

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Önge, Ver, Plak Kıp, Öng,
Kuı, Son, Ele, Ettü.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mahmat Gülleryüz

1988

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNŞ
4000 TL

R 150
143

ÖNGERİLMELİ VEREV PLAK KÖPRÜLERDE
ÖNGERİLME KUVVETLERİNİN SONLU
ELEMENLARLA ETÜDÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞ.MÜH. MAHMUT GÜLERYÜZ

İSTANBUL-1988

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 150
143

Alındığı Yer : FEN. BİL. ENS.

Tarih : 15.10.1991

Fatura : - - - - -

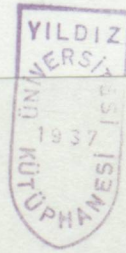
Fiyatı : 4000. TL.

Ayniyat No : 1/15

Kayıt No : 47735

UDC : 624.378.242

Ek :



İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1- ÖNGERİLMELİ

ÖNGERİLMELİ VEREV PLAK KÖPRÜLERDE
ÖNGERİLME KUVVETLERİNİN SONLU
ELEMENLARLA ETÜDÜ

1.1. Giriş

1.2. Düzlem

1.2.1. İspat

1.2.2. Analiz

1.2.3. Sonuç

1.3. Düzlem

1.4. Giriş

1.5. Giriş

1.6. Giriş

1.6.1. Giriş

BÖLÜM 2- ÖZGÜN

2.1. Giriş

2.2. Giriş

2.3. Giriş

2.4. Giriş

BÖLÜM 3- ÖZGÜN

3.1. Giriş

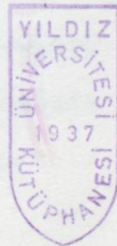
3.2. Giriş

3.3. Giriş

3.4. Giriş

3.5. Giriş

3.6. Giriş



YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞ.MÜH. MAHMUT GÜLERYÜZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Sayfa No

GİRİŞ

BÖLÜM 1- LEVHALARIN ELASTİSİTE TEORİSİ

1.1. Kabuller

1.2. Düzlem Gerilme Hali

1.2.1. İşaret Kabulü

1.2.2. Asal Gerilmeler

1.2.3. Düzlem Gerilme Halinin Diferansiel Denge
Denklemleri

1.3. Düzlem Şekil Değiştirme Hali

1.4. Gerilme Şekil Değiştirme Bağlıntıları

1.5. Levhanın Genel Denklemleri

1.6. AIRY Gerilme Fonksiyonları

1.6.1. Sınır Şartları

BÖLÜM 2- ÇÖZÜM METODLARI

2.1. Polinomlarla Çözüm

2.2. Koordinat Değiştirmek

2.3. Fourier Serileri ile Çözüm

2.4. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm

BÖLÜM 3- VEREV LEVHALAR

3.1. Genel Bilgi

3.2. Verev Levhaların Diferansiel Denkleminin Elde edilmesi

BÖLÜM 4- SONLU ELEMANLAR METODU

4.1. Genel Bilgi

4.2. Genel Bağlıntılar

4.2.1. Deformasyonlar

4.2.2. Gerilmeler	34
4.2.3. Deplasman Fonksiyonu	34
4.3. Levha Probleminin Deformasyon Durumu	34
4.4. Levhalarda Üçgen Sonlu Eleman	35
4.4.1. Deplasman Fonksiyonu	36
4.4.2. (B) Matrisinin Hesabı	37
4.4.3. Elastisite Matrisi	38
4.4.4. Rijitlik Matrisi	38
BÖLÜM 5- VEREV LEVHALARIN SONLU ELEMANLARLA ÇÖZÜMÜ	39
BÖLÜM 6- SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI	54

ÖZGEÇMİŞ

KAYNAKLAR

Ö Z E T

Bu çalışmada birinci bölümde levhaların elastisite teorisi kısaca gözden geçirilmiştir: buradan hareketle AIRY gerilme fonksiyonları ile çözümün nasıl yapıldığı incelenmiştir. Daha sonra ise çeşitli çözüm metodları kısaca gözden geçirilerek bunlar hakkında çok kısa bilgi verilmiş, üçüncü bölümde de verev levhaların teorisi incelenmiş, genel denklemleri ve dönüşüm formülleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise sonlu elemanlar metodu incelenmiştir.

Örnek olarak bir verev levhanın gerilme durumu çeşitli yük durumları ve çeşitli verevlik açıları altında üçgen sonlu eleman kullanılarak çözülmüştür. Çözüm için hazırlanan programla bilgisayarda yapılan hesap sonucu alınan çıkışlara göre diyagramlar çizilmiştir.

SUMMARY

In the first part of this study the theory of elasticity of plates has been reviewed shortly, moving from that point onto how this solution is made with AIRY stress functions has been examined after that various solution methods have been reviewed shortly and very little piece of information about these has been given, in the third part the theory of oblique plates has been examined, general equations and transformation formulas have been given. In the fourth part the finite element method has been given.

As an example stress state of an oblique plate has been solved. In different load positions and in obliqueness angles, using the triangle finite element. Diagrams have been drawn as a result of the calculations which were made by the help of a computer programme prepared for this solution.

GİRİŞ

Pratikte oldukça fazla uygulamaya alan olan sığırta bulunması gereken verilerin hesaplanmasında diğer yüklerden dolayı plastik davranışının yanında, diğer taraftan kuvvetlerinden dolayı lezha davranışının da mevcuttur.

Bu konuda yapılan çalışmalar oldukça sınırlı olup, bulunan denklemlerle ise ancak çok basit yükler için çözüm bulunabilmektedir. Son yıllarda bilgisayarların kullanılmasıyla oldukça geniş bir uygulama alanı

Bu tezin hazırlanmasında yol gösteren Sayın Hocam Prof.Dr.Hüseyin S.CELASUN'a saygı ve şükranlarımı sunarım.

Scada sistemi tarafından lezha sonuçları elde edilmiş farklı sığırta bulunan lezha sonuçları hakkında yapılan iç kuvvetleri, elemanların birleşimi, diğer taraftan diğer tarafta etkilenen bir fiziksel kuvvetler sistemi ile çalıştırılmıştır. Bu durumda takımın pozisyonu ile deplasmanlar ve kuvvetler hesaplanmıştır.

Bu çalışmada Scada sonuçları elemanlar kullanılarak veriler lezha sonuçları elde edilmiş program yardımı ile elde edilmiş ve diyagramlar çizilmiştir.

NOTASYONLAR

GİRİŞ

Pratikte oldukça fazla uygulama alanı olan öngerilmeli verev plak köprülerde düşey yüklerden dolayı plak çalışmasının yanında, öngerilme kuvvetlerinden dolayı levha çalışması da mevcuttur.

Bu konuda yapılan çalışmalar oldukça sınırlı olup, bulunan denklemlerle ise ancak çok basit yüklemeler için çözüm bulunabilmiştir. Son yıllarda bilgisayarların gelişmesiyle oldukça geniş bir uygulama alanı bulunan sonlu elemanlar metodu kullanılarak bu problemi çözmek mümkün olmaktadır.

Sonlu eleman metodunda levha sonlu sayıda elemana bölünmüş farzedilip eleman kenarları üzerinde yayılı iç kuvvetleri elemanların birleştiği düğüm noktası denen noktalara etkiyen bir fiktif kuvvetler sistemi ile temsil edilir. Bu denklem takımının çözümü ile deplasmanlar ve gerilmeler hesaplanabilir.

Bu çalışmada üçgen sonlu eleman kullanılarak verev levha gerilmeler bilgisayar programı yardımı ile elde edilmiş ve diyagramlar çizilmiştir.

NOTASYONLAR

- d : Levha kalınlığı
- $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: Gerilme bileşenleri
- σ_1, σ_2 : Asal normal gerilmeler
- τ_{\max}, τ_{\min} : Asal kayma gerilmeleri
- u, v : Deplasman bileşenleri
- ψ : Kesit normalinin yatayla yaptığı açı
- E : Elastisite modülü
- G : Kayma modülü
- ν : Poisson oranı
- $F(x,y)$: Airy gerilme fonksiyonu
- q_x, q_y : Sınırdaki gerilme bileşenleri
- $\{F\}^e$: Eleman düğüm noktası kuvvetleri
- $\{\delta\}^e$: Eleman düğüm noktası deplasmanları
- $[k]^e$: Eleman rijitlik matrisi
- $[N]$: Şekil fonksiyonları

BÖLÜM 1

LEVHALARIN ELASTİSİTE TEORİSİ

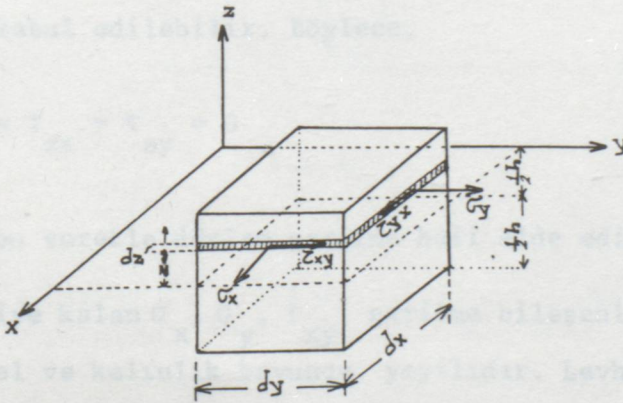
Kendi düzlemindeki kuvvetlerin etkisi altında bulunan ve orta yüzeyi deformasyondan sonra yine düzlem kalan bir taşıyıcı sisteme levha denir.

1.1. KABULLER

a) Malzeme: Cismi homogen izotrop ve sürekli bir ortam ve hooke cismi olarak kabul ediyoruz.

b) Kuvvetler: Levhanın kenarına tesir eden dış kuvvetlerin ortalama düzleme paralel doğrultuda oldukları, bileşkelerin bu düzlemde bulunduğu, hacme tesir eden kuvvetlerin de aynı karakterde olduğu kabul edilmektedir.

Levhanın "h" kalınlığı sabittir. Yer ve şekil değiştirmeler cismin boyutları yanında çok küçüktür. Birinci mertbe teorisi, süperpozisyon prensibi geçerli.

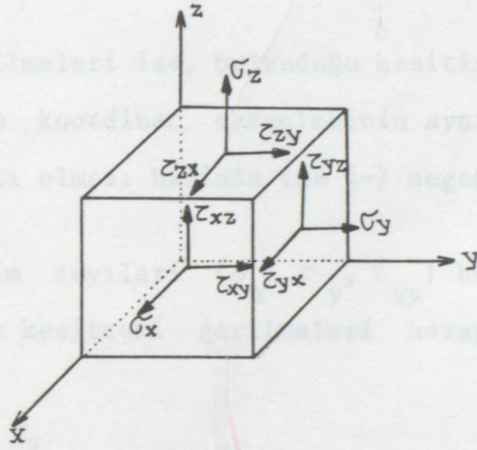


Şekil- 1

Levha noktaları, (x,y) düzlemi levhanın orta düzlemiyle çakışan, bir dik (x, y, z) koordinat eksen takımına göre verilmektedir.(Şekil 1).

1.2. DÜZLEM GERİLME HALİ

Levha kendi arasında dengede olan bir takım kenar kuvvetleriyle yüklüdür. Eğer $z = \pm \frac{1}{2} h$ sınır yüzlerinde dış kuvvet yoksa bu durumda σ_z , τ_{zx} ve τ_{zy} gerilme bileşenleri sıfır etmek zorundadır.(Şekil-2).



Şekil- 2

Levha kalınlığı (h) çok küçük ise levha yüzeyinde sıfır olan bu gerilme bileşenlerinin levha içinde de ihmal edilebilecek kadar küçük kaldığı kabul edilebilir. Böylece,

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

olur ve bu suretle düzlem gerilme hali elde edilir.

Geriye kalan σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilme bileşenleri levha orta düzlemine paralel ve kalınlık boyunca yayılıdır. Levha kalınlığı diğer iki boyut yanında ihmal edilebilecek mertebede olduğu için, bu gerilmelerin bütün "h" kalınlığı boyunca düzgün yayıldığı kabul edilebilir. Bu durumda hesaplar gerilmelerin ortalama değerine göre yapılmış olur.

σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri bir (x,y) noktasında biliniyorsa bu noktadan geçen bütün kesitlerde gerilmeler hesaplanabilir.

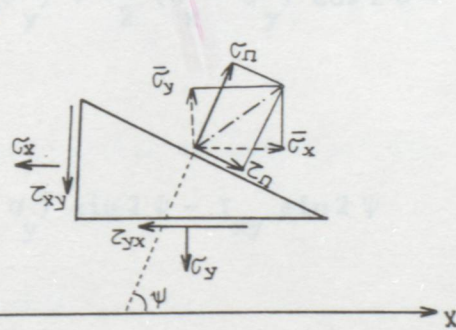
Bu nedenle σ_x , σ_y ve τ_{xy} düzlem gerilme halinin belirtim sayı- larıdır.

1.2.1. İŞARET KABULÜ

σ normal gerilmeleri dış normal yönünde (çekme) ise (+) pozitif, ters yönde ise (basınç) negatif kabul edilecektir.

τ kayma gerilmeleri ise, bulunduğu kesitin dış normali yönü ve kendi ikisi birden koordinat eksenlerinin aynı veya zıt yönünde ise (+) pozitif, farklı olması halinde ise (-) negatif kabul edilecektir.

Şimdi belirtim sayıları (σ_x , σ_y , τ_{xy}) belli olan bir noktadan geçen herhangi bir kesitteki gerilmeleri hesaplayalım (Şekil-3).



Şekil- 3

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cos \psi + \tau_{xy} \sin \psi$$

$$\bar{\sigma}_y = \tau_{xy} \cos \psi + \sigma_y \sin \psi$$

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_x \cos \psi + \bar{\sigma}_y \sin \psi$$

$$\tau_n = \bar{\sigma}_x \sin \psi - \bar{\sigma}_y \cos \psi$$

Buradan ;

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \psi + \sigma_y \sin^2 \psi + 2 \tau_{xy} \sin \psi \cos \psi$$

(1.1)

$$\tau_n = \tau_{xy} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) + (\sigma_x - \sigma_y) \sin \psi \cos \psi$$

1.2.2. ASAL GERİLMELER

ψ açısı değiştikçe σ ve τ gerilmeleri değişir. Şimdi σ ve τ gerilmelerinin ekstrem değerlerini ve bu değerleri veren kesit doğrultularını bulalım. Bunun için (1.1) formüllerine

$$\cos^2 \psi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \psi) \quad , \quad \sin^2 \psi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \psi)$$

$$\sin \psi \cos \psi = \frac{1}{2} \sin 2 \psi$$

Trigonometrik dönüşümlerini uygularsak

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2 \psi + \tau_{xy} \sin 2 \psi \quad \dots (1.2)$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2 \psi - \tau_{xy} \sin 2 \psi$$

σ_{\max} ve σ_{\min} için :

$$\frac{d\sigma_n}{d\psi} = 0$$

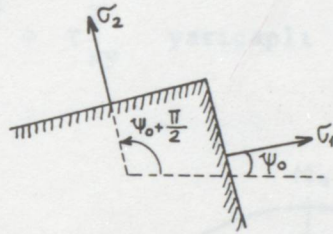
$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2 \psi + 2 \tau_{xy} \cos 2 \psi = 0$$

$$\operatorname{tg} 2 \psi = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

bulunur.

(1.3) ifadesi aynı zamanda $\tau = 0$ şartından da bulunabilir. Bu ifadeyi sağlayan farklı ve (ψ_0) ve $(\psi_0 + \pi/2)$ ile tarif edilen iki kesit vardır. Bu kesitlere asal normal kesitler ve bunlar üzerindeki değerlere de asal normal gerilmeler denir.

(1.3) ifadesini (1.2) ifadelerinde yerine koyacak olursak σ_1 ve σ_2 ile gösterilen asal normal gerilmeleri buluruz. (Şekil- 4)



Şekil- 4

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \dots (1.4)$$

τ 'nin ekstrem olduğu kesitler ve değerleri ise ;

$$\frac{d\tau}{d\psi} = 0 \quad \text{şartından}$$

$$2\tau_{xy} \sin 2\psi + 2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\psi = 0$$

$$\text{tg } 2\psi = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad \text{bulunur.}$$

Asal kayma gerilmeleri ise ;

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \dots (1.5)$$

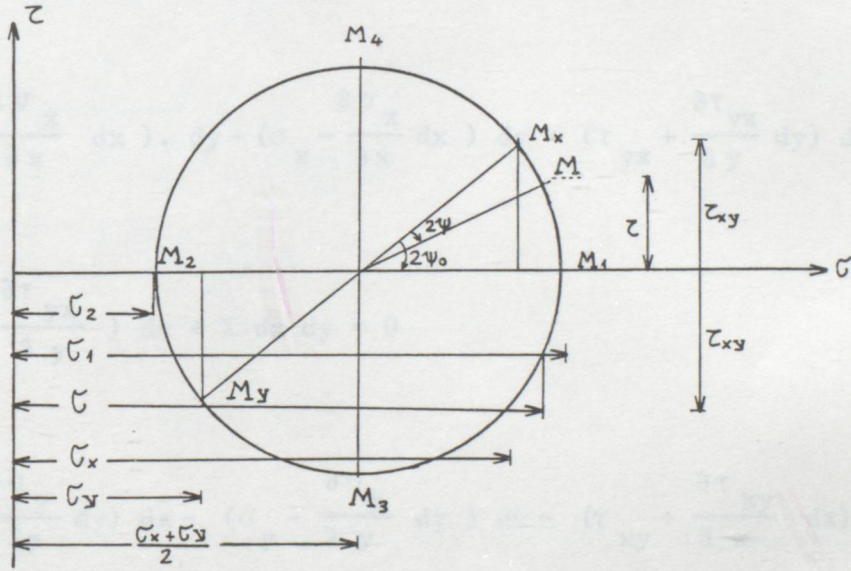
(1,2) denklemlerinden (2ψ) açısı yok edilerek,

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Mohr dairesi denklemi elde edilir.

Bu denklem (σ, τ) eksen takımında

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \text{ yarıçaplı bir daire gösterir. (Şekil-5)}$$

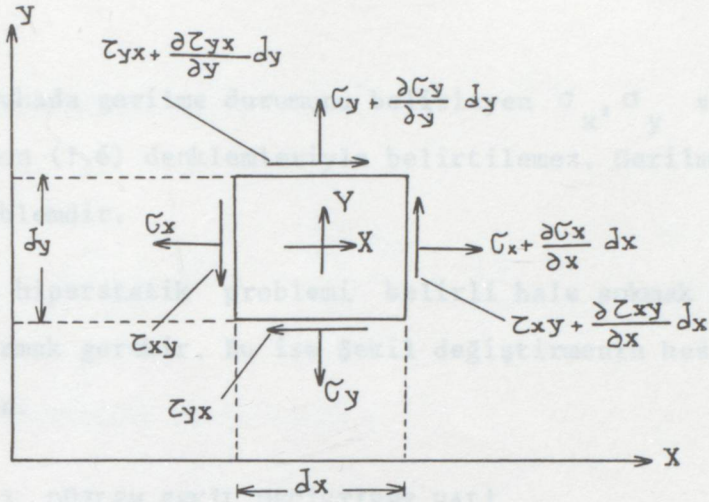


Şekil- 5

Eleman üzerindeki kesitler ψ açısıyla artı yönde dönerken, mohr dairesi üzerinde ters yönde dönerler.

1.2.1. DÜZLEM GERİLME HALİNİN DİFERANSİEL DENGE DENKLEMLERİ

Levhanın hacmine etkiyen hacımsal dış kuvvetlerin birim hacme isabet eden şiddetleri x, y eksen takımında X ve Y koordinatları ile verilmiş olsun. (Şekil- 6)



Şekil- 6

$$\Sigma X = 0 \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy - \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx + X dx dy = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \left(\sigma_y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + Y dx dy = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

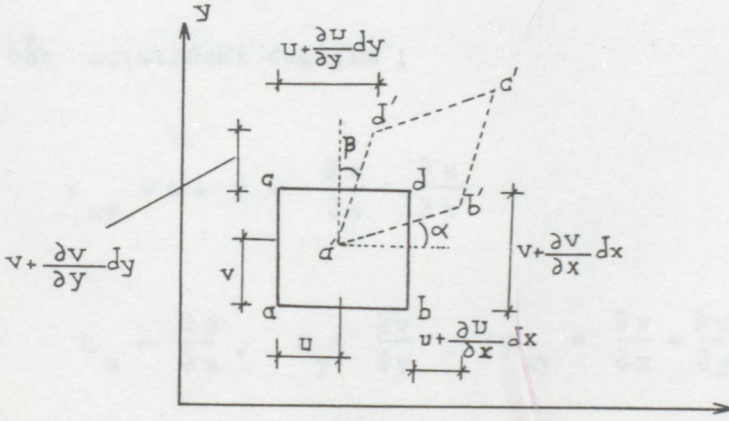
..... (1.6)

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Levhada gerilme durumunu belirleyen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gibi üç fonksiyon (1.6) denklemleriyle belirtilemez. Gerilme hali hiperstatik bir problemdir.

Bu hiperstatik problemi belirli hale sokmak için bir denklem daha kurmak gerekir. Bu ise Şekil değiştirmenin hesaba katılmasıyla olabilir.

1.3. DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ



Şekil- 7

Şekil değiştirme önceden seçilmiş bir uzunluktaki değişme veya seçilen bir açıdaki açı değişimidir,

Şekil-7'de alınan ve boyutları dx , dy olan bir $abcd$ dikdörtgeni deformasyonundan sonra $a'b'c'd'$ paralel kenarına dönüşecektir. Yer değiştirmenin x, y eksenleri doğrultularındaki bileşenleri u, v olsun.
 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$

Şimdi x ve y yönlerindeki birim uzamaları ve açı değişimini hesap edelim.

x doğrultusundaki birim uzama :

$$\epsilon_x = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

y doğrultusundaki birim uzama ;

$$\epsilon_y = \frac{a'c' - ac}{ac} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

γ_{xy} açısındaki değişim ;

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots\dots(1.7)$$

(1.7) denklemleri birbirine bağlanırsa ;

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \quad \dots\dots (1.8)$$

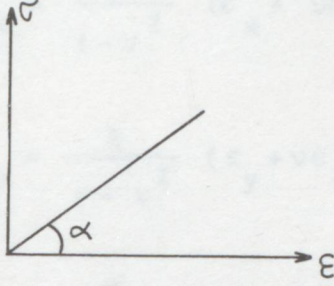
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \quad \dots\dots (1.9)$$

(1.8) ve (1.9) denklemlerinin sağ tarafı aynıdır. Sol taraflarını eşitleyerek

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad \dots\dots (1.10)$$

uygunluk şartı elde edilir.

1.4. GERİLME-ŞEKİLDEĞİŞTİRME BAĞINTILARI



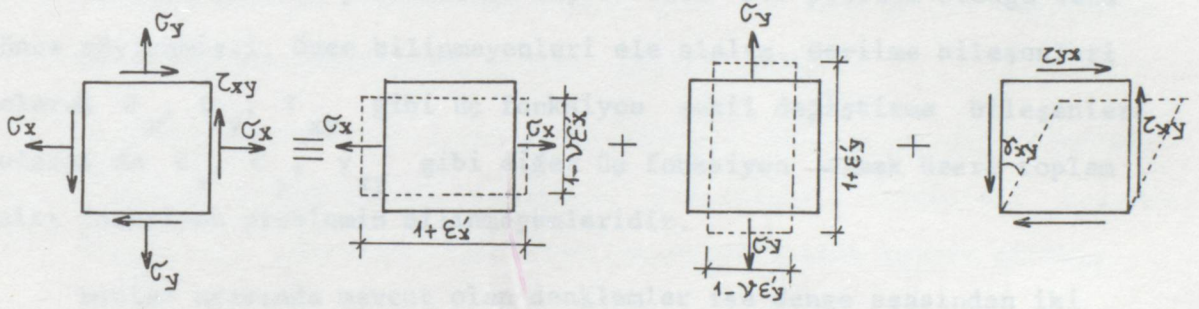
$$\operatorname{tg} \alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad \dots (1.11)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Şekil- 8

Düzlem gerilme durumunda ;



Şekil- 9

Süperpozisyon prensibine göre ;

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x - \nu \varepsilon'_y \quad \text{ve} \quad \varepsilon_y = \varepsilon'_y - \nu \varepsilon'_x \quad \text{olur.}$$

(1.11) 'den

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

..... (1.12)

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \text{bulunur.}$$

Gerilmeleri şekil değiştirmelere göre hesaplırsak ;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad \dots\dots(1.13)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

1.5. LEVHANIN GENEL DENKLEMLERİ

Levhada gerilme probleminin hiperstatik bir problem olduğu daha önce söylenmişti. Önce bilinmeyenleri ele alalım. Gerilme bileşenleri olarak σ_x , σ_y , τ_{xy} gibi üç fonksiyon şekil değiştirme bileşenleri olarak da ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} gibi diğer üç fonksiyon olmak üzere toplam altı fonksiyon problemin bilinmeyenleridir.

