

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Güç Spektrum Kestirimi

Faruk Sari

Yüksek Lisans Tezi

2 152
145

Elek.
15.000 TL

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÜÇ SPEKTRUM KESTİRİMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Faruk SARI

İstanbul 1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot	: R 152 145
Alındığı Yer	: FEN BİL. ENS.
Tarih	: 24.04.1992
Fatura	: - - - - -
Fiyatı	: 15.000. TL
Ayniyat No	: 1/2
Kayıt No	: 48356
UDC	: 621.3 378.242
Ek	:

+



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	III	29
ÖZET	IV	30
ABSTRACT	VI	

BÖLÜM 1: SPEKTRUM KESTİRİMİ TEMEL KAVRAMLARI

1.1. Spektrum Kestirimine Genel Bakış	1	34
1.2. Bazı Temel Kavramlar	4	35
1.2.1. Beklenen Değer	4	36
1.2.2. Moment	5	36
1.2.3. Raslantı Değişkeni	6	37
1.2.4. Rasgele işlemler	6	37
1.2.5. Duraganlık	7	38
1.2.6. Ergodiklik	8	42
1.3. Özilişki Fonksiyonu ve Kestirimi	9	43
1.3.1. Özilişki Fonksiyonu	9	43
1.3.2. Özilişki Fonksiyonunun Özellikleri	11	
1.3.3. Gözlemsel Verilerle Özilişki Fonksiyonun Hesaplanması	12	
1.4. Çapraz ilişki Fonksiyonu ve Kestirimi	14	58
1.5. Güç Spektrum Yoğunluğu	15	58
1.6. Spektrum Kestirimi ve Frekans Seçilebilirliği	17	59

BÖLÜM 2: AR SPEKTRUM KESTİRİMİ

2.1. AR Modeli ve Özellikleri	22	74
2.2. Beyaz Gürültünün Varyansı	24	
2.3. AR Modelin Güç Spektrum Yoğunluğu	25	79
2.4. AR Katsayılarının Hesaplanması	25	
2.4.1. Yule Walker Algoritması	25	79

II

2.4.2. Durbin-Levinson Algoritması	27
2.5. AR kestiriminde Frekans Seçilebilirliği, Veri Boyu ve Faz Etkisi	29
2.5.1. Frekans Seçilebilirliği	29
2.5.2. Veri Boyu ve Faz Etkisi	30

BÖLÜM 3: ML SPEKTRUM KESTİRİMİ

3.1. ML Modeli ve Özellikleri	32
3.1.1. Bayes Kestirim Kuralı	33
3.1.2. ML Kestirimi	34
3.2. ML Yöntemi ile Spektrum Kestirimi	35
3.3. Kestirim Varyansının Altsınırı	36
3.3.1. Tek Sinüs Taslağında Cramer-Rao Altsınırı	36
3.4. Bir AR işleminin Geriye Dönüslü ML Kestirimi (RML) ve Algoritması	39
3.4.1. Algoritmaya Giriş	39
3.4.2. Algoritmanın Oluşturulması	42
3.4.3. Kübik Köklerin Yapısı	46
3.4.4. Algoritmanın Performansı	49

BÖLÜM 4: SONUÇ

4.1. Giriş	55
4.2. Bazı Spektrum Kestirim Örnekleri	58
4.2.1. AR Kestirim Örnekleri	58
4.2.2. ML Kestirim Örneği	73
4.3. Frekans Seçilebilirliği	74
4.4. Sonuç ve Öneriler	74

BÖLÜM 6: KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ	78
----------------	----

TEŞEKKÜR	79
----------------	----

III

ÖNSÖZ

Ayrık zaman serilerinin spektrum analizi için son yirmi yılda bir çok kestirim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin herbirinin incelenmesi yoğun ve kapsamlı çalışma gerektirir.

Bu çalışmada bu yöntemlerden autoregressive (AR) ve maximum likelihood teknikleri ele alınmış, bazı verilerin bilgisayarda analizi yapılmıştır. Çalışmanın benden sonra bu konuyla ilgilenecekler için yardımcı olmasını dilerim.

Ayrıca bu çalışmada bazı verilerin analizi için bilinen kestirim yöntemleri ile karşılaştırılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir. AR kestirim yöntemi ile elde edilen sonuçların diğer yöntemlerle karşılaştırılması için entropi yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca bu çalışmada AR kestirim yönteminin radar, ses, görüntüleme ve tıbbi radyo astronomi, tip elektronik, yön bulma gibi birçok kullanış alanlara vardır. Aynı zamanda AR kestirim yöntemi ile elde edilen sonuçların doğruluğu testleri ile de değerlendirilmiştir.

ML yöntemi ile elde edilen sonuçların AR yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması için de çalışmada yer almıştır.

Bu çalışmada AR ve ML kestirim yöntemleri kullanılarak elde edilen sonuçların doğruluğu testleri ile de değerlendirilmiştir.

IV

sonuçta görülmektedir ki AR ve ML kestirim teknikleri geleneksel kestirim tekniklerine oranla daha yüksek çözünürlük ve daha duyarlı kestirimler vermektedir.

ÖZET

Genel olarak güç spektrum yoğunluğunun yada örneklenmiş ayırık istatistik işlemlerin kestirimleri Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) kullanılarak yapılmaktadır. Spektrum kestirimi için HFD yaklaşımı çeşitli işaret işlemleri için yeterli ve etkin sonuçlar verir. HFD yaklaşımının üstünlükleri yanında bazı performans sınırlamaları da vardır. Bunların en önemlisi frekans çözünürlüğü yani iki yada daha fazla işaretin frekans cevaplarını ayırt edebilme yeteneğindeki sınırlamalardır. HFD yaklaşımı kullanılırken ortaya çıkan ikinci önemli sınırlama asıl lobdaki enerjinin pencereleme nedeni ile kenar loblara sızmasıdır. Bu iki sınırlama özellikle kısa veri uzunluklarını analiz ederken sorun çıkarır. Örneğin radarda alınan herbir darbeye yalnızca birkaç veri vardır.

AR metodu daha iyi çözünürlük verdiği için bilinen kestirim yöntemlerine oranla daha fazla ilgi çekmektedir. AR kestirim yöntemi ilk olarak jeofizik verilerinin işlenmesi için geliştirilmiştir, bazan entropy yöntemi olarak da adlandırılır. AR spektral kestirim yönteminin radar, sonar, görüntüleme, ses analizi, radyo astronomi, tıp elektronigi, yön bulma gibi yaygın kullanım alanları vardır. Aynı zamanda AR kestirimi ses işlemede kullanılan doğrusal tahminle kodlama tekniği ile de yakından ilgisi vardır.

ML metodu da güç yoğunluğu spektrumunda çok iyi sonuçlar vermemesine karşın radar ve sonar da oldukça başarılı şekilde kullanılmaktadır.

Bu çalışmada AR ve ML kestirim yöntemleri kullanılarak çoklu sinüsoidal veri örnekleri için farklı kestirim algoritmaları geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlardan

açıkça görülmektedir ki AR ve ML kestirim teknikleri geleneksel kestirim tekniklerine oranla daha yüksek çözünürlük ve daha duyarlı kestirimler vermektedir.

There are many of the new techniques developed in the last two decades for spectrum analysis of discrete time series. The discussed techniques include the autoregressive (AR) and maximum likelihood (ML) methods in this thesis.

Generally estimation of the power spectral density (PSD) or simply the spectrum of discretely sampled deterministic and stochastic process is based on procedures using the Fast Fourier Transform (FFT). FFT approach for the spectrum analysis is computationally efficient and produces reasonable results for large class of signal processes. In spite of the advantages there are some performance limitation of the FFT approach. First and the most important limitation is that of frequency resolution i.e. the ability to distinguish the spectral responses of two or more signals. When processing FFT second limitation occurs as main lobe energy leakage into the sidelobes due to implicit windowing. These two performance limitation of the FFT approach are especially troublesome when analyzing short data records. For example in radar only a few data samples are available from each received pulse.

AR method provides improvement in resolution therefore it has contributed to popularity when compared to the conventional estimation methods. AR spectral estimate originally developed for geophysical data processing and sometimes it is called as entropy method. However AR spectral estimation has very large application areas such as radar, sonar, imaging, radio astronomy, biomedicine, speech processing and direction finding. Also AR approach for spectrum analysis is closely related to Linear Predictive Coding (LPC) technique used in speech processing.

VI

ABSTRACT

There are many of the new technics developed in the last two decades for spectrum analysis of discrete time series. The discussed technics include the autoregressive (AR) and maximum likelihood (ML) methods in this thesis.

Genarally estimation of the power spectral density (PSD) or simply the spectrum of discretly sampled deterministic and stochastic process is based on procedures using the Fast Fourier Transform (FFT). FFT approach for the spectrum analysis is computationally efficient and produces reasonable results for large class of signal processes. In spite of the advantages there are some performance limitation of the FFT approach. First and the most important limitation is that of frequency resolution i.e. the ability to distinguish the spectral responses of two or more signals. When processing FFT second limitation occurs as main lobe energy leakage into the sidelobes due to implicit windowing. These two performance limitation of the FFT approach are especially troublesome when analyzing short data records. For example in radar only a few data samples are available from each received pulse.

AR method provides improvement in resolution therefore it has contributed to popularity when compared to the conventional estimation methods. AR spectral estimate originally developed for geophysical data processing so sometimes it is called as entropy method. However AR spectral estimation has very large application areas such as radar, sonar, imaging, radio astronmy, biomedicine, speech processing and direction finding. Also AR aproach for spectrum analysis is closely related to Lineer Predictive Coding (LPC) technics used in speech processing.

VII LOM 1

1.1 In this study, different estimation algorithms are developed using AR and ML estimation technics for multiple sinusoidal data samples. It is obviously seen from the obtained results that AR and ML estimation technics gives higher resolution and more accurate estimates than conventional estimation technics.

Rastgele işaretlerde belirli ve güc spektrum kestirimi (Estimation). Sayısal işaret işleme (DSP) tekniklerinin uygulamalarında çok önemli bir konudur. Genel olarak işaretlerin spektrumları ortogonal işaretlerin lineer bileşenleri olarak karşımıza çıkarlar.

Daha iyi spektrum kestirimleri elde etmek için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin temelini Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) üzerine kurulmuştur. Çünkü HFD hesaplamada büyük kolaylıklar sağlar. Ancak bu yöntemlerin bazı doğal sınırlamaları vardır. Bu yüzden bir çok durumlarda iyi bir spektrum kestirimi elde etmek mümkün değildir. Bu durumda HFD ne alternatif olarak birçok yeni yöntem geliştirilmiştir. Bunlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

a) Geleneksel HFD üzerine kurulu teknikler

- Periodogram
- Blackman-Tukey

b) Parametre tanıma ve modelleme üzerine kurulu modern teknikler

- AR (Autoregressive) GSC Spektrum Yoğunluğu (GSF) kestirimi
- MA (Moving Average) GSF kestirimi
- ARMA (Autoregressive Moving Average) GSF kestirimi
- Pisarenko Spektrum kestirimi
- Prony yöntemi
- Maximum Likelihood (ML) yöntemi
- Maximum Entropy (ME) yöntemi

BÖLÜM 1

1.1 SPEKTRUM KESTİRİMİNE GENEL BAKIŞ

Kestirim teorisi, eldeki probleme dayalı örnek grubunun işleme ve raslantı değişkeni ile ilgili olup, istatistik teorisi ve olasılığın bir konusudur. Bu tür problemlerle, kontrol sistemlerinde ve haberleşmede sıklıkla karşılaşılır. Rastgele işlemlerde özilişki ve güç spektrum kestirimi (Estimation), Sayısal işaret işleme (DSP) tekniklerinin uygulamalarında çok önemli bir konudur. Genel olarak işaretlerin spektrumları ortogonal işaretlerin lineer bileşimleri olarak karşımıza çıkarlar.

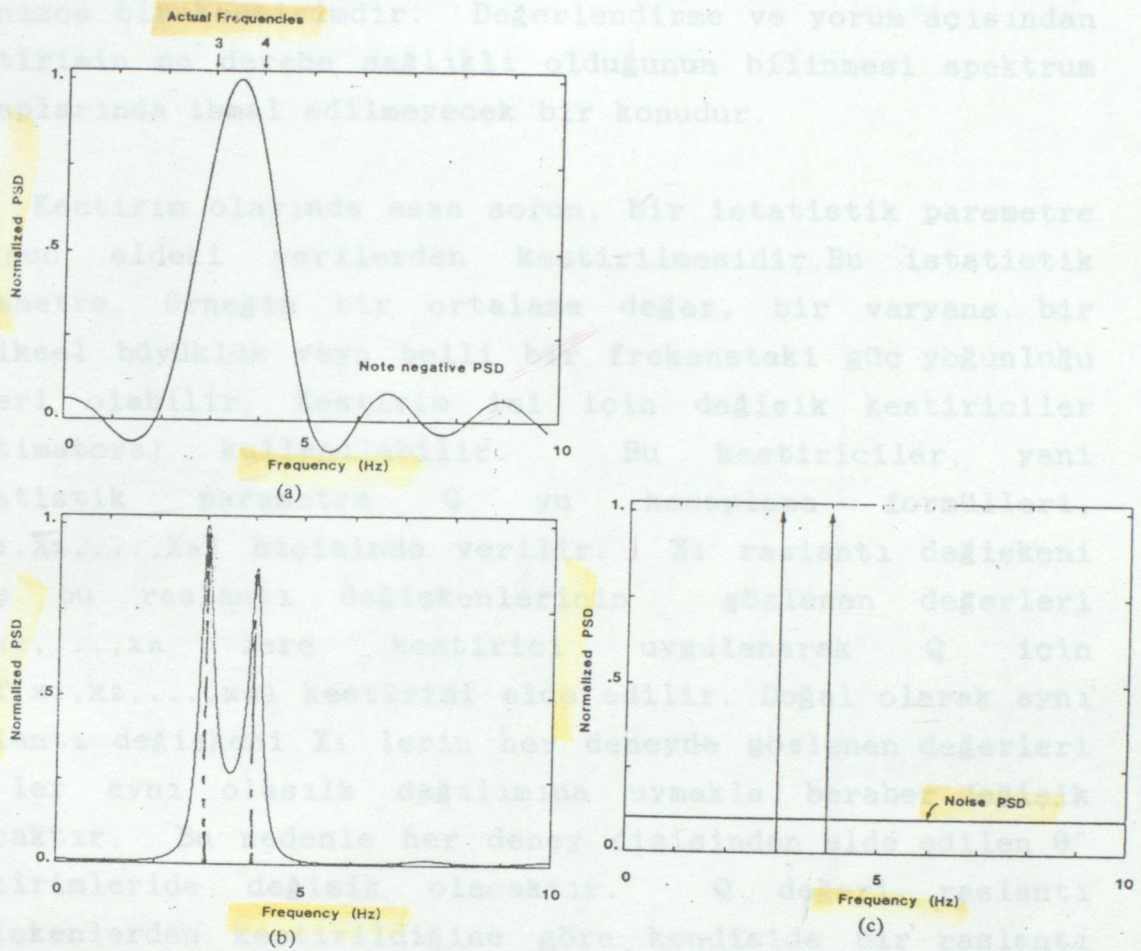
Daha iyi spektrum kestirimleri elde etmek için birçok farklı yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin temeli Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) üzerine kurulmuştur. Çünkü HFD hesaplamada büyük kolaylıklar sağlar. Ancak bu yöntemlerin bazı doğal sınırlamaları vardır. Bu yüzden bir çok durumlarda iyi bir spektrum kestirimi elde etmek mümkün değildir. Bu durumda HFD ne alternatif olarak birçok yeni yöntem geliştirilmiştir. Bunlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

a) Geleneksel HFD üzerine kurulu teknikler

- Periodogram
- Blackman-Tukey

b) Parametre tanıma ve modelleme üzerine kurulu modern teknikler

- AR (Autoregressive) Güç Spektrum Yoğunluğu (GSY) kestirimi
- MA (Moving Avarage) GSY kestirimi
- ARMA (Autoregressive Moving Avarage) GSY kestirimi
- Pisarenko Spektrum kestirimi
- Prony yöntemi
- Maximum Likelihood (ML) yöntemi
- Maximum Enthropy (ME) yöntemi



şekil 1.1.1. Eşit iki genlikteki sinüzoidalın üç ayrı teknikteki kestirimi a)Blackman Tukey GSY b) AR GSY c)Pisarenko GSY

Güç spektrum kestirimi için basit matematiksel formüller bulmak kestirim teorisinin temel konusudur. Bununla birlikte pratikte optimum spektrum kestirimi için, elde bulunan işaret hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç olduğu, bilinen bir gerçektir. Bu nedenle güç spektrum kestirimi genellikle çok güçlü deneyimsel temellere dayanır. Genelde böyle bir yol farklı tekniklerin birleşiminden oluşur. Tek bir yöntem üzerinde bir anlaşma sağlanamamıştır.

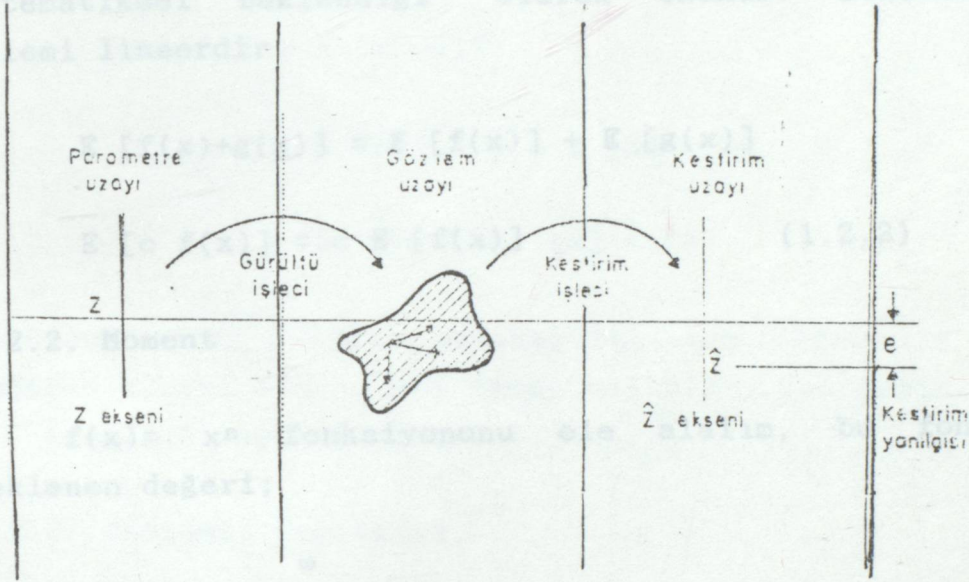
Sonlu bir veri bazından ve rasgele işaretler topluluğunun tek bir örneğinden hesaplamaya mecbur kaldığımız spektrum doğal olarak gerçek spektrum olmayıp

yalnızca bir kestirimdir. Değerlendirme ve yorum açısından kestirimin ne derece sağlıklı olduğunun bilinmesi spektrum hesaplarında ihmal edilmeyecek bir konudur.

Kestirim olayında esas sorun, bir istatistik parametre Q nun eldeki verilerden kestirilmesidir. Bu istatistik parametre, örneğin bir ortalama değer, bir varyans, bir fiziksel büyüklük veya belli bir frekanstaki güç yoğunluğu değeri olabilir. Kestirim işi için değişik kestiriciler (estimators) kullanılabilir. Bu kestiriciler, yani istatistik parametre Q yu hesaplama formülleri, $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ biçiminde verilir. X_i raslantı değişkeni olup bu raslantı değişkenlerinin gözlenen değerleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ lere kestirici uygulanarak Q için $\theta^* = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kestirimi elde edilir. Doğal olarak aynı raslantı değişkeni X_i lerin her deneyde gözlenen değerleri x_i ler aynı olasılık dağılımına uymakla beraber değişik olacaktır. Bu nedenle her deney dizisinden elde edilen θ^* kestirimleride değişik olacaktır. Q değeri raslantı değişkenlerden kestirildiğine göre kendiside bir raslantı değişkenidir ve $p(\theta^*)$ olasılık dağılımına uyar. Bu $p(\theta^*)$ olasılık dağılımı tümü ile kestiricinin özelliklerine bağlıdır. Kestirimin sağlıklı olabilmesi için doğal olarak θ^* değerleri gerçek değer θ ya yakın olmalı ve θ etrafında fazla saçılım göstermemelidir. Diğer bir deyişle $p(\theta^*)$ olasılık dağılımının en yüksek değeri gerçek değer θ ile çakışmalı ve $p(\theta^*)$ küçük olmalıdır.

Kestirim işleminin genel bir gösterimi şekil (1.1.2) de gösterilmiştir. Bilinmeyen parametrelerin alabileceği değerlerin tümünün yer aldığı uzay Parametre Uzayı olarak adlandırılır. Parametrenin gürültü etkisi ile bozulmuş bir şeklini oluşturan veriler de Gözlem Uzayını belirler. Parametre uzayından gözlem uzayına geçişte ortaya çıkan bozucu etkilerin tümüne gürültü denir. Kestiricinin amacı veriyi gürültünün etkisinden arındırmak ve gerçek değerine elden geldiğince yaklaşık bir değer bulmaktır. Genelde kestirilen değer ile gerçek değer arasında az olsa bir fark

kaçınılmazdır. Bu farka Kestirim Hatası denir. Doğal olarak, bir kestirimde bu hatanın küçük tutulması istenir.



