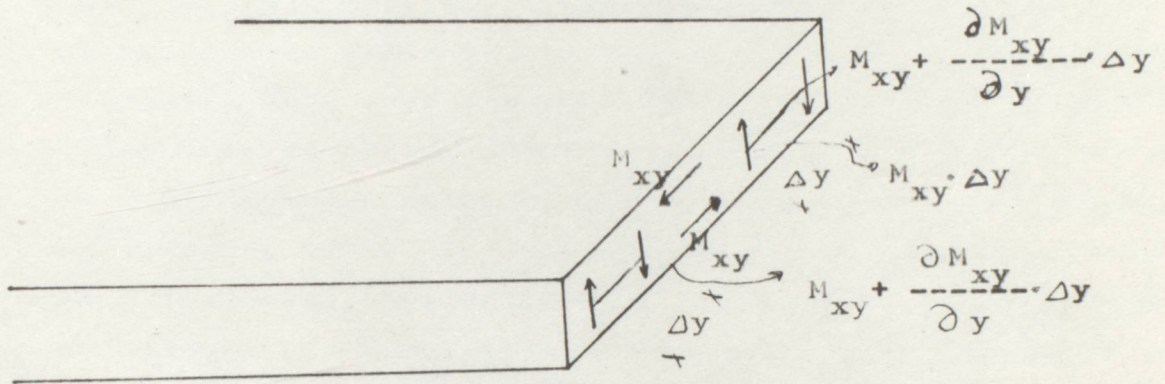
$$\frac{\mathcal{M}}{D} = \Delta w \quad \text{eşitliğin her iki tarafını } \Delta \text{ çarpalım}$$

$$\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} = \Delta^2 w$$

$$\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} = \frac{P}{D}$$

$$-\Delta \mathcal{M} = P$$

Sınırlardaki kesme kuvvetinin w cinsinden ifadesi:



$$V_x \cdot \Delta y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cdot \Delta y + Q_x \cdot \Delta y$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \cdot (w_{xxx}''' + w_{yyx}''') - D \cdot (1 - \mu) \cdot w_{xyy}''$$

$$V_x = -D \cdot (w_{xxx}''' + (2 - \mu) \cdot w_{yyx}''') \quad (B-27)$$

Benzer şekilde V_y de bulunur.

$$V_y = -D \cdot (w_{yyy}''' + (2 - \mu) \cdot w_{xxy}''') \quad (B-28)$$

$$C = 2 \cdot M_{xy} \quad (\text{Köşe kuvveti})$$

SONLU FARKLAR METODU

Analitik çözümleri mümkün olmayan ya da yorucu işlemler gerektiren ve pratik faydası olmayan problemlerin çözümleri (plaklardan olduğu gibi) başlangıçta uygun bir noktada hesap tarzı seçmek suretiyle yaklaşılagöz istenen düzeyde olan nümerik hesaplarda çözümler yapılabilmektedir. Nümerik hesapta bütün metodlarla aynı sonuçta küçük verilerle sonuç küçük miktarlarla kullanılmasına dayanır. Bunun uygulanması problemi ile ilgili şekilde göre değişir. Analitik çözümler, bilimcülerin sürekli bir fonksiyonunu verir. Bu, belirli bir değişkenle fonksiyonlarında bilimcülerin ifadesini yerine koyarak, doğrudan sonuç yerine istenen her noktadaki bilimsel değeri bulabiliriz, demektir. Bunun aksine, nümerik hesapta, önceki yöntem tespit edilmiş olan noktaları seçtikten sonra bu noktalar için tabiiyet eden bilimsel değerleri bulmak için interpolasyon yapmak gerekir. Bilimsel çözümler analitik olarak diferansiyel denklemleri integralasyonla sayısal olarak ise bir lineer cebrik sistemler şeklinde çözümler ile elde edilir.

B Ö L Ü M 3

Sayısal hesap metodunu iki adıma bölmek mümkün değildir.

1. Sayısal hesap problemlerini, yani cebir denklemlerini kurmak için uygulanan yol.

2. Cebir denklemlerini çözmek için.

İkinci bu metodlara daha ayrıntılı bakılır.

Sayısal hesap sadece işaret edildiği gibi, sadece sonuç yerine, yani diferansiyeller yerine sonuç küçük miktarlar, yani sonlu farkları korumayı gerektirir. Genel anlamda sonlu farklarla yapılan işlemler, sonlu farklar metodunu teşkil eder. Temel özellikler:

Matematik arızası:

Diferansiyel denklemleri sonlu farklar denklemlerine dönüştürmeyi kapsar. Bu anlamda birçok metod sayılabilir.

a) Sonlu farklar metodu

b) Farklılık polinom metodu

SONLU FARKLAR METODU

Analitik çözümleri mümkün olmayan yada yorucu işlemler gerektiren ve pratik faydası olmayan problemlerin çözümünde (plaklarda olduğu gibi) başlangıçta uygun bir koordinat hesap tarzı seçmek suretiyle yaklaşıklığı istenen düzeyde olan nümerik hesaplarda çözüm yapmak mümkündür. Nümerik hesapta bütün metotların aslı sonsuz küçük yerine sonlu küçük miktarların kullanılmasına dayanır. Bunun uygulaması problemi ele alış şekline göre değişir. Analitik çözüm, bilinmeyenlerin sürekli bir fonksiyonunu verir. Bu, bağımsız değişkenlerin fonksiyonlarında bilinmeyenin ifadesini yerine koyarak, doğrudan orta yüzeyin istenen her noktasında bilinmeyenin değerini tayin edebiliriz, demektir. Bunun aksine, nümerik hesapta, ancak önceden tespit edilmiş olan bir düğüm noktaları şebekesinin bu düğüm noktalarına isabet eden bilinmeyenlerin değerlerini bulmak için interpolasyon yapmak gerekir. Bilindiği gibi çözümler, analitik olarak diferansiyel denklemlerin integrasyonuyla sayısal olarak ise bir lineer cebrik sistemler takımının çözümü ile elde edilir.

Sayısal hesap metodunu iki adımda incelemek konuya aydınlık getirir.

1. Sayısal hesap şeklinin seçimi, yani cebrik denklem takımını kurmak için uygulanan yol.

2. Cebrik denklem takımını çözmeye yolu.

Şimdi bu metotlara daha etraflıca bakalım.

Sayısal hesap öncede işaret edildiği gibi, sonsuz küçük yerine, yani diferansiyeller yerine sonlu küçük miktarları, yani sonlu farkları koymayı gerektirir. Genel anlamda sonlu farklarla yapılan işlem, sonlu farklar metodunu teşkil eder. Temel özellikler :

Matematik açıdan :

Diferansiyel denklemleri sonlu farklar denklemlerine dönüştürmeyi kapsar. bu anlamda birçok metot sayılabilir.

- a) Sonlu farklar metodu
- b) Funikuler poligon metodu

c) Plurilokal metodu gibi

Kurulmuş olan lineer denklem yani sonlu farklar denklem takımı, birçok bilinmeyeni ihtiva ettiğinden çözüm uzun olabilir. Ancak elektronik hesap makineleri sayesinde artık bu bir sorun olmaktan çıkmıştır. Yine de birçok çözüm yolu arasında en önemli birkaç tanesini sıralayalım.

- a) Direkt çözüm, determinantlar, eliminasyon, gaus.
- b) Sayısal integral metotları ile. Kolnins- Runge-Kutta vs.
- c) Yaklaşık metodlardan yararlanarak.
- d) Rölaksasyon metodu ile çözüm.

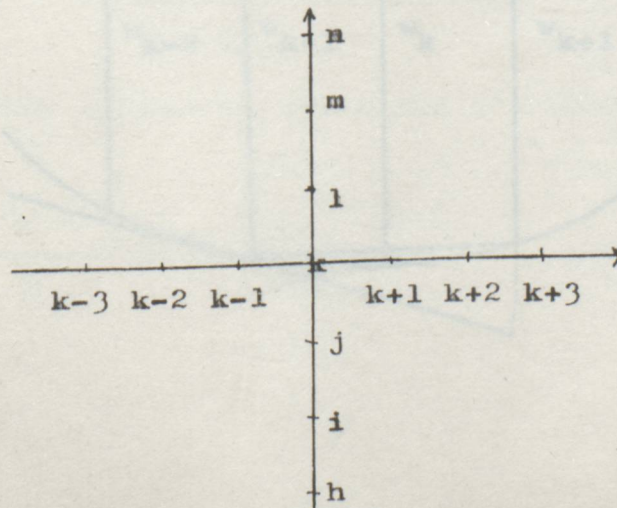
Sonlu farklar metodunun esası:

Sınır değer problemlerinin çok defa kesin ve kapalı çözümleri bulunmaktadır. Bu nedenle yaklaşık bir çözüme yetinmek zorunda kalınır. Hemen her halde uygulanabilen bir metod olan sonlu farklarda sınır şartlarının gerçekleşmesi kesin olduğu halde diferansiyel denklemin sağlanmasında yaklaşıklık vardır.

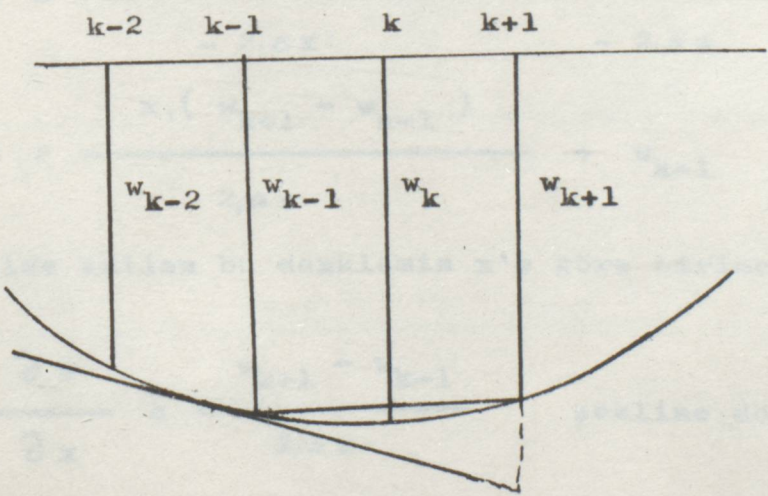
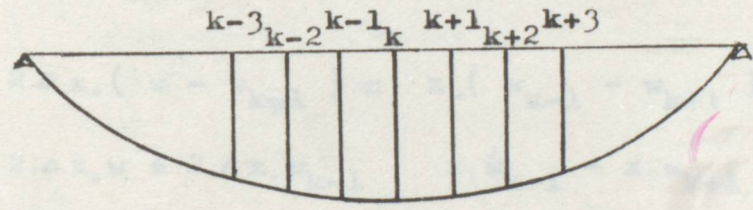
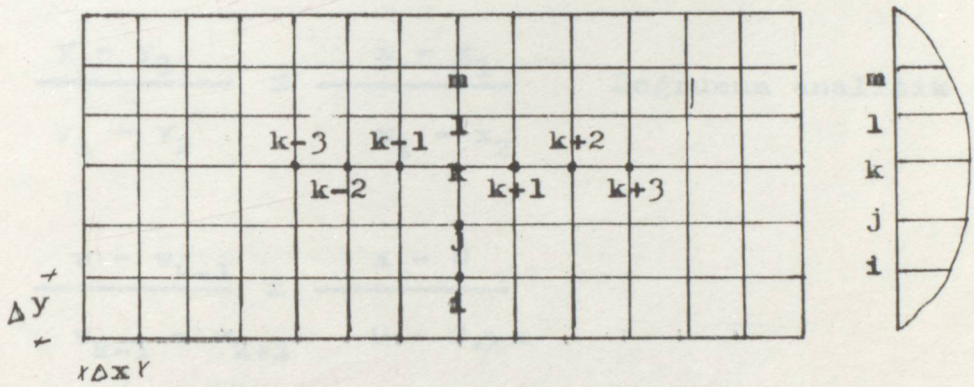
Bu metodun dayandığı esas türevler yerine sonlu farklar bağıntılarını kullanarak problemin diferansiyel denklemini bilinmeyen fonksiyonunun ayrıntı noktalarındaki değerleriyle yaklaşık olarak ifade etmektir.

Metodun çıkarılışı

Hesap noktası ve bu noktanın komşu noktalara göre olan notasyonu aşağıdaki şekildedir.



Günün deplasmanı eğrisini doğru dalgalar halinde getiri-
 riyorus. Δx , Δy değerleri ne kadar küçük olursa kırık eğri
 o kadar doğruya o derece yakın olacaktır. Daha hesapların
 programı daha yakın olmasını sağlayacaktır. A ve B noktaları
 ise geçen kırık doğru parçalarının başlangıç ve bitiş noktalarıdır.



