

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Dikdört, Plaj, Çeg, yük ve  
Mes, Şar, Alt, Bur, Proby

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M. Metin Gökçek

1987

08

1500

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÇEŞİTLİ  
YÜK VE MESNET ŞARTLARI  
ALTINDA BURKULMA PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnşaat Mühendisi  
M.Metin GÖKÇEK

İSTANBUL 1987

## İ Ç İ N D E K İ L E R

<u>I. BÖLÜM</u>	<u>Sayfa</u>
1.1- Genel Hooke Kanunları . . . . .	1 - 2
1.2- Elastik Eğri . . . . .	1 - 5
<u>2. BÖLÜM</u>	
2.1.1- Elastik Çubuklarda dengenin kararsızlığı . . . . .	6 - 7
2.1.2- Euler Teorisi . . . . .	7 - 9
2.1.3- Genel sınır şartı halinde çubukta stabilite ve yz düzlemlerinde diferansiyel denklemi . . . . .	10 - 13
<u>3. BÖLÜM</u>	
3.1- Plak genel tanımı . . . . .	14
3.2- Plaktaki iç kuvvetler . . . . .	14 - 20
3.3- Plak Probleminin diferansiyel denklemlerle çözümü . . . . .	21 - 27
<u>4. BÖLÜM</u>	
4.1- Plakların basit eğilmesi . . . . .	28 - 31
4.2- Plakların yayılı yanal yüklerle eğilmesi . . . . .	32 - 40
4.3- Eğilme ile birlikte çekme ve basınç etkisindeki plaklarda eğilme . . . . .	41 - 43
4.4- Plakların eğilmesinde şekil değiştirme enerjisi . . . . .	43 - 44
4.5- Kenarları basit mesnetli dikdörtgen plakların sehimi . . . . .	45 - 50
<u>5. BÖLÜM</u>	
5.1- Plakların stabilitesi genel açıklamalar . . . . .	51 - 52
5.2- Burkulma yüzeyinin diferansiyel denklemi . . . . .	52 - 54
5.3- Plaklarda çeşitli mesnetlendirme ve yükleme durumlarına toplu bakış . . . . .	55 - 57
5.4- İnce plakların burkulması . . . . .	
5.4.1- Elverişsiz yüklerin hesap esasları . . . . .	58 - 59
5.5.1- Bir doğrultuda üniform basınç etkisindeki basit mesnetli dikdörtgen plakların burkulması . . . . .	59 - 64
5.5.2- İki dik doğrultuda basınca maruz basit mesnetli dikdörtgen plakların burkulması . . . . .	65 - 73
5.5.3- Manbran Çözüm . . . . .	74
5.5.4- Basınç doğrultusuna dik, karşılıklı iki kenarı boyunca basit mesnetli ve diğer iki kenarında çeşitli kenar şartlarına haiz üniform basınca maruz plakların burkulması . . . . .	75 - 78
5.5.4- Eğilme ile basıncın ortak tesirine maruz basit mesnetli bir dikdörtgen plağın burkulması . . . . .	79 - 85
5.5.6- Dikdörtgen plakların kayma gerilmelerinin tesiri altında burkulması . . . . .	86 - 90
Referans . . . . .	91

## KULLANILAN SEMBOLLER

- $x, y, z$  : Karteziyen koordinatlar
- $t_x, t_y$  : Bir plakın orta yüzeyinin sıra ile  $xz$  ve  $yz$  düzlemlerindeki eğrilik yarıçapları
- $h$  : Bir plak veya kabuğun kalınlığı
- $q$  : Sürekli yayılmış bir yükün şiddeti
- $p$  : Basınç
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : Gerilmenin  $x, y$  ve  $z$  eksenlerine paralel normal bileşenleri
- $\sigma_n$  : Gerilmenin  $n$  eksenine paralel normal bileşeni
- $\tau$  : Kayma gerilmesi
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  : Karteziyen koordinatlarda kayma gerilmesi bileşenleri
- $u, v, w$  : Yerdeğiştirmelerin bileşenleri
- $E$  : Birim uzama
- $E_x, E_y, E_z$  :  $x, y,$  ve  $z$  doğrultularındaki birim uzamalar
- Karteziyen koordinatlarda kayma açısı bileşenleri
- $E$  : Çekme ve basınçta elâstisite modülü
- $G$  : Kayma modülü
- $\nu$  : Poisson oranı
- $V$  : Şekil değiştirme enerjisi
- $D$  : Bir plakın eğilme rijitliği
- $M_x, M_y$  : Bir plakın sıra ile  $x$  ve  $y$  eksenlerinin birim uzunluğuna isabet eden eğilme momentleri
- $M_{xy}$  : Bir plakın,  $x$  eksenine dik kesitinin birim uzunluğuna isabet eden burulma momenti

ÖNSÖZ

Çeşitli yük ve mesnet şartları altında dikdörtgen plakların burkulma problemi (Plakların Stabilitesi) adlı Yüksek Lisans tezini baş ayrı bölümde inceledim.

1. BÖLÜM

## ÖNSÖZ

Bu bölümde genel BÖLGE kanunları ile çubuk sistemlerde elastik eğri ve elastik eğrinin diferansiyel denkleminde bahsedildi.

2. BÖLÜM

Dikdörtgen plakların çeşitli yük ve mesnet şartları altında burkulma etüdü (Plakların stabilitesi) adlı Yüksek Lisans (Mastır) tez çalışmam sırasında bana her konuda yardımcı olan değerli bilim adamı tez hocam Doç.Dr. Ercüment KÖKSAL'A Doç.Dr. Türkan KÖKSAL'A ve çalışmamda çok kıymetli fikir ve tavsiyelerinden yararlandığım büyük insan Prof. Orhan ÜNSAÇ'a teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca Yüksek lisans öğrenimim sırasında her türlü manevi yardımını benden esirgemeyen Karayolları 1. Bölge Müdürlüğü Etüt-Proje Başmühendisi Yüksek Mühendis Adnan ÇALIŞKAN'a şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarımı daktilo eden, titiz elleri ile bu çalışmaya emek veren Karayolları 1. Bölge Müdürlüğü Otoyollar Büro Memuru sayın Gönül ERDOĞDU hanımefendiye ayrıca teşekkür ederim..

## ÖZET

Çeşitli yük ve mesnet şartları altında dikdörtgen plakların burkulma problemi (Plakların Stabilitesi) adlı Yüksek Lisans tezimi beş ayrı bölümde inceledim.

### I. BÖLÜM

Bu bölümde genel HOOKE kanunları ile çubuk sistemlerde elastik eğri ve elastik eğrinin diferansiyel denkleminde bahsedildi.

### 2. BÖLÜM

Bu bölümde elastik çubuklarda dengenin kararsızlığı ve EULER teorisini kısaca inceledim. Basit Euler hallerine ait olmak üzere çeşitli mesnet şartları altındaki çubukların P kritik değerlerini tablo halinde verildi.

### 3. BÖLÜM

Bu bölümde plakların genel incelemesi yapıldı. Plaklardaki iç kuvvetler, birim şekil değiştirme bileşenleri, gerilme-sehim bağıntıları moment-sehim, kesme kuvveti sehim bağıntıları ve plak probleminin genel denklemi elde edildi.

### 4. BÖLÜM

Bu bölümde plakların basit eğilmesi, basit eğilme altındaki plakların iç kuvvetleri, plakların yayılı yanal yüklerle eğilmesi ve dikdörtgen plakların sehimleri ile eğilme şekil değiştirme enerjisi metodunu anlatmaya çalışıldı.

### 5. BÖLÜM

Plakların stabilitesi hakkında genel açıklamalar yapılarak burkulma yüzeyinin diferansiyel denklemini buldum. Basınç doğrultusuna dik karşılıklı iki kenarı boyunca basit mesnetli ve diğer iki kenarında çeşitli kenar şartlarına haiz üniform basınca maruz plaklar ve eğilme ile basıncın ortak tesirine maruz dikdörtgen plağın burkulması ile kayma gerilmesinin tesiri altındaki dikdörtgen plakların burkulması konuları incelendi.

## SUMMARY

Buckling of rectangular plates (stability of plates) subjected to various loading and edge-support conditions are examined under separate five sections in my Master of Science thesis.

### SECTION - 1

In this section, general Hooke's law, elastic curve and differential equation of elastic curve for beams are explained.

### SECTION - 2

Euler's theory and conditions of stability in elastic beams are examined. Related with simple Euler's cases,  $P$  critical loads of the columns under different support conditions are given in tabular form.

### SECTION - 3

In this section, plates are examined in general, In ~~internal~~ stresses, and strain components in plates, ~~stress~~-deformation relations, moment-deformation, shear force-deformation relations and general equation of plates are derived.

### SECTION - 4

It is tried to explain in this section, pure bending of plates, stresses developed in a plate subjected to pure bending, deformation of plates subjected to uniformly distributed lateral loads, deformation of rectangular plates, strain energy method in bending of plates.

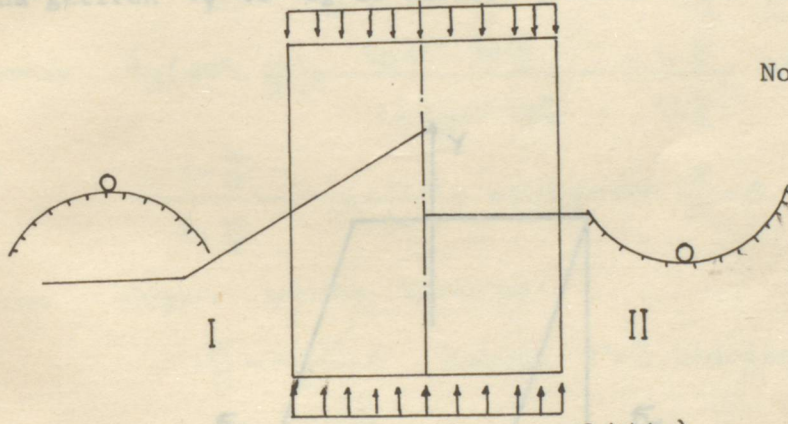
### SECTION - 5

The differential equation of a buckled plate are obtained with general explanations for the stability of plates. Also, a) buckling of uniformly compressed rectangular plates simply supported along two opposite sides perpendicular to the direction of compression and having various edge conditions along the other two sides, b) Buckling of a simply supported rectangular plate under combined bending and compression c) Buckling of rectangular plates under the action of shearing stresses are examined.

## PLAKLARDA BURKULMA OLAYININ BASİT BİR MİSALLE

### AÇIKLANMASI:

Şekil(1.1) de görülen orta düzlemi, plağa orta yüzey düzleminde tesirli yüklerin belli bir limit kritik değere ulaşması neticesi (ki bu değeri tayin eden faktörlerin en önemlisi plağın mesnetlendirilme durumu olur). (I) kararsız (= labil) denge durumundan (II) kararlı denge (= stabil denge) durumuna geçer.



Not: Şekildeki eğri şekil düzlemi üzerine yatırılmış olup, orta düzleme ait bir eğriyi temsil etmektedir.

Şekil (1.1)

İşte bu olayın tamamının etüdü plaklarda burkulma olayının etüdü olup, bütün varyantları ile birlikte çalışma konusunu teşkil etmektedir.

### PLAKLARDA EĞİLME FORMÜLLERİNİN HATIRLATILMASI:

Plakların burkulmasına geçmeden önce, bazı formüllere intibakı kolaylaştırmak bakımından, plaklarda eğilme formüllerinin kısaca hatırlatılması faydalı olur:

Plaklarda eğilme tevhit eden dış ve iş kuvvetler:

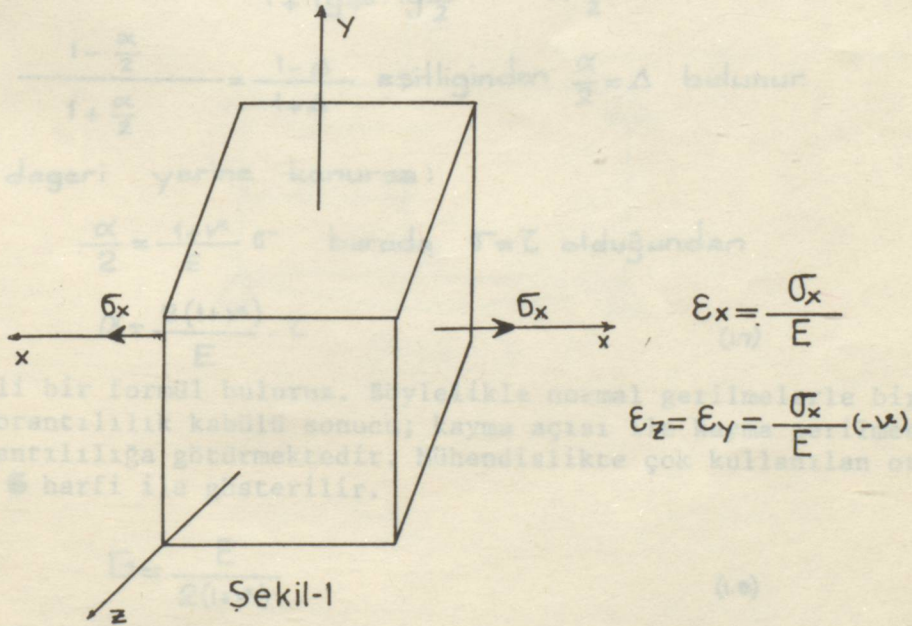
$M_x$ , $M_y$	eğilme momentleri
$M_{xy} = M_{yx}$	burkulma momentleri (= torsiyon)
$Q_x$ , $Q_y$	kesme kuvvetleri dış kuvveti, n den ibarettir.

## 1.1- GENEL HOOKE KANUNLARI

1.1.1- Normal kuvvet halinde Hooke Kanunu: Eğer cisim sadece normal kuvvete maruzsa, yani yalnız normal kuvvet etkisi altında ise; normal gerilme ile birim uzamanın orantılı olduğu görülür.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.1)$$

(Şekil.1..) de görüldüğü gibi,  $X$  doğrultusunda etkiyen bir  $\sigma_x$  gerilmesi o doğrultuda bir uzama meydana getirir. Ancak aynı  $\sigma_x$  gerilmesi  $X$  doğrultusunda uzama meydana getirirken  $y$  ve  $z$  eksenleri doğrultusunda bir kısalma meydana getirir. O zaman problemin içinde  $\sigma_x$  var ise, cisimde kısalma meydana getiren  $\sigma_y$  ve  $\sigma_z$  de vardır. O halde birim uzamalar:



$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.2)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1.3)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1.4)$$

denklemleri bulunur.

1.1.2- Kayma açısı ile kayma gerilmesi arasındaki ilişki:

(Şekil.2..) de de görüldüğü gibi

$$\Delta = \frac{1}{E} [\sigma - \nu(-\sigma)] = \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad (1.5)$$

buna bağlı olarak açı değişimi de:

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1-\Delta}{1+\Delta} \quad (1.6)$$

yazılabilir.  $\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$  ifadesi açılırsa  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$   $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$

alınır ise  $\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha}{2}}$  elde edilir.

Ve  $\frac{1 - \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}$  eşitliğinden  $\frac{\alpha}{2} = \Delta$  bulunur.

$\Delta$  nın değeri yerine konursa:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\nu}{E} \sigma \quad \text{burada } \sigma = \tau \text{ olduğundan}$$

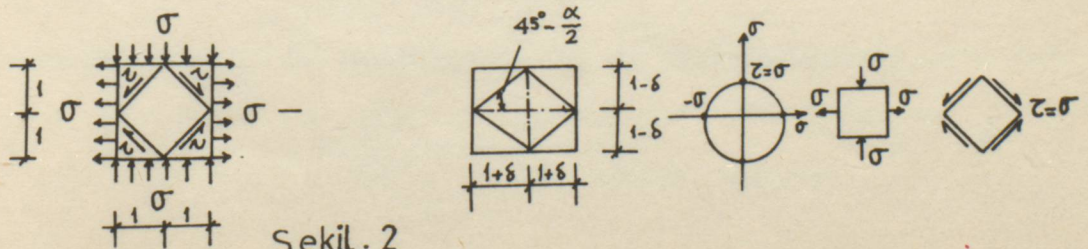
$$\alpha = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau \quad (1.7)$$

gibi önemli bir formül buluruz. Böylelikle normal gerilmelerle birim uzamalar arasında orantılılık kabülü sonucu; kayma açısı ile kayma gerilmesi arasında da bir orantılılığa götürmektedir. Mühendislikte çok kullanılan orantılılık katsayısı **G** harfi ile gösterilir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.8)$$

ile gösterilir G ye kayma modülü adı verilir. Kayma modülü tanımlandıktan sonra; kayma açıları aşağıdaki gibi formülüze edilir.

$$\alpha_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \alpha_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \alpha_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (1.9)$$



Sekil. 2

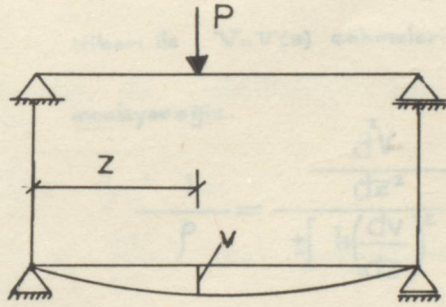
(1.2), (1.3), (1.4) ve (1.9) formülleri ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERLE GERİLMELER arasındaki bağıntıyı veren genel formüllerdir. İleride plakların stabilitesi konusu incelendiği zaman sık sık mürecaat edeceğimiz formüller olacaktır.

## 1.2- ELASTİK EGRİ

### 1.2.1- ELASTİK EGRİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Basit eğilmede eğrilik yarıçapının momente bağlı ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1.10)$$



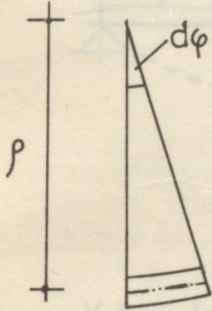
Şekil - 3

Eğilme momenti çubuk boyunca sabit olduğundan, çünkü basit eğilme,  $\rho$  da sabittir. Halbuki kesmeli eğilme de moment çubuk boyunca değişkendir. Moment değişken olduğundan eğrilik yarıçapıda her yerde aynı olmaz,  $z$  nin fonksiyonu olarak değişir. Şekilde de görüldüğü gibi  $y$  doğrultusundaki yer değiştirmeleri  $V$  ile gösteririz.  $V$ : çubuğun yük konmadan ilk konumu ile; yük konduktan sonraki son konumu arasındaki uzaklıktır.

Bu sebeple her hangi bir eksen noktasının yer değiştirmesine ÇÖKME, Şekil değiştirmiş eksen eğrisine ise ELASTİK EğRİ denir.

Kesmeli eğilmede elastik eğriye kesme kuvvetinin de ayrıca etkisi vardır. Bu etki fazla değildir. Bu kısımda kesme kuvvetinin etkisini göz önüne almayacağız. Yani ihmal edeceğiz.

Basit eğilmede: eğrilik yarıçapı ile, çubuk kesitlerinin birbirine göre  $d\phi$  dönmesi arasında Şu bağıntı vardır.



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\phi}{dz} \quad (1.11)$$

Yandaki Şekil incelenirse  $\frac{d\phi}{dz}$  nin elastik eğrinin eğimindeki değişmeyi gösterdiği görölür. Biz konumuz itibarı ile  $V=V(z)$  çökmeleri eğrilik yarıçapının bağıntısını inceleyeceğiz.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\pm \left[ 1 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (1.12)$$

(2.3) bağıntısını :

$$\frac{M}{EI} = \mp \frac{V''}{\left[ 1 + V'^2 \right]^{3/2}} \quad (1.13)$$

Şeklinde yazabiliriz. (2.4) bağıntısı sadece eğilme momentinin etkisindeki bir çubukta (kesme kuvveti yok) elastik eğrinin DİFERANSİYEL denkleminin denir.

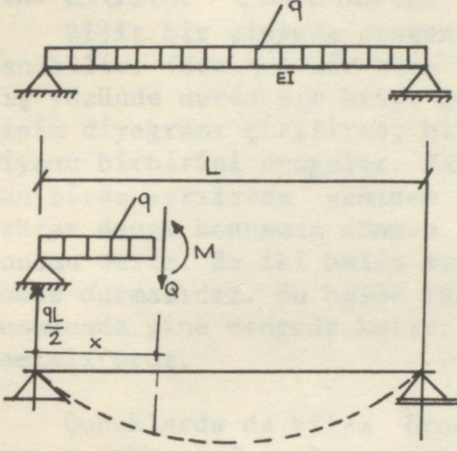
Bu denklemindeki gerek  $V$  çökmeleri; gerekse çökmenin eğimi olan  $V$  değerleri son derece küçüktür. O halde paydaki  $V'^2$ , 1'in yanında ihmal edilir-se

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \mp \frac{M}{EI} \quad (1.14)$$

denkleminin varılır. Bu formüle bize (-) li olan anlamlıdır.

$$\frac{d^2V}{dz^2} = - \frac{M}{EI} \quad (1.15)$$

ÖRNEK PROBLEM: YANDAKİ ŞEKİLDEKİ kirişteki elastik eğriyi ve maksimum çökmeyi bulunuz.



Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi X kesitindeki eğilme momenti:

$$M = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{q}{2} x^2 \text{ dir}$$

Daha önce  $\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{EI}$  (2.6) bağıntısını bulmuştuk.

Bu ifadeyi  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$  şeklinde yazarak iki kez integre edersek:  $y = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qLx^3}{12EI} + C_1x + C_2$  denklemini bulunur.

Bosit kirişe ait sınır şartları şunlardır:

$$\begin{aligned} x=0 \text{ için } y &= 0 \\ x=L \text{ için } y &= 0 \end{aligned}$$

Bu sınır koşulları yukarıdaki denkleme tatbik edilirse integral sabitleri olan  $C_1 = \frac{qL^3}{24EI}$   $C_2 = 0$  bulunur.

O halde elastik egrinin denklemini:

$$y = \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qLx^3}{12EI} + \frac{qL^3x}{24EI} \text{ bulunur.}$$

Şekilde de görüldüğü gibi en büyük çökme (sehim)  $x = \frac{L}{2}$  kesitindedir.

O halde maksimum çökme gerekli işlemler yapıldıktan sonra:

$$F = [y]_{x=\frac{L}{2}} = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI} \text{ olarak bulunur.}$$

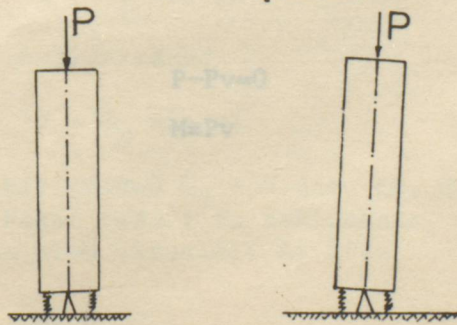
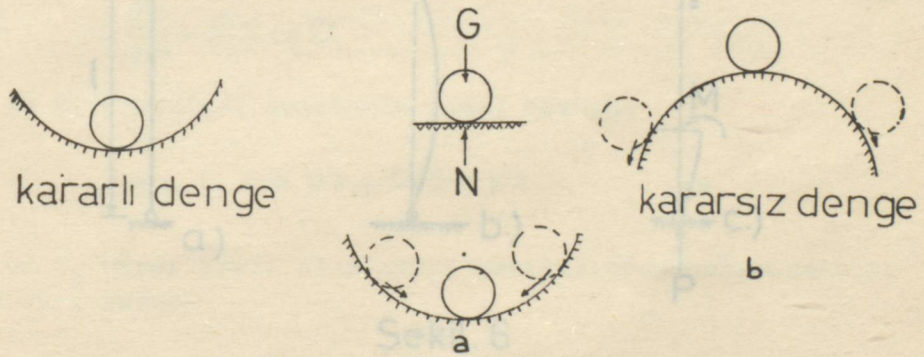
## 2 . BÖLÜM

2.1- BURKULMA

## 2.1.1. Elastik çubuklarda dengenin kararsızlığı:

Rijit bir cisimde dengenin kararlılığı şu basit örnekle açıklanabilir. (Şek.4) Bir küre kapağının bir defa içyüzünde bir defa dış yüzünde duran bir bilye göz önüne alalım. Bilyeye ait serbest cisim diyagramı çizilirse, bilyenin  $G$  ağırlığı ile  $N$  normal reaksiyonu birbirini dengeler. Fakat (a) halinde bilye denge konumundan biraz ayrılırsa yeniden ilk konumuna döner, ancak (b) halinde tekrar denge konumuna dönmez. (a) ya kararlı (b) ye kararsız denge konumu deriz. Bu iki halin sınırı, bilyanın (c) deki gibi bir düzlemde durmasıdır. Bu halde cisim denge konumundan ayrılırsa yeni konumunda yine dengede kalır. Buna da farksız denge konumu diye tanımlıyoruz.