şekil 1.1.2. Kestirim işlemi taslağı

1.2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.2.1. Beklenen Değer

İstatistik yöntemlerle ilgili en önemli ve temel kavramlardan biri raslantı değişkeninin yada raslantı değişkenli fonksiyonların ortalama değerlerinin bulunmasıdır. Zaman fonksiyonunun tek bir zamana karşı gelen değeri ile tanımlanmış tek bir rastlantı değişkeni söz konusu olduğunda raslantı değişkeninin kabul edilebilir olası değerleri sınır değerleri boyunca integre edilmek sureti ile ortalama değerin bulunması gerekir. Bu tip bir işlem bizi beklenen değer tanımına ulaştırır. x rasgele değişkeninin bir $f(x)$ fonksiyonu olarak şu şekilde tanımlanır:

$$E [f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) P_x(x) dx \quad (1.2.1)$$

$E [X]$ sembolu genellikle "X in beklenen değeri" yada "X in matematiksel beklendiği" olarak okunur. Beklenen değer işlemi lineerdir.

$$E [f(x)+g(x)] = E [f(x)] + E [g(x)]$$

$$E [c f(x)] = c E [f(x)] \quad (1.2.2)$$

1.2.2. Moment

$f(x) = x^n$ fonksiyonunu ele alalım, bu fonksiyonun beklenen değeri;

$$E [x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P(x) dx \quad (1.2.3)$$

n . moment olarak tanımlanır. 1.moment x in ortalaması olarak adlandırılır.

$$\mu = E [X] = \int_{-\infty}^{\infty} x P(x) dx \quad (1.2.4)$$

Benzer biçimde merkezi momentlerde tanımlanabilir.

Bunlar sadece raslantı değişkenleri ile onların beklenen değerleri arasındaki farkların momentleridir.

$$E [(X-X^{\sim})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-X^{\sim})^n P(x) dx \quad (1.2.5)$$

$n=2$ için merkezi moment oldukça önemlidir ve varyans olarak adlandırılıp σ^2 ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \text{var } [x] &= E [(x-\mu)^2] \\ &= E [x^2] - 2 \mu E [x] + \mu^2 \\ &= E [x^2] - E^2 [x] = \sigma^2 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

görüldüğü gibi varyans karasal beklenen değer ile beklenen değerlerin karesi arasındaki farka eşittir. Varyansın karekökü σ " standart sapma " olarak bilinir.

1.2.3. Raslantı Değişkeni

Birçok gözlemsel veri periyodik ve geçici verilere benzer biçimde bağıntılarla veya tekrarlanan deneylerle belirlenemez. Bu verilere rasgele değişken denir. Rasgele verilerin geçmişteki veya şimdiki değerlerinden gelecekteki değerleri kestirilemez. Gerçekte bir gözlemsel veriye önem kazandıran da bu önceden kestirilemeyeiş özelliğidir. x rasgele değişkeni, olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tamamen karakterize edilebilir.

1.2.4. Rasgele İşleme

Sonsuz sayıda rasgele veriler topluluğuna rasgele işleme adı verilir. Başka bir deyişle olası bütün x_j örnek fonksiyonlarına işleme denir. İşleme $\{x_j\}$ ile gösterilir. Rasgele işlemlerin temel ilkelerini Wiener ve Kolmogorof 1930 larda vermişlerdir. Rasgele verilerin analizlerinde ilişki (correlation) fonksiyonları önemli yer tutar. Çünkü

rasgele verileri analitik bağıntılarla gösterme olanağı olmadığından ancak istatistik özellikleri ile tanımlanabilirler. Rasgele veriler sonsuz zaman aralığında ne periyodik olaylar gibi tanımlanmışlardır ne de geçici olaylar gibi sifıra yaklaşırlar. Bu yüzden frekans ortamı analizlerinde Fourier dizileri ve Fourier integralinden doğrudan yararlanılamaz.

Bir rasgele işlemeyi tamamen tanımlayabilmek için bir veya birden fazla örnek fonksiyon yeterli olmayabilir. Raslantı değişkenleri olasılık dağılım fonksiyonları ile tanımlanırlar. Bunlar bir n zamanında $\{x_j\}$ nin alabileceği değerlerin olasılığını verir.

1.2.5. Durağanlık

Bir işlemin bütün basit ve bileşik yoğunluk fonksiyonları, zaman başlangıcının seçimine bağlı değilse bu işlemin durağan olduğu söylenir. Bu durumda daha önce incelenen bütün beklenen değerleri ve momentleri sabit olup zamanın mutlak değerinden bağımsızdır.

Eğer, herhangi olasılık yoğunluk fonksiyonları zaman başlangıcının seçimine bağlı ise bu işlemeye, durağan olmayan işleme denir. Bu durumda beklenen değerlerin ve momentlerin biri yada bir kaç zamana bağlı olacaktır.

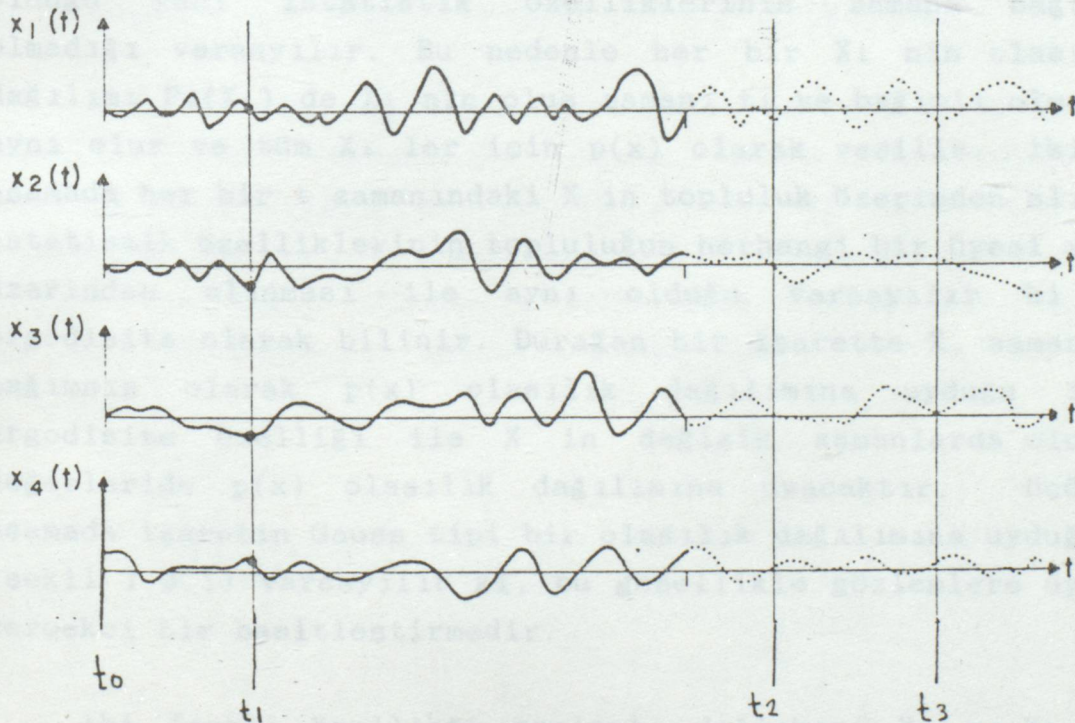
Herhangibir işlemin, geçmişte sonlu herhangibir zamanda başlaması ve gelecekte sonlu bir zamanda bitmesi kaçınılmaz olduğundan, gerçekte durağan bir işleme olmadığı söylenebilir. Ancak gözlem süresi boyunca farkedilir bir değişim göstermeyen işlemler pekçok durum için geçerlidir. Bu gibi durumlarda işleme durağan varsayılabilir.

$x(t_1)$ işleminin t_1 zamanından bağımsız olması ve iki raslantı değişkeni arasındaki ilişkinin; $E [X(t_1)X(t_2)]$ yalnızca $t_2 - t_1$ zaman farkına bağlı olması durumunda " Geniş Anlamda Durağan " adını almaktadır.

1.2.6. Ergodiklik

Rasgele bir işlemenin zamanda veya uzamsal koordinatlardaki ortalaması "ensemler" (tüm örnek kümelerinin toplamına verilen addır) ortalamalarına eşitse bu işlemeleme ergodik işleme denir. Başka bir ifade ile rasgele işlemenin bir örnek fonksiyonunun aritmetik ortalaması ve özilişki fonksiyonu, şekil 1.2.1 de gösterildiği gibi, örneğin bir t_1 zamanındaki topluluğun aritmetik ortalaması ve özilişki fonksiyonuna eşitse bu işleme ergodik işleme denir. Ergodik rasgele işlemenin bütün fonksiyonları için bu özellik geçerlidir. Özet olarak, ergodik işlemlerde yeterince uzun bir zaman aralığında örnek fonksiyondan hesaplanan istatistikler, topluluktan tek bir anda (şekil 1.2.1 de t_1) hesaplanan istatistiklerle aynıdır.

Sadece durağan rasgele işlemlerin ergodik olabileceğini belirtmek gerekir. Durağan olmayan rasgele işlemler ergodik olamayacağı gibi bazı durağan rasgele işlemlerde ergodik olmayabilir.



Şekil 1.2.1. Rasgele örnek veriler veya topluluk

Ergodiklik varsayımı uygulamada önemlidir. Çünkü böylece bir tek örnek fonksiyondan zaman ortalamaları alınarak rasgele işleminin istatistik özellikleri saptanabilir.

$$\mu_x = E[x_m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1) - N} \sum_{m=N}^N x_m \quad (1.2.7)$$

Eğer ergodiklik özelliği olmasaydı, μ_x in bulunması daha önce verilen (1.2.4) ifadesinden bulmak mümkün olacaktı. Yani işlemedeki herhangi bir m için tüm mümkün olan çıkışların ortalamasını bulmak gerekecekti. Oysa ergodik durumda bir tek $\{x(m)\}$ kümesinden ortalama bulunabilmektedir. Yani çeşitli m ler için yapılan ortalamalar sıfır varyansta olmaktadır.

1.3. ÖZİLİŞKİ FONKSİYONU VE KESTİRİMİ

1.3.1. Özilişki Fonksiyonu

Rasgele olaylarda bir spektrum tanımı yapabilmek için bazı basitleştirmeler yapalım. İlk olarak işaretin durağan olduğu yani istatistik özelliklerinin zamana bağımlı olmadığı varsayılır. Bu nedenle her bir X_i nin olasılık dağılımı $P_i(X_i)$ de X_i nin oluş zamanı t_i ye bağımlı olmadan aynı olur ve tüm X_i ler için $p(x)$ olarak verilir. İkinci aşamada her bir t zamanındaki X in topluluk üzerinden alınan istatistik özelliklerinin topluluğun herhangi bir üyesi $x(t)$ üzerinden alınması ile aynı olduğu varsayılır ki bu ergodisite olarak bilinir. Durağan bir işaretle X, zamandan bağımsız olarak $p(x)$ olasılık dağılımına uyduğu için ergodisite özelliği ile X in değişik zamanlarda oluşan değerleride $p(x)$ olasılık dağılımına uyacaktır. Üçüncü aşamada işaretin Gauss tipi bir olasılık dağılımına uyduğu (şekil 1.3.1) varsayılır ki, bu genellikle gözlemlere uygun gerçekçi bir basitleştirmedir.

iki farklı özellikte raslantı değişkeni X_a ve X_b nin birbirleri ile olan bağıllılığı ve benzerliği "kovaryans"

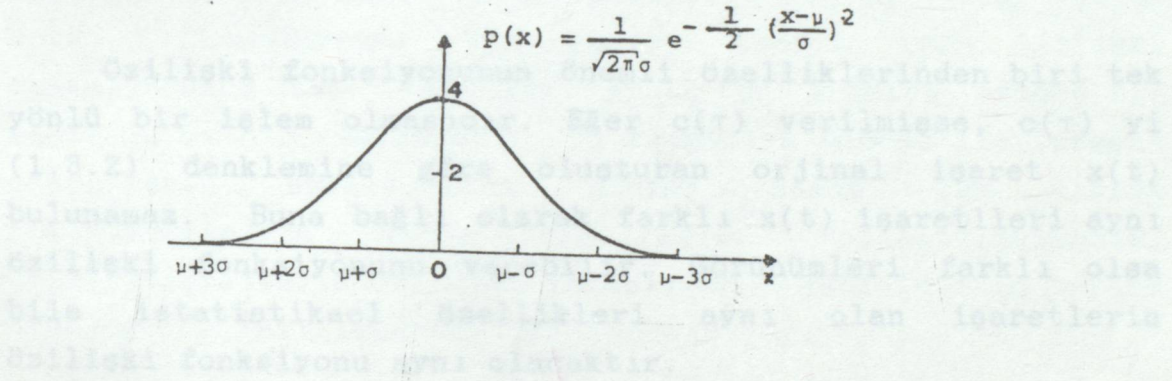


ile incelenir.

$$\text{Covar} (X_a, X_b) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_a - \mu_a) (X_b - \mu_b) p(X_a, X_b) dX_a dX_b \quad (1.3.1)$$

Burada X_a ve X_b nin ortalamaları μ_a ve μ_b birleşik olasılık dağılımları $p(X_a, X_b)$ ile gösterilmiştir.

1.3.2. Özellikle Gauss olasılık dağılım fonksiyonu



Şekil 1.3.1 Gauss olasılık dağılım fonksiyonu

X_a ve X_b nin genel rasgele işarete t_a ve t_b zamanlarındaki değişkenler olması durumunda, durağanlık özelliğinden dolayı X_a ve X_b arasındaki bağımlılık ve benzerlik t_a ve t_b zamanları yerine yalnız zaman farkı $\tau = t_a - t_b$ ye bağlı olacak ve ergodisite özelliğinden dolayı (1.3.1) denklemindeki integral zaman üzerinden alınarak $c(\tau)$ bulunur.

$$c(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) X(t+\tau) dt \quad (1.3.2)$$

Diğer yandan, yine aynı şekilde durağanlık ve ergodisite özelliklerinden yararlanarak X_i nin varyansı

$$\sigma = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)^2 dt \quad (1.3.3)$$

olarak bulunur. Bu ifade incelendiğinde σ nın $c(0)$ a eşit olduğu görülür. $c(\tau)$ nun $x(t)$ işaretindeki x değerlerinin birbirlerine ilişkisini gösterdiğini vurgulamak için "özilişki" fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

1.3.2. Özilişki Fonksiyonunun Özellikleri

Özilişki fonksiyonunun önemli özelliklerinden biri tek yönlü bir işlem olmasıdır. Eğer $c(\tau)$ verilmişse, $c(\tau)$ yi (1.3.2) denkleminde göre oluşturan orjinal işaret $x(t)$ bulunamaz. Buna bağlı olarak farklı $x(t)$ işaretleri aynı özilişki fonksiyonunu verebilir. Görünümleri farklı olsa bile istatistiksel özellikleri aynı olan işaretlerin özilişki fonksiyonu aynı olacaktır.

Özilişki fonksiyonu çift simetrik fonksiyondur. Yani

$$c(-\tau) = c(\tau) \quad (1.3.4) \text{ olur.}$$

Özilişki $c(\tau)$ yalnız zaman farkı τ nun mutlak değerine bağlıdır.

Özilişki fonksiyonunun en büyük değeri $\tau=0$ içindir.

$$c(\tau=0) \geq c(\tau) \quad (1.3.5)$$

Özilişki fonksiyonu aralarında zaman farkı τ olan $x(t)$ değerlerinin bağımlılığını gösterdiğine göre, aralarında zaman farkı olmayan, yani $\tau=0$ daki değerler kendilerinin aynısı olup birbirlerine tam bağımlıdır. Rasgele olaylarda τ

arttıkça aralarında τ kadar zaman farkı olan değerlerin benzerliği azalacaktır ve özilişki $c(\tau)$ küçülecektir.

(1.3.2) denklemi rasgele işaretler için tanımlanmış olmakla beraber periyodik ve geçici işaretlere de uygulanabilir. T_a ana periyodlu periyodik bir işaretin özilişki fonksiyonu (1.3.2) deki genel tanımın basitleştirilmesi ile

$$c(\tau) = \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{T_a/2} x(t) x(t+\tau) dt \quad (1.3.6)$$

şeklini alır. Bu ifade T_a ana periyodlu bir periyodik işaret veya T uzunluğunda bir geçici işaret için özilişki fonksiyonunun tam tanımıdır. Ancak bu denklem sadece bir kestirim ve bir yaklaşımdır. Bu farklılık nedeni ile rasgele işaretlerin spektrumları hiçbir zaman tam olarak hesaplanamamakta ancak kestirimler yapılabilmektedir. Geçici işaretlerin özilişki fonksiyonunda geçicidir ve toplam uzunluğu orjinal işaretin iki katıdır.

1.3.3. Gözlemsel Verilerle Özilişki Fonksiyonunun Hesaplanması

Uygulamada veriler mutlaka sonlu uzunlukta olduğundan gerek özilişki fonksiyonu gerekse güç yoğunluğu spektrumu için gerçek değerler bulunamaz, ancak kestirimler yapılabilir. Bu kestirimlerin gerçek değerlere yakınlığı ise olasılık hesapları ve istatistik değişkenler ile verilebilir ki bunlar spektrum güvenirliliğini gösteren ölçülerdir.

Kuramsal olarak $-\infty \leq t \leq \infty$ aralığındaki bir işlemin örnek fonksiyonu $x(t)$ uygulamada sadece $0 \leq t \leq T$ aralığında gözlenebilir. $x_T(t)$ olarak gösterilen gözlemsel verinin uzunluğu T olup başlangıcına keyfi olarak $t=0$ zamanı verilebilir, çünkü özilişki fonksiyonu mutlak zamandan

ziyade zaman farkına bağımlıdır. T uzunluğundaki $x_T(t)$ sinyali Nyquist kuramına uygun olarak Δt aralığı ile örneklenerek $N=T/\Delta t$ sayıda değer elde edilir. $t=n \cdot \Delta t$ anındaki sinyal değeri x_n olsun.

$$x_n = x(n \cdot \Delta t) , \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (1.3.7)$$

zaman serisi elde edilir.

İşaretin özilişki fonksiyonunu hesaplamadan önce eldeki verilerden ortalama değerinin bulunması ve verilerden çıkartılması gereklidir, aksi halde özilişki fonksiyonu hatalı olacaktır. Ayrıca işarette bulunan işaret boyundan uzun bileşenlerin ve diğer hatalı bileşenlerin giderilmesi gereklidir, çünkü bu bileşenler spektrumu ağırlıklı olarak alçak frekanslarda olmak üzere tüm frekanslarda etkilerler.

Özilişki fonksiyonunu genel olarak veren (1.3.6) denklemi sonlu veri $x_T(t)$ için yazıldığında,

$$c_T(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x_T(t) x_T(t+\tau) dt, \quad 0 \leq |\tau| \leq \tau_{\max} \leq T \quad (1.3.8)$$

şeklini alır.

$c_T(t)$ örneklenmiş işaret ile hesaplandığından kendisinde örneklenmiş olacaktır. Örnekleme aralığı $\Delta \tau = \Delta t$ seçilerek ve $\tau = m/\Delta t$ zamanındaki özilişki değeri c_m olarak gösterilerek (1.3.8) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$c_m = c_T(m/\Delta \tau) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n x_{n+m} / \Delta t \quad (1.3.9)$$

$$m=0, +1, +2, \dots, +M, \quad M = \tau_{\max} / \Delta \tau$$

Özilişki fonksiyonu çift simetrik olduğu için (1.3.9) denklemini sadece $m \geq 0$ değerleri için hesaplamak yeterlidir. Yani $-\tau$ için özilişki değerleri $c-m$ ler $c-m=c_m$ kullanarak bulunabilir.

1.4. ÇAPRAZ İLİŞKİ FONKSİYONU ve KESTİRİMİ

İşaret analizinde değişik özellikteki işaretlerin karşılaştırılmasında çapraz ilişki fonksiyonu önemli bir işlemdir. En genel halde rasgele işaretler için tanımlanmıştır. İki değişik raslantı değişkeni X_i ve Y_i nin her bir t_i zamanında değer almaları ile $x(t_i)$ ve $y(t_i)$ dizileri oluşur. Bu raslantı değişkenlerinin durağan ve ergodik oldukları ve Gauss olasılık dağılımına uyduğu varsayılarak çapraz ilişki fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$c_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y(t+\tau) dt \quad (1.4.1)$$

Bu en genel tanımdır. T_a ana periyodu ile periyodik olması durumunda bağıntı şu hale gelir.

$$c_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{T_a/2} x(t) y(t+\tau) dt \quad (1.4.2)$$

$x(t)$ ve $y(t)$ nin geçici işaretler olması durumunda çapraz ilişki fonksiyonu şu şekli alır.