Oluşan deplasman eğrisini sonlu doğrular haline getiriyoruz. Δx , Δy değerleri ne kadar küçük olursa kırık eğri gerçek eğriye o derece yakın olacaktır. Buda hesapların gerçeğe daha yakın olmasını sağlayacaktır. A ve B noktalarından geçen kırık doğru parçasının denklemini oluşturalım.

$$A (0 , w_{k-1}) , B (2 \Delta x , w_{k+1})$$

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} \quad \text{Doğrunun analitik ifadesi.}$$

$$\frac{w - w_{k-1}}{w_{k-1} - w_{k+1}} = \frac{x - 0}{0 - 2 \Delta x}$$

$$- 2 \Delta x \cdot (w - w_{k-1}) = x \cdot (w_{k-1} - w_{k+1})$$

$$- 2 \cdot \Delta x \cdot w + 2 \cdot \Delta x \cdot w_{k-1} = x \cdot w_{k-1} - x \cdot w_{k+1}$$

$$- 2 \cdot \Delta x \cdot w = x \cdot w_{k-1} - x \cdot w_{k+1} - 2 \cdot \Delta x \cdot w_{k-1}$$

$$w = \frac{x \cdot w_{k-1} - x \cdot w_{k+1}}{- 2 \cdot \Delta x} - \frac{2 \cdot \Delta x \cdot w_{k-1}}{- 2 \cdot \Delta x}$$

$$w = \frac{x \cdot (w_{k+1} - w_{k-1})}{2 \cdot \Delta x} + w_{k-1}$$

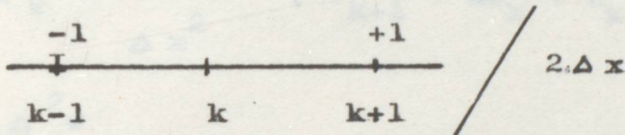
Elde edilen bu denklemin x 'e göre birinci türevi ;

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad \text{şekline dönüşür.}$$

Böylece birinci dereceden türevi bulmuş oluyoruz. Bizim plak diferansiyel denkleminiz 4 ncü dereceden kısmi türevlere haiz olup, bunları sonlu deplasman şeklinde ifade etmemiz gerekir. Türev sonuçlarındaki katsayıları hesap ve anlama kolaylığı bakımından şematik olarak ifade edilecektir.

$$1) \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ifadesi}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}_k = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \cdot \Delta x}$$



$$2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{ifadesi}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}_k = \frac{\Delta}{\Delta x} \cdot \left(\frac{\Delta w_k}{\Delta x} \right) = \frac{\left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{k+1} - \left(\frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{k-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}_k = \frac{\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} - \frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}_k = \frac{w_{k+1} - 2w_k - w_{k-1}}{\Delta x^2}$$

$$\begin{array}{ccc} -1 & -2 & +1 \\ \hline k-1 & k & k+1 \end{array} / \Delta x^2$$

3) $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ ifadesi

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} /_k = \frac{\partial^3 w}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} /_k$$

$$\ominus_k = \frac{1}{\Delta x^2} (w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1})$$

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = \psi(x)_k$$

$$\frac{\Delta \psi_k}{\partial x} = \frac{\psi_{k+1} - \psi_{k-1}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3}$$

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{\Delta x^2} (w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k)$$

$$\psi_{k-1} = \frac{1}{\Delta x^2} (w_k - 2w_{k-1} + w_{k-2})$$

fonksiyon değerlerini yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{\frac{1}{\Delta x^2} (w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k) - \frac{1}{\Delta x^2} (w_k - 2w_{k-1} + w_{k-2})}{2 \cdot \Delta x}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{1}{2\Delta x^3} (w_{k+2} - 2w_{k+1} + 2w_{k-1} - w_{k-2})$$

$$\begin{array}{cccccc} -1 & & +2 & & -2 & & +1 \\ \hline k-2 & & k-1 & & k & & k+1 & & k+2 \end{array} \Bigg/ 2\Delta x^3$$

4) $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ ifadesi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} \Bigg/ k$$

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = \varphi_{x_k} = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\Delta^2 \varphi_k}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\Delta^2 \varphi_k}{\Delta x^2} = \frac{\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1}}{\Delta x^2}$$

$$\varphi_{k+1} = \frac{w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k}{\Delta x^2}$$

$$\varphi_{k-1} = \frac{w_k - 2w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^2}$$

$$\varphi_k = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}$$

Bu değerlerini yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{k+2} - 2w_{k+1} + w_k - 2w_{k+1} + 4w_k - 2w_{k-1} + w_{k-2} - 2w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{w_{k+2} - 4w_{k+1} + 6w_k - 4w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}$$

$$\begin{array}{cccccc} +1 & -4 & +6 & -4 & +1 & \\ \hline & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 \end{array} \quad / \quad \Delta x^4$$

y eksenini doğrultusundaki türevlerde benzer şekilde işlemler yapılarak aşağıda belirtilen türevler bulunur.

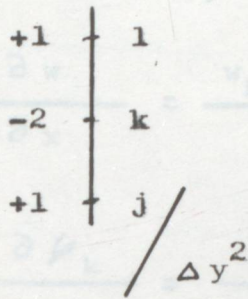
5) $\frac{\partial w}{\partial y}$ ifadesi

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{w_1 - w_j}{2 \Delta y}$$

$$\begin{array}{c} +1 \quad | \quad 1 \\ \quad \quad | \quad k \\ -1 \quad | \quad j \end{array} \quad / \quad 2 \Delta y$$

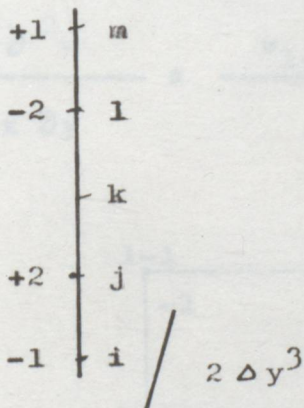
6) $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ifadesi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_1 - 2 \cdot w_k + w_j}{\Delta y^2}$$



7) $\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$ ifadesi

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{w_m - 2 \cdot w_1 + 2 \cdot w_j - w_i}{2 \cdot \Delta y^3}$$



8) $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ ifadesi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{w_m - 4 \cdot w_1 + 6 \cdot w_k - 4 \cdot w_j + w_i}{\Delta y^4}$$

Şimdi de karışık türevleri somlu farklarla ifade edelim.

$$9) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{ifadesi}$$

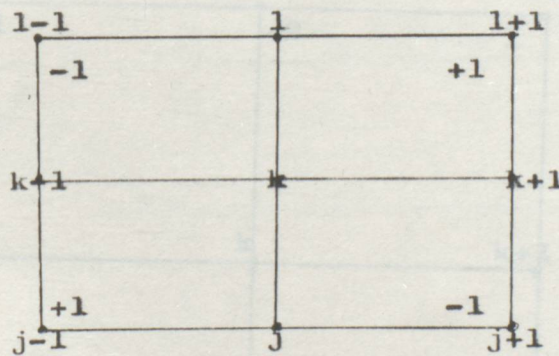
$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{k+1} - w_{k-1}}{2 \cdot \Delta x} = \varphi_k$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = \frac{\varphi_1 - \varphi_j}{2 \Delta y}$$

$$\varphi_1 = \frac{w_{1+1} - w_{1-1}}{2 \Delta x}$$

$$\varphi_j = \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2 \Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{w_{1+1} - w_{1-1} - w_{j+1} + w_{j-1}}{4 \Delta x \cdot \Delta y}$$



$4 \Delta x \Delta y$

$$10) \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad \text{ifadesi}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2} = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} \cdot \varphi_k$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = \frac{\varphi_1 - \varphi_j}{2\Delta y}$$

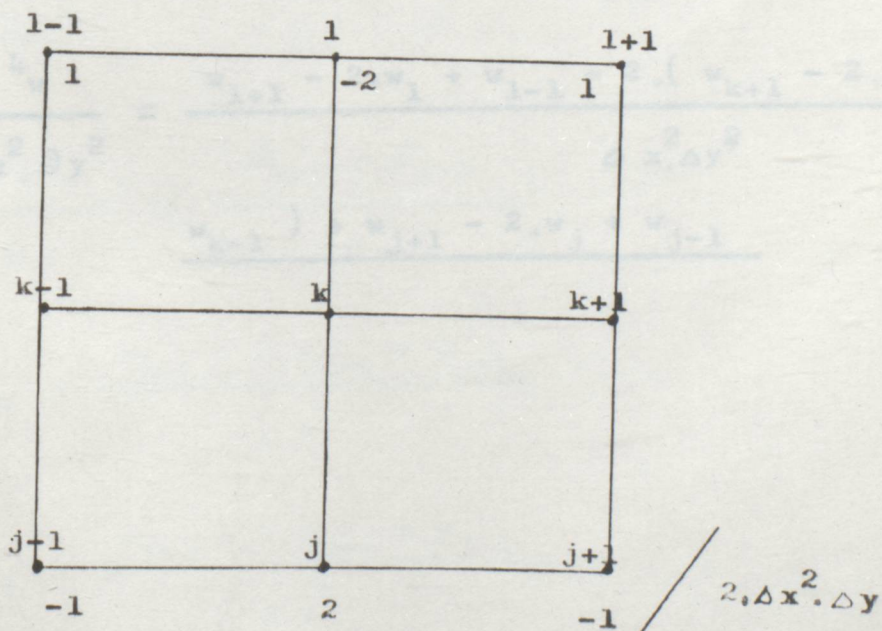
$$\varphi_1 = \frac{w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1}}{\Delta x^2}$$

$$\varphi_j = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2}$$

Bu ifadeleri yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2 \partial y} = \frac{w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1} - w_{j+1} + 2w_j - w_{j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y}$$

Değerleri yerlerine koyalım.



11) $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ ifadesi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} = \mu_k$$

$$\frac{\partial^2 \mu_k}{\partial y^2} = \frac{\mu_1 - 2\mu_k + \mu_j}{\Delta y^2}$$

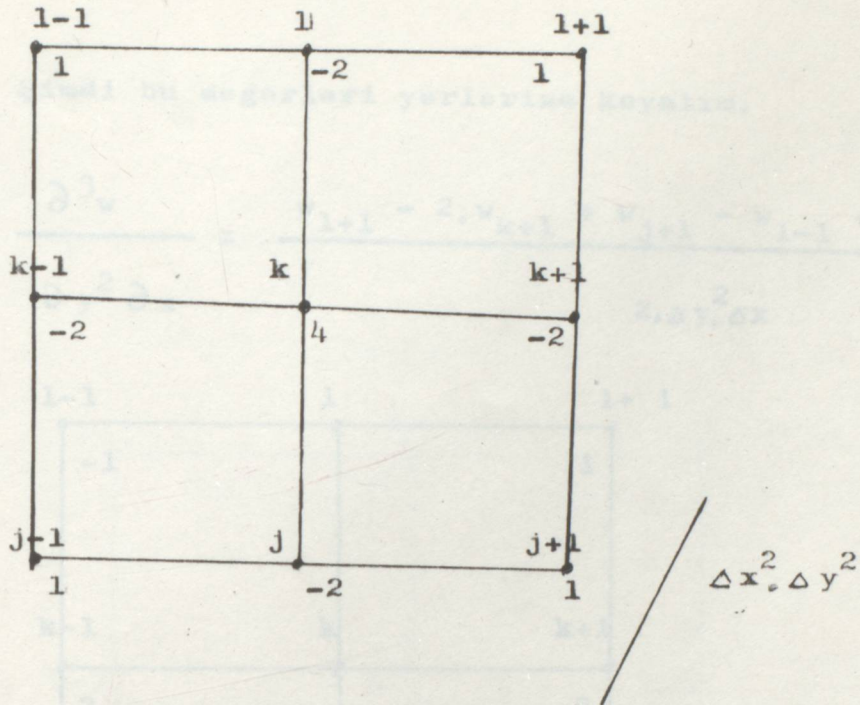
$$\mu_1 = \frac{w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1}}{\Delta x^2}$$

$$\mu_k = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}$$

$$\mu_j = \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2}$$

Değerleri yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1} - 2(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) + w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$



12) $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$ ifadesi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_{1-1} - 2 \cdot w_k + w_{j+1}}{y^2} = \rho_k$$

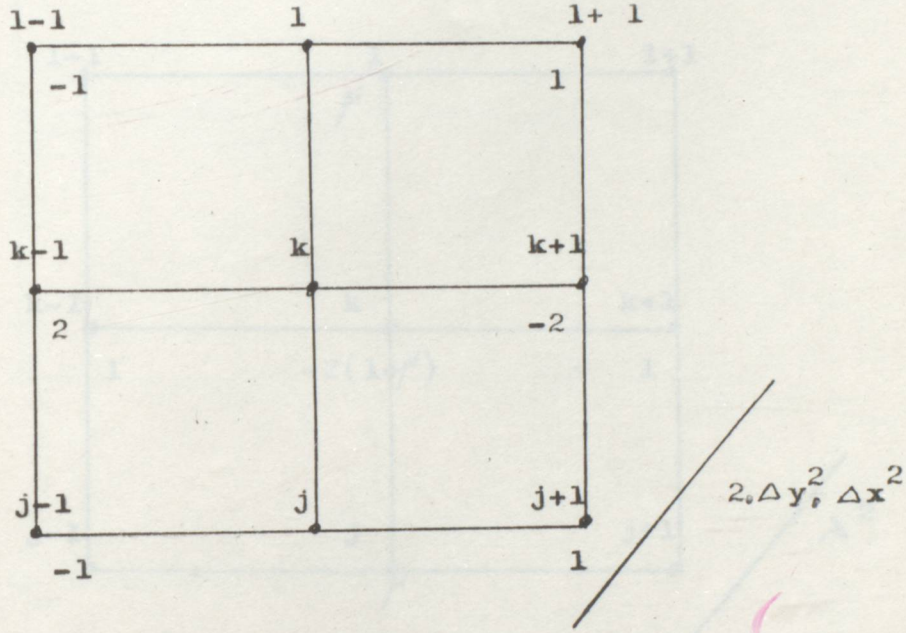
$$\frac{\partial \rho_k}{\partial x} = \frac{\rho_{k+1} - \rho_{k-1}}{2 \Delta x}$$

$$\rho_{k+1} = \frac{w_{1+1} - 2 \cdot w_{k+1} + w_{j+1}}{\Delta y^2}$$

$$\rho_{k-1} = \frac{w_{1-1} - 2 \cdot w_{k-1} + w_{j-1}}{\Delta y^2}$$

Şimdi bu değerleri yerlerine koyalım.