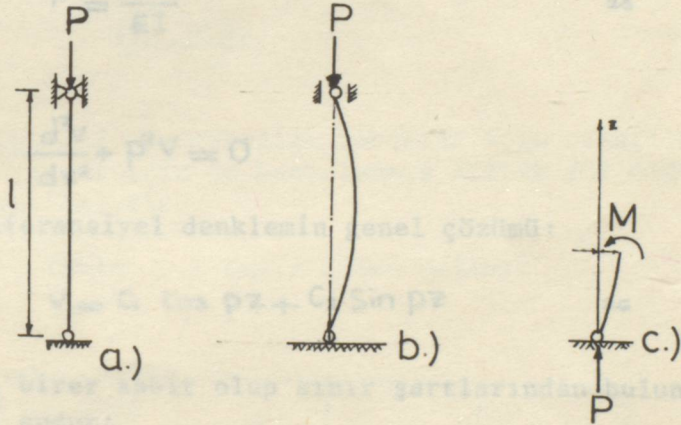
Çubuklarda da bilya örneğine benzer kararsızlık durumları ortaya çıkmaktadır. Bunu açıklamak için (Şek. 5) deki rijit çubuk örneğini düşünelim. Eğer yaylar olmasaydı çubuğun dengesi kararsız olacaktı. Yayların dengenin kararlı yöne gitmesine yardım ettiği aşıkardır. Ancak yayların  $k$  yay katsayısının büyüklüğüne göre  $P$  yükünün bir sınırına kadar denge kararlı olur (çubuğun kendi ağırlığı ihmal ediliyor).  $P$ 'nin bir  $P_k$  kritik değerinden sonra artık yayların kuvveti bozulan denge konumunu düzeltmek için kafi gelmez.



ŞEKİL. 5

Elastik çubuklarda bu örnekteki yayların yerine çubuğun bütünü geçmektedir. Gerçekten,  $P$  yükünün bir düzeye erişmesi halinde, çubuğun bütünü artık kendi ipçiklerinin elastik gücü ile ilk denge konumuna dönemeyecek duruma gelir. Bu halde çubukta denge kararsız olmakta ve denge bozulunca çubuk doğru formdan ayrılıp yana eğilmektedir. Bu olayı burkulma adını veririz. Burkulmada çubuğa dışarıdan bir eğilme momenti etkemediğini, çubuğun aksenal kuvvet etkisinde dengesini kaybederek eğildiğini kabul ediyoruz.

2.1.2. Euler Teorisi: Basınç etkisindeki bir çubukta basınç yükünün kritik değerini bulmak için Euler'in kullandığı denge yöntemini inceleyeceğiz. Bunun için çubukta doğrudan farklı eğrisel bir denge formu mümkün oluyorsa, bunun farksız dengeye karşı geldiği, o halde bu haldeki yükün kritik yük olduğuna karar vereceğiz. Boyutları belirli bir çubuk alalım (Şek. 6). Uçlarından biri sabit, diğeri kayıcı mafsallı olsun. Bu çubukta (b) deki gibi eğri bir denge konumunun var olduğunu kabul edelim. Böyle bir denge halinde çubuk kesitlerinde bir eğilme momenti ortaya çıkar. Bu eğilme momenti,  $v$  çökmeleri ile ilgilidir ve (c) deki şekilden



Şekil. 6

$$P - Pv = 0$$

2.1

$$M = Pv$$

2.2

olarak bulunur. Öte yandan eğilmede çökme ile moment arasında:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad 2.3$$

bağıntısının bulunduğunu çıkarmıştık denkleminin ( 2.2 ) ile arasında M yi yok edersek:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{Pv}{EI} \quad 2.4$$

elde edilir. Bu, v için bir diferansiyel denklem verir:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{P}{EI}v = 0$$

Kısaltmak için:

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad 2.5$$

koyarsak:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + p^2v = 0$$

bulunur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü:

$$v = C_1 \cos pz + C_2 \sin pz \quad 2.6$$

dir.  $C_1$  ve  $C_2$  birer sabit olup sınır şartlarından bulunacaktır. Sınır şartları şudur:

$$z = 0 \text{ da } v = 0$$

$$z = l \text{ de } v = 0$$

İlk sınır şartından  $C_1 = 0$  elde edilir ve geriye

$$v = C_2 \sin pz \quad 2.7.a$$

kalır. İkinci şartı kullanırsak:

$$0 = C_2 \sin pl \quad 2.7.b$$

elde edilir. Bunun bir çözümü  $C_2 = 0$  dır. Bu, doğrusal çubuk formuna karşı gelmektedir. Fakat (2.7.b)'in sağlanması,  $C_2$  sıfır olmadan da mümkündür, bu da  $\sin.pl=0$  olmasıdır ki bize

$$pl = n\pi \quad 2.8$$

verir. Bu, v için (2.7.a) gereğince

$$V = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} z$$

2.9

ifadesini verir. Buradaki  $C_2$ , elastik eğrinin genliğini göstermektedir. Böylece herhangi  $C_2$  genlikleri için eğri denge formunun mümkün olduğu ortaya çıkmaktadır. Farksız dengeye karşı gelen bu durum,  $p$ 'nin ( 2.8 ) ü sağlaması ile mümkün olmuştur. ( 2.8 ) ifadesinin her iki tarafının karesi alınarak:

$$P^2 l^2 = n^2 \pi^2$$

2.10

veya ( 2.5 ) ten  $p$ 'nin değerini yerine koyarak

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

2.11

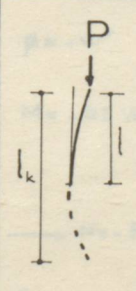
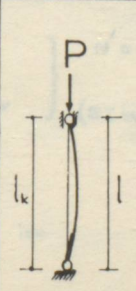
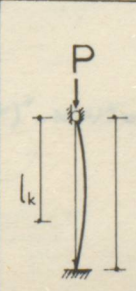
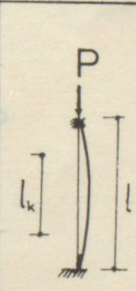
elde edilir.  $n=0$  için  $P=0$  olur ki bu hal ilgi çekici değildir. Diğer  $P$ 'ler içinde en küçükü  $n=1$  olmasıdır. Bu aradığımız kritik yüküdür:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

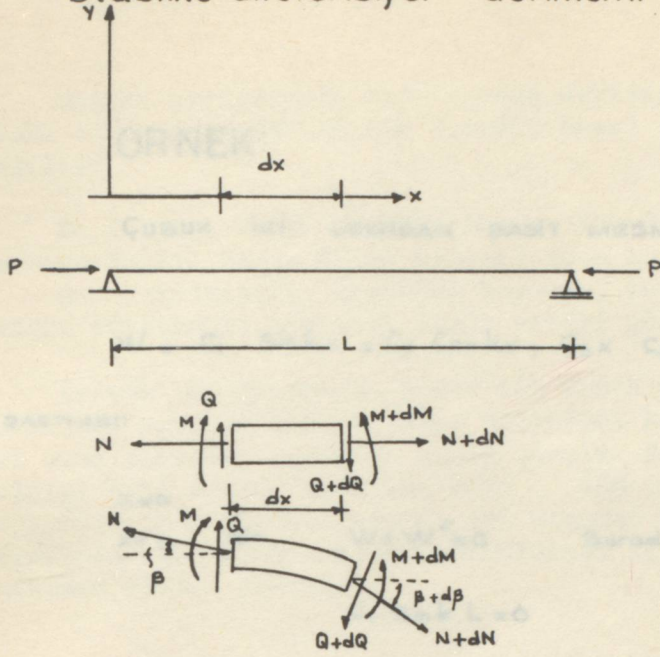
2.12

Buradaki  $P_k$ , iki ucu mafsallı çubuklar için çıkarılmıştır. Diğer üç mesnet şartı için de hesaplanmış kritik yük değerleri Tablo(A.1) de verilmiştir.

Tablo A.1 Basit Euler Halleri

mesnet şekli				
$\pi^2$	$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{2.043 \pi^2 EI}{l^2}$	$\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$
$l_k$	2l	l	0,7l	0,5l

### 2.13 Genel sınır şartı halinde çubukta stabilite diferansiyel denklemi



$$X=0 \quad -N + (N+dN) - Q \cdot \beta + (Q \cdot dQ) (\beta + d\beta) = 0 \quad (1)$$

$$Y=0 \quad -Q + (Q+dQ) + N \cdot \beta - (N+dN) (\beta + d\beta) = 0 \quad (2)$$

$$M=0 \quad M - (M+dM) + Q \cdot dx = 0 \quad (3)$$

(1) (2) ve (3) nolu denklemlerden:

$$N' + Q \cdot \beta' + \beta Q' = 0$$

$$-N\beta' - \beta N' + Q' = 0$$

$$Q = M'$$

$$\left. \begin{array}{l} N' = 0 \\ Q' - N\beta' = 0 \\ Q = M' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \beta = -w' \\ M = -EI w'' \end{array} \right\} \begin{array}{l} N' = 0 \\ (EI w''')' - N w'' = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} N' = 0 \\ EI w'''' - N w'' = 0 \end{array} \rightarrow N = -P \text{ ise}$$

$$EI w'''' - P w'' = 0 \quad \text{Her terim EI ya bölünürse:}$$

$$w'''' - \frac{P}{EI} w'' = 0$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \text{ denirse:}$$

$$w'''' - k w'' = 0 \quad \text{SABİT KATSAYILI DİF. DENKLEM}$$

## ÖRNEK:

ÇUBUK İKİ UCUNDAN BASIT MESNETLİ İSE:

$$W = C_1 \cdot \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4$$

SINIR ŞARTLARI:

$$x=0$$

$$x=L$$

$$\text{için } W = W'' = 0 \quad \text{Buradan } C_2 = C_3 = C_4 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$C_1 \cdot \sin kL = 0$$

$$C_1 \neq 0$$

0 halde:

$$\sin kL = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{her iki tarafın karesini alalım:}$$

$$k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}$$

Daha önceden:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \text{ diye tanıflemiştik}$$

$$\frac{P}{EI} = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \text{ bulunur.}$$

$$P_{\text{kritik}} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

$P_{\text{kritik}}$ 'in en küçük değeri bize lazım olan değerdir. 0 halde bunun

için  $n=1$  alınmalıdır.

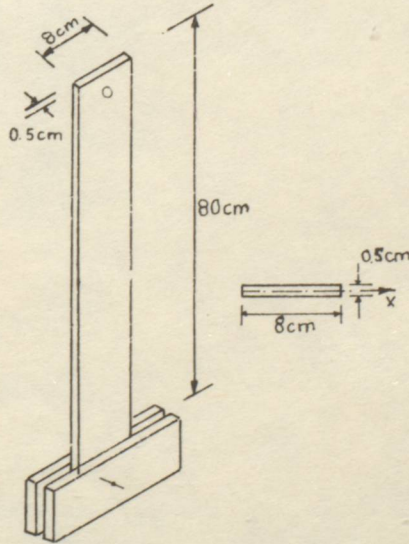
$n=1$  için

$$P_{\text{kritik}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ bulunur.}$$

Mesnet şartlarının kritik yüke etkisini daha basit bir biçimde ifade etmek için kritik yük formülü hepsi için tek bir şekilde yazılır:

Bu formüle Euler formülü denir. Formülde paydadaki  $l_k$  'ya burkulma boyu denir. Basit Euler halleri için burkulma boyları da Tablo de verilmiştir. Burkulma boyunun, burkulma eğrisinin büküm noktaları arasındaki uzaklığı ifade ettiği gösterilebilir.

Kritik yük hesabında basit bir örnek olmak üzere, bir T cetvelinin iki ucundan bastırılması halindeki kritik yükünü hesaplayalım. İki ucun mafsallı olduğunu kabul edelim. Boyutlar Şekil (aşağıdaki) verildiği gibi olsun. Burkulma boyu  $=80$  cm olacaktır. Kesit yanda gösterilmiştir. Cetvel sadece iki ucundan bağlı olunca  $x$  eksenini etrafında eğrilecek şekilde burkulacağı için hesapta  $I_x$  alınmalıdır (minimum atalet momenti):



$$I_x = \frac{8 \cdot 0,5^3}{12} = 0,08333 \text{ cm}^4$$

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot 10^5 \cdot 0,08333}{80^2} = 4,09 \text{ kg}$$

3.1- TARTIŞ (Çubuk) boyuna yöresinde emilme meydana getirecek şekilde yüklenmiş

bulunur. Burkulma tehlikesi olmasa  $= 500 \text{ kg/cm}^2$  de, dolayısıyla  $P = oF = 500.0,5.8 = 2000 \text{ kg}$  yükte kırılacak çubuk,  $P = 4,09 \text{ kg}$  yükte burkulmaktadır.

3.2-

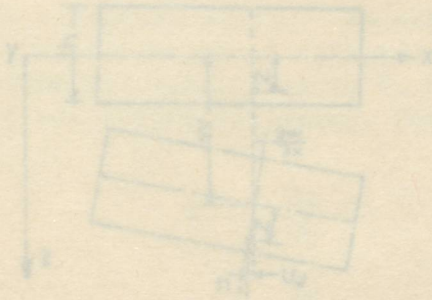
Çubuklardan kesitin çubuk boyuna değişken olması, yüklerin yalnız başlara etkimeyip arada da bulunması veya arada mesnetler olması gibi hallerde kritik yükün bulunmasına burada değinilmeyecektir. Gerekli hallerde literatüre baş vurmalıdır.

Kritik yük bulunduktan sonra çubukların bu yüke kadar yüklenememesi gerekeceği, bir n emniyet katsayısı ile bölünerek kritik yükten aşağıda kalınması gerektiği açıktır. Böylece taşıyacak yük

$$P = \frac{R_k}{n}$$

2.13

şeklinde hesaplanacak demektir.



Şekil.7

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi xy düzlemi deforme olmuş bir koordinat sistemine göre ölçülebilir. Yukarıdaki şekilde y=sabit düzlemidir. Yani Y-Y eksenine diktir. O halde Plaklar için aşağıdaki saat bilgi yazılabilir.

1- Geometri bakımından

$$d \ll l_x, l_y$$

2- Malzeme bakımından (Isotrop-Homojen Malzeme)

$$E_x = E_y = E$$

3- Deformasyon bakımından

$$w \ll d \quad (\text{Şehirler kalınlığının yanında çok küçüktür}).$$

4- Deformasyondan önceki normaler deformasyondan sonrada normal kalırlar.

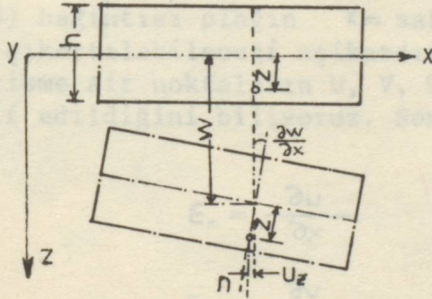
## 3. BÖLÜM

## PLAKLAR

3.1- TARİF (tanım): Orta yüzeyinde eğilme meydana getirecek şekilde yüklenmiş ince ve düzlem taşıyıcılara PLAK denir. (genel tanım).

3.2- PLAKTAKİ İÇ KUVVETLER

Plak; kalınlığı diğer iki boyut yanında ihmal edilebilen ve orta düzleme dik bir doğru üzerinde bulunan noktaların, şekil değiştirme olayından sonrada deforme olmuş orta düzleme dik doğru üzerinde olduğu, ve sehimler kalınlık yanında ihmal edilebileceği; ortalama yüzeyde oluşan boy ve açı değişimleri ihmal edilebilen bir yüzeysel taşıyıcıdır. Şeklinde tanımlanabilir. Madem ki yukarıdaki kabuller geçerlidir, o halde şu söylenebilir: Orta düzleminde alınan bir elamının şekil değiştirme yapmadığı kabul edilebilir. (Şekil...?).



Şekil.7

Yukarıdaki şekildedeki görüldüğü gibi xy düzlemi deforme olmamış dik koordinat sistemine göre ölçülebilir. Yukarıdaki şekilde  $y=\text{sabit}$  düzlemdir. Yani Y kağıt düzlemine diktir.

O halde Plaklar için aşağıdaki özet bilgi yazılabilir.

1- Geometri bakımından

$$d \ll L_x, L_y$$

2- Malzeme bakımından (İzotrop-Homojen Malzeme)

$$\epsilon = k\sigma \quad k = \frac{1}{E}$$

3- Deformasyon bakımından

$$w \ll d \quad (\text{Sehimler kalınlığının yanında çok küçüktür}).$$

4- Deformasyondan önceki normaller deformasyondan sonrada normal kalırlar.

Orta düzleme ait bir  $(X, Y, 0)$  noktası  $Z$  doğrultusunda dış kuvvetlerin etkisi altında bir  $W$  yer değiştirmesine maruz kalır. Ve bu noktadan geçen ve orta düzleme dik olan normal bir miktar eğilir. Bu eğilmeyi

$$\frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{açıları yardımı ile tanımlayabiliriz.}$$

0 halde orta düzlemde bulunan bir  $(X, Y, Z)$  noktası; plağın dış kuvvetler altında şekil değiştirmesi sonucunda,  $U_z, V_z, W_z$  yer değiştirmelerine uğrayacaktır. Plak kalınlığı diğer iki boyutu yanında küçük olduğu kabul edildiğinden yani plak kalınlığı küçük olduğundan:

$$W_z = W \quad \text{yazılabilir} \quad (3.1).$$

$U_z$  yerdeğişimi şekil (...7.....) den de görüleceği gibi  $x$  ekseninin negatif yönündedir. Böylelikle aşağıdaki önemli iki denklem yazılabilir.

$$U_z = -z \frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.2).$$

$$V_z = -z \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.3).$$

(3.3) bağıntısı plağın  $x = \text{sabit}$  kesitindeki şekil değiştirmesi etüdünden çıkartılabileceği aşikardır. Katı bir cismin şekil değiştirmesi, bu cisme ait noktaların  $U, V, W$  yer değiştirme bileşenleri yardımı ile tarif edildiğini biliyoruz. Sonsuz küçük şekil değiştirmeler halinde

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad 3.4$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad 3.5$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3.6$$

yazılabilir. Yine mukavemetin temel bilgilerinden de anlaşılacağı üzere:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad 3.7$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad 3.8$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad 3.9$$

denklemleri yazılır. Yukarıdaki (3.4), (3.5), (3.6) denklemleri ile bulunan (3.7), (3.8), (3.9) bağıntılarına Geometrik ŞARTLAR denir.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  büyüklüklerine de ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİNİN bileşenleri, kısaca şekil değiştirme bileşenleri adı verilir. (3.7), (3.8) ve (3.9) denklemleri yardımı ile

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z \cdot w_{xx}'' \quad (3.10)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_z}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z \cdot w_{yy}'' \quad (3.11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \cdot w_{xy}'' \quad (3.12)$$

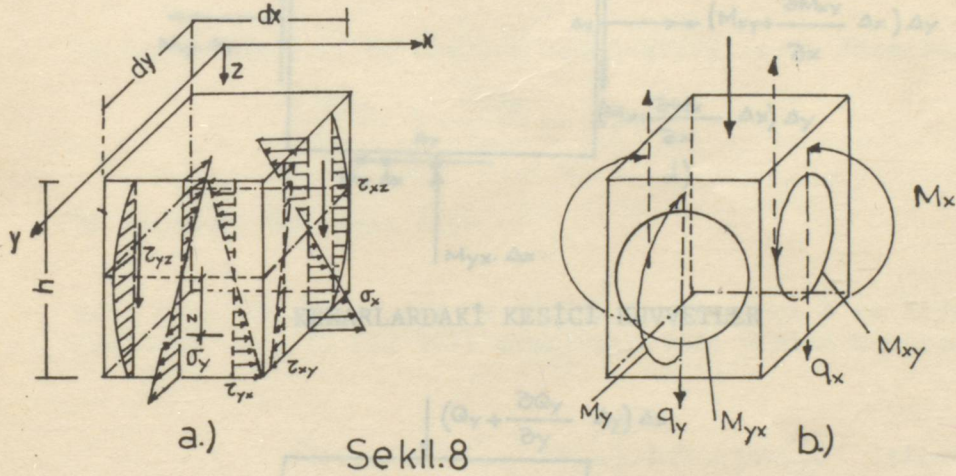
bağıntıları bulunur..

Plaktaki genel gerilme denklemleri ise aşağıda ifade edildiği gibi çıkarılabilir:

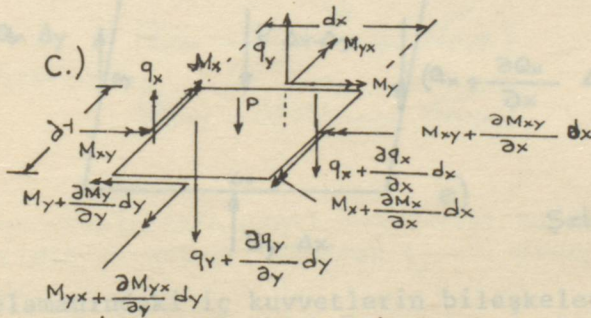
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.13)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.14)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G \cdot \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.15)$$



Sekil.8



(Şekil (8.a,b,c) deki diferansiyel elamanın herhangi bir yüzü için, bu gerilmelerin bileşikleri olarak plak kesit tesirleri ise:

$$-\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_x \cdot dy$$

$$-\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_y \cdot dx$$

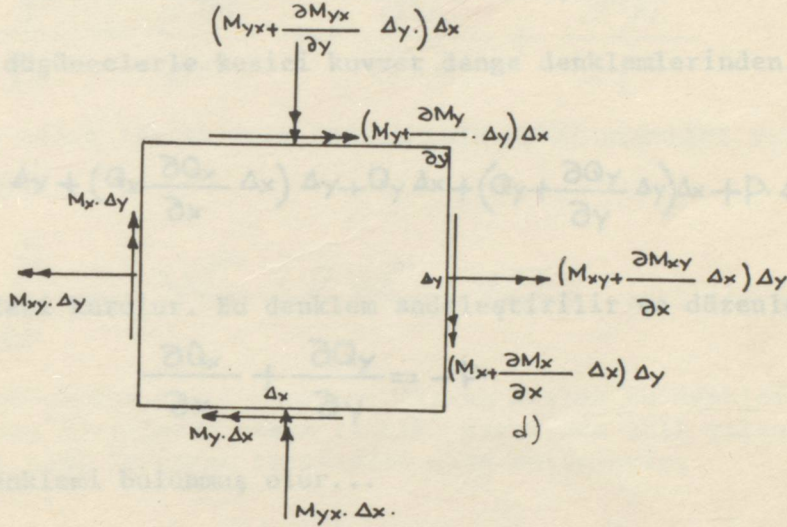
$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.16)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.17)$$

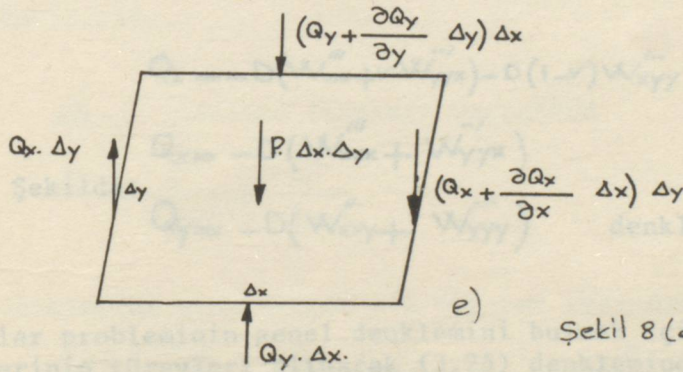
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{Plak eğilme rijitliği} \quad (3.18)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.19)$$

## KENAR MOMENTLERİ



## KENARLARDAKİ KESİCİ KUVVETLER



Şekil 8 (d,e)

Plak elamanındaki iç kuvvetlerin bileşmeleri ile artışları incelenirse başlangıç ve diğer kenardaki momentler ve kesici kuvvetler yukarıdaki şekildedeki gibi gösterilir.

