

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nervürlü Plakların Sorabilite Hesabı

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Levent Anıl

1988

150

140

INS - 7000

-YILDIZ ÜNİVERSİTESİ-
-FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ-

NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE HESABI

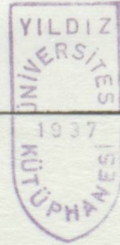
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜH.LEVENT ANIL

İSTANBUL-1988

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

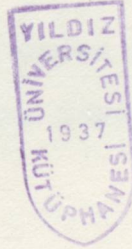
Kot : R 150
: 140
Alındığı Yer : FEN. BİL. EMS?
:
Tarih : 14.10.1991
Fatura :
Fiyatı : 7000. TL
Ayniyat No : 1/15
Kayıt No : 47732
UDC : 624. 378.242
Ek :



-YILDIZ ÜNİVERSİTESİ-
-FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ-



NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE HESABI



YÜKSEK LİSANS TEZİ

MÜH. LEVENT ANIL

İSTANBUL-1988

Çalışmalarına yön veren ve değerli yardımlarını gördüğüm, Sayın Doç.Dr.Türkân Köksal'a teşekkürlerimi sunarım.

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET.....	14
SUMMARY.....	15
1.GİRİŞ.....	1
1.1.KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI.....	1
1.1.1.Stabilitenin tanımı ve önemi.....	1
1.1.2.Plaklarda stabilite sınırının bulunması	18
ile ilgili metotlar.....	2
1.1.3.Nervürlere takfiye edilmiş plakların	23
stabilitesi.....	3
1.2.PLAKLARDA DEPLASMAN-DEFORMASYON VE ELASTİSİTE	
BAĞINTILARI,KESİT TESİRLERİ VE MEMBRAN DENGE	
DENKLEMLERİ.....	4
2.İZOTROP PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI.....	6
2.1.DENGE MÜLAHAZASINDAN YARARLANARAK BURKULMA	26
YÜZEYİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI.....	6
2.1.1. N_x ve N_y kuvvetlerinin z eksenindeki	
izdüşümleri.....	9
2.1.2. N_{xy} ve N_{yx} kuvvetlerinin z eksenindeki	
izdüşümleri.....	9
2.1.3.Kesme kuvvetlerinin etkisi.....	10
2.1.4.Toplam denge denklemleri.....	11
2.2.İZOTROP BİR PLAKTA STABİLİTE DENKLEMİNİN ENERJİ	38
METODU İLE ÇIKARILMASI.....	12
2.2.1.Eğilme momentleri tarafından yapılan iş.....	12
2.2.2.Burulma momentleri tarafından yapılan iş.....	13
2.2.3.Plağın ortalama düzlemine tatbik edilen	87

kuvvetlerle bu düzlemin şekil değiştirmesinden ileri gelen enerji.....	14
2.2.4.Toplam potansiyel enerji.....	15
2.2.5.Eğilme şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu.....	16
2.2.6.Membran şekil değiştirme enerjisinin ikinci varyasyonu.....	18
2.2.7.Toplam potansiyel enerjinin minimum olma koşulu ve euler denklemi.....	23
3.NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI....	23
3.1.NERVÜR ELASTİSİTE SABİTLERİ(RİJİTLİK PARAMETRELERİ) KULLANILARAK PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI.....	26
3.1.1.Anizotrop plaklarda M_x , M_y ve M_{xy} ifadelerinin bulunması.....	26
3.1.2.Nervür elastisite sabitlerinin bulunuşu....	29
3.1.3.Nervürlü plaklarda elastisite sabitlerinin bulunuşu.....	30
3.1.4.Nervürlü plakların stabilite denklemi.....	31
3.1.5.Pratik uygulamalar.....	33
3.2.NERVÜRLERİN PLAK KALINLIĞINA KATILMASIYLA NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE HESABI.....	37
4.ENERJİ METODU İLE STABİLİTE HESABI.....	38
4.1.BOYUNA NERVÜRLÜ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAK....	38
5.SAYISAL ÖRNEKLER.....	51
6.SONUÇLAR.....	64
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	

Ö Z E T

Bu çalışmada, boyuna veya her iki doğrultuda nervürlü ortotrop plakların, kendi düzlemi içindeki yükler altında stabilite çözümleri yapılmıştır. Bu çözümlerde Flugge'nin anizotrop silindirik kabuklar için de uygulamış olduğu rijitlik parametreleri (nervür elastisite sabitleri) kullanılmıştır. Çözümler seriler ile yapılmıştır. Konuyu daha iyi açıklamak ve hesapları kolaylaştırmak amacıyla basit mesnetli dikdörtgen plak ele alınıp, örnekler çözülmüştür.

Birinci bölümde, çalışmanın amacı, konu ve konu ile ilgili çalışmalara toplu bir bakış verilmiştir.

İkinci bölümde, izotrop plaklar için stabilite denklemi bulunmuştur. Bunun için denge denklemleri ve enerji metodu kullanılmıştır.

Üçüncü bölümde, rijitlik parametreleri (nervür elastisite sabitleri) bulunmuş, ortotrop plaklar için stabilite denklemi elde edilmiştir. Ayrıca kendi düzlemi içindeki yükler altında, boyuna ve her iki doğrultuda nervürlü plaklar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, enerji metodunu izah etmek amacıyla boyuna nervürlü bir plak elemanında stabilite konusu ele alınmış ve nervür kesidi seçilmiştir.

Beşinci bölümde, sayısal örnekler verilmiştir. Nervür süz ve nervürlü plaklar arasındaki kritik yükler karşılaştırılmıştır.

Son bölümde, sonuçlar ve kaynaklar yer almaktadır.

S U M M A R Y

In this work, the general stability solutions of stiffened orthotropic shells have been done lengthwise and both two directions under external loads. Flugge's rigidity parameters for anisotropic cylindrical shells used in this solution. Solutions easier, the simple supported quadrangle shells are used and examples are solved.

In the introduction which also forms the first chapter, the aim of the work, the subject and a broad outline of the related work has been given.

In the second chapter, stability equation for the isotropic shells are found, for this solution energy method and equality equation are used.

In the third chapter, stiffened rigidity parameters founded, and stability equations for orthotropic shells written. Within those lengthwise and both two directions of stiffener shells under external loads.

In the fourth chapter, in order to explain the energy method stability subject for the lengthwise stiffener shell is used.

In the seventh chapter, numerical examples are given.

In the final chapter of the work the work the results and references take place.

B Ö L Ü M . 1

G İ R İ Ő

1 . 1 . KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI:

1.1.1. STABİLİTENİN TARİFİ VE ÖNEMİ:

h kalınlığı kenar boyları yanında küçük olan bir plak orta düzlemi içinde ve kendi arasında dengede bulunan kenar kuvvetlerinin tesiri altında bir levha olarak zorlanır. Plak bütün kenarları boyunca mesnetlenmiş olup, bu tespit tarzı plak noktalarının plak orta düzlemi içindeki yer değiştirmelere mani olmayacak şekildedir.

Bu kenar gerilmeleri plakta bir düzlem gerilme hali meydana getirir. Bu arada plak orta düzlemi içinde, keyfi doğrultuda tesir eden basınç gerilmeleri teşekkül eder. Kenar kuvvetleri belirli bir değere eriştiğinde, plağın dengesi stabil olmaktan çıkabilir.

Bu düzlem denge formunun yanı sıra, ona sonsuz yakın, fakat kubbeleşmiş en az bir denge formunun daha mevcut olması halinde, plağın dengesi farksız olur. Bu taktirde plak, bu kritik yük değerleriyle kendi stabilite sınırına erişir.

Bu çalışmanın amacı: Genellikle kendi düzlemindeki kenar kuvvetlerinin tesiri altında bulunan plakların stabilite sınırının bulunmasıdır. Bu sınırların bulunmasında burkulma yüzeyi diferansiyel denkleminin integrasyonu ve enerji metotlarını kullanacağız. Çalışmada çözümleri seriler yardımı ile yapacağız.

Stabilitenin büyük bir pratik önemi mevcuttur. Umumiyetle bir plak, kenar kuvvetlerinin kritik değerlerin üzeri-

ne çıkması halinde tahammül edebilir. Buna benzer bir durum aksenel olarak yüklenmiş elastik bir burkulma çubuğunda da mevcuttur. Fakat çubukta pratik olarak, kuvvetin stabilite sınırını ancak cüzi bir miktar aşabilmesi mümkündür. Zira ufak kuvvet artmalarında eğilmeler ve ilave eğilme gerilmeleri çok çabuk büyür.

Plaklarda ise, ekseriya taşıma kabiliyetini tam olarak kaybetmeden evvel plak önemli bir kuvvet artmasını karşılayabilir. Kritik üstü olan bu bölgenin çok ince plaklarda pratik önemi mevcuttur. (Uçak inşaatı)

Fakat yüksek yapı ve köprü inşaatlarında, plakların taşıma kabiliyeti sınırı olarak, stabilite sınırı dikkate alınmalıdır. Çünkü burkulmuş kalın plaklarda, bu sınır aşılacak olursa çok çabuk ve tehlikeli cinsten gerilme halleri teşekkül eder.

1.1.2. PLAKLARDA STABİLİTE SINIRININ BULUNMASI İLE

İLGİLİ METODLAR:

A) BURKULMA YÜZEYİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNTEGRASYONU: (KESİN METOD)

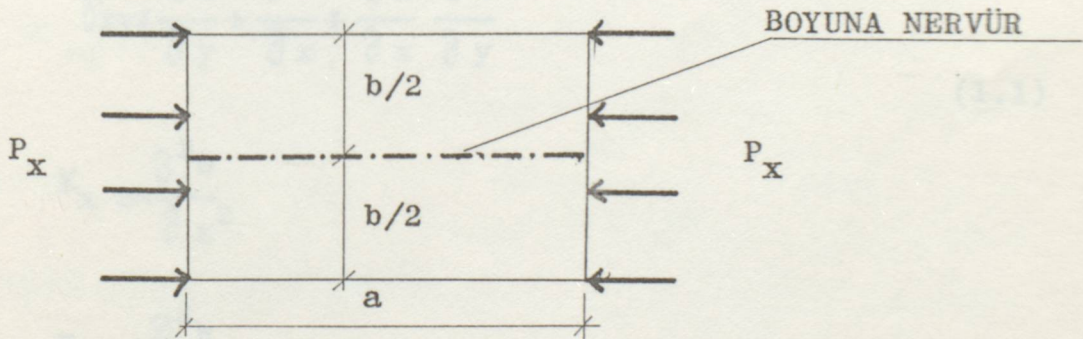
Burkulma yüzeyinin denklemi denge mülahasasından veya enerji metodu yardımı ile bulunabilir. Bu denklemin her sefer cari sınır şartları dikkate alınarak integrasyonu yapıldığı takdirde, stabilite sınırını kesin olarak bulmak mümkün olur. Fakat bu diferansiyel denklemin çözümü sadece belirli yük değerleri ve sonsuz derece küçük eğilmeli denge halleri için mevcuttur.

B) ENERJİ METODU: (YAKLAŞIK ÇÖZÜM)

Pratik bakımdan önemli birçok problemlerde burkulma yüzeyinin diferansiyel denklemini integre etmeksizin yaklaşık bir çözüm bulunabilir. Stabilite probleminin yaklaşık çözümünde enerji metodu çok sık kullanılır.

1.1.3. NERVÜRLERLE TAKFİYE EDİLMİŞ PLAKLARIN STBİLİTESİ:

Plakların bütün burkulma hallerinde normal ve kesme kuvvetlerinin, kritik değerleri, plakların eğilme ^{riçitlikleri} ile orantılıdır. Şu halde, verilen sınır şartları ve verilen a/b oranına haiz dikdörtgen bir plak için kritik gerilmenin şiddeti $(h/b)^2$ ile orantılıdır. Plağın stabilitesi, bu plak kalınlığı arttırılarak büyültülebilir. Fakat böyle bir usul malzemenin ağırlığı yüzünden ekonomik olmaz. Daha ekonomik bir çözüm; plağın kalınlığını mümkün olduğu kadar küçük tutmak stabiliteyi takfiye edici nervürler kullanarak arttırmak sureti ile elde edilir. Örneğin; ŞEKİL.1'de gösterilen x yönünde basınca maruz bir plak halinde stabilite, plağı iki eşit parçaya bölen uygun kesitli, bir boylamasına nervür ilave edilmesiyle dört defa arttırılabilir.



- ŞEKİL.1 -

Bir nervürün ağırlığı, genel olarak plağın kalınlığının da elverişli bir artım yapılınca meydana gelecek ilve ağır-

lıktan daha küçüktür. Pratik işlerde, takfiye nervürlerinin gerilmelerin kritik değerlerini, malzemenin akma gerilmesine eşit yapacak boyutlara sahip olması arzu edilir. Böylece malzemenin mukavemetinden azami derecede yararlanılmış olunur.

Nervürlü plaklarda stabilite problemi, izotrop plaklardaki gibi burkulmuş yüzeyin diferansiyel denkleminin integrasyonu ve enerji metodu kullanılarak çözülebilir. Bu çalışmada ağırlık integrasyon metodunda olmak üzere, her iki metod da anlatılmış ve sayısal örneklerle karşılaştırılmıştır.

1 . 2 . PLAKLARDA DEPLASMAN-DEFORMASYON VE ELASTİSİTE

BAĞINTILARI-KESİT TESİRLERİ VE MEMBRAN DENGE

DENKLEMLERİ:

DEPLASMAN-DEFORMASYON BAĞINTILARI:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

(1.1)

$$K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$K_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ELASTİSİTE BAĞINTILARI VE BÜNYE DENKLEMLERİ:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= H(\epsilon_x + \gamma\epsilon_y) \\ \sigma_y &= H(\epsilon_y + \gamma\epsilon_x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy} = H \frac{(1-\gamma)}{2} \gamma_{xy}$$

Burada: $H = \frac{E}{(1-\gamma^2)}$ dir.

KESİT TESİRLERİ:

$$\begin{aligned} N_x &= C(\epsilon_x + \gamma\epsilon_y) \\ N_y &= C(\epsilon_y + \gamma\epsilon_x) \\ N_{xy} &= C \frac{(1-\gamma)}{2} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$M_x = D(K_x + \gamma K_y)$$

$$M_y = D(K_y + \gamma K_x)$$

$$M_{xy} = D(1-\gamma) K_{xy}$$

Burada: $C = \frac{Eh}{(1-\gamma^2)}$ $D = \frac{Eh^3}{(1-\gamma^2)12}$ dir.