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t+\tau) dt \quad (1.4.3)$$

Çapraz ilişki fonksiyonu özilişki fonksiyonun aksine çift simetrik olmadığı görülecektir.

$$c_{xy}(\tau) = c_{xy}(-\tau) \quad (1.4.4)$$

Ancak çapraz ilişkide integral altında $x(t)$ ve $y(t)$ için işlem sırası değiştirilerek $c_{xy}(\tau)$ çapraz ilişki fonksiyonu elde edilir ve,

$$c_{xy}(-\tau) = c_{yx}(\tau) \quad \text{veya} \quad c_{yx}(-\tau) = c_{xy}(\tau) \quad (1.4.5)$$

bağıntısının olduğu görülür. Önemli özelliklerden biri çapraz ilişki fonksiyonunun en büyük değerini herhangi bir τ değerinde alabileceğidir.

Sonlu ve örneklenmiş gözlemsel verilerin çapraz ilişki fonksiyonu,

$$c_{xym} = c_{xyT}(m/\Delta\tau) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n y_{n+m} \quad (1.4.6)$$

$m=0, +1, \dots, +M \quad M=T_{\max}/\Delta\tau$

(1.3.15) denkleminde $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin aynı uzunlukta oldukları ve aynı örnekleme aralığı Δt ile örneklendiği varsayılmıştır. Çift simetrik olmadığı için bütün m değerleri için hesaplama zorunluluğu vardır.

1.5. GÜÇ SPEKTRUM YOĞUNLUĞU

Rasgele işaretler $-\infty \leq t \leq \infty$ aralığında tanımlandığından ve bu sonsuz sürede geçici işaretler gibi sönmüldüğünden sinyal enerji tanımı rasgele işaretler için yapılamamaktadır. Fakat rasgele işaretler için birim zaman başına düşen enerji tanımı yapılabilir ve bu rasgele işaretlerin gücü olarak bilinir:

Çapraz ilişki fonksiyonu özilişki fonksiyonun aksine çift simetrik olmadığı görülecektir.

$$c_{xy}(\tau) = c_{xy}(-\tau) \quad (1.4.4)$$

Ancak çapraz ilişkide integral altında $x(t)$ ve $y(t)$ için işlem sırası değiştirilerek $c_{xy}(\tau)$ çapraz ilişki fonksiyonu elde edilir ve,

$$c_{xy}(-\tau) = c_{yx}(\tau) \quad \text{veya} \quad c_{yx}(-\tau) = c_{xy}(\tau) \quad (1.4.5)$$

bağıntısının olduğu görülür. Önemli özelliklerden biri çapraz ilişki fonksiyonunun en büyük değerini herhangi bir τ değerinde alabileceğidir.

Sonlu ve örneklenmiş gözlemsel verilerin çapraz ilişki fonksiyonu,

$$c_{xym} = c_{xyT}(m/\Delta\tau) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-1-m} x_n y_{n+m} \quad (1.4.6)$$

$$m=0, +1, \dots, +M \quad M=\tau_{\max}/\Delta\tau$$

(1.3.15) denkleminde $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin aynı uzunlukta oldukları ve aynı örnekleme aralığı Δt ile örneklendiği varsayılmıştır. Çift simetrik olmadığı için bütün m değerleri için hesaplama zorunluluğu vardır.

1.5. GÜÇ SPEKTRUM YOĞUNLUĞU

Rasgele işaretler $-\infty \leq t \leq \infty$ aralığında tanımlandığından ve bu sonsuz sürede geçici işaretler gibi sönümlendiğinden sinyal enerji tanımı rasgele işaretler için yapılamamaktadır. Fakat rasgele işaretler için birim zaman başına düşen enerji tanımı yapılabilir ve bu rasgele işaretlerin gücü olarak bilinir:

$$d = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt \quad (1.5.1)$$

Rasgele işareti tanımlayan en önemli özelliklerden biri işaret gücü olduğundan, rasgele bir işaret için yapılan bir spektrum tanımı ile işaret gücünün frekansa göre dağılımı gösterilir. Rasgele işaretin spektrumu $G(f)$ birim frekans başına düşen gücü gösterdiği için birimi (V^2/Hz) dir. Bu nedenle $G(f)$ güç yoğunluğu spektrumu olarak adlandırılır. $G(f)$ in frekans üzerinden integrali alındığında, yani her frekanstaki güç yoğunluğunun tüm frekanslar üzerinden toplanması ile işaret gücü d bulunur.

$$d = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) df \quad (1.5.2)$$

Güç yoğunluğu spektrumu $G(f)$ nin gerçek şeklini bulmak ancak sonsuz uzunlukta bir işaretle olanaklıdır. Uygulamada zorunlu olarak $-T/2 \leq t \leq T/2$ aralığında gözlenmiş bir sonlu $x_T(t)$ işaretinden hesaplanacak $G_T(f)$ güç yoğunluğu spektrumunun hesaplanması o şekilde olmalıdır ki, $G_T(f)$ gerçek spektrum $G(f)$ yi olanaklı en az hata ile yansıtsın. Gözlem süresi T uzadıkça bu yanılğı azalsın ve sonuçta $T \rightarrow \infty$ için $G_T(f) = G(f)$ olsun.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} G_T(f) = G(f) \quad (1.5.3)$$

İstatistik kuramlarından ve olasılık kavramından hareketle güç yoğunluğu spektrumu $G(f)$ ile özilişki fonksiyonu $c(\tau)$ arasında Fourier dönüşümü ile verilen bir

bağ olduğunu Wiener (10) göstermiştir.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (1.5.4)$$

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{-i2\pi f\tau} df \quad (1.5.5)$$

Güç spektrum yoğunluğunun en önemli özelliği w nın gerçel, pozitif ve çift fonksiyon olmasıdır. Bu nedenle beklenen değeride aynı özellikleri taşır. Güç spektrum yoğunluğunun özellikleri hakkında (11) den daha geniş bilgi edinilebilir.

1.6. SPEKTRUM KESTİRİMİ ve FREKANS SEÇİLEBİLİRLİĞİ

Bir kestiricinin iyiliği basitçe iki değişik ölçü ile incelenebilir. Bunlar kestirimin yanlışlığı (bias of estimation) ve kestirim varyansıdır (variance of estimation).

θ değerleri alabilen ve gerçek değeri θ olan raslantı değişkeni Q ile gösterilirse kestirim yanlışlığı,

$$b(Q) = E(Q) - \theta \quad (1.6.1)$$

kestirim varyansı ise,

$$v(Q) = E\{(Q - E(Q))^2\} \quad (1.6.2)$$

ile verilir. Kestirim yanlışlığı, istatistiksel parametrenin kestirimde beklenen değeri ile gerçek değeri arasındaki farktır. Diğer yandan kestirim varyansı ise kestirimin beklenen değer etrafında saçılmasının bir ölçüsüdür. Bu özellikler Şekil (1.6.1) de gösterilmiştir.

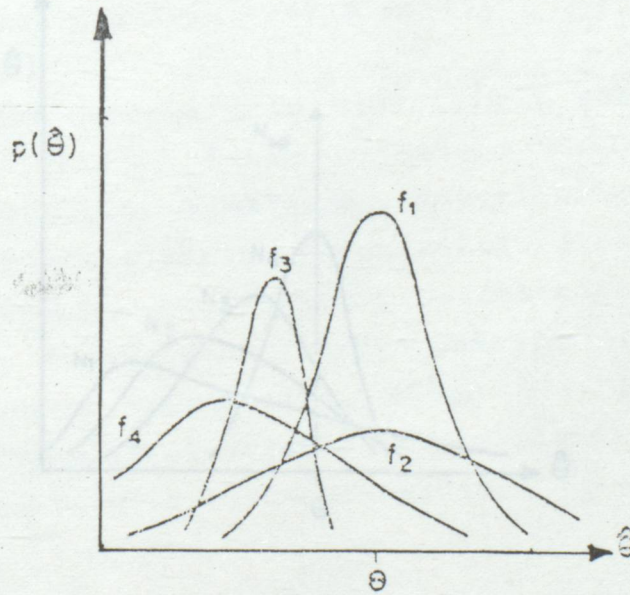
Şekil (1.6.2) de ise değişik kestiricilere ait olasılık dağılımları verilmiştir. Burada f_1 kestiricisi büyük yanlılıktan ve varyansdan ötürü iyi bir kestirici değildir. f_2 kestiricisinin değışikliği az fakat oldukça yanlıdır. f_3 kestiricisi yanlı ve küçük varyansı vardır. f_4 ise yanlı ve büyük varyansa sahiptir ve bu nedenle verilen kestiriciler içinde en iyisidir.

İyi bir kestirici için $b(Q)$ ve $v(Q)$ kestirimde kullanılan veri sayısına göre azalmalıdır. Bu özellik Şekil (1.6.1) de örneklerle gösterilmiştir.

Fakat bu özellikler bir arada gerçekleşmez. Örneğin bir örnek verelim. θ değeri bilinmeyen bir parametre olsun. Bu parametrenin olasılık dağılımı $p(\hat{\theta})$ olsun. Bu dağılımın ortalaması $E\{\hat{\theta}\}$ ve varyansı $V\{\hat{\theta}\}$ olsun. Bu durumda $b(Q)$ ve $v(Q)$ kestiricinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$b(Q) = E\{\hat{\theta} - \theta\} = E\{\hat{\theta}\} - \theta \quad (1.6.1)$$

Şekil 1.6.1 Bir kestiricinin olasılık dağılım fonksiyonu özellikleri



Şekil 1.6.2. Değişik kestiricilerin olasılık dağılımları

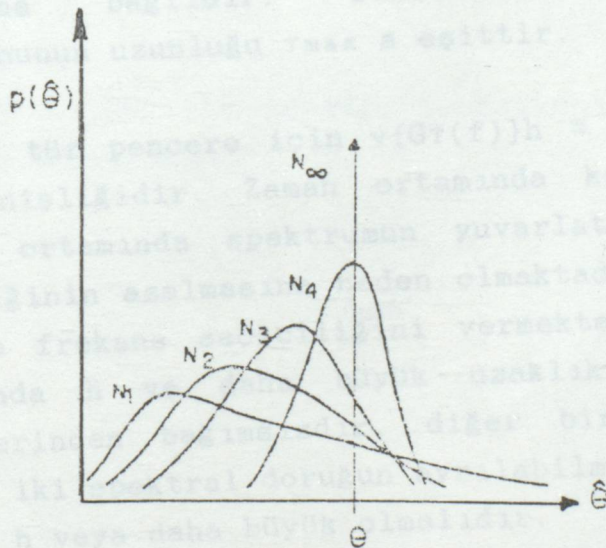
Şekil (1.6.2) de ise değişik kestiricilere ait olasılık dağılımları verilmiştir. Burada f_4 kestiricisi büyük yanlışlıktan ve varyansdan ötürü iyi bir kestirici değildir. f_3 kestiricisinin değışintisi az fakat oldukça yanlıdır. f_2 kestiricisi yansız olup varyansı fazladır. f_1 ise yansız olup varyansıda azdır ve bu nedenle verilen kestiriciler içinde en iyisidir.

iyi bir kestirim işlemi için $b(Q)$ ve $v(Q)$, kestirimde kullanılan veri sayısı N in artması ile sifıra gitmelidir. Bu özellik şekil (1.6.3) de bir örnekle gösterilmiştir.

Fakat bu koşullar her zaman bir arada gerçekleşmez. O zaman bir uzlaş sağlamak gerekir, buda ortalama karasel yanlış (mean square error) $MSE(Q)$

$$MSE(Q) = E\{ (Q - \theta)^2 \} = v(Q) + b(Q) \quad (1.6.3)$$

nin enküçük yapılmaya çalışılması ile elde edilir.



Şekil 1.6.3. iyi bir kestiricinin olasılık dağılımının veri sayısı ile değışimi

$G_T(f)$ işaret uzunluğu T , özilişki uzunluğu τ_{max} ve özilişki fonksiyonuna uygulanan pencere fonksiyonuna bağlıdır. Güç yoğunluğu spektrumunda pencere fonksiyonun kullanımının, yani özilişki fonksiyonun doğrudan değilde önce pencere fonksiyonu ile çarparak Fourier dönüşümü almanın en önemli gerekçesi kestirim değişintisinin azalmasıdır. Ancak bu kestirim yanlışlığını arttırmaktadır, bu nedenle uygulamada hem kestirim yanlışlığı, hem de kestirim varyansının azalması çatışan istekler olmaktadır.

1.6.1. Frekans Seçilebilirliği

Uygulamadaki pencereler, güç yoğunluğu spektrumu hesaplarında pencerelerin frekans ayırılabilirliğine etkisini gösterecek kadar çoktur. Bu pencerelerin zaman ve frekans ortamındaki görünüşleri şekil 1.6.4 de gösterilmiştir.

Güç yoğunluğu spektrumu hesaplamasında frekans seçilebilirliğinin bilinmesi oldukça önemlidir. Spektrumda frekans ayırılabilirliği, kullanılan pencerenin biçimine ve uzunluğuna bağlıdır. Pencerenin uzunluğu özilişki fonksiyonunun uzunluğu τ_{max} a eşittir.

Her tür pencere için $v\{G_T(f)\}h = \text{sabit}$ dir. Burada h bant genişliğidir. Zaman ortamında kullanılan pencereler frekans ortamında spektrumun yuvarlatılmasına ve frekans seçiciliğinin azalmasına neden olmaktadır. Bant genişliği h doğrudan frekans seçiciliğini vermektedir, yani spektrumda aralarında h ve daha büyük uzaklık bulunan bileşenler birbirlerinden bağımsızdır, diğer bir deyişle spektrumda bulunan iki spektral doruğun ayrılabilmesi için aralarındaki uzaklık h veya daha büyük olmalıdır.

BÖLÜM 2

2.1. AR MODELİ ve ÖZELLİKLERİ

Bir verinin bir anındaki değeri geçmişteki değerlerine bağlı kalıyorsa AR (autoregressive) işlemlerle taslaklanabilir. $u(n)$ işaretinin AR taslağı ile gösterilimi şu şekilde yapılır:

$$u(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + \dots + a_M u(n-M) + v(n) \quad (2.1.1)$$

Bu taslağa göre $u(n)$ verisinin n anındaki değeri $u(n)$ verisinin $n-1$ den $n-M$ ye kadar geçmiş zamanlarda oluşan M tane değerinin M sayıda ak katsayısı ile çarpımlarının toplanması ve buna beyaz gürültü $v(n)$ nin eklenmesi ile oluşmaktadır. Burada $v(n)$ sıfır ortalamalı, σ^2 varyanslı beyaz gürültü işlemidir.

$$E[v(n)] = 0 \quad \text{tüm } n \text{ ler için} \quad (2.1.2)$$

$$E[v(n)v^*(k)] = \begin{cases} \sigma^2, & k=n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$u(n)$ verisinin n anındaki değeri verinin geçmişteki değerlerine bağlıdır. Verinin geçmişteki değerlerinin n anındaki değeri ne ölçüde etkilediği ak değerlerine ve ak nin toplam sayısı M ye de bağlıdır. M AR olayın derecesi (veya ak süzgecinin boyu) olarak adlandırılır. Genel bir yazılım ile şu şekilde ifade edilebilir:

$$u(n) = \sum_{k=1}^M a_k u(n-k) + v(n) \quad (2.1.3)$$

Burada ak bir süzgeç görevini görmekte ve verinin geçmiş değerlerini süzerek n anındaki değerini vermekte, yani verinin geçmişini kullanarak, geleceğini belirlemektedir.

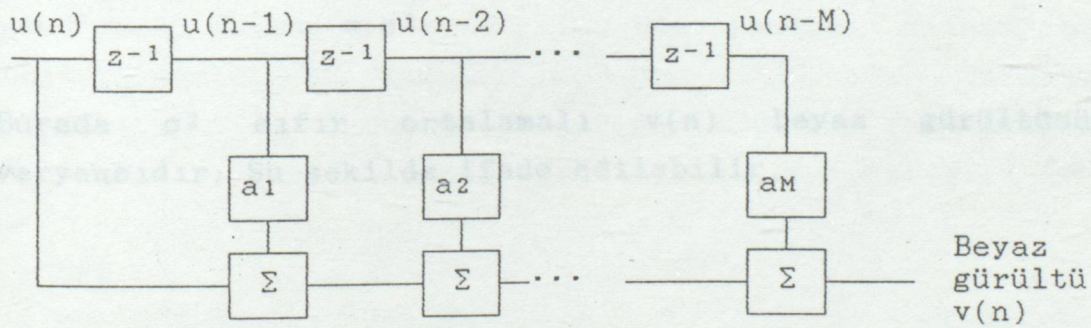
Bu yüzden ak bir önkestirme süzgeci (prediction filter) olarak adlandırılmaktadır. AR taslağı bir önkestirme taslaklaması olarak incelendiğinde verinin geçmiş değerlerinin ak ile konvolüsyonu sonucu bir değer oluşmakta, ancak bu değer yanlışlı olmaktadır. $v(n)$ nin de taslağa eklenmesi ile n anındaki gerçek $u(n)$ değeri elde edilir. Bu anlamda $v(n)$ önkestirmenin yanlışlığıdır (prediction error). Önkestirme süzgecinin, yani diğer anlamda AR taslağın katsayıları ak ların eldeki $u(n)$ verisinden hareketle en iyi biçimde saptanması kestirme yanlışlığı $v(n)$ ve bunun bir ölçüsü olan yanlışlı varyansı,

$$P = \sum_{n=1}^N v(n)^2 = \sum_{n=1}^N (u(n) - \sum_{k=1}^M a_k u(n-k))^2 \quad (2.1.4)$$

nin enküçüklenmesi ile olanaklı olacaktır. P nin enküçüklenmesine bağlı olarak a_j ler önkestirme yanlışlı süzgeci (prediction error filter) olarak adlandırılır.

Şekil (2.1.1.a) da AR işleminin analizi ve (2.1.1.b) de AR üretici sayısal filtreler ile gösterilmiştir.

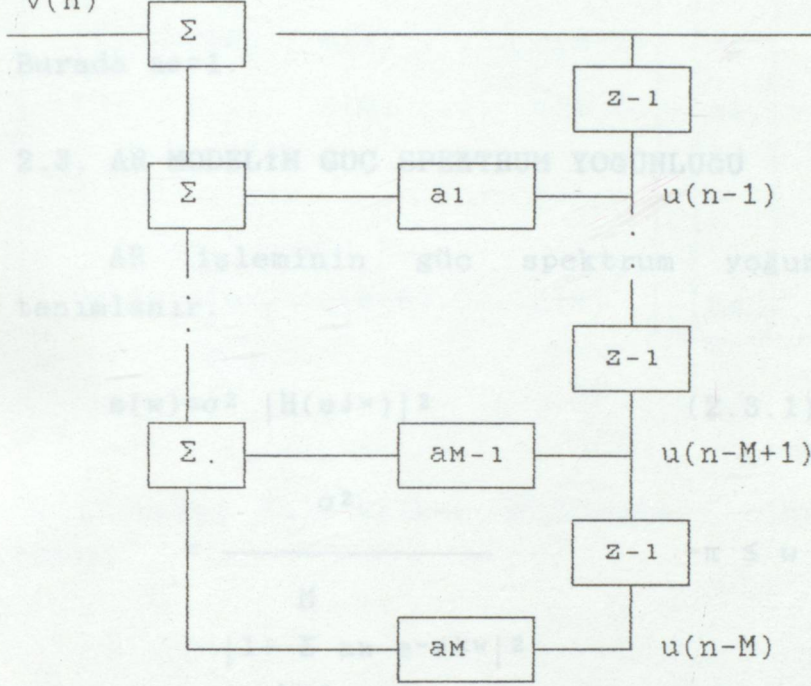
AR işlemi



Şekil 2.1.1.a AR işlemi analizi

Beyaz
gürültü
işlemi
 $v(n)$

$u(n)$ AR işlemi



şekil 2.1.1.b AR işlemi üreticisi

2.2. BEYAZ GÜRÜLTÜNÜN VARYANSI

$$E[v(n)u(n)] = E[v(n)v(n)] \quad (2.2.1)$$

$$= \sigma^2$$

Burada σ^2 sıfır ortalamalı $v(n)$ beyaz gürültüsünün varyansıdır. Şu şekilde ifade edilebilir.

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^M a_k c(k) \quad (2.2.2)$$

Burada $a_0=1$.