Şekillerdeki plak elamanlarının denge denklemleri yazılır ve işlemler sadeleştirilirse moment denge denklemlerinden:

$$\Sigma Y=0 \text{ dan: } M_x \Delta y + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + M_{xy} \Delta y + \left( M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - Q_x \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.20)$$

$$\Sigma X=0 \text{ dan: } M_y \Delta x + \left( M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x + M_{yx} \Delta x + \left( M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - Q_y \Delta y \Delta x = 0 \quad (3.21)$$

(3.20) ve (3.21) denge denklemleri sadeleştirilirse:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = Q_y \quad (3.23)$$

Kesme kuvveti denge denklemleri bulunmuş olur.

Aynı düşüncelerle kesici kuvvet denge denklemlerinden:

$$Q_x \cdot \Delta y + \left( Q_x \frac{\partial Q_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y + Q_y \Delta x + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x + P \cdot \Delta x \Delta y = 0 \quad (3.24)$$

Denklemini kurular. Bu denklem sadeleştirilir ve düzenlenirse:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -P \quad (3.25)$$

Yük denklemi bulunmuş olur...

Daha önce (3.16) (3.17) ve (3.18) denklemleri X ve Y ye göre türetilirlerse ve 3.22 ila 3.23 denklemlerinde yerine konursa.

$$Q_x = -D(W_{xxx}'' + \nu W_{yyx}''') - D(1-\nu)W_{x''yy} \quad \text{İşlemler sadeleşirse}$$

$$Q_x = -D(W_{xxx}'' + W_{yyx}''') \quad (3.26)$$

Benzer şekilde:

$$Q_y = -D(W_{xxy}'' + W_{yyy}''') \quad \text{denklemini bulunur..} \quad (3.27)$$

Plaklar probleminin genel denklemini bulmak için (3.22), (3.23) denklemlerinin türevleri alınarak (3.25) denkleminde yerine koymak lazımdır. 0 halde.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (3.29)$$

Her iki denklem taraf tarafa toplanırsa:

$$-P = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \quad (3.30)$$

denklemini bulunur. Daha önce  $M_{xy} = M_{yx}$  olduğunu ispat etmiştik.

Yine daha önceden (3.16) (3.17) (3.18) ve (3.19) denklemlerini bulmuştuk.

Bulduğumuz bu denklemleri (3.30) denkleminde yerlerine korsak:

$$\frac{P}{D} = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial^2 x \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilen PLAK PROBLEMİNİN GENEL DENKLEMİ bulunmuş olur.

Bu ifadeyi.

$$\frac{P}{D} = W_{xxxx} + 2 W_{xxyy} + W_{yyyy} \quad \text{şeklinde de yazabiliriz.}$$

Plak probleminin genel denklemi olarak anılan bu denklem Sofie Germani tarafından hazırlanan tezin tetkiki sırasında 1811 yılında büyük matematikçi, dahî Logrange tarafından elde edilmiştir.

Yukarıda (3.31) de bulunmuş olon GENEL DENKLEMİ ileride problemimizin çözümünde kolaylık olsun diye aşağıda açıklayacağımız rotasyonlardaki ifade edebiliriz.

$\Delta =$  Laplace (Laplas) operatörü

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.32)$$

(3.32) denklemini plak sehimi ile beraber aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Delta W = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] W = W_{xx}'' + W_{yy}'' \quad (3.33)$$

$$\Delta(\Delta W) = \left[ W_{xx}'' + W_{yy}'' \right]_{xx}'' + \left[ W_{xx}'' + W_{yy}'' \right]_{yy}'' \quad (3.34)$$

$$\Delta^2 W = W_{xxxx}'''' + 2 W_{xxyy}'''' + W_{yyyy}'''' \quad (3.35)$$



### 3.3. Plak probleminin diferansiyel denklemlerle çözümü

Plak probleminin çözümünde basit trigonometrik fonksiyonlarla seriye açılabilen, sonümü çabuk olmamakla birlikte, kolay çözüm veren bir yöntem uygulanacaktır.

Bütün kenarlarından serbestçe oturan bir Plakın genel denklemi:

$$W_{xxxx}'''' + 2W_{xxyy}'''' + W_{yyyy}'''' = -\frac{P}{D} \quad \text{şeklindedir. Plak genel denkleminin çözümünde Navier tarafından } W(xy) = \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

şehim terimi ile  $P = \sum \sum P_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$  yük terimi ifadeleri teklif edilmiştir. Buradaki  $m, n$  tek sayılardır.

Şehim teriminin  $X$  ve  $Y$  ye göre türevlerini alalım.

$$W'_x(xy) = \sum \sum C_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$W''_{xx}(xy) = \sum \sum -C_{mn} \frac{m^2\pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{bulunur.}$$

$$W'_y(xy) = \sum \sum C_{mn} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{a} x$$

$$W''_{yy}(xy) = \sum \sum -C_{mn} \frac{n^2\pi^2}{b^2} \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{a} x \quad \text{bulunur.}$$

Bu değerlerin ikiye daha türevlerini alıp, plak genel denkleminde yerine koymamız icap eder. Ayrıca Plak genel denklemindeki  $2W_{xxyy}''''$  teriminin de  $X$  ve  $Y$  ye göre türevlerini ikiye daha ard arada türevlerini almakla bulunacağı aşikardır. Netice olarak  $X$  ve  $Y$  ye göre istenilen türevler alınıp, plak genel denkleminde yerlerine korskak  $W(xy)$  şehim denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$W(xy) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum \sum \frac{P_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

denklemi bulunur.

$P_0$ : Düzgün yayılmış bir yük ise;

$$P_{mn} = \frac{4P_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx dy$$

işlemler sadeleştirilirse:

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{\pi^2 mn} \quad \text{yük terimi bulunur.}$$

Yük teriminin bu değeri önceden bulunan  $M_x$ ,  $M_y$  ve  $M_{xy}$  moment denklemlerinde yerine konursa:

$$M_x = \sum \sum \frac{16P_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{(m\pi/a)^2 + \nu(n\pi/b)^2}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$M_y = \sum \sum \frac{16P_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{(n\pi/b)^2 + \nu(m\pi/a)^2}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

$$M_{xy} = \sum \sum (-1 + \nu) \frac{16P_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{m\pi/a \cdot n\pi/b}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y$$

şeklinde bulunur. Bu denklemler bizim bulmak istediğimiz moment denklemleridir. Daha sonra  $m$  ve  $n$  ye tek sayı değerleri vererek nümerik sayılabilecek değerler bulacağız. Yukarıdaki bulunan denklemler

DÖRT KENARLARINDAN SERBEST MESNETLENMİŞ BİR PLAĞIN MOMENT DENKLEMLERİDİR.

Bu denklemler  $w(x,y)$  sehim teriminin

şartlarını da sağladığından, ayrıca sınır şartlarının gerçekleştirilmesi gerekmiyecektir.

Formüllerdeki  $P_{mn}$  yük teriminin bulunmasına gelince;

$$P = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{formülündeki } P_{mn} \text{ nin bir}$$

özel hali için, denklemin her iki taraf,

$$\sin \frac{n'\pi}{b} y \cdot dy \quad \text{ile}$$

çarpılıp, "0" ile "b" arasındaki entegrasyon ile ve  $n \neq n'$  için:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n'\pi}{b} y dy = \left[ \cos \frac{n\pi}{b} b \cos \frac{n'\pi}{b} b [y]_0^b \right] = \cos n\pi \cdot \cos n'\pi = 0$$

$n=n'$  için.

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot \sin \frac{n'\pi}{b} y dy = \left[ \cos \frac{n\pi}{b} b \cdot \cos n \frac{n\pi}{b} [y]_0^b \right] = \cos n\pi \cdot \cos n\pi$$

$$-\frac{1}{2} (1 + \cos 0 n\pi) [y]_0^b = \frac{b}{2}$$

Aynı şekilde denklemin her iki tarafının  $\sin \frac{m'\pi}{a} x$  ile çarpılarak "0" dan "a" ya kadar entegre edilmesiyle

$$\int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m'\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n'\pi}{b} y dx dy = \frac{ab}{4} P_{m'n'}$$

buradanda,

$$P_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m'\pi}{a} x \sin \frac{n'\pi}{b} y \quad \text{bulunur.}$$

Bu integrasyon verilen bir için alınır, seriye ait olan katsayılar bulunur ve verilen yükün kısmî sinüsoidal yüklerin toplamı olduğu kabul edilerek; evvelce incelenen kısmi yüklemine sehim ve toplam sehimde verilen terimlerin toplamı kabul edilirse;

ÖRNEK;

Elde olunan plâk denklemlerinin dört kenarından serbest oturan kare plâğa uygulanması.

Kare plakda:

$$x=y$$

$$x = a/2$$

$$y = b/2$$

$$a = b.$$

Problemin ilk çözümünde, diğer metodlarla da mukayese edebilmek için ve Yeni DIN 1045 (1972). 15.1.2. ye göre de basitlik sağlanmak üzere müsaade edilmesiyle

$$v = 0 \quad \text{alınacaktır.}$$

Buna göre çözüm:

$$M_x = M_y = \sum \sum \frac{16 p_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + 0 \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$$

veya:

$$M_x = M_y = \sum \sum \frac{16 p_0}{\pi^2 mn} \cdot \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\left[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{formüllerini ile yapılacaktır}$$

"m" ve "n" nin çift değerleri için sonuç bıfır olduğundan:

$$\sin 2\pi, 4\pi, 6\pi \dots \dots \frac{2\pi' \pi}{a} \frac{a}{2} \Rightarrow m\pi \text{ için } \begin{cases} m' = \text{çift sayı ise} \\ \sin m'\pi = 0 \end{cases}$$

doğrudan doğruya tek sayılarla örnek problem olması bakımından büyük bir çözüm oluncaya kadar hesap yürütülecektir.

$$M_x^{1,1} = M_y^{1,1} = - \frac{16 p_0 a^2 \cdot 1^2}{\pi^4 \cdot 1 \cdot 1 (1^2 + 1^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = +0.04106360 p_0 a^2 \quad \text{bulunur.}$$

$$M_x^{1,3} = M_y^{1,3} = - \frac{16 p_0 a^2 \cdot 1^2}{\pi^4 \cdot 1 \cdot 3 (1^2 + 3^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.00054751 p_0 a^2 \quad \text{bulunur.}$$

$$M_x^{3,1} = M_y^{3,1} = - \frac{16 p_0 a^2 \cdot 3^2}{\pi^4 \cdot 3 \cdot 1 (3^2 + 1^2)^2} \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.004920 p_0 a^2 \quad \text{bulunur.}$$

$$M_x^{3,3} = M_y^{3,3} = - \frac{16 p_0 a^2 \cdot 3^2}{\pi^4 \cdot 3 \cdot 3 (3^2 + 3^2)^2} \sin \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = +0.00054751 p_0 a^2 \quad \text{bulunur.}$$

$$M_x^{5,1} = M_y^{5,1} = - \frac{16 P_0 a^2 5^2}{\pi^4 5.1(5^2+1^2)^2} \sin \frac{5\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = +0.0012148 P_0 a^2$$

$$M_x^{5,5} = M_y^{5,5} = - \frac{16 P_0 a^2 5^2}{\pi^4 5.5(5^2+5^2)^2} \sin \frac{5\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{2} = +0.0000657 P_0 a^2$$

$$M_x^{1,7} = M_y^{1,7} = - \frac{16 P_0 a^2 1^2}{\pi^4 1.7(1^2+7^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{2} = -0.0000093 P_0 a^2$$

$$M_x^{7,1} = M_y^{7,1} = - \frac{16 P_0 a^2 7^2}{\pi^4 7.1(7^2+1^2)^2} \sin \frac{7\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.0004599 P_0 a^2$$

$$M_x^{7,7} = M_y^{7,7} = - \frac{16 P_0 a^2 7^2}{\pi^4 7.7(7^2+7^2)^2} \sin \frac{7\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{2} = +0.0000212 P_0 a^2$$

$$M_x^{1,9} = M_y^{1,9} = - \frac{16 P_0 a^2 1^2}{\pi^4 1.9(1^2+9^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} = +0.0000027 P_0 a^2$$

$$M_x^{9,1} = M_y^{9,1} = - \frac{16 P_0 a^2 9^2}{\pi^4 9.1(9^2+1^2)^2} \sin \frac{9\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.0002198 P_0 a^2$$

$$M_x^{9,9} = M_y^{9,9} = - \frac{16 P_0 a^2 9^2}{\pi^4 9.9(9^2+9^2)^2} \sin \frac{9\pi}{2} \sin \frac{9\pi}{2} = 0.0000062 P_0 a^2$$

$$M_x^{1,11} = M_y^{1,11} = - \frac{16 P_0 a^2 1^2}{\pi^4 1.11(1^2+11^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{11\pi}{2} = -0.0000010 P_0 a^2$$

$$M_x^{11,1} = M_y^{11,1} = - \frac{16 P_0 a^2 11^2}{\pi^4 11.1(11^2+1^2)^2} \sin \frac{11\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.0001213 P_0 a^2$$

$$M_x^{11,11} = M_y^{11,11} = - \frac{16 P_0 a^2 11^2}{\pi^4 11.11(11^2+11^2)^2} \sin \frac{11\pi}{2} \sin \frac{11\pi}{2} = +0.0000028 P_0 a^2$$

$$M_x^{1,13} = M_y^{1,13} = - \frac{16 P_0 a^2 1^2}{\pi^4 1.13(1^2+13^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{13\pi}{2} = +0.0000004 P_0 a^2$$

$$M_x^{13,1} = M_y^{13,1} = - \frac{16 P_0 a^2 13^2}{\pi^4 13.1(13^2+1^2)^2} \sin \frac{13\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = +0.0000738 P_0 a^2$$

$$M_x^{13,13} = M_y^{13,13} = - \frac{16 P_0 a^2 13^2}{\pi^4 13.13(13^2+13^2)^2} \sin \frac{13\pi}{2} \sin \frac{13\pi}{2} = +0.0000014 P_0 a^2$$

$$M_x^{1,15} = M_y^{1,15} = - \frac{16 P_0 a^2 1^2}{\pi^4 1.15(1^2+15^2)^2} \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{15\pi}{2} = -0.0000002 P_0 a^2$$

$$M_x^{15,1} = M_y^{15,1} = - \frac{16 P_0 a^2 15^2}{\pi^4 15.1(15^2+1^2)^2} \sin \frac{15\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -0.0000482 P_0 a^2$$

$$M_x^{15,15} = M_y^{15,15} = - \frac{16 P_0 15^2}{\pi^4 15.15(15^2+15^2)^2} \sin \frac{15\pi}{2} \sin \frac{15\pi}{2} = +0.0000008 P_0 a^2$$

TOPLAM: 0.0366706 P<sub>0</sub> a<sup>2</sup>

Böylelikle dört kenarından serbest oturmuş kare plâkda momentler:

$$M_x = M_y = 0.0366706 P_0 a^2$$

veya:

$$M_x = M_y = \frac{P_0 a^2}{27.269801} \quad \text{olmaktadır ki bu}$$

değer Beton Kalendardeki Ctering tablolarında  $M_x = M_y = \frac{P_0 a^2}{27.2}$

olarak verildiğinden, büyük bir yaklaşım olduğu kanaatine varılmıştır.

Aynı plağın  $V=0$  için burulma momentleri ise :

$$M_{xy} = \sum \sum = \frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (m^2 + n^2)^2} \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \text{ denklemi kullanılır.}$$

$$M_{xy}^{1,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0418636 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,3} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 3^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0016423 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{3,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (3^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0016423 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{3,3} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (3^2 + 3^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0005069 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,5} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 5^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0002429 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{5,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (5^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0002429 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{5,5} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (5^2 + 5^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000657 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,7} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 7^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000657 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{7,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (7^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000657 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{7,7} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (7^2 + 7^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000171 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,9} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 9^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0001487 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{9,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (9^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0001487 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{9,9} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (9^2 + 9^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000062 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,11} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 11^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.000011 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{11,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (11^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.000011 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{11,11} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (11^2 + 11^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000028 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,13} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 13^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000056 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{13,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (13^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000056 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{13,13} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (13^2 + 13^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000146 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,15} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 15^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000032 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{15,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (15^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000032 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{15,15} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (15^2 + 15^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000008 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,17} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 17^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000019 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{17,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (17^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000019 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{17,17} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (17^2 + 17^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000004 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{11,9} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 9^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000012 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{19,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (19^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000012 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{19,19} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (19^2 + 19^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000003 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{1,21} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (1^2 + 21^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000001 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{21,1} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (21^2 + 1^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000001 P_0 a^2$$

$$M_{xy}^{21,21} = -\frac{16 P_0 a^2}{\pi^4 (21^2 + 21^2)^2} \cos 0 \cdot \cos 0 = -0.0000001 P_0 a^2$$

$$\text{TOPLAMADA : } -0.0459241 P_0 a^2$$

$$M_{xy} = 0.0459241 P_0 a^2$$

veya:

$$M_{xy} = \frac{P_0 a^2}{21,775059}$$

bulunur.



b)

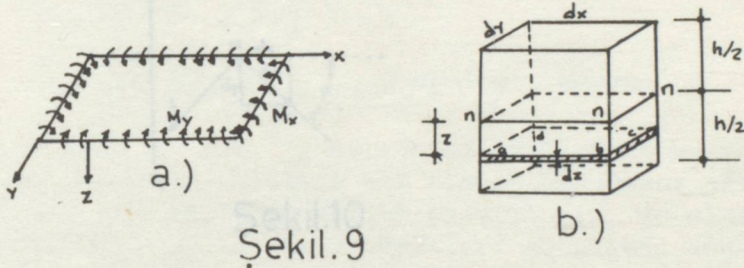
#### 4. Bölüm: PLAKLARIN EĞİLMESİ

##### 4.1- PLAKLARIN BASİT EĞİLMESİ

Daha sonraki bölümde plakların stabilitesi incelenerek. Stabilitate konusuna geçmeden önce eğilme bahsinin detaylıca tehkiki gerekir.

Prizmatik çubukların, eğilme esnasında çubuk kesitlerinin düzlem kaldığını ve elastik eğriye dik olmak üzere yalnız tarafsız eksen etrafında döndüklerini kabul ederek çubuğun basit eğilmesi halinde gerilme dağılışı için kesin çözüm bulunur.

Plakların basit eğilmesine, iki dik doğrultuda böyle bir eğilmeyi birleştirerek geçebiliriz.



Şekil.9

Yukarıdaki şekilde de gösterildiği gibi plak kenarları boyunca üniform olarak yayılmış momentlerin tesiri altındaki bir dikdörtgen plağın basit eğilmesini inceleyelim.

Plağın ortalama düzlemi denilen iki yüzünün ortasındaki düzlemi Xy düzlemi olarak ele alalım. Ortalama düzlemine dik olan Z eksenini aşağıya doğru pozitif alıyoruz.

Burada:

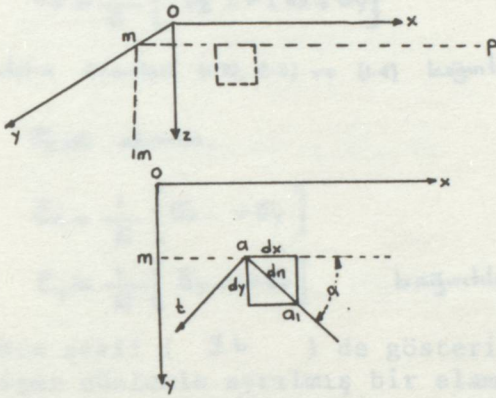
$M_x$  : y eksenine paralel kenarın birim uzunluğuna tesir eden eğilme momentini ifade eder.

$M_y$  : X eksenine paralel kenarların birim uzunluğuna tesir eden eğilme momentini ifade eder.

Bu momentler plağın üst yüzeyinde basınç, alt yüzeyinde çekme meydana getirdikleri zaman pozitif kabul ederiz. Ve plağın kalınlığının diğer iki yanında ihmal ederiz.

Plâğın yük altındaki şekil değiştirmelerini incelemek için; eğim ve eğrilikler ile gerilmeler arasındaki bağıntıların bilinmesi gerekecektir.

Aşağıdaki şekilde de görüleceği gibi eğilmeden önceki plâğın ORTA DÜZLEMİ koordinatların "X - Y,, düzlemi kabul edilir. Eğilme esnasında "X - Y,, düzlemi içindeki noktalar bu düzleme dik W yerdeğiştirmeleri ile PLAĞIN ORTA YÜZEYİNİ meydana getirirler.



Şekil.10

Plâğın  $xz$  düzlemine paralel bir normal kesitini alırsak ortalama yüzeyin  $x$  doğrultusundaki eğimi  $i_x = W'_x$  dir. Aynı şekilde  $y$  doğrultusundaki eğim  $i_y = W'_y$  şeklindedir.

$xy$  düzleminde  $x$  eksenini ile  $\alpha$  açısı yapan herhangi bir an doğrultusu alırsak, an doğrultusunda iki komşu  $a$  ve  $a_1$  noktadaki sehim farkı:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = W'_x \cdot dx + W'_y \cdot dy \text{ dir.}$$

Buna karşılık gelen eğim:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \alpha$$

Eğimin maksimum olduğu  $\alpha_1$  açısı ise:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial x}} = \frac{W'_y}{W'_x}$$

Tarafsız yüzeye paralel liflerin uzunluk değişimleri Z uzaklığı ile orantılıdır. Elastik eğrinin eğriliği  $-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  alınır. Ve Z uzaklığındaki liflerin birim uzaması ise:  $\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$  dir. Hooke kanunundan faydalanılarak:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)]$$

bu ifadeler daha önceleri (1.2), (1.3) ve (1.4) bağıntıları ile bulunmuştu.

$\sigma_z = 0$  alınırsa.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad \text{bağıntıları bulunur..}$$

Plakta şekil ( 9.6 ) de gösterildiği gibi xz ve xy düzlemine paralel ikişer düzlemle ayrılmış bir elaman göz önüne alalım. Plağın eğilmesi esnasında yanal yüzlerin düzlem kaldıklarını ve elastik yüzeye dik kalacak şekilde (n - n) tarafsız eksenleri etrafında dönerler. Ve bu eğilme esnasında plağın ortalama düzleminde hiç bir şekil değişiminin meydana gelmediği ve bu yüzeyin tarafsız yüzey olduğu sonucuna varırız. <sup>x</sup>

$\frac{1}{t_x}$  ;  $\frac{1}{t_y}$  : tarafsız yüzeyin xz ve yz düzlemine paralel kesitlerindeki eğrilikler diye tarifleyelim.

Daha önceden çıkardığımız bağıntılardan faydalanalım:

$$\frac{1}{t_x} = - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{t_y} = - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$\epsilon_x = \frac{z}{t_x} = -z \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{z}{t_y} = -z \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

abcd diliminde bunlara karşılık gelen gerilmeler.

$$\sigma_x = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$\sigma_y = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

Bu bağıntıları daha önceden genel plak denklemleri diye tariflediğimiz. (3.10) (3.11) (3.12) (3.14) (3.15) denklemleri ile aynı olduğu görülür.

Daha önceki bilinen bilgilerden:

$$-\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_x \cdot dy$$

$$-\frac{h}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_y \cdot dx$$

Buradan:

$$M_x = D \left[ \frac{1}{t_x} + \nu \frac{1}{t_y} \right]$$

$$M_y = D \left[ \frac{1}{t_y} + \nu \frac{1}{t_x} \right]$$

Buradaki : 
$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 \cdot dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

büyükliğe PLAĞIN EĞİLME RİJİTÜĞÜ dendiğini daha önceki bahislerde açıklamıştı.