MEMBRAN DENGE DENKLEMLERİ

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -P_x \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -P_y$$

B Ö L Ü M . 2

İZOTROP PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI:

2 . 1 . DENGE MÜLAHAZASINDAN YARARLANARAK BURKULMA

YÜZEYİ DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI:

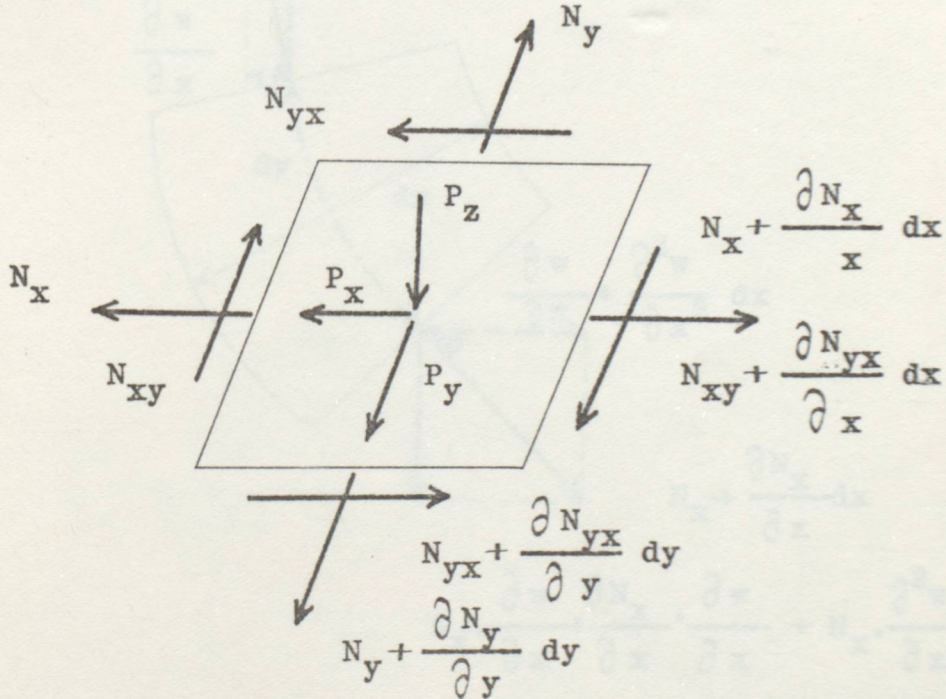
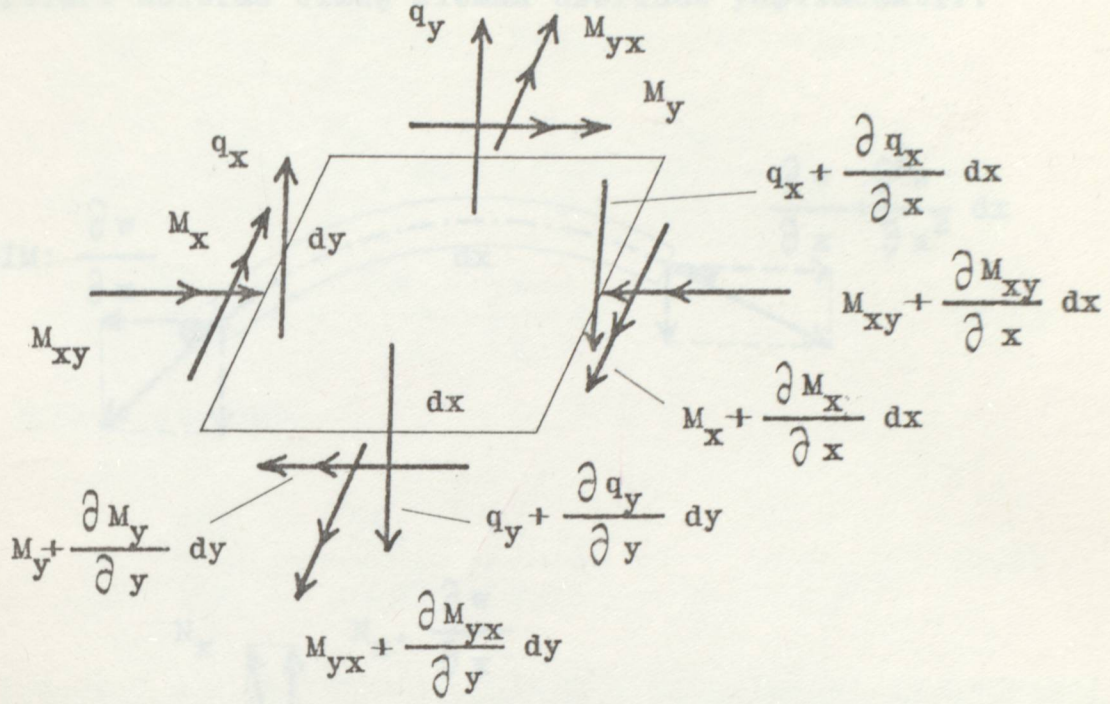
Kenar kuvvetleriyle levha olarak zorlanan düzlem bir plak göze alalım. Plağın mesnetlenme hali, plak noktalarının ortalama düzleme paralel olarak yer değiştirme yapmalarına mani olmayacak şekilde olmalıdır.

Levha tesirinden dolayı, h plak kalınlığına düzgün olarak yayılan σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilme bileşenleri elde edilir. Bunların kesit uzunluğunun birim boyuna isabet eden toplamaları: $N_x = h \cdot \sigma_x$, $N_y = h \cdot \sigma_y$, $N_{xy} = N_{yx} = h \cdot \tau_{xy}$ (2.1)

olsun.

Plağın kenar kuvvetleri plak stabilite sınırına ulaşınca kadar arttırılsın. Bu taktirde düzlem denge durumunun yanı sıra, buna sonsuz yakın en az bir $w(x,y)$ denge konumu mevcuttur. Burada son derece küçük eğilmeler söz konusu olduğundan, kubbe şeklindeki denge konumuna geçiş esnasında, plak ortalama yüzeyinin şekil değiştirmeleri ve N_x , N_y , N_{xy} ve N_{yx} kesit kuvvetlerinde meydana gelen değişmeler dikkate alınmaz.

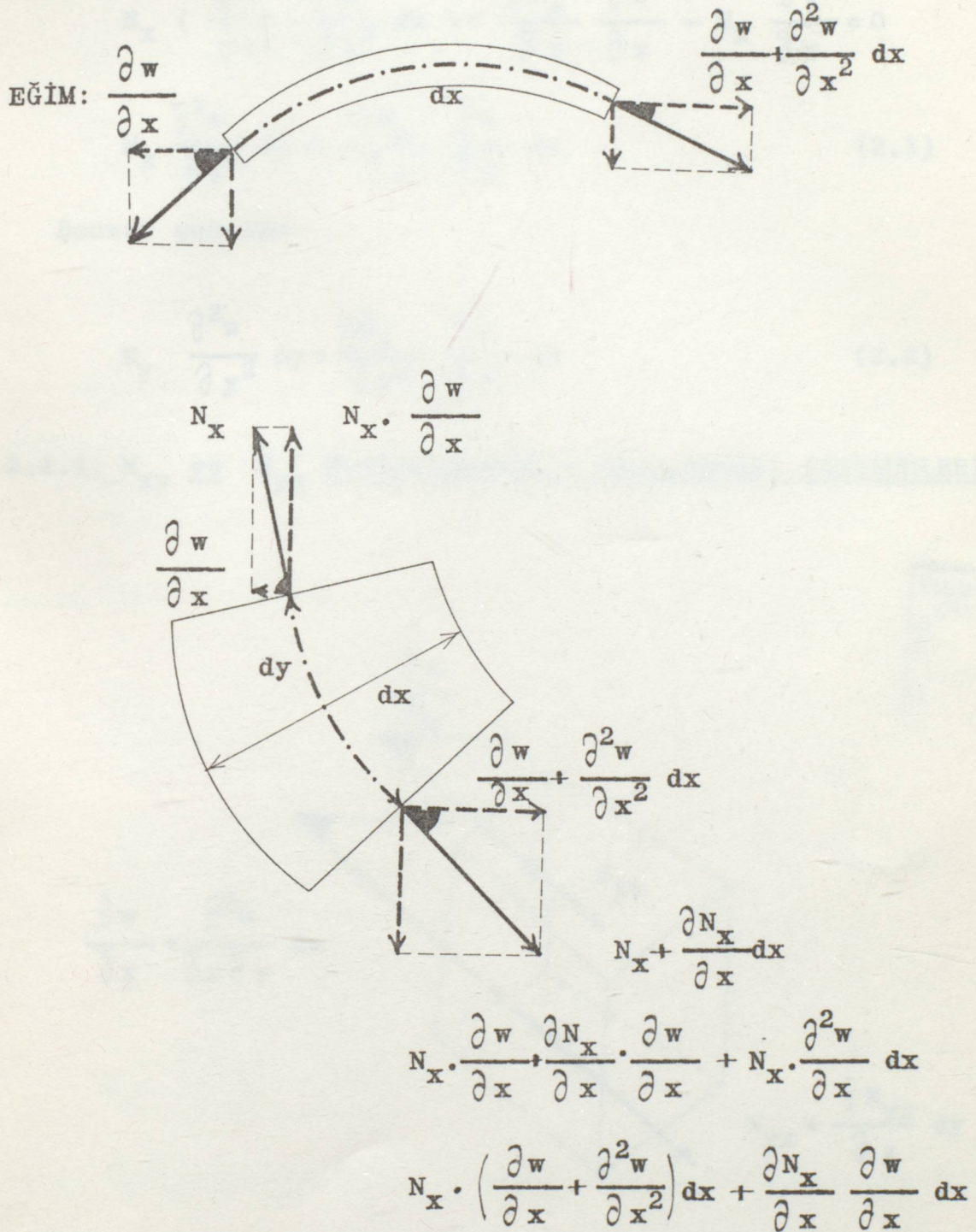
Plak ortalama yüzeyinin eğriliğinden dolayı, (1.3) denklemlerinden görüleceği gibi (M_x, M_y) eğilme momentleri, (M_{xy}, M_{yx}) burulma momentleri ve (q_x, q_y) kesme kuvvetleri teşekkül eder. Bu kesit büyüklükleri, deforme olmamış $dx \cdot dy \cdot h$ plak elemanının ortalama yüzeyindeki gerilme halinin değişmesi dikkate alınarak ŞEKİL.2'de gösterilmiştir.



- ŞEKİL . 2 -

(DEFORME OLMAMIŞ dx, dy, h PLAK ELEMANININ GERİLME HALİNİN DEĞİŞMESİ DİKKATE ALINARAK GÖSTERİLMESİ)

Bütün stabilite çalışmalarında olduğu gibi denge şartları deforme olmuş eleman üzerinde yapılacaktır.



- ŞEKİL.3 -

2.1.1. N_x ve N_y KUVVETLERİNİN z EKSENİNDEKİ İZDÜŞÜMLERİ:

N_x ve $N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx$ Kesit kuvvetlerinden:

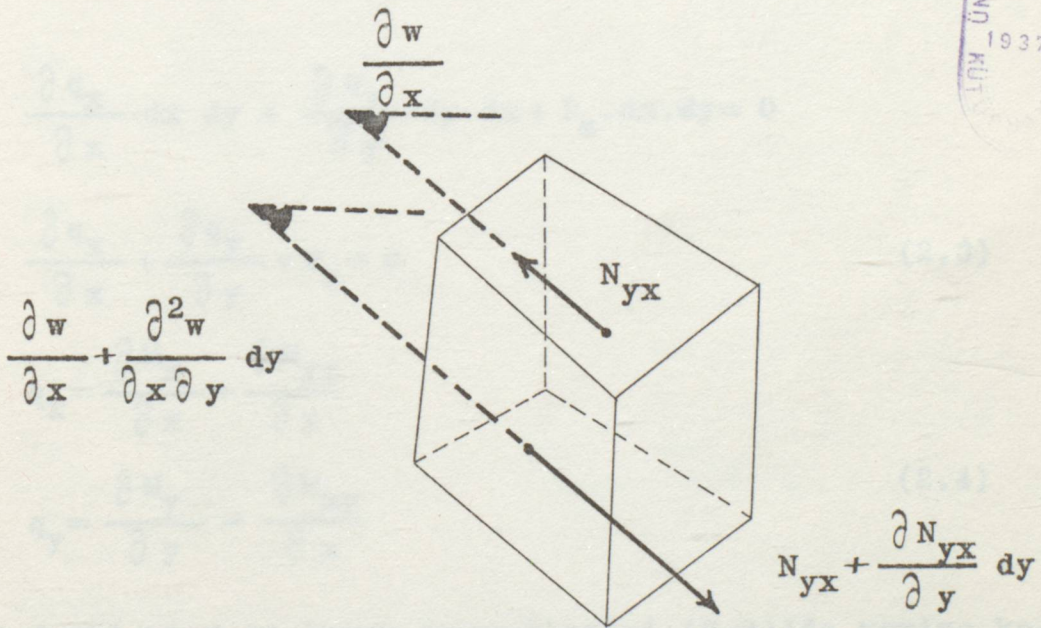
$$N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - N_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (2.1)$$

Benzer şekilde:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (2.2)$$

2.1.2. N_{xy} ve N_{yx} KUVVETLERİNİN z EKSENİNDEKİ İZDÜŞÜMLERİ:



- ŞEKİL.4 -

N_{yx} 'in z eksenindeki izdüşümünden $-N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x}$ yüzey kuvveti bulunur.

$$(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot dy) \text{ 'den ise:}$$

$$(N_{yx} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot dy) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy \right)$$

$$(N_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dy + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy)$$

$$N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot dy \text{ bulunur.}$$

N_{xy} 'de benzer şekilde yazılır.

2.1.3. KESME KUVVETLERİNİN ETKİSİ:

$$q_x \text{ ve } q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx, \quad q_y \text{ ve } q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy$$

Kesme kuvvetlerinin z eksenindeki izdüşümleri:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + P_z \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + P_z = 0 \quad (2.3)$$

$$q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2.4)$$

(2.4) denklemindeki kesme kuvvetlerini (2.3)'de yerine koyarsak:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = - P_z$$

$M_{xy} = M_{yx}$ olduğuna göre:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - P_z \quad \text{bulunur.} \quad (2.5)$$

2.1.4. TOPLAM DENGE DENKLEMLERİ

$$\begin{aligned} & (N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx) dy + (N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy) dx + (N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} dy) dx + \\ & (N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx) dy + (\frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dy + (\frac{\partial q_y}{\partial y} dy) dx + \\ & (\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}) \frac{\partial w}{\partial x} dx dy + (\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}) \frac{\partial w}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned}$$

(1.4) denklemlerinden; x ve y yönlerinde hacim kuvveti yoksa:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y = 0$$

Dolayısıyla:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0$$

olmalıdır.