2.3. AR MODELİN GÜÇ SPEKTRUM YOĞUNLUĞU

AR işleminin güç spektrum yoğunluğu şu şekilde tanımlanır.

$$s(w) = \sigma^2 |H(e^{jw})|^2 \quad (2.3.1)$$

$$= \frac{\sigma^2}{|1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-jk\omega}|^2} \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

2.4. AR KATSAYILARIN HESAPLANMASI

2.4.1. Yule-Walker Algoritması

AR katsayıları a_j lerin bir önkestirme süzgeci olarak görülmesi durumunda $v(n)$ nin bir yanılgi dizisi olduğu belirtilmişti. AR taslağının katsayıları veya önkestirme süzgeci a_j , PM i en aza indirecek biçimde saptanmalıdır. Buna göre a_j ye göre kısmi türevleri sıfır olmalıdır.

$$\frac{\delta P_M}{\delta a_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, M \quad (2.4.1.1)$$

$$\frac{\delta P_M}{\delta a_k} = \sum_{n=1}^N 2 [u(n) - \sum_{j=1}^M a_j u(n-j)] u(n-k) = 0 \quad (2.4.1.2)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemin çözümü bizi şu matrise

götürür. Durbin-Levinson Algoritması:

$$\begin{bmatrix} c(0) & c(1) & c(2) & \dots & c(m-1) \\ c(1) & c(0) & c(1) & \dots & c(m-2) \\ c(2) & c(1) & c(0) & \dots & c(m-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(m-1) & c(m-2) & c(m-3) & \dots & c(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(1) \\ c(2) \\ c(3) \\ \vdots \\ c(m) \end{bmatrix}$$

$$C \cdot a = Y \quad (2.4.1.3)$$

Bu ifadeler Yule-Walker denklemleri olarak adlandırılır. ve çözümü,

$$a = C^{-1} Y \quad (2.4.1.4)$$

Bu denklemlerde kullanılan özilişki fonksiyonu $c(k)$ önceden tanımlandığı gibi,

$$c(k) = \sum_{n=1}^{N-k} u(n) u(n-k) \quad \text{dir.} \quad (2.4.1.5)$$

Özilişki matrisi C asıl köşegene göre simetriktir, yani Töplitz matrisi tanımlamasına uyar. Töplitz matrisine uyan denklem dizileri Levinson tarafından geliştirilen algoritma ile tekrarlamalı olarak kolayca çözülebilir ve AR katsayıları a_j ler bulunur.

2.4.2. Durbin-Levinson Algoritması

(2.4.1.3) denkleminde bilinmeyen süzgeç katsayıları $a_1, a_2, \dots$ am bilinen özilişki matrisi C ve Y den hesaplanır. C matrisi simetrik olduğundan

$$a^T C = Y$$

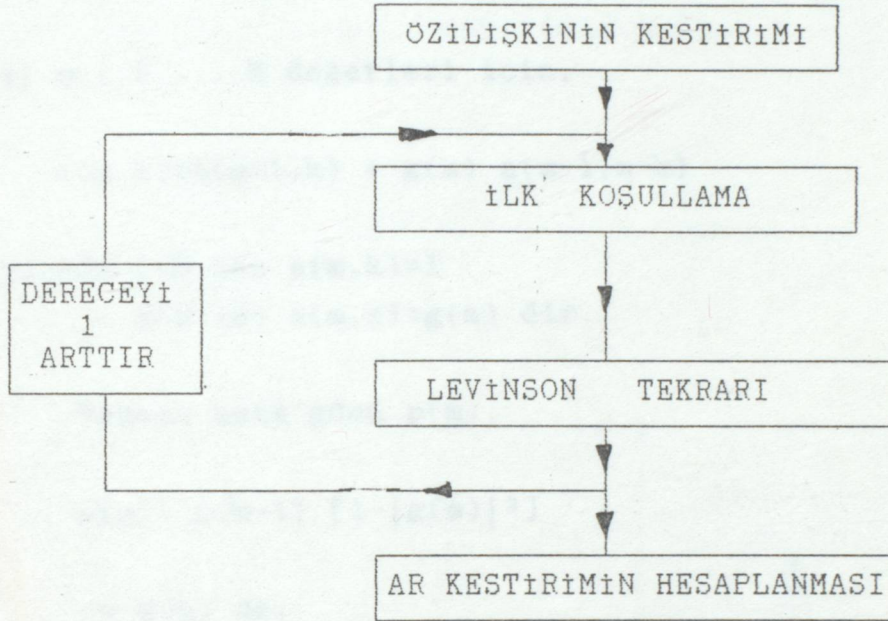
biçiminde yazılabilir.

a_j katsayılarının hesabı için soldaki özilişki matrisinin tersi C^{-1} i bulmak gerekir. Süzgeç boyu M büyük olduğunda alışlagelmiş yöntemlerle süzgeç katsayılarının hesabı için gerekli bilgisayar zamanı katsayı sayısının kübüyle orantılıdır.

Levinson un önerdiği ve daha sonra geliştirilen tekrarlamalı yöntemle bu oran katsayı sayısının karesine kadar indirgenmiştir. Tekrarlamalı yöntem özilişki matrisinin bütün köşegenleri boyunca elemanların eşit olmasından yararlanarak uygulanır. Gerçekte bir kare matris olan C_m nin M^2 değil sadece özilişki katsayıları $c(0), c(1), c(2), \dots, c(m-1)$ den oluşan M seçkin elemanı vardır.

Aşağıda gösterildiği gibi $m=0$ dan $m=M$ e kadar katsayılar hesaplandığında $m+1$ inci adımdaki katsayıların bunlardan nasıl hesaplanacağı gösterilecektir. $m+1$ katsayının hesabı için $m=0$ ilk adım, $m=M$ son adım olacaktır. Takılardan ilki adım sayısını gösterir. ikincisi ise o elemanın, gösterilen numaralı katsayısıdır. Örneğin $m=M$ son adımda ise $a(m,0)=a(M,0)$ aranan $a(0)$ katsayısıdır. Her adımda süzgeç boyuna bağlı yanılgi hesaplanabildiğinden, istenildiğinde süzgeç boyunu sabit alma yerine yanılgi belirli bir düzeye ulaştığında tekrarlama işlemi durdurulabilir. Bunun için ya belirli sınır değerler alınır veya süzgeç boyu uzadıkça sağlanan yanılgi azalması önemli olmadığında işlemler durdurulur.

Algoritma şu şekilde özetlenebilir:



Şekil 2.4.2.1. Durbin-Levinson Algoritması

Burada hesaplanmak istenen filtre katsayıları $a(m,k)$ lardır ($k=0,1,2,\dots,M$ olmak üzere). $p(m)$ lerde tahmin hata gücü olarak isimlendirilir.

1) Özilişki katsayıları daha önce verilen formda hesaplanır.

$$c(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{n=1}^{N-k} u(n) u(n-k) \quad k=0,1,\dots,M \quad (2.4.2.6)$$

2) ilk koşullama için şu şekilde başlangıç değerleri belirlenir.

$$a(0,0)=1, \quad p(0)=c(0), \quad g(0)=1$$

3) $m=1,2,\dots,M$ değerleri için,

$$a(m,k)=a(m-1,k) + g(m) a(m-1,m-k) \quad (2.4.2.7)$$

burada $k=0$ ise $a(m,k)=1$

$k=m$ ise $a(m,k)=g(m)$ dir.

Tahmin hata gücü $p(m)$,

$$p(m)= p(m-1) [1-|g(m)|^2] \quad (2.4.2.8)$$

ve $g(m)$ de,

$$g(m)= - \frac{1}{p(m-1)} \sum_{k=0}^m a(m-1,k) c(m-k) \quad (2.4.2.9)$$

olarak tanımlanır.

4) Bulunan $a(m,k)$ değerleri, m inci adımda bulunan filtrenin ak değerleridir. Bu değerler (2.3.1) denkleminde yerine konarak, güç spektrum yoğunluğu çıkartılır.

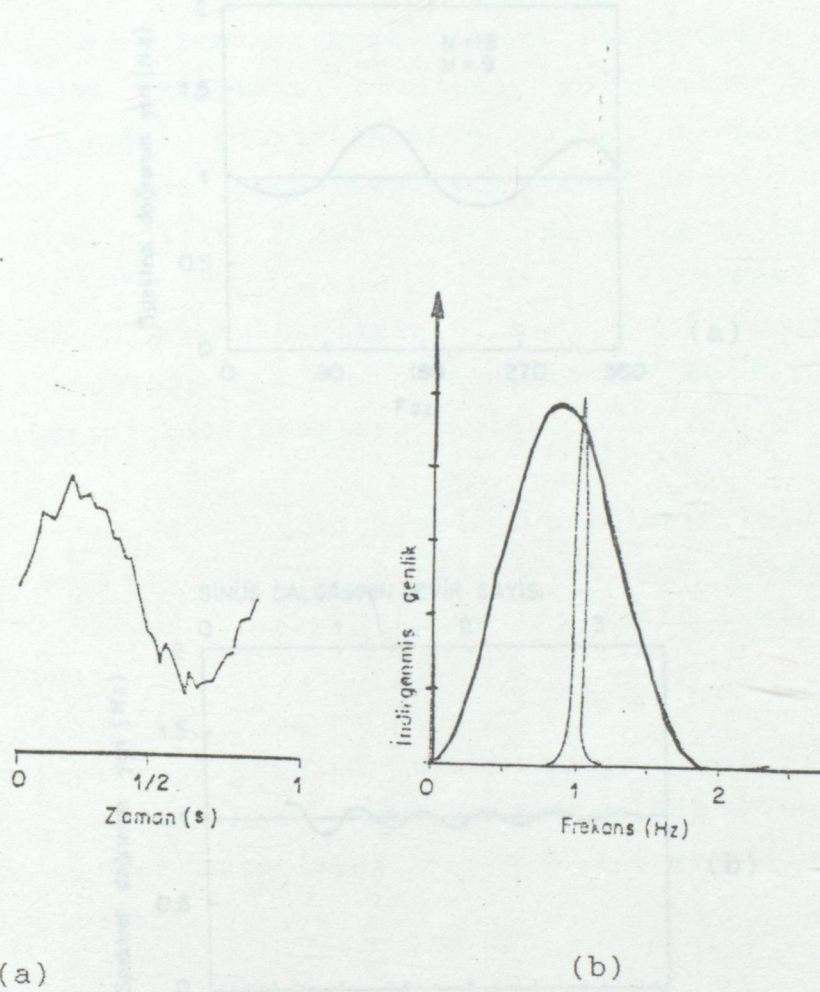
2.5. AR KESTİRİMİN FREKANS SEÇİLEBİLİRLİĞİ, VERİ BOYU ve FAZ ETKİSİ

2.5.1. Frekans Seçilebilirliği

AR taslaklama özellikle kısa zaman dilimleri için diğer yöntemlere oranla çok üstün gözükmetedir. Bir - iki bileşenli işaretler için ayırım gücünün $\delta f = 0.4/T$ dolayında olmasına karşın (T dizinin boyu, δf frekans ayırımı) daha

karmaşık işaretler için δf büyümekte, yani ayırım azalmaktadır.

Orta derecede denebilecek gürültüler spektrumun niteliğini fazla etkilemezken, fazla gürültü geçerli bir spektrum hesaplamasını engellemektedir.

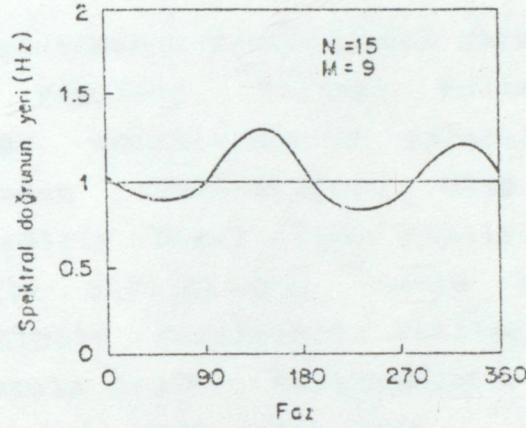


Şekil 2.5.1.1. (a) Bir periyodluk gürültülü sinusoidal veri (b) Fourier spektrumu (geniş) ve AR spektrumu (dar)

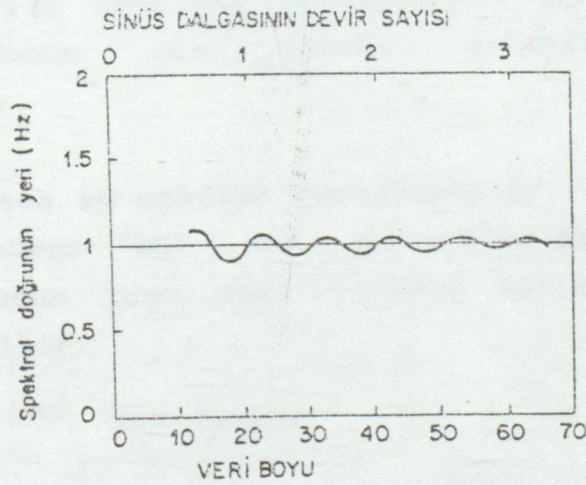
2.5.2. Veri Boyu ve Faz Etkisi

İyi bir spektrumdan saptanan frekansın veri şekil (2.5.2.1) de görüldüğü gibi verinin boyuna bağlı olarak yakınsak periyodik ve verinin fazına bağlı olarak da

periyodik biçimde değişmektedir. Hesaplanan frekansın yeri gerçek frekansın etrafında her bir periyotluk veri boyu için yaklaşık iki salınım yapmakta ve veri boyu uzadıkça bu salınım genliği azalmaktadır. Ancak bu olayın alışılmış Fourier yöntemlerinde de olduğu bilinmektedir.



(a)



(b)

Şekil 2.5.2.1. 1 Hz lik sinusoidal verinin AR spektrumunda doruk frekans yerinin (a) faza (b) veri boyuna göre değişimi

BÖLÜM 3

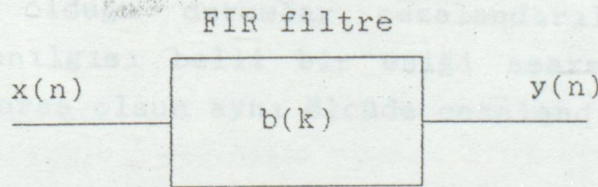
3.1. ML (Maximum Likelihood) MODELİ ve ÖZELLİKLERİ

ML kestirimi ilk olarak Fischer tarafından önerilmiş ve geliştirilmiştir. Kuramsal olarak oldukça açık ve uygulamaya yatkındır.

ML kestirim yönteminde kestirilecek parametreye ilişkin hiçbir varsayım yapılmaz. Halbuki kullanılan kestirim yöntemlerinin çoğu, kestirilmesine çalışılan parametreye ilişkin bir takım istatistiksel bilgilerin önceden verileceği kabul edilir. Doğal olarak kestirilecek parametre hakkındaki bu tür önbilgilerin hesaba katılması yarar sağlar. Ancak hiçbir önbilginin verilmediği durumlarda algoritmalar gereksiz biçimde karmaşıklaşır. Bu durumda ML kestirim yöntemini kullanmak uygun olur.

ML nin radar, sonar gibi kestirim problemlerinde yaygın kullanımına karşın spektrum kestiriminde pek uygulamasına rastlanmaz. Bunun bir sebebi yeterli ayrımlılık sağlayamamasıdır.

Yöntem kabaca şu şekilde özetlenebilir: Amaç $S_x(w)$ güç spektrumunu sadece bir tek w noktasında kestirmeye çalışmaktır. Bunun için $x(n)$ rasgele işareti lineer bir filtreden geçirilir.



$$y(n) = \sum_k b(k) x(n-k)$$

şekil 3.1.1. ML spektrum kestiriminin temel yapısı

Burada $b(k)$ lar filtre katsayılarıdır ve öyle belirlenir ki çıkışın ortalama gücü en az yapılırken, $B(w)=1$ olsun. Yani w frekansında bir zayıflatma olmasın ve diğer tüm bileşenler bastırılsın.

ML spektrum kestirimi ve BT (Blackman-Tukey) spektrum kestirimi arasındaki fark, ML spektrum kestiriminde darbandlı filtrelerin şekli genelde herbir frekans için farklıdır. Halbuki BT yönteminde filtreler sabittir.

3.1.1. Bayes Kestirim Kuralı

Gürültü rasgele bir değişken olduğundan, kestirim yanılgısı e nin dolayısıyla $c(e)$ nin (kestirim yanılgısının fonksiyonu olan bir ceza fonksiyonu) istatistiksel yapısı bilinebilir. Bu durumda tek bir yanılga değerinin belirlediği bir cezayı enküçültmek yerine, raslanabilecek tüm yanılgıların ortalaması enküçültülür. Beklenen cezaların ortalamasına Bayes Riski (R_{BAYES}) adı verilir. Bu riski enküçültecek biçimde tasarımılanan kestiriciye de Bayes Kestirici denir.

$$e = z - z^{\sim} \quad (3.1.1.1)$$

$$R_{BAYES} = E [c(e)] = \text{enküçük} \quad (3.1.1.2)$$

Bu ceza fonksiyonuna göre kestirim değerinin gerçek değere çok yakın olduğu durumlar cezalandırılmaz. Öte yandan kestirim yanılgısı belli bir eşiği aşarsa ($|e| > \Delta/2$) aşma oranı ne olursa olsun aynı ölçüde cezalandırılır:

$$c(e) = \begin{cases} 0 & |z - z^{\sim}| < \Delta/2 \\ 1 & |z - z^{\sim}| > \Delta/2 \end{cases}$$

Bu ceza fonksiyonun kullanılmasındaki amaç kestirim değerinin kesinlikle gerçek değerle çakışmasını sağlamaya

çalışmaktır. Gerçek değere yakın yada uzak bir kestirim yapılmış olması önemli değildir. Amaç gerçek değeri tam olarak bulmak yada hiç bulmamaktır. Eğer hedeften bir sapma olursa bu sapmanın boyu ne olursa olsun önemi aynıdır.

Bayes Riski aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$R_{Düz} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \int_{z-/\sqrt{2}}^{z+/\sqrt{2}} p(z|R) dz\right) p(R) dR \quad (3.1.1.3)$$

ifadeden de anlaşılabacağı gibi, bu riskin enküçültülmesi $p(z|R)$ fonksiyonunun enbüyük değerinin seçilmesi ile sağlanır.

3.1.2. ML Kestirimi

Yukarıda anlatılan yöntemde güç olan kısım $p(z|R)$ fonksiyonunun hesaplanmasıdır. Özellikle bunun türetiminde gerekli olan $p(z)$ genelde bilinmez. Bu durumda yapılacak olan, yöntemin daha uygulanabilir şekle getirilmesidir. Bu yolla ortaya çıkan yöntem de ML yöntemidir.

Maksimum yapılacak ifade aşağıdaki gibi açılır.

$$\text{Enbz } p(z|R) = \text{Enbz} \left(\frac{p(R|z) p(z)}{p(R)} \right) \quad (3.1.2.1)$$

Logaritma tekdüze artan bir fonksiyon olduğundan $p(z|R)$ yerine $\ln p(z|R)$ i maksimum yapmak aynı sonucu verir.

$$\text{Enbz } \ln p(z|R) = \text{Enbz} (\ln p(R|z) + \ln p(z) - \ln p(R)) \quad (3.1.2.2)$$

Burada logaritma kullanılmasının nedeni, olasılık dağılımlarının üssel ifade edildiği durumlarda, bunun

hesapları geniş ölçüde kolaylaştırmasıdır. Bu ifadeye Log-Likelihood fonksiyonu adı verilir. Seçilen taslağa göre değeri. Sonuçta elde edilen spektrumun yakın olup olmaması da Log-Likelihood fonksiyonunun enbüyük değeri türevinin sifıra eşitlenmesi ile bulunur: akeb edılır.

$$\frac{\delta \ln p(z|R)}{\delta z} = \frac{\delta \ln p(R|z)}{\delta z} + \frac{\delta \ln p(z)}{\delta z} - \frac{\delta \ln p(R)}{\delta z} = 0$$

Bu ifade de $p(R)$, den bağımsız olduğu için son terim sifirdır. Bilir. Cramer-Rao altınurı adı ile bilinen bu

Öte yandan, z nin olasılık dağılımına ilişkin önceden hiçbir bilgi verilmemişse, z nin alabileceği her değerin olasılığı eşit varsayılır, yani $p(z)=sbt.$ ve türevi de sifır olur. ifade de şu hale gelir:

$$\frac{\delta \ln p(z|R)}{\delta z} = \frac{\delta \ln p(R|z)}{\delta z} = 0 \quad (3.1.2.4)$$

Elde edilen bu kestirim kuralına ML kestirimi adı verilir.

3.2. ML YÖNTEMİ İLE SPEKTRUM KESTİRİMİ

Önceki bölümde de incelendiği gibi ML yöntemi eldeki veri dizisini en olası kılacak parametrelerin seçilmesidir. Belli bir kaynak taslağı varsayımı altında veri ile spektrumu arasında bir bağ kurulması gerekir. Özellikle beyaz gürültü için spektrum ile veri arasında oldukça yalın bir koşullu olasılık ilişkisi vardır. Yani, frekans bileşenleri bilindiğinde belli bir veri dizisinin olabilirliği koşullu olasılık cinsinden yazılabilir. ML yöntemi ile spektrum kestirimi ise frekans bileşenlerinin bu fonksiyonu maksimum yapacak şekilde seçilmesi anlamına gelir.

ML kestirimde uygulanacak yöntem seçilen taslağa göre değişir. Sonuçta elde edilen spektrumun yetkin olup olmaması da taslak varsayımının gerçekçi olmasına bağlıdır. Genelde beyaz gürültü varsayımından hareket edilir.