$t_x$  ve  $t_y$  nin bilinen değerleri yerlerine konursa:

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

böylece daha önceden bulduğumuz 3.16 ve 3.17 denklemleri ile aynı neticelere varırız.

Bu denklemler  $M_x$  ve  $M_y$  momentlerinin verilmiş olması halinde plağın elastik yüzeyini tayin ederler.  $M_y = 0$  olması halinde (ki bu özel haldir) dikdörtgen plak bir kiriş gibi eğilir. Bu hal için:

$$-\nu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{bulunur. Yani plak zıt}$$

doğrultuda iki eğrilige sahip olur.

$M_x = M_y = M$  olduğunda elastik yüzeyin iki dik doğrultudaki eğrilikleri birbirine eşit olur ve yüzey küresel olur.

Ve bu kürenin eğriliği:

$$\frac{1}{t} = \frac{M}{D(1-\nu^2)}$$

formülü ile hesaplanır.

#### 4.2- PLAKLARIN YAYILI YANAL YÜKLERLE EĞİLMESİ

Ortalama düzlemine dik bir yayılı yükün etkisinde eğilen bir plak göz önüne alalım. Şekil ( 8.c ) de de görüldüğü gibi plağın yüzeyi boyunca değişen ve X ile Y'nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınan yükün şiddetini P ile gösterelim.

Plaktan XZ ve yz düzlemlerine paralel ikişer düzlemle bir elaman çıkarılarak statik denklemlerinden P yükünün tesirinden dolayı bu elamanın yüzlerinde daha önceki pragraflarda incelediğimiz eğilme burulma momentlerinden başka düşey kesme kuvvetlerinin de meydana geleceği görülür.

Kesme kuvvetlerinin birim boy için şiddetleri:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} \cdot dz \quad (4.1)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} \cdot dz \quad (4.2)$$

KABÜLLER: 1)  $Z_x$  ve  $Z_y$  nin küçük  $dx$  ve  $dy$  uzunlukları boyunca değişimi ihmal edilebilir.

2)  $Q_x \cdot dy$  ve  $Q_y \cdot dx$  bileşke kesme kuvvetlerinin elamanın ağırlık merkezlerinden geçtikleri kabul edilir.

Birim boya etki eden eğilme ve burulma momentleri için de daha önceki (3.16) (3.17) ve (3.19) denklemlerinden

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot z \cdot dz = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz = -D (1 - \nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

bulmuştuk.

Görüldüğü gibi kesme kuvvetleri, EĞİLME MOMENTLERİ ve BURULMA MOMENTLERİNİN hepsi X ve Y koordinatlarının fonksiyonudur.

Elamanın denge şartları:

I - DENGE ŞARTI: Bütün kuvvetlerin Z eksenini üzerindeki izdüşümü ve x ile y eksenlerine göre momentleri:

Şekil ( 8.c ) den de görüleceği gibi Z eksenini üzerine izdüşümleri

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \cdot dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \cdot dx + p \cdot dx \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

denklemine varılır.

Bu denklemi daha önce ( ) sayılı denklemlerle bulmuştuk.

II - DENGE ŞARTI:

Elamana tesir eden bütün kuvvetlerin X eksenine göre momentleri:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \cdot dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \cdot dx + Q_x dx \cdot dy = 0$$

denkleme varılır.

Önemli not: P yükünün momenti ve  $Q_x$  kuvvetinin değişiminden meydana gelen moment, diğerlerinin yanında ihmal edilmişlerdir.

Yukarıdaki denklem sadeleştirilirse

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_x = 0$$

denkleme varılır. Bu denklemi daha önce ( 3.23 ) sayılı denklemle bulmuştuk.

III - DENGE ŞARTI: Elamana tesir eden bütün kuvvetlerin Y eksenine göre momentleri:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial M_x}{\partial x} dy \cdot dx - Q_x \cdot dy \cdot dx = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem sadeleşirse:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

denkleme varılır. Bu denklemi daha önce ( 3.22 ) sayılı denklemde de bulmuştuk.

II- denge şartından:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

yazılır.

III- denge şartından:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

yazılır. Bunlar I. denge şartında yerlerine konursa

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p$$

denkleminde varılır. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus daha önceki bahislerde de anlatıldığı gibi:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$M_{yx} = -M_{xy}$$

0 halde  $M_{yx} = -M_{xy}$  olduğu göz önüne alınır.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p$$

diye anılan PLAĞIN ELASTİK YÜZEYİNİN diferansiyel denkleminin momentler cinsinden ifadesi bulunur. Bu önemli ifadeyi sehimler (W ler) cinsinden ifade etmek daha anlamlı olacağına bildiğimiz formülleri bir defa daha göz önüne alalım:

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Bu formülleri daha önceleri (3.16) (3.17) (3.18) ve (3.19) denklemleri ile bulmuştuk.

Bu ifadeleri PLAĞIN ELASTİK YÜZEYİNİN  $M_x$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_y$  momentleri ile ifadesi denkleminde yerine koyalım:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

Plağın elastik yüzeyinin diferansiyel denklemini bulmuş oluruz. Bu denklemi daha öncede ( 3.31 ) sayılı formülle bulmuştuk.

Özel bir hal için bu denklemin çözümü bulunursa eğilme ve burulma momentleri:

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D [w_{xx}'' + \nu w_{yy}']$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = -D [W_{yy}'' + \nu W_{xx}']$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\nu) W_{xy}''$$

ifadeleri ile bulunur.

Kesme kuvvetleri ise:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D [W_{xxx}''' + W_{yyx}''']$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = -D [W_{xxy}'' - W_{yyy}''']$$

ifadeleri ile hesap edilir.

Eğilme ve burulma momentleri bulununca  $(\sigma_x)_{\max}$  ve  $(\sigma_y)_{\max}$  normal gerilmeleri ise:

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{6M_x}{h^2} \quad 4.3$$

$$(\sigma_y)_{\max} = \frac{6M_y}{h^2} \quad 4.4$$

denklemleri ile hesaplanır.

X ve Y eksenlerine paralel olan kayma gerilmeleri:

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad 4.5$$

örmülü ile hesap edilir.

Z eksenine paralel olan kayma gerilmeleri  $Q_x$  ve  $Q_y$  kesme kuvvetlerinin, dikdörtgen kesitli giriş halindeki gibi plağın kalınlığı boyunca parabolik yayılır. Buna göre kayma gerilmeleri:

$$\max(\tau_{xz}) = \frac{3}{2h} (Q_x)_{\max} \quad 4.6$$

$$\max(\tau_{yz}) = \frac{3}{2h} (Q_y)_{\max} \quad 4.7$$

formülü ile hesaplanır.

0 halde: PLAĞIN ELASTİK YÜZEYİNİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN bilinmesi halinde bütün gerilmeler hesaplanır..

Plağın elastik yüzeyinin tayin edilmesi için genel olarak:

a- Her özel halde P yükünün dağılışı

b- Plağın her özel haldeki çevre şartlarını bilinmesi gerekir.

Biz incelememizde dikdörtgen plaklarla ilgileneceğiz. Ve böyle plakların çeşitli çevre şartlarını göz önüne alacağız:

### 1 HAL : ANKASTRE KENAR:

Bir plağın kenarı ankastre ise bu kenar boyunca çökmeler sıfır olur. Ankastre kenar boyunca sınır şartları:

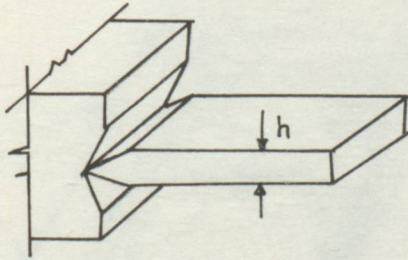
$$(w)_{y=0} = 0 \quad 4.8$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad 4.9$$

### 2 HAL : BASİT MESNETLİ KENAR:

Plağın  $y=0$  kenarı basit mesnetli ise bu kenar boyunca W sehimleri sıfır olur. Bu kenar aynı zamanda x ekseninde kolayca dönebilir. Bu kenar boyunca  $M_y$  eğilme momenti sıfırdır.

Şekil:



Basit mesnetli kenar boyunca sınır şartları:

$$(w)_{y=0} = 0 \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (4.11)$$

### 3 HAL : SERBEST KENAR:

Plâğin bir kenarı örneğin  $x=a$  kenarı tamamen serbest ise bu kenar boyunca,  $M_x$ ,  $M_{xy}$  ve  $Q_x$  plak iç kuvvetleri sıfırdır.

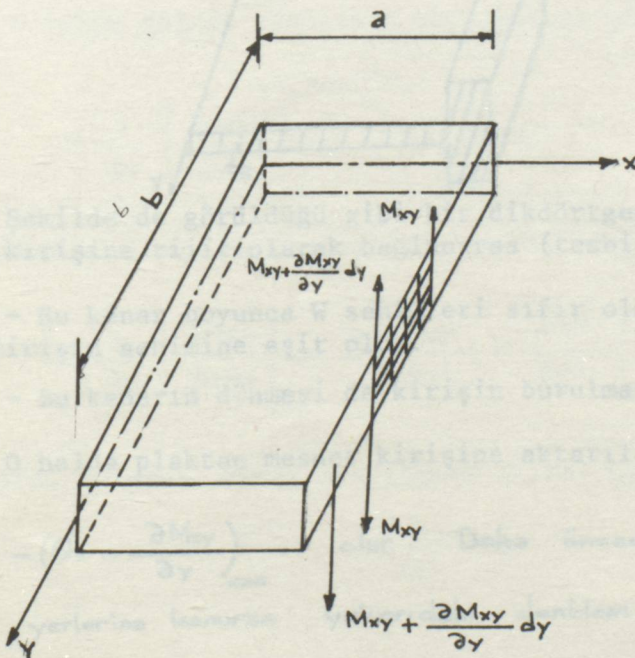
Yani:

$$(M_x)_{x=a} = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=a} = 0 \quad (4.12)$$

$$(M_{xy})_{x=a} = 0 \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = 0 \quad (4.13)$$

$$(Q_x)_{x=a} = 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right|_{x=a} = 0 \quad (4.14)$$

denklemleri yazılabilir.



Poisson tarafında bulunan bu çevre şartlarını çok bulan Kirchhoff üç çevre şartını fazla bularak iki şartın  $W$  sehimlerini belirtmeye yeteceğini belirtir.

(J. de Crelle, Cilt 40. 1850)

$x = a$  serbest kenarı boyunca:  $Q_x$  kesme kuvveti ve  $M_{xy}$  burulma momenti birleştirilerek:

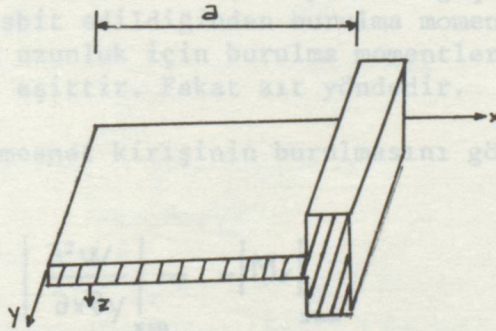
$$\left. Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right|_{x=a} = 0 \quad (4.15)$$

$Q_x$  ve  $M_{xy}$  nin bilinen değerleri yerlerine konursa:

$$\left. \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right|_{x=a} = 0 \quad (4.16)$$

Böylece üç çevre şartı yerine iki çevre şartı serbest kenarlı dikdörtgen plaklar için yeterli olur.

#### 4. HAL : ELASTİK MESNETLİ ve ELASTİK ANKASTRE KENAR :



Şekilde de görüldüğü gibi bir dikdörtgen plağın  $x = a$  kenarı bir mesnet kirişine rijit olarak bağlanırsa (tesbit edilirse):

- Bu kenar boyunca  $W$  sehimleri sıfır olmaz. Bu kenar boyunca sehim kirişin sehimine eşit olur.

- Bu kenarın dönmesi de kirişin burulmasına eşit olur.

O halde plaktan mesnet kirişine aktarılan tepki:

$$-(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y})_{x=a} \quad \text{olur. Daha önceden bilinen } Q_x \text{ ve } M_{xy}$$

değerleri yerlerine konursa yukarıdaki denklem şu şekli alır:

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left. \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right|_{x=a} \quad \text{denklemini bulunur.} \quad (4.17)$$

Daha önceki bilgilerimizden biliyoruz ki her hangi bir kirişin elastik eğrisinin diferansiyel denklemi; (A kirişin eğilme, F burulma rijitliklerini gösterirse)

$$A \left| \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right|_{x=a} = D \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{x=a} \quad (4.18)$$

denklemine varılır. Bu denklem  $x=a$  kenarı boyunca 4.hal için ÇEVRE ŞARTLARINDAN biridir.

Diğer ikinci şartı elde etmek için kirişin burulmasını göz önüne alalım. Daha önceki bilgilerimizden bildiğimiz gibi kirişin her hangi bir kesitinin dönme açısı  $-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)$  dir. Bu açının kiriş kenarı boyunca değişme hızı ise:

$$-\left| \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} \quad \text{şeklindedir. O halde kirişteki}$$

burulma momenti:

$$-F \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} \quad \text{olur.} \quad (4.19)$$

Bu burulma momenti kenar boyunca değişmektedir. Çünkü plak kirişe rijit olarak tesbit edildiğinden burulma momentlerini kirişe aktarır. Her hangi bir birim uzunluk için burulma momentlerinin şiddeti  $M_x$  eğilme momentinin şiddetine eşittir. Fakat zıt yöndedir.

O halde mesnet kirişinin burulmasını göz önüne alırsak:

$$-F \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = - \left| M_x \right|_{x=a} \quad (4.20)$$

denklemine varırız.  $M_x$  yerine daha önceki bilinen değeri yerine yazılırsa.

$$-F \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = D \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right|_{x=0} \quad (4.21)$$

denklemini buluruz. Bu da aradığımız ikinci ÇEVRE ŞARTIDIR.

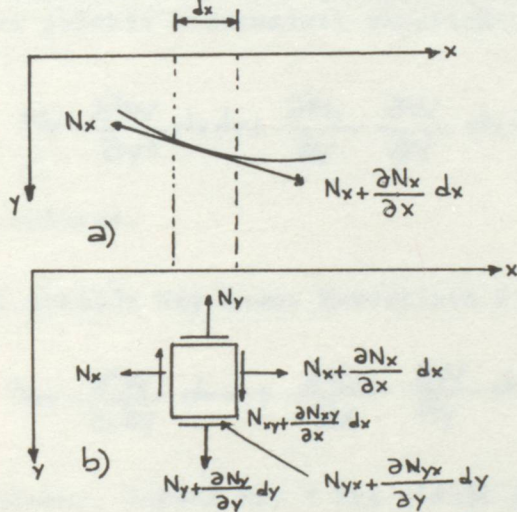
4-3 EĞİLME ile BİRLİKTE ÇEKME veya BASINÇ ETKİSİNDEKİ PLAKLARDA EĞİLME:

Daha önceki bölümlerdeki incelemelerimizde plağın yanal yüklerle eğildiğini ve sehimlerin küçük olduğu kabul edildi. Böylece ortalama düzlem, plağın tarafsız düzlemidir denmişti. Ancak yanal yüklere ilave olarak plağın ortalama düzlemine tesir eden kuvvetler var ise bunlar bu düzlemde uzamalar meydana getirirler. Ve bu uzamalara karşı gelen gerilmeleri ihmal edemeyiz.

Timoschenko bu konuda iki hal öne sürmüştür:

1. HAL: Bahis konusu olan bu gerilmeler küçüktür. Yani plakta burkulma meydana getiren kritik gerilmelere göre küçüktür kabulü yapılmaktadır. (Bakınız Elastik Stabilitate Teorisi sayfa 327) Plağın eğilmesinde göz önüne alınmazlar.

2. HAL: Plağın ortalama düzlemindeki gerilmeler küçük değildir. Bu gerilmeler plağın eğilmesinde göz önüne alınmalıdır.



Şekil.11

Daha önceden incelenen (Şekil (8.a.b.c) deki kuvvetlere ilave olarak şimdi plağın ortalama düzlemine etkiden kuvvetler yukarıdaki şekilde gösterilmiştir.

Bu kuvvetleri X ve y eksenleri üzerine izdüşürerek aşağıdaki bağıntıları yazarız.

$$\sum X=0 \quad N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx - N_x - N_{yx} + N_{yx} \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (4.22)$$

$$\sum Y=0 \quad -N_y + N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy + N_{xy} - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy - N_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4.23)$$

denklemleri bulunur. Burada dikkat edilecek husus. Şekil (11.a.b) deki kuvvetleri Z eksenine izdüşürürken plağın eğilmesini ihmal edemeyiz. Yani plağın eğilmesini nazarı itibare almalıyız. Plağın xz düzlemindeki eğriliğinden dolayı (Şekil (11.a.b) ya bakınız,  $N_x$  normal kuvvetlerinin Z eksenine izdüşümü:

$$-N_x dy \frac{\partial W}{\partial x} \left( N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (4.24)$$

denklemini verir. Gerekli basitleştirmeden sonra:

$$N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad (4.25)$$

denklemine varırız. Yine aynı şekilde  $N_y$  normal kuvvetinin Z eksenine izdüşürür ve gerekli kısaltmaları yaparsak:

$$N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad (4.26)$$

denklemini buluruz.

Aynı şekilde  $N_{xy}$  kesme kuvvetinin Z eksenine izdüşümü:

$$N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} dx dy \quad (4.27)$$

denklemini bulunur. Burada  $N_{xy} = N_{yx}$  olduğu göz önüne alınırsa;

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} dx dy \quad (4.28)$$

denklemini bulunur.

(4.25) (4.26) (4.28) ifadelerini daha önce bulduğumuz PLAK DİFERANSİYEL DENKLEMİNE ilave edersek:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left[ p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \quad (4.29)$$

(4.29) denklemini buluruz. Buradaki  $M_x$ ,  $M_y$  ve  $M_{xy}$  eğilme ve burulma momentlerinin " $W$ ", sehimleri cinsinden yerlerine korsak:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( p + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \quad (4.30)$$

denklemini buluruz.

Not: Bu diferansiyel denklem Saint - Venant tarafından çıkartılmıştır.

#### 4-4 PLAKLARIN EÇİLMESİNDE ŞEKİL DEĞİŞTİRME ENERJİSİ:

4.4.1- BASİT EÇİLME: (Şekil ( 3.a ) de görüldüğü gibi bir plak üniform yayılmış  $M_x$  ve  $M_y$  eğilme momentleri ile eğilirse, elamanın yüzleri düzlem kaldığından  $M_x$  dy momentleri tarafından yapılan iş: momentle elamanın eğilmeden sonra buna karşı gelen yüzleri arasındaki açının çarpımının yarısına eşittir. Bahis konusu edilen açı:  $-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right) dx$  dir. O halde  $M_x$  tarafından yapılan iş:

$$\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx dy \quad (4.31)$$

dir. Aynı şekilde  $M_y$  dx momentleri tarafından yapılan iş de benzer şekilde tariflenirse, buna göre elamanın potansiyel enerjisi şuna eşit olur:

$$dV = \frac{1}{2} \left[ M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dx dy \right] \quad (4.32)$$

denklemini bulunur. Buradaki  $M_x$  ve  $M_y$  eğilme momentleri yerine daha önceki bilinen değerleri yerlerine konursa:

$$dV = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (4.33)$$

genel bağıntısı bulunur. Plakın toplam şekil değiştirme enerjisi 4.33 denkleminin integrasyonu şeklinde elde edilir.

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (4.34)$$

denkleminde varılır. Ancak unutulmamalıdır ki integrasyon plağın bütün yüzeyi üzerinde yapılmalıdır.

#### 4.4.2- BİR PLAĞIN YANAL YÜKLERLE EĞİLMESİ

Bir plak elamanında Şekil ( 8.e ) de görüldüğü gibi  $Q_x$  ve  $Q_y$  kesme kuvvetlerinden doğan şekil değiştirme enerjilerini ihmal ederiz. Ve elamanın şekil değiştirme enerjisinin  $M_x.dy$  ve  $M_y.dx$  ile  $M_{xy}.dy$  ile  $M_{yx}.dx$  burulma momentleri tarafından elamanda yapılan işe olduğu görülür.

Düşey kesme kuvvetlerinin elastik yüzeyin eğriliğindeki tesirlerini göz ardı ediyoruz. O halde  $M_{xy}.dy$  burulma momentinden dolayı şekil değiştirme enerjisi:

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (4.35)$$

denkleminde varılır. Aynı miktarda enerji  $M_{yx}.dx$  momentleri tarafından da meydana getirilir.

O halde toplam enerji:

$$dV = \frac{1}{2} D \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] dx dy + D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (4.36)$$

denklemini bulunur. Bütün plağın şekil değiştirme enerjisi integrasyonla elde edilir.

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4.37)$$

denklemini bulunur.

#### 4-5 KENARLARI BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN SEHİMLERİ

#### 4-5 KENARLARI BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN ÇÖKMELERİ (SEHİMLERİ)

Kenarları basit mesnetli dikdörtgen plak için elastik yüzeyin denklemi:

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 4.38$$

çifte serisi ile tanımlanır.

Bu serinin her terimi için  $x=0$ ,  $x=a$  ile  $y=0$ ,  $y=b$  için sıfır olduğu görülür. Plakın tüm çevre boyunca  $W$  sehimleri sıfırdır.

(4.38) denklemini  $x$ 'e göre iki defa türetelim:

$$W'_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 4.39.a$$

$$W''_{xx} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -C_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 4.39.b$$

4.39 denkleminin de  $x=0$  ve  $x=a$  ile  $y=0$  ve  $y=b$  çevre boyunca sıfır olduğu görülür.

Aynı şekilde (4.38) denklemini  $y$ 'ye göre iki defa türetelim:

$$W'_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y$$

$$W''_{yy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -C_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

4.40

denklemini buluruz. 4.40 denkleminde  $x=0$  ve  $x=a$  ile  $y=0$  ve  $y=b$  çevre boyunca şartını sağladığı görülür.

Daha önceden (3.16) (3.17) denklemleri ile tariflediğimiz eğilme momentlerini bir defa daha hatırlayalım:

$$M_x = -D (W''_{xx} + \nu W''_{yy})$$

$$M_y = -D (W''_{yy} + \nu W''_{xx})$$

(4.39) ve (4.40) denklemlerini  $M_x$  ve  $M_y$  eğilme momentleri ifadesinde yerlerine korsak eğilme momentlerinin sıfır olduğu görülür. Aynı sonuca dikdörtgen plakların çeşitli çevre şartlarını incelerken 2. hal diye tariflediğimiz çevre şartında ve 3. hal diye incelediğimiz SERBEST Kenar şartlarından da  $x=0$  ve  $x=a$  ile  $y=0$  ve  $y=b$  ÇEVRE ŞARTLARIN altında sıfır olduklarını biliyorduk.

0 halde 4.38 denklemi tüm çevre şartlarını sağlar. Daha önce 4.37 denklemi ile ifade ettiğimiz eğilme potansiyel enerjisi:

$$V = \frac{1}{2} D \iint_0^a \int_0^b \left\{ (W_{xx}'' + W_{yy}'')^2 - 2(1-\nu) [W_{xx}'' \cdot W_{yy}'' - (W_{xy}')^2] \right\} dx dy$$

(4.37) denkleminde  $W$  yerine 4.38 ile tanımlanan ifade yazılır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa eğilme potansiyel enerjisi aşağıdaki şekli alır:

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left\{ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \right\}^2 dx dy \quad 4.41$$

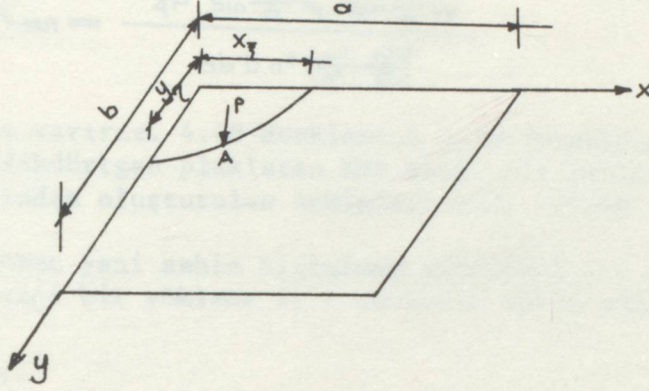
denklemini bulunur. Burada  $\sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y$  nin integralleri için matematik bilgilerimizden faydalanalım.