Bu taktirde toplam denge şu şekilde olur:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -P_z \quad (2.6)$$

Burada:

$$\beta_x = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.7)$$
$$\beta_y = - \frac{\partial w}{\partial y}$$

Eğrilik notasyonları kullanırsak:

$$M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_x \cdot \beta_{x,x} - N_y \cdot \beta_{y,y} - N_{xy} \cdot \beta_{y,x} - N_{yx} \cdot \beta_{x,y} = -P_z$$
$$M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy} - N_x \cdot \beta_{x,x} - N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) - N_y \cdot \beta_{y,y} = -P_z \quad (2.8)$$

2 . 2 . İZOTROP BİR PLAKTA STABİLİTE DENKLEMİNİN

ENERJİ METODU İLE ÇIKARILMASI:

2.2.1. EĞİLME MOMENTLERİ TARAFINDAN YAPILAN İŞ:

$M_x \cdot dy$ ve $M_y \cdot dx$ momentlerinin yaptıkları işler hesaplanır. Elemanın yüzleri düzlem kaldığından eğilmeden sonra, buna tekabül eden yüzdeki açının çarpımının yarısı alınarak bulunur. (1/2 katsayısı etkinin yavaş yavaş arttığı ve şekil değiştirme ile iç kuvvetler arasında orantılık olduğu için mevcuttur.)

$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ yaklaşık olarak plağın xz düzlemindeki eğriliği

olduğundan, bu momentler tarafından yapılan iş:

$$- \frac{1}{2} M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot dx \cdot dy \quad (2.9)$$

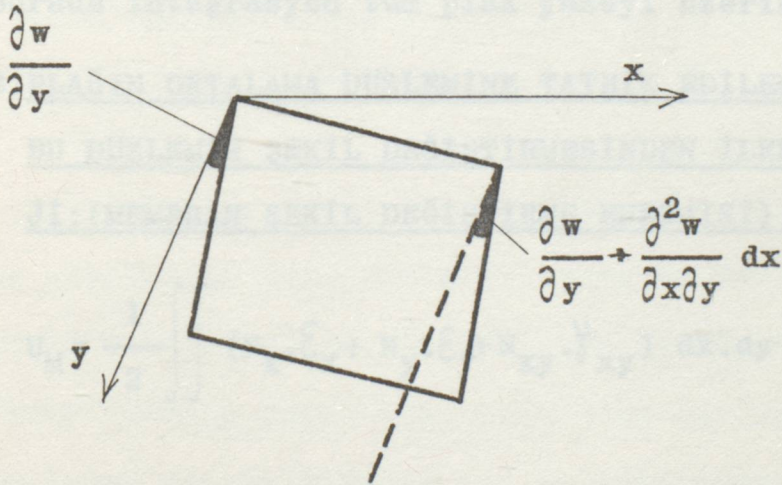
Aynı şekilde $M_y \cdot dx$ momentleri tarafından yapılan işte bu şekilde bulunur. O halde $M_x \cdot dy$ ve $M_y \cdot dx$ momentleri tarafından yapılan toplam iş:

$$- \frac{1}{2} (M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) dx \cdot dy \quad (2.10)$$

(1.1) ve (1.3) denklemlerinden:

$$\begin{aligned} U_{eğilmē} &= \frac{1}{2} [D K_x (K_x + \gamma K_y) + K_y (K_y + \gamma K_x)] dx \cdot dy \\ &= \frac{1}{2} D [K_x^2 + 2\gamma K_x K_y + K_y^2] dx \cdot dy \quad (2.11) \end{aligned}$$

2.2.2. $M_{xy} \cdot dy$ BURULMA MOMENTLERİ TARAFINDAN YAPILAN İŞ:



- ŞEKİL.5 -

Burulma momentleri tarafından meydana gelen işi ifade ederken; buna tekabül eden açı: (ŞEKİL.5)'den:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx.$$

$M_{xy}.dy$ 'den ileri gelen şekil değiştirme enerjisi:

$$\frac{1}{2} M_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx.dy \quad (2.12)$$

Aynı enerji $M_{yx}.dx$ momentleri tarafından da meydana gelir.0 halde $M_{xy}.dy$ ve $M_{yx}.dx$ momentleri tarafından meydana gelen toplam iş:

$$U_{\text{burulma}} = M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx.dy \quad (2.13)$$

(1.1) ve (1.3) denklemlerinden:

$$U_{\text{burulma}} = D (1-\gamma) K_{xy}^2 \quad (2.14)$$

Toplam eğilme enerjisi:

$$U_B = \frac{D}{2} \iint (K_x^2 + K_y^2 + 2 K_x K_y + 2(1-\gamma) K_{xy}^2) dx.dy \quad (2.15)$$

Not:Burada integrasyon tüm plak yüzeyi üzerinde yapılacak)

2.2.3. PLAĞIN ORTALAMA DÜZLEMİNE TATBİK EDİLEN KUVVETLERLE BU DÜZLEMİN ŞEKİL DEĞİŞTİRMESİNDEN İLERİ GELEN ENERJİ:(MEMBRAN ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİ):

$$U_M = \frac{1}{2} \iint (N_x \cdot \epsilon_x + N_y \cdot \epsilon_y + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx.dy \quad (2.16)$$

Not:Burada integrasyon bütün yüzey üzerinde yapılacaktır.)

(1.3) denklemlerinden:

$$U_M = \frac{c}{2} \iint (\xi_x^2 + \xi_y^2 + 2\nu \xi_x \xi_y + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}^2) dx.dy \quad (2.17)$$

2.2.4. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ:

$$V = U + \Omega \quad (2.18)$$

U = Şekil değiştirme enerjisi

Ω = Dış kuvvetlerin işi

Ortalama düzlemdeki kuvvetlerin tesirine maruz plağın verilmiş sınır şartlarına uygun olan küçük bir yanal eğilmeye maruz kaldığını kabul ederiz. Böyle bir sınırlı eğilme, ortalama düzlem şekil değiştirmeden hasıl olabilir. Yalnız eğilme enerjisi ve buna tekabül eden kuvvetlerin yaptığı işi göz önüne almak gerekir.

Plağın düzlemden, sonsuz derece az kubbeleşmiş denge konumuna geçişi esnasında, V toplam potansiyel enerjide meydana gelen ΔV değişimi için:

$$V = U + \Omega \quad \Delta V = \Delta(U + \Omega) = 0$$
$$\Delta V = \text{Minimum} \quad (2.19)$$

bağıntıları mevcuttur.

Stabilite problemi bir varyasyon problemi olarakta tasvir edilebilir. Orta düzlemde kenar ve hacim kuvvetleri ile yüklü olan bu plağa, düzlem denge konumu dışında geometrik olarak mümkün fakat çok küçük olan bir yer değiştirme verdirilecek olursa, virtüel yer değiştirmeler prensibine göre: Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş δU işine eşit olur.

$$\Delta V = \Delta (U + \Omega) \quad , \quad \delta V = \delta (U + \Omega) \quad (2.20)$$

Bu denklem plağın düzlem denge durumundan farklı bir virtüel yer değişimi esnasında potansiyel enerjideki değişimin (Yüksek mertebeden sonsuz küçükler ihmal ediliyor) (0) olduğunu ifade eder. Yani sadece başlangıç durumu bir denge durumudur. Fakat stabilite sınırında plağı (sonsuz) yakın bir denge durumuna götüren ve bu arada potansiyel enerjiyi ikinci mertebeden sonsuz küçükler kadar değişmeyen en az bir yer değiştirme sistemi için:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2} \delta^2 V \dots\dots\dots$$

\Rightarrow Minimum (2.21)

bağıntısı geçerlidir.

Gerçek sisteme sonsuz yakın ikinci bin konumda, toplam potansiyel enerjinin minimum olması, deplasman ve gerilmelerin gerçek denge konumuna karşılık gelen değerler aldığını gösterir.

İşte esas problemde bu toplam potansiyel enerjiyi ekstrem yapan konumun bulunmasına indirgeniyor.

Özet olarak:

Toplam potansiyel enerjideki değişimin 1.varyasyonu bizi denge denklemine, 2.varyasyonu stabilite denklemine götürür. Toplam potansiyel enerjinin minimum olması için gerekli şart 1.varyasyonun (0) 2.varyasyonun minimum olmasıdır.

2.2.5. EĞİLME ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİNİN 2.VARYASYONU:

$$U_b = \frac{D}{2} \iint (K_x^2 + K_y^2 + 2 K_x \cdot K_y + 2(1-\gamma) K_{xy}^2) dx \cdot dy$$

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_0 + u_1 \\ v &\rightarrow v_0 + v_1 \\ w &\rightarrow w_0 + w_1 \end{aligned} \quad (2.22)$$

u_0, v_0, w_0 Denge konumuna karşılık gelen deplasmanlar.
 u, v, w İkinci konumu elde etmek için verilen sonsuz küçük virtüel artımlar.

$$\begin{aligned} K_{x_0} &= - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ K_{y_0} &= - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ K_{xy_0} &= - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.23)$$

u, v, w deplasmanları yerine (2.22)'deki değerlerini koyarak ve (2.23) notasyonlarını kullanarak ikinci konumu elde etmeye çalışalım;

$$\begin{aligned} U_b + \Delta U_b &= \frac{D}{2} \iint \left[K_{x_0}^2 + 2K_{x_0}K_{x_1} + K_{y_0}^2 + 2K_{y_0}K_{y_1} + K_{y_1}^2 + K_{x_1}^2 \right. \\ &\quad \left. + 2(K_{x_0}K_{y_0} + K_{x_0}K_{y_1} + K_{x_1}K_{y_0} + K_{x_1}K_{y_1}) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu)(K_{xy_1}^2 + 2K_{xy_0}K_{xy_1} + K_{xy_0}^2) \right] dx \cdot dy \quad (2.24) \end{aligned}$$

Burada $\frac{1}{2!} \delta^2 U$ değeri (1) indisli kemiyetlerin ikinci derece olan terimlerin toplanmasıyla elde edilir.

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_b = \frac{D}{2} \iint \left[K_{xy_1}^2 + K_{y_1}^2 + 2K_{x_1}K_{y_1} + 2(1-\nu)K_{xy_1}^2 \right] dx \cdot dy \quad (2.25)$$

2.2.6. MEMBRAN ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİNİN 2. VARYASYONU:

$$U_M = \frac{1}{2} \iint \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\gamma \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{(1-\gamma)}{2} \gamma_{xy}^2 \right) dx \cdot dy \quad (2.25)$$

(1.1) deformasyon-deplasman bağıntılarından yararlanıp gerekli operasyonları yaparsak:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_y^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x \varepsilon_y = & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^2 = & \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Bu denklemleri (2.7)'de yerlerine koyarsak:

$$\begin{aligned} U_M = \frac{c}{2} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \\
 & + 2\gamma \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{1-\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right. \\
 & \left. + 2 \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \} dx \cdot dy
 \end{aligned}$$

Yukarıda $u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1$ değerleri yerlerine konarak $U_M + \Delta U_M$ elde edildi. Bundan u_0, v_0, w_0 deplasmanlarından oluşan denge konumundaki değerleri çıkarırsak enerjideki ΔU değişimini elde ederiz.

$$\Delta U = \delta U + \frac{1}{2!} \delta^2 U$$

Burada $\frac{1}{2!} \delta^2 U$ 'nun değeri (1) indisli kemiyetlerin 2. derece olan terimlerin toplanması ile elde edilir. ($w_0 \neq 0$)

$$\frac{1}{2!} \delta^2 U_M = \frac{c}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\gamma \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{(1-\gamma)}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right] \} dx \cdot dy \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2!} \delta^2 U_M &= \frac{c}{2} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2\gamma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{(1-\gamma)}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \\
 & + \frac{c}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)}_{N_{xo}/c} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)}_{N_{yo}/c} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \underbrace{\left(\frac{1-\gamma}{2} \cdot \left(2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right)}_{N_{xyo}/c} \right] \cdot dx \cdot dy \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{c}{2} \iint \left\{ \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2\gamma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1-\gamma}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy \\
 & + \frac{1}{2} \iint \left[N_{xo} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + N_{yo} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right.
 \end{aligned}$$

$$+ 2 N_{xyo} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)] dx \cdot dy \quad (2.32)$$

(2.32) denkleminde 2.integral dış kuvvetlerin(plak düzlemindeki levha kuvvetlerinin)yaptığı işi göstermektedir Çünkü kabülümüzde orta düzleme dik kuvvet yoktur ve plak kendi düzlemi içindeki kuvvetler tarafından zorlanmaktadır.

0 halde toplam potansiyel enerji ifadesi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \iint (N_{xo} \cdot \beta_{x1}^2 + N_{yo} \cdot \beta_{y1}^2 + 2 N_{yxo} \cdot \beta_{x1} \cdot \beta_{y1}) dx dy$$
$$+ \frac{D}{2} \iint [K_{x1}^2 + K_{y1}^2 + 2\gamma K_{x1} \cdot K_{y1} + 2(1-\gamma)K_{xy1}^2] dx \cdot dy \quad (2.33)$$

Bu ifade minimum yapılmalıdır.

(2.33) Toplam potansiyel enerji ifadesini başka şekilde de ifade edebiliriz;

$\Delta A_i =$ Şekil değiştirme enerjisi.

$$\Delta A_i = \Delta A_i' + \Delta A_i'' \quad (2.34)$$

$A_i' \rightarrow N_x, N_y$ ve N_{xy} iç kuvvetleri ile kubbeleşme esnasında meydana gelen ilave ϵ_x, ϵ_y boy değişimleri ve γ_{xy} açı değişiminden meydana gelen iş.

$$\Delta A_i' = \iint (N_x \cdot \epsilon_x + N_y \cdot \epsilon_y + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx \cdot dy \quad (2.35)$$

Not: N_x, N_y ve N_{xy} iç kuvvetleri kubbeleşmenin başlangıcın da tam değerlerini almış olduğundan 1/2 faktörü silinir.

ϵ_x, ϵ_y ve γ_{xy} yerine (1.1)'deki değerleri yazalım;

$$\Delta A_1 = \iint \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. + N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx \cdot dy \quad (2.36)$$

Daha önce eğilme enerjisi ifadesini bulmuştuk.(2.15).Bu ifadeyi düzenlersek:

$$A_1'' = D \iint \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1-\gamma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.37)$$

İç kuvvetlerin yaptığı iş (2.34)'e göre : (2.36) ve (2.37) denklemlerinin toplamlarından bulunur.Buna göre:

Toplam potansiyel enerji:

$$\Delta V = \iint \left\{ N_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + N_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right. \\ \left. N_{xy} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right\} dx \cdot dy \\ + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\gamma) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \Delta A_a = 0 \quad (2.38)$$

Burada ΔA_a dış kuvvetlerin işini göstermektedir.