3.3. KESTİRİM VARYANSININ ALTSINIRI

ML yönteminin ilginç yönlerinden bir tanesi de kestirim hatasının Gauss dağılımına sahip olduğunun bilinmesidir. Ayrıca bu Gauss dağılımının kestirilecek parametreye merkezlenmiş olduğu, varyansının da bir alt sınırı olduğu gösterilebilir. Cramer-Rao altsınırı adı ile bilinen bu bağıntı ile ML yöntemi ile yapılan bir kestirimin güvenilirliği hakkında bilgi edinilebilir. Ancak bu alt sınırın hesaplanması tek sinüs taslağı dışındaki durumlarda pek kolay olmamaktadır.

3.3.1. Tek Sinüs Taslağında Cramer-Rao Altsınırı

ML yöntemin de hata varyansı için şu eşitlik geçerlidir.

$$\sigma^2 = \text{var}(z - \tilde{z}) \geq J_{i,i} \quad (3.1.3.1)$$

Burada $J_{i,i}$ aşağıda tanımlanan Bili Matrisi nin evriğinin ögeleridir. Bilinmeyenler aşağıdaki biçimde olacak şekilde seçilirse,

$z_1 = \text{Genlik (A)}$

$z_2 = \text{Açısal frekans (w)}$

$z_3 = \text{Faz } (\phi)$

tek sinüs taslağı kullanılacak olursa, Bili matrisi şu şekilde oluşturulur.

$$B = E \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta z_1 \delta z_2} & \frac{\delta^2 L}{\delta z_1 \delta z_2} & \dots & \frac{\delta^2 L}{\delta z_1 \delta z_k} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta z_2 \delta z_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta z_2 \delta z_2} & \dots & \frac{\delta^2 L}{\delta z_2 \delta z_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta z_k \delta z_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta z_k \delta z_2} & \dots & \frac{\delta^2 L}{\delta z_k \delta z_k} \end{bmatrix} \quad (3.1.3.2)$$

Burada E beklenti fonksiyonu, z_i de kestirilmeye çalışılan i ninci parametredir.

Log-likelihood fonksiyonunun kullanılması ile Bili matrisi elemanları için şu bağıntı yazılır:

$$b_{ij} = E \left\{ \frac{\delta A \sin(wt_n + \phi)}{\delta z_i} \frac{\delta A \sin(wt_n + \phi)}{\delta z_j} + \frac{\delta A \cos(wt_n + \phi)}{\delta z_i} \frac{\delta A \cos(wt_n + \phi)}{\delta z_j} \right\}$$

(3.1.2.3)

Sonuçta Bili matrisi bulunur.

$$B = \begin{bmatrix} N & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & A^2 \sum_{n=0}^{N-1} (t_0 + t_n)^2 & A^2 \sum_{n=0}^{N-1} (t_0 + t_n) \\ \emptyset & A^2 \sum_{n=0}^{N-1} (t_0 + t_n) & A^2 N \end{bmatrix}$$

(3.1.2.4)

Bu matris ters çevrilir ve örneklemenin başlangıç zamanı $t_0=0$ varsayılırsa aşağıdaki ters Bili matrisi elde edilir.

$$J=B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_e^2}{N} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{12 \sigma_e^2}{A^2 / t^2 N(N-1)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{12 \sigma_e^2 N(2N-1)}{A^2 N^2(N+1)} \end{bmatrix}$$

(3.1.2.5)

Bu matriste $J_{2,2}$ elemanı frekans kestirim varyansının altsınırını verir.

$$\text{var}(w - \tilde{w}) \geq \frac{12 \sigma_e^2}{A^2 (\Delta t)^2 N (N^2 - 1)} \quad (3.1.2.6)$$

Bu ifadeden görüleceği gibi, ML yöntemi ile frekans kestiriminde hatanın varyansının bir altsınırı vardır, bu altsınır fazdan bağımsız ve veri sayısı ile karmaşık bir biçimde ters orantılıdır.

3.4. BİR AR PROSESİN GERİYE DÖNÜŞLÜ ML KESTİRİMİ (RML) ve ALGORİTMASI

Bu bölümde AR parametre kestirimi için değişik bir yöntem kullanılacaktır. Bu yöntem gerçek ML kestirimine, daha önceden bilinen lineer tekniklerden daha iyi sonuç vermektedir. Bu algoritmanın avantajı temel olarak, kısa veri yazılımları ve şiddetli zayıflayan spektrumlar için iyi sonuçlar vermesidir.

3.4.1. Giriş

Şimdiye kadar kullanılan tüm AR parametre kestirimleri ML kestirimine yapılan yaklaşımlardır. Parametre kestirimi için ML nin kullanımı, minimum varyans özelliğini temel alarak, büyük veri uzunlukları için düzenlenebilir. Daha kısa veri uzunlukları için AR parametrelerin ML kestiriminin daha düşük sınırlı Cramer-Rao ya ulaşamayacağı bilinir. AR parametreleri için gerçek ML kestiriminin hesaplanması zor bir maksimizasyon problemidir. Hesaplaması kolay olan bir AR kestirimi elde etmek için yaklaşımlar yapılır.

Şimdi p ninci dereceden sıfır ortalımalı Gaussian AR X_t işlemini düşünelim. Eğer,

$X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$ ifade edilirse olasılık yoğunluk

fonksiyonu,

$$p(X|a, \sigma_e^2) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |C|^{1/2}} \exp(-1/2 X^T R^{-1} X) \quad (3.4.1.1)$$

Burada $a=[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p]^T$ AR filtre katsayı vektörü, $R=E[XX^T]$ kovaryans matrisidir. a nın gerçek ML kestirimi σ_e^2 dir ve $p(X|a, \sigma_e^2)$ nin maksimizasyonu ile bulunur. Yada buna eşdeğer olarak a , σ_e^2 ye göre $\ln p(X|a, \sigma_e^2)$ den bulunur. (3.4.1.1) de σ_e^2 den a yı ayırmakla, özilişki fonksiyonunun,

$$C(k) = E[X_t X_{t+k}] \text{ ve} \\ C(k) = \sigma_e^2 C_f(k) \quad (3.4.1.2)$$

yazılabileceği görülür. $C_f(k)$, filtre özilişki fonksiyonudur ve şu şekilde tanımlanır.

$$C_f(k) = Z^{-1} \left[\frac{1}{A(z) A(z^{-1})} \right]$$

Burada Z^{-1} , ters Z dönüşümünü gösterir. Ve $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k Z^{-k}$

(3.4.1.2) denklemi (3.4.1.1) denkleminde kullanılarak,

$$p(x|a, \sigma_e^2) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sigma_e^2 |C_f|^{1/2}} \exp[-1/(2\sigma_e^2) X^T C_f^{-1} X] \quad (3.4.1.3)$$

Burada $|C_f|_{ij} = C_f(i-j)$ $i, j = 1, 2, \dots, N$ ve C_f sadece filtre parametrelerine bağlıdır.

Eğer ilk maksimizasyon σ_e^2 ye göre $\ln p$ olursa şunu elde ederiz.

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N} X^T C_f^{-1} X \quad (3.4.1.4)$$

(3.4.1.4) de verilen σ_e^2 , ML kestirimi olmalıdır. Eğer C_f , AR filtre parametrelerinin ML kestiriminin terimlerinde ML ile tekrar yerleştirilirse, yani (3.4.1.4) (3.4.1.4) içine yerleştirilir. Şimdi en büyüğü elde etmeye ihtiyacımız var. Buda aşağıdaki denkleminin maksimum yapılması ile elde edilir.

$$l' = \frac{|C_f^{-1}|^{1/N}}{1/N X^T C_f^{-1} X} \quad (3.4.1.5)$$

Her zamanki yaklaşımla $|C_f^{-1}|$ faktörü ihmal edilir ve $1/N X^T C_f^{-1} X$ e yaklaşımla küçülür. Büyük N değerleri için bu yaklaşım,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |C_f^{-1}|^{1/N} = 1 \quad (3.4.1.6)$$

oluncaya kadar geçerlidir.

Bununla birlikte küçük N değerleri için bu yaklaşım iyi değildir. 1 inci dereceden bir AR işlemini ele alalım. Buradan,

$$C_f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1+a_1^2 & a_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & 1+a_1^2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_1 & 1+a_1^2 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.1.7)$$

Buradan kolaylıkla görülebilirki,

$$|C_f^{-1}| = 1 - a_1^2 \quad (3.4.1.8)$$

böylece

$$|C_f^{-1}| = (1 - a_1^2)^{1/N} \quad (3.4.1.9)$$

Açıkça görülür ki $N \rightarrow \infty$ a giderken (3.4.1.9) denklemi a_1 in değeri ne olursa olsun 1 e yaklaşır. Sonlu data uzunluğunda bu yaklaşımın geçerli olabilmesi için $|a_1|$, 1 e giderken N in daha büyük olması gerekir. Şuda belirtilmelidir ki $|a_1|$ 1 e giderken güç spektral yoğunluğu daha keskin bir şekilde zayıflar.

Doğrudan (3.4.1.5) maksimum yapılmak istenirse lineer olmayan bir optimizasyon programı kullanılmalıdır. Tekrar AR(1) işlemini düşünelim. Daha sonra (3.4.1.7) ve (3.4.1.9) un (3.4.1.5) içinde kullanılması ile en büyük değer bulunmuş olur.

$$(1 - a_1^2)^{1/N}$$

$$\frac{1}{N} (S_{00} + 2a_1 S_{01} + a_1^2 S_{11})$$

N

N-1

N-2

$$\text{burada } S_{00} = \sum_{t=1}^N X_t^2, \quad S_{01} = \sum_{t=1}^{N-1} X_t X_{t+1}, \quad S_{11} = \sum_{t=1}^{N-2} X_{t+1}^2$$

t=1

t=1

t=1

3.4.2 Algoritmanın Oluşturulması

(3.4.1.5) denkleminin maksimizasyonu sonucu $l = -N \ln l'$ dür. Burada

1

$$l = -N \ln \frac{1}{N} X^T C_f^{-1} X + \ln |C_f^{-1}| \quad (3.4.2.1)$$

N

X_t nin bir AR(n-1) işlemi olduğunu düşünelim ve $a_i(j)$ de j ninci dereceden bir model için i ninci AR parametresidir. Levinson-Durbin algoritması ile a_n i a_{n-1} in terimleri ile ifade edebiliriz.

$$a_i(n) = \begin{cases} a_i(n-1) + K_n a_{n-i}(n-1) & i=1, 2, \dots, n-1 \\ K_n & i=n \end{cases} \quad (3.4.2.2)$$

Böylece $\ln$ (n model derecesidir) sadece K_n e bağlıdır. K_n n inci yansıma katsayısıdır. (3.4.2.2) kullanılarak ve K_n e göre maksimizasyon yaparak a_n üretilebilir. Ve tekrar geriye dönerek likelihood fonksiyonu maksimize ederiz. Model dereceleri $n=1, 2, \dots, p$ için AR parametreleri kestirilir. Böylece,

$$\ln = -N \ln \frac{1}{N} X^T C_{fn-1} X + \ln |C_{fn-1}| \quad (3.4.2.3)$$

Bir AR(n) işlemi için

$$B^T C B = P \quad (3.4.2.4)$$

burada,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a_1(1) & a_2(1) & \dots & a_n(1) & \emptyset & \emptyset \dots \emptyset \\ \emptyset & 1 & a_1(2) & \dots & a_{n-1}(2) & a_n(2) & \emptyset \dots \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \emptyset & \emptyset & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (N \times N)$$

$$P = \text{diag}(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n, P_n, \dots, P_n) \quad (N \times N)$$

ve P_i i ninci dereceden kestirici için önceden bilinen hata gücüdür ve $P_n = \sigma_e^2$ dir. $|B|=1$ oluncaya kadar (3.4.2.4) den

$$P_i = C(\emptyset) \prod_{j=1}^i (1 - K_j^2), \text{ etkisi kullanılarak,}$$

$$j=1$$

$$|C_{fn-1}| = (1 - K_n^2)^n |C_{fn-1-1}| \quad (3.4.2.5)$$

Ve şunu belirtelim ki,

$$\epsilon_n = X^T C_{fn-1} X = a'^n T S_n a^n \quad (3.4.2.6)$$

Burada $a^n = [1 \ a_1(n) \ a_2(n) \ \dots \ a_n(n)]^T$ dir.

$$N-i-j$$

$$[S_n]_{ij} = S_{ij} = \sum_{t=1}^{N-i-j} X_{t+i} X_{t+j} \quad i=0,1,\dots,n \quad j=0,1,\dots,n$$

S_n bir simetrik matristir. Burada belirtilmelidir ki bundan sonra geçecek olan ϵ_{n-1} , ζ_n , d_n K_n e bağlı değildir. Aynı zamanda ϵ_n/N ve d_n/N sırasıyla ileri ve geriye doğru tahmin edilen hata güçlerinin kestirimi olarak bilinir. Bunlar hakkında daha geniş bilgi [3] den elde edilebilir. Yeni tanımlamalar sonucu,

$$\ln = -N \ln \frac{1}{N} (\epsilon_{n-1} + 2\zeta_n K_n + d_n K_n^2) + \ln |C_{fn-1}^{-1}| + n \ln(1 - K_n^2)$$

N

(3.4.2.7)

Böylece $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ kestirilmiş olduğu farzedilmiştir. K_n ile ilgili olarak $\ln$ in maksimizasyonu için $\delta \ln / \delta K_n$ i sıfıra eşitleyeceğiz.

$$K_{n3} + \frac{(N-2n)\zeta_n}{(N-n)d_n} K_{n2} - \frac{n\epsilon_{n-1} + Nd_n}{(N-n)d_n} K_n - \frac{N\zeta_n}{(N-n)d_n} = 0 \quad (3.4.2.4)$$

K_n yukarıdaki denklemden kestirilir. σ_{ϵ}^2 de şu şekilde kestirilir.

$$\sigma_{\epsilon}^2(n) = 1/N \epsilon_n$$

$$= 1/N (\epsilon_{n-1} + 2\zeta_n K_n + d_n K_n^2) \quad (3.4.2.5)$$

Burada geçen ζ_n ve d_n değerlerinin hesaplaması oldukça zordur. Fakat [6] dan yararlanarak bir kolaylık sağlanabilir.

Algoritma şu şekilde özetlenebilir,

$$\epsilon_0 = S_{00}$$

$$n=1 \text{ için, } \zeta_1 = S_{01}, d_1 = S_{11}$$

K_1 in çözümü için,

$$K_1^3 + \frac{N-2}{N-1} \frac{\zeta_1}{d_1} K_1^2 - \frac{\epsilon_0 + Nd_1}{(N-1)d_1} K_1 - \frac{N}{N-1} \frac{\zeta_1}{d_1} = 0$$

$[-1,1]$ arasındaki köklerin seçimi,

$$a_1(1) = K_1$$

$$\epsilon_1 = S_{00} + 2K_1 S_{01} + K_1^2 S_{11}$$

$$\sigma_{e2}(1) = \frac{1}{N} \epsilon_1$$

$n=2,3,\dots,p$ için,

$$\zeta_n = a'^T T_{n-1} \begin{bmatrix} q_{T_{n-1}} & S_{0n} \\ S_{n-2} & P_{n-1} \end{bmatrix} b'^{T_{n-1}}$$

$$d_n = b'^T T_{n-1} \begin{bmatrix} S_{n-2} & P_{n-1} \\ P_{T_{n-1}} & S_{nn} \end{bmatrix} b'^{T_{n-1}}$$

K_n in çözülmesi,

$$K_n^3 + \frac{N-2n}{N-n} \frac{\zeta_n}{d_n} K_n^2 - \frac{n \epsilon_{n-1} + N d_n}{(N-n)d_n} K_n - \frac{N}{N-n} \frac{\zeta_n}{d_n} = 0$$

$[-1,1]$ arasındaki köklerin bulunması,

$$a_i(n) = \begin{cases} a_i(n-i) + K_n a_{n-i}(n-1) & i=1,2,\dots,n-1 \\ K_n & i=n \end{cases}$$

$$\epsilon_{n-1} = \epsilon_{n-1} + 2C_n K_n + d_n K_n^2$$

$$\sigma_{e2}(n) = \frac{1}{N} \epsilon_n$$

burada,

$$a'^{n-1} = [1 \ a_1(n-1) \ a_2(n-1) \ \dots \ a_{n-1}(n-1)]^T$$

$$b'^{n-1} = [a_{n-1}(n-1) \ a_{n-2}(n-1) \ \dots \ a_1(n-1) \ 1]^T$$

olarak değerlendirilecektir.

3.4.3. Kübik Köklerin Karakteri

K_n in kestirimi için (3.4.2.4) denklemi çözülmelidir. Bu eşitlik kübik bir eşitlik olduğundan 3 tane reel yada 1 tane reel ve 2 tane karmaşık kökleri vardır. $(-1,1)$ arasında en azından bir reel kökü vardır ve [3] den ispatı görülebilir.

Kökleri belirlemek için,

$$p = \frac{N-2n}{N-n} \frac{C_n}{d_n}$$

$$q = - \frac{n \epsilon_{n-1} + N d_n}{(N-n) d_n}$$

$$r = - \frac{N}{(N-n)} \frac{C_n}{d_n} \quad (3.4.3.1)$$

$$a = 1/3(3q - p^2)$$

$$b = 1/27(2p^3 - 9pq + 27r)$$

eğer $b^2/4 + a^3/27 > 0$ ise bir tane reel kökü vardır,

$$K_n = A + B - p/3$$

burada,

$$A = \left[\begin{array}{c} b \\ - \frac{b}{2} + [b^2/4 + a^3/27]^{1/2} \end{array} \right]^{1/3}$$

$$B = \left[\begin{array}{c} b \\ - \frac{b}{2} + [b^2/4 + a^3/27]^{1/2} \end{array} \right]^{1/3}$$

eğer $b^2/4 + a^3/27 \leq 0$ ise 3 tane reel kökü olacaktır ve şu şekilde bulunur.

$$K_{n1} = 2(-a/3)^{1/2} \cos \theta - p/3$$

$$K_{n2} = 2(-a/3)^{1/2} \cos (\theta + 2\pi/3) - p/3$$

$$K_{n3} = 2(-a/3)^{1/2} \cos (\theta + 4\pi/3) - p/3$$

ve

$$\cos 3\theta = 3b/[2a(-a/2)^{1/2}]$$

Bu durumda eğer $[-1,1]$ aralığına birden fazla kök düşerse,

$$f(K_n) = \frac{(1 - K_n^2)^{n/2}}{\left[\frac{1}{N} (\epsilon_{n-1} + 2C_n K_n + d_n K_n^2) \right]^{N/2}} \quad (3.4.3.1)$$

denklemini maksimize eden kök seçilir.

Ekseri durumda da 3 tane reel kökü olacak ve bunlardan sadece biri $[-1,1]$ aralığına düşer. Şimdi (3.4.2.4) denkleminin bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

1) Eğer $d_n < 0$ ise K_{n1}, K_{n2}, K_{n3} 3 reel kök olacak ve

$$\begin{aligned} -1 &< K_{n1} < 1 \\ K_{n2} &> 1 \\ K_{n3} &< 1 \end{aligned} \quad (3.4.3.2)$$

2) Eğer $d_n = 0$ ise $[-1,1]$ arasında 1 reel kök olacak ve bunun dışındada 1 kök olacak ve bu durumda (3.4.2.4) denklemi şu hale gelir.

$$K_n^2 - \frac{n}{N-2n} \frac{\epsilon_{n-1}}{C_n} K_n - \frac{N}{N-2n} = 0$$

3) Eğer $d_n < 0$ ise $[-1,1]$ arasında en az bir reel kökü olacak. Eğer bu aralıkta 1 den fazla kök varsa o zaman (3.4.3.1) i maksimize edeni seçmek gerekir. Bir ispat geçerli olmamasına rağmen elde edilen sonuçlar göstermiştir ki eğer $d_n < 0$ ise $[-1,1]$ arasında her zaman 1 reel kök ve 2 karmaşık kök vardır.

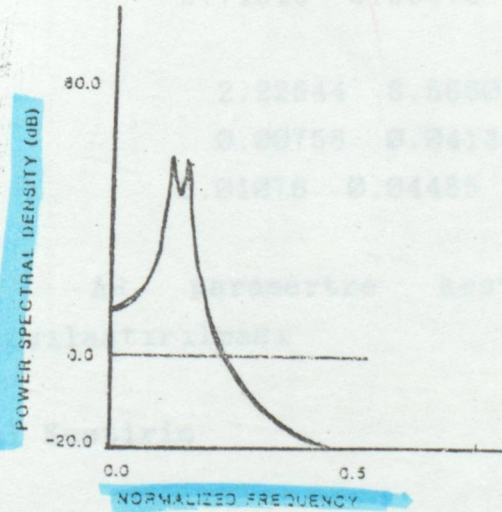
4) Eğer $N \gg n$ ise kökler $-1,1$ de ve $-C_n/d_n$ de olacak.

Sonuç olarak, eğer X_t bir $AR(1)$ işlemi ise (3.4.2.4) ün çözümü tam olarak ML kestirimini üretir.