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{b} y = \frac{ab}{4} \quad 4.42$$

olduğu göz önüne alınırsa; (4.41) denklemi dahada basitleşerek aşağıdaki şekile girer:

$$V = \frac{ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \quad 4.43$$

Bu denkleme plakların burkulması bahsinde fazlaca mürecaat edeceğiz.  
4.43 denkleminin uygulamasına bir örnek verelim:



Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi koordinatları  $X_\xi$  ve  $Y_\eta$  olan A noktasına bir P tekil kuvvetini etki ettirelim. Amacımız (4.38) denklemleri ile verdiğimiz herhangi bir  $C_{mn}$  katsayısını tesbit etmek küçük bir  $\Delta C_{mn}$  artması verirse; buna karşılık gelen virtüel sehim:

$$\Delta C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 4.44$$

denklemleri yazılır. Bu yer değiştirme sırasında P yükü tarafından yapılan iş:

$$P \cdot \Delta C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x_\xi \sin \frac{n\pi}{b} y_\eta \quad 4.45$$

olur. Böylece virtüel yerdeğiştirmeler teorisinden aşağıdaki denklemleri buluruz:

$$P \cdot \Delta C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x_\xi \sin \frac{n\pi}{b} y_\eta = \frac{\partial V}{\partial C_{mn}} \Delta C_{mn} = \frac{ab}{4} D C_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \Delta C_{mn} \quad (4.46)$$

denklemini bulunur.  $C_{mn}$  katsayısını buradan çekersek:

$$C_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y_1}{ab D \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad 4.48$$

denklemine varırız. 4.48 denklemini 4.38 formülünde yerine korsak basit mesnetli dikdörtgen plakların her hangi bir tekil kuvvet (yani P kuvveti) tarafından oluşturulan sehimleri elde edilir.

Bu çökme yani sehim bilinince süperpozisyon metodundan faydalanılarak her hangi bir yükleme için sehimler hesap edilir.

ÖRNEK:

Plak yüzeyi üzerine üniform yayılmış bir yükten meydana gelen sehimi inceleyelim. Her hangi bir A noktasında bir  $dx_1 dy_1$  alan elamanına  $P dx_1 dy_1$  şiddetinde yük tesir etsin. Bu yükü (4.48) denkleminde yerine koyar ve integre edersek:

$$C_{mn} = \frac{4P}{ab D \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} y_1 dx_1 dy_1$$

$$= \frac{16P}{\pi^6 D_{mn}} \frac{1}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad 4.49$$

denklemini buluruz. Burada m ve n in ikisinde tek sayıdır. 0 halde:

$$W = \frac{16}{\pi^6 D} \sum_{m:1,3,5}^{\infty} \sum_{n:1,3,5}^{\infty} \frac{1}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} y_1 \quad 4.50$$

(4.50) denklemini bulunur.

Ortadaki sehim:  $x = \frac{a}{2}$   $y = \frac{b}{2}$  için

$$W = \frac{16P}{\pi^6 D} \sum_{m:1,3,5}^{\infty} \sum_{n:1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad 4.51$$

gibi çabuk yakın-sayan bir seri elde edilir.

Kare plak için (4.51) ifadesi.  $a=b$  ve  $\nu=0,3$  için

$$W_{\max} = 0,0443 \frac{p a^4}{E h^3}$$

452

sonucunu buluruz.

Eğer şekil (11) daki plak  $p$  tekil kuvvetinden başka ayrıca  $x$  doğrultusunda üniform bir basınca maruz kalırsa yine enerji metodunu kullanabiliriz. Ancak virtüel yer değiştirme metodunu tatbik ederken düşey kuvvetler tarafından yapılan isten başka basınç kuvvetlerinin yaptığı işi de göz önüne almamız lazım.

$x=0$  ve  $x=a$  kenarlarında birim boy için basınç kuvveti  $N_x$  ise: ( $N_y = N_x = 0$  olduğundan)

$$U_h = \frac{1}{2} \iint_{0^0}^{ab} N_x (W_x')^2 dx dy$$

453

bulunur.  $W$  nin  $x$  e göre kısmi türevini alıp (4.53) denkleminde yerine koyarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa:

$$U_h = \frac{ab}{8} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \frac{m^2 n^2}{\sigma^2}$$

454

bağıntısı bulunur. Buradaki  $C_{mn}$  katsayısına daha öncede olduğu gibi bir  $\Delta C_{mn}$  artması verirse, buna karşılık gelen basınç kuvvetinin yaptığı iş şu olur:

$$\frac{\partial U_h}{\partial C_{mn}} \cdot \Delta C_{mn} = \frac{\pi^2 b N_x}{4\sigma} m^2 C_{mn} \Delta C_{mn}$$

455

Bu işi daha önceden bulduğumuz (4.47) denkleminin sol tarafına ilave etmemiz gerekir. Böylece  $X$  eksenine doğrultusunda basınca maruz bir plağın tekil bir  $P$  yükü ile beraber etkimesi halindeki katsayısı:

$$C_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi}{a} x_f \sin \frac{n\pi}{b} y_f}{ab\pi^4 D \left[ \left( \frac{m^2}{\sigma^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \frac{m^2}{\pi^2 a^2 D} \right]}$$

456

bağıntısı bulunur.

(4.56) denkleminin (4.48) denklemi ile karşılaştırılması yapılsa,  $N_x$  basınç kuvvetinden dolayı bütün katsayılarının büyüdüğü görülür. O halde basınç etkisindeki bir plağın sehimleri ortalama düzleminde basınç olmayan eşit olarak yüklenmiş diğer bir plağa göre daha büyüktür.  $C_{mn}$  katsayısını sonsuz yapan  $N_x$  değerlerinin en küçüğüne KRİTİK değer adı verilebilir.

$abn^4 D \neq 0$  olduğundan:

$$\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} = 0 \quad 4.57$$

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m \frac{n^2}{m^2} \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad 4.58$$

değeri bulunur.

$N_x$  in en küçük değerini bulmak için  $n=1$  almalıyız. Kare plak için  $N_x$  i minimum yapmak için  $m=1$  almalıyız. O zaman  $N_x$  in en küçük değeri:

$$N_x = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \quad 4.59$$

(4.59) denklemi kolonların burkulmasındaki EULER formülüne benziyor. Ancak çok önemli bir farkı belirtmekte fayda var. Kritik  $N_x$  birim genişlikte bir şerit için basınç yüküdür.  $D$  ise bildiğimiz plak eğilme rijitliğidir. Plağın sürekliliği sebebi ile her boylamasına şeridin, kolon Euler yükünden dört kat daha büyük bir yük taşıyacağı görülmektedir.

Eğer  $N_x$  basınç kuvvetleri yerine çekme kuvvetleri alınacak olursa (4.56) denklemi aşağıdaki şekle girer.

$$C_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} y_1}{abn^4 D \left[ \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + m^2 \frac{N_x}{\pi^2 a^2 D} \right]} \quad 4.60$$

(4.60) denkleminde de görüldüğü gibi  $N_x$  çekme kuvveti plaktaki sehimleri azaltıcı yöndedir.  $N_x$ ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  kayma kuvvetlerinin plağın çevresine etki ederse plaktaki sehimlerin hesabı yine aynı metotla hesaplanır.

## 5. BÖLÜM

### Bölüm Plakların Stabilitesi.

#### 5.1. Genel Açıklamalar

h kalınlığı kenar boyları yanında ihmal edilebilen plak, orta düzlemi içerisinde ve kendi arasında dengede bulunan kenar kuvvetlerinin tesiri altında bir levha olarak zorlanır. Plak, bütün kenarları boyunca mesnetlenmiş olup bu tespit biçimi plak noktalarının, plak orta düzlemi içerisindeki yer değiştirmelerine engel olmayacak şekildedir.

Bu kenar gerilmeleri plakta bir düzlem gerilme hali meydana getirir. Bu arada (plak orta düzlemi içerisinde keyfî doğrultuda tesir eden) basınç gerilmeleri de teşekkül eder. Kenar kuvvetleri belirli bir değere eriştiği anda plağın dengesi stabil olmaktan çıkabilir. (Levha olarak çalışan plağın, büyük plastik şekil değiştirmelerden dolayı kullanılamaz bir hale gelmesinden veya kırılma sınırına erişmesinden evvel hakikaten kritik duruma girmesi, basınç gerilmelerinin nisbeten büyük değerlerine bağlıdır.) Bu düzlem denge formunun yanı sıra ona sonsuz yakın fakat kubbeleşmiş en az bir denge konumunun daha mevcut olması halinde plağın dengesi farksız olur. Bu takdirde plak bu kritik yük değerleriyle kendi stabilite sınırına erişir. Kritik yüklemenin aşılması halinde ise düzlem plağın dengesi labil olur. Bu halde en küçük bir sarsıntı denge konumunu bozabilir ve plak sonlu yakın, kubbeleşmiş ve stabil bir denge durumuna intikal eder; yani burkulur. Devamlı olarak mevcut olan bozucu tesirlerden dolayı her plağın, bir an için, stabilite sınırını aşarak burkulabileceği hesaba katılmalıdır. Bu takdirde kritik yük, burkulma yükü adını alır.

Aşağıda sadece, kendi düzlemindeki kenar kuvvetlerinin tesiri altında bulunan ince bir plağın, stabilite sınırının bulunmasıyla (ilgileneceğiz). Bu meselenin büyük bir pratik önemi mevcuttur. Genellikle bir plak, kenar kuvvetlerinin kritik değerlerin üzerine taşınması halinde, buna karşı kaymaya elverişlidir. Buna benzer bir durum eksenel olarak yüklenmiş elâstik bir burkulma çubuğunda da mevcuttur. Fakat çubukta pratik olarak kuvvetin, stabilite sınırını ancak çok az bir miktar aşması mümkündür zira küçük kuvvet artmalarında eğilmeler ve ilâve eğilme gerilmeleri çok çabuk büyür. Plaklarda ise ekseriya, taşıma kabiliyetini tam olarak kaybetmeden evvel, plak önemli bir kuvvet artmasını karşılayabilir. (Yüksek yapı ve köprü inşaatlarında, plakların taşıma kabiliyetlerinin sınırı olarak, stabilite sınırı nazarı dikkate alınmalıdır. Çünkü burkulmuş kalın plaklarda bu sınır aşılacak olursa çok çabuk tehlikeli cinsten gerilme halleri meydana gelir.

Bundan sonra plak malzemesinin, stabilite sınırına tekabül eden gerilme halinde de, HOOKE elâstisite kanununa uyduğu kabul edilmektedir.

Plakların stabilite sınırları, burkulma diferensiyel denkleminin integrasyonu yoluyla bulunabilir. Yaklaşık olarak bu sınırlar denklemin, enerji metodu yardımıyla integrasyonu yapılarak da belirtilebilir.

Aşağıda her iki metot da anlatılacak ve çeşitli misallerle izah edilecektir.

#### 4.2. Burkulma yüzeyinin diferensiyel denklemi.

Kenar kuvvetleriyle levha olarak zorlanan düzlem bir plak nazarı dikkate alalım. Plağın mesnetlenme hali, plak noktalarının orta düzleme paralel olarak yer değiştirme yapmalarına mani olmayacak şekilde olmalıdır. Levha tesirinden dolayı  $h$  hlık kalınlığına düzgün olarak yayılan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  gerilme bileşenleri elde edilir. Bunların, kesit uzunluğunun birim boyuna isabet eden toplamları,

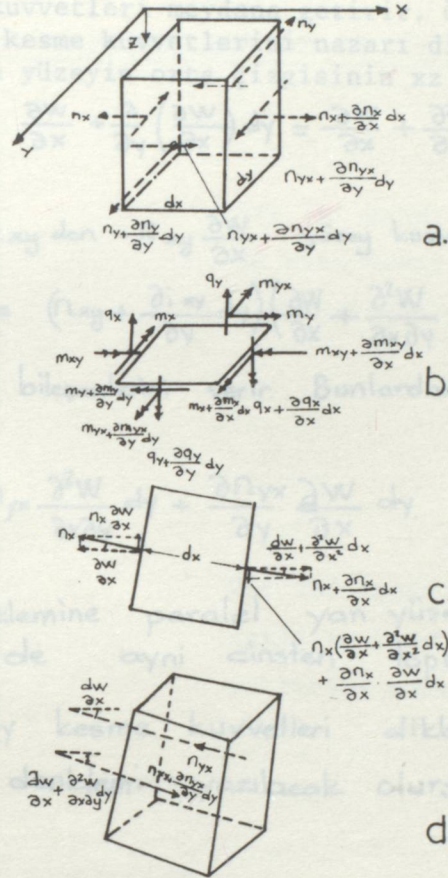
$$n_x = h\sigma_x; \quad n_y = h\sigma_y$$

$$n_{xy} = h\tau_{xy} = n_{yx} = h\tau_{yx}$$

değerindedir. Eğer gerilme halini tarif eden AIRY gerilme fonksiyonu bulunacak olursa, genel olarak, bu kesit kuvvetleri hesaplanabilir.

Plağın kenar kuvvetleri, plak stabilite sınırına yaklaşacak derecede arttırılsın. Bu takdirde düzlem denge durumunun yanı sıra buna sonsuz yakın kubbeleşmiş en az bir  $W(x,y)$  denge konumu mevcuttur. Burada son derece küçük eğilmeler bahis konusu olduğundan, plağın düzlem denge halinin kubbe şeklindeki denge haline intikali esnasında, plak ortalama yüzeyinin şekil değiştirmeleri ve  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  veya  $n_{yx}$  kesit kuvvetlerinde husule gelen değişimler nazarı dikkate alınmaz. Plak ortalama yüzeyinin eğriliğinden dolayı burada, yer değişimlerine ve denklemleriyle bağlanan,  $m_x$ ,  $m_y$  eğilme momentleri,  $m_{xy} = m_{yx}$  burkulma momentleri ve  $q_x$ ,  $q_y$  kesme kuvvetleri teşekkül eder. Bu kesit büyüklükleri, deforme olmamış  $dx$   $dy$   $h$  plak elemanının ortalama yüzeyindeki gerilme halinin değişmesi nazarı dikkate alınarak, Şek.(12-a.b.c.d) de gösterilmiştir.

Burkulma yüzeyinin diferensiyel denklemi yalnız denge mülâhazasından değil, aynı zamanda enerji metodu yardımıyla da çıkarılabilir. Bütün stabilite araştırmalarında olduğu gibi burada da birinci yol seçilecek ve denge şartları deforme olmuş eleman üzerinde kullanılacaktır (ikinci mertese teorisi).



Şekil.12.

Eğer plak, stabilite sınırına sonsuz yakın kübe şeklindeki denge konumunu işgal eder ve plak elemanı için z doğrultusundaki denge şartı yazılacak olursa  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  ve  $n_{yx}$  kesit kuvvetleri bu doğrultudaki yüzey kuvvetlerini verir.

Önce  $n_x$  ve  $n_{xy}$ ,  $n_{yx}$ ,  $n_y$  kuvvetlerinin hissesi bulunacaktır. Elemanın x ve x - dx deki eğimi, -yüksek mertebeden sonsuz küçükler ihmal edilerek-

$$\frac{\partial w}{\partial x} \text{ ve } \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

değerine erişir. Bu takdirde  $n_x$  ve  $n_x -$  kesit kuvvetleri de z doğrultusunda aşağıdaki yüzey kuvvetlerini verir:

$$-n_x \frac{\partial w}{\partial x} \text{ ve } \left( n_x - \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) = n_x \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial n_x}{\partial x} dx + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$\Sigma Z = 0$  denge şartı için bu yüzey kuvvetleri, kesit uzunluğunun birim boyu için,

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx + \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$n_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dy + \frac{\partial n_y}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial y} dy$$

elde edilir.  $n_{xy}$  ve  $n_{yx}$  kesme kuvvetleri de z eksenine doğrultusunda tesir eden yüzey kuvvetleri meydana getirir. Önce xz düzlemine paralel yan yüzdeki  $n_{xy}$  kesme kuvvetlerini nazarı dikkate alalım. Deformasyondan sonra bu yan yüzeyin orta çizgisinin xz düzlemindeki izdüşümü x eksenine ile:  $\frac{\partial W}{\partial x}$  ve  $\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) dy = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy$  açılarını oluştururlar.

Bu takdirde  $n_{xy}$  den  $-n_{xy} \frac{\partial W}{\partial x}$  yüzey kuvveti elde edilir. Ve  $n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} dy$  kesme kuvveti ise  $(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} dy) \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy \right) \approx n_{yx} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} dy + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy$  bileşenlerini verir. Bunlardan toplu olarak:

$$n_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial x} dy \text{ elde edilir.}$$

yz düzlemine paralel yan yüze tesir eden  $n_{xy}$  kesme kuvvetleri için de aynı cinsten toplam bulunur.  $q_x$  ile  $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$  ve  $q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$  kesme kuvvetleri dikkate alınarak z doğrultusundaki denge denklemi yazılacak olursa:

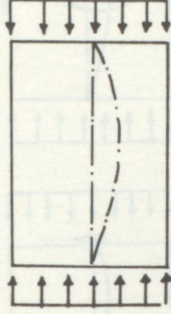
$$\begin{aligned} & \left( n_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx \right) dy + \left( n_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} dy \right) dx + \left( n_{yx} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \\ & \left( n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} dx \right) dy + \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left( \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx + \\ & \left( \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial W}{\partial x} dx dy + \left( \frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial W}{\partial y} dx dy = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Kesme kuvvetleri göre w yer değişimleri yardımıyla ifade edilecek olursa, (19) denklemleri kullanılarak ve  $X = Y = 0$  için,

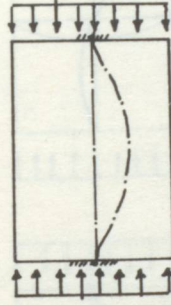
$$D \Delta \Delta W = n_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

teşekkül eder. Bu kubbe yüzeyinin aranan diferensiyel denklemini karakterize eder. (Not: Buradaki  $n_x = \sigma_x \cdot h$ ,  $n_{xy} = h \cdot \tau_{xy}$ ,  $n_y = \sigma_y \cdot h$  dir).

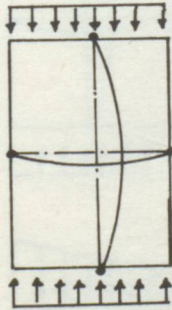
5.3- PLAKLARDA ÇEŞİTLİ MESNETLENDİRME VE YÜKLEME DURUMLARINA TOPLU BAKIŞ:



Her iki kenarında serbestçe oturan ve kısa kenarlarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



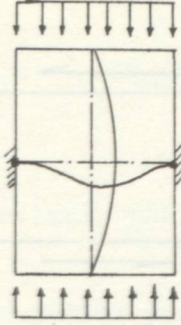
Her iki kenarından ankastre mesnetli ve kısa kenarlarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



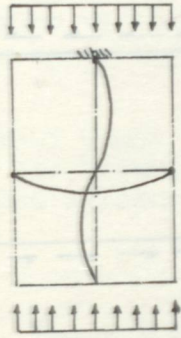
Dört tarafta serbestçe oturan ve kısa kenarlarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



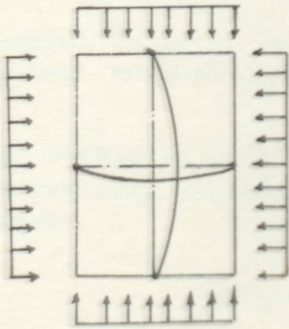
Kısa kenarlarında ankastre mesnetli uzun kenarlarında serbestçe oturan ve kısa kenarlarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



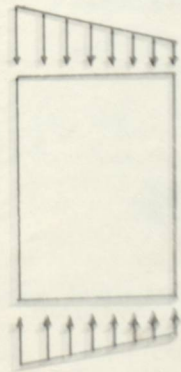
Kısa kenarlarında serbestçe oturan uzun kenarlarında ankastre mesnetli ve kısa kenarlarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



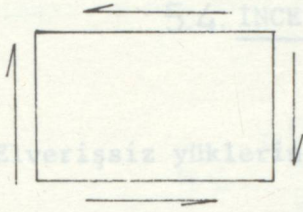
Kısa kenarlarından biri serbest diğeri ankastre mesnetli, uzun kenarları basitçi oturan ve kısa kenarlarında basınç yüklemesine maruz plakta burkulma.



Dört kenarında serbestçe oturan ve dört kenarında basınç yüklerine maruz plakta burkulma.



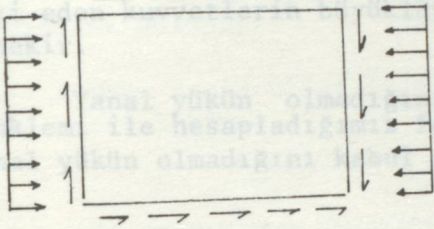
Yüklemenin ünüform olmaması hali  
(Linser gidişli olması)



Tesirlerin kenarlar boyunca mevcut olması hali. (Kayma tesirleri)

5.4.1 - Enerjissiz yükler (kritik yüklerin) hesap esasları

5.4.1.a) Stabilite problemlerinin araştırılması için platin ortalama düzlemine tatbik edilen kuvvetlerin tesiri altında şekle öleg platin burkulduğunu ve platin bu hafifçe burkulmuş durumda hareketini için



Hem kenarlar boyunca (kayma) ve hem de kenarlara dik üniform tesirler hali:

$$W_{crit} = 2W_{crit} + W_{crit} = \frac{1}{2} [N_x W_{crit} + N_y W_{crit} + 2N_{xy} W_{crit}]$$

denklemini buluruz. Bu denklemin köklerini bulduğunda belirli plakalar  $N_x$ ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  kuvvetlerinin belirli ilişkilerde bulunmalıdır.

5.4.1.b) Plakaların burkulmasında belirli ilişkiler de bulunmalıdır. Burada dış kuvvetleri yaptığı iş  $\Delta U$  ile ilgili olarak aşağıdaki gibi terimler:

$$\Delta U = \Delta V$$

denklemini yazabiliriz. Oluşan iş  $\Delta U$  ile ilgili olarak aşağıdaki terimler:

$$-\frac{1}{2} \iint [N_x W_{crit}^2 - N_y W_{crit}^2 - 2N_{xy} W_{crit}^2] dx dy$$

$$\frac{D}{2} \iint [(W_{crit,x}^2 + W_{crit,y}^2) + \dots] dx dy$$

bağıntısını buluruz. Buradaki  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  kuvvetlerinin

$$N_x = pL^2 \quad N_y = pL^2 \quad N_{xy} = pL^2$$

## 5.4. İNCE PLAKLARIN BURKULMASI

### 5.4.1 - Elverişsiz yüklerin (kritik yüklerin) hesap esasları:

5.4.1.a) Stabilite problemlerinin araştırılması için plağın ortalama düzlemine tatbik edilen kuvvetlerin tesiri altında azda olsa plağın burkulduğunu ve plağın bu hafifçe burkulmuş biçimini koruması için etki eden kuvvetlerin büyüklüğü ne olmalıdır sorusunu cevaplamak gerekir.

Yanal yükün olmadığını kabul ederek daha önce ( 4.30 ) denklemleri ile hesapladığımız formülde P yerine sıfır korsa, yani yanal yükün olmadığını kabul edersek; genel denklem şu şekli alır:

$$W_{xxxx} + 2W_{xxyy} + W_{yyyy} = \frac{1}{D} [N_x W_{xx} + N_y W_{yy} + 2N_{xy} W_{xy}] \quad 5.1$$

denklemini buluruz. Bu denklemin kullanılmasında bütün plakta  $N_x$ ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  kuvvetlerinin sabit olduğu kabul edilmelidir.