(2.38) denkleminde plağın kubbeleşmesi esnasında meydana gelen ilave düzlem şekil değiştirmelerden dolayı u ve v bilinmeyen yer değiştirme bileşenleri bulunur.Bunları götürmek için düzlem bir virtüel yer değiştirme dikkate ala-

lım.Bu durumda plak noktaları sadece ortalama yüzeye paralel olan u ve v yer değiştirmelerine maruz kalırlar.Yani plak noktaları u,v,(w=0) virtüel yer değişimi yaparlar.

Dolayısıyla:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{olur.}$$

Buradan (2.35)'e göre levha kuvvetlerinden meydana gelen virtüel Şekil değiştirme işi:

$$\Delta \bar{A}_1 = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy = \Delta \bar{A}_a \quad (2.39)$$

Virtüel iř prensibinde (2.38)'e göre hesaplanan ΔA_a harici işi (2.39)'da bulunan $\Delta \bar{A}_a$ işine eşit olmalıdır.

(2.39) ifadesi (2.38)'de yerine koyulursa:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \iint \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \cdot dy = 0 \quad (2.40)$$

(2.40) ifadesi,(2.33) ifadesi ile çakışır.

2.2.7. TOPLAM POTANSİYEL ENERJİNİNİN MİNİMUM OLMA KOŞULU

VE EULER DENKLEMİ:

ΔV toplam potansiyel enerjinin ekstrem bir değer ala-

bilmesi için bu ifadenin 1.varyasyonunun 0 olması gerekir. Varyasyon hesabından bilindiğine göre, sınırlı bir integralin extrem(minimum) bir değer alabilmesi problemini, daima bir diferansiyel denkleme indirgemek mümkündür.

Varyasyon probleminin euler denklemleri:

$$\Delta V = \int_{\bar{F}} \bar{\Phi}(w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) dF = 0 \text{ (Min)} \quad (2.41)$$

$$-\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial w_x}\right)_x - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial w_y}\right)_y - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial w_{xx}}\right)_{xx} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial w_{xy}}\right)_{xy} - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial w_{yy}}\right)_{yy} = 0 \quad (2.42)$$

Toplam potansiyel enerji denklemi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \iint (N_{x0} \cdot \beta_{x1}^2 + N_{y0} \cdot \beta_{y1}^2 + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x1} \cdot \beta_{y1}) dx \cdot dy$$

$$\frac{D}{2} \iint [K_{x1}^2 + K_{y1}^2 + 2\gamma K_{x1} \cdot K_{y1} + 2(1-\gamma) K_{xy1}^2] \cdot dx \cdot dy$$

şeklinde idi.

(2.42)'deki operasyonları yaparsak:

$$-\frac{1}{2} \left[2N_{x0,x} \cdot \beta_x + 2N_{x0} \cdot \beta_{x,x} + 2N_{xy0,x} \cdot \beta_y + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x,y} \right]$$

$$+ 2N_{y0,y} \cdot \beta_y + 2N_{y0} \cdot \beta_{y,y} + 2N_{xy0,y} \cdot \beta_x + 2N_{xy0} \cdot \beta_{x,y}$$

$$+ \frac{D}{2} \left[2K_{x1,xx} + 2K_{y1,xx} + 4(1-\gamma)K_{xy1,xy} + 2K_{y1,yy} + 2K_{x1,yy} \right] = 0$$

(2.43)

$$\begin{aligned} & - \left[N_{x_0} \cdot \beta_{x,x} + N_{y_0} \cdot \beta_{y,y} + N_{x_{y_0}} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) \right. \\ & \left. + \beta_x \underbrace{(N_{x_0,x} + N_{x_{y_0},y})}_{P_x} + \beta_y \underbrace{(N_{y_0,y} + N_{x_{y_0},x})}_{P_y} \right] \\ & + D (K_{x_1,xx} + K_{y_1,yy} + 2 K_{x_{y_1},xy}) = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

x ve y yönlerinde hacim kuvvetliri yoktur. ($P_x = 0, P_y = 0$)

0 halde:

$$\begin{aligned} & D (K_{x_1,xx} + 2 K_{x_{y_1},xy} + K_{y_1,yy}) \\ & - \left[N_{x_0} \cdot \beta_{x,x} + N_{y_0} \cdot \beta_{y,y} + N_{x_{y_0}} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Deplasmanlar cinsinden ifade edilirse:

$$\begin{aligned} & D (w_{1,xxxx} + 2 w_{1,xyyy} + w_{1,yyyy}) \\ & - (N_{x_0} \cdot w_{1,xx} + 2 N_{x_{y_0}} \cdot w_{1,xy} + N_{y_0} \cdot w_{1,yy}) = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Şeklinde izotrop plak stabilite denklemi elde edilir.

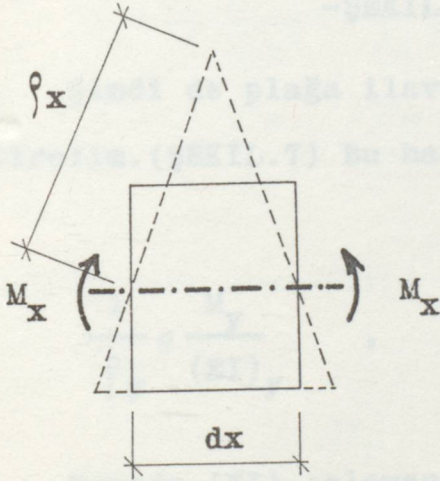
B Ö L Ü M . 3

NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN BULUNMASI:

3 . 1 . NERVÜR ELASTİSİTE SABİTLERİ KULLANILARAK PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİNİN ÇIKARILMASI:

3.1.1. ANİZOTROP PLAKLARDA M_x , M_y ve M_{xy} İFADELERİNİN BULUNMASI:

Her iki doğrultuda farklı teçhizata haiz olan nervürlü plaklar ince homojen levhalar şeklinde hesaplanabilirler Fakat eğilme rijitlikleri birbirine dik iki doğrultuda önemli değerlere sahiptir. Bunun için bir ortotropi göz önüne alınması gerekir.



-ŞEKİL.6-

Bu elemana birim şiddeti M_x olan kesit momentleri tesir etmektedir.(ŞEKİL.6)

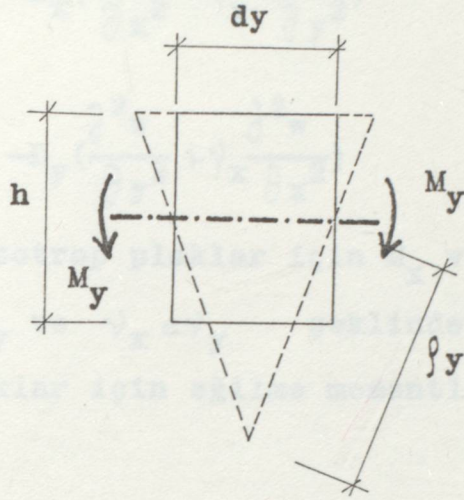
x sabit kesidinin birim boyunun xz düzlemindeki eğilmeye karşı eğilme rijitliği $(EI)_x$, bu düzlemde meydana gelen eğrilik $1/\rho_x$ olsun.

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{(EI)_x} \quad (3.1)$$

Elastik yanıl deformasyondan dolayı xz düzlemine paralel olan yan yüzler birbirine nazaran çarpılır. Ve eleman xz düzleminde aşağıya doğru içbükey eğrilir.

Bu hale tekabül eden $1/\rho_y$ eğriliği ise:

$$\frac{1}{\rho_y} = -\gamma_x \frac{M_x}{(EI)_x} \quad (3.2)$$



-ŞEKİL.7-

Şimdi de plağa ilave olarak M_y eğilme momentini tesir ettirelim.(ŞEKİL.7) Bu halde:

$$\frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{(EI)_y}, \quad \frac{1}{\rho_x} = -\gamma_y \frac{M_y}{(EI)_y} \quad (3.3)$$

Burada $(EI)_y$; elemanın yz düzleminde vuku bulan eğilme-ye karşı, y sabit kesidinin birim boyunun eğilme rijitliğidir.

M_x ve M_y momentleri aynı anda tesir ederse:

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{(EI)_x} - \gamma_y \frac{M_y}{(EI)_y}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{(EI)_y} - \gamma_x \frac{M_x}{(EI)_x} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\rho_x} \cong -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} \cong \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$D_x = \frac{(EI)_x}{1-\gamma_x \gamma_y}, \quad D_y = \frac{(EI)_y}{1-\gamma_x \gamma_y} \quad (\text{plak rijitlikleri}) \quad (3.5)$$

Bu denklemlerden hareket ederek:

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.6)$$

$$M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Anizotrop plaklar için M_x ve M_y ifadeleri bulunmuş olur. $D_x = D_y$ ve $\nu_x = \nu_y$ şeklinde ifadeyi düzenlersek izotrop plaklar için eğilme momentleri ifadelerini bulmuş oluruz:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.7)$$
$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Şimdi burulma momentleri için bir ifade bulalım:

$$M_{xy} = M_{yx}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{İzotrop plaklarda}) \quad (3.8)$$

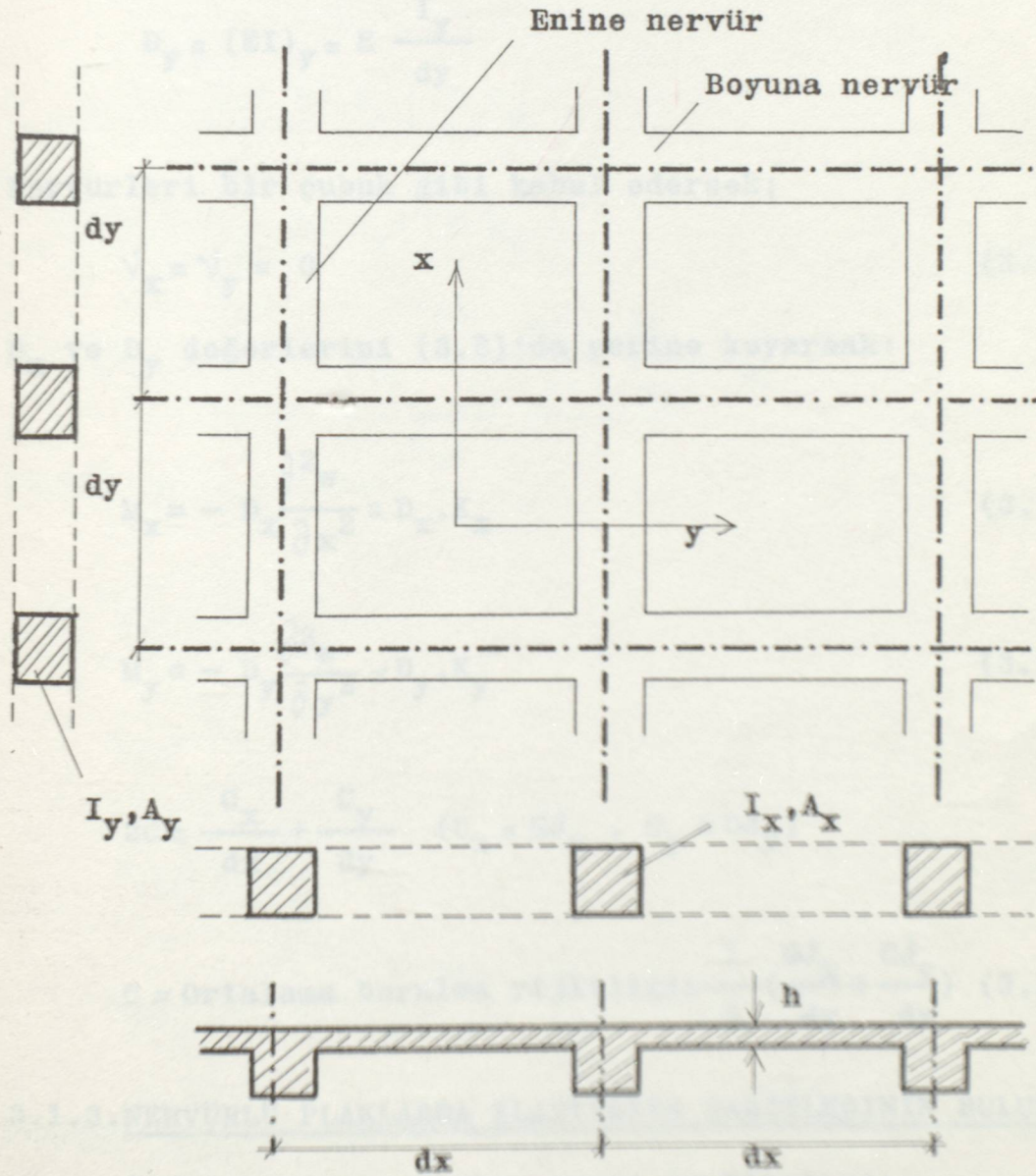
Ortotrop plaklarda ise, burulma momentleri $M_{xy} = M_{yx}$ den dolayı her iki asal doğrultunun elastisite sabitlerine aynı tarzda bağlı olmalıdır. Buna göre; D ve ν değerlerinin ortalamasını koymalıyız. Ortalama D yerine $\sqrt{D_x D_y}$, ortalama ν yerine $\sqrt{\nu_x \nu_y}$ yazarsak:

$$M_{xy} = -(1-\sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.9)$$

Bu ifadede: $2C = (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y}$ dir.

Izotrop plaklar için: $2C = (1 - \nu)D = 2G \frac{h^3}{12}$ olur.

3.1.2. NERVÜR ELASTİSİTE SABİTLERİNİN BULUNMASI (D_x, D_y, C):



-ŞEKİL. 8-

Yalnız nervürleri düşünelim:

Nervürlerin x ve y doğrultularındaki aralıkları dx ve dy, enkesit atalet momentleri I_x ve I_y olsun. Malzemenin elastisite modülü E ise:

$$D_x = (EI)_x = E \frac{I_x}{dx} \quad (3.10)$$

$$D_y = (EI)_y = E \frac{I_y}{dy}$$

Nervürleri bir çubuk gibi kabul edersek;

$$v_x = v_y = 0 \quad (3.11)$$

D_x ve D_y değerlerini (3.6)'da yerine koyarsak:

$$M_x = - D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = D_x \cdot K_x \quad (3.12)$$

$$M_y = - D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D_y \cdot K_y \quad (3.13)$$

$$2C = \frac{C_x}{dx} + \frac{C_y}{dy} \quad (C_x = GJ_x, C_y = GJ_y)$$

$$C = \text{Ortalama burulma rijitliği} = \frac{1}{2} \left(\frac{GJ_x}{dx} + \frac{GJ_y}{dy} \right) \quad (3.14)$$

3.1.3. NERVÜRLÜ PLAKLARDA ELASTİSİTE SABİTLERİNİN BULUNUŞU:

İzotrop plaklar için moment denklemleri:

$$M_x = D (K_x + \nu K_y) \quad (3.15)$$

$$M_y = D (K_y + \nu K_x) \quad (3.16)$$

$$M_{xy} = D(1-\nu) K_{xy} \quad (3.17)$$

şeklinde idi.