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \frac{w_{l+1} - 2w_k + w_{j+1} - w_{l-1} + 2w_{k-1} - w_{j-1}}{2 \Delta y^2 \Delta x}$$



Dış yükün ve iç kuvvetlerin sonlu farklarla ifade edilmesi.

$$M_x = -D, (w_{xx} + \nu w_{yy})$$

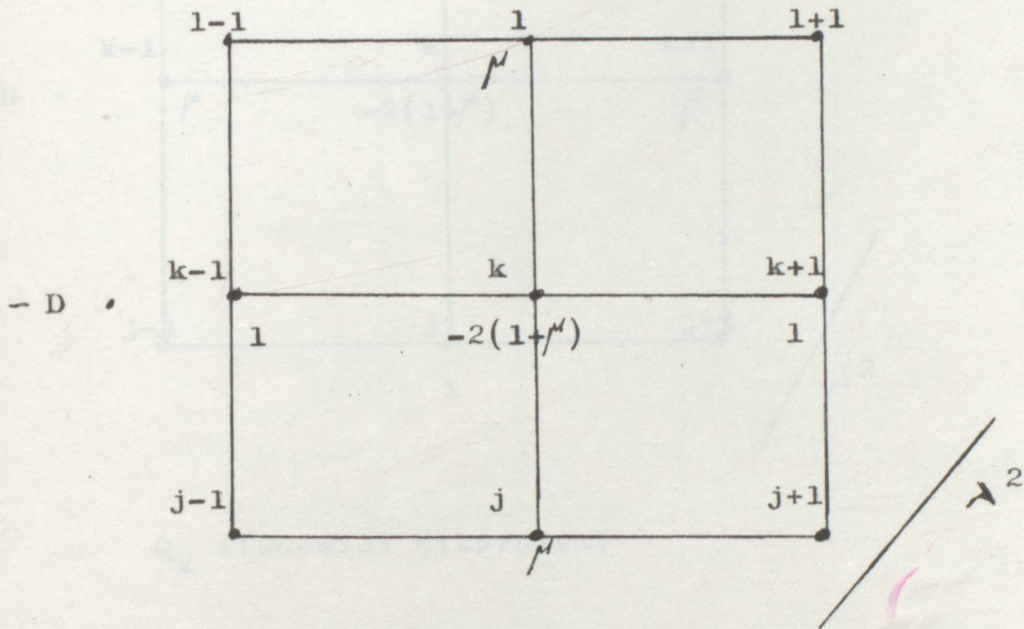
$$w_{xx}'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2}$$

$$w_{yy}'' = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{w_l - 2w_k + w_j}{\Delta y^2}$$

$$M_x = -D \cdot \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_l - 2w_k + w_j}{\Delta y^2}$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$M_x = - \frac{-D}{\lambda^2} (w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} + \mu (w_1 - 2w_k + w_j)) \quad (B-29)$$



Şimdi M_y ifadesini çıkaralım.

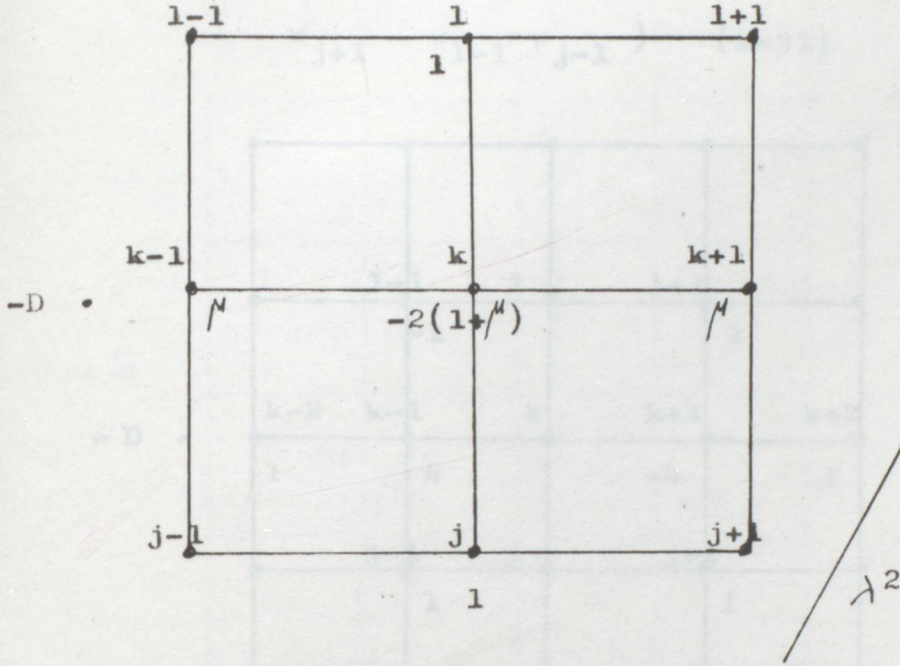
$$M_y = -D (w_{yy}'' + \mu w_{xx}'')$$

$$M_y = -D \left(\frac{w_1 - 2w_k + w_j}{\Delta y^2} + \mu \frac{w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}}{\Delta x^2} \right)$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$M_y = - \frac{D}{\lambda^2} \left((w_1 - 2w_k + w_j) + \mu (w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) \right)$$

(B-3)



Q_x ifadesini çıkaralım.

$$Q_x = -D (w_{xxx}'''' + w_{yyx}''')$$

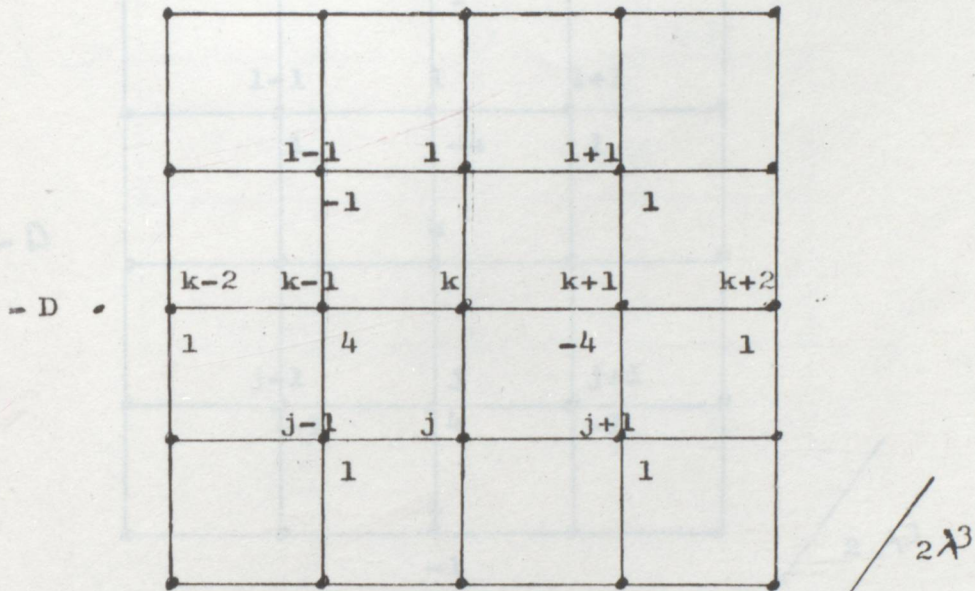
$$w_{xxx}'''' = \frac{w_{k+2} - 2w_{k+1} + 2w_{k-1} - w_{k-2}}{2\Delta x^3}$$

$$w_{yyx}'''' = \frac{w_{l+1} - 2w_{k+1} + w_{j+1} - w_{l-1} + 2w_{k-1} - w_{j-1}}{2\Delta y^2 \Delta x}$$

Bu değerleri Q_x ifadesinde yerlerine koyalım.

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$Q_x = - \frac{D}{2\Delta x^3} (w_{k+2} - 4w_{k+1} + 4w_{k-1} - w_{k-2} + w_{l+1} + w_{j+1} - w_{l-1} - w_{j-1}) \quad (B-31)$$



Q_y ifadesini çıkaralım.

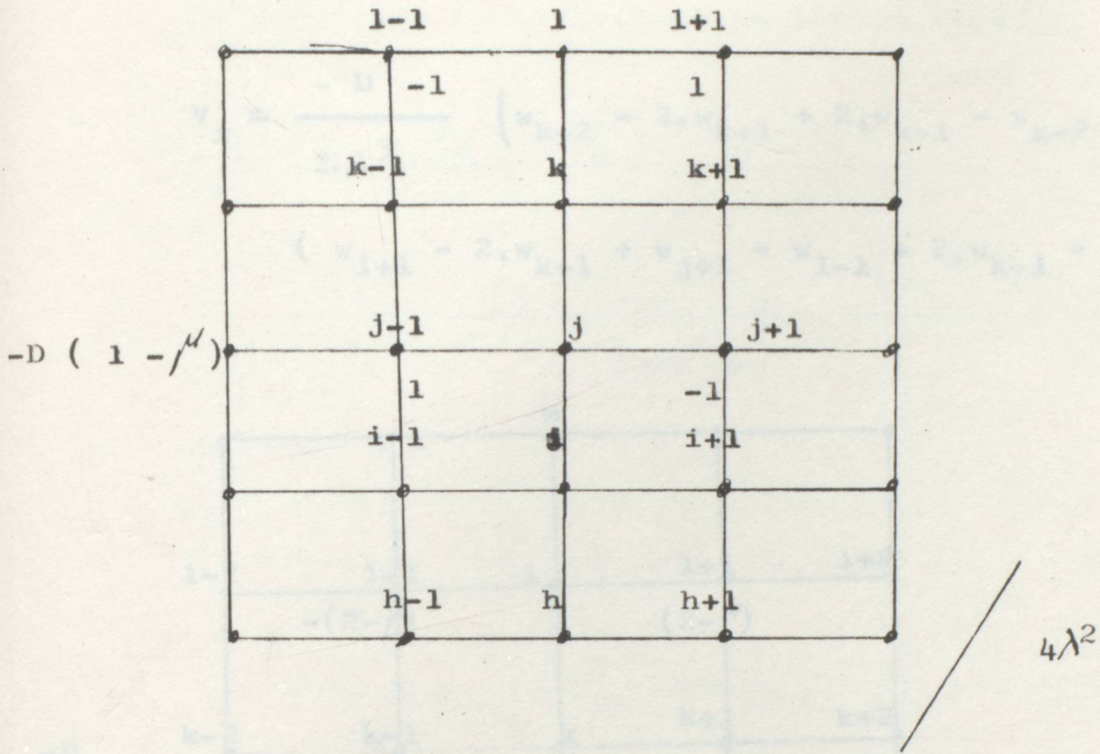
$$Q_y = - D \cdot (w_{yyy}'''' + w_{xxy}'')$$

$$w_{yyy}'''' = \frac{w_m - 2w_l + 2w_j - w_i}{2\Delta y^3}$$

$$w_{xxy}'' = \frac{w_{l+1} - 2w_l + w_{l-1} - w_{j+1} + 2w_j - w_{j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y}$$

Bu ifadeleri Q_y de yerlerine koyalım.

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$



V_x ifadesini çıkaralım.

$$V_x = -D \cdot (w_{xxx}''' + (2 - \mu) \cdot w_{yyx}''')$$

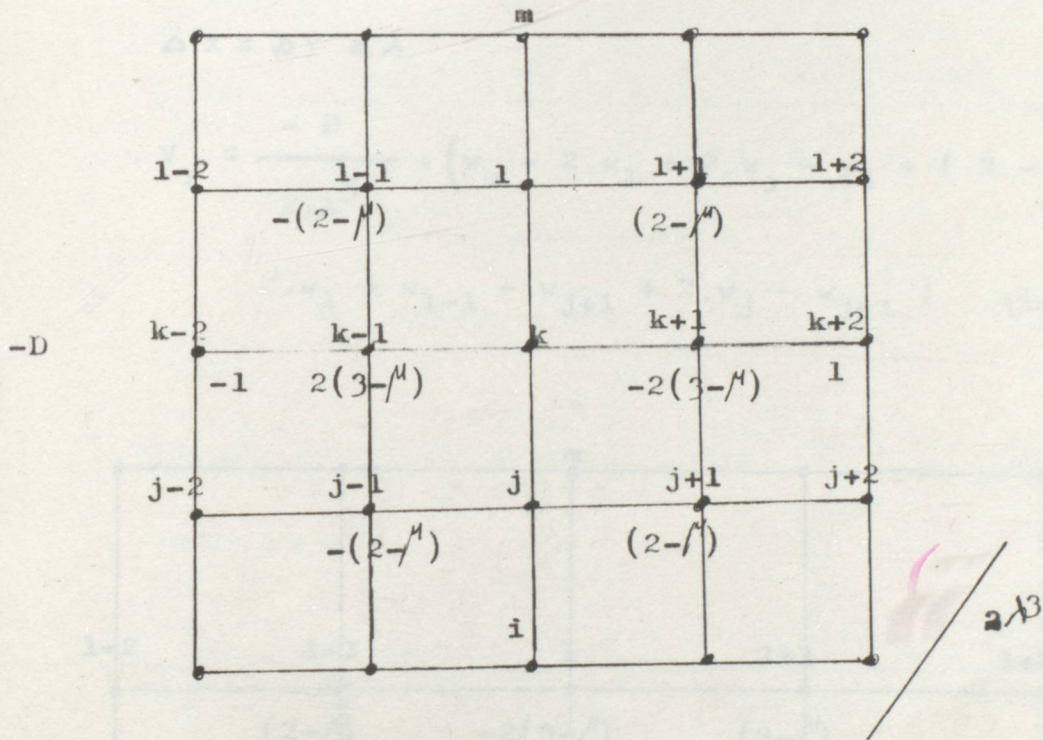
$$w_{xxx}''' = \frac{w_{k+2} - 2 \cdot w_{k+1} + 2 \cdot w_{k-1} - w_{k-2}}{2 \cdot \Delta x^3}$$

$$w_{yyx}''' = \frac{w_{l+1} - 2 \cdot w_{k+1} + w_{j+1} - w_{l-1} + 2 \cdot w_{k-1} - w_{j-1}}{2 \cdot \Delta y^2 \cdot \Delta x}$$

Şimdide bu değerleri V_x ifadesinde yerlerine koyalım.