Bunlar arasında mevcut olan denklemler ise denge esasından iki tane (1.6) denklemleri :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

Şekil değiştirme bileşenlerinin aralarındaki uygunluğu gösteren bir tane (1.10) denklemi :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Gerilme ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntıyı ifade eden üç adet hooke kanunları (1.13)

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

Böylece altı bilinmeyene karşılık altı denklem elde edilmiş olup, hiperstatik olan problem belirli hale gelmiştir.

Problemin bilinmeyenleri arasına yukarıda sayılan altı fonksiyondan başka bir de $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ gibi iki tane de yer değiştirme bileşeni sokulursa bilinmeyen sayısı sekize çıkar.

Bu durumda problemi belirli şekle sokmak için yukarıdaki denklemlerden başka yerdeğiştirme ile şekil değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntıları gösteren (1.7) denklemlerini hesaba katmak gerekir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Bu denklemlerin hesaba katılmasıyla denklem sayısı dokuzaya çıkmıştır. Fakat (1.7) denklemleri dikkate alındığında (1.10) denklemini hesaba katmamak gerekir. Çünkü bu (1.7) denklemlerinden türetilmiş bir uygunluk şartıdır. Böylece sekiz denklem kalmış olur.

Şu halde levha problemi en geniş haliyle sekiz bilinmeyenli bir problemdir. Fakat sekiz bilinmeyenli bir problemi çözmek çok zaman alıcı

bir iştir. Bu nedenle hesaplarda sadeliği sağlamak amacıyla denklemler arasında bazı bilinmeyenleri yok etmek ve problemi daha az bilinmeyenli bir problem haline getirmek mümkündür.

Bunlar arasında en önemlileri şunlardır.

- Gerilme problemi: σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri esas alan üç bilinmeyenli problemdir.

- Yer değiştirme problemi: u ve v yer değiştirme bileşenlerini esas alan iki bilinmeyenli problemdir.

1.6. AIRY GERİLME FONKSİYONLARI

Uygulamada sınır şartları genellikle gerilme tipinden verilir. Sınır şartlarının gerilme tipinden verilmesi durumunda problemi gerilme problemi olarak ele almak daha uygun olur.

Gerilme problemi AIRY gerilme fonksiyonu adı verilen $F(x,y)$ gibi çift değişkenli bir fonksiyonu hesaba katmakla çok sadeleşir. Bütün problem bu $F(x,y)$ fonksiyonunun belirtilmesine indirgenebilir.

$F(x,y)$ fonksiyonlarının sürekli ve türevlerinin mevcut olduğunu kabul ediyoruz. Bu fonksiyonun hesabına geçmeden önce gerilme probleminin genel denklemlerini bulalım.

Bunun için (1.10) ile (1.12) denklemleri arasındaki şekil değiştirme bileşenlerini yok edersek

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \dots(1.14)$$

şeklinde sadece gerilmelere bağlı bir uygunluk denklemi elde ederiz. Denklemin sağ tarafındaki τ_{xy} kayma gerilmesini (1.6) denklemlerinden faydalanarak yok edebiliriz. Bu amaçla (1.6) denklemlerinin

sırayla x ve y 'ye göre türevlerini alalım.

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Bu denklemleri toplarsak :

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad \dots \quad (1.15)$$

(1.14) ve (1.15) denklemlerinden τ_{xy} 'yi yok edersek ;

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (1.16)$$

denklemini buluruz.

(1.16) denklemini laplace operatörü ile gösterirsek ;

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad \dots \quad (1.17)$$

gerilme probleminin denklemleri (1.17) ve (1.6) denklemleridir.

Bu denklemleri belirledikten sonra $F(x,y)$ fonksiyonunun hesabına geçelim.

Önce özel bir hal olan kitle kuvvetlerinin sıfır olması durumunu ele alalım.

1) $X = 0$ $Y = 0$ hali :

Bu durumda gerilme probleminin denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.18)$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{dir.}$$

Hesaplamak istediğimiz $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ fonksiyonlarının, $F(x,y)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri olduğunu kabul edelim.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1.19)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

İlk iki denklemi (1.18) denklemlerinin üçüncüsünde yerine koyacak olursak;

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \Delta F$$

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = \Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \quad \dots\dots (1.20)$$

bulunur.

Gerilme probleminin çözümü verilen sınır şartlarını sağlamak şartıyla (1.20) denklemini sağlayan $F(x,y)$ fonksiyonunun bulunmasına indirgenmiş olur.

$$2) X = X_0, \quad Y = Y_0 \quad (\text{Sabit}) \text{ hali :}$$

Bu halin gerilme denklemleri ise ;

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X_0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y_0 = 0 \quad \dots (1.21)$$

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{olur.}$$

Denge denklemlerinin sağlanması için (1.19) denklemlerinde şu küçük değişikliği yapalım.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - X_0 x$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - Y_0 y \quad \dots (1.22)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Buna göre uygunluk denklemi :

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - (X_0 x + Y_0 y)$$

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = \Delta \Delta F = 0 \quad \text{olur.}$$

Görüldüğü gibi sabit hacim kuvvetleri halinde son diferansiyel denklem hacim kuvvetlerinin sıfır olması durumundaki denklemin aynıdır. Yalnız gerilmeler hesaplanırken ilave terimler gelmektedir.

3) Değişken Hacim Kuvvetleri Hali :

Bu hacim kuvvetlerinin $v(x,y)$ ile gösterilen bir potansiyeli bulunsun.

$$X = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Denge denklemlerinin sağlanması için (1.19) denklemlerine benzer şekilde ;

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + v$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + v$$

..... (1.23)

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

olarak seçelim.

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

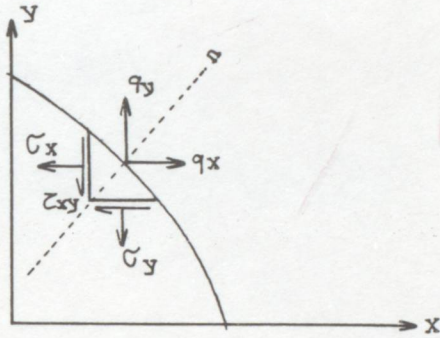
$$\Delta \Delta F = -(1 - \nu) \Delta v \quad \text{bulunur.}$$

1.6.1. Sınır Şartları

Ayrı fonksiyonlarıyla çözümde tek bilinmeyen olan $F(x,y)$ fonksiyonunu bulmak gerekmektedir. (1.20) denklemini sağlayan birçok $F(x,y)$ fonksiyonu bulmak mümkündür. Burada esas zorluk verilen sınır

sınır şartlarını sağlayan fonksiyonun bulunmasıdır. Çünkü belirli bir problemi için $F(x,y)$ fonksiyonu bir tanedir.

Şimdi sınır şartlarını da hesaba katmak için birim kenar boyuna gelen kenar kuvvetlerinin bileşenlerini q_x ve q_y ile gösterecek olursak ,



Şekil- 10.

$$q_x ds = \sigma_x dy - \tau_{xy} dx$$

$$q_y ds = \tau_{xy} dy - \sigma_y dx$$

her tarafı ds ile bölersek

$$q_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

$$-q_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

bulunur.

s kenar uzunluğu boyunca integrasyon yapılırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s q_x ds + c_2$$

.... (1.25)

$\frac{\partial F}{\partial x}$ s

Bu denklemlerdeki sabitlerin sonuca bir etkisi yoktur, bu nedenle dikkate alınmayabilir. İntegraller ise ;

$$\int_0^s q_x ds = Q_x (s) \quad \dots (1.26)$$

$$\int_0^s q_y ds = Q_y (s)$$

(1.25) ve (1.26) dan aranan sınır şartları

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q_x \quad \dots (1.27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -Q_y$$

olarak bulunur.

Şimdi $F(x,y)$ fonksiyonunun sınırdaki değerini arayalım :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

tam diferansielinden ve (1.27) şartlarından

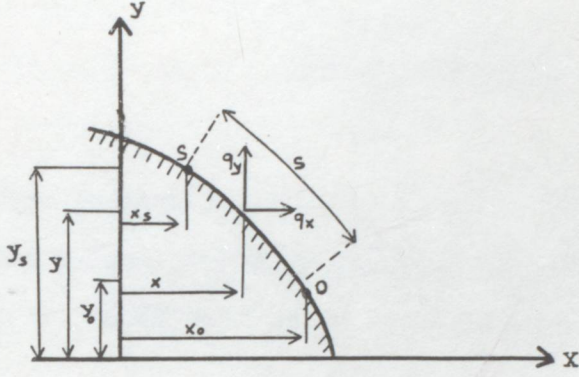
$$F = \int_0^s (Q_x dy - Q_y dx) \quad \text{elde edilir.}$$

Kısmi integrasyonla :

$$F = \left[(Q_x y)_s - (Q_y x)_s - \int_0^s (y dQ_x - x dQ_y) \right]$$

Q kesme kuvvetinin bileşenleri ve türevlerini (1.25) yardımıyla q_x ve q_y yük bileşenleri cinsinden ifade edersek

$$F = \left[\int_0^s q_x (y_s - y) ds + \int_0^s q_y (x - x_s) ds \right]$$



Şekil- 11.

Köşeli parantez içindeki ifade şekilde "s" kenar uzunluğu boyunca tesir eden kenar yüklerinin s kenar noktasına göre momentidir.

$$F(s) = M(s)$$

BÖLÜM 2

ÇÖZÜM METODLARI

Airy gerilme fonksiyonuyla ifade edilen levha problemlerinin kesin çözümünü bulmak çok zaman mümkün olmaz. Bir çok halde yaklaşık çözümle yetinilir. Bu bölümde çözüm metodlarından bazıları kısaca incelenecektir.

2.1. POLİNOMLARLA ÇÖZÜM

Bu çözüm metodunda $\Delta\Delta F=0$ denklemini ve problemin sınır şartlarını sağlayan $F(x,y)$ fonksiyonu aranır. $\Delta\Delta F=0$ denklemini sağlayan bir çok polinom vardır. Hem denklemini hem de sınır şartlarını sağlayan polinom ise tektir. Bu durumda en büyük güçlük sınır şartlarını sağlayan polinomu bulmaktır.

Bazı problemlerde sınır şartlarını sağlayan polinomu bulmak mümkün olduğu halde, çoğu zaman sınır şartları sağlanamaz. Bu durumda yaklaşık çözümlerle yetinilir. Şimdi yaklaşık çözümlerden bazıalarını inceleyelim.

a- Sınır Şartlarında Değişiklik Yapmak

Birçok problemde basit çözüm elde etmek için, sınırda küçük bir bölgeye etkiyen kuvvetleri, statik eşdeğerleriyle değiştirmek icap eder. Böyle hallerde gerilme alanında önemli değişmeler, yalnız bu küçük sınır bölgesinin civarında olur. Buradan uzaklaştıkça farklar önemli olmaz.

b- Levha Denklemini Sağlayan, Sınır Şartlarını Sağlamıyan Fonksiyonlar :

Levha denkleminin uygun olarak seçilen $\psi(x,y)$ özel integrallerinden :

$F = \sum_n a_n \psi_n(x,y)$, ($n=1,2,3,\dots,r$) (2,1) şeklinde bir ifade tesis edilir. Buradaki $\psi(x,y)$ fonksiyonları, problemin sınır şartlarını mümkün mertebe sağlayacak şekilde seçilir. a_n sayıları ise o şekilde tayin edilir ki; geri kalan, yani ifadenin sağlayamadığı sınır şartları yine mümkün olduğu kadar gerçekleştirilsin. Bu ise karesel hata toplamının en küçük değeri olmasıyla olur.