(3.12) ve (3.15)

(3.13) ve (3.16)

(3.14) ve (3.17) denklemlerini süperpoze edersek:

$$M_x = \underbrace{(D_x + D)}_{C_{44}} K_x + \underbrace{\nu D}_{C_{45}} K_y \quad (3.18)$$

$$M_y = \underbrace{(D_y + D)}_{C_{55}} K_y + \underbrace{\nu D}_{C_{451}} K_x \quad (3.19)$$

$$M_{xy} = \underbrace{D(1-\nu) K_{xy} + \frac{1}{2} \left(\frac{GJ_x}{dx} + \frac{GJ_y}{dy} \right) K_{xy}}_{C_{66}} \quad (3.20)$$

(3.10) ve (3.14)'den:

$$C_{44} = D + \frac{EI_x}{dx} \quad (3.21)$$

$$C_{45} = \nu D \quad (3.22)$$

$$C_{55} = D + \frac{EI_y}{dy} \quad (3.23)$$

$$C_{66} = (1-\nu)D + \frac{1}{2} \left(\frac{GJ_x}{dx} + \frac{GJ_y}{dy} \right) \quad (3.24)$$

Şeklinde nervürlü plaklarda elastisite sabitleri bulunur.

3.1.4. NERVÜRLÜ PLAKLARIN STABİLİTE DENKLEMİ:

İzotrop plaklar için stbilite denklemi;

$$M_{x,xx} + 2 M_{xy,xy} + M_{y,yy}$$

$$-N_x \cdot \beta_{x,x} - N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) - N_y \cdot \beta_{y,y} = 0$$

(3.18), (3.19), (3.20) denklemlerinden:

$$M_x = C_{44} \cdot K_x + C_{45} \cdot K_y$$

$$M_y = C_{55} \cdot K_y + C_{45} \cdot K_x$$

$$M_{xy} = C_{66} \cdot K_{xy}$$

$$C_{44} \cdot K_{x,xx} + C_{45} \cdot K_{y,xx} + 2 C_{66} \cdot K_{xy,xy} + C_{55} \cdot K_{y,yy} + C_{45} \cdot K_{x,yy} - (N_x \cdot \beta_{x,x} + N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) + N_y \cdot \beta_{y,y}) = 0 \quad (3.25)$$

$$C_{44} \cdot K_{x,xx} + C_{45} (K_{y,xx} + K_{x,yy}) + 2 C_{66} \cdot K_{xy,xy} + C_{55} \cdot K_{y,yy} - (N_x \cdot \beta_{x,x} + N_{xy} (\beta_{y,x} + \beta_{x,y}) + N_y \cdot \beta_{y,y}) = 0 \quad (3.26)$$

Deplasmanlar cinsinden yazılırsa:

$$C_{44} \cdot w_{1,xxxx} + 2C_{45} \cdot w_{1,xyxy} + 2C_{66} \cdot w_{1,xyxy} + C_{55} \cdot w_{1,yyyy} - (N_{x0} \cdot w_{1,xx} + 2N_{xy0} \cdot w_{1,xy} + N_{y0} \cdot w_{1,yy}) = 0 \quad (3.27)$$

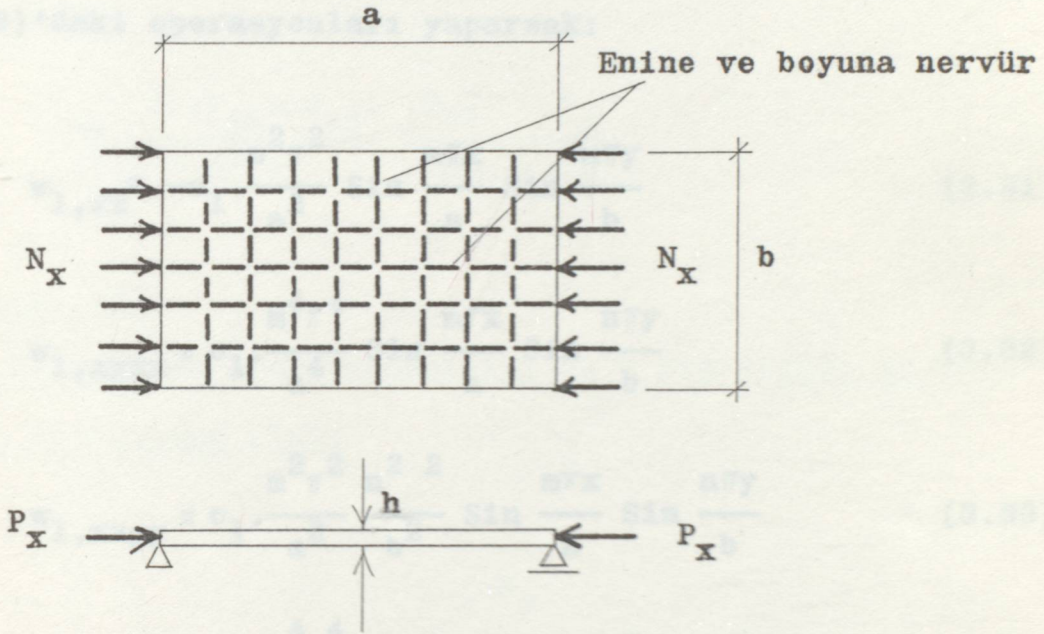
Gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$C_{44} \cdot w_{1,xxxx} + 2(C_{45} + C_{66}) w_{1,xyxy} + C_{55} \cdot w_{1,yyyy} - (N_{x0} \cdot w_{1,xx} + 2 N_{xy0} \cdot w_{1,xy} + N_{y0} \cdot w_{1,yy}) = 0 \quad (3.28)$$

3.1.5. PRATİK UYGULAMALAR:

UYGULAMA I.

Dört kenarından basit mesnetli, yalnız x yönünde basınca maruz dikdörtgen plak:



-ŞEKİL.9-

ŞEKİL.9'daki gibi yüklenmiş plak elemanında $N_y = N_{xy} = 0$ olmalıdır. N_x yayılı kuvvetini $-P_x/b$ şeklinde bir tekil kuvvet olarak düşünersek (3.28) nervürlü plak stabilite denklemi şu şekli alır:

$$C_{44} \cdot w_{1,xxxx} + 2(C_{45} + C_{66}) w_{1,xyyy} + C_{55} \cdot w_{1,yyyy} = - \frac{P_x}{b} \cdot w_{1,xx} \quad (3.29)$$

(3.29) denklemini çözebilmek için, verilen sınır şartlarını sağlayan ikâme bir seri seçmek gerekmektedir. Bu seri böyle bir seri olmalıdırki verilen kenar şartlarını sağlama-

lıdır. Verilen sınır şartlarını sağlayan uygun seri:

$$w_1 = c_1 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.30)$$

şeklindedir. Bu ikâme seri $w = 0$ ve $M_x = 0$ şartlarını sağlar.

(3.29)'daki operasyonları yaparsak:

$$w_{1,xx} = -c_1 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.31)$$

$$w_{1,xxxx} = c_1 \cdot \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.32)$$

$$w_{1,xyyy} = c_1 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.33)$$

$$w_{1,yyyy} = c_1 \cdot \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.34)$$

(3.31), (3.32), (3.33) ve (3.34) denklemleri (3.29)'da yerlerine koyularak:

$$\begin{aligned} & C_{44} \cdot c_1 \cdot \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + 2 (C_{45} + C_{66}) \cdot c_1 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ & + C_{55} \cdot c_1 \cdot \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned}$$

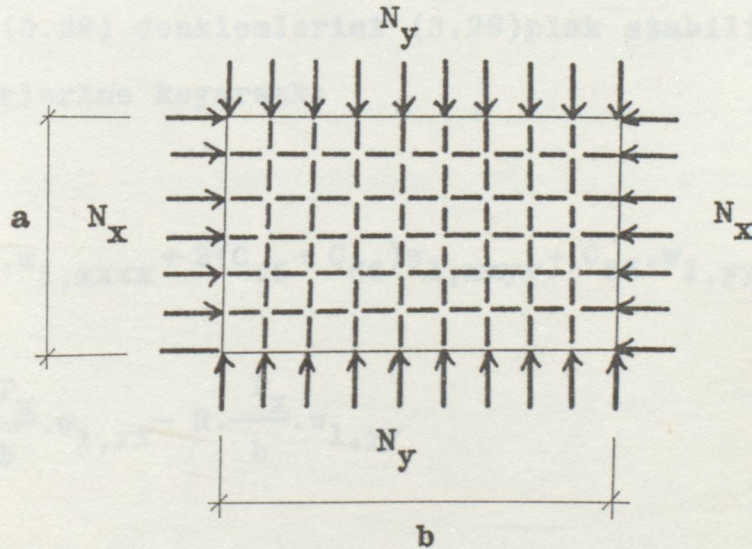
$$= \frac{P_x}{b} \cdot c_1 \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.35)$$

Bu denklem $c_1 \cdot \pi^4 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ ile kısaltılır ,
x ve y yönlerinde birer dalga boyu şeklinde burkulduğu dü-
şünülürse($m = 1, n = 1$):

$$\frac{C_{44}}{a^4} + \frac{2(C_{45} + C_{66})}{a^2 b^2} + \frac{C_{55}}{b^4} = \frac{P_x}{b \pi^2 a^2} \quad (3.36)$$

UYGULAMA II.

Dört kenarından basit mesnetli, x ve y yönlerinde kuvvete maruz dikdörtgen plak:



-ŞEKİL.10-

ŞEKİL.10'daki gibi yüklenmiş plak elemanında $N_{xy} = 0$ olmalıdır. Plak kenarları basit mesnetli kabul edildiklerinden, (3.30)'da gösterilen ikâme seriyi kullanabiliriz.

Bu taktirde stabilite denklemi;

$$\begin{aligned} & C_{44} \cdot w_{1,xxxx} + 2(C_{45} + C_{66})w_{1,xyy} + C_{55} \cdot w_{1,yyyy} \\ & = N_x \cdot w_{1,xx} + N_y \cdot w_{1,yy} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Görüldüğü gibi bu denklemde N_x ve N_y bilinmeyenleri mevcuttur. Bu sebeple birini diğeri cinsinden yazabiliriz:

$$N_x = -P_x/b \quad (3.38)$$

$$N_y = -P_y/a$$

$$\frac{P_y}{a} = R \cdot \frac{P_x}{b} \quad (R \text{ boyutsuz bir sabittir.}) \quad (3.39)$$

(3.38) ve (3.39) denklemlerini (3.28) plak stabilite denkleminde yerlerine koyarsak:

$$\begin{aligned} & C_{44} \cdot w_{1,xxxx} + 2(C_{45} + C_{66})w_{1,xyy} + C_{55} \cdot w_{1,yyyy} \\ & = - \frac{P_x}{b} \cdot w_{1,xx} - R \cdot \frac{P_x}{b} \cdot w_{1,yy} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Bu denklemdeki türev operasyonlarını (3.31), (3.32) (3.33) ve (3.34) denklemlerinde göstermiştik. Buna ek olarak

$$w_{1,yy} = o_1 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.41)$$

türevini de alıp , (3.40) denklemine koyarsak ve çıkan ifadeyi $c_1 \cdot \pi^4 \sin \frac{m x}{a} \sin \frac{n y}{b}$ ile sadeleştirirsek:

$$\begin{aligned} & C_{44} \cdot \frac{m^4}{a^4} + 2(C_{45} + C_{66}) \frac{m^2}{a^2} \frac{n^2}{b^2} + C_{55} \cdot \frac{n^4}{b^4} \\ &= \frac{P_x}{b} \cdot \frac{m^2}{\pi^2 a^2} + R \cdot \frac{P_x}{b} \cdot \frac{n^2}{\pi^2 b^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Buradan R,m ve n'nin değişik değerlerine göre kritik P_x ve P_y kuvvetleri bulunabilir.

3 . 2. NERVÜRLERİN PLAK KALINLIĞINA KATILMASIYLA NERVÜRLÜ PLAKLARDA STABİLİTE HESABI:

Bu metodda,nervürlerin kesit alanı,nervür aralığına bölünerek,belli bir kalınlık olarak plak kalınlığına katılmakta ve elde edilen bu ortalama kalınlığa göre izotrop bir bir plak hesabı yapılarak yaklaşık bir çözüm yapılabilmektedir.

$$h_{ort} = h_{plak} + A(\text{nervür kesit alanı})/dx \quad (3.43)$$

B Ö L Ü M . 4

ENERJİ METODU İLE STABİLİTE HESABI:

Nervürlerin kesit boyutları ile plaktaki gerilmelerin kritik değerleri arasındaki bağıntıyı enerjik yöntem kullanarak değişik bir yoldan bulmaya çalışalım. Bu çalışmada metodu izah etmek için ve hesaplarda kolaylık maksadıyla yalnız x yönünde basınca maruz dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen plak elemanı alacağız.

4 . 1 . BOYUNA NERVÜRLÜ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAK:

Mesnetlenme şekli dört kenarından basit mesnetli olduğu için, burkulmuş plağın elastik yüzeyini (3.30)'daki gibi aşağıdaki şekilde alacağız:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.1)$$

Bu serinin her terimi $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ değerleri için (0) olur. Buna göre istendiği gibi çevre boyunca $w = 0$ 'dır.