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$V_x = \frac{-D}{2 \cdot \Delta^3} \left(w_{k+2} - 2 \cdot w_{k+1} + 2 \cdot w_{k-1} - w_{k-2} + (2 - \mu) \cdot (w_{l+1} - 2 \cdot w_{k+1} + w_{j+1} - w_{l-1} + 2 \cdot w_{k-1} - w_{j-1}) \right) (1-3)$$



V_y ifadesini çıkaralım.

$$V_y = -D \cdot (w_{yyy} + (2 - \mu) \cdot w_{xxy})$$

$$w_{yyy} = \frac{w_m - 2 \cdot w_l + 2 \cdot w_j - w_i}{2 \cdot \Delta y^3}$$

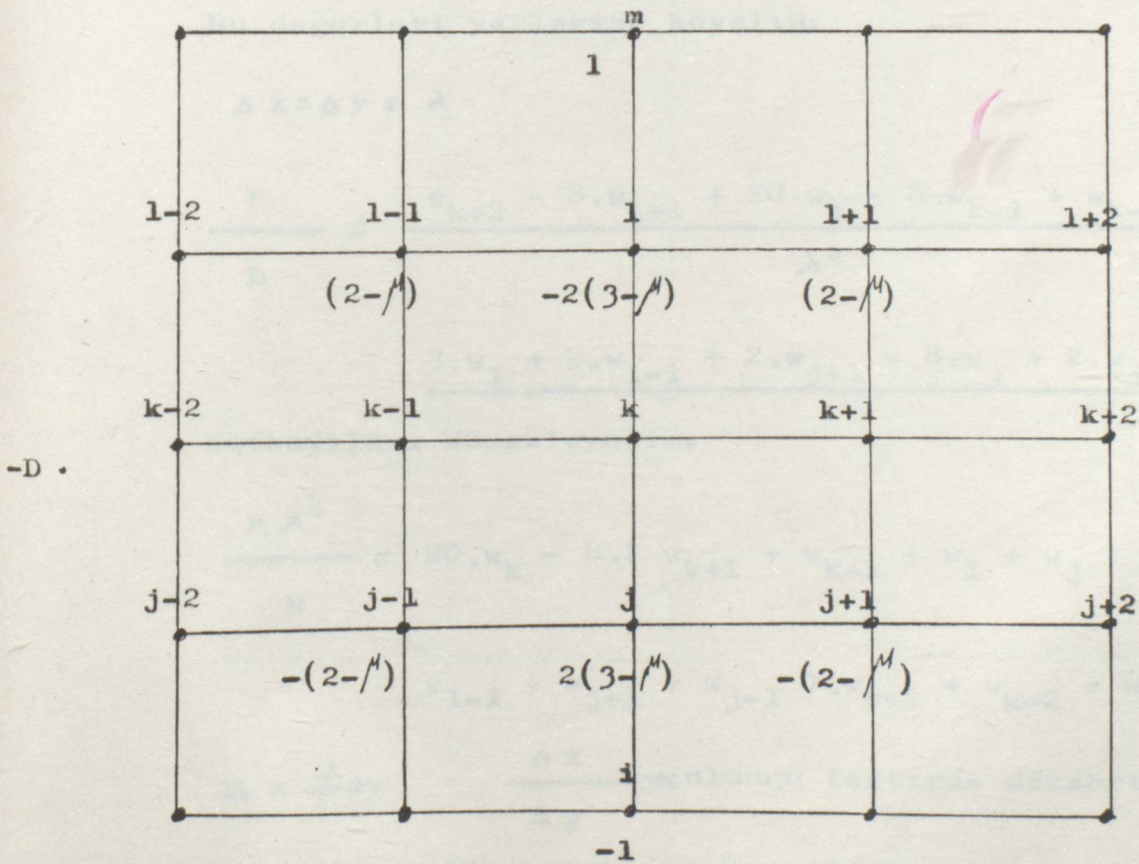
$$w_{xxy} = \frac{w_{l+1} - 2 \cdot w_l + w_{l-1} - w_{j+1} + 2 \cdot w_j - w_{j-1}}{2 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta y}$$

Bu değerleri V_y ifadesinde yerlerine koyalım.

$$V_y = -D \cdot \left(\frac{w_m - 2w_1 + 2w_j - w_i}{2\Delta y^3} + (2 - \mu) \cdot \frac{w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1} - w_{j+1} + 2w_j - w_{j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y} \right)$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$V_y = \frac{-D}{2\epsilon\lambda^3} \cdot (w_m - 2w_1 + 2w_j - w_i + (2 - \mu) \cdot (w_{1+1} - 2w_1 + w_{1-1} - w_{j+1} + 2w_j - w_{j-1})) \quad (B-35)$$



P (Dış yük) ifadesini çıkaralım.

$$\frac{P}{D} = w_{xxxx}'''' + 2 w_{xxyy}'''' + w_{yyyy}''''$$

$$w_{xxxx}'''' = \frac{w_{k+2} - 4w_{k+1} + 6w_k - 4w_{k-1} + w_{k-2}}{\Delta x^4}$$

$$w_{xxyy}'''' = \frac{w_{l+1} - 2w_l + w_{l-1} - 2w_{k+1} + 4w_k - 2w_{k-1} + w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$$

$$w_{yyyy}'''' = \frac{w_m - 4w_l + 6w_k - 4w_j + w_i}{\Delta y^4}$$

Bu değerleri yerlerine koyalım.

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$\frac{P}{D} = \frac{w_{k+2} - 8w_{k+1} + 20w_k - 8w_{k-1} + w_{k-2} + 2w_{l+1} - 8w_l + 2w_{l-1} + 2w_{j+1} - 8w_j + 2w_{j-1} + w_m + w_i}{\lambda^4}$$

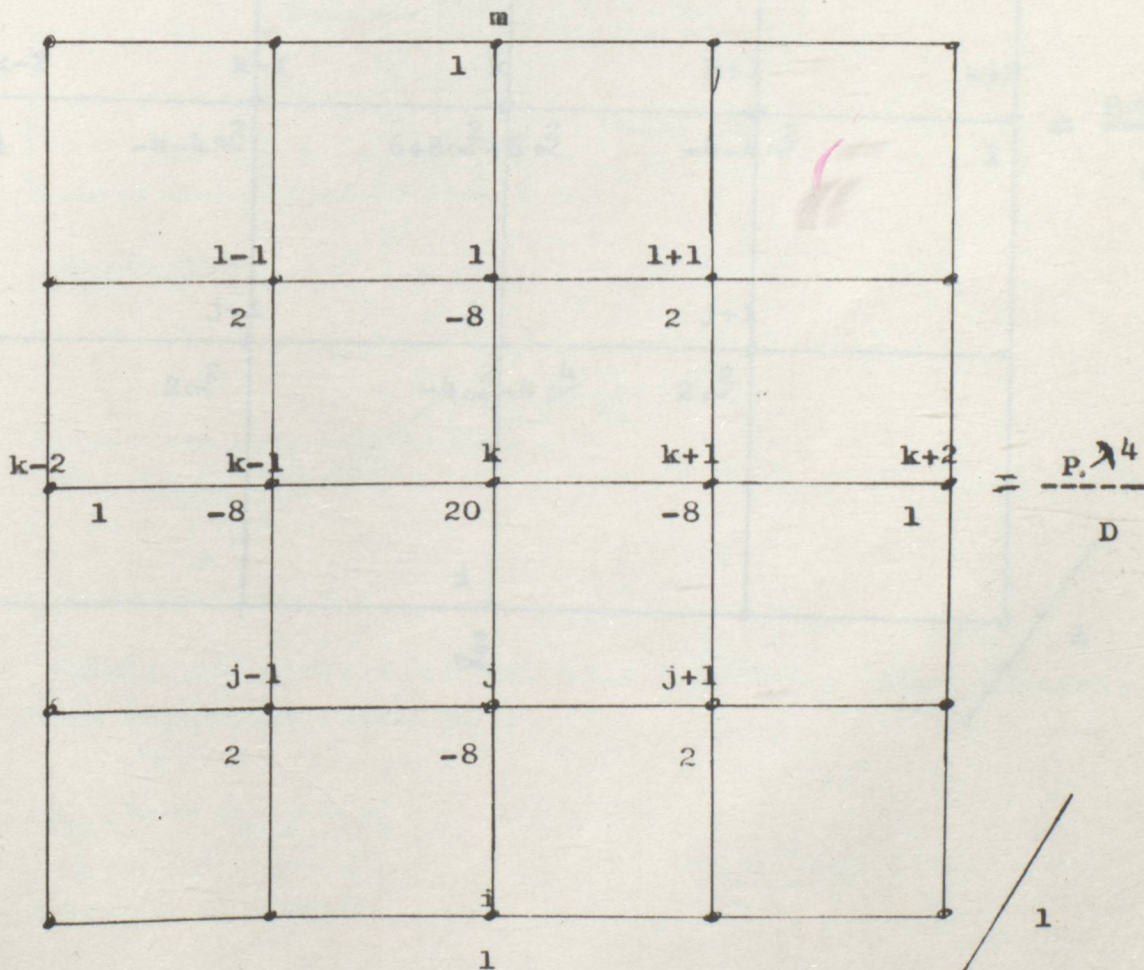
Katsayıları düzenleyelim.

$$\frac{P \cdot \lambda^4}{D} = 20w_k - 8(w_{k+1} + w_{k-1} + w_l + w_j) + 2(w_{l+1} + w_{l-1} + w_{j+1} + w_{j-1}) + w_{k+2} + w_{k-2} + w_m + w_i \quad (B-36)$$

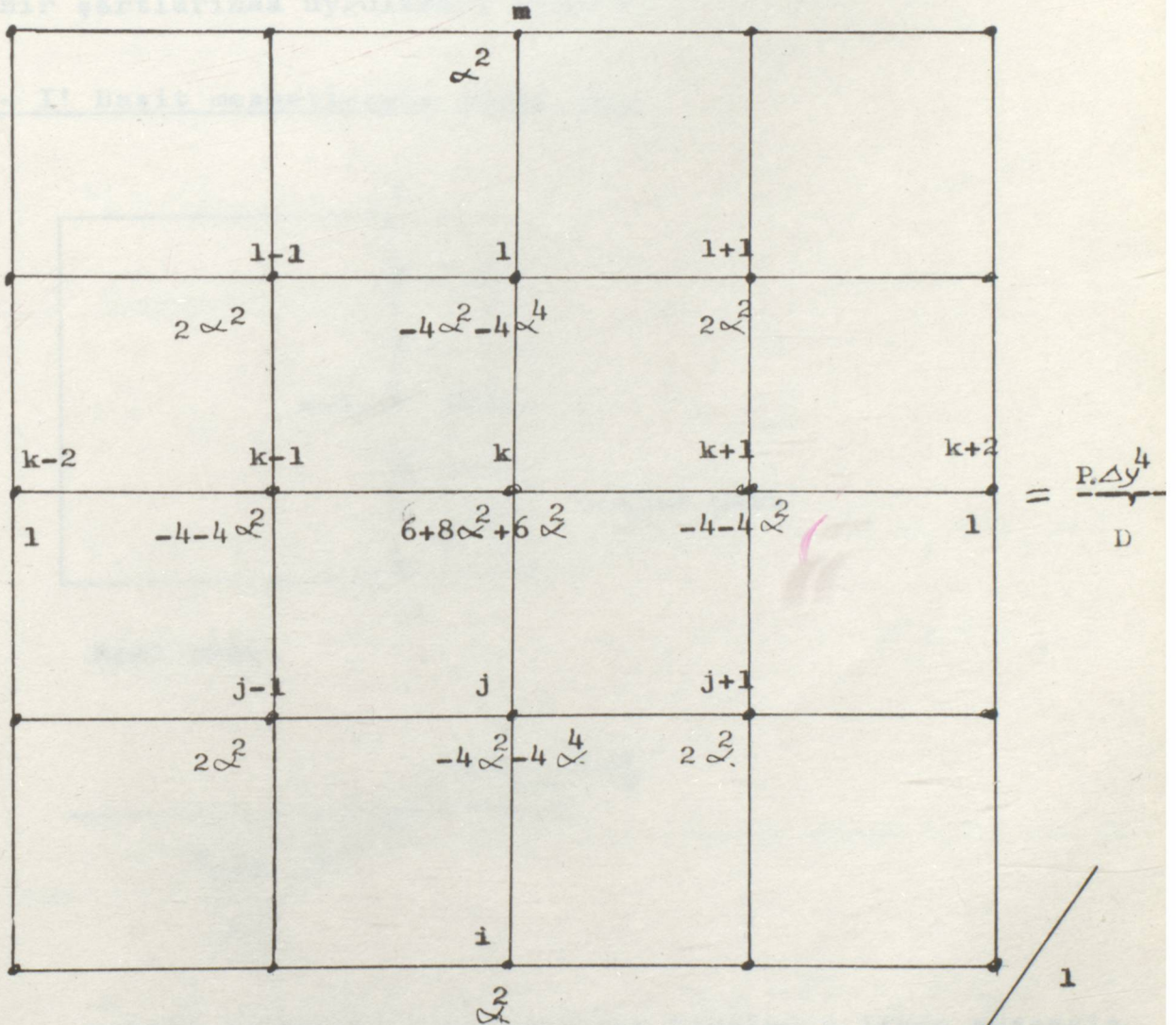
$$\Delta x \neq \Delta y \quad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \alpha \text{ olduğu takdirde dikdörtgen ele-}$$

man için sonlu farklar denklemi şu şekilde oluşur:

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{D} \cdot \alpha^2 (\Delta y)^4 = & w_k \cdot 6 \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \right) + 8 - 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \cdot (w_{k-1} + w_{k+1}) + (1 + \alpha^2) \cdot (w_j + w_l) + 2 \cdot \\
 & (w_{l+1} + w_{l-1} + w_{j+1} + w_{j-1}) + \frac{1}{\alpha^2} \cdot (w_{k-2} + w_{k+2}) + \\
 & (w_i + w_m) \cdot \alpha^2 \quad (B-37)
 \end{aligned}$$