3.4.4. Algoritmanın Performansı

A. Parametre Kestirimi

RML kestirim algoritmasının performansını belirlemek için, ilk olarak AR parametre kestirimlerinin ortalamasını ve varyansını inceleyeceğiz ve bunları Yule-Walker (YW) ve Forward-Backward (FB) lineer tahmin yöntemler ile karşılaştıracacağız. Örnek olarak katsayıları $a_1=-2.76070$, $a_2=3.81060$, $a_3=-2.65350$, $a_4=0.92380$, $\sigma_e^2=1$ olan bir AR(4) işlemi için güç spektrum yoğunluğu şekil (3.4.4.1) de gösterilmiştir. Güç spektrum yoğunluğunun keskinliği gösterir ki, $|C_f^{-1}|^{1/N} \approx 1$ e yaklaşımı zayıf olacaktır (özellikle kısa veri uzunlukları için). Örnek sonuçları kullanılan 1000 deneme, $p=4$ ve $N=11$, 50 veri uzunluğu için tablo halinde sunulmuştur. (tablo 1)



şekil 3.4.4.1 AR(4) proses için gerçek güç spektrum yoğunluğu

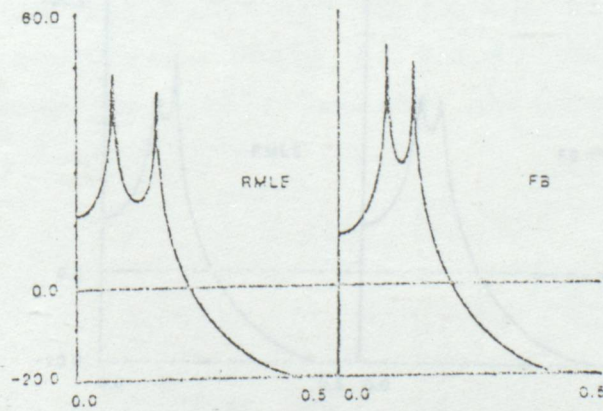
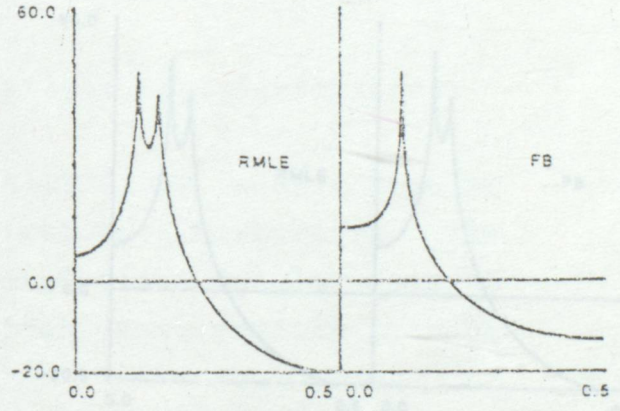
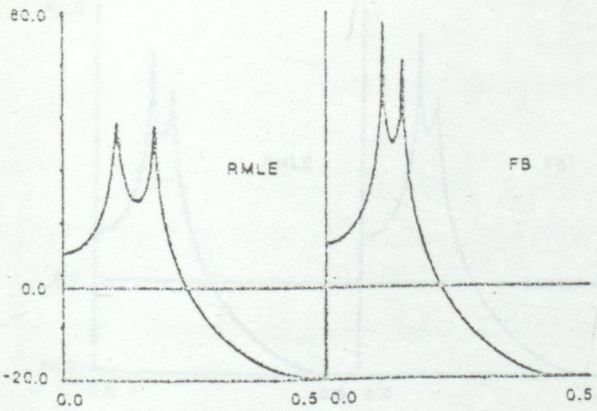
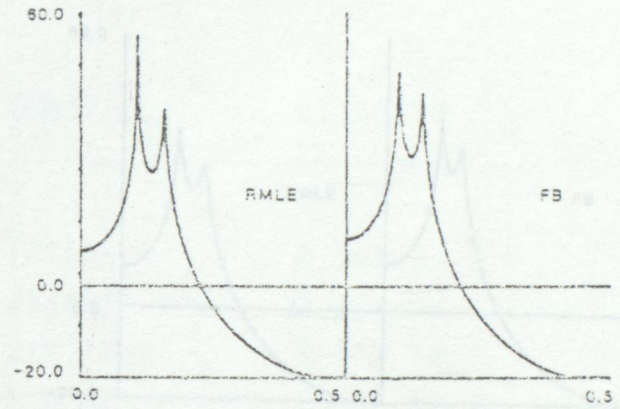
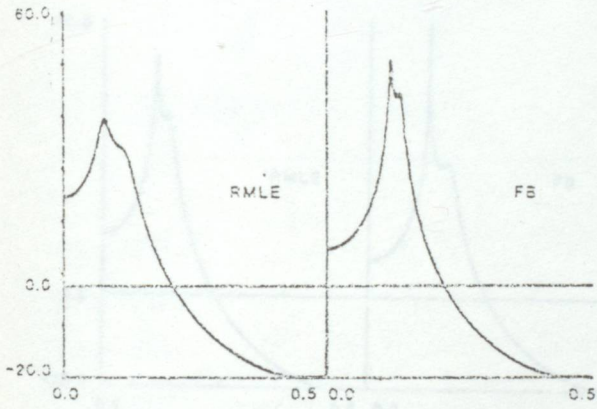
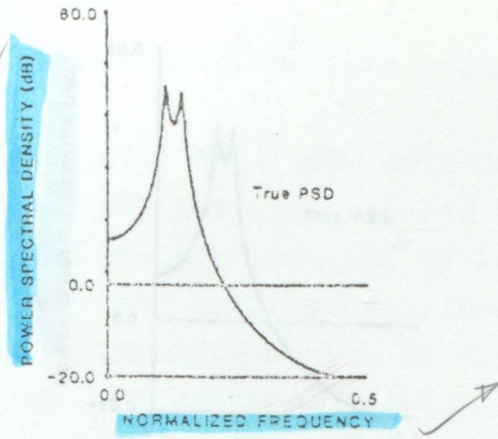
	N = 11			
	a1	a2	a3	a4
Gerçek AR par.	-2.76070	3.81060	-2.65350	0.92380
Ort-YW	-1.01527	0.61949	0.04466	0.05735
Ort-FB	-2.59333	3.42185	-2.27303	0.77263
Ort-RML	-2.62975	3.51086	-2.37156	0.81412
Var-YW	3.13780	10.29627	7.33884	0.75846
Var-FB	0.11598	0.52574	0.49303	0.08463
Var-RML	0.10960	0.33371	0.26227	0.04141

	N = 50			
	a1	a2	a3	a4
Gerçek AR par.	-2.76070	3.81060	-2.65350	0.92380
Ort-YW	-1.30552	0.92378	-0.05153	0.06712
Ort-FB	-2.72368	3.71024	-2.54984	0.87635
Ort-RML	-2.71515	3.69876	-2.54345	0.87765
Var-YW	2.22544	8.56804	6.90835	0.74528
Var-FB	0.00758	0.04138	0.04219	0.00853
Var-RML	0.01076	0.04485	0.04069	0.00741

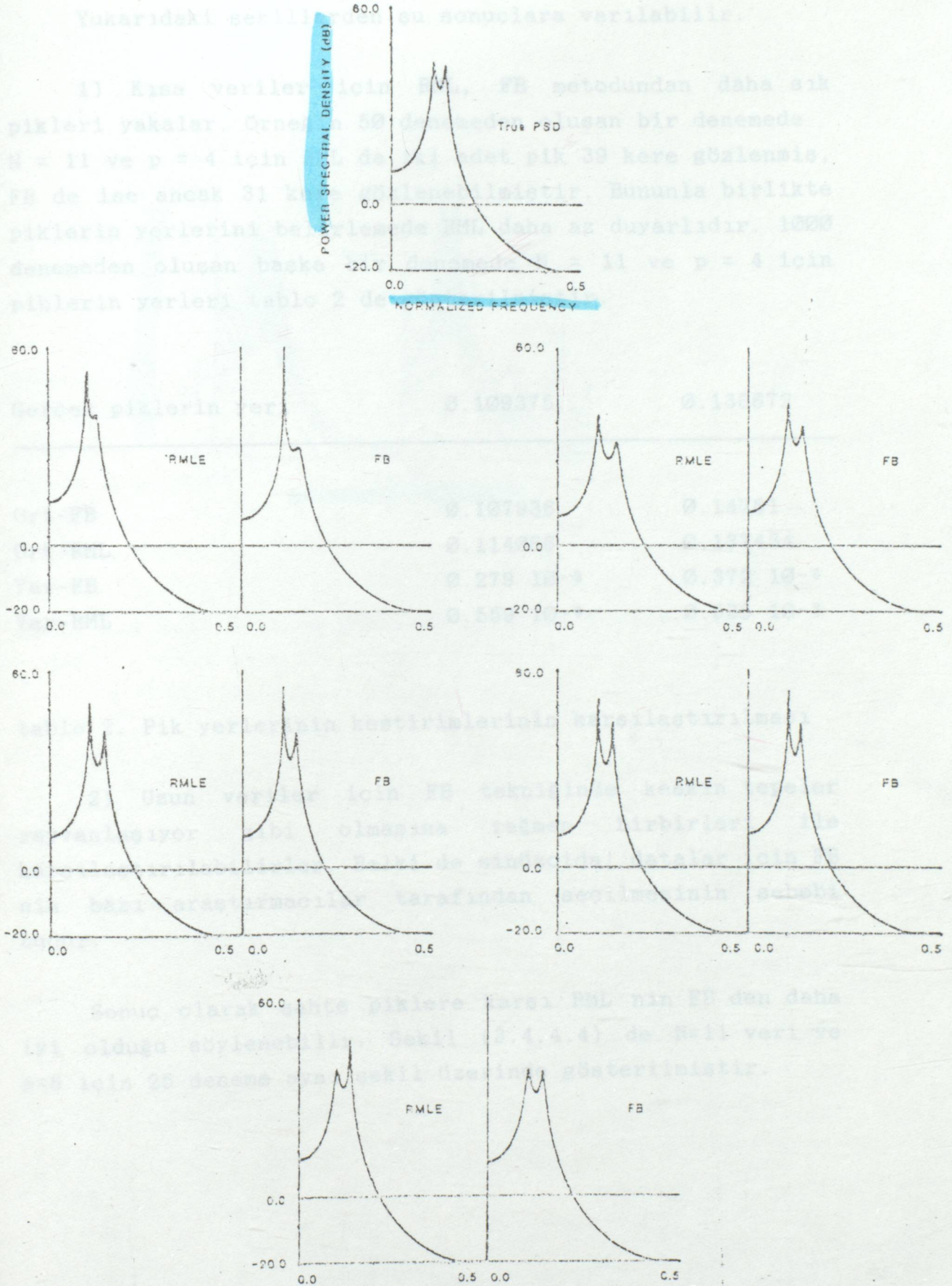
Tablo 1. AR parametre kestirim yöntemlerinin karşılaştırılması

B. Spektral Kestirim

Aynı AR(4) prosesi için RML ve FB teknikleri için spektral kestirimler elde edilmiştir. σ_e^2 nin kestiriminin değerini keyfi olarak $\sigma_e^2=1$ olduğunu varsayalım, öyle ki a_1, a_2, a_3, a_4 ün kestirimi için iki algoritmanın becerileri karşılaştırılır. Şekil (3.4.4.2) ve (3.4.4.3) de kısa ve uzun veri uzunluğu $N = 11, 50$ ve $p = 4$ için tipik spektral kestirimler gösterilmiştir.



Şekil 3.4.4.2. $N = 11$ ve $p = 4$ için spektral kestirimler



Şekil 3.4.4.3. $N = 50$ ve $p = 4$ için spektral kestirimler

Yukarıdaki şekillerden şu sonuçlara varılabilir.

1) Kısa veriler için RML, FB metodundan daha sık pikleri yakalar. Örneğin 50 denemeden oluşan bir denemede $N = 11$ ve $p = 4$ için RML de iki adet pik 39 kere gözlenmiş, FB de ise ancak 31 kere gözlenebilmiştir. Bununla birlikte piklerin yerlerini belirlemede RML daha az duyarlıdır. 1000 denemeden oluşan başka bir denemede $N = 11$ ve $p = 4$ için piklerin yerleri tablo 2 de gösterilmiştir.

Gerçek piklerin yeri	Ø.109375	Ø.138672
Ort-FB	Ø.107936	Ø.14281
Ort-RML	Ø.114066	Ø.137434
Var-FB	Ø.279 10^{-3}	Ø.372 10^{-3}
Var-RML	Ø.559 10^{-3}	Ø.535 10^{-3}

tablo 2. Pik yerlerinin kestirimlerinin karşılaştırılması

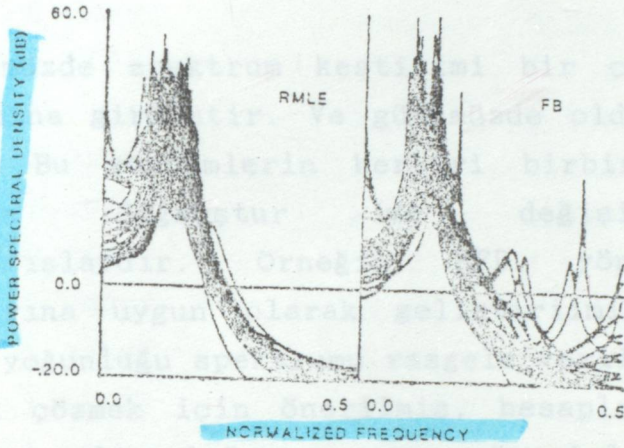
2) Uzun veriler için FB tekniğinde keskin tepeler yayvanlaşıyor gibi olmasına rağmen birbirleri ile karşılaştırılabilirler. Belki de sinüzoidal datalar için FB nin bazı araştırmacılar tarafından seçilmesinin sebebi budur.

Sonuç olarak sahte piklere karşı RML nin FB den daha iyi olduğu söylenebilir. Şekil (3.4.4.4) de $N=11$ veri ve $p=6$ için 25 deneme aynı şekil üzerinde gösterilmiştir.

BÖLÜM 4

SONUÇ

4.1. GİRİŞ



şekil 3.4.4.4. $N=11$ ve $p=6$ için spektral kestirimler

Şekil 4.1.1 de oniki değişik spektrum kestirimi gösterilmiştir. Herbir spektrum, bayaş Gauss gürültüsü ve 60 frekansa sahip sinusoidal bir yapıdan oluşan 64 gerçek örnek değeri kullanılarak elde edilmiştir. Tablo 4.1.1 de de kullanılan veriler listelenmiştir. Bu sinusoidal sinyallerin frekans değerleri 0.10, 0.20, 0.30 dir. Ve SNR +1, +10, +30, +35 dB dir. Burada SNR sinusoidalın gücünün toplam gürültü gücüne olarak tanımlanmıştır. Şekil 4.1.1 de özellikle kısa veri uzunlukları ve yöntemlerin kendi aralarındaki performans karşılaştırılması istenmiştir. Gerçek güç spektrum yoğunluğu şekil 4.1.1 (a) da gösterilmiştir. Daha geniş bilgi için [1] den yararlanılabilir.

BÖLÜM 4

SONUÇ

4.1. GİRİŞ

Günümüzde spektrum kestirimi bir çok bilim dalının ilgi alanına girmiştir. Ve günümüzde oldukça fazla yöntem vardır. Bu yöntemlerin herbiri birbirinden çok farklı amaçlardan doğmuştur ve değişik temellerden kaynaklanmışlardır. Örneğin HFD yöntemi bilgisayar yazılımlarına uygun olarak geliştirilmiştir. Bunun yanı sıra güç yoğunluğu spektrumu rasgele verilerin analizindeki sorunları çözmek için önerilmiş, hesapların hızından çok sonuçların duyarlılığını ve güvenilirliğini sağlamayı amaçlamıştır. Doğal olarak belli bir uygulamaya yönelik olarak doğan bu yöntemlerde o yöne yatkındır. Bugün spektral analizde herbiri kendine özgü yetenekleri olan yirmiyi aşkın yöntem vardır. Kullanıcı kendine uygun amaçlar doğrultusundaki yöntemi seçmek zorundadır.

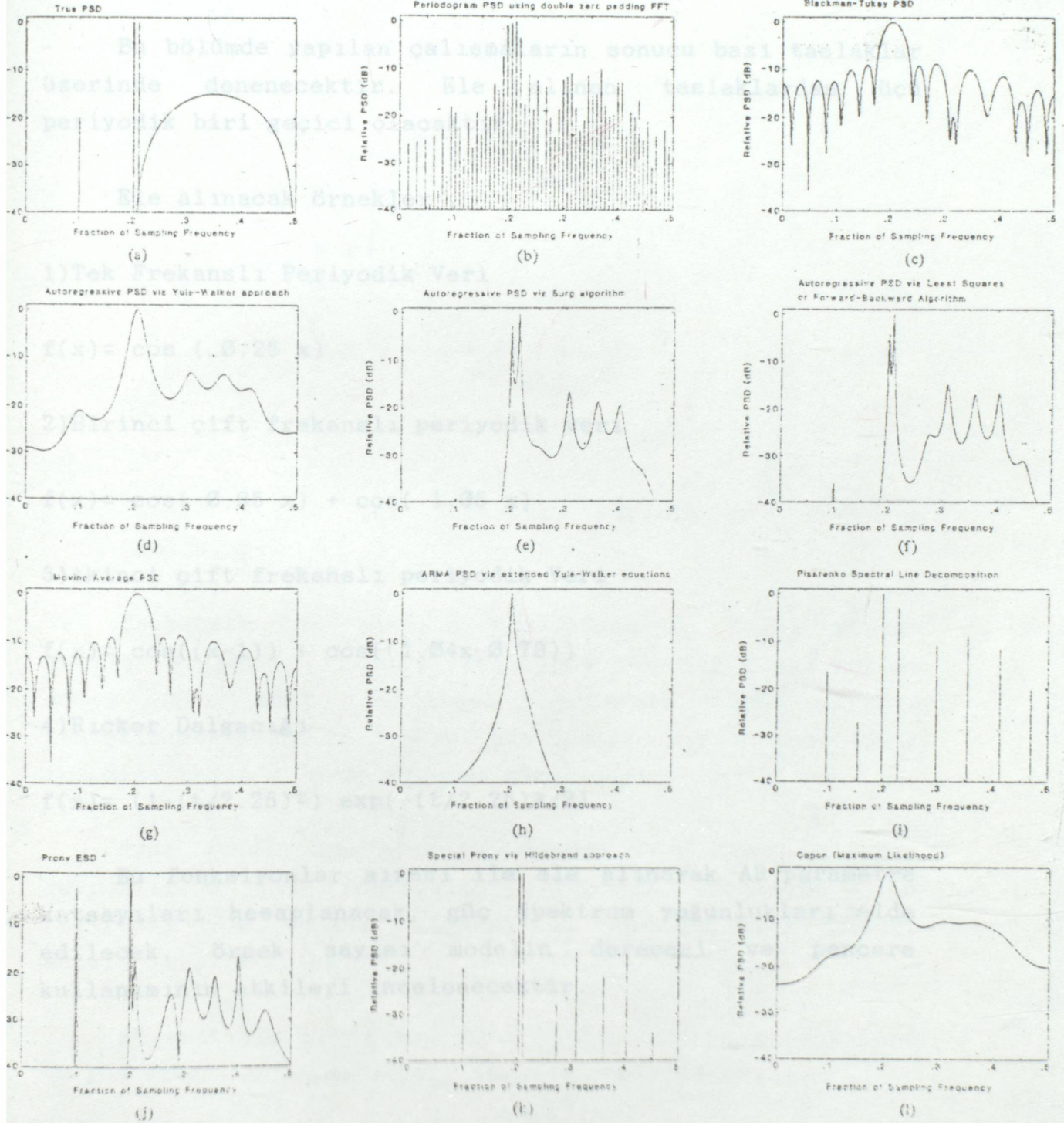
Şekil 4.1.1 de oniki değişik spektrum kestirimi gösterilmiştir. Herbir spektrum, beyaz Gauss gürültüsü ve üç frekansa sahip sinüsoidal bir yapıdan oluşan 64 gerçek örnek değeri kullanılarak elde edilmiştir. Tablo 4.1.1 de de kullanılan veriler listelenmiştir. Bu sinüsoidalı oluşturan frekans değerleri 0.10, 0.20, 0.21 dir. Ve SNR si +10, +30, +30 dB dir. Burada SNR sinüsoidalın gücünün toplam güce oranı olarak tanımlanmıştır. Şekil 4.1.1. de özellikle kısa veri uzunlukları ve yöntemlerin kendi aralarındaki performans karşılaştırılmak istenmiştir. Gerçek güç spektrum yoğunluğu şekil 4.1.1 (a) da gösterilmiştir. Daha geniş bilgi için [1] den yararlanılabilir.

x(1) = 1.29106	x(33) = 0.30984
x(2) = -2.08636	x(34) = 1.21289
x(3) = -1.69131	x(35) = -0.11990
x(4) = 1.24313	x(36) = -0.44168
x(5) = 1.64107	x(37) = -0.87973
x(6) = -0.00868	x(38) = 0.30618
x(7) = -1.65939	x(39) = 0.79543
x(8) = -1.11146	x(40) = 0.18959
x(9) = 0.98590	x(41) = -0.34233
x(10) = 1.99197	x(42) = -0.32870
x(11) = -0.04661	x(43) = 0.19788
x(12) = -1.64926	x(44) = 0.07117
x(13) = -1.04081	x(45) = 0.18593
x(14) = 1.05466	x(46) = -0.32459
x(15) = 1.85581	x(47) = -0.36609
x(16) = -0.95118	x(48) = 0.36846
x(17) = -1.47649	x(49) = -0.19193
x(18) = -0.21224	x(50) = 0.51911
x(19) = 0.78020	x(51) = 0.00823
x(20) = 1.41600	x(52) = -0.42594
x(21) = 0.19920	x(53) = 0.65147
x(22) = -2.02702	x(54) = -0.63997
x(23) = -0.48357	x(55) = -0.34438
x(24) = 1.66491	x(56) = 0.81413
x(25) = 0.61411	x(57) = -0.38516
x(26) = -0.79146	x(58) = 0.06421
x(27) = -1.19531	x(59) = -0.38000
x(28) = 0.11980	x(60) = -0.16300
x(29) = 0.80763	x(61) = 1.18096
x(30) = 0.89523	x(62) = 0.11420
x(31) = -0.01273	x(63) = -0.66762
x(32) = -1.76384	x(64) = -0.81499

Tablo 4.1.1. Gerçek veri değerleri

4.2. BAZI SPEKTRUM KESTİRİM ÖRNEKLERİ

4.2.1. AR Kestirim Örnekleri



Şekil 4.1.1 Çeşitli spektrum kestirimleri [13]

4.2. BAZI SPEKTRUM KESTİRİM ÖRNEKLERİ

4.2.1. AR Kestirim Örnekleri

Bu bölümde yapılan çalışmaların sonucu bazı taslaklar üzerinde denenecektir. Ele alınan taslaklardan üçü periyodik biri geçici olacaktır.