A) Plağın şekil değiştirme enerjisi:

2. Bölümde izah edildiği gibi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx \cdot dy \quad (4.2)$$

Bu denklemde w yerine (4.1) ikame serisini koyarsak:

$$\Delta V = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dx dy \quad (4.3)$$

ifadesini buluruz.

$$\iint_{0 \ 0}^a \ b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (4.4)$$

integrali hesaplarsak:

$$\Delta V = \frac{a \ b}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad (4.5)$$

$$\Delta V = \frac{a \ b}{8} \pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (4.6)$$

B) Bir çok nervürü genel bir hal farzeder ve $y = 0$ kenarında $-c_i$ mesafedeki bir nervürün plakla beraber burkulduğunda eğilme enerjisi:

$$\Delta V_i = \frac{EI_x}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=c_i} dx \quad (4.7)$$

$$\Delta V_i = \frac{4B_1}{4a^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(a_{m1} \cdot \sin \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \cdot \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 \quad (4.8)$$

C) Burkulma esnasında plağa tesir eden N_x basınç kuvvetleri tarafından yapılan iş:

N_x, N_y ve N_{xy} iç kuvvetleri ile kubbeleşme esnasında oluşan ilave boy ve açı değişiminden meydana gelen iş:

$$\int_0^a \int_0^b (N_x \cdot \varepsilon_x + N_y \cdot \varepsilon_y + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx \cdot dy \quad (4.9)$$

(1.1)'deki deplasman-Deformasyon bağıntılarından:

$$T_h = \int_0^a \int_0^b \left[N_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy \quad (4.10)$$

$$T_v = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx \cdot dy \quad (4.11)$$

T_h = Plâgin orta düzlemine tesir eden kuvvetlerin yaptığı iş.

$$\begin{aligned} T_h + T_v &= \int_0^a \int_0^b \left[N_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx \cdot dy \\ &= (N_x \cdot \varepsilon_x + N_y \cdot \varepsilon_y + N_{xy} \cdot \gamma_{xy}) dx \cdot dy \end{aligned}$$

Küçük sehimleri göz önüne almamız halinde plâgin orta düzlemindeki uzamalar ihmal edilir.

$$\varepsilon_x = 0 \quad \varepsilon_y = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

Bu değerleri (4.10)'da yerine koyarsak:

$$T_h = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx \cdot dy \quad (4.12)$$

Plak yalnız x doğrultusunda basınca maruz ise:

$$T_h = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \cdot dy \quad (4.13)$$

w yerine (4.1)'deki seçilir ise:

$$\Delta T = \frac{a b}{8} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (4.14)$$

D) Burkulma esnasında bir nervüre tesir eden P_1 basınç kuvvetleri tarafından yapılan iş:

$$\Delta T_i = \frac{P_i}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2_{y=c_i} dx \quad (4.15)$$

$$\Delta T_i = \frac{P_i}{2} \frac{\pi^2}{a^2} \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{m1} \cdot \sin \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \cdot \sin \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 \quad (4.16)$$

EĞİLME ENERJİSİ = BURKULMA ESNASINDA BASINÇ KUVVETLERİ
TARAFINDAN YAPILAN İŞ

$$\Delta V + \Delta \sum_i V_i = \Delta T + \Delta \sum_i T_i \quad (4.17)$$

$$\frac{a}{b} = \beta$$

$$\frac{B_i}{bD} = \delta_i \quad (4.18)$$

$$\frac{P_i}{bN_x} = \frac{A_i}{b h} = \delta_i$$

Notasyonları kullanalım.

$bh =$ Plağın kesit alanı.

$A_1 =$ Bir nervürün kesit alanı.

$B_1 = EI_x$ Nervür eğilme rijitliği.

Şimdi genel hal (Birçok nervür halinde) plak elemanımızı ele alalım:

(4.17) denklemini oluşturan değerlere birtakım matematiksel işlemler uygulayalım;

$$\Delta \sum_i V_i = \frac{\pi^4 B_1}{4a^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2$$

Bu denklemi $\frac{8a^3}{D\pi^4 b}$ ile çarpalım.

$$\frac{8a^3}{D\pi^4 b} \Delta \sum_i V_i = 2 \sum_i \chi_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \sin \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \quad (4.19)$$

$$\Delta V = \frac{\pi^4 a^3}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

$$\frac{8a^3}{D\pi^4 b} \Delta V = \frac{8a^3}{D\pi^4 b} \frac{\pi^4 D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

$$= a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (4.20)$$

$$= a^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(m^4 + 2 \frac{a^2 m^2 n^2}{b^2} + \frac{a^4 m^4}{b^4} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{8a^3}{D\pi^4 b} \Delta V &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)^2 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (m^2 + \beta^2 n^2)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\Delta T = \frac{N_x b \pi^2}{8a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2$$

Bu denklemi $\frac{8a}{bN_x \pi^2}$ ile çarpalım.

$$\frac{8a}{bN_x \pi^2} \Delta T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot a_{mn}^2$$

Aynı şekilde $\Delta \sum_i T_i$ 'yide $\frac{8a}{bN_x \pi^2}$ ile çarpalım.

$$\begin{aligned} \frac{8 \Delta \sum_i T_i}{bN_x \pi^2} &= \frac{2P_i \pi^2}{bN_x} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right) \\ &= 2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Bu değerleri (4.17)'de yerlerine koyarsak:

$$\begin{aligned} \frac{D\pi^4 b}{8a^3} &\left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (m^2 + \beta^2 n^2) \right] + \left[2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \right] \right\} \\ \frac{bN_x \pi^2}{8a} &\left\{ \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot a_{mn}^2 \right] + \left[2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \right] \right\} \\ \frac{a}{b} &= \beta \quad \text{ve} \quad N_x = h \cdot \rho_x \quad \text{Notasyonlarını kullanarak;} \end{aligned}$$

$$Q_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (m^2 + \beta^2 n^2) + 2 \sum_i \gamma_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot a_{mn}^2 + 2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 (m^2 + \beta^2 n^2) + 2 \sum_i \gamma_i \sum_{m=1}^{\infty} m^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \right] \\ & = \beta^2 Q_{cr} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot a_{mn}^2 + 2 \sum_i \delta_i \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \text{Sin} \frac{n\pi c_i}{b} \right)^2 \right] \quad (4.24) \end{aligned}$$

Denge konumunun değişmesi yani kubbeleşme esnasında potansiyel enerjide meydana gelen ΔV değişiminin minimum olması için gerekli şart:

$$\frac{\partial (\Delta V)}{\partial a_{mn}} = 0 \quad \text{dır.} \quad (4.25)$$

Bu suretle bilinmeyen a_{mn} sabiti kadar (4.25) denklemi teşkil edilir. Bu denklemler bilinmeyenlere göre lineer ve homojen olup sadece denklem sisteminin payda determinanti sıfıra eşit olduğu zaman a_{mn} katsayıları için sıfırdan farklı çözümler verir. (Bu hal ise sadece kubbe şeklindeki denge durumunda mümkündür.)

Bu determinant sıfıra eşit olunca, kritik yük değerlerinin elde edilmesine yarayan burkulma şartı elde edilmiş olur. Bir başka ifade ile (4.24) denkleminin a_{mn} katsayılarına göre türevleri alınır, a_{mn} katsayılarına göre bir homo-

jen, lineer denklem takımı elde edilir.

Böyle denklemler, sıfırdan farklı çözümleri yalnız bu denklemin determinantı sıfır olduğu zaman verirler.

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h} \left[a_{mn} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 + 2 \sum_i \delta_i \cdot \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^4 \sum_p a_{mn} \cdot \sin \frac{p\pi c_i}{b} \right] - \beta^2 \sigma_{cr} (m^2 \cdot a_{mn} + 2 \sum_i \delta_i \cdot \sin \frac{n\pi c_i}{b} m^2 \sum_p a_{mn} \cdot \sin \frac{p\pi c_i}{b}) = 0 \quad (4.26)$$

Şimdi özel olarak plağın genişliğini yarıya bölen bir nervürle hesaba başlayalım; Bu taktirde $c_i = \frac{b}{2}$ dir. Netilerimizin genelliğini sınırlamaksızın takviyeli bir plağın bir yarı dalga şeklinde burkulduğunu kabul edebiliriz ve $m=1$ alabiliriz.

Bu halde denklem:

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} \left[a_1 (1 + \beta^2)^2 + 2 \delta (a_1 - a_3 + a_5 \dots) \right] - \sigma_{cr} \left[a_1 + 2 \delta (a_1 - a_3 + a_5 \dots) \right] = 0$$

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} (1 + 4\beta^2)^2 a_2 - \sigma_{cr} \cdot a_2 = 0$$

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} \left[a_3 (1 + 9\beta^2)^2 - 2 \delta (a_1 - a_3 + a_5 \dots) \right] - \sigma_{cr} \left[a_3 - 2 \delta (a_1 - a_3 + a_5 \dots) \right] = 0$$

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h \beta^2} (1 + 16\beta^2)^2 a_4 - \sigma_{cr} \cdot a_4 = 0$$

.....

Not:Bu denklemlerde a_{mn} katsayılarının birinci indisi hep-
sinde $m=1$ olduğu için kaldırılmıştır.

Görülüyor ki çift mertebeli denklemlerin her biri yalnız bir adet katsayı ihtiva etmektedir ve nervürlerle ilgili hiçbir notasyon bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu değer-
de plağın burkulması esnasında nervür doğrusal kalmaktadır.

Bu yüzden nervürün eğilme rijitliği ile basınç gerilmelerinin kritik değerleri arasındaki bağıntıyı bulmak için bu denklem takımının tek mertebeli denklemleri göz önüne alınmalıdır.

Burada birinci yaklaşım olarak a_{mn} katsayılarından yalnız a_{11} 'in sıfırdan farklı olduğunu farzedip diğerlerinin sıfır olduğunu kabul etmektir. ($m=1, n=1$)

Bu halde:

$$\frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{1}{2} [a_{11} (1 + \beta^2) + 2\delta a_{11}] = \sigma_{cr} (a_{11} + 2\delta a_{11}) \quad (4.28)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D (1 + \beta^2)^2 + 2\delta}{b^2 h \beta^2 (1 + 2\delta)} \quad (4.29)$$

Not:Denklem takımında daha büyük sayıda denklem göz önüne alınarak yapılan hesaplar bu 1.yaklaşımın uzun ;mesela $\beta > 2$ olan plaklar için çok doğru olduğunu göstermiştir.Daha kısa plaklar için daha fazla denklem göz önüne alınarak hesap yapılmalıdır.Mesela $a_{11} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$ diğer terimleri sıfıra eşit kabul edersek σ_{cr} için ikinci yaklaşım olarak 1 ve 3. terimleri alarak iki denklem çıkar.Bu iki denklemin determi-

nantı sifira eşitlenerek ikinci derece bir denklem çıkar.

$$k\beta^2(1+4\delta)-k^2\beta^2[(1+2\delta)(c+d)-8\delta\delta]+cd-4\delta^2=0 \quad (4.30)$$

Bu denklemde:

$$k = \frac{\sigma_{cr} b^2 h}{\pi^2 D} \quad (4.31)$$

$$c = (1 + \beta^2)^3 + 2\delta \quad (4.32)$$

$$d = (1 + 9\beta^2) + 2\delta \quad (4.33)$$

Denklem takımının a_{11} , a_{13} ve a_{15} terimleri sıfırdan farklı alınarak yapılan bir üçüncü yaklaşım, bir üçüncü derece denklem takımı verir. Yapılan hesaplar ikinci ve üçüncü yaklaşım arasındaki farkın az olduğunu gösterir.

Buna göre aşağıdaki bir nervürlü basınca maruz plağın kritik gerilmelerinin hesabı için kafi derecede doğru kabul edebiliriz.

$$\sigma_{cr} = k \cdot \frac{2D}{b^2 h} \quad (4.34)$$

Bu denklemdeki k çarpanı plağın ve nervürün (4.18) notasyonları ile tariflenen boyutlarına bağlıdır. TABLO.1 δ ve β ile a/b oranlarına göre bazı k değerlerini vermektedir.

İki eşit boyuna nervürün plağın genişliğini üç eşit parçaya bölmesi halinde stabilite problemi benzer yolla incelenebilir. Bu halde de birinci yaklaşım olarak ve $m=1, n=1$ alınarak σ_{cr} için bir ifade bulunabilir.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 3\gamma}{\beta^2(1 + 3\delta)} \quad (4.35)$$

Bu formül bir nervür hali için verilen (4.29) denklemi ile aynı şekildedir. Burada değişen k parametresidir. TABLO.2 β değeri ve nervür boyutlarına bağlı olarak k parametresinin değerleri verilmiştir.

Burada:

$$k = \frac{(1 + \beta^2)^2 + 3\gamma}{\beta^2(1 + 3\delta)} \quad \text{şeklindedir.}$$

a/b	$\gamma=10/3$		$\gamma=5$		$\gamma=20/3$		$\gamma=10$	
β	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05	0.10
0.6	26.8	24.1	36.4	33.2	36.4	36.4	36.4	36.4
0.8	16.9	15.0	23.3	20.7	29.4	26.3	37.2	37.1
1.0	12.1	10.7	16.3	14.5	20.5	18.2	28.7	25.6
1.2	9.61	8.51	12.6	11.2	15.5	13.8	21.4	19.0
1.4	8.32	7.36	10.5	9.32	12.7	13.3	17.2	15.2
1.6	7.70	6.81	9.40	8.31	11.1	9.82	14.5	12.8
1.8	7.51	6.64	8.85	7.83	10.2	9.02	12.9	11.4
2.0	7.61	6.73	8.70	7.69	9.78	8.65	11.9	10.6

Eşit aralıklı nervür sayısı ikiden fazla ise (4.35) ifadesi genelleştirilerek:

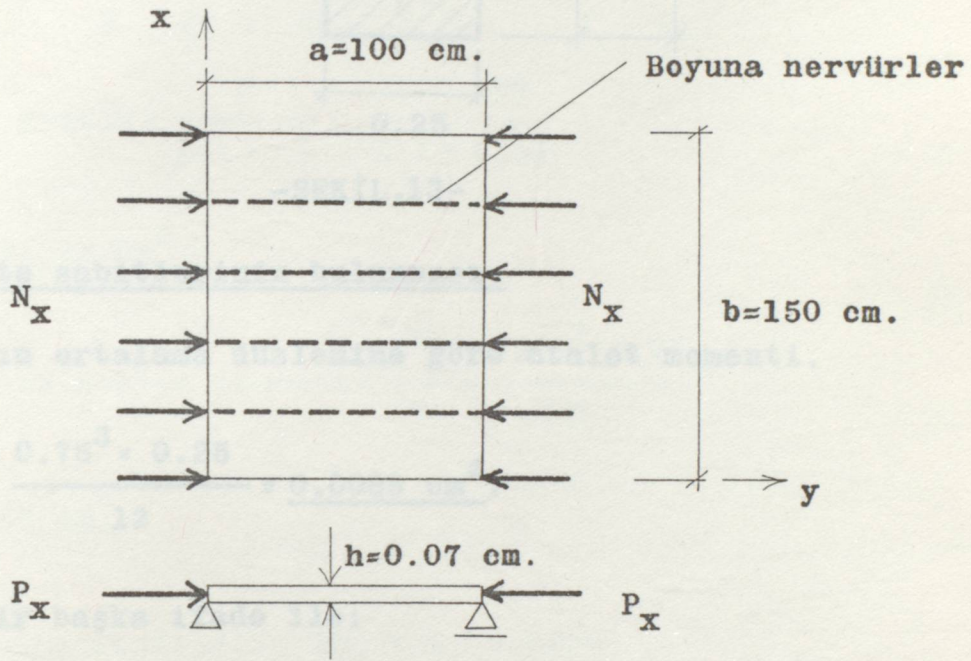
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2 \sum_1^N \delta_1 \cdot \sin^2 \frac{\pi e_1}{b}}{\beta^2 (1 + 2 \sum_1^N \delta_1 \cdot \sin^2 \frac{\pi e_1}{b})} \quad (4.36)$$

bulunur.