Örnek olarak bütün sınır şartlarının sağlanması esnasında sadece bir "s" kenar uzunluğu boyunca mevcut olan normal gerilmelerin önceden verilmiş belli bir σ değerine yaklaşması isteniyorsa bu takdirde (2.1) çözüm ifadesinden bu kenar gerilmesinin yaklaşık $\bar{\sigma}$ değeri tayin edilecek olan a_n sayılarının bir fonksiyonu olarak elde edilir. Bunun için ise ;

$$\int_0^s (\sigma - \bar{\sigma})^2 ds = \text{Min} \text{ olması istenir.}$$

Bu takdirde ise şartlar :

$$\frac{\partial}{\partial a_n} \int_0^s (\sigma - \bar{\sigma})^2 ds = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

Bu şekilde a_n bilinmeyenlerinin sayısı kadar denklem elde edilir. Elde edilen denklem takımı homojen olmayıp tek değerli çözüm verir. Bulunan a_n katsayıları (2.1) denkleminde yerine konarak aranan $F(x,y)$ fonksiyonu bulunmuş olur.

c- Sınır Şartlarını Sağlayan, Levha Denklemini Sağlamayan Fonksiyonlar :

Bu durumda $F = \sum_n a_n \psi_n(x,y)$ ($n=1,2,\dots,r$) çözüm ifadesinden hareket edilir.

$\Delta \Delta F \neq 0$ ise, $\Delta \Delta F$ doğrudan doğruya bir hata karakterize eder. Buna göre karesel hata toplamının minimum olmasını ifade eden

$$\int_f (\Delta\Delta F)^2 df = \text{Min}$$

şartından a_n değerleri tayin edilir. Burada integral bütün j levha bölgesi boyunca alınmaktadır. a_n değerlerinin tayin edilebilmesi için lüzumlu denklemler :

$$\int_f (\Delta\Delta F) \frac{\partial(\Delta\Delta F)}{\partial a_n} df = 0$$

şartlarından bulunurlar.

2.2. KOORDİNAT DEĞİŞTİRMEK

Sınır şartlarını daha kolay ve basit şekilde ifade edebilmek için verilen bölgenin çevresine uygun düşecek koordinat sistemi seçilmesi gerekebilir.

Mesela dikdörtgen bölge için kartezyen sistem elverişli olduğu halde, dairesel çevreler için polar koordinatlardan faydalanmak gerekir. Diğer çevre şekillerinde ise eğik, eliptik, hiperbolik vs. gibi koordinatlarla problemi formüle etmek çözümde önemli kolaylıklar sağlar.

2.3. FOURIER SERİLERİ İLE ÇÖZÜM

Sınır şartlarına uymakta görülen zorluğu yenmek için şöyle hareket edilebilir.

Önce verilen ve keyfi şekilde dağılı bulunan levha sınırındaki kuvvetler, Fourier açılımına tabi tutularak dairesel periodik fonksiyonların toplamıyla ifade edilir. Sonra elde edilen serinin her terimine tekabül eden kısmi yüklemeye ait çözümler bulunur. Sonuç olarak bu kısmi çözümler toplanarak asıl probleme ait cevap bulunur.

Kısmi yüklemeler dairesel fonksiyonlar olduğu için bunlara ait gerilme alanının belirtilmesi oldukça basit bir problemdir.

2.4. SONLU FARKLAR METODU İLE ÇÖZÜM

Levha problemlerinin çok defa kesin ve kapalı çözümleri yoktur. Sonlu farklar metodu, yaklaşık-çözümlerden sınır şartlarını kesin olarak çözen ve diferansiel denklemin sağlanmasıyla yaklaşıklık kabul eden gruba girer.

Metodun dayandığı esas, diferansieller yerine sonlu farkları alarak, problemin diferansiel denklemini, fonksiyonun ayrık noktadaki değerleriyle yaklaşık olarak ifade etmektir.

2.5. SONLU ELEMANLAR METODU

Sonlu elemanlar metodunda levha sonlu sayıda elemana bölünür. Eleman içinde yayılı bulunan iç kuvvetlerin elemanların birleştiği düğüm noktalarına etkidiği düşünülür. Yapılan çözüm sonunda bu düğüm noktalarındaki deplasmanlar ve iç kuvvetler bulunur. Eleman sayısı arttırıldıkça gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilir.

Sonlu elemanlar metodu bundan sonraki bölümde daha ayrıntılı olarak incelenecektir.

BÖLÜM 3

VEREV LEVHALAR

3.1. GENEL BİLGİ

Levha teorisi üzerinde yapılan çalışmalarda verev levhalar üzerinde pek az araştırma yapılmıştır. Verev köprü sayısı oldukça fazladır. Öngerilmeli olarak yapılan verev plak köprülerde plak çalışmasının yanında öngerilme kuvvetlerinden dolayı levha çalışması da mevcuttur. Bu bölümde verev levhaların teorisi incelenecektir.

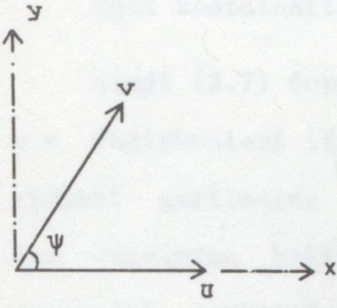
3.2. VEREV LEVHALARIN DİFERANSİEL DENKLEMİNİN ELDE EDİLMESİ

Levhaların dikdörtgen, daire veya elips olmaları birçok teorik çalışmanın konusu olmuştur. Verev levha problemi şimdiye kadar çok az araştırmacı tarafından incelenmiştir. Burada Favre tarafından yapılan çalışmada verev plak için bulunan denklemlerden faydalanarak verev levha denklemi elde edilecektir. Zira plaklarda $\Delta\Delta F = P/D$ olan diferansiel denklem, levhada $\Delta\Delta F = 0$ şeklindedir.

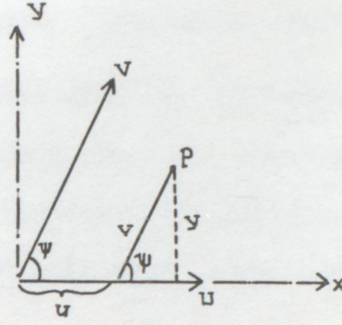
3.2.1. Eğik Kartezyen Koordinatlı Levha Teorisinin Ana Denklemleri

Bu denklemleri elde etmek için koordinatlarda bir değişim yapılır.

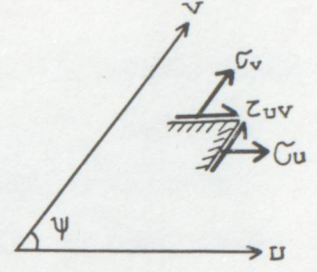
x, y sistemi önceden belirlenmiş sistem olsun. Burada u, v ikinci sistemi alınır. Öyle ki u ekseni x ekseni ile aynı doğrultuda olsun. v ekseni u ekseni ile ψ açısını yapsın. Şekil- 12.



(12)



(13)



(14)

Dönüşüm formülleri aşağıdaki gibidir. Şekil- 13.

$$x = u + v \cos \psi \quad y = v \cdot \sin \psi$$

$$u = x - \frac{y}{\operatorname{tg} \psi} \quad v = \frac{y}{\sin \psi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \psi}$$

F, x ve y 'nin fonksiyonudur.

$$F = F [u(x,y), v(x,y)]$$

Bundan dolayı değişim formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

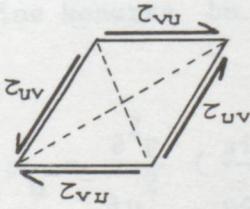
$$\frac{\partial F}{\partial y} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial F}{\partial v} \quad \dots \dots \dots (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

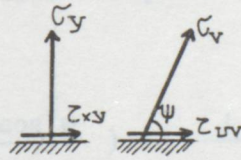
Eğik koordinatlı levhanın diferansiel denklemi.

Şimdi (3.7) formüllerine dönelim. Bu formüller (1.19) formüllerinin u, v değişkenleri ile yazılmış şeklidir. Buna rağmen (3.7) formüllerindeki gerilmeler x, y indisleri ile ifade edilmiştir. Gerilmeleri u, v cinsinden belirlemek için eğik koordinatlardaki gerilme bileşenlerini saptayalım.

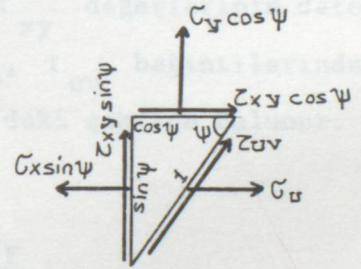
Bu amaçla Şekil 15'de görüldüğü gibi u ve v eksenlerine paralel iki yüzey elemanı alınır. Kenarlardan birindeki toplam gerilme u ve v doğrultusundaki τ_{uv} ve σ_v bileşenlerine ayrılır. İkinci kenardaki toplam gerilmede σ_u ve τ_{uv} bileşenlerine ayrılır. σ_u ve σ_v genellikle yüzey normali doğrultusunda değildir. Ayrıca her ψ değeri için $\tau_{uv} = \tau_{vu}$ olduğu görülür. $\psi = \pi/2$ özel durumunda ise gerilmenin yeni bileşenleri eskilerle aynıdır. Bu durumda u, v indisleri x, y indisleri ile yer değiştirir.



(15)



(16)



(17)

Eski ve yeni gerilmeler arasındaki ilişkileri arayalım. Şekil 16'da gösterildiği gibi gerilmeler arasındaki bağıntı şu şekilde gösterilir.

$$\sigma_y = \sigma_v \sin \psi \quad , \quad \tau_{xy} = \tau_{uv} + \sigma_v \cos \psi$$

Şekil 17'de gösterilen eleman üzerindeki kuvvetlerin u eksenine göre denge denklemi yazılırsa

$$\sigma_u + \tau_{uv} \cos \psi + \tau_{xy} \cos \psi - \sigma_x \sin \psi = 0 \quad (3.6)$$

Bu bağıntılardan yararlanarak σ_u , σ_v , τ_{uv} gerilmeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_u = \sin \psi \sigma_x \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \sigma_y - 2 \cos \psi \tau_{xy}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{\sin \psi} \sigma_y$$

$$\tau_{uv} = \tau_{xy} - \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \sigma_y$$

Son olarak (3.7) formüllerindeki σ_x , σ_y , τ_{xy} değerlerinin deformasyon cinsinden ifadeleri yukarıdaki σ_u , σ_v , τ_{uv} bağıntılarında yerine konursa bu gerilmelerin bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\sigma_u = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$$

$$\tau_{uv} = - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin \psi \operatorname{tg} \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \quad \dots (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \quad \dots (3.5)$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \psi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \cos \psi \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) \quad \dots (3.6)$$

(3.3), (3.4), (3.5) nolu bağıntılardan yararlanarak (1.19) gerilme bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\operatorname{tg} \psi \partial u^2} - \frac{2}{\sin \psi \operatorname{tg} \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad \dots (3.7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$$

(3.6) bağıntısına

$$\Delta \Delta F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \dots (3.8)$$

bağıntısı uygulanırsa şu şekli alır

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial v^4} - 4 \cos \psi \left(\frac{\partial^4 F}{\partial u^3 \partial v} + \frac{\partial^4 F}{\partial u \partial v^3} \right) + 2 (1 + 2 \cos^2 \psi) \frac{\partial^4 F}{\partial u^2 \partial v^2} = 0$$

BÖLÜM 4

SONLU ELEMANLAR METODU

4.1. GENEL BİLGİ

Sonlu Elemanlar metodunda sistem sonlu sayıda elemana bölünüp, elemanlar içinde yayılı bulunan kuvvetlerin düğüm noktalarına etkidiği kabul edilir. Belli kriterleri sağlayan deplasman fonksiyonu seçilerek, bu fonksiyon yardımı ile düğüm noktası deplasmanları ve iç kuvvetleri hesaplanır.