5.4.1.b) Plakların burkulmasında enerji metodu da kullanılabilir. Burada dış kuvvetleri yaptığı iş  $\Delta U_h$  ile; eğilme enerjisini  $\Delta V$  ile gösterirsek:

$$\Delta U_h = \Delta V$$

denklemini yazabiliriz.  $\Delta U_h$  ile  $\Delta V$  nin bilinen değerleri yerine konursa:

$$-\frac{1}{2} \iint [N_x W_{xx} - N_y W_{yy} - 2N_{xy} W_x' W_y'] dx dy = \frac{D}{2} \iint [(W_{xx}'' + W_{yy}'')^2 - 2(1-\nu) \cdot [W_{xx}'' \cdot W_{yy}'' - (W_{xy}')^2]] dx dy \quad 5.3$$

bağıntısını buluruz. Buradaki  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  kuvvetlerini:

$$N_x = \beta N_x^* \quad N_y = \beta N_y^* \quad N_{xy} = \beta N_{xy}^*$$

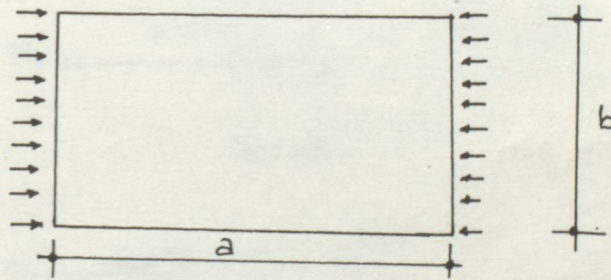
$N_x = \beta N_x^*$   $N_y = \beta N_y^*$   $N_{xy} = \beta N_{xy}^*$  olacak şekilde ortak bir  $\beta$  çarpanı tanımlanır.  $\beta$ 'nin kritik değeri için (5.3) denkleminde faydalanırız.

$$\beta = - \frac{D \iint \left\{ (w_{xx}'' + w_{yy}'')^2 - (2-\nu) [w_{xx}'' w_{yy}'' - (w_{xy}')^2] \right\} dx dy}{\iint [N_x^* (w_{xx}'')^2 + N_y^* (w_{yy}'')^2 + 2N_{xy}^* (w_x')(w_y')] dx dy} \quad 5.4$$

bağıntısı bulunur. <sup>x</sup>

\*NOT: x Daha fazla bilgi için Timoshenko'nun Elastik Stabilite Teorisi adlı esere bakınız.

### 5.5.1 - BİR DOĞRULTUDA ÜNİFORM BASINÇ ETKİSİNDEKİ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN BURKULMASI



Şekil.13

Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi bir dikdörtgen plağın  $x=0$  ve  $x=a$  kenarları boyunca etki eden ortalama düzlemi içinde kuvvetler tarafından basınca maruz kalsın.

Daha önceki bölümde de anlatıldığı gibi basit mesnetli kenarlar halinde burkulmuş plağın elastik yüzeyi:

$$W(xy) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 5.5$$

denklemleri ile tanımlanır. Bu haldeki eğilme şekil değiştirme enerjisi:

$$\Delta V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.6$$

denklemini bulunur. Plâğın burkulması esnasında basınç kuvvetleri tarafından yapılan iş daha önceki (5.3'ün sol tarafı) ve (4.54) denklemlerine göre:

$$\frac{1}{2} N_x \int_0^a \int_0^b (W'_{xy})^2 dx dy = \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 C_{mn}^2 \quad 5.7$$

bulunur. (5.6) denklemini (5.7) denklemine eşittir.

Buna göre:

$$\frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 C_{mn}^2 = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

Buradan  $N_x$  kuvvetini çekersek:

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 C_{mn}^2} \quad 5.9$$

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.10$$

(5.10) denklemini inceleyelim. Bizim prensip olarak  $N_x$ 'in en küçük değerini almamız gerekir.  $N_x$  in en küçük değerinin  $n=1$  için meydana geleceği görülmektedir. Yani plâğa etki eden basınç doğrultusunda plakta bir çok yarı dalga oluşur. Ancak buna dik doğrultuda yalnız bir yarı dalga oluşacak şekilde burkulur.

n=1 alırsak (5.10) ifadesi aşağıda yazacağımız şekile girer:

$$N_{x,kritik} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left( m - \frac{1}{m} + \frac{a^2}{b^2} \right)^2$$

541

(5.11) ifadesinde ilk çarpan kolon burkulma değeri için Euler yüküdür. İkinci çarpan ise a/b oranına ve plağın burkulmasında meydana gelen yarı dalga sayısını ifade eden m sayısına bağlıdır:

(5.11) formülünün yorumlanması:

1 - Şayet  $a < b$  ise parantez içindeki ikinci terim daima 1 den küçüktür.

2- Birinci şart varsa (yani  $a < b$ ) ise (5.11) formülünün en küçük değeri  $m=1$  olacak şekilde, yani plağın bir yarı dalga şeklinde burkulduğu görülür.

3-  $m=1$   $n=1$  aldığımızı göre elastik yüzeyin sehimi:  $w = C_{11} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$  şeklinde gösterilir.  $m=1$   $n=1$  alırsak  $w_{11} = C_{11} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$  şeklinde tanımlanır.

$$N_{x,kritik} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2$$

(5.12)

SONUÇ OLARAK:

(5.10) ifadesinde  $m=1$  koyarak kritik yük için daha kullanışlı olan aşağıdaki bağıntıyı buluruz. (5.12) bağıntısı

(5.12) Formülünün parantes içindeki değeri  $a=b$  için minimum olduğu hemen anlaşılır. Yani şayet plak kare plak ise  $N_x$  en küçük değerine kavuşur. Zaten bizimde aradığımız  $N_x$  in en küçük değerini bulmaktı.

0 halde  $a=b$  alınır. (5.12) formülü:

$$N_{x,kritik} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}$$

(5.13)

formülü bulunur. Aynı netice daha önceden eğilme ve basıncın ortak tesirine maruz bir plak içinde elde edilmişti. Sadece paydada  $b^2$  yerine  $a^2$  değeri vardı.

5.12 ifadesinde parantez içindeki değeri a/b oranına bağlı olarak k büyüklüğü olarak tarifleyelim. k büyüklüğü a/b oranına bağlı bir büyüklüktür. (Şekil ( 14. ) de de görüldüğü gibi k çarpanı m=1 işaretli eğri ile gösterilmiştir. Burada görüldüğü gibi k a/b nin küçük değerleri için büyüktür. k çarpanı a/b nin büyük değerleri için büyür. k çarpanı a/b oranı arttıkça azalır, a=b için minimum olur ve tekrar arttığını görürüz.

Eğer plağın iki yarı dalga şeklinde burkulduğunu farz edersek m=2, n=1 olarak elastik yüzeyin denklemini:

$$W(xy) = C_{21} \sin \frac{2\pi}{a}x \sin \frac{\pi}{b}y \quad 5.14$$

denklemini alırız. Kritik yükü hesaplamak için a yerine  $\frac{a}{2}$  alırsak (5.12) denklemini.

$$N_{x,kritik} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left( \frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} \right)^2 \quad 5.15$$

denklemini buluruz. Bu denklemin a/b oranına bağlı olan parantez içindeki çarpanı Şekil ( 14. ) de m=2 eğrisi ile gösterilmiştir.

$$k = \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \text{ degeri yerine } \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} = \frac{(m+1)b}{a} + \frac{a}{(m+1)b}$$

yazılırsa işlemler sabitleştirilirse:

$$\frac{a}{b} = (m(m+1))^{1/2} \quad \text{formülü bulunur.} \quad 5.16$$

$$m=1 \text{ için } \frac{a}{b} = \sqrt{2} = 1.41$$

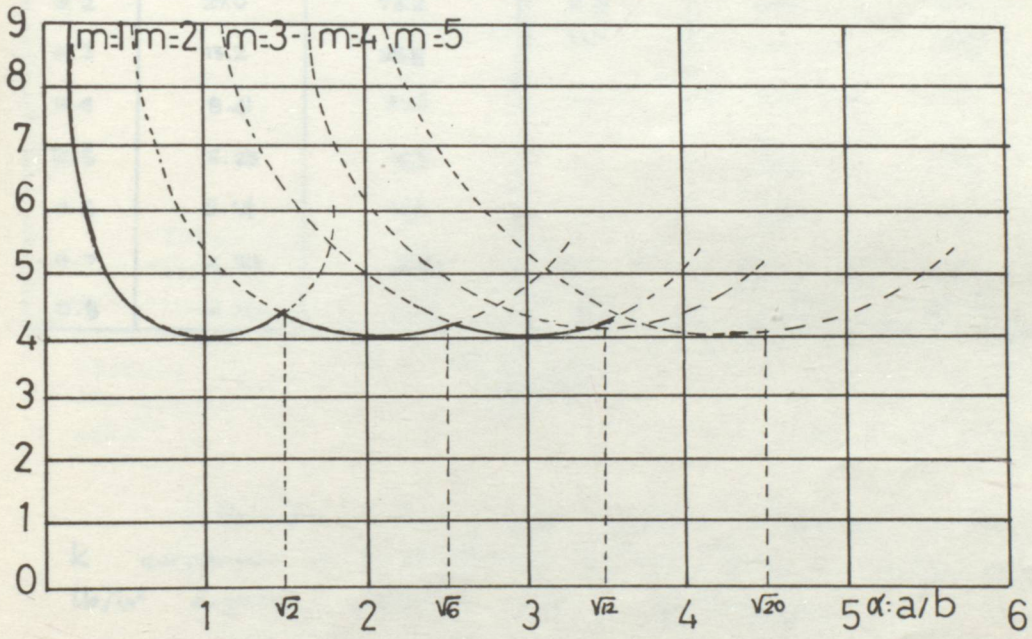
$$m=2 \text{ için } \frac{a}{b} = \sqrt{6} = 2.45$$

$$m=3 \text{ için } \frac{a}{b} = \sqrt{12} = 3.46$$

$$m=4 \text{ için } \frac{a}{b} = \sqrt{20} = 4.47$$

$$m=5 \text{ için } \frac{a}{b} = \sqrt{30}$$

eğri ailesi elde edilir. Bu eğri şekil de çizilmiştir.



Şekil. 14

5.5.2- İKİ DİK DOĞRULTUDA BASINCA MARUZ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN BURKULMASI

a/b	k	$\sigma_{kr}$	a/b	k	$\sigma_{kr}$
0.2	27.0	73.2	0.9	4.04	11.0
0.3	13.2	85.8	1.0	4.0	10.80
0.4	8.41	22.8	1.1	4.04	11.00
0.5	6.25	16.9	1.2	4.30	11.20
0.6	5.14	13.9	1.3	4.28	11.60
0.7	4.53	12.30	1.4	4.47	12.10
0.8	4.20	11.40	1.41	4.49	12.20

Tablo.1

Üniform yüklü basit mesnetli dikdörtgen plaklar için  $k$  çarpanının ve  $E: 30 \cdot 10^6 \text{ Lb/in}^2$ ;  $b/h=100$  ve  $\nu=0.3$  için  $\sigma_{kritik}$  gerilmesinin  $\text{Lb/in}^2$  değerleri... yukarıdaki tabloda görülmektedir...

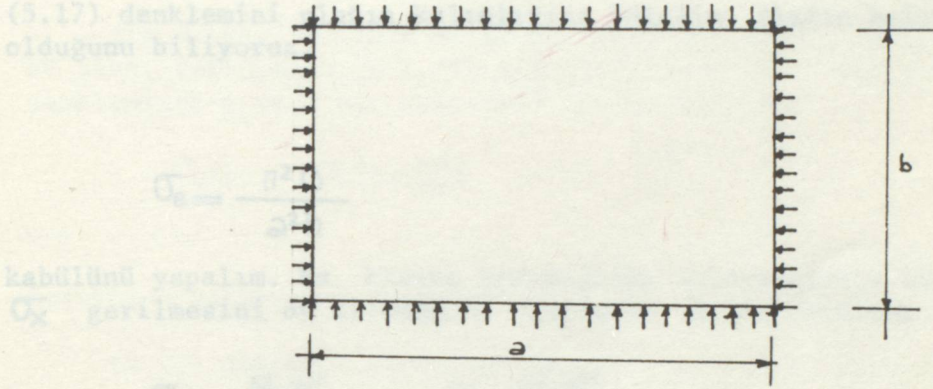
$E_1$  modüllü diğer herhangi bir malzeme ve  $h/b$  oranının diğer herhangi bir değeri için, kritik gerilmeler tablodaki değerleri:

$$\frac{E_1}{30 \cdot 10^6} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

çarpanı ile çarpılarak elde edilir...

denklemi bulunur.

### 5.5.2- İKİ DİK DOĞRULTUDA BASINCA MARUZ BASİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAKLARIN BURKULMASI



Şekil.14

Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi kenarları basit mesnetli bir dikdörtgen plak üniform yayılmış  $N_x$  ve  $N_y$  basınç kuvvetlerinin etkisinde bulunsun. Daha evvel 4. bölümde incelediğimiz çeşitli çevre şartlarını ve  $W(xy)$  sehimleri için kullandığımız formülleri hatırlarsak; dış kuvvetlerin yaptığı işi  $U_h$ ; eğilme enerjisini ise  $V$  ile gösterirsek ve bunların birbirine eşit olduğunda göz önüne alırsak:

$$-\frac{1}{2} \iint [N_x (W'_x)^2 + N_y (W'_y)^2 + 2N_{xy} W'_x W'_y] dx dy =$$

$$\frac{D}{2} \iint \left\{ (W''_{xx} + W''_{yy})^2 - 2(1-\nu^2) [W''_{xx} W''_{yy} - (W''_{xy})^2] \right\} dx dy$$

denklemini azarız. Bu denklemi daha önceki bahiste 5.3 formülü ile ifade etmiştik.

Bu formül plaklarda basit mesnetli çevre şartlarında göz önüne alınarak değerlendirilirse:

$$N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + N_y \frac{n^2 \pi^2}{b^2} = D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)$$

denklemini bulunur.

Burada:

$m$ : x doğrultusundaki yarı dalga sayısını,

$n$ : y doğrultusundaki yarı dalga sayısını gösterir.

(5.17) denklemini plağın kalınlığına bölelim. Plağın kalınlığının  $h$  olduğunu biliyoruz.

$$\sigma_e = \frac{n^2 D}{a^2 h}$$

5.18

kabülünü yapalım.  $N_x$  basınç kuvvetinden dolayı plakta meydana gelen  $\sigma_x$  gerilmesini de bilihehler cinsinden yerine koyalım:

$$\sigma_x = \frac{N_x n^2}{a^2} \quad \sigma_y = \frac{N_y n^2}{b^2}$$

5.19

(5.18) ve (5.19) bağıntılarını (5.17) bağıntısında yerine korsak:

$$\sigma_x m^2 + \sigma_y n^2 \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e (m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2})^2$$

5.20

denklemini buluruz.  $m$  ve  $n$  sayıları için herhangi bir tam sayı alınır-  
sa burkulmuş plağın elastik yüzeyi:

$$W_{mn} = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

denklemini ile verilir. Bu sehim denklemini daha önceleri de elde etmiş-  
tik  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  in değerleri (5.20) denklemini sağlar.  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$  dik  
koordinatlar olarak alınır (5.20) denklemini bir doğru ile gösterilir.  
 $m$  ve  $n$  nin muhtelif değerleri için ve bir kare plak hali için ( $a=b$ )  
Şekil (15) elde edilir.  $m$  ve  $n$  nin değerleri bu çizgiler üzerinde  
işaret edilmiştir. Ve  $\sigma_x$  ile  $\sigma_y$  nin pozitif değerleri basınç gerilmesi  
olarak alınmıştır. Biz burkulmanın meydana geldiği en küçük  $\sigma_x$  ve  $\sigma_y$   
değerlerini aradığımızı göre doğruların yalnız Şekil (15) de gö-  
rüldüğü gibi dolu çizgilerle gösterilen ve A' B' C' D' poligonunu teş-  
kil eden kısımlarını göz önüne almalıyız. Şekil (15) de de görül-  
düğü gibi BC çizgisinin apsistler eksenini ile kesim noktasının, evvelki  
bölümde incelenmiş olan\* Aynı çizginin düşey eksenle kesim nok-  
tası  $\sigma_x=0$  olduğunda  $\sigma_{y,kritik}$  nin kritik değerini verir.

\* cümle şöyle devam eder:

$\sigma_y=0$  hali için  $\sigma_x$  in kritik değerini verdiği görülür.

$\sigma_x = \sigma_y = 0$  olduğunda O başlangıç noktasından yatay eksenle  $45^\circ$  lik bir açı yapan doğru çizelim. Bu doğrunun BC doğrusu ile kesim noktasının kritik değerini tayin eder.

$$0 \text{ zaman (5.20) denklemi şu şekli alır: } \sigma = \sigma_e \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (5.21)$$

Biz  $\sigma$  gerilmesinin en küçük değerini bulmak istediğimize göre bu şartı sağlayan m ve n nin değerleri için  $m=n=1$  almalıyız. (4.21) denkleminde m ve n nin değerleri yerine konursa:

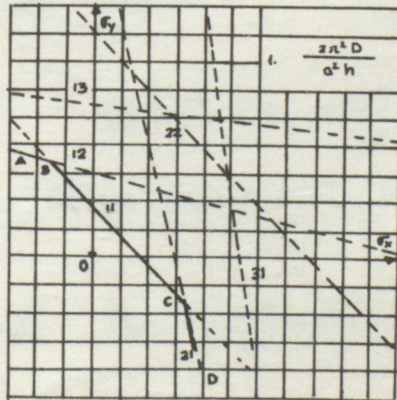
$$\sigma_{\text{kritik}} = \sigma_e \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \quad 5.22$$

formülünü buluruz.

(4.22) denklemi kare plak için  $a=b$  aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\sigma_{\text{kritik}} = 2\sigma_e \quad (5.23)$$

(5.23) bağıntısının yorumu şöyledir. İki doğrultusunda da basınca maruz bir plak; bir kare plağın yalnız bir doğrultusunda basınca maruz kalması halindeki değer yarısıdır.



Şekil.15

$\sigma_y$  gerilmesini çekersek:

$\sigma_x$  in herhangi bir değeri için  $\sigma_y$  nin kritik değeri absisler ekseninde buna karşılık gelen noktadan bir düşey doğru çizilerek elde edilebilir. Bu doğrunun ABCD (Şekil 15) poligonu ile kesim noktası  $\sigma_y$  nin kritik değerini verir. Kare plak halinde  $\sigma_x$   $4 \cdot \sigma_e$  den büyükse  $\sigma_y$  kritik negatif olur. Bu ise bize plağın dik doğrultuda uygun bir çekme gerilmesinin tesir etmesi şartı ile basit basınç altındaki kritik değerinden daha büyük bir basınç gerilmesine maruz kalabileceğini gösterir.

(5.20) denklemini tatbik ederken Şekil (15) deki ABCD poligonunun tepelerini gösteren B ve C noktalarının Koordinatlarını bilmek yararlı olur.

$\sigma_y$  nin kritik değerinin tayin edilmesinde BC doğrusunun kullanılabilmesi (burada  $m=n=1$ ) bilinmelidir.

in en büyük değeri 11 doğrusu ile 21 doğrusunun kesim noktası olan C noktasının apsisi ile tesbit edilmiştir. Bu doğruların denklemini (5.20) ifadesini kullanırsak:

$$m=n=1 \text{ için} \quad \sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.24)$$

$$m=2, n=1 \text{ için} \quad 4\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(4 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.25)$$

bağıntıları bulunur. Bu denklemleri çözersek 11 doğrusunun kullanılabilmesi için  $\sigma_x$  in üst limiti:

$$\sigma_x = \sigma_e \left(5 + 2 \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (5.26)$$

denklemini buluruz.  $\sigma_x$  gerilmesinin alt limiti aynı metotla şöyle bulunur.

$$m=n=1 \text{ için} \quad \sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.27)$$

$$m=1, n=2 \text{ için} \quad \sigma_x + 4\sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + \frac{4a^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.28)$$

denklemlerinden hesap edilebilir.

$\sigma_x$  gerilmesini çekersek:

$$\sigma_x = \sigma_e \left( 1 - 4 \frac{a^4}{b^4} \right) \quad 5.29$$

bulunur. 0 halde  $m=1$   $n=$  doğrusunun  $\sigma_x$  aşağıda tarifleyeceğimiz eşitsizliği sağladığı zaman  $\sigma_y$  kritik hesabında kullanılması gerekir.

$$\sigma_e \left( 1 - 4 \frac{a^4}{b^4} \right) < \sigma_x < \sigma_e \left( 5 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad 5.30$$

(5.30) eşitsizliği için  $a/b=0.5$  ve  $\sigma_x=\sigma_y$  alalım. Ve buna karşılık gelen  $\sigma_y$  nin kritik değerini tayin edelim:

$$0.75 \sigma_e < \sigma_x < 5.5 \sigma_e \quad 5.31$$

denklemini buluruz.  $\sigma_x$  in verilen değeri bu limitler içinde olduğundan (5.20) denklemde  $m=n=1$  koyarız. 0 zaman:

$$\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.32$$

denklemini buluruz. Bu denklemde  $a/b=0.5$  ve  $\sigma_x=\sigma_y$  alırsak:

$$\sigma_{y,kritik} = 2.25 \sigma_e = 2.25 \frac{\pi^2 D}{a^2 h} \quad 5.33$$

elde ederiz.

$\sigma_x$  in verilen değeri (5.26) denklemi ile verilen değerinden büyükse (5.20) denklemde  $n=1$  alarak  $m=2,3,4\dots$  koyarak elde edilen doğruları göz önüne almak gerekecektir.

Genel bir inceleme için  $n=m$   $m=i$  olan bir doğruyu göz önüne alalım. Bu doğrunun kullanılabilmesi için  $\sigma_x$  in alt limiti, bu doğrunun  $m=i-1$ ,  $n=1$  doğrusu ile kesim noktası olarak tayin edilir. Bu doğruların denklemleri (5.20) denkleminden:

$$\sigma_x i^2 + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left( i^2 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.34$$

$$\sigma_x (i-1)^2 + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left[ (i-1)^2 + \frac{a^2}{b^2} \right]^2 \quad 5.35$$

denklemleri ile ifade edilir. 5.34 ve 5.35 denklemlerinden  $\sigma_x$  in alt limiti için:

$$\sigma_x = \sigma_e \left( 2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad 5.36$$

denklemini bulunur. Aynı düşünce ile  $m=i$   $n=1$  ve  $m=i+1$ ,  $n=1$  doğrularının kesim noktası  $\sigma_x$  gerilmesinin üst limitini tayin eder:

$$\sigma_x = \sigma_e \left( 2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad 5.37$$

O halde  $m=i$   $n=1$  doğrusu  $\sigma_x$  gerilmesinin verilen değeri aşağıdaki limitler arasında olursa  $\sigma_y$  nin kritik değerini tayin etmek için kullanılmalıdır.

$$\sigma_e \left( 2i^2 - 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) < \sigma_x < \sigma_e \left( 2i^2 + 2i + 1 + 2 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad 5.38$$

Aynı şekilde  $\sigma_x$  gerilmesi (5.29) denklemi ile verilen limit değerinden küçükse  $m=1$   $n=2,3,4\dots$  doğruları göz önüne alınmalıdır. Önceki duruma benzer olarak  $m=1$   $n=i$  ile belirlenen doğrunun aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa kullanılabileceğini buluruz. Ancak dikkat edilmesi gereken husus burada basınç gerilmeleri pozitif alınmıştır.

$$\sigma_e \left[ 1 - i^2 (i-1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right] > \sigma_x > \sigma_e \left[ 1 - i^2 (i+1)^2 \frac{a^4}{b^4} \right] \quad 5.39$$

denklemini bulunur.

Bir örnek olması için  $a/b=0.5$  halini göz önüne alalım. Ve  $\sigma_x = 7 \sigma_e$  kabul edelim.

$\sigma_x$  (5.26) denklemi ile verilen değerinden daha büyük olduğundan burada (5.38) denklemini kullanmamız, İcap eder. Bu eşitsizlik ancak  $i=2$  alınır sağlanır. O zaman (5.20) denkleminde  $m=2$ ,  $n=1$  korsak bu halde kullanılması icap eden doğru:

$$4\sigma_x + \sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left( 4 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.40$$

olur. Bu denklemde  $\sigma_x = 7\sigma_e$  ve  $a/b = 0.5$  korsak:

$$\sigma_{y, \text{kritik}} = - 39,75 \sigma_e \quad 5.41$$

bağıntısı bulunur.