B Ö L Ü M . 5

SAYISAL ÖRNEKLER:

ÖRNEK:1 Boyuna nervürlerle rijitleştirilmiş, dört kenarından basit mesnetli ve yalnız x yönünde basınca maruz dikdörtgen plak:



-ŞEKİL.11-

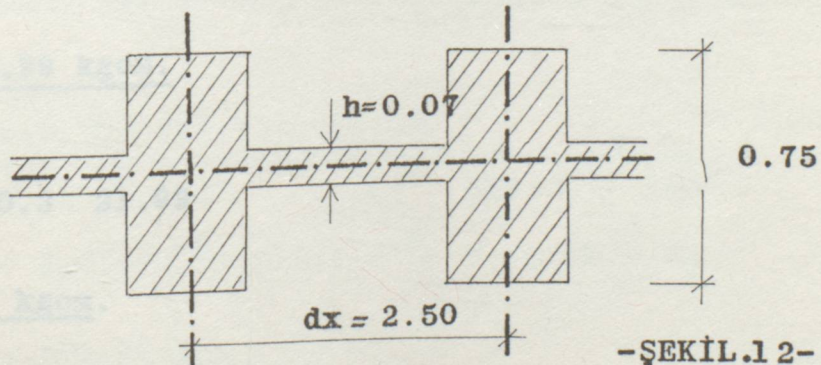
$a = 100\text{cm.}$ Nervür kesit yüksekliği $= 0.75\text{cm.}$

$b = 150\text{cm.}$ Nervür kesit genişliği $= 0.25\text{cm.}$

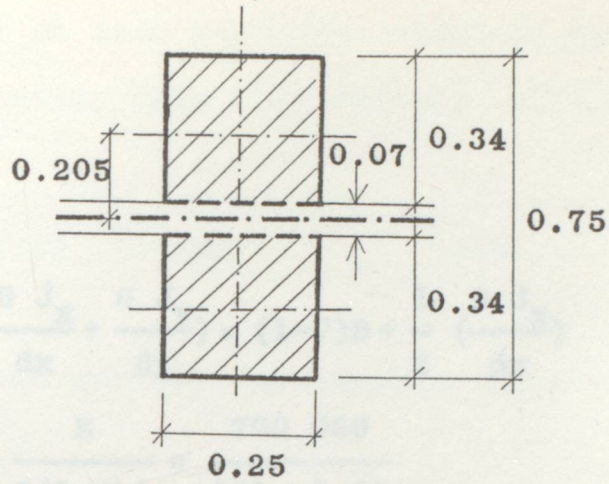
$h = 0.07\text{cm.}$ Nervür aralığı $= 2.50\text{cm.}$

Malzeme (Alüminyum) $E = 700\ 000\ \text{kg/cm}^2$

$\nu = 0.3$



-ŞEKİL.12-



-ŞEKİL.13-

Elastisite sabitlerinin bulunması:

I_x = Plağın ortalama düzlemine göre atalet momenti.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.75^3 \times 0.25}{12} = \underline{0.0088 \text{ cm}^4}.$$

Bir başka ifade ile:

$$I_x = 2 \left[\frac{0.34^3 \times 0.25}{12} + 0.34 \times 0.25 \times 0.205^2 \right] = \underline{0.0088 \text{ cm}^4}.$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\gamma^2)} = \frac{700\,000 \times 0.07^3}{12(1-0.3^2)} = \underline{21.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{44} = D + \frac{E I_x}{dx} = 21.99 + \frac{700\,000 \times 0.0088}{2.50}$$

$$C_{44} = \underline{2485.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{45} = \gamma D = 0.3 \times 21.99$$

$$C_{45} = \underline{6.60 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{55} = D + \frac{E I_y}{dy} = D$$

$$C_{55} = \underline{21.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{66} = (1-\gamma)D + \frac{1}{2} \left(\frac{G J_x}{dx} + \frac{G J_y}{dy} \right) = (1-\gamma)D + \frac{1}{2} \left(\frac{G J_x}{dx} \right)$$

$$G = \text{Kayma modülü} = \frac{E}{2(1+\gamma)} = \frac{700\,000}{2(1+0.3)}$$

$$G = \underline{269\,231 \text{ kg/cm}^2}.$$

$$J_x = \text{Burulma atalet momenti} = \frac{b^3 h}{3} = \frac{0.25^3 \cdot 0.75}{3}$$

$$J_x = \underline{0.0039 \text{ cm}^4}.$$

$$GJ_x = \text{Burulma rijitliği} = 269\,231 \cdot 0.0039$$

$$GJ_x = \underline{1051.68 \text{ kgcm}^2}.$$

$$C_{66} = (1-0.3)21.99 + \frac{1}{2} \left(\frac{1051.68}{2.50} \right)$$

$$C_{66} = \underline{225.73 \text{ kgcm.}}$$

Bu değerler (3.36)'da yerlerine koyulursa;

$$\frac{2485.99}{100^4} + \frac{2(6.60 + 225.73)}{150^2 \cdot 100^2} + \frac{21.99}{150^4} = \frac{P_x}{150 \cdot \pi^2 \cdot 100^2}$$
$$2.49 \cdot 10^{-5} + 2.07 \cdot 10^{-6} + 4.34 \cdot 10^{-8} = 6.75 \cdot 10^{-8} \cdot P_x$$

$$P_x = \underline{\underline{400.20 \text{ kg.}}}$$

Plâğın bir an için nervürsüz olduğunu düşünelim:

İzotrop plaklar için elde edilmiş (2.46)denklemden

$$D(w_{1,xxxx} + 2 w_{1,xyxy} + w_{1,yyyy}) = \frac{-P_x}{b} \cdot w_{1,xx} \quad (5.1)$$

Bu denklemde gerekli operasyonlar yapılırsa:

$$D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \frac{P_x}{b} \frac{m^2}{\pi^2 a^2} \quad (5.2)$$

$$P_x = D \frac{\pi^2 a^2 b}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (5.3)$$

elde edilir. Bu denklemde P_x yükünün minimum değeri $P_{x, kritik}$ yükünü verir. Burada en küçük değer daima $n=1$ için elde edilir. Formülde P_x en küçük değerini $m=1$ için almaktadır. 0 halde:

$$\text{Min } P_x = D a^2 b^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (5.4)$$

Başka bir ifade ile;

$$\text{Min } P_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \cdot b \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 \quad (5.5)$$

$a = 100\text{cm}$. $b = 150\text{cm}$. $h = 0.07\text{cm}$ $E = 700\ 000\ \text{kg/cm}^2$ olursa;

$$D = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)12} = \underline{21.99\ \text{kgcm}}$$

$$P_x = 21.99 \times \pi^2 \times 100^2 \times 150 \left(\frac{1}{100^2} + \frac{1}{150^2} \right)^2$$

$$P_x = \underline{6.79 \text{ kg.}}$$

Boyuna nervürlerle takviye edilmiş plak elemanının stabilite hesabını, aynı değerlerle bir de nervür alanlarını plak kalınlığına katarak hesaplayalım.

(3.43) denklemine göre:

$$h_{\text{ort}} = 0.07 + \frac{0.75 \times 0.25}{2.50} = \underline{0.145 \text{ cm.}}$$

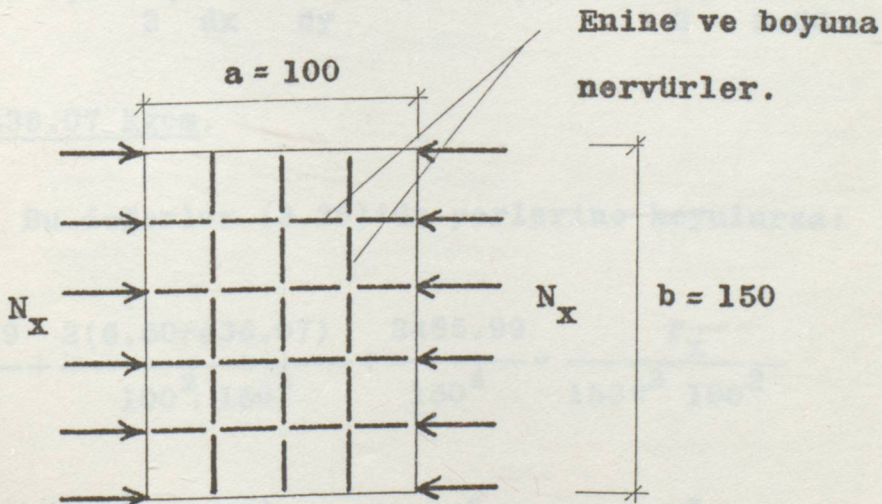
Bu ortalama kalınlığa göre izotrop plak stabilite hesabı yaparsak;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{700\,000 \times 0.145^3}{12(1-0.3^2)} = \underline{195.42 \text{ cm.}}$$

(5.4) denklemine göre:

$$P_x = 195.42 \times 100^2 \times \pi^2 \times 150 \left(\frac{1}{100^2} + \frac{1}{150^2} \right)^2 = \underline{60.36 \text{ kg.}}$$

ÖRNEK.2 Her iki yönde nervürlerle rijitleştirilmiş, dört kenarından basit mesnetli ve yalnız x yönünde basınca maruz dikdörtgen plak:



Örnek olarak gene aynı plak elemanını ve aynı nervür karakteristiklerini alalım. ÖRNEK.1'den farklı olarak plak, her iki yönde ve eşit aralıklı nervürlerle rijitleştirilmiş olsun. ($dx = dy = 2.50$ cm.)

Elastisite sabitlerinin bulunması:

$$I_x = \underline{0.0088 \text{ cm}^4}$$

$$D = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)12} = \underline{21.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{44} = D + \frac{E I_x}{dx} = \underline{2485.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{45} = \nu D = \underline{6.60 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{55} = D + \frac{E I_y}{dy} = 21.99 + \frac{700\,000 \times 0.0088}{2.50}$$

$$C_{55} = \underline{2485.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{66} = (1-\nu)D + \frac{1}{2} \left(\frac{Gj_x}{dx} + \frac{Gj_y}{dy} \right) = (1-0.3)21.99 + \frac{1}{2} \left(\frac{1051.68}{2.50} + \frac{1051.68}{2.50} \right)$$

$$C_{66} = \underline{436.07 \text{ kgcm.}}$$

Bu değerler (3.36)'da yerlerine koyulursa:

$$\frac{2485.99}{100^4} + \frac{2(6.60+436.07)}{100^2 \cdot 150^2} + \frac{2485.99}{150^4} = \frac{P_x}{150\pi^2 \cdot 100^2}$$

$$2.49 \times 10^{-5} + 3.93 \times 10^{-6} + 4.91 \times 10^{-6} = 6.75 \times 10^{-8} P_x$$

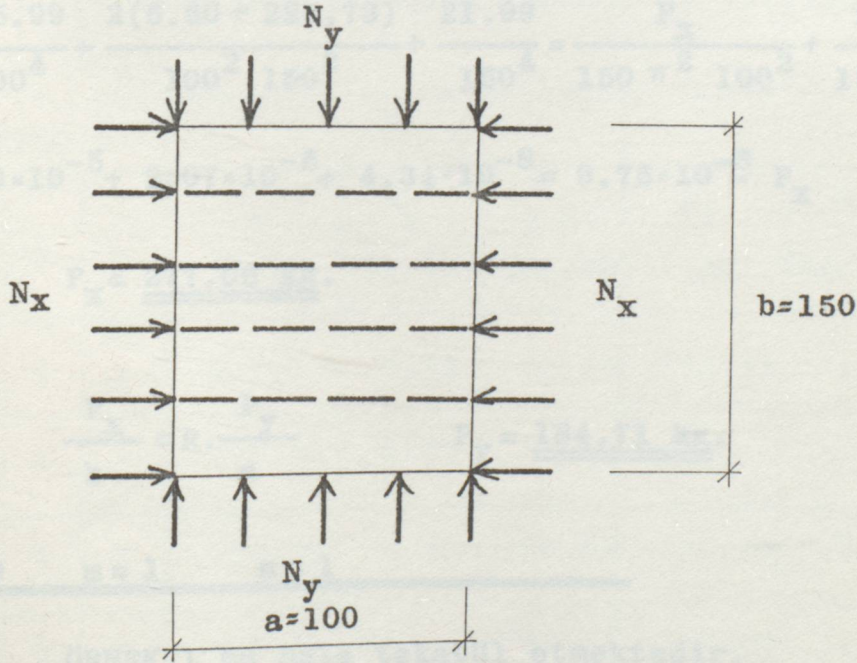
$$P_x = \underline{499.85 \text{ kg.}}$$

ÖRNEK.1 ve 2'de hesaplanan kritik yük veya gerilmeler TABLO.3'de özetlenmiştir.