Bir boyutlu sonlu elemanlara ait birim deplasman ve yükleme matrislerinin değerlerinin kesin olarak tayin edilebilmesine karşılık iki ve üç boyutlu sonlu elemanlarda bunların değerleri bazı basitleştirici kabullerle yaklaşık olarak tayin edilebilmektedir.

Bu matrislerin tayini için birbirinden farklı iki yoldan biri uygulanabilir.

1- İncelenen Sistem Ortamına Eşdeğer Bir Ortamda Sonlu Elemanlar Alma :

Bu yöntemde sürekli sistem yerine, ayırık olan fiktif bir eşdeğer çubuk sistem yaklaşık olarak alınmış olmaktadır. Bu ayırık fiktif sistemin verilmiş dış etkiler altında yapılan hesabında elde edilen deplasman ve deformasyon alanları yaklaşık değerler olacaktır.

2- İncelenen Sistem Ortamında Sonlu Elemanlar Alma:

İncelenen sistem ortamında, sonlu eleman alınarak hesap yapılırken birbirinden farklı iki yol izlenebilir.

a- Sistem Boyutunu Bir Mertebe Düşürerek Sonlu Elemanlar Kullanma:

Birçok halde yükler ve deplasmanlar sınır şartlarını sağlayacak şekilde aynı koordinat fonksiyonlarına göre seriye açılarak sistemin boyutu bir mertebe düşürülür, sonlu elemanlar bu sistem üzerinde yeniden alınır.

b- İncelenen Sistem Ortamında Sonlu Elemanlar Kullanma :

İncelenecek sistem sonlu büyüklükte yeter derecede küçük elemanlara ayrılır. Elemanların birleştiği noktalara düğüm noktaları, düğüm noktalarındaki deplasman ve iç kuvvet bileşenlerine de sırasıyla uç deplasmanları ve uç kuvvetleri denir.

Sonlu elemanların birim kuvvet, birim deplasman ve yükleme matrisleri, kolaylık sağlamak amacı ile, kesin olarak değil, eleman içinde deplasman alanı için yapılan bazı kabuller ile yaklaşık olarak tayin edilir. Ancak bu deplasman alanının seçiminde elemanların iç bölgelelerinden başka, çevreleri boyunca ayrıtlar üzerinde de denge ve geometrik uygunluk şartlarını sağlamak gerekir. Bundan başka, eleman boyutları sonsuz küçüğe giderken deplasman alanı için yapılan kabullere göre bulunan çözümün klasik elastisite teorisi çözümüne gitmesi de istenir. Bunun için iki kriterin sağlanması gerekir.

Bunlardan birincisine göre; rijit cisim hareketi yapan elemanda iç kuvvetler sıfır olmalıdır.

İkincisine göre ise; elemanlarda düzgün yayılı iç kuvvet alanları bulunmalıdır.

Eğrisel sınırlar, vevelik vb. haller söz konusu ise üçgen elemanların kullanılması dikdörtgen elemanlara göre kolaylık sağlar. Üçgen sonlu eleman kullanıldığında tatbikatta karşılaşılan levhaların tümüne uygulanabilir.

Bir düğüm noktasındaki parametre sayısına o düğüm noktasının serbestlik derecesi denir. Bir elemandaki düğüm noktalarının serbestlik derecesi toplamına elemanın serbestlik derecesi denir.

4.2. GENEL BAĞINTILAR

Sürekli ortam belirli sayıda sonlu elemanlara ayrılır. Yapılan hesapların, her elemanın kendi eksen takımında yapılması daha kolay olur. Bu nedenle önce her elemanın özel eksen takımında hesap yapıp, sisteme ait tek bir eksen takımına dönüşüm yapılır.

Her sonlu elemanın bünyesinde, kendi düğüm noktaları deplasmanları cinsinden, deplasman durumunu tarif etmek üzere bir fonksiyon seçilir.

$$\{F\}^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \quad \{\delta\}^e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix}$$

Deplasman fonksiyonları, bir eleman içinde düğüm noktaları cinsinden, deformasyon durumunu tarif ederler.

Düğüm noktalarında sınır gerilmeleri ve bazı yayılı yükleri dengeleyen ve

$$\{F\}^e = [K]^e \cdot \{\delta\}^e + \{F\}_p^e + \{F\}_{\epsilon_0}^e \dots \dots \dots (4.1)$$

formunda bir rijitlik bağıntısına bağlı olan bir kuvvet sistemi tayin edilir.

$\{F\}_p^e$; elemana tesir eden herhangi yayılı yükü dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini ve $\{F\}_{\epsilon_0}^e$ ısı değişimin-

den ileri gelen deformasyon gibi çeşitli ilkel deformasyonları dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini temsil edenler. Elemanın herhangi bir noktasındaki gerilmeleri $\{\sigma\}^e$ ile tarif edersek ;

$$\{\sigma\}^e = [S]^e \cdot \{\delta\}^e + \{\sigma\}_p^e + \{\sigma\}_{\epsilon_0}^e \dots (4.2)$$

şeklinde bir bağıntı elde edilir. Burada son iki terim sırasıyla, elemanın dış yüzeyine yayılı yüklerden ileri gelen gerilmelerden ve ilkel gerilmelerden ibarettir.

$[K]^e$; eleman rijitlik matrisi

$[S]^e$; matrisi de gerilme matrisi olarak adlandırılır.

Her eleman için rijitlik matrisi hesaplandıktan sonra düğüm noktalarının dengesi

$$\{R_i\} = \sum_{m=1}^{m=n} \sum [K_{im}]^e \{\delta_m\}^e + \sum \{F_i\}_p^e + \sum \{F_i\}_{\epsilon_0}^e \dots (4.3)$$

yazılarak yapı sistemi birleştirilir. Bu denklem sistemi basit olarak

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p - \{F\}_{\epsilon_0} \dots (4.4)$$

şeklinde yazılabilir.

4.2.1. DEFORMASYONLAR

Eleman içinde bütün noktaların deplasmanları biliniyorsa herhangi bir noktadaki deformasyonlar tayin edilebilir.

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{\delta\}^e \dots (4.5)$$

4.2.2. GERİLMELER

Elemanda dış kuvvetlerden meydana gelen gerilmelerden başka, ısı değişimi, rötire vb. sebeplerden oluşan $\{\epsilon_0\}$ ile gösterilen ilkel deformasyonlardan oluşan gerilmeler de olabilir. Bu durumda;

$$\{\sigma\} = [D] \cdot (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) \quad \dots\dots (4.6)$$

dır.

[D] ; malzemenin özelliklerini içeren elastisite matrisidir.

4.2.3. DEPLASMAN FONKSİYONU

Eleman içindeki deplasman bileşenlerinin uç deplasmanlarına bağlı ifadelerini elde edebilmek amacı ile, önce deplasman bileşenleri için koordinatlara bağlı fonksiyonlar seçilir. Bunun için polinomlardan faydalanılır. Bu amaçla seçilecek polinomun terim sayısı elemanın serbestlik derecesine eşit olmalıdır. Eleman içindeki herhangi bir noktadaki deplasmanları bir $f(x,y)$ kolon vektörü ile gösterelim.

$$\{f\} = [N] \cdot \{\delta\}^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4.7)$$

4.3. LEVHA PROBLEMİNİN DEFORMASYON DURUMU

Levha probleminde x yönündeki deplasmanı gösteren $u(x,y)$ ve y yönündeki deplasmanı gösteren $v(x,y)$ olmak üzere iki deplasman bileşeni vardır. Eğer (u,v) deplasmanları biliniyorsa deformasyonlar bunlara bağlı olarak ;

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned} \epsilon_x & \quad \frac{\partial u}{\partial x} \\ \{\epsilon\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots (4.8)$$

Bu deformasyonlar sonucu oluşan gerilmeler x,y yönlerinde normal gerilmeler ve kayma gerilmeleridir.

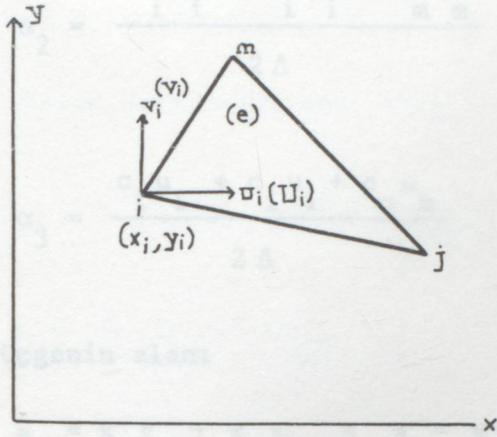
$$\begin{aligned} \sigma_x & \\ \{\sigma\} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots (4.9)$$

Yer değiştirmeleri oluşturan düğüm noktası kuvvetleri ise, x ve y yönlerinde tesir eden iki kuvvettir.

$$F = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (4.10)$$

4.4. LEVHALARDA ÜÇGEN SONLU ELEMAN

Üçgen sonlu elemanlar kullanıldığında her tür levha problemini çözebilmek mümkün olmaktadır. Dikdörtgen levhaların hesabı yapılabildiği gibi aynı zamanda levhanın içinde delik olması, levha kenarlarının eğrisel olması, levhada verevlik olması gibi durumlarda üçgen elemanlarla çözüm mümkündür.



Şekil- 18 Levhalarda üçgen sonlu eleman.

4.4.1. DEPLASMAN FONKSİYONU

Deplasman fonksiyonu olarak yaklaşıklık kriterlerini sağlayan lineer bir fonksiyon seçelim.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad \dots\dots (4.11)$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

$$\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad \{\delta_i\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}$$

Seçilen deplasman fonksiyonunda her düğüm noktasında koordinatlarını yerine koyup elde edilen sistemi çözersek " α " katsayıları şu şekilde bulunur.

$$\alpha_1 = \frac{a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m}{2 \Delta}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m}{2\Delta}$$

$$\alpha_3 = \frac{c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m}{2\Delta}$$

Δ : üçgenin alanı

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j \quad ; \quad a_j = x_m y_i - x_i y_m \quad ; \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_m \quad ; \quad b_j = y_m - y_i \quad ; \quad b_m = y_i - y_j$$

$$c_i = x_m - x_j \quad ; \quad c_j = x_i - x_m \quad ; \quad c_m = x_j - x_i$$

4.4.2. [B] MATRİSİNİN HESABI

Düğüm noktası deplasmanları belli olduğuna göre (3.5) formülünden;

$$\{\epsilon\} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\}^e$$

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \dots(4.13)$$

4.4.3. ELASTİSİTE MATRİSİ

Düzlem Gerilme Durumu

$$\{\sigma\} = [D] (\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\})$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (4.14)$$

4.4.4. RİJİTLİK MATRİSİ

[K] eleman rijitlik matrisi her eleman için :