1. HAL:

$Y=0$  KENARI SABİT MESNETLİ,  $y=b$  KENARI SERBESTİR.

$$y=0 \text{ için } W=0, M_y=0 \text{ yani } W_{yy}'' + \nu W_{xx}'' = 0 \quad (5.52)$$

$$y=b \text{ için } M_y = W_{yy}'' + \nu W_{xx}'' = 0 \text{ ve } W_{yyy}''' + (2-\nu) W_{xxy}'' = 0 \quad (5.53)$$

(5.52) sınır şartları (5.51) denkleminde yerine konursa

$C_1=C_2$  ve  $C_3=0$  bulunur. Bu değerler (5.51) denkleminde yerine konursa:

$$F(y) = A \sinh \alpha y + B \sin \beta y \quad 5.54$$

denklemleri bulunur. Burada A ve B sabitlerdir. (5.53) sınır şartları dikkate alınır A ve B sabitleri bulunur:

$$A(\alpha^2 - \nu A^2) \sinh \alpha b - B(\beta^2 + \nu A^2) \sin \beta b = 0 \quad 5.55$$

$$A\alpha[(\alpha^2 - (2-\nu)A^2) \cosh \alpha b - B\beta[\beta^2 + (2-\nu)A^2] \cos \beta b = 0 \quad 5.56$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler  $A=0$ ,  $B=0$  için sağlanır. Bu halde plağın her noktasında sehimler sıfır olur. (5.55) ve (5.56) denklemlerinde A ve B sıfırdan farklı ise plağın burkulmuş denge formu bulunmuş olur.

Bunun için bu denklemin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

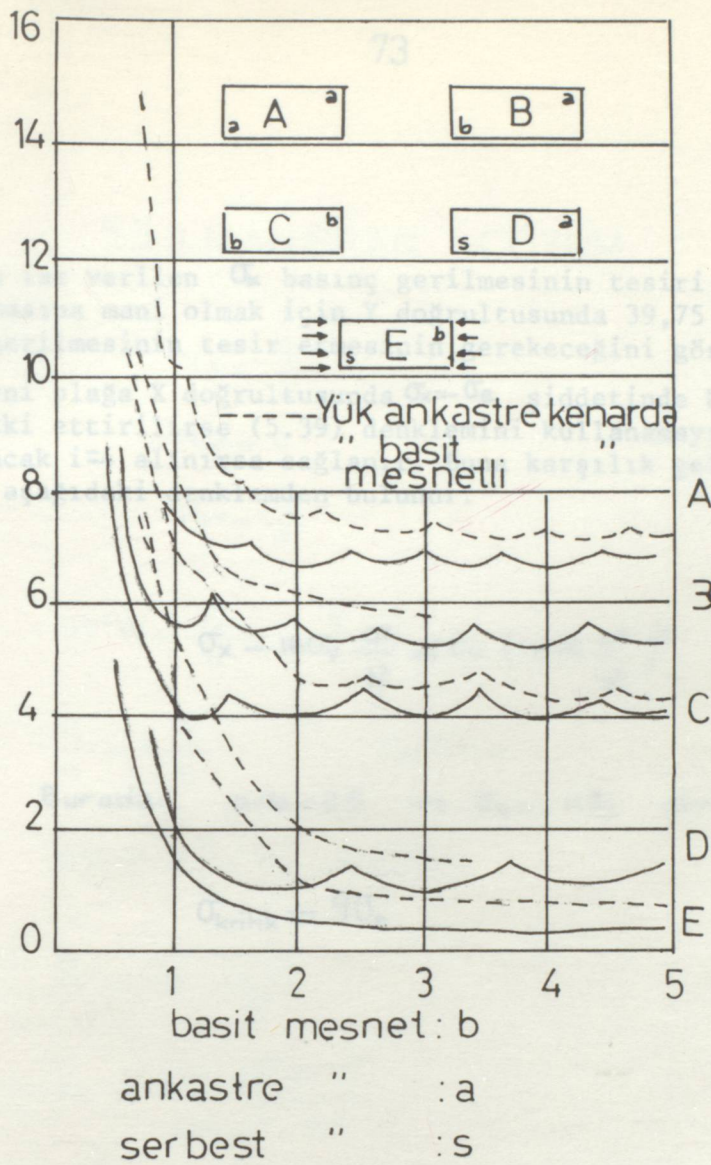
Yani:

$$\beta(\alpha^2 - \nu A^2)^2 \operatorname{tgh} \alpha b = \alpha(\beta^2 + \nu A^2)^2 \operatorname{tgp} \beta b \quad 5.57$$

denklemleri bulunur.  $\alpha$  ve B katsayıları daha önceden tanımlandığı için (5.57) denklemleri  $N_x$  kritik değerinin hesabında kullanılır. Bize gerekli olan  $N_x$  in en küçük değeridir. Hesaplardan görülüyor ki  $N_x$  in en küçük değeri  $m=1$  alınarak, yani plağın yalnız bir yarı dalga şeklinde burkulduğunu göz önüne alınarak bulunur. Buna karşılık gelen kritik basınç gerilmesinin şiddeti:

$$\sigma_{x, \text{kritik}} = \frac{N_{x, \text{kritik}}}{h} = k \cdot \frac{\pi^2 D}{l^2 h} \quad 5.58$$

Sonuç denklemleri bulunur.



$$x=0, a$$

$y=0$  Basit mesnet

$$w = w'' = 0$$

$y=b$  serbest mesnet

$$w''_{yy} + \nu w''_{xx} = w''_{yy} + (2-\nu)w''_{xxy} = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$C_1 = -C_2$$

$$f = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y$$

$$F = A \cdot \sinh \alpha y + B \cdot \sin \beta y$$

A ve B sabitleri:

$$\left[ \left( \alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sinh \alpha b \right] A - \left[ \left( \beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \beta b \right] B = 0$$

$$\left\{ \alpha \left[ \alpha^2 - (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cosh \alpha b \right\} A - \left\{ \beta \left[ \beta^2 + (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cos \beta b \right\} B = 0$$

$$\beta b \left\{ (\alpha b)^2 - \nu \left( \frac{m \pi b}{a} \right)^2 \right\}^2 \tanh \alpha b = \alpha b \left\{ (\alpha b)^2 + \nu \left( \frac{m \pi b}{a} \right)^2 \right\}^2 \tan \beta b$$

$$\alpha b = \left[ \left( \frac{m \pi b}{a} \right)^2 + \frac{m \pi b}{a} \sqrt{\frac{P_x b}{D}} \right]^{1/2}$$

$$\beta b = \left[ - \left( \frac{m \pi b}{a} \right)^2 + \frac{m \pi b}{a} \sqrt{\frac{P_x b}{D}} \right]^{1/2}$$

$$m=1 \text{ için } P_x = k_c \frac{\pi^2 D}{b^2} \text{ bulunur.}$$

## 5.5.3. MANBRAN ÇÖZÜM

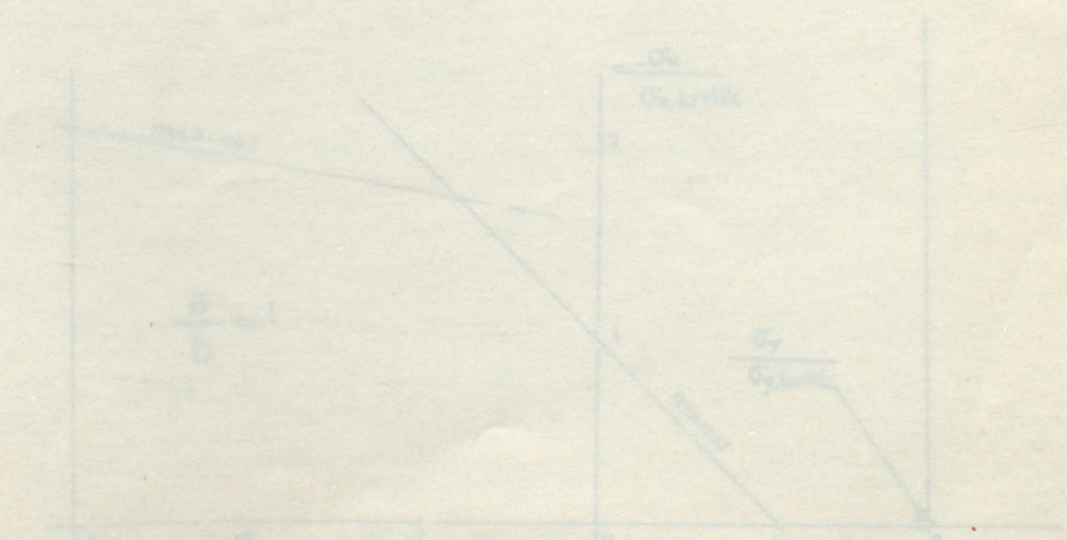
Bu ise verilen  $\sigma_x$  basınç gerilmesinin tesiri altında plağın burkulmasına mani olmak için Y doğrultusunda  $39,75 \sigma_e$  den büyük bir çekme gerilmesinin tesir etmesinin gerekeceğini gösterir.

Aynı plağa X doğrultusunda  $\sigma_x = -\sigma_e$  şiddetinde bir çekme gerilmesi etki ettirilirse (5.39) denklemini kullanamayız. (5.39) eşitsizliği ancak  $i=4$  alınır sağlanır. Buna karşılık gelen  $\sigma_y$  nin kritik değeri aşağıdaki denklemden bulunur:

$$\sigma_x - 16\sigma_y \frac{a^2}{b^2} = \sigma_e \left(1 + 16 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \quad 5.42$$

Burada:  $a/b = 0.5$  ve  $\sigma_x = -11\sigma_e$  alınır:

$$\sigma_{\text{kritik}} = 9\sigma_e \quad 5.43$$



## 5.5.3. MANBRAN ÇÖZÜM

$$N_{x0} = -\frac{P_x}{b}$$

$$N_{xy0} = 0$$

$$N_{y0} = -\frac{P_y}{a}$$

$$D\nabla^4 W + \frac{P_x}{b} w_{xx}'' + \frac{P_y}{a} w_{yy}'' = 0$$

$$\frac{P_y}{a} = R \frac{P_x}{b} \quad R \rightarrow \text{sabit}$$

$$D\nabla^4 W + \frac{P_x}{b} (w_{xx}'' + R w_{yy}'') = 0$$

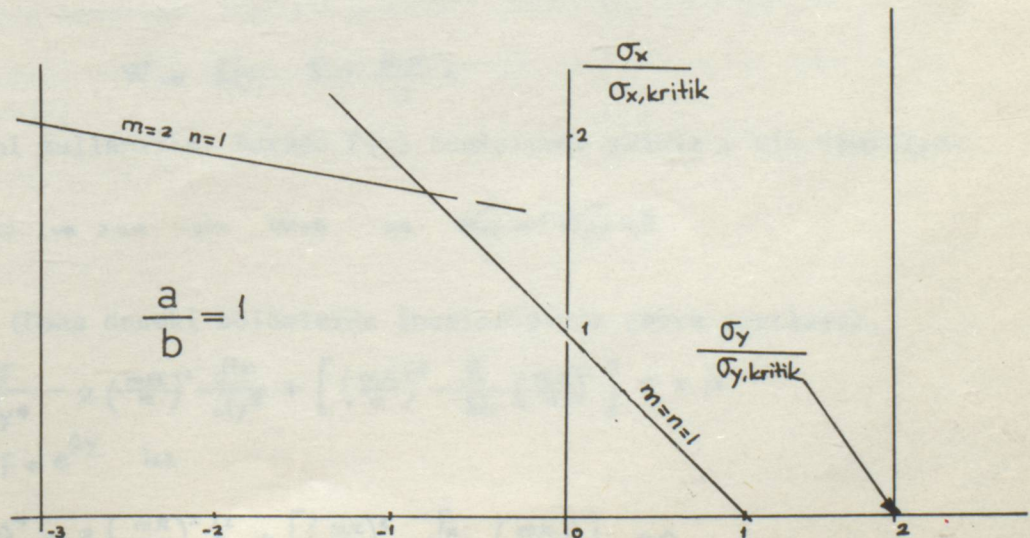
$$P_x = k_c \frac{\pi^2 D}{b^2}$$

$$k_c = \frac{[(mb/a)^2 + n^2]^2}{(mb/a)^2 + Rn^2}$$

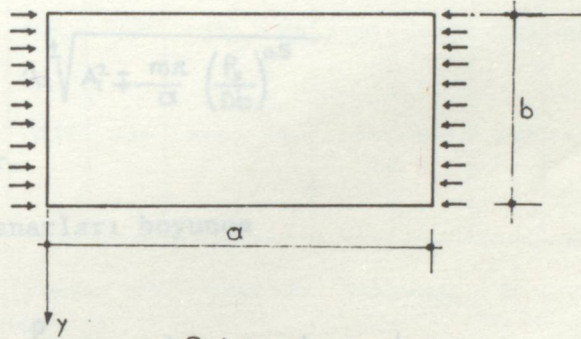
R	m	n	$k_c$
1	1	1	2
0	1	1	4
-1	2	1	8.33

$$\sigma_x = \frac{P_x}{bh}$$

$$\sigma_y = \frac{P_y}{ah}$$



5.5.4. BASINÇ DOĞRULTUSUNA DİK, KARŞILIKLI İKİ KENARI BOYUNCA BASIT MESNETLİ VE DİĞER İKİ KENARINDA ÇEŞİTLİ KENAR ŞARTLARINA HAİZ ÜNİFORM BASINCA MARUZ PLAKLARIN BURKULMASI.



Şekil.16

Bu problemin çözümü için hem enerji metodu hemde elastik yüzeyin diferansiyel denkleminin integrasyonu metodu kullanılır. İkinci metodu tatbik etmek için X eksenini boyunca üniform basınç etkisindeki Şekil ( 16 )'i göz önüne alalım. Daha önceki bahislerde izah ettiğimiz gibi bu problemde düşey yük sıfır,  $N_y = N_x = 0$  olduğundan daha önceden ( 5.1 ) formülü ile tariflediğimiz en genel denklem:

$$W_{xxxx} + 2W_{xxyy} + W_{yyyy} = -\frac{N_x}{D} W_{xx}$$

şeklinde ifade edilir.

Plâğın basınç kuvvetleri altında m sinüzoidal yarı dalga şeklinde burkulduğunu kabul edersek (5.44) denkleminin çözümü için:

$$W = f(y) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

denklemini kullanırız. Burada  $F(y)$  fonksiyonu yalnız  $y$ 'nin fonksiyonudur.

$$x=0 \text{ ve } x=a \text{ için } W=0 \text{ ve } W_{xx} + \nu W_{yy} = 0$$

bulunur. (Daha önceki bölümlerde incelediğimiz çevre şartları).

$$\frac{d^4 F}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 F}{dy^2} + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{P_x}{Db} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] F = 0$$

$$F = e^{\lambda y} \text{ ise}$$

$$\lambda^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \lambda^2 + \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 - \frac{P_x}{Db} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right] = 0$$

(5.45) denkleminin  $x=0$  ve  $x=a$  basit mesnetli kenarı boyunca istenilen sınır şartlarını sağlar. 5.45 denklemini 5.44 denkleminde yerine korsak:

$$\lambda''' - 2 A_1^2 \lambda'' + \left[ (A_1^2)^2 - \frac{P_x}{Db} (A_1^2) \right] \lambda = 0 \quad 5.48$$

$$\lambda = \sqrt{A_1^2 \mp \frac{m\pi}{a} \left( \frac{P_x}{Db} \right)^{0.5}}$$

5.49

denkleminin bulunur.

$y=0$   $y=b$  kenarları boyunca

$$\frac{P_x}{Db} > A_1^2 \quad \text{şartı vardır.}$$

Bu şart göz önüne alınırsa:

$$\alpha = \left[ A_1^2 + \left( \frac{P_x}{Db} A_1^2 \right)^{0.5} \right]^{0.5}$$

5.50

$$\beta = \left[ -A_1^2 + \left( \frac{P_x}{Db} A_1^2 \right)^{0.5} \right]^{0.5}$$

fonksiyonları kullanılırsa (5.48) denkleminin genel çözümü aşağıda ifade edeceğimiz şekile girer

$$F(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y \quad 5.51$$

denkleminin bulunur. Bu çözümdeki integrasyon sabitleri her özel halde  $y=0$  ve  $y=b$  kenarları boyunca bağlanma şartından elde edilir.

Aşağıda  $y=0$  ve  $y=b$  kenarları boyunca çeşitli çevre şartlarını inceleyeceğiz.

TABLO: 2

$y=0$  kenarı basit mesnetli ve  $y=b$  kenarı serbest çevre şartına maruz bir dikdörtgen plak için (5.58) denklemindeki  $k$ 'nin sayısal değerleri ...

a/b	0.5	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0
k	4.4	1.44	1.135	0.952	0.835	0.755	0.698	0.610	0.564	0.516	0.506
$\sigma_{x,kritik}$	11.6	3.79	2.99	2.50	2.20	1.99	1.84	1.60	1.48	1.36	1.33

Not: Uzun plaklar için yeter bir yaklaşıkla  $k$  için aşağıdaki formül kullanılır...

$$k = (0.456 + \frac{b^2}{a^2})$$

Yukarıdaki kenar şartlarına maruz bir plaka örnek olmak üzere bir korniyenin basınca maruz kalması gösterilebilir.

hesaplarında kullanılır...

Daha detaylı bilgi için Theory of Elastic Stability.

S. TİMOSCHENKO KİTABINA BAKINIZ,

#### DIĞER BİR ÇEVRE ŞARTI:

$Y = 0$  kenarı ANKASTRE;  $y=b$  kararı SERBEST PLAKLARIN BURKULMASI:

Daha önceki bahislerde de incelendiği gibi bu  $y=0$  kenarı ankastre, kenarı serbest olan plaklarda çevre şartları şunlardır:

$$y=0 \text{ için } w(xy)=0 \quad w_y=0$$

$y=b$  için  $M_y = w_{yy}'' + \nu w_{xx}'' = 0$  ile  $w_{yyy}''' + (2-\nu)w_{xxy}'' = 0$  denklemlerinin sıfır olduğunu biliyoruz.

Yukarıdaki çevre şartları (5.51) denklemindeki sabitlerin tayinine yarar. (5.51) denklemini bir kez daha yazalım:

$$F(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y$$

$$(5.59) \text{ şartından: } C_1 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha} \quad C_2 = \frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha}$$

bulunur. Böylelikle  $F(y)$  fonksiyonu için aşağıdaki denklem bulunur:

$$F(y) = A(\cos \beta y - \cosh \alpha y) + B(\sin \beta y - \frac{\beta}{\alpha} \sinh \alpha y) \quad 5.61$$

(5.61) denklemini (5.60) denklemine yerine koyalırsak A ve B cinsinden iki homojen lineer denklem elde edilir. Basınç gerilmelerinin kritik değerleri, bu denklemlerin determinantını sıfıra eşitleyerek tayin edilir:

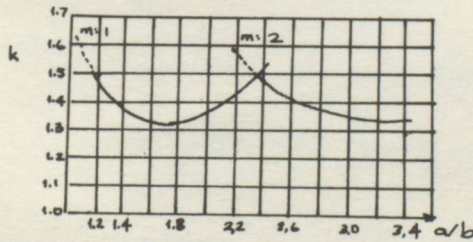
$$2ts + (s^2 + t^2) \cos \beta b \cosh \alpha b = \frac{1}{\alpha \beta} (\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2) \sin \beta b \sinh \alpha b \quad 5.62$$

bu denklemden  $t$  ve  $s$  çekilirse:

$$t = \beta^2 + \gamma \frac{m^2 \pi^2}{a^2}; \quad s = \alpha^2 - \gamma \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad \text{bulunur.}$$

Verilen bir  $a/b$  oranı ve verilen bir  $\gamma$  değeri için basınç gerilmelerinin kritik değeri 5.62 transadant denkleminde bulunur. 5.58 denklemi buradada geçerlidir. Ancak  $(k)$  katsayısı için aynı şey söylenemez.

Hesaplar oldukça kısa bir  $a$  uzunluğu için plağın bir yarı dalga şeklinde burkulduğunu gösterir. Ve hesaplarımızda  $m=1$  almamızın gerekeceğini belirtir.



TABLO:3  $y=0$  kenarı ankastre ve  $y=b$  kenarı serbest,  $\gamma=0,25$

olduğunda 5,58 deki formüldeki  $k$ 'nin sayısal değerleri.

a/b	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.2	2.4
k	1.7	1.56	1.47	1.41	1.36	1.34	1.33	1.33	1.34	1.36	1.38	1.45	1.47
$\alpha_n$ kritik	4.47	4.11	3.87	3.71	3.58	3.52	3.50	3.50	3.52	3.58	3.63	3.82	3.87

$y=b$  kenarı serbest,  $\gamma=0$ ,  
olduğunda 5.58 deki  
formüldeki  $k$  nin  
sayısal değerleri

Yukarıdaki şekilde de görüldüğü gibi başlangıçta  $a/b$  oranı arttıkça  $k$  değeri küçülüyor.  $k$  nin minimum değeri (1,328)  $a/b$  oranının 1,635 için elde edilir.  $k$  nin değeri  $a/b=1,635$  değerinden sonra giderek artmaya başlar.

$m=1$  için eğri belli olunca  $m=2$ ,  $m=3$  için eğri aileleri daha önceki programlarda anlatıldığı gibi çizilir...

### 5.5.5. EĞİLME VE BASINCININ ORTAK TESİRİNE MARUZ BASİT MESNETLİ BİR DİKDÖRTGEN PLAÇIN BURKULMASI:

$x = 0$  ve  $x = a$  kenarları boyunca şiddeti,

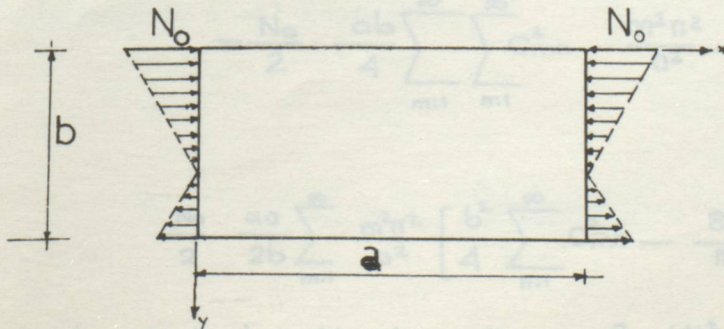
$$N_x = N_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b}\right)$$

5.63

denklemleriyle verilmiş, ortalama düzleminde tesir eden yayılı kuvvetler tatbik edilen basit mesnetli bir dikdörtgen plağı göz önüne alalım. (Şekil 17. ). Burada  $N_0$  basınç kuvvetinin  $y = 0$  kenarındaki şiddeti olup  $(\alpha)$  sayısal bir çarpandır.  $(\alpha)$  yı değiştirerek. Muhtelif özel haller elde edilebilir. Misal olarak  $\alpha = 0$  alırsak üniform yayılı basınç kuvvetleri halini elde ederiz.  $\alpha = 2$  basit eğilme haline tekabül eder.  $\alpha < 2$  den küçükse Şekil.17 da gösterildiği gibi eğilme ve basıncın bir kombinasyonunu elde ederiz.  $\alpha > 2$  ise eğilme ve çekmenin benzer bir kombinasyonu olur. Bütün kenarları basit mesnetli, burkulmuş plağın sehimleri evvelce olduğu gibi çift trigonometrik seri şeklinde alınabilir:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

5.64



ŞEKİL - 17

$N_0$  basınç kuvvetinin kritik değerini hesaplamak için enerji metodunu kullanacağız. Sehimleriden ileri gelen eğilme şekil değiştirme enerjisi.

$$= \frac{D}{2} \frac{abn^4}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad 5.65$$

Plâğin burkulması esnasında dış kuvvetler tarafından yapılan iş şu olur.

$$= \frac{1}{2} \iint_0^a \int_0^b \left( N_0 - \alpha \frac{y}{b} \right) (w'_x)^2 dx dy \quad 5.66$$

w için 5.64 ifadesini koyarak ve

$$i \neq j \text{ için } \int_0^b y \sin \frac{i\pi}{b} y \sin \frac{j\pi}{b} y dy = \frac{b^2}{4} \quad 5.67$$

$i \neq j$  ve  $i \neq j$  çift bir sayı olması halinde:

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi}{b} y \sin \frac{j\pi}{b} y dy = 0 \quad 5.68$$

$i \neq j$  ve  $i \neq j$  tek bir sayı olması halinde:

$$\int_0^b y \sin \frac{i\pi}{b} y \sin \frac{j\pi}{b} y dy = - \frac{4b^2}{n^2} \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2} \quad 5.69$$

olduğuna dikkat ederek dış kuvvetler tarafından yapılan iş için aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$= \frac{N_0}{2} \cdot \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \frac{m^2 n^2}{a^2} -$$

$$\frac{N_0}{2} \frac{\alpha a}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 n^2}{a^2} \left[ \frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 - \frac{8b}{n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{mn} C_{mi \cdot ni}}{(n^2 - i^2)^2} \right] \quad 5.70$$

NOT: işlemlerde kolaylık olsun diye:  $A_1^2 = \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$ ;  $A_2^2 = \frac{m^2 n^2}{a^2}$

$A_3^2 = \frac{n^2 \pi}{b^2}$  sembolleri ile göstereyim.