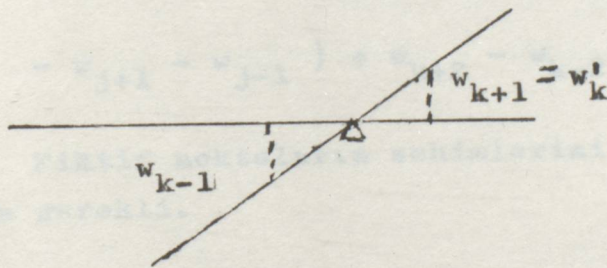
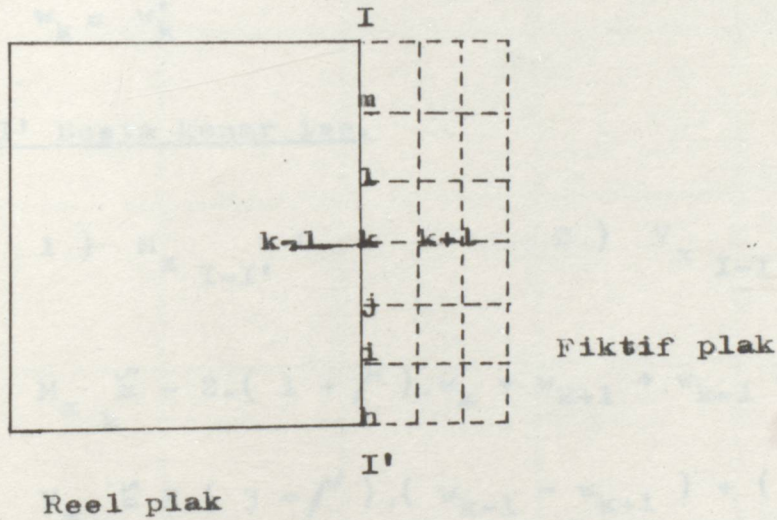
$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \alpha$ olması durumunda sonlu farklar denklemi.



Sınır şartlarının incelenmesi.

Plak çözümü için diferansiyel denklemin çözümü yetmemektedir. Sınır şartlarında dikkate alınması gerekmektedir. Elimizdeki sonlu farklar denklemini plak ın her düğüm noktasında uygulayarak çözüm denklemlerini elde ediyoruz. Sınırlarda denklemin uygulanışı değişik olmaktadır. Şimdi değişik sınır şartlarında uygulamayı görelim.

I - I' Basit mesnetlenmiş kenar ise.



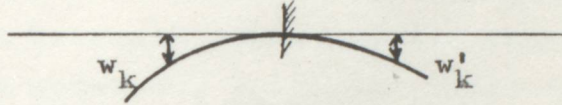
Fiktif noktaları reel noktalar cinsinden ifade edeceğiz
I - I' de deplasman $(w)=0$ dir.

$$w_{k-1} = -w_{k+1} = -w'_k$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 reel fiktif

I - I' Ankastré mesnetlenmiş kenar ise.

$$w /_{I-I'} = 0$$



$$w_k = w'_k$$

I - I' Boşta kenar ise.

$$1) M_x /_{I-I'} = 0$$

$$2) V_x /_{I-I'} = 0$$

$$M_x /_{I-I'} = -2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_k + w_{k+1} + w_{k-1} + \mu \cdot (w_l + w_j) = 0$$

$$V_x /_{I-I'} = 2 \cdot (3 - \mu) \cdot (w_{k-1} - w_{k+1}) + (2 - \mu) \cdot (w_{l+1} - w_{j+1} - w_{j-1}) + w_{k+2} - w_{k-2} = 0$$

Fiktif noktaların sehimlerini elimine etmek için iki ek ifade gerekli.

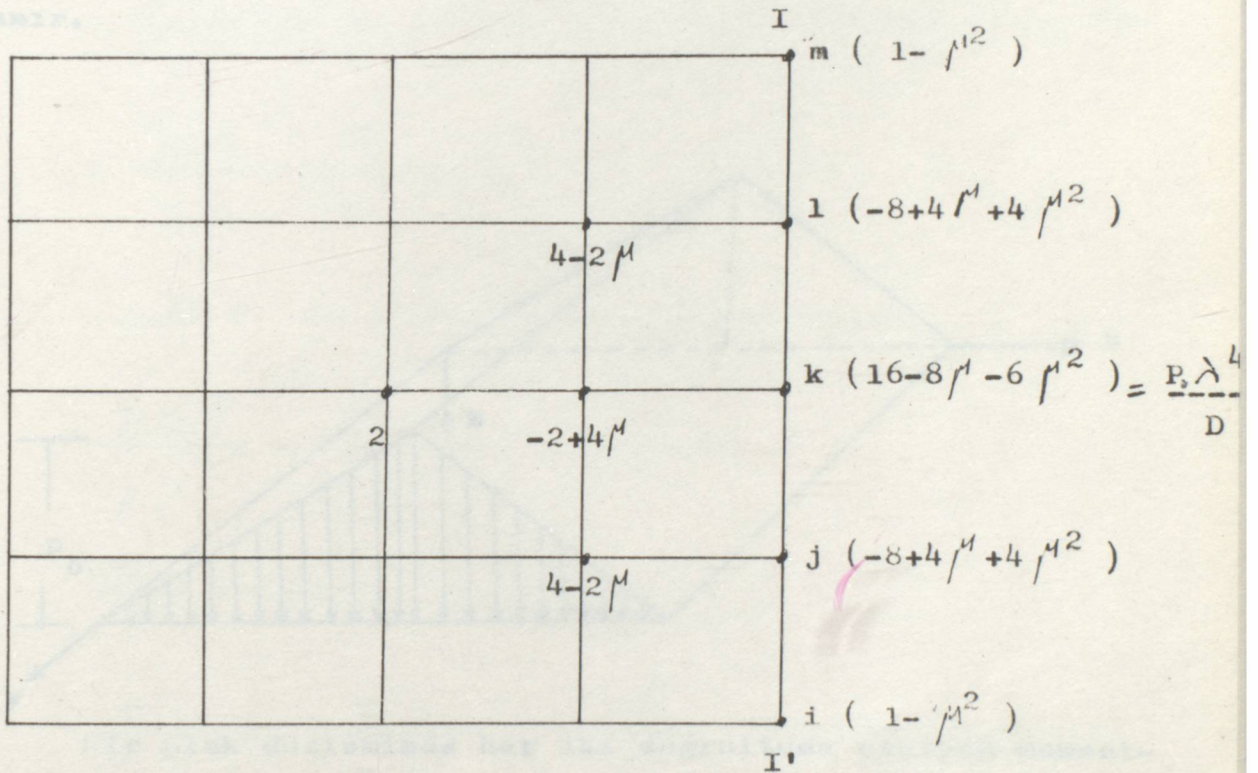
$$M_x /_{I-I'} = -2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_j + w_{j-1} + w_{j+1} + \mu \cdot (w_l + w_k) = 0$$

$$M_x /_{I-I'} = -2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_l + w_{l-1} + w_{l+1} + \mu \cdot (w_m + w_k) = 0$$

w_{k+2} , w_{k+1} , w_{j+1} , w_{l+1} Bu ifadelerden elimine edilirse katsayılar şeması aşağıdaki gibi oluşur.

Kesit keskinleşmiş, birer birer vücutta taşıdığı yüklerin
bir iki kesme silindirik farklar metodu ile çözülmesi

İki kesme silindirik farklar denklemleri ile çözümlenmiş olan
 önce toplam momentler üzerindeki kesme silindirik farklar denklemleri
 kurulur. İkinci kesme silindirik farklar denklemleri ise aynı
 tarafları toplam momentler üzerine alınarak elde edilir ve çözümlenir.



İki kesme silindirik farklar denklemleri ile çözümlenmiş olan önce toplam momentler üzerindeki kesme silindirik farklar denklemleri kurulur. İkinci kesme silindirik farklar denklemleri ise aynı tarafları toplam momentler üzerine alınarak elde edilir ve çözümlenir.

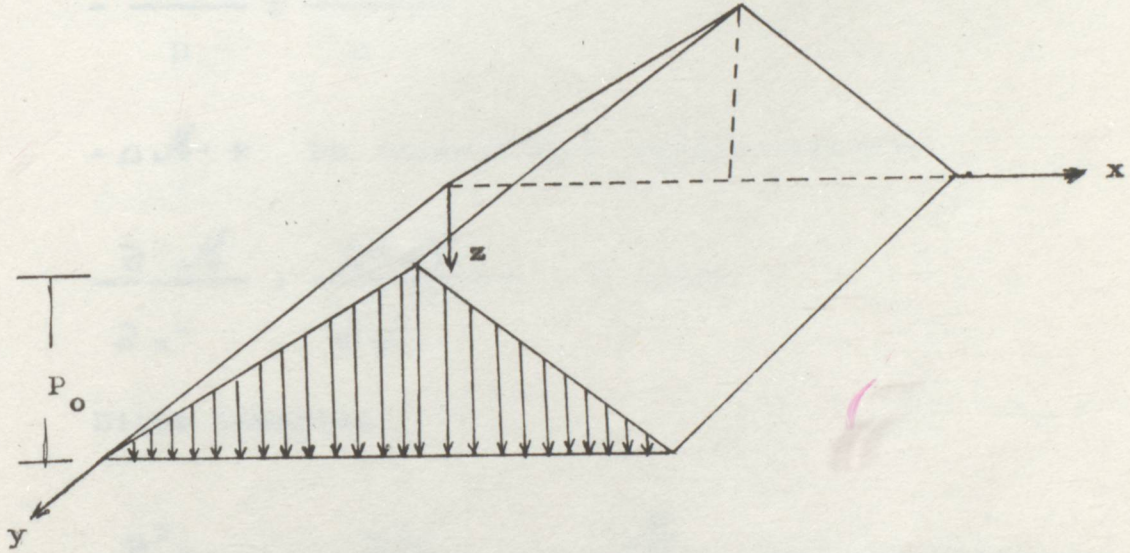
$$\frac{4-2\mu}{(1-\mu^2)} = \frac{D}{\lambda^4} (\mu^2 + \mu^4)$$

$$\frac{4-2\mu}{(1-\mu^2)} = \frac{D}{\lambda^4} (\mu^2 + \mu^4)$$

$$\frac{4-2\mu}{(1-\mu^2)} = \frac{D}{\lambda^4} (\mu^2 + \mu^4)$$

Basit mesnetlenmiş, üçgen prizma yüklü taşıyıcı plak elemanın iki kademeli sonlu farklar metodu ile çözümü:

İki kademeli sonlu farklar denklemi ile çözümde ilk önce toplam momentler üzerinden sonlu farklar denklemi oluşturulur. İkinci kademede sonlu farklar denkleminin ikinci tarafını toplam momentler cinsinden ifade ederek çözüm sağlanır.



Bir plak düzleminde her iki doğrultuda etkiyen momentlerin toplamını daha önceki bölümlerde deplasman cinsinden ifade etmiştik.

$$\frac{M_x + M_y}{(1 + \nu)} = - D_0 (w''_{xx} + w''_{yy})$$

$$\frac{M_x + M_y}{(1 + \nu)} = \mathcal{M} \text{ diyelim.}$$

$$-\Delta w, D = \mathcal{M}$$

$$\Delta w = (w''_{xx} + w''_{yy})$$

$$\frac{-\Delta \mathcal{M}}{D} = \Delta^2 w \quad \text{Eşitliğin her iki tarafını } \Delta \text{ ile çarpalım.}$$

$$-\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} = \Delta^2 w \quad \text{olurki } \Delta^2 w = P/D \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$-\frac{\Delta \mathcal{M}}{D} = \frac{P}{D}$$

$$-\Delta \mathcal{M} = P \quad \text{Bu ifadeyi açık olarak yazalım.}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial y^2} = -P \quad \text{olur.}$$

Diğer taraftan ,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\mathcal{M}}{D} \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$$\Delta \mathcal{M}_k = -(P)_k \quad \text{Bu ifadeyi açalım.} \quad \partial \cong \Delta$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial y^2} \right)_k = -(P)_k$$

$$\left(\frac{\Delta^2 \mathcal{M}}{\Delta x^2} \right)_k + \left(\frac{\Delta^2 \mathcal{M}}{\Delta y^2} \right)_k = -(P)_k$$

Şimdi eşitliğin sol tarafındaki ifadeleri sonlu farklarla ifade edelim.