- TABLO.3 -

	P_x (kg)	N_x (kg/cm)	σ_x (kg/cm ²)
Nervürlü	6.79	0.05	0.65
Boyuna nervürlü	400.20	2.67	38.11
Her iki yönde nervürlü	499.85	3.33	47.60

ÖRNEK.3 Boyuna nervürlü rijitleştirilmiş, Dört kenarından basit mesnetli ve hem x hemde y yönlerinde kuvvete maruz dikdörtgen plak:



- ŞEKİL.15 -

Plak ve nervür boyutları olarak ÖRNEK.1'deki değerleri alalım. Bu halde elastisite sabitleri aynıdır.

$$C_{44} = \underline{2485.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{45} = \underline{6.60 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{55} = \underline{21.99 \text{ kgcm.}}$$

$$C_{66} = \underline{225.73 \text{ kgcm.}}$$

(3.42) denkleminde R, m, n 'nin değişik değerlerine göre P_x ve P_y kritik yükleri bulunabilir.

$$\underline{R = 1 \quad m = 1 \quad n = 1}$$

$$\frac{C_{44}}{a^4} + \frac{2(C_{45} + C_{66})}{a^2 b^2} + \frac{C_{55}}{b^4} = \frac{P_x}{b \pi^2 a^2} + \frac{P_x}{b^3 \pi^2} \quad (5.6)$$

$$\frac{2485.99}{100^4} + \frac{2(6.60 + 225.73)}{100^2 150^2} + \frac{21.99}{150^4} = \frac{P_x}{150 \pi^2 100^2} + \frac{P_x}{150^3 \pi^2}$$

$$2.49 \times 10^{-5} + 2.07 \times 10^{-6} + 4.34 \times 10^{-8} = 9.75 \times 10^{-8} P_x$$

$$P_x = \underline{277.06 \text{ kg.}}$$

$$\frac{P_x}{b} = R \cdot \frac{P_y}{a} \quad P_y = \underline{184.71 \text{ kg.}}$$

$$\underline{R = 0 \quad m = 1 \quad n = 1}$$

ÖRNEK.1 bu hale tekabül etmektedir.

$$P_x = \underline{400.20 \text{ kg.}}$$

$$P_y = 0$$

R = -1 m = 1 n = 1

$$\frac{C_{44}}{a^4} + \frac{2(C_{45} + C_{66})}{a^2 b^2} + \frac{C_{55}}{b^4} = \frac{P_x}{b \cdot \pi^2 \cdot a^2} - \frac{P_x}{b^3 \cdot \pi^2} \quad (5.7)$$

$P_x = \underline{\underline{720.36 \text{ kg.}}}$

$P_y = \underline{\underline{-480.24 \text{ kg.}}}$

R = -1 m = 2 n = 1

$$\frac{C_{44} \cdot 2^4}{a^4} + \frac{2(C_{45} + C_{66}) \cdot 2^2}{a^2 b^2} + \frac{C_{55}}{b^4} = \frac{P_x \cdot 2^2}{b \cdot \pi^2 \cdot a^2} - \frac{P_x}{b^3 \cdot \pi^2} \quad (5.8)$$

$P_x = \underline{\underline{1693.01 \text{ kg.}}}$

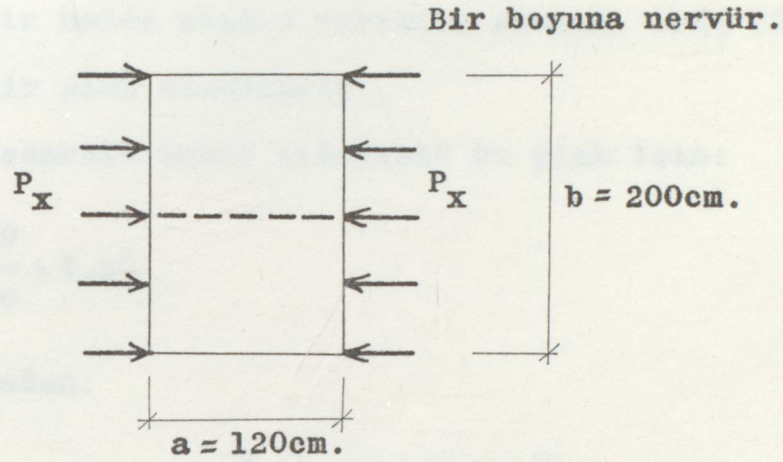
$P_y = \underline{\underline{-1128.67 \text{ kg.}}}$

ÖRNEK.3'deki sonuçlar TABLO.4'de özetlenmiştir.

TABLO.4

R	m	n	x			y		
			P _x (kg)	N _x (kg/cm)	σ _x (kg/cm ²)	P _y (kg)	N _y (kg/cm)	σ _y (kg/cm ²)
1	1	1	227.06	1.85	26.39	184.71	1.85	26.39
0	1	1	400.20	2.67	38.11	-	-	-
-1	1	1	720.36	4.80	68.61	-420.24	-4.80	-68.61
-1	2	1	1693.01	11.27	161.24	-1128.67	-11.27	-161.24

ÖRNEK.4 Bir boyuna nervürle takfiye edilmiş,Dört kenarından basit mesnetli ve x yönünde basınca maruz dikdörtgen plak (Enerji metodu)



- ŞEKİL.16 -

$$a = 120\text{cm.}$$

$$b = 200\text{cm.}$$

$$h = 1.40\text{cm.}$$

$$\text{Malzeme(Çelik)} \quad E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu = 0.3$$

Nervürsüz böyle boyutlara sahip plakta:

$$\frac{a}{b} = \frac{120}{200} = 0.6$$

(5.5) denklemine göre:

$$N_x = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \frac{\pi^2 D}{b^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \frac{\pi^2 E h^3}{12(1-\nu^2)b^2}$$

$$N_x = (0.6 + 1.67)^2 \frac{\pi^2 \cdot 2\,100\,000 \cdot 1.4^3}{12(1-0.3^2)200^2} = \underline{\underline{670.92 \text{ kg/cm.}}}$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} = \underline{\underline{479.23 \text{ kg/cm}^2}}.$$

Şimdide plağı iki eşit parçaya bölen tamamen rijit bir nervür kabul edelim.

Böyle bir halde plağın yarısını alarak, $b/2 = 100\text{cm}$. genişliğinde bir plak alabiliriz.

Basit mesnetli kabul ettiğimiz bu plak için:

$$\frac{a}{b} = \frac{120}{100} = 1.20$$

(5.5) denklemden:

$$N_x = (1.20 + 0.83)^2 \frac{2.2 \cdot 100 \cdot 000 \cdot 1.4^3}{12(1-0.3)100^2} = \underline{\underline{2146.00 \text{ kg/cm}}}.$$

$$\sigma_x = \underline{\underline{1533.00 \text{ kg/cm}^2}}.$$

0 halde plağın burkulması durumunda nervürün doğrusal kalması için nervüre ne boyutlar verilmelidir.

$$\frac{B_i}{bD} = \gamma_i \quad \frac{P_i}{bN_x} = \frac{A_i}{bh} = \delta_i$$

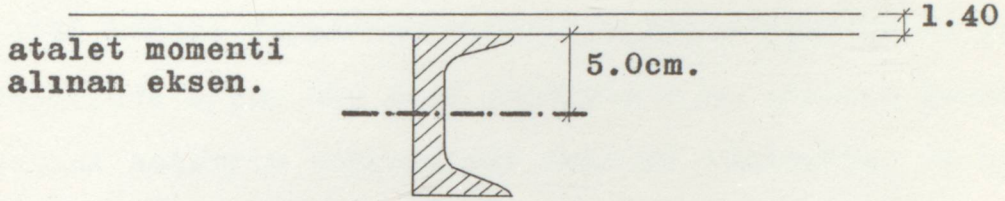
A_i = Nervür kesit alanı

B_i = Bir nervürün eğilme rijitliği.

Not: B_i eğilme rijitliği hesap edilirken plakta hesaba katılmalıdır.Çünkü plak nervüre kaynak veya perçinle çok rijit bir şekilde bağlanmıştır.Böyle kabul edildiğinde,nervürün eğilme rijitliğinde çok büyük artma meydana gelir. B_i 'yi hesap etmek için nervür kesidinin başlığın dış yüzeyi ile ça-

kışan eksene göre atalet momentinin alınması gerekmektedir.

Nervür olarak [100 profil kullanalım.



Profil değerleri:

$$A_1 = 13.5 \text{ cm}^2.$$

$$h = 10.0 \text{ cm.}$$

$$I_x = 206 \text{ cm}^4.$$

$$B_1 = E(206 + 13.5 \times 5.0^2) = E.543 \text{ kgcm}^2.$$

$$\frac{B_1}{bD} = \frac{E.543}{200 \cdot E(1.4)^3 / 12(1-0.3^2)} = 10.80$$

$$\frac{A_1}{bh} = \frac{13.5}{200 \times 1.4} = 0.05$$

Bu oranlar için $\beta=0.6$ olduğunda TABLO.1'den de görüleceği gibi nervür yeterince hatta tamamen rijit kabul edilebilir.Çünkü tabloda gösterilen k'nın yatay çizgiler üzerindeki değerleri, b/2 genişliğinde basit mesnetli bir dikdörtgen plak için bulunan değerlerin aynıdır.Bu,nervür ve plağın bu boyutlarında,nervürün plak burkulduğunda doğrusal kaldığını gösterir.Bizim örneğimizde de $\beta=0.6$ için ve değerleri bu yatay çizgilerin üzerinde kalmaktadır.0 halde

b/2 genişliğinde bir plak(Nervürsüz) göz önüne alınarak yapılan hesaplarda $\sigma_x = 1533.00 \text{ kg/cm}^2$ olarak bulunur.

1) Seriler ile yapılan hesaplarda:

3.Bölümde nervür elastisite sabitleri kullanılarak stabilite hesabı yapılmıştır.Verilen kenar şartlarına göre her seferinde uygun bir seri seçilmekte,bu serinin kenar şartlarına sağlığı sağlanmadığı kontrol edilmekte, ve nervürsüz plak stabilite hesabı bu ikinci seri yardımı ile yapılmaktadır.Bu durumda göstermektedir ki;her değişik sınır şartı için hesaplar yeniden yapılmalıdır.

4.Bölümde çok kısa olarak değinilen ve bir basit birinci derece mertebesindeki kenar şartları değişikliği hesaplarının yeni yapılan hesapları gerektirdiği görülmektedir.

Ayrıca bu metotlar her sınır şartları ve yüklemeler için çok yararlı işlevler göstermektedir.Bu sebeple aynı elemanlar yeniden daha pratik ve geçerli bir yol olabilir. (2) Tablo.1'de de belirtildiği gibi, a ve b boyutlarına sahip bir plak(isotrop) kritik yük hesaplanmıştır.Aynı plak elemanları için aralıklı boyutlu nervürler ile takviye edilmiş ve kritik yük hesap edilmiştir.Bu durumda stabilite hesabı artmış görülmüştür.Plak bu kadar her iki yönde eksenel olarak destekli ile takviye edilmiş stabilite hesabı artmaktadır.

3) Stabilite hesabı artmış için,plak nervürsüz olarak hesaplanırsa, daha kalın bir plak veya daha sık destekler gerektirir.Bu durumda her yönde destekli ile takviye edilmiş

B Ö L Ü M . 6

S O N U Ç L A R :

1) Seriler ile yapılan çözümlerde:

3.Bölümde nervür elastisite sabitleri kullanılarak stabilite hesabı yapılmıştır.Verilen kenar şartlarına göre her seferinde uygun bir seri seçilmekte,bu serinin kenar şartlarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmekte, ve nervürlü plak stabilite denklemi bu ikame seri yardımı ile çözülmektedir.Buda göstermektedir ki;her değişik sınır şartı için hesaplar yeniden yapılmaktadır.

4.Bölümde çok kısa olarak değinilen ve bir basit örneği çözülen metotta da,aynı şekilde kenar şartları değişikçe hesapların yeni baştan yapılması gerektiği görülmektedir.

Ayrıca bu metotlar bazı sınır şartları ve yüklemeler için çok karışık işlemler gerektirmektedir.Bu sebeple sonlu elemanlar yöntemi daha pratik ve geçerli bir yol olabilir.

2) TABLO.1'de de özetlendiği gibi, a ve b boyutlarına sahip bir plakta(izotrop) kritik yük hesaplanmıştır.Aynı plak elemanı eşit aralıklı boyuna nervürler ile takfiye edilmiş ve p kritik yükü hesap edilmiştir.Bu durumda stabilitenin 59 kat arttığı görülmüştür.Plak bu sefer her iki yönde eşit aralıklı nervürler ile takfiye edildiğinde,stabilite 73 kat artmaktadır.

3) Stabiliteyi 59 kat arttırmak için,plağı nervürsüz olarak yapmak isteseydik,acaba kalınlığı ne kadar arttırmak gerekir

Bunun için 1.Örnekte boyuna nervürler ile rijitleşti

rilmiş plakta hesap edilen P_x kritik yükünü ele alalım.

$$P_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \pi^2 a^2 b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2$$

$$400.20 = \frac{700\,000\,h^3}{12(1-0.3^2)} \left(\frac{1}{100^2} + \frac{1}{150^2} \right)^2 \pi^2 \cdot 100^2 \cdot 150$$

$$h = \underline{0.272 \text{ cm.}}$$

Yani kalınlığı 4 kat arttırmak gerekirdi. Buradan da görüleceği gibi, plağın stabilitesi kalınlığı arttırılarak anttırılabilir. Fakat böyle bir usül ekonomik olmaz. Stabilitayı takfiye edici nervürler ile arttırmak gerekir.

3) 3.2'nci bölümde öngörülen yaklaşımda nervürler belli bir kalınlık olarak plak kalınlığına katılmakta, bu ortalama kalınlığa göre izotrop plak stabilite hesabı gibi hesap yapılmaktadır. Bu yolla bulunan kritik yük, gerçek değerinden küçük değerler vermektedir. Çünkü burada ,nervür elastisite sabitleri kullanılarak yapılan stabilite hesabından farklı olarak, nervür atalet momentleri hesaba katılmamaktadır. Halbuki nervür atalet momentleri önemli değerlere haizdir."

Bundan da anlaşılan; kesit alanı az fakat atalet momenti yüksek olan nervürler ile takfiye edilmiş plaklarda hesap edilen değer gerçekteki değerden daha da küçük olacaktır. (Örneğin profil kesitlerde)

4) TABLO.4'de de özetlendiği gibi, y yönünde birim boya gelen kuvvet olarak eşit uygulanan basınç kuvveti, P_x kritik yükünü küçültmekte, y yönünde ve birim boya gelen kuvvet o-

larak eşit uygulanan çekme kuvveti P_x kritik yükünü arttırmaktadır.

KAYNAKLAR

- 1) FLOUGH W. Stress in Shells
McGraw-Hill - New York - 1962
- 2) GINSBURG N. Enerji Yüklü Sistemler
I.T.E. 1964
- 3) İVAN N. Cizelirin İstikrarı
I.T.E. 1964
- 4) YEROSHENKO Enerji Stabilite Teorisi

K A Y N A K L A R

- 1) FLUGGE W. Stresses in Shells
Springer-Verlag-New York-1967
- 2) GIRKMANN K. Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler
İ.T.Ü 1964
- 3) İNAN M. Cisimlerin Mukavemeti
İ.T.Ü 1967
- 4) TIMOSHENKO Elastik Stabilite Teorisi

Ö Z G E Ç M İ Ş

Levent Anıl İstanbul'da 1963 yılında doğmuştur. İlk-
okul tahsilini Samsun Atatürk İlkokulu ve Ankara Etlik İlk-
okulu, ortaokul tahsilini Ankara Mehmet Akif Ortaokulu, lise
tahsilini Ankara Aydınlikevler Lisesi ve İstanbul Fenerbah-
çe lisesinde tamamladıktan sonra, 1980-81 yılında Yıldız ü-
niversitesi Kadıköy İnşaat Fakültesine girip, 1985 yılında
iyi derece ile mezun olmuştur.