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] t dx dy$$

$$[K] = [B]^T [D] [B] t. \quad \dots\dots (4.15)$$

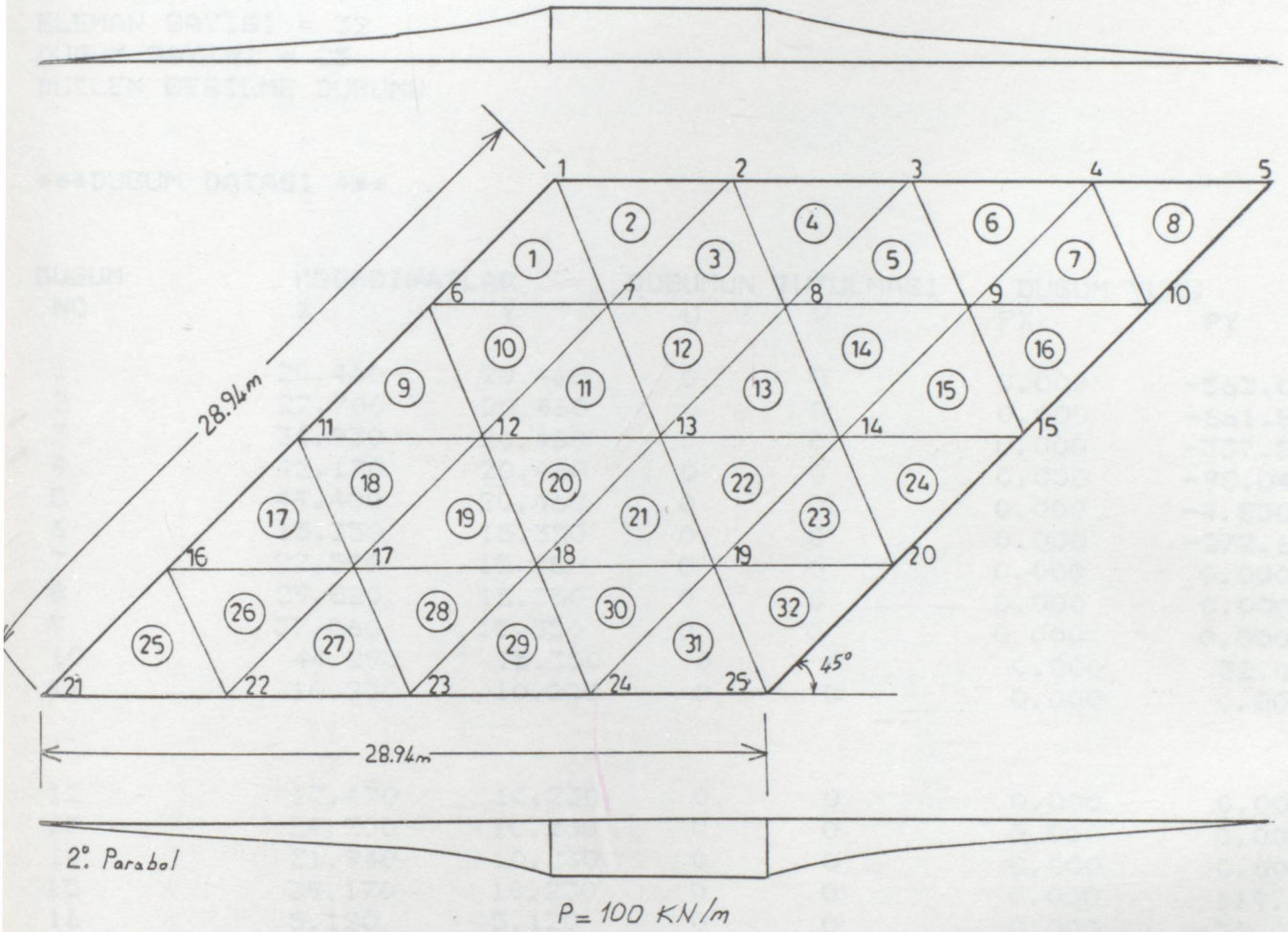
formülü ile bulunur.

BÖLÜM 5

VEREV LEVHALARIN SONLU ELEMANLARLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde üçgen sonlu elemanlar kullanılarak verev levhaların çeşitli verevlik açıları ve yük durumları etkisinde bilgisayarla çözümü yapılmış ve bulunan sonuçlara göre diyagramlar çizilmiştir.

$P_u = 100 \text{ KN/m}$



ELEMAN SAYISI = 32
 DUGUM SAYISI = 25
 DUZLEM BERILME DURUMU

***DUGUM DATASI ***

DUGUM NO	KOORDINATLAR		DUGUMUN TUTULMASI		DUGUM YUKU	
	X	Y	U	V	PX	PY
1	20.460	20.460	0	0	0.000	-562.000
2	27.700	20.460	0	0	0.000	-661.830
3	34.930	20.460	0	0	0.000	-337.300
4	42.170	20.460	0	0	0.000	-98.040
5	49.400	20.460	0	0	0.000	-4.830
6	15.350	15.350	0	0	0.000	-272.660
7	22.590	15.350	0	0	0.000	0.000
8	29.820	15.350	0	0	0.000	0.000
9	37.060	15.350	0	0	0.000	0.000
10	44.290	15.350	0	0	0.000	32.000
11	10.230	10.230	0	0	0.000	0.000
12	17.470	10.230	0	0	0.000	0.000
13	24.700	10.230	0	0	0.000	0.000
14	31.940	10.230	0	0	0.000	0.000
15	39.170	10.230	0	0	0.000	119.330
16	5.120	5.120	0	0	0.000	-32.000
17	12.360	5.120	0	0	0.000	0.000
18	19.590	5.120	0	0	0.000	0.000
19	26.830	5.120	0	0	0.000	0.000
20	34.060	5.120	0	0	0.000	272.660
21	0.000	0.000	0	0	0.000	4.830
22	7.240	0.000	0	0	0.000	98.040
23	14.470	0.000	0	0	0.000	337.300
24	21.710	0.000	0	0	0.000	661.830
25	28.940	0.000	0	0	0.000	562.000

*** ELEMEN DATASI***

ELEMEN NO	DUGUM NOSU			KALINLIK	ELASTIZITE MODULU	POISSON GRANI
	1	2	3			
1	1	6	7	1.000	2.300E+07	.200
2	1	7	2	1.000	2.300E+07	.200
3	2	7	8	1.000	2.300E+07	.200
4	2	8	3	1.000	2.300E+07	.200
5	3	8	9	1.000	2.300E+07	.200
6	3	9	4	1.000	2.300E+07	.200
7	4	9	10	1.000	2.300E+07	.200
8	4	10	5	1.000	2.300E+07	.200
9	6	11	12	1.000	2.300E+07	.200
10	6	12	7	1.000	2.300E+07	.200
11	7	12	13	1.000	2.300E+07	.200
12	7	13	8	1.000	2.300E+07	.200
13	8	13	14	1.000	2.300E+07	.200
14	8	14	9	1.000	2.300E+07	.200
15	9	14	15	1.000	2.300E+07	.200
16	9	15	10	1.000	2.300E+07	.200
17	11	16	17	1.000	2.300E+07	.200
18	11	17	12	1.000	2.300E+07	.200
19	12	17	18	1.000	2.300E+07	.200
20	12	18	13	1.000	2.300E+07	.200
21	13	18	19	1.000	2.300E+07	.200
22	13	19	14	1.000	2.300E+07	.200
23	14	19	20	1.000	2.300E+07	.200
24	14	20	15	1.000	2.300E+07	.200
25	16	21	22	1.000	2.300E+07	.200
26	16	22	17	1.000	2.300E+07	.200
27	17	22	23	1.000	2.300E+07	.200
28	17	23	18	1.000	2.300E+07	.200
29	18	23	24	1.000	2.300E+07	.200
30	18	24	19	1.000	2.300E+07	.200
31	19	24	25	1.000	2.300E+07	.200
32	19	25	20	1.000	2.300E+07	.200

***** ÇIKIŞ SONUÇLARI *****

*** DEPLASMAN VEKTORU ***

DÜŞÜM NO NO	DEPLASMANLAR	
	U	V
1	-5.396	-3.752
2	-5.396	-1.236
3	-5.396	3.275
4	-5.396	6.791
5	-5.396	10.302
6	-2.914	-6.233
7	-2.914	-2.717
8	-2.914	.794
9	-2.914	4.310
10	-2.914	7.821
11	-.428	-8.719
12	-.428	-5.204
13	-.428	-1.693
14	-.428	1.823
15	-.428	5.334
16	2.054	-11.201
17	2.054	-7.685
18	2.054	-4.174
19	2.054	-.658
20	2.054	2.853
21	4.540	-13.687
22	4.540	-10.171
23	4.540	-6.660
24	4.540	-3.144
25	4.540	.367

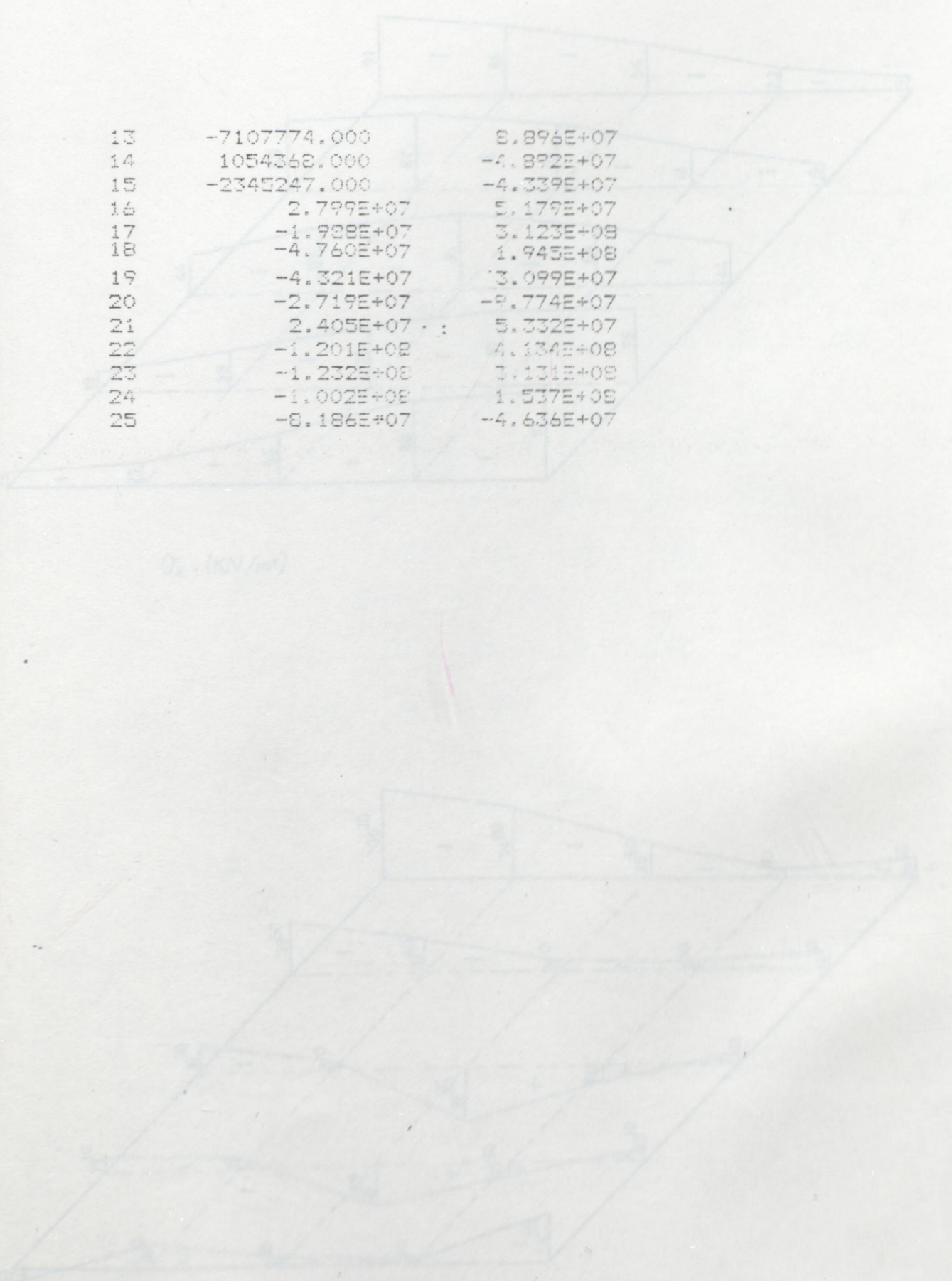
*** ELEMAN GERİLMELERİ ***

ELEMAN NO	GERİLMELER		
	SX	SY	TXY
1	-8.250E+00	-9.700E+01	-1.075E+01
2	-1.308E+01	-8.491E+01	-6.563E-01
3	-1.000E+00	-9.375E+01	-3.000E+00
4	-9.938E+00	-7.700E+01	1.500E+01
5	1.500E+00	-4.800E+01	5.000E-01
6	-2.250E+00	-4.300E+01	7.000E+00