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\mathcal{M}_{k+1} - 2\mathcal{M}_k + \mathcal{M}_{k-1}) + \frac{1}{\Delta y^2} (\mathcal{M}_1 - 2\mathcal{M}_k + \mathcal{M}_j) = -P_k \quad (\text{B-38})$$

w Deplasman ifadesinide sonlu farklarla ifade edelim.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_k = -\frac{\mathcal{M}}{D} = -P_k$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_k + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_k = -P_k^*$$

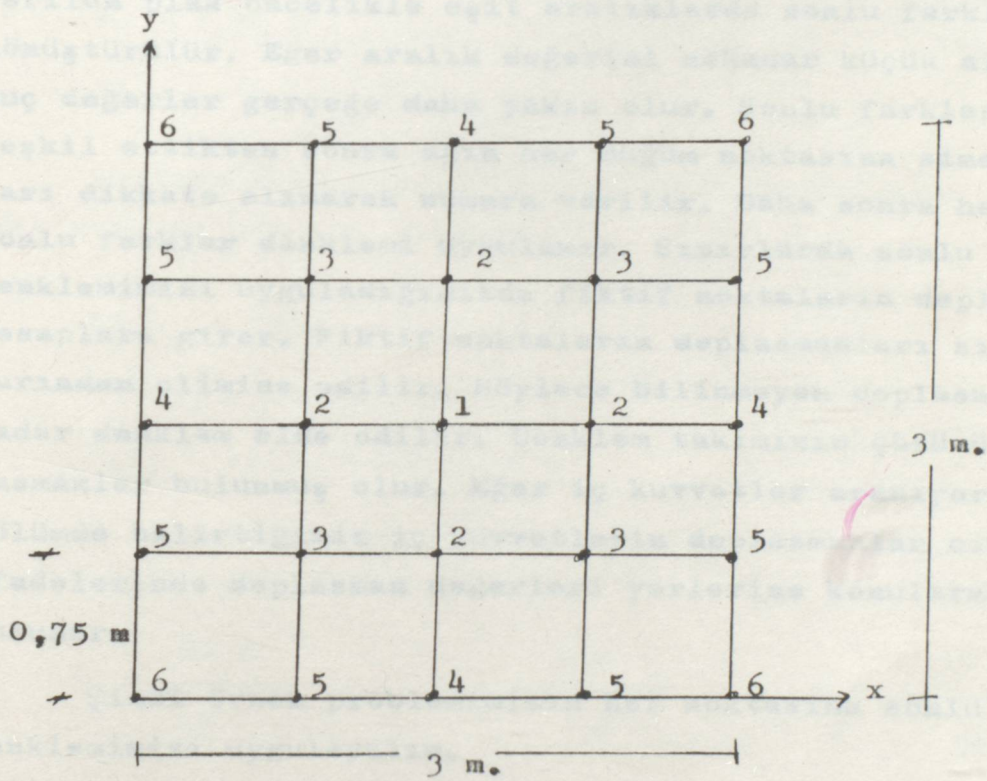
$$\frac{1}{\Delta x^2} (w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) + \frac{1}{\Delta y^2} (w_1 - 2w_k + w_j) = -P_k^* \quad (\text{B-39})$$

$$P_k^* = \left(\frac{\mathcal{M}}{D} \right)_k$$

Böylece iki kademeli sonlu farklarla çözümde kullanacağımız iki denkleme elde etmiş oluyoruz.

Bu bölümde çeşitli sınır şartları altında sonlu farklar metodu ile plak çözümü yapılacaktır.

Örnek



$$P = 10 \text{ KN/m}^2 = 1 \text{ t/m}^2$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda = 0,75 \text{ m}$$

$$a = b = 3 \text{ m}$$

$$d = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$E = 1000 \text{ KN/cm}^2 = 100000 \text{ Kg/cm}^2$$

Sınır şartı : Dört kenarda basit mesnetli.

İstenenler.

$$M = 0 \text{ için } M_{\max} = ? \quad w_{\max} = ?$$

$$M = 0,2 \text{ için } M_{\max} = ? \quad w_{\max} = ?$$

Çözüm:

1) $M = 0$ için çözüm.

$w_4 = w_5 = w_6 = 0$ dir. Çünkü basit mesnet sınır şartından dolayı. Aranılan deplasmanlar şunlardır. w_1, w_2, w_3 . Verilen plak öncelikle eşit aralıklarda sonlu farklar ağına dönüştürülür. Eğer aralık değerini ne kadar küçük alırsak sonuç değerler gerçeğe daha yakın olur. Sonlu farklar ağını teşkil ettikten sonra ağın her düğüm noktasına simetri şartları dikkate alınarak numara verilir. Daha sonra her noktaya sonlu farklar denklemi uygulanır. Sınırlarda sonlu farklar denkleminizi uyguladığımızda fiktif noktaların deplasmanları hesaplara girer. Fiktif noktaların deplasmanları sınır şartlarından elimine edilir. Böylece bilinmeyen deplasman sayısı kadar denklem elde edilir. Denklem takımının çözümü ile deplasmanlar bulunmuş olur. Eğer iç kuvvetler aranıyorsa diğer bölümde belirttiğimiz iç kuvvetlerin deplasmanlar cinsinden ifadelerinde deplasman değerleri yerlerine konularak çözüm bulunur.

Şimdi örnek problemimizin her noktasına sonlu farklar denkleminizi uygulayalım.

1 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_1 - 8.4 w_2 + 2.4 w_3 = \frac{P_0 \lambda^4}{D}$$

$$20.w_1 - 32.w_2 + 8.w_3 = \frac{P_0 \lambda^4}{D} = a$$

2 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_2 - 8.(w_4 + w_1 + 2.w_3) + 2.(2.w_2 + 2.w_5) + w_2' + 2.w_5 + w_2 = a$$

$$w_4 = w_5 = 0$$

$$w_2' = -w_2$$

$$24.w_2 - 8.w_1 - 16.w_3 = a$$

3 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$20.w_3 - 8.2.w_2 + 2.w_1 + w_3 + w_3' = a$$

$$w_3' = -w_3$$

$$20.w_3 - 16.w_2 + 2.w_1 = a$$

Böylece elimizde w_1, w_2, w_3 bilinmeyenlerine ait üç adet denklem oluşmuş oluyor.

$$20.w_1 - 32.w_2 + 8.w_3 = a$$

$$-8.w_1 + 24.w_2 - 16.w_3 = a$$

$$2.w_1 - 16.w_2 + 20.w_3 = a$$

Bu denklem takımını çözersek bilinmeyen deplasmanlarımız aşağıdaki gibi oluşur.

$$w_1 = \frac{33.a}{32}, \quad w_2 = \frac{6.a}{8}, \quad w_3 = \frac{35.a}{64}$$

a yı bilmemiz için D (plak eğilme rijitliğini) yi hesaplamamız gerekir. D değişik katsayıları için farklı değerler almaktadır.

$$D = \frac{E J}{1 - \mu^2} = \frac{1000 \cdot 10^3}{12 (1 - 0^2)} = 83333,33 \text{ KN cm.}$$

Şimdide a 'yi hesaplayalım.

$$a = \frac{P, \lambda^4}{10000083333,33} = \frac{10.(75)^4}{10000083333,33} = 0,379687 \text{ cm.}$$

Buna göre sonlu farklar ağıının düğüm noktalarında oluşan deplasman değerleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$w_1 = \frac{33}{32} 0,379687 = 0,3915 \text{ cm.}$$

$$w_2 = \frac{6}{8} 0,379687 = 0,28476 \text{ cm.}$$

$$w_3 = \frac{35}{64} 0,379687 = 0,20764 \text{ cm.}$$

$$w_{\max} = 0,3915 \text{ cm olarak bulunur.}$$

Şimdi M_{\max} değerini hesaplayalım. Problemede verilen taşıyıcı plak elemanı simetri özelliğine haiz olduğundan her iki yöndeki moment değerleri eşit olacaktır.

$$M_x = -D. \left(\frac{w_2 - 2.w_1 + w_2}{\Delta x^2} + 0 \right)$$

$$M_x = -83333,33. \left(\frac{-2.0,39 + 2.0,285}{75^2} \right) = 3,11 \text{ KNcm.}$$

$$M_x = M_{\max} = 3,11 \text{ KN cm. olarak bulunur.}$$

2) $\mu = 0,2$ için çözüm.

$$D = \frac{1000,10^3}{12.(1 - 0,2^2)} = 86805,55 \text{ KN cm.}$$

$$a = \frac{1.(75)^4}{100086805,55} = 0,3645 \text{ cm.}$$

Sorak Bu değerlere göre sehim değerleri aşşağıdaki gibi oluşur.

$$w_1 = 0,376 \text{ cm.}$$

$$w_2 = 0,273 \text{ cm.}$$

$$w_3 = 0,199 \text{ cm.}$$

M_{\max} değeri ise :

$$M_x = -86805,55 \cdot \left(\frac{2 \cdot 0,273 - 2 \cdot 0,3758}{75^2} + 0,2 \cdot \frac{2 \cdot 0,2733 - 2 \cdot 0,3758^2}{75^2} \right) = 3,814 \text{ KN cm.}$$

$$M_x = M_{\max} = 3,814 \text{ KN cm. olarak bulunur.}$$

$$P = 10 \text{ KN/m}$$

$$\Delta x = \Delta y = 0,75 \text{ m}$$

$$a = 0,2 \text{ m}$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

$$E = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

İstenenler.

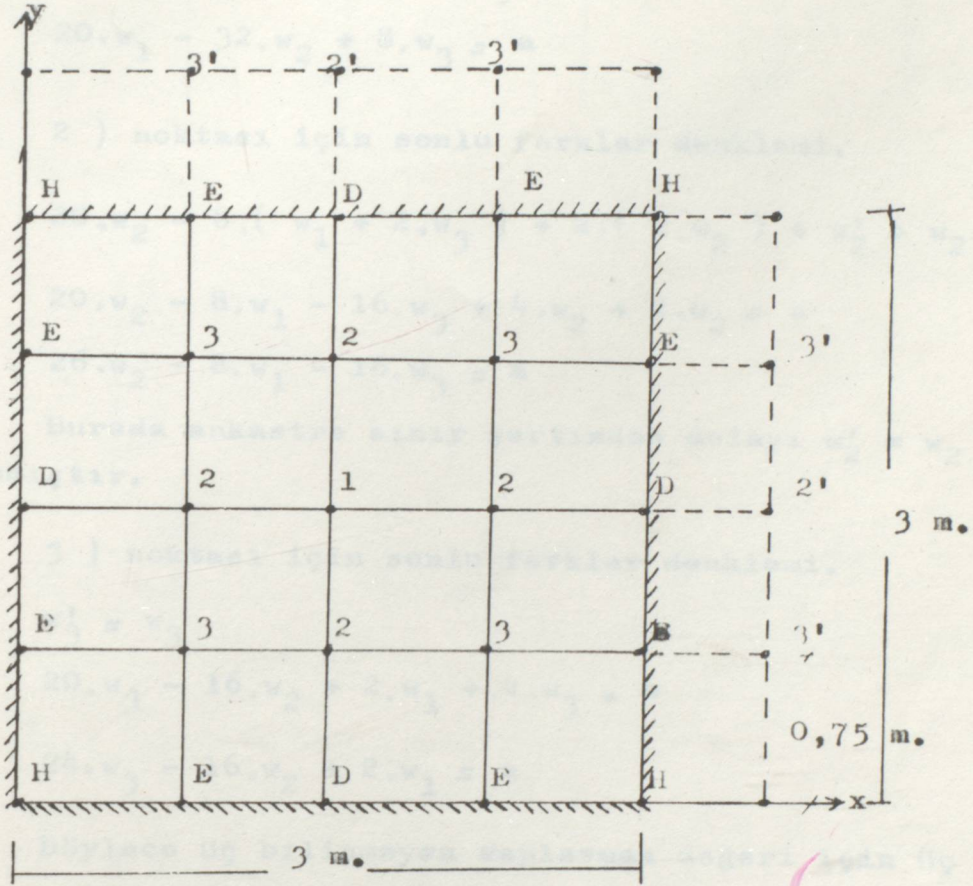
- 1) $f = 0$ için $v_{\max} = ?$ $M_{\max} = ?$
- 2) $f = 0,2$ için $v_{\max} = ?$ $M_{\max} = ?$

Çözüm.

- 1) $f = 0$ için

1, 2, 3 noktalarına göre belirli farklı değerler bulunacaktır.

- 1) noktası için belirli değerler

Örnek

$$P = 10 \text{ kN/m}^2$$

$$\Delta x = \Delta y = 0,75 \text{ m}$$

$$a = b = 3 \text{ m.}$$

$$d = 10 \text{ cm.}$$

$$E = 1000 \text{ kN/cm}^2$$

İstenenler.

- 1) $\nu = 0$ için $w_{\max} = ?$ $M_{\max} = ?$
- 2) $\nu = 0,2$ için $w_{\max} = ?$ $M_{\max} = ?$

Çözüm.

$$1) \nu = 0 \text{ için}$$

1, 2, 3 noktaları için sonlu farklar denklemi uygulanacaktır.

1 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_1 - 8.4.w_2 + 2.4.w_3 = a$$

$$20.w_1 - 32.w_2 + 8.w_3 = a$$

2) noktası için sonlu farklar denklemi.

$$20.w_2 - 8.(w_1 + 2.w_3) + 2.(2.w_2) + w_2' + w_2 = a$$

$$20.w_2 - 8.w_1 - 16.w_3 + 4.w_2 + 2.w_2 = a$$

$$26.w_2 - 8.w_1 - 16.w_3 = a$$

Burada ankastre sınır şartından dolayı $w_2' = w_2$ olarak alınmıştır.