Burada  $i, n \neq i$  daima tek olacak şekilde alınan bir sayıdır. Bu işi 5.65) (●) eğilme şekil değiştirme enerjisine eşitliyerek  $N_0$  rın kritik değeri için

$$(N_0)_{\text{kritik}} = \frac{\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 A_1^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 A_2^2 - \frac{\alpha}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_2^2 \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 - \frac{32}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{mn} \cdot C_{mi} \cdot n_i}{(n^2 - i^2)^2}} \quad 5.71$$

denklemini elde ederiz.  $C_{mn}$  katsayıları  $(N_0)_{\text{cr}}$  için elde edilen ifadeyi minimum kılacak şekilde seçilmelidir. Bu ifadenin her  $C_{mn}$  katsayısına göre türevini alarak ve bu türevleri sıfıra eşitliyerek netice olarak aşağıdaki şekilde bir lineer sistemi elde ederiz:

$$D C_{mn} \pi^4 (A_1^2) = N_0, \text{kritik} \left\{ C_{mn} A_1^2 - \frac{\alpha}{2} A_2^2 \left[ C_{mn} \frac{16}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{mi} \cdot n_i}{(n^2 - i^2)^2} \right] \right\} \quad 5.72$$

Bütün denklemleri  $m$  in belli bir değeri için bir araya toplayalım. Bu denklemler  $C_{m1}, C_{m2}, C_m \dots$  katsayılarını ihtiva edeceklerdir. Bütün diğer katsayıları sıfır olarak alıyoruz. Yani plağın sehimleri için (●) genel ifadesi yerine

5.64

$$W(x,y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{n\pi}{b} y \quad 5.73$$

ifadesini alıyoruz. Buda burkulmuş plağın x eksenine boyunca  $m$  yarı dalgaya bölünecek şekilde burkulduğunu kabul etmeye eşdeğerdir.

Bir yarı dalga şeklinde burkulmuş basit mesnetli bir plak gibi olan iki nodal çizgi arasındaki bir yarı dalgayı gözönüne alalım. (5.72) denkleminde  $m = 1$  koyarak ve

$$\sigma_{\text{kritik}} = \frac{(N_0)_{\text{kritik}}}{h} \quad 5.74$$

notasyonunu kullanarak aşağıdaki şekilde bir denklem sistemi elde ederiz:

$$C_{in} \left[ \left(1 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{n^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] - 8\alpha \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{n^4 D} \sum_i^{\infty} \frac{C_{ii} n_i}{(n^2 - i^2)^2} = 0 \quad 5.75$$

Burada toplam,  $n \neq i$  bir tek sayı olacak şekilde alınan  $i$  sayıları üzerinde yapılacaktır.

Bu denklemler  $C_{11}, C_{12}, \dots$  cinsinden homojen lineer denklemler olup plağın düz denge formuna tekabül edecek şekilde  $\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}, \dots$  katsayılarının plağın burkulabileceğini gösteren sıfırdan farklı bir çözümünü elde etmek için (5.75) denklemlerinin kritik değerini hesaplamak için bir denklem elde edilir. Hesap, ardışık yaklaşımlarla yapılabilir. Evvelâ (5.75) denklemlerinin yalnız birincisini alarak ve  $a_{11}$  hariç bütün sıfırdan olduğunu farzederek başlayalım. Bu şekilde

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{n^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 0 \quad 5.76$$

elde edilir. Buradan

$$\sigma_{kr} = \frac{n^2 D}{a^2 h} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} = \frac{n^2 D}{b^2 h} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \quad 5.77$$

bulunur. Birinci yaklaşım yalnız ( $\alpha$ ) nın küçük değerleri yani eğilme gerilmelerinin uniform basınç gerilmelerine göre küçük olduğu Bak Denklem (5.45) haller için tatmin edici bir netice verir.  $\alpha = 0$  olması halinde (5.77) ifadesi, uniform basınca maruz bir plağın kritik gerilme-siyle aynı olur.

İkinci yaklaşımı elde etmek için (5.75) sisteminden katsayıları  $\mathcal{E}_{11}$  ve  $\mathcal{E}_{12}$  olan iki denklem alınması icabeder ve

$$C_{11} \left[ \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{n^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right] - 8\alpha \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{n^4 D} \frac{2}{9} C_{12} = 0 \quad 5.78$$

$$-8\alpha \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} C_{11} - \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) C_{12} = 0 \quad 5.79$$

sistemini elde ederiz. Bu denklemlerin determinantını sıfıra eşitliyerek:

$$\left(\frac{\sigma_{kr} a^2 h}{\pi^2 D}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{8\alpha}{\pi^2} \frac{2}{9}\right)^2\right] - \frac{\sigma_{kr} a^2 h}{\pi^2 D} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \left[\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2\right] + \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right) = 0 \quad 5.80$$

Bu denklemden  $\sigma_{cr}$  için ikinci yaklaşım hesaplanabilir. Bu yaklaşımın doğruluğu ( $\alpha$ ) artıkça  $\alpha = 2$  basit eğilme hali ve bir kara plak ( $a = b$ ) için hata %8 civarındadır. Daha büyük bir doğruluk elde etmek için bir yaklaşım daha hesaplamak lâzımdır. (5.78) sisteminden üç denklem alarak ve  $\alpha = 2$  kabul ederek şunları elde ederiz:

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 C_{11} - 16 \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} C_{12} = 0 \quad 5.81$$

$$-16 \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{2}{9} C_{11} + \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 C_{12} - 16 \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{6}{25} C_{13} = 0 \quad 5.82$$

$$-16 \sigma_{kr} \frac{a^2 h}{\pi^4 D} \frac{6}{25} C_{12} + \left(1 + 9 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 C_{13} = 0 \quad 5.83$$

Bu denklemlerin determinantını sıfıra eşitliyerek basit eğilme halinde kâfi derecede doğru olan üçüncü yaklaşımı hesaplamak için bir denklem elde edilir.

$\sigma_{kr}$  için son ifade

$$\sigma_{kritik} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \quad 5.84$$

denklemlerle gösterilebilir.

Muhtelif  $a/b$  oranları ve muhtelif ( $\alpha$ ) değerleri için ( $k$ ) sayısal çarpanın bazı değerleri Tablo 4 de verilmiştir.

Basit eğilme hali için üçüncü yaklaşım kullanılmıştır. Diğer hal-lerde  $\sigma_{cr}$  in hesap edilmesinde ikinci yaklaşımı gösteren (5.80) denklemi  $\sigma_{cr}$  kullanılmıştır.

TABLO:4 : (5.84) Denklemindeki (k) çarpanının sayısal değerleri:

$\alpha$ \ a/b	0.4	0.5	0.6	0.667	0.75	0.8	0.90	1.0	1.50
2	29,10	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,10
$\frac{4}{3}$	18,10	...	12,9	...	11,5	11,2	...	11,0	11,50
1	15,1	...	9,7	...	8,4	8,1	...	7,8	8,4
$\frac{4}{3}$	13,3	...	8,3	...	7,1	6,9	...	6,6	7,1
$\frac{2}{3}$	10,8	...	7,1	...	6,1	6,0	...	5,8	6,10

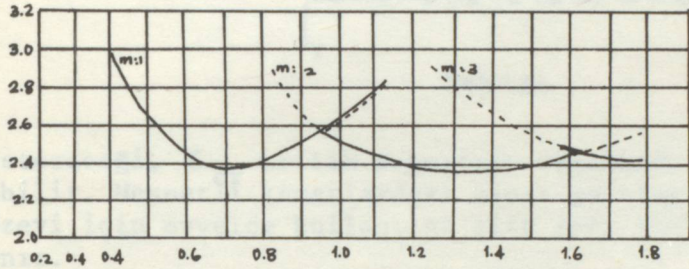
Tabloda basit eğilme halinde ( $\alpha = 2$ ) değerinin  $a/b = 2/3$  olduğunda bir minimumdan geçtiği görülür. ( $\alpha$ ) nın azalmasıyla  $\sigma_{cr}$  in minimum olduğu  $a/b$  oranı artar ve evvelce üniform basınca maruz bir plak için elde edilmiş olduğu gibi bire yaklaşır. Basit eğilme için (k) değerleri Şekil 18 de  $m = 1$  eğrisiyle gösterilmiştir.

Yukarıdaki incelemede plağın bir yarıdalga şeklinde burkulduğu farzedilir. Fakat elde edilen neticeler birçok yarıdalga olması haline de tatbik edilebilir. Bunun için yalnız  $m=2$ ,  $m=3$  .. eğrilerini çizmek gerekir. Bu eğrilerin Şekil 18 de dolu çizgilerle gösterilen kısımlarının  $\sigma_{cr}$  hesaplanmasında ve burkulmuş plağın nodal çizgilerle bölündüğü yarıdalga sayısının tayin edilmesine kullanılması icabeder. Uzun bir plağın, her yarıdalga uzunluğu yaklaşık olarak  $2/3 b$  ye eşit olacak şekilde burkulacağı görülür. Şekil 18 de gösterilenlere benzer eğriler diğer ( $\alpha$ ) değerleri yani basınç ve eğilme gerilmelerinin muhtelif kombinezonları için de çizilebilir.

Eğilme gerilmelerine ilâve olarak plağa dik doğrultuda,

üniform yayılmış bir dikdörtgen plağın kenarları boyunca üniform yayılmış eğilme gerilmelerinin tesirine maruz kalmasıyla başlıyorsa, kayma gerilmeleri, eğilme burkulmasının kendini

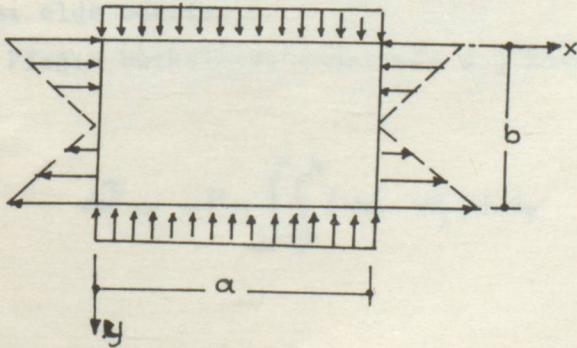
üniform yayılmış  $\sigma_y$  basınç gerilmeleri (Şekil.19 ) tesir ederse maksimum eğilme gerilmesinin  $\sigma_{cr}$  kritik değeri azalır ve evvelki



ŞEKİL - 18

metodumuza göre eğilme gerilmeleri tarafından yapılan işe bak. (d) 5.66 ifadesi  $\sigma_y$  basınç gerilmeleri tarafından yapılan işi ilâve ederek hesaplanabilir. Hesaplar  $\sigma_y$  nin  $\sigma_{cr}$  gerilmesinin şiddeti üzerine tesirinin  $\sigma_y: 4\pi^2 D/b^2h$  ve a:b oranlarına bağlı olduğunu gösterir. Misal olarak

$$\frac{\sigma_y b^2 h}{4\pi^2 D} = \frac{1}{3}$$

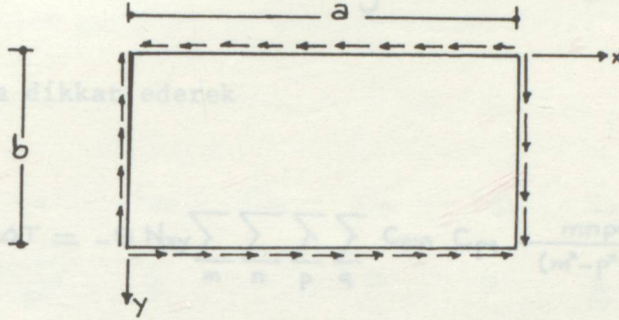


ŞEKİL - 19

alırsak  $\sigma_{cr}$  kritik gerilmesi yalnız eğilme gerilmelerinin tesir etmesi halinden % 25 kadar küçük olur.

### 5.5.6. DİKDÖRTGEN PLAKLARIN KAYMA GERİLMELERİNİN TESİRİ ALTINDA BURKULMASI:

Basit mesnetli bir dikdörtgen plağın kenarları boyunca üniform yayılmış  $N_{xy}$  kesme kuvvetlerinin tesirine maruz kalmasıyla başlayalım. Kayma gerilmesinin, plağın burkulmasının kendini



Sekil.20

göstereceği,  $Z$  kritik değerinin hesabında yine enerji metodu kullanılabilir. Mesnetli kenarlardaki sınır şartları burkulmuş plağın elastik yüzeyi için evvelce kullanılan çift seri şeklindeki ifadeyi alarak sağlanır.

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

5.85

Bu halde burkulmuş plağın eğilme şekil değiştirme enerjisi için

$$\Delta V = \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi^4 ab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 A_i^2$$

5.86

ifadesini elde ederiz.

Plağın burkulması esnasında dış kuvvetler tarafından yapılan iş

$$\Delta T = -N_{xy} \int_0^a \int_0^b (W'_x \cdot W'_y) dx dy$$

5.87

olur. W için (5.85) ifadesini koyarak ve

$$m \pm p \text{ çift bir sayı ise: } \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{p\pi}{a} x dx = 0$$

$$m \pm p \text{ tek bir sayı ise: } \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{p\pi}{a} x dx = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{m}{m^2 - p^2}$$

olduğuna dikkat ederek

$$\Delta T = -B N_{xy} \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q C_{mn} C_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} \quad 5.88$$

elde ederiz. Burada m, n, p, q, sayıları m/p ve n/q tek sayı olacak şekilde tam sayılardır.

Dış kuvvetlerden husule gelen (5.88) işini (5.86) şekil değiştirme enerjisine eşitliyerek kesme kuvvetlerinin kritik değerini tayin eden aşağıdaki ifadesi elde ederiz:

$$N_{xy} = -\frac{abD}{64} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^2 \pi^4 A_1^2}{\sum_m \sum_n \sum_p \sum_q C_{mn} C_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}} \quad 5.89$$

Şimdi  $C_{mn}$  ve  $C_{qp}$  sabitlerinin  $N_{xy}$  yi minimum kılan bir takımını seçmek lâzımdır. Yukarıdaki gibi hareket ederek ve (5.89) ifadesinin  $C_{mn}$ , .... katsayılarının herbirine göre türevlerini sıfıra eşitliyerek,  $C_{mn}$ , .... cinsinden lineer homojen denklem takımı elde ederiz. Bu takım biri m/n tek sayı olacak şekilde, diğeri m/n çift sayı olacak şekilde  $C_{mn}$  sabitlerini ihtiva eden iki guruba bölünebilir. Hesaplar bu ikinci gurup denklemlerin ( $N_{xy}$ ) cr için en küçük değeri verdiğini gösterir. Şu halde yalnız bu gurubu gözönüne almak icabeder.

Aşağıdaki notasyonları kullanarak

$$\beta = \frac{a}{b} \quad \lambda = -\frac{\pi^2}{32\beta} \frac{\pi^2 D}{b^2 h z_{kr}}$$

5.90

bu denklem gurubunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{22} & C_{13} & C_{31} & C_{33} & C_{42} \\ \frac{\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2} & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{45} = 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{16\lambda(1+\beta^2)^2}{\beta^2} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{26}{25} & 0 = 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{\lambda(1+9\beta^2)^2}{\beta^2} & 0 & 0 & -\frac{24}{75} = 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{\lambda(9+\beta^2)^2}{\beta^2} & 0 & \frac{24}{21} = 0 \\ 0 & \frac{36}{25} & 0 & 0 & \frac{\lambda(9+9\beta^2)^2}{\beta^2} & -\frac{72}{35} = 0 \\ \frac{8}{45} & 0 & -\frac{24}{75} & \frac{24}{21} & -\frac{72}{35} & \frac{\lambda(16+4\beta^2)^2}{\beta^2} = 0 \end{array}$$

5.90.a

Şimdi  $T_{CR}$  gerilmesini hesaplamak için denklem, yukardaki denklem takımının determinantını sıfıra eşitliyerek elde edilecektir, Hesap ardışık yaklaşımlarla yapılabilir. Hesaplara iki  $C_{11}$  ve  $C_{22}$  sabitli iki denklemle sınırlıyarak ve bu denklemlerin determinantını sıfıra eşit kılarak

$$\lambda = \pm \frac{1}{Y} \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}$$

5.91.

elde ederiz. Veya (5.90) notasyonlarını kullanırsak

$a/b$	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3
$k$	2.5	2.0	1.5	1.2	0.9	0.7	0.5	0.4

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{\pm 9\pi^2}{32} \cdot \frac{1+\beta^2}{\beta^3} \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

5.92

bulunur. İki işaret, bu halde kayma gerilmesinin kritik değerinin gerilmenin yönüne bağlı olmadığını gösterir.

(b) yaklaşım kâfi derecede doğru değildir. Zira hata kare plaklarda % 15 civarındadır ve a/b oranı arttıkça artar. Daha iyi bir yaklaşım temin edebilmek için (5.90a) takımında daha büyük sayıda denklem gözönüne alınmalıdır.

Beş denklem olarak ve determinantlarını sıfıra eşitliyerek

$$\lambda^2 = \frac{\beta^4}{81(1+\beta^2)^4} \left[ 1 + \frac{81}{625} + \frac{81}{25} \left( \frac{1+\beta^2}{1+9\beta^2} \right)^2 + \frac{81}{25} \left( \frac{1+\beta^2}{9+\beta^2} \right)^2 \right]$$

5.93

elde edilir.  $\lambda^2$  hesaplayarak ve (5.90) denklemine koyarak

$$\tau_{\text{kritik}} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 h}$$

5.94

elde ederiz. Burada k, a/b oranına bağlı bir sabittir. Kare bir plak için bu yolla k=9,4 elde ederiz. (5.90a) denklem takımında daha fazla sayıda denklem olarak yapıldığı hesaplar k'nın hakiki değerinin 9.34 civarında olduğunu gösterir. Bu halde (5.93) denklemiyle gösterilen yaklaşımın hatası % 1 den küçüktür. (5.93) denklemi, plâğın şekli kareden fazla farketmezse yani a/b 1,5 olursa k için kâfi bir yaklaşım. a/b oranının daha büyük değerleri için (5.90a) takımında daha büyük sayıda denklemler gözönüne alınmalıdır. Aşağıdaki tabloda altı denklemle yapılan hesapların neticeleri verilmiştir.

TABLO.5 (5.94)denklemindeki k için sayısal değerler:

a/b	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0	2.5	3.
k	9.4	8.0	7.3	7.1	7.0	6.8	6.6	6.3	6.1

Bu tabloda verilen  $k$  değerinin doğruluğu  $a/b$  oranı arttıkça azalır. Dar uzun plaklar için daha doğru neticeler elde etmek için kenarları basit mesnetli sonsuz uzun bir plak limit halini gözönüne alalım. Problemin bir yaklaşık çözümü plağın elastik yüzeyi için aşağıdaki ifadeyi alarak elde edilir.

$$W = A \sin \frac{\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{s} (x - \alpha y) \quad 5.95$$

Bu ifade sehimler için,  $y = 0$ ,  $y = b$  de ve  $(x - \alpha y)$  nin  $s$  nin katları olduğu nodal çizgiler boyunca sıfır verir. Burada s burkulmuş plağın yarıdalga boyunu ve çarpanı nodal çizginin eğimini gösterir. Problemin daha doğru bir çözümü nodal çizgilerin bir doğru olmadığını ve burkulmuş plağın elastik yüzeyinin Şekil 21 deki şekli haiz olduğunu gösterir. (5.95) ifadesi plağın boyuna kenarları boyunca eğilme momentlerinin sıfıra eşit olmasını ifade eden çevre şartlarını sağlamaz. Zira  $\mathcal{W}_{yy}$  bu kenarlar boyunca sıfır değildir. Bununla beraber problemin yaklaşık bir çözümü olarak kullanılabilir. (5.95) ifadesini burkulmuş plağın eğilme şekil değiştirme enerjisi denklemine ve dış kuvvetler tarafından yapılan iş denklemine koyarak ve her iki büyüklüğü eşitliyerek.

$$\tau_{\text{kritik}} = \frac{\pi^2 D}{2\alpha b^3 h} \left[ 6\alpha^2 + 2 + \frac{s^2}{b^2} + \frac{b^2}{s^2} (1 + \alpha^2)^2 \right] \quad 5.96$$

elde edilir.  $T_{cr}$  için en küçük değer

$$s = b(1 + \alpha^2)^{1/2} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Buna göre:

$$\tau_{\text{kritik}} = 5.7 \frac{\pi^2 D}{b^3 h} \quad 5.97$$

olur. Kenarlarından basit mesnetli sonsuz uzun bir şerit için problemin tam çözümü:

$$\tau_{\text{kritik}} = 5.35 \frac{\pi^2 D}{b^3 h} \quad 5.98$$

## REFERANS

- 1- Theory of Elasticity. S. TİMOSCHENKO
- 2- Theory of Elastic Stability S. TİMOSCHENKO
- 3- Plak ve KABUKLAR TEORİSİ S. TİMOSCHENKO
- 4- Yüzeysel TAŞIYICI SİSTEMLER  
Karl GİRMANN
- 5- Cisimlerin MUKAVEMETİ  
Prof. Dr. Mustafa İNAN
- 6- Boyuna ve Dairesel Ayrık nervülerle rijitleştirilmiş Silindirik kabukların sonlu elamanlar yöntemi ile Stabilite hesabı.  
(Doktora Tezi. Türkan KÖKSAL)
- 7- Buckling strenght of Metal Structures  
F. BLEICH
- 8- Kutu kesitli ince cidarlı kolonların Stabilitésinin katlanmış plak yöntemi ile İncelenmesi.  
(Doktora Tezi. Gülay AŞKAR)
- 9- Plakların küresel eğilmesi  
(Doçentlik tezi. Gündüz ÖZİŞİK)
- 10- Elastik Stabilite Ders notları  
(Prof. Orhan ÜNSAÇ)
- 11- Mukavemet  
Doç. Dr. Tekin ÖZBEK
- 12- Elastik Stabilite Ders Notları  
Doç. Dr. Ercüment KÖKSAL
- 13- Dönel KABUKLAR  
Prof Dr. Kemal ÖZDEN

M. Metin GÖKÇEK 1954 yılında doğmuştur. Orta öğrenimini İstanbul Pertevniyal Lisesinde tamamlayan adı geçen, İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesinden 1982 yılında mezun olmuştur. Karayolları Genel Müdürlüğü adına burslu okuyan Metin GÖKÇEK, mezuniyetine takiben Karayolları 8. Bölge Müdürlüğünde (ELAZIĞ) Etüt Mühendisi olarak bir müddet çalışmış daha sonra Yıldız Üniversitesi Yapı Ana Bilim Dalında Yüksek Lisansa başlamıştır. Yıldız Üniversitesinde Yüksek Lisans eğitimine başlaması sebebi ile tayinini İstanbul'a aldırarak adı geçen, halen Karayolları 1. Bölge Müdürlüğünde Proje Mühendisi olarak çalışmaktadır.