7	11.000E+00	-1.600E+01	-4.000E+00
8	-1.750E+00	-9.000E+00	1.000E+00
9	-6.250E+00	-7.200E+01	-6.000E+00
10	-3.375E+00	-7.275E+01	-6.250E+00
11	4.875E+00	-9.250E+01	-2.750E+00
12	1.344E+00	-8.500E+01	3.875E+00
13	7.750E+00	-7.700E+01	-1.250E+00
14	-2.125E+00	-6.900E+01	7.500E+00
15	2.000E+00	-4.000E+01	-4.500E+00
16	-3.500E+00	-3.100E+01	2.000E+00
17	-4.000E+00	-2.600E+01	2.000E+00
18	2.500E-01	-3.350E+01	-8.500E+00
19	-1.250E+00	-7.100E+01	2.500E+00
20	7.719E+00	-7.575E+01	-1.750E+00
21	6.625E+00	-2.950E+01	3.000E+00
22	5.031E+00	-9.100E+01	1.000E+00
23	2.500E+00	-6.900E+01	-5.750E+00
24	-3.125E+00	-6.050E+01	5.000E-01
25	1.500E+00	-1.200E+01	1.000E+00
26	-3.250E+00	-1.500E+01	-6.000E+00
27	-5.500E+00	-4.200E+01	2.000E+00
28	4.125E+00	-4.350E+01	-3.000E+00
29	6.250E-01	-6.100E+01	9.500E+00
30	7.688E+00	-9.494E+01	-2.125E+00
31	-7.957E+00	-6.825E+01	2.813E-01
32	-3.313E+00	-9.450E+01	-6.250E+00

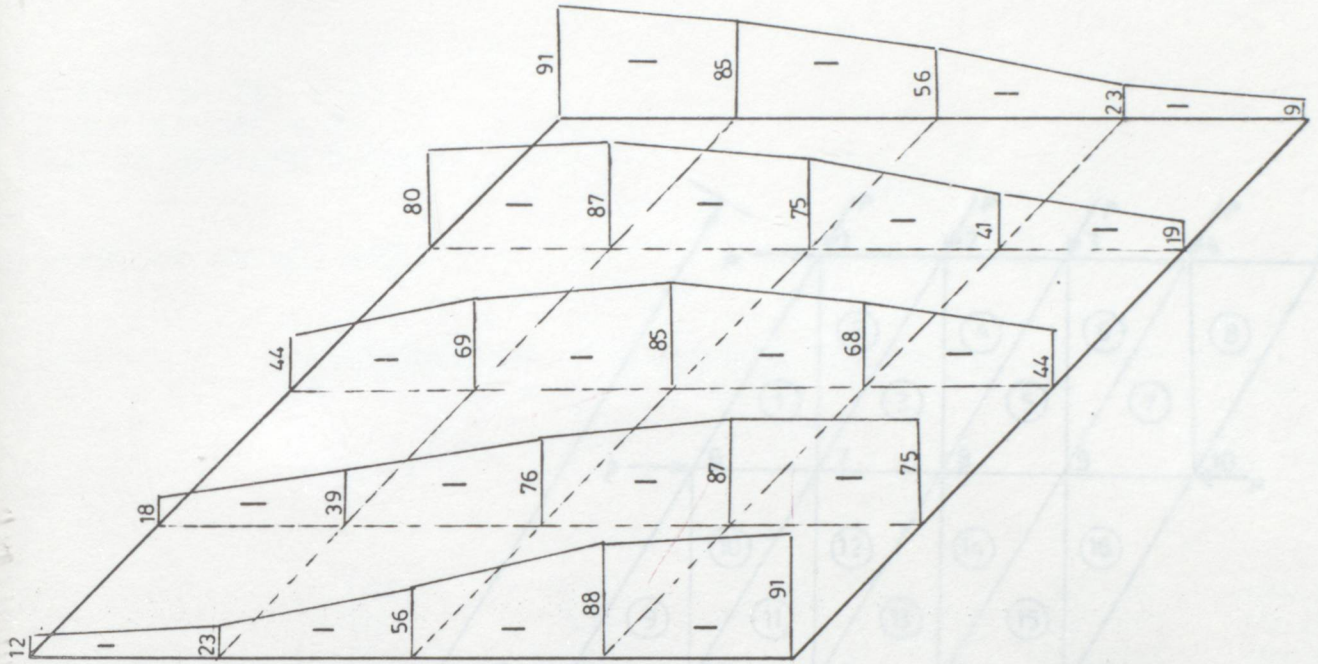
*** DUGUM KUVVETLERI ***

DUGUM NO	DUGUM PX	KUVVETLERI PY
1	-6.000	-564.000
2	18.500	-666.000
3	12.000	-352.000
4	-12.000	-128.000
5	2.000	0.000
6	8.000	-304.000
7	-9.000	-16.000
8	-33.000	0.000
9	-4.000	24.000
10	-5.000	32.000
11	-2.535E+07	2.462E+08
12	-9877408.000	2.035E+08

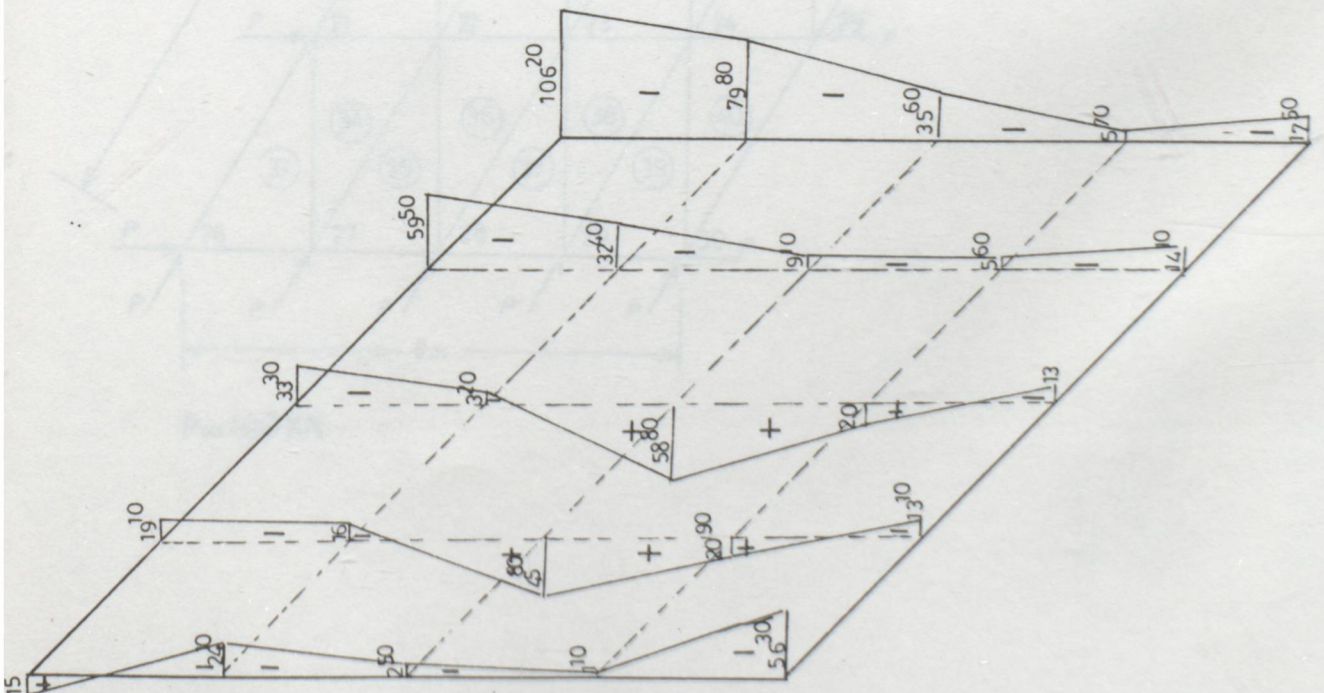


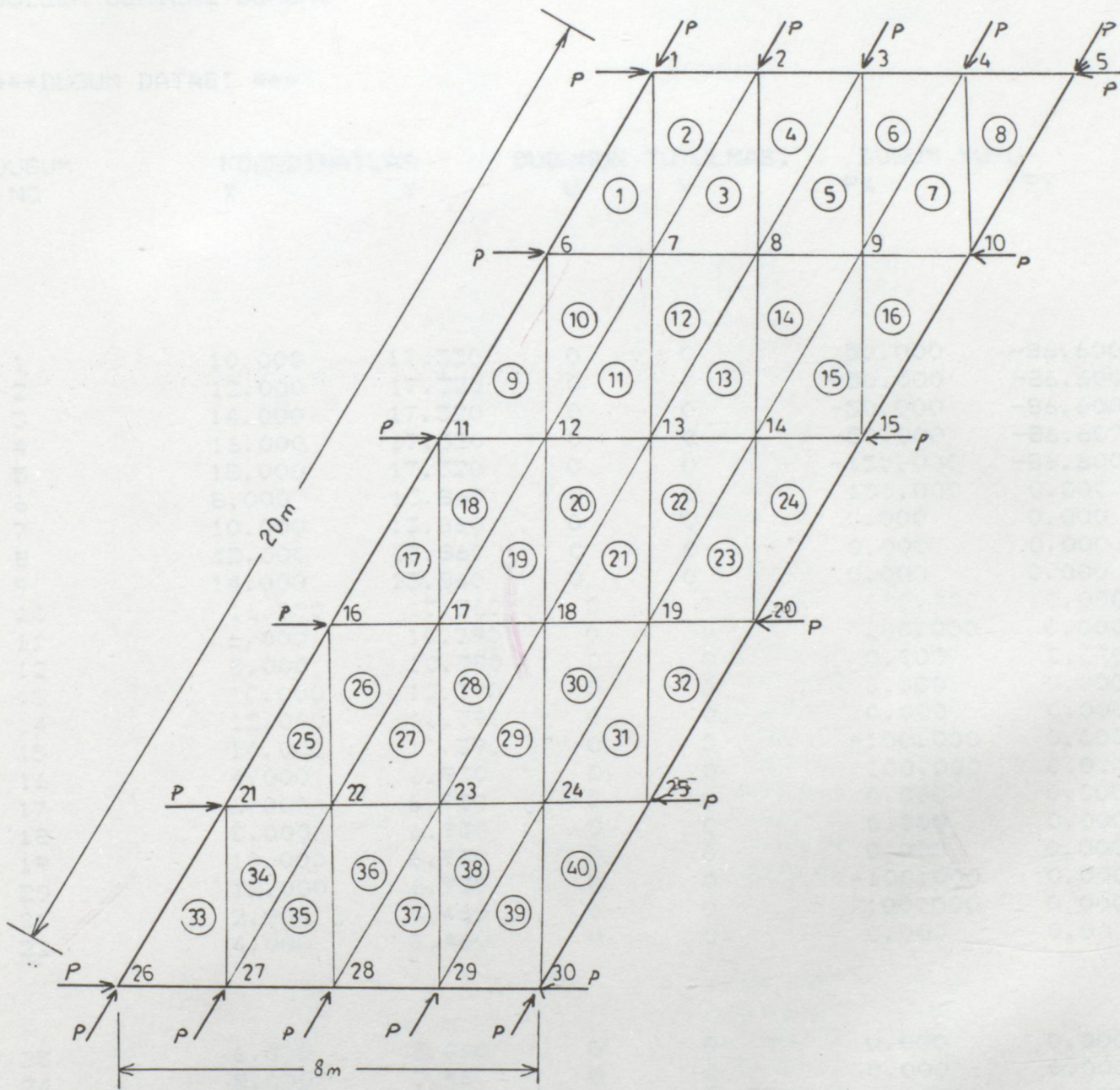
13	-7107774.000	8.896E+07
14	1054368.000	-4.892E+07
15	-2345247.000	-4.339E+07
16	2.799E+07	5.179E+07
17	-1.988E+07	3.123E+08
18	-4.760E+07	1.945E+08
19	-4.321E+07	3.099E+07
20	-2.719E+07	-9.774E+07
21	2.405E+07	5.332E+07
22	-1.201E+08	4.134E+08
23	-1.232E+08	3.131E+08
24	-1.002E+08	1.537E+08
25	-8.186E+07	-4.636E+07

σ_x (kN/m)