3) noktası için sonlu farklar denklemi.

$$w_3' = w_3$$

$$20.w_3 - 16.w_2 + 2.w_1 + 4.w_3 = a$$

$$24.w_3 - 16.w_2 + 2.w_1 = a$$

Böylece üç bilinmeyen deplasman değeri için üç adet denklem elde etmiş oluyoruz.

$$20.w_1 - 32.w_2 + 8.w_3 = a$$

$$-8.w_1 + 26.w_2 - 16.w_3 = a$$

$$2.w_1 - 16.w_2 + 24.w_3 = a$$

Şimdi bu denklem takımını determinantlar ile çözelim.

$$D = \begin{vmatrix} 20 & -32 & 8 \\ -8 & 26 & -16 \\ 2 & -16 & 24 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -16 & 4 \\ -4 & 13 & -8 \\ 1 & -8 & 12 \end{vmatrix}$$

$$D = 10 \cdot \begin{vmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -16 & 4 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -16 & 4 \\ 13 & -8 \end{vmatrix} \cdot 2$$

$$D = (920 - 640 + 76) \cdot 2 = 712$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & -32 & 8 \\ a & 26 & -16 \\ a & -16 & 24 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = a \cdot \begin{vmatrix} 26 & -16 \\ -16 & 24 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} -32 & 8 \\ -16 & 24 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} -32 & 8 \\ 26 & -16 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = 368 \cdot a + 640 \cdot a + 304 \cdot a = 1312 \cdot a$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 20 & a & 8 \\ -8 & a & -16 \\ 2 & a & 24 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = -a \cdot \begin{vmatrix} -8 & -16 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} 20 & 8 \\ -8 & -16 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = 160 \cdot a + 464 \cdot a + 256 \cdot a = 880 \cdot a$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 20 & -32 & a \\ -8 & 26 & a \\ 2 & -16 & a \end{vmatrix}$$

$$D_3 = a \begin{vmatrix} -8 & 26 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 20 & -32 \\ 2 & -16 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} 20 & -32 \\ -8 & 26 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = 76 \cdot a + 25 \cdot a + 264 \cdot a = 596 \cdot a$$

$$w_1 = \frac{1312 \cdot a}{3272}, \quad w_2 = \frac{880 \cdot a}{3272}, \quad w_3 = \frac{596 \cdot a}{3272}$$

$$w_1 = 0,4605 \cdot a$$

$$w_2 = 0,3087 \cdot a$$

$$w_3 = 0,2092 \cdot a$$

Olarak deplasman değerleri ifade edilir. Şimdide a 'yı hesaplayalım.

$$D = \frac{E \cdot d^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{1000 \cdot 10^3}{12 \cdot (1 - 0^2)} = 83333,33 \text{ KN cm.}$$

$$a = \frac{P \cdot \lambda^4}{D} = \frac{10 \cdot (75)^4}{10000 \cdot 83333,33} = 0,379687 \text{ cm.}$$

$$w_1 = 0,4605 \cdot 0,379687 = 0,174 \text{ cm.}$$

$$w_2 = 0,3087 \cdot 0,379687 = 0,117 \text{ cm.}$$

$$w_3 = 0,2092 \cdot 0,379687 = 0,079 \text{ cm.}$$

$$w_{\max} = w_1 = 0,174 \text{ cm.}$$

Olarak deplasman değerleri bulunur. Plak taşıyıcı elemanında M_{\max} moment değeri 1 noktasında oluşur. Taşıyıcı elemanın simetri özelliğinden dolayı $M_x = M_y$ olur.

$$M_x = M_y = M_{\max} = -D \cdot \left(\frac{w_2 - 2w_1 + w_2}{\Delta x^2} \right)$$

$$M_{\max} = -83333,33 \cdot \frac{2,0,117 - 2,0,174}{75^2} = 1,68 \text{ KN cm.}$$

$$M_{\max} = M_1 = 1,68 \text{ KN cm.}$$

2) 0,2 için çözüm.

$$D = 86805,55 \text{ KN cm.}$$

$$a = 0,3645 \text{ cm.}$$

Diğer örnekte D plak eğilme rijitliği ile a katsayısını hesaplamıştık. Bu değerleri kullanarak $\mu = 0,2$ için deplasman değerlerini hesaplayalım.

$$w_1 = 0,4605 \cdot 0,3645 = 0,167 \text{ cm.}$$

$$w_2 = 0,3087 \cdot 0,3645 = 0,112 \text{ cm.}$$

$$w_3 = 0,2092 \cdot 0,3645 = 0,076 \text{ cm.}$$

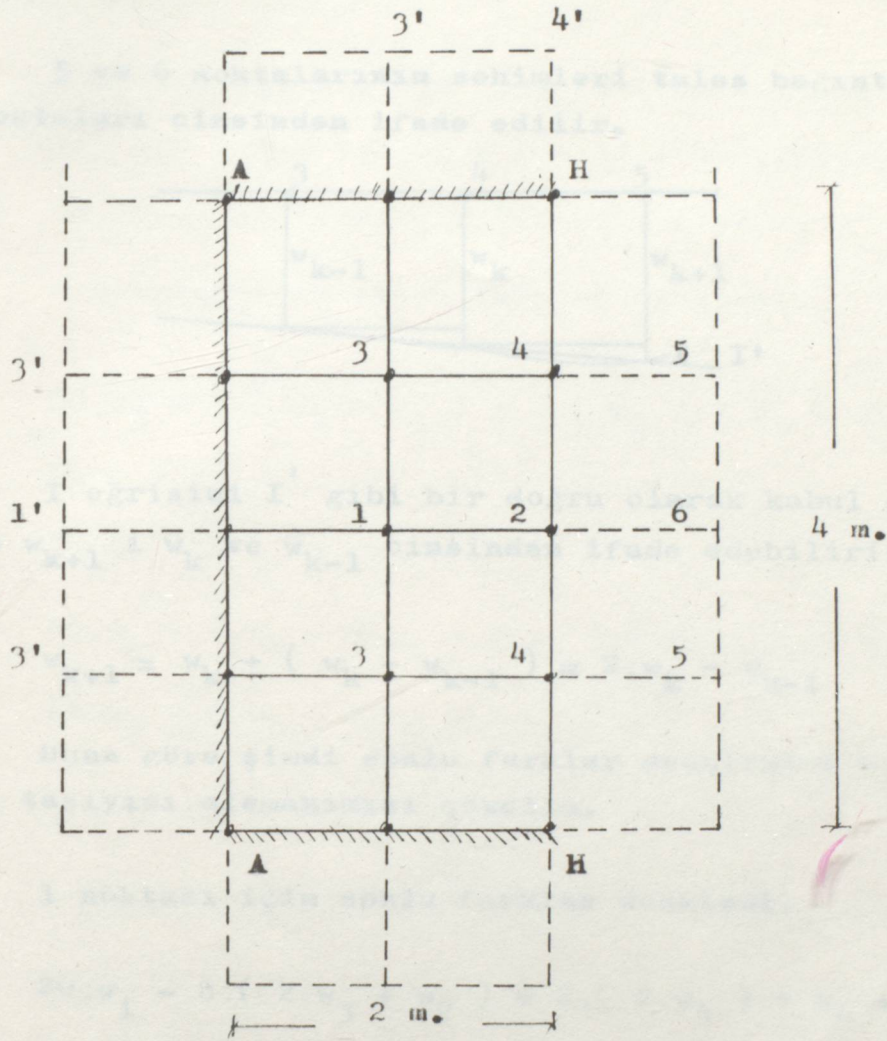
$$w_{\max} = 0,167 \text{ cm.}$$

Şimdi de M_{\max} değerini bulalım.

$$M_x = -D \cdot \left(\frac{w_2 - 2w_1 + w_2}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_2 - 2w_1 + w_2}{\Delta y^2} \right)$$

$$M_x = -86805,55 \cdot \left(\frac{2,0,112 - 2,0,167}{75^2} + 0,2 \frac{2,0,112 - 2,0,167}{75^2} \right)$$

$$M_x = M_y = M_1 = M_{\max} = 2,037 \text{ KN cm.}$$

Örnek

$$P = 10 \text{ KN/m}^2$$

$$\Delta x = \Delta y = 100 \text{ cm.}$$

$$d = 10 \text{ cm.}$$

$$E = 1000 \text{ KN/cm}^2$$

Sınır şartları : H-H Boğta kenar

A-A Basit mesnet

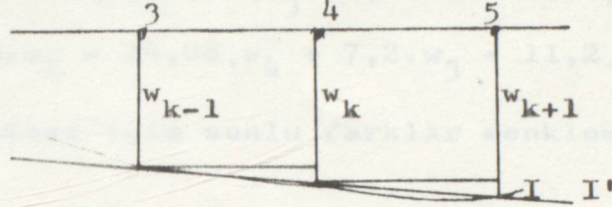
A-H Basit mesnet

İstenenler :

$M = 0$ için w_{\max} değerini bulunuz.

Cözüm.

5 ve 6 noktalarının sehimleri tales bağıntısı ile 4 ve 3 noktaları cinsinden ifade edilir.



I eğrisini I' gibi bir doğru olarak kabul edelim. Buna göre w_{k+1} i w_k ve w_{k-1} cinsinden ifade edebiliriz.

$$w_{k+1} = w_k + (w_k - w_{k-1}) = 2w_k - w_{k-1}$$

Buna göre şimdi sonlu farklar denklemini uygulayarak plak taşıyıcı elemanımızı çözelim.

1 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$20.w_1 - 8.(2.w_3 + w_2) + 2.(2.w_4) + w_6 + w'_1 = a$$

$$20.w_1 - 16.w_3 - 8.w_2 + 4.w_4 + w_6 + w'_1 = a$$

$$w'_1 = -w_1$$

$$w_6 = 2.w_2 - w_1 \quad \text{Bu değerleri yerine koyalım.}$$

$$20.w_1 - 16.w_3 - 8.w_2 + 4.w_4 + 2.w_2 - w_1 - w_1 = a$$

$$18.w_1 - 16.w_3 - 6.w_2 + 4.w_4 = a$$

Şimdi de 2 noktası için sonlu farklar denklemini oluşturulalım. 2 noktası için sınır şartlarında anlatılan ve formülü çıkartılan boğa kenar bağıntısı uygulanacaktır.

2 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$\begin{aligned} & (16 - 8 \cdot 0,2 - 6 \cdot 0,2^2) \cdot w_2 + (-8 + 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2^2) \cdot 2 \cdot w_4 \\ & + (4 - 2 \cdot 0,2) \cdot 2 \cdot w_3 + (-12 + 4 \cdot 0,2) \cdot w_1 = a \\ & 14,16 \cdot w_2 - 14,08 \cdot w_4 + 7,2 \cdot w_3 - 11,2 \cdot w_1 = a \end{aligned}$$

3 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$20 \cdot w_3 - 8 \cdot (w_4 + w_1) + 2 \cdot (w_2) + w_5 + w_3' + w_3' + w_3 = a$$

$$w_3 = -w_3'$$

$$w_5 = 2 \cdot w_4 - w_3$$

$$20 \cdot w_3 - 8 \cdot w_4 - 8 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_4 - w_3 - 2 \cdot w_3 + w_3 = a$$

$$18 \cdot w_3 - 6 \cdot w_4 - 8 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 = a$$

4 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$\begin{aligned} & (16 - 8 \cdot 0,2 - 6 \cdot 0,2^2) \cdot w_4 + (-8 + 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,2^2) \cdot w_2 + \\ & (1 - 0,2^2) (w_4' + w_4) + (4 - 2 \cdot 0,2) \cdot w_1 + (-12 + \\ & 4 \cdot 0,2) \cdot w_3 = a \end{aligned}$$

$$14,16 \cdot w_4 - 7,04 \cdot w_2 + 0,96 \cdot w_4 - 0,96 \cdot w_4 + 3,6 \cdot w_1 - 11,2 \cdot w_3 +$$

$$14,16 \cdot w_4 - 7,04 \cdot w_2 + 3,6 \cdot w_1 - 11,2 \cdot w_3 = a$$

Böylece 4 bilinmeyenli 4 denkleminiz oluşuyor.

$$18 \cdot w_1 - 6 \cdot w_2 - 16 \cdot w_3 + 4 \cdot w_4 = a$$

$$-11,2 \cdot w_1 + 14,16 \cdot w_2 + 7,2 \cdot w_3 - 14,08 \cdot w_4 = a$$

$$-8 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 18 \cdot w_3 - 6 \cdot w_4 = a$$

$$3,6 \cdot w_1 - 7,04 \cdot w_2 - 11,2 \cdot w_3 + 14,16 \cdot w_4 = a$$

Bu denklem takımını çözer isek deplasman değerleri aşağıdaki gibi oluşur.

$$w_1 = 1,007 \cdot a$$

$$w_2 = 1,752 \cdot a$$

$$w_3 = 0,729 \cdot a$$

$$w_4 = 1,262 \cdot a$$

Olarak bulunur. D Değerini diğer örnek problemde hesaplamıştık.

$$D = \frac{E \cdot a^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{1000 \cdot 10^3}{12 \cdot (1 - 0,2^2)} = 86805,55 \text{ KN cm.}$$

$$a = \frac{P \cdot \lambda^4}{D} = \frac{10 \cdot (100)^4}{10000 \cdot 86805,55} = 1,152 \text{ cm.}$$