Ele alınacak örnekler ,

1)Tek Frekanslı Periyodik Veri

$$f(x) = \cos(0.25 x)$$

2)Birinci çift frekanslı periyodik veri

$$f(x) = \cos(0.95 x) + \cos(1.05 x)$$

3)ikinci çift frekanslı periyodik Veri

$$f(x) = \cos((x-1)) + \cos((1.04x-0.79))$$

4)Ricker Dalgacığı

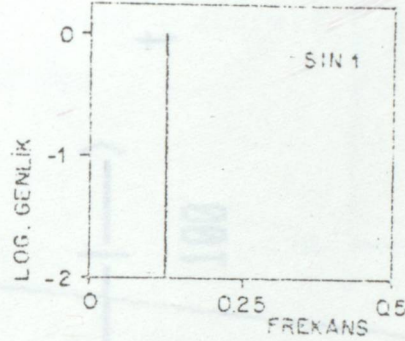
$$f(x) = (1 - (t/2.25)^2) \exp(-(t/2.25)^2/2)$$

Bu fonksiyonlar sırası ile ele alınarak AR parametre katsayıları hesaplanacak, güç spektrum yoğunlukları elde edilecek, örnek sayısı modelin derecesi ve pencere kullanımının etkileri incelenecektir.

AR kestirim yöntemine göre kestirilen ak katsayıları ve güç spektrum yoğunlukları aşağıda gösterilmiştir.

1) Tek frekanslı periyodik veri

Teorik olarak spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.

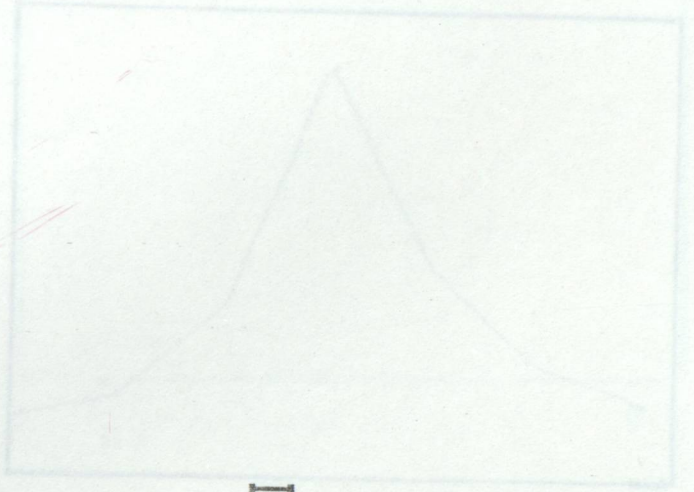


Şekil 4.2.1. Tek frekanslı verinin güç spektrum yoğunluğu

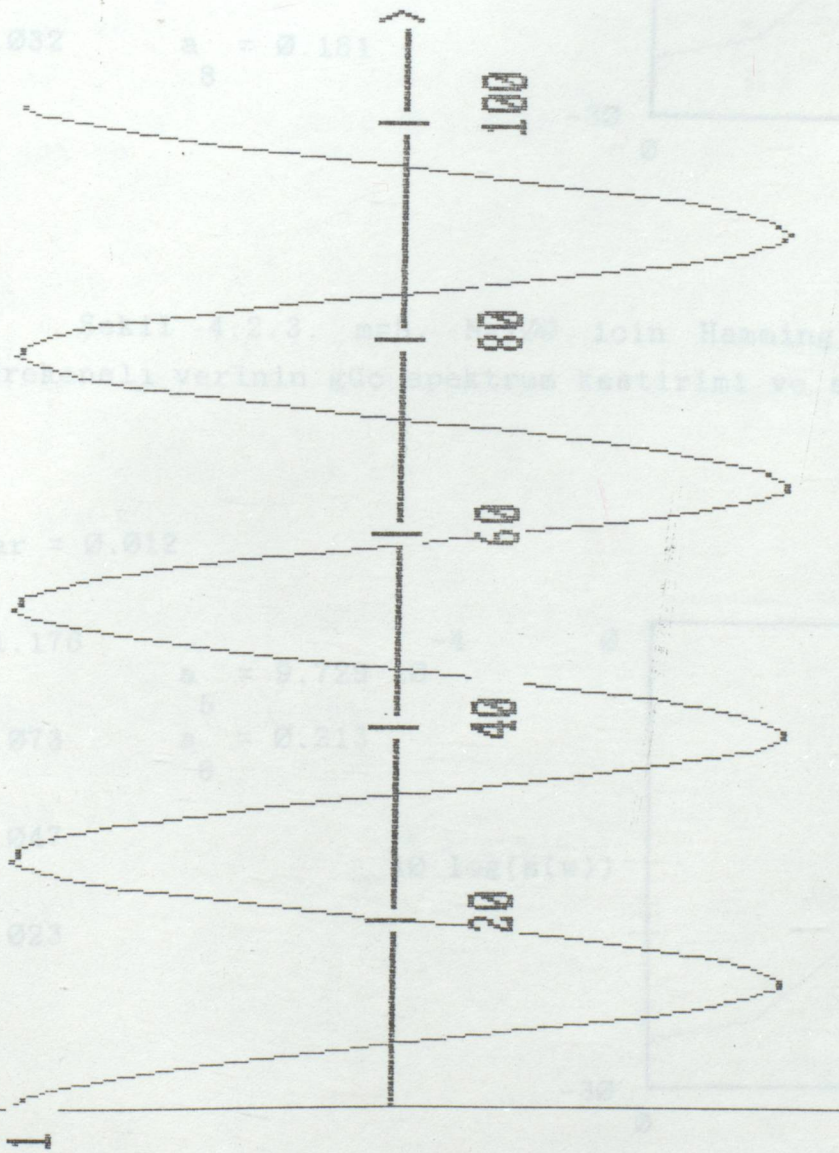
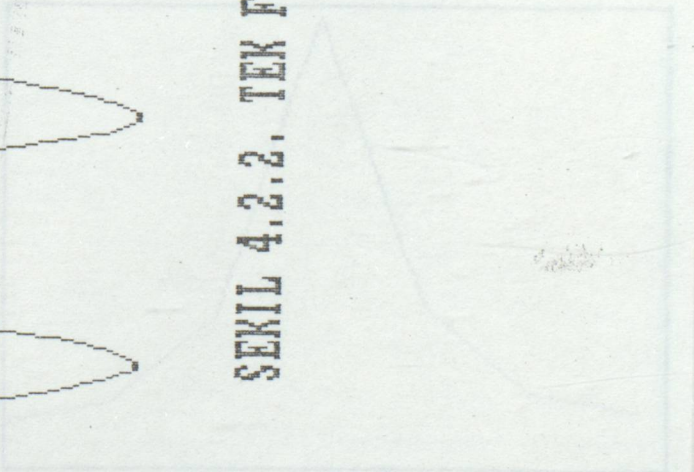
Tek frekanslı bir sinüsün analizinde en doğal yöntem Fourier dizisidir. Doruk frekansında tek bir çizgi yerine geniş bir bant bulunması yöntemden çok veriden kaynaklanmaktadır. Veri boyu, ana periyod boyunu tam olarak içerdiği vakit uçlarda sıçrama olmaktadır.

Kısa süzgeç boylarında dorukların oluşması doruğun gerçekliğine bir işarettir. Periyodik verilerde yine periyodik olan özilişki fonksiyonu uzadıkça spektrumdaki seçilebilirlik artar.

AR kestirim yöntemine göre kestirilen ak katsayıları ve güç spektrum yoğunlukları aşağıda gösterilmiştir.



SEKIL 4.2.2. TEK FREKANSLI PERİYODİK VERİ



var = 0.012

= -1.088

$a_5 = 0.019$

= 0.066

$a_6 = 0.006$

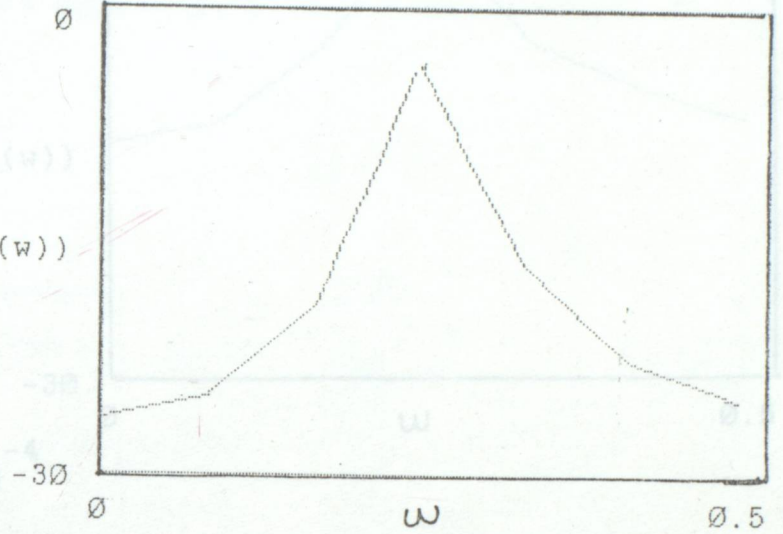
= 0.048

$a_7 = -0.006$

= 0.032

$a_8 = 0.181$

$10 \cdot \log(s(w))$



Şekil 4.2.3. $m=8$, $N=100$ için Hamming pencereli tek frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

var = 0.012

= -1.176

$a_5 = 9.729 \cdot 10^{-4}$

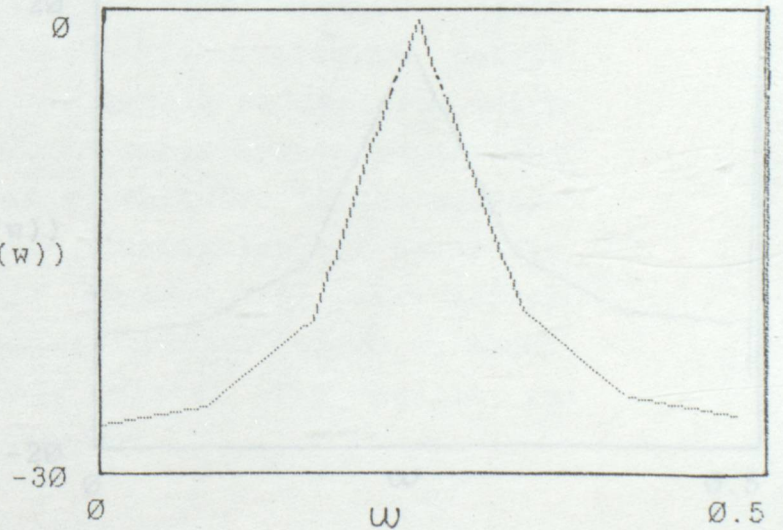
= 0.073

$a_6 = 0.213$

= 0.047

= 0.023

$10 \cdot \log(s(w))$



Şekil 4.2.4. $m=6$, $N=120$ için Hamming pencereli tek frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

$$\text{var} = 0.5$$

$$a_1 = -0.903$$

1

$$a_2 = 8.571 \cdot 10^{-5}$$

2

$$a_3 = 7.587 \cdot 10^{-5}$$

3

$$a_4 = 1.019 \cdot 10^{-4}$$

4

$$a_5 = 1.758 \cdot 10^{-4}$$

5

$$a_6 = 2.883 \cdot 10^{-4}$$

6

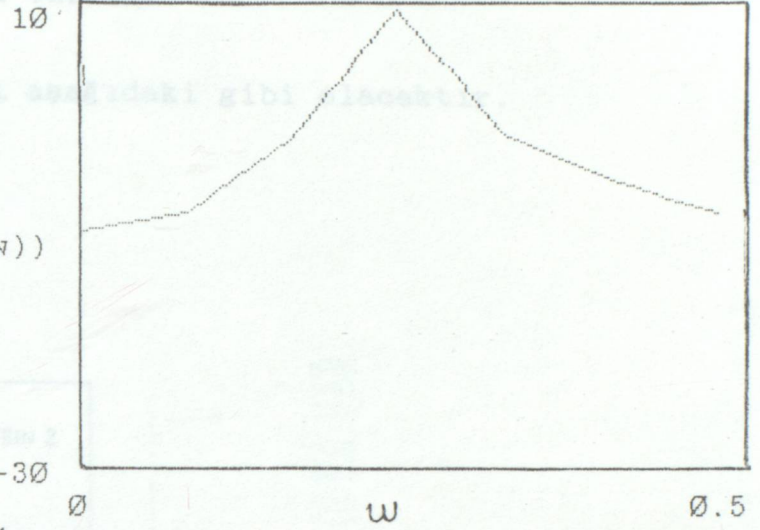
$$a_7 = 4.115 \cdot 10^{-4}$$

7

$$a_8 = 0.256$$

8

$$10 \cdot \log(s(w))$$



Şekil 4.2.5. $m=8$, $N=100$ için penceresiz tek frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

Şekil 4.2.7. Çift frekanslı periyodik verinin güç spektrum yoğunluğu

$$\text{var} = 0.5$$

$$a_1 = -1.085$$

1

$$a_5 = 0.006$$

5

$$a_2 = 0.02$$

2

$$a_6 = 0.234$$

6

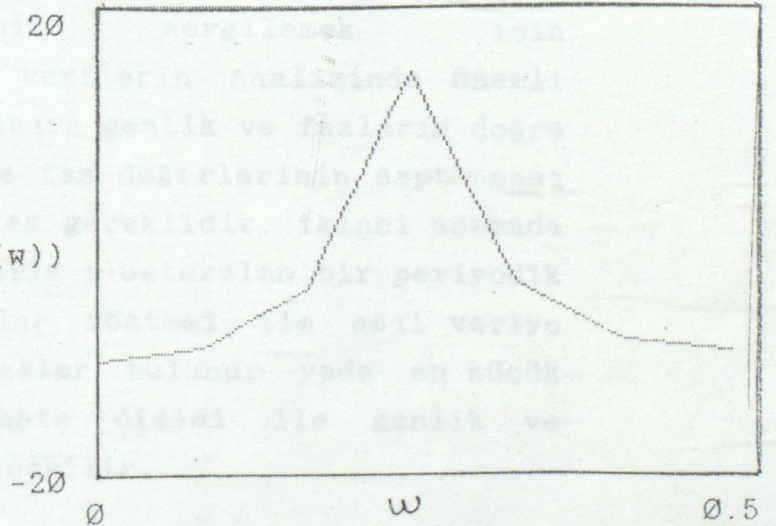
$$a_3 = 0.016$$

3

$$a_4 = 0.011$$

4

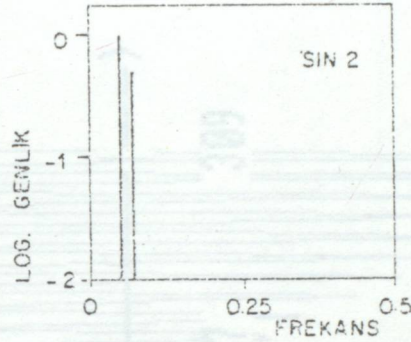
$$10 \cdot \log(s(w))$$



Şekil 4.2.6. $m=6$, $N=120$ için penceresiz tek frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

2-3) Çift frekanslı periyodik veriler

Teorik olarak spektrumları aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 4.2.7. Çift frekanslı periyodik verinin güç spektrum yoğunluğu

Çift frekanslı periyodik sinüs verileri frekans seçilebilirlik yeteneğini sergilemek için kullanılmışlardır. Periyodik verilerin analizinde önemli bir nokta doğru frekansın yanı sıra genlik ve fazların doğru saptanmasıdır. Doğru genlik ve faz değerlerinin saptanması için ikinci bir analiz çoğu kez gereklidir. İkinci aşamada spektrumdan sağlanan frekanslarla oluşturulan bir periyodik veri taslağı en küçük kareler yöntemi ile asıl veriye yaklaştırılarak genlik ve fazlar bulunur yada en küçük kareler yönteminde oluşan hata dizisi ile genlik ve fazların hata sınırlarında bulunabilir.

var = 0.35

= -0.54

a = 0.001

10

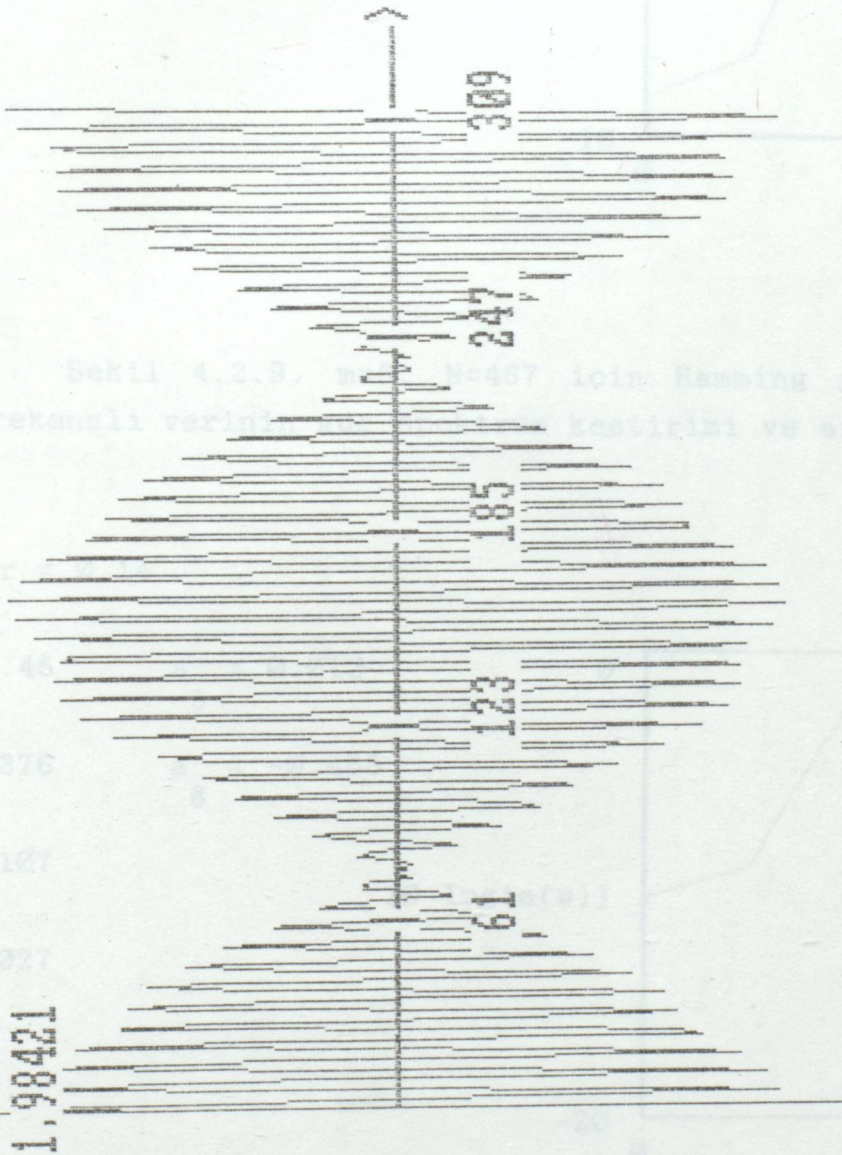
= 0.475

a = -0.354

= 0.135

= 0.035

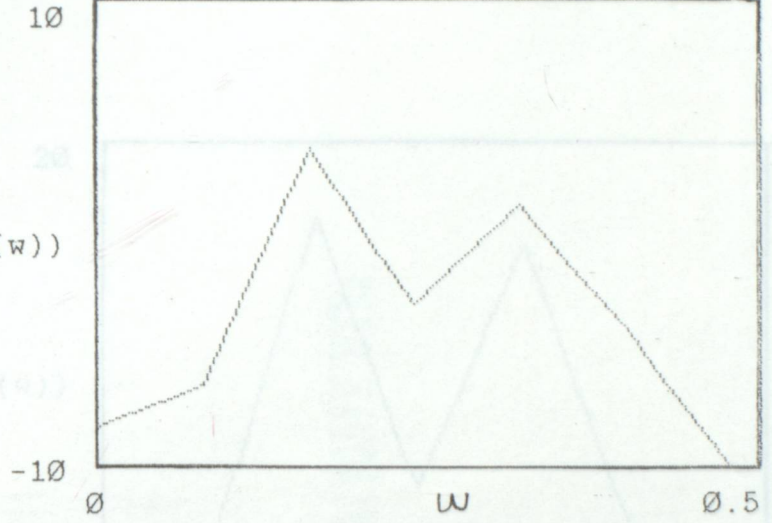
t log(s(w))



SEKIL 4.2.8. BIRINCI CIFT FREKANSLI PERİYODİK VERİ

var = 0.36

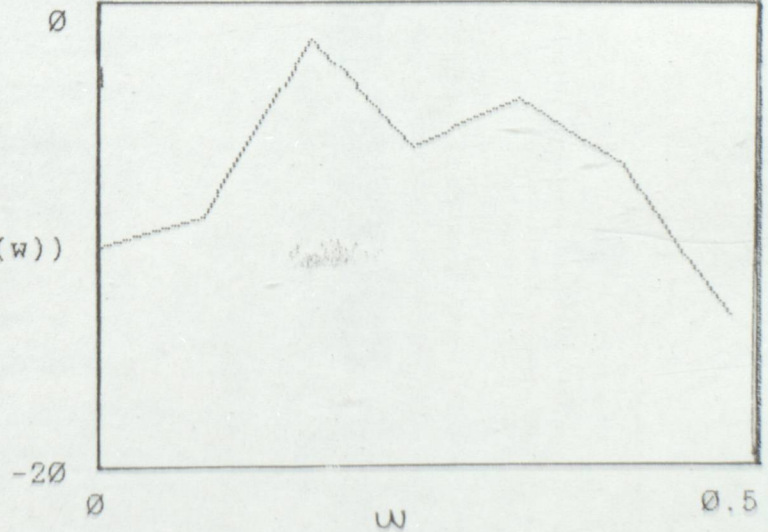
$a_1 = -0.54$ $a_5 = 0.001$
 $a_2 = 0.475$ $a_6 = -0.354$
 $a_3 = 0.135$
 $a_4 = 0.035$
 $10 \cdot \log(s(w))$
 $10 \cdot \log(s(w))$
 $10 \cdot \log(s(w))$



Şekil 4.2.9. $m=6$, $N=467$ için Hamming pencereli çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

var = 0.14.