$Q_y : (\text{KN/m}^2)$





$P = 100 \text{ KN}$

*** ELEMAN DATASI ***

ELEMAN SAYISI = 40

DUGUM SAYISI = 30

DUZLEM GERILME DURUMU

***DUGUM DATASI ***

DUGUM NO	KOORDINATLAR		DUGUMUN TUTULMASI		DUGUM YUKU	
	X	Y	U	V	PX	PY
1	10.000	17.320	0	0	50.000	-86.600
2	12.000	17.320	0	0	-50.000	-86.600
3	14.000	17.320	0	0	-50.000	-86.600
4	16.000	17.320	0	0	-50.000	-86.600
5	18.000	17.320	0	0	-150.000	-86.600
6	6.000	13.860	0	0	100.000	0.000
7	10.000	13.860	0	0	0.000	0.000
8	12.000	13.860	0	0	0.000	0.000
9	14.000	13.860	0	0	0.000	0.000
10	16.000	13.860	0	0	-100.000	0.000
11	6.000	10.390	0	0	100.000	0.000
12	8.000	10.390	0	0	0.000	0.000
13	10.000	10.390	0	0	0.000	0.000
14	12.000	10.390	0	0	0.000	0.000
15	14.000	10.390	0	0	-100.000	0.000
16	4.000	6.930	0	0	100.000	0.000
17	6.000	6.930	0	0	0.000	0.000
18	8.000	6.930	0	0	0.000	0.000
19	10.000	6.930	0	0	0.000	0.000
20	12.000	6.930	0	0	-100.000	0.000
21	2.000	3.460	0	0	100.000	0.000
22	4.000	3.460	0	0	0.000	0.000
23	6.000	3.460	0	0	0.000	0.000
24	8.000	3.460	0	0	0.000	0.000
25	10.000	3.460	0	0	-100.000	0.000
26	0.000	0.000	0	0	150.000	86.600
27	2.000	0.000	0	0	50.000	86.600
28	4.000	0.000	0	0	50.000	86.600
29	6.000	0.000	0	0	50.000	86.600
30	8.000	0.000	0	0	-50.000	86.600

*** ELEMEN DATASI***

ELEMEN NO	DUGUM NUSU			KALINLIK	ELASTIZITE MODULU	POISSON ORANI
	1	2	3			
1	1	6	7	1.000	2.300E+07	.200
2	1	7	2	1.000	2.300E	
3	2	7	8	1.000	2.300E+07	.200
4	2	8	3	1.000	2.300E+07	.200
5	3	8	9	1.000	2.300E+07	.200
6	3	4	9	1.000	2.300E+07	.200
7	4	9	10	1.000	2.300E+07	.200
8	4	10	5	1.000	2.300E+07	.200
9	6	11	12	1.000	2.300E+07	.200
10	6	12	7	1.000	2.300E+07	.200
11	7	12	13	1.000	2.300E+07	.200
12	7	13	8	1.000	2.300E+07	.200
13	8	13	14	1.000	2.300E+07	.200
14	8	14	9	1.000	2.300E+07	.200
15	9	14	15	1.000	2.300E+07	.200
16	9	15	10	1.000	2.300E+07	.200
17	11	16	17	1.000	2.300E+07	.200
18	11	17	12	1.000	2.300E+07	.200
19	12	17	18	1.000	2.300E+07	.200
20	12	18	13	1.000	2.300E+07	.200
21	13	18	19	1.000	2.300E+07	.200
22	13	19	14	1.000	2.300E+07	.200
23	14	19	20	1.000	2.300E+07	.200
24	14	20	15	1.000	2.300E+07	.200
25	16	21	22	1.000	2.300E+07	.200
26	16	22	17	1.000	2.300E+07	.200
27	17	22	23	1.000	2.300E+07	.200
28	17	23	18	1.000	2.300E+07	.200
29	18	23	24	1.000	2.300E+07	.200
30	18	24	19	1.000	2.300E+07	.200
31	19	24	25	1.000	2.300E+07	.200
32	19	25	20	1.000	2.300E+07	.200
33	21	26	27	1.000	2.300E+07	.200
34	21	27	22	1.000	2.300E+07	.200
35	22	27	28	1.000	2.300E+07	.200
36	22	28	23	1.000	2.300E+07	.200
37	23	28	29	1.000	2.300E+07	.200
37	23	28	29	1.000	2.300E+07	.200
38	23	29	24	1.000	2.300E+07	.200
39	24	29	30	1.000	2.300E+07	.200

*** DEPLASMAN VEKTORU ***

DUGUM NO	DEPLASMANLAR	
NO	U	V
1	2.347E-05	3.930E-05
2	1.966E-05	5.231E-05
3	1.421E-05	5.657E-05
4	2.348E-05	8.476E-05
5	1.700E-05	8.806E-05
6	5.857E-05	3.388E-05
7	5.544E-05	4.763E-05
8	5.210E-05	6.244E-05
9	5.059E-05	8.092E-05
10	4.727E-05	9.128E-05
11	9.871E-05	2.480E-05
12	9.573E-05	4.028E-05
13	9.290E-05	5.511E-05
14	8.999E-05	7.048E-05
15	8.649E-05	8.629E-05
16	1.402E-04	1.392E-05
17	1.370E-04	3.130E-05
18	1.341E-04	4.759E-05
19	1.311E-04	6.207E-05
20	1.278E-04	7.671E-05
21	1.857E-04	1.039E-06
22	1.819E-04	1.960E-05
23	1.779E-04	3.868E-05
24	1.733E-04	5.621E-05
25	1.655E-04	6.610E-05
26	2.367E-04	-8.423E-06
27	2.301E-04	6.814E-06
28	2.249E-04	2.345E-05
29	2.233E-04	4.490E-05
30	2.221E-04	7.091E-05

LEMAN NO	G E R I L M E L E R		
	SX	SY	TX
1	-4.902E+01	-6.517E+01	-2.268E+01
2	-5.716E+01	-6.680E+01	-2.622E+01
3	-5.413E+01	-7.816E+01	-1.987E+01
4	-7.930E+01	-8.319E+01	-6.943E+01
5	-5.171E+01	-1.722E+02	-1.225E+01
6	7.730E+01	-1.464E+02	3.428E+01
7	-4.880E+01	-5.316E+01	-1.622E+01
8	-8.671E+01	-6.074E+01	-5.006E+01
9	-4.460E+01	-5.130E+01	-2.844E+01
10	-4.632E+01	-5.165E+01	-3.673E+01
11	-4.422E+01	-5.838E+01	-3.239E+01
12	-5.042E+01	-5.962E+01	-3.247E+01
13	-4.593E+01	-6.245E+01	-3.095E+01
14	-2.910E+01	-5.705E+01	-2.213E+01
15	-4.929E+01	-4.547E+01	2.537E+01
16	-4.715E+01	-4.505E+01	-4.947E+01
17	-4.625E+01	-5.249E+01	-2.208E+01
18	-4.478E+01	-5.219E+01	-3.195E+01
19	-4.596E+01	-5.775E+01	-2.811E+01
20	-4.403E+01	-5.740E+01	-3.510E+01
21	-4.494E+01	-5.529E+01	-3.643E+01
22	-4.448E+01	-5.519E+01	-3.216E+01
23	-4.867E+01	-7.114E+01	-7.145E+01
24	-5.049E+01	-5.151E+01	-2.806E+01
25	-5.309E+01	-4.827E+01	-1.632E+01
26	-4.509E+01	-4.617E+01	-3.157E+01
27	-5.822E+01	-5.003E+01	2.100E+01
28	-4.604E+01	-5.309E+01	3.472E+01
29	-6.664E+01	7.045E+01	3.441E+01
30	-4.720E+01	-3.703E+01	3.711E+01
31	-9.931E+01	-4.655E+01	-4.701E+01
32	-4.561E+01	-3.585E+01	-2.479E+01
33	-8.671E+01	-5.573E+01	-5.036E+01
34	-5.324E+01	-4.907E+01	-3.415E+01
35	-5.591E+01	-4.501E+01	3.122E+01
36	-5.352E+01	7.451E+01	-2.705E+01
37	-2.843E+01	-4.701E+01	2.304E+01
38	-2.843E+01	-4.701E+01	-2.304E+01
39	-4.536E+01	5.405E+01	-4.183E+01
40	-3.406E+01	-1.047E+02	-1.049E+01

*** DUGUM KUVVETLERI ***

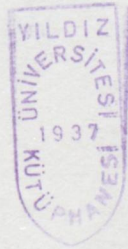
DUGUM NO	DUGUM PX	KUVVETLERI PY
1	50.000	-86.600
2	-50.000	-86.600
3	-50.000	-86.600
3	-50.000	-86.600
4	-50.000	-86.606
5	-150.004	-86.599
6	99.999	3.052E-04
7	6.407E-04	7.324E-04
8	-9.155E-05	2.319E-03
9	1.465E-03	0.000
10	-100.000	2.136E-03
11	-500.848	120.658
12	-1151.462	-703.974
13	-1506.297	-1338.911
14	-1716.969	-1811.521
15	-1601.634	-623.913
16	-39.050	-2645.746
17	-7553.971	-1414.282
18	-7339.521	-2072.602
19	-7127.302	-2530.359
20	-6816.899	224.527
21	-23.849	-3679.717
22	-10163.000	-1008.996
23	-9867.494	-1641.154
24	-9546.479	-889.183
25	-5380.6	501.382
26	117.736	-2850.381
27	-7945.64	407.781
28	-7506.839	-1989.235
29	-12453.43	1345.496
30	-5265.664	1106.929

BÖLÜM 6

SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu çalışmada verev levha için bilgisayar yardımıyla gerilmeler elde edilmiştir. $\phi = 45^{\circ}$ ve $b : l = 1$ durumunda parabolik ve düzgün yayılı yükle yüklü levhanın elde edilen sonuçlara göre gerilme diyagramları çizilmiştir. Ayrıca $\phi = 60^{\circ}$ ve $b : l = 0,4$ için levha kenarlarında tekil yükler olması durumu için elde edilen sonuçlara göre gerilme diyagramları çizilmiştir.

Elde edilen sonuçlara göre çizilen diyagramlar STATHOPULDS tarafından yine sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucu görülen fark kullanılan bilgisayarın kapasitesinin sınırlılığı sebebiyle eleman sayısının fazla arttırılamamasından ileri gelmektedir. Eleman sayısı arttıkça hassasiyetin daha da artacağı açıktır.



ÖZGEÇMİŞ

1963 İstanbul doğumluyum. İlkokul öğrenimini 1969-1974 yılları arasında İstanbul, Karagömrük ilkokulunda tamamladım. Ortaokulu 1977-1978 öğretim yılında Karagömrük ortaokulunda, Liseyi 1980-1981 Öğretim yılında Fatih Vatan Lisesinde bitirdim.

Lisans öğrenimime 1982-1983 Öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde başladım. 1985-1986 Öğretim yılında tamamladım.

1986-1987 Öğretim yılında Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü İnşaat-Yapı dalına girdim. Halen bir şirkette İnşaat Mühendisi olarak görev yapmaktayım.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- 1) FAVRE H., "Contribution a l'etude des plaques obliques" Schweiz (1942).
- 2) İNAN M., "Düzlemde Elastisite teorisi" (1969).
- 3) TAMEROĞLU S.S., "Yüzeysel taşıyıcı sistemler" (1964).
- 4) CELASUN H., "Yapı Sistemleri Matris Analizi ve Sonlu Elemanlar Metodu" İDMMA"(1976).
- 5) ÇAKIROĞLU A., ÖZDEN E., ÖZMEN G., Yapı Sistemlerinin hesabı için matris Metodları (Cilt 2)(1974)
- 6) CELASUN H., Öngerilmeli Beton Kirişli ve Plak Köprüler (1973).
- 7) PRZEMIENIECKI J.S., Theory of Matrix Stcroctural Analysis, Mc Graw Hill, Londra, 1968.
- 8) TEZCAN S., "Çubuk sistemlerin Elektronik hesap makinaları ile çözümü" İstanbul 1970.
- 9) MARTIN C.H/CARZY G.F., "Introduction to Finite element analysis, Mc Graw Hill, Londra, 1973.
- 10) STATHOPULOS S., Eine Übersicht der Sponngliedonor dnungen bei Schiefwinkligen plotten.