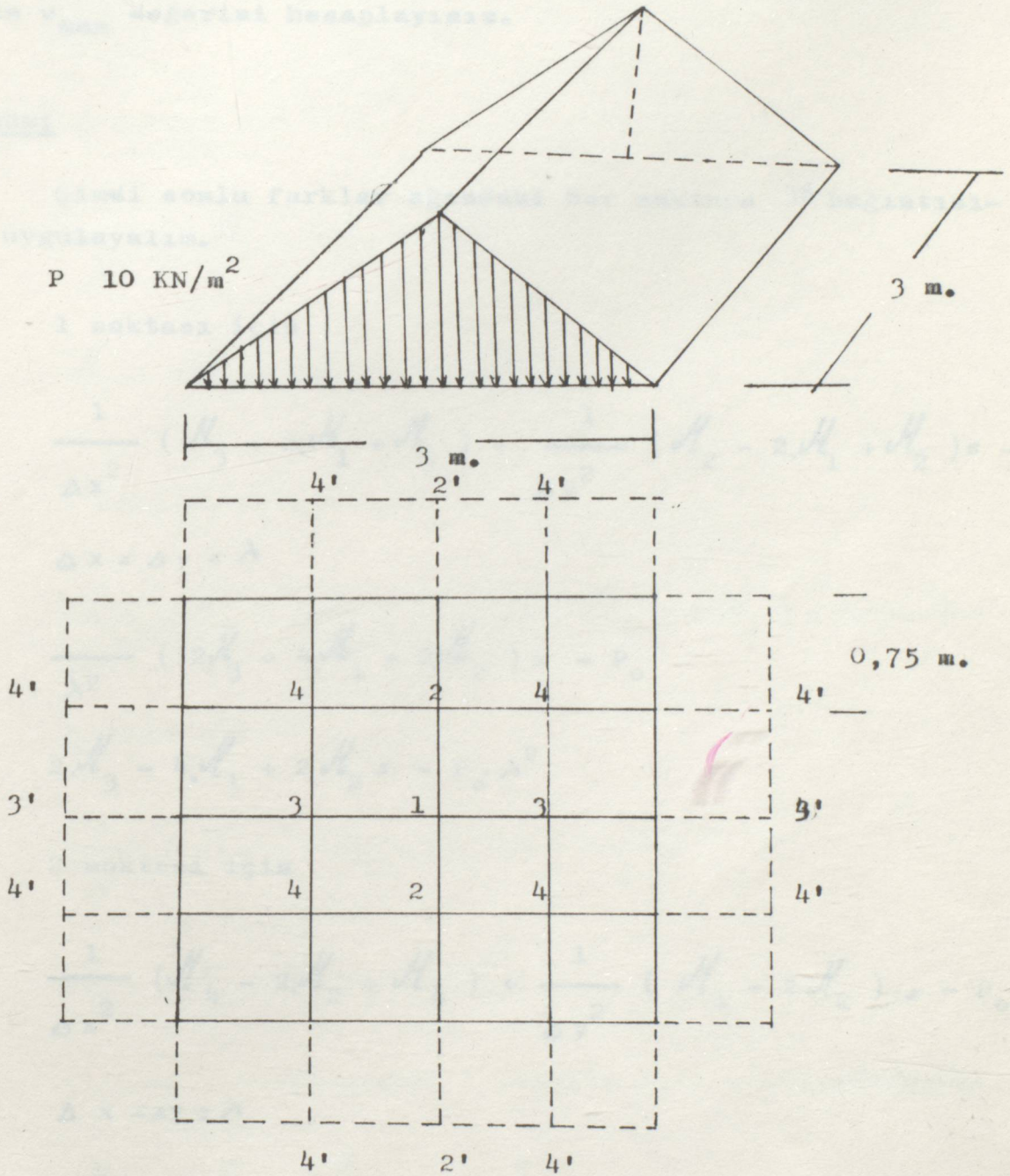
$$w_1 = 1,007 \cdot 1,152 = 1,160 \text{ cm.}$$

$$w_2 = 1,752 \cdot 1,152 = 2,018 \text{ cm.}$$

$$w_3 = 0,729 \cdot 1,152 = 0,840 \text{ cm.}$$

$$w_4 = 1,262 \cdot 1,152 = 1,454 \text{ cm.}$$

$$w_{\max} = w_2 = 2,018 \text{ cm.}$$

Örnek.

$$\Delta x = \Delta y = 0,75 \text{ m.}$$

$$d = 10 \text{ cm.}$$

$$E = 1000 \text{ KN/cm}^2$$

$$P = 10 \text{ KN/cm}^2$$

$$a = b = 3 \text{ m.}$$

Sınır şartı : Dört kenarda basit mesnetli.

İstenenler:

İki kademeli sonlu farklar denklemini uygulayarak M_0 için w_{\max} değerini hesaplayınız.

Çözüm:

Şimdi sonlu farklar ağındaki her noktaya 38 bağıntısını uygulayalım.

1 noktası için

$$\frac{1}{\Delta x^2} (M_3 - 2M_1 + M_3) + \frac{1}{\Delta y^2} (M_2 - 2M_1 + M_2) = -P_0$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (2M_3 - 4M_1 + 2M_2) = -P_0$$

$$2M_3 - 4M_1 + 2M_2 = -P_0 \lambda^2$$

2 noktası için

$$\frac{1}{\Delta x^2} (M_4 - 2M_2 + M_4) + \frac{1}{\Delta y^2} (M_1 - 2M_2) = -P_0$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (2M_4 - 4M_2 + M_1) = -P_0$$

$$2M_4 - 4M_2 + M_1 = -P_0 \lambda^2$$

3 noktası için

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\mathcal{M}_1 - 2\mathcal{M}_3) + \frac{1}{\Delta y^2} (\mathcal{M}_4 - 2\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_4) = - \frac{P_0}{2}$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (\mathcal{M}_1 - 4\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_4) = - \frac{P_0}{2}$$

$$\mathcal{M}_1 - 4\mathcal{M}_3 + 2\mathcal{M}_4 = - \frac{P_0 \cdot \lambda^2}{2}$$

4 noktası için

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\mathcal{M}_2 - 2\mathcal{M}_4) + \frac{1}{\Delta y^2} (\mathcal{M}_3 - 2\mathcal{M}_4) = - \frac{P_0}{2}$$

$$\Delta x = \Delta y = \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda^2} (\mathcal{M}_2 - 4\mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_3) = - \frac{P_0}{2}$$

$$\mathcal{M}_2 - 4\mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_3 = - \frac{P_0 \cdot \lambda^2}{2}$$

Böylece 4 bilinmeyenli 4 denklem elde etmiş oluyoruz.

$$2\mathcal{M}_2 + 2\mathcal{M}_3 - 4\mathcal{M}_1 = - P_0 \cdot \lambda^2$$

$$\mathcal{M}_1 + 2\mathcal{M}_4 - 4\mathcal{M}_2 = - P_0 \cdot \lambda^2$$

$$\mathcal{M}_1 + 2\mathcal{M}_4 - 4\mathcal{M}_3 = - P_0 \cdot \lambda^2 \quad \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3 - 4\mathcal{M}_4 = - P_0 \cdot \lambda^2 \quad \frac{1}{2}$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{16}$$

a Plak kenar uzunluğu olup bu denklem takımını çözer isek

$$M_1 = \frac{14}{256} \cdot P_0 \cdot a^2$$

$$M_2 = \frac{11}{256} \cdot P_0 \cdot a^2$$

$$M_3 = \frac{9}{256} \cdot P_0 \cdot a^2$$

$$M_4 = \frac{7}{256} \cdot P_0 \cdot a^2$$

olarak bulunur. Şimdide 39 nolu bağıntıyı uygulayarak w deplasmanlarını hesaplayalım.

1 noktası için

$$\frac{1}{\lambda^2} (2 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 - 4 \cdot w_1) = - \frac{P_0 \cdot a^2 \cdot 14}{256 \cdot D} = - \frac{M_1}{D}$$

2 noktası için

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_1 + 2 \cdot w_4 - 4 \cdot w_2) = - \frac{P_0 \cdot a^2 \cdot 11}{256 \cdot D} = - \frac{M_2}{D}$$

3 noktası için

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_1 + 2 \cdot w_4 - 4 \cdot w_3) = - \frac{P_0 \cdot a^2 \cdot 9}{256 \cdot D} = - \frac{M_3}{D}$$

4 noktası için

$$\frac{1}{\lambda^2} (w_2 + w_3 - 4w_4) = - \frac{7 \cdot P_0 \cdot a^2}{256 \cdot D} = - \frac{M_4}{D}$$

Bu denkle takımının çözümü ile

$$w_1 = 0,00293 \cdot \frac{P_0 \cdot a^4}{D}$$

$$w_2 = 0,00214 \cdot \frac{P_0 \cdot a^4}{D}$$

$$w_3 = 0,00202 \cdot \frac{P_0 \cdot a^4}{D}$$

$$w_4 = 0,00148 \cdot \frac{P_0 \cdot a^4}{D}$$

Olarak bulunur. Şimdi a 'yı ve

P_0 ile D değerlerini yerine koyarak w_{\max} değerini hesaplayalım.

$$D = \frac{E \cdot J}{1 - \mu^2} = \frac{1000 \cdot 10^3}{(1 - 0^2) \cdot 12} = 83333,33 \text{ KN cm.}$$

$$a = 300 \text{ cm.}$$

$$P_0 = 10 \text{ KN/cm}^2 = \frac{10}{10000} \text{ KN/cm}^2$$

$$w_1 = w_{\max} = 0,00293 \cdot \frac{10 \cdot (300)^4}{10000 \cdot 83333,33} = 0,285 \text{ cm.}$$

Bu şekilde diğer deplasman değerleri bulunabilir. Dolayısıyla istenen iç kuvvetleri hesaplayabiliriz.

Çözüm 2.

Aynı problemi normal sonlu farklar denklemini uygulayarak çözelim. Burada denklemin ikinci tarafındaki yük ifadesinin yerine uygulama noktasında bulunan yük değeri getirilecektir.

1 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_1 - 8.(2.w_3 + 2.w_2) + 2.(4.w_4) = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{D}$$

$$20.w_1 - 16.w_3 - 16.w_2 + 8.w_4 = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{D}$$

2 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_2 - 8.(2.w_4 + w_1) + 2.(2.w_3) + w_2 + w_2' = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{D}$$

$$20.w_2 - 16.w_4 - 8.w_1 + 4.w_3 + w_2 + w_2' = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{D}$$

$$w_2' = -w_2$$

$$20.w_2 - 16.w_4 - 8.w_1 + 4.w_3 = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{D}$$

3 noktası için sonlu farklar denklemi:

$$20.w_3 - 8.(2.w_4 + w_1) + 2.(2.w_2) + w_3 + w_3' = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$20.w_3 - 16.w_4 - 8.w_1 + 4.w_2 + w_3 + w_3' = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$w_3' = -w_3$$

$$20.w_3 - 16.w_4 - 8.w_1 + 4.w_2 = \frac{P_o \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$40.w_3 - 32.w_4 - 16.w_1 + 8.w_2 = \frac{P_0 \cdot \lambda^4}{D}$$

4 noktası için sonlu farklar denklemi.

$$20.w_4 - 8.(w_2 + w_3) + 2.w_1 + 2.w_4 + 2.w_4' = \frac{P_0 \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$20.w_4 - 8.w_2 - 8.w_3 + 2.w_1 + 2.w_4 + 2.w_4' = \frac{P_0 \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$w_4' = -w_4$$

$$20.w_4 - 8.w_2 - 8.w_3 + 2.w_1 = \frac{P_0 \cdot \lambda^4}{2.D}$$

$$40.w_4 - 16.w_2 - 16.w_3 + 4.w_1 = \frac{P_0 \cdot \lambda^4}{D}$$

Böylece 4 bilinmeyenli 4 denklem elde edilmiş oldu.

$$\frac{P_0 \cdot \lambda^4}{D} = a$$

Denklem takımının çözümü ile

$$w_1 = 0,749998.a$$

$$w_2 = 0,546873.a$$

$$w_3 = 0,515623.a$$

$$w_4 = 0,374999.a$$

$$w_1 = w_{\max} = 0,749998 \cdot \frac{10 \cdot (75)^4}{10000 \cdot 83333,33} = 0,284 \text{ cm.}$$

Burada görüldüğü üzere çözüm 1 ile çözüm 2 nin sonuçları aynı çıkmıştır.

MUKAYESE

Şimdiye kadar ince sehimli plak taşıyıcı elemanının sonlu farklar metodu ile çeşitli sınır şartları altında çözümünü gördük. Burada metoden yaklaşıklığını inceleyebilmek için kesin çözümle mukayesesini yapacağız.

Uygulama bölümünde incelediğimiz dört tarafından basit mesnetlenmiş plak taşıyıcı elemanının sonlu farklar ile bulunmuş w_{\max} değerini serilerle bulunmuş kesin çözümle mukayesesini yapalım.

$\Delta x = \Delta y = 1/4$ sonlu farklar ağı genişliği olması durumunda

Sonlu farklarla bulunmuş değer $w_{\max} = 0,3915$ cm.

$\Delta x = \Delta y = 1/8$ sonlu farklar ağı genişliği olması durumunda

Sonlu farklarla bulunmuş değer $w_{\max} = 0,3946$ cm.

Kesin çözüm (serilerle bulunmuş değer)

$$w_{\max} = 0,0041 \cdot \frac{P \cdot l^4}{D}$$

$$D = \frac{E \cdot J}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

$$D = \frac{1000 \cdot 10^3}{12 \cdot (1 - 0^2)} = 83333,33 \text{ KN cm}$$

$$w_{\max} = 0,0041 \cdot \frac{10 \cdot 300^4}{10000 \cdot 83333,33} = 0,3985 \text{ cm.}$$

1/4 ağ genişliyinde hata 0,007 cm.

1/8 ağ genişliğinde hata 0,0039 cm.

Burada görüleceği üzere ağ genişliğini küçülttüğümüz müddetçe hata miktarı azalmaktadır. Ağ genişliğini küçültmemizin mahzurlu yanı ise işlemleri artırması ve dolayısıyla işlemsel hataların artmasına neden olmaktadır.

Sonuç olarak şunu söyleyebiliriz, sonlu farklar metodunun uygulanmasını zorlaştıran nedenleri günümüzde bilgisayarlar bertaraf etmiş durumda. Ayrıca bu metodun programlama için gayet uygun bir metod olduğu rahatlıkla söylenebilir. İsteddiğimiz ölçüde ağ genişliğini az tutarak gerçek sonuca daha çok yaklaşıyoruz.

Ö Z G E Ç M İ Ş

1964 yılında Kilis de doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Kilis de tamamladım. 1980 yılında girdiğim Muhabere Astsubay Sınıf Okulundan, 1981 yılında foto-film uzman Astsubay olarak mezun oldum. 1982 yılında Yıldız Üniversitesi İnşaat fakültesi gece bölümüne girdim. Silahlı Kuvvetlerdeki vazifeme devam ederken 1987 yılında bu fakülteden mezun oldum ve Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat bölümü Yüksek lisans programına başladım. Bekarım ve İstanbulda oturuyorum.

A. Gillard, R., "Theory and Analysis of Plates", McGraw-Hill, INC., 1974.



K A Y N A K L A R

1. Köksal, E. , " Kabuklar " lisans Üstü ders notları.
2. Berdan, Y. , " Plak teorisi " lisans üstü ders notları.
3. Berktaş, İ. , " Plak teorisi ve uygulamaları " Y.Ü. İnşaat fakültesi, İstanbul 1988.
4. Szilard, R. , " Theory and Analysis of Plates " , Prentice-Hall, INC. , 1974.