$a_1 = -0.45$ $a_5 = 0.012$
 $a_2 = 0.376$ $a_6 = -0.485$
 $a_3 = 0.107$
 $a_4 = 0.027$
 $10 \cdot \log(s(w))$



Şekil 4.2.10. $m=6$, $N=159$ için Hamming pencereli çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

var = 0.99

$$a_1 = -0.973$$

$$a_5 = 0.043$$

20

1

5

$$a_2 = 1.001$$

$$a_6 = 0.107$$

2

6

$$a_3 = 0.14$$

3

 $10 \log(s(\omega))$

$$a_4 = 0.025$$

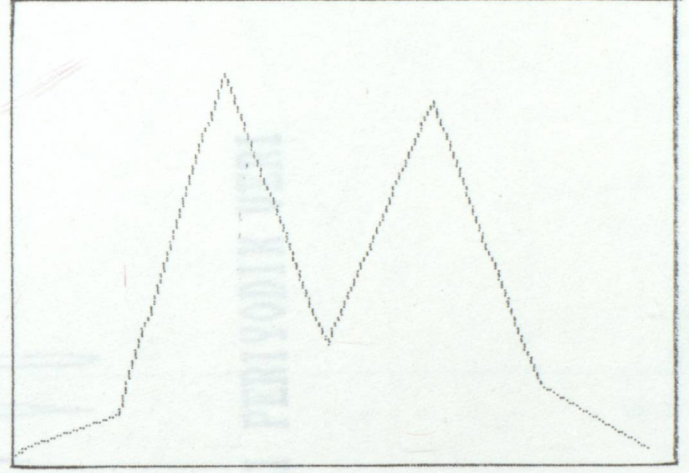
4

-10

0

 ω

0.5



Şekil 4.2.11. $m=6$, $N=467$ için penceresiz çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

var = 0.35

= -1.335

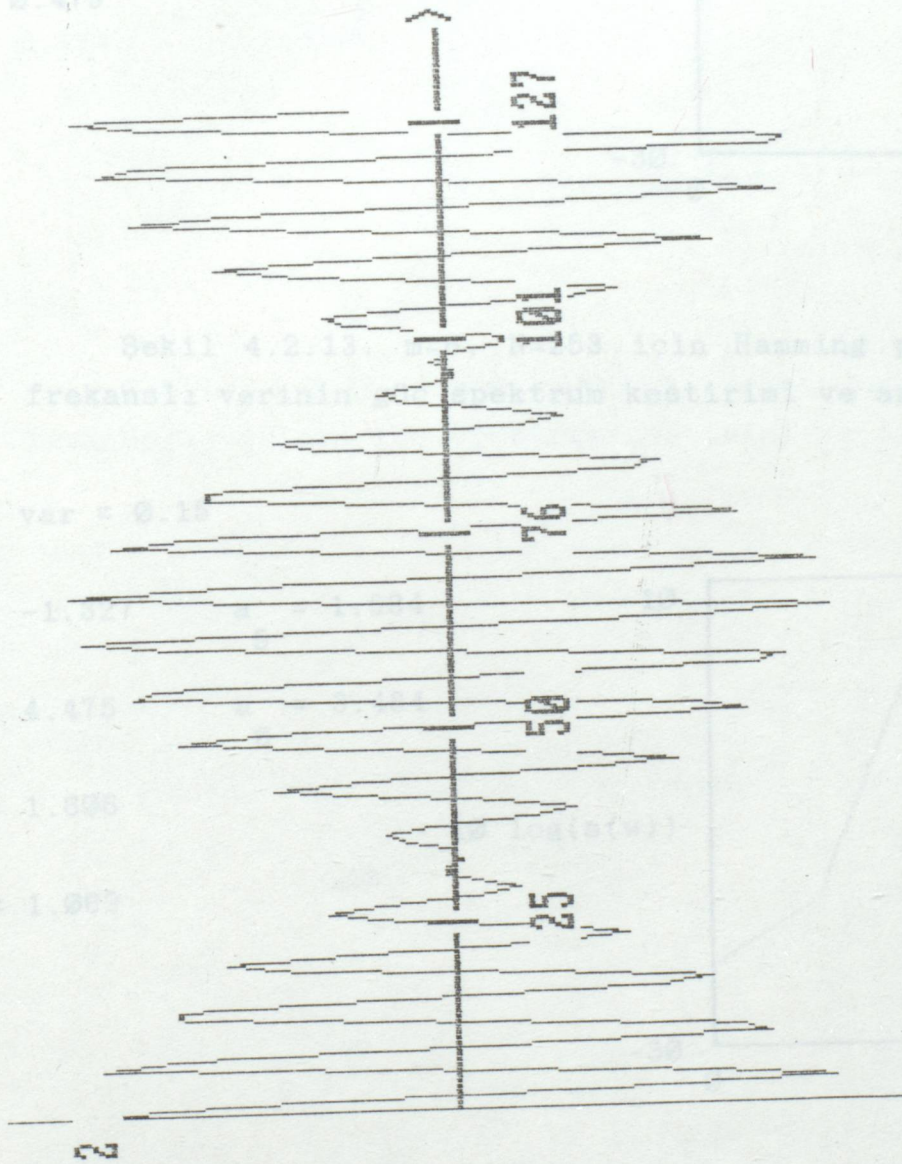
a = 0.700

= 2.815

a = 1.971

= 0.987

= 0.479

t
 $10 \log(s(\omega))$ 

SEKIL 4.2.12. IKINCI CIFT FREKANSLI PERİYODİK VERİ

var = 0.35

a₁ = -1.335

a₅ = 0.709

a₂ = -0.85

a₆ = 0.023

a₃ = 2.815

a₆ = 1.971

a₄ = 0.948

a₆ = 0.313

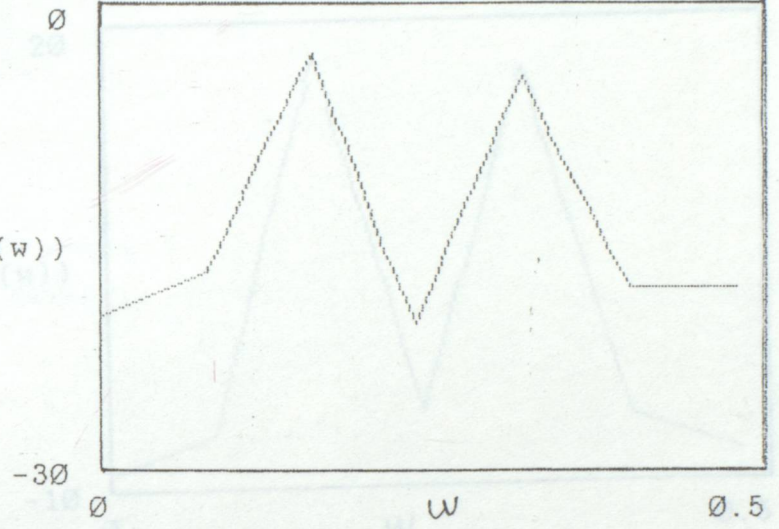
a₃ = 0.907

a₄ = 0.354

a₄ = 0.479

a₄ = 0.124

$10 \cdot \log(s(\omega))$



Şekil 4.2.13. $m=6$, $N=253$ için Hamming pencereli çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

var = 0.15

a₁ = -1.327

a₅ = 1.584

1

5

a₂ = 4.475

a₆ = 3.484

2

6

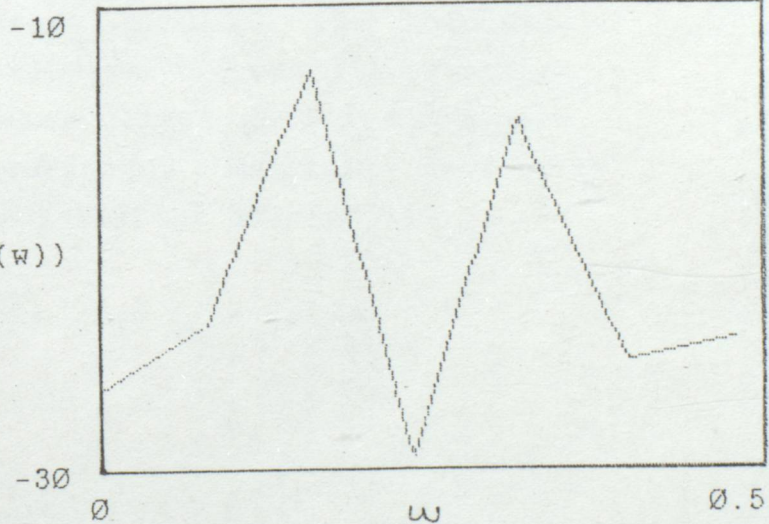
a₃ = 1.606

3

a₄ = 1.069

4

$10 \cdot \log(s(\omega))$



Şekil 4.2.14. $m=6$, $N=67$ için Hamming pencereli çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

4) Ricker Dalgası

var = 1

Teorik olarak spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.

$$a_1 = -0.85$$

$$a_5 = 0.023$$

20

1

5

$$a_2 = 0.948$$

$$a_6 = 0.313$$

2

6

$$a_3 = 0.354$$

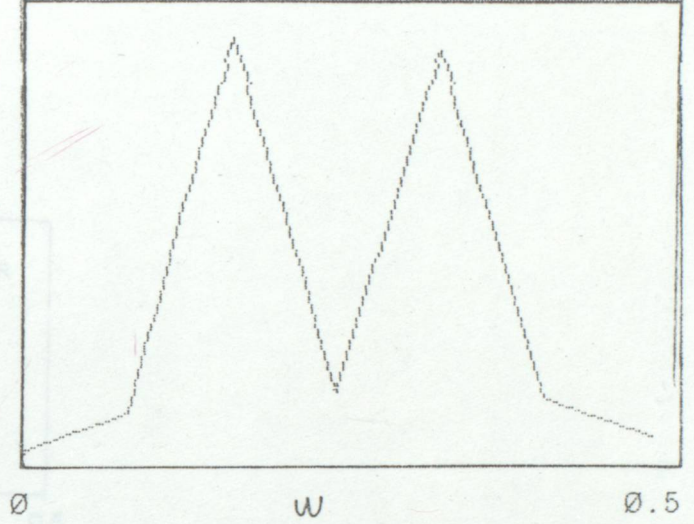
3

$$a_4 = 0.124$$

4

 $10 \log(s(w))$

-10

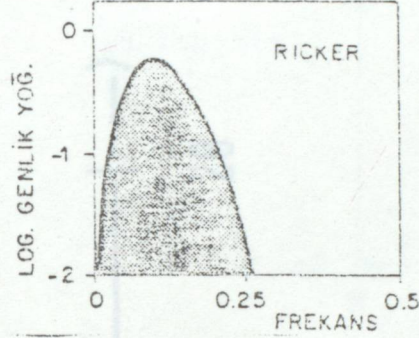


Şekil 4.2.15. $m=6$, $N=253$ için penceresiz çift frekanslı verinin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

Ricker dalgacığı tanımlanmış bir veri ve spektrumu analitik olarak Fourier dönüşümü ile bulunur. Değeri ve tanımlanan verilerin frekansa ortasına geçirilmesinde fazla sorun yoktur. Fakat gerçek sinyaller çoğu kez gürültü içinde olduğundan analitik Fourier dönüşümünden başka bir yöntemle verilmesi gerekebilir.

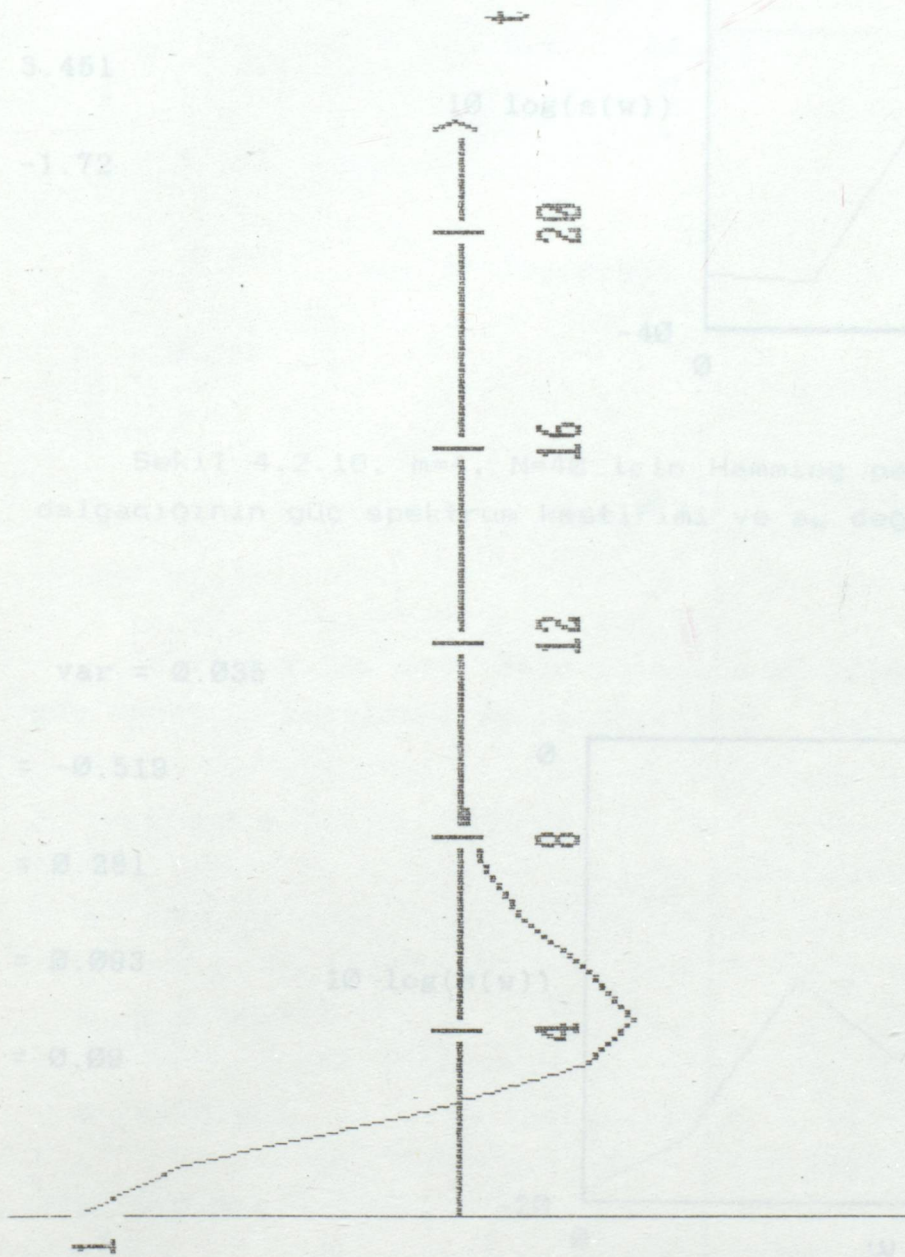
4) Ricker Dalgacı

Teorik olarak spektrumu aşağıdaki gibi olacaktır.

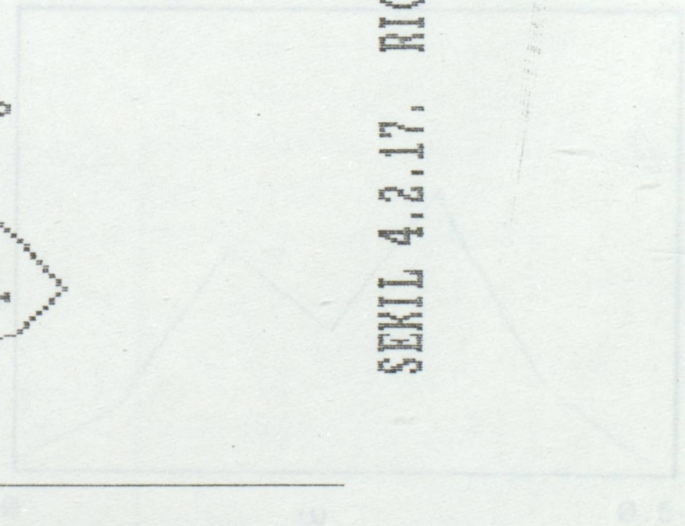


Şekil 4.2.16. Ricker dalgacının güç spektrum yoğunluğu

Ricker dalgacı tanımlanmış geçici bir veridir ve spektrumu analitik olarak Fourier dönüşümü ile bulunur. Geçici ve tanımlanan verilerin frekans ortamına geçirilmesinde fazla sorun yoktur. Fakat geçici sinyaller çoğu kez gürültü içinde olduğundan analizin Fourier dönüşümünden başka bir yöntemle yapılması gerekebilir.



SEKIL 4.2.17. RICKER DALGACIGI



4.2.2. ML Kestirim Örneği

var = 0.012

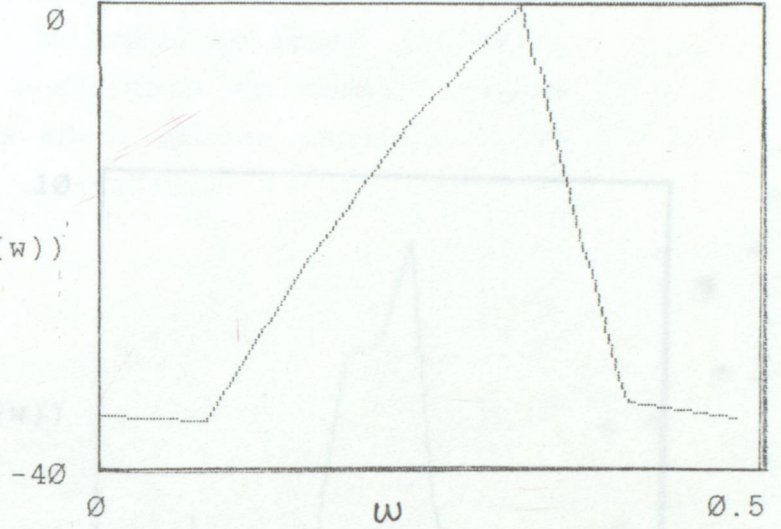
$$a_1 = -0.11$$

$$a_2 = -2.402$$

$$a_3 = 3.451$$

$$a_4 = -1.72$$

$10 \cdot \log(s(\omega))$



Sekil 4.2.18. $m=4$, $N=40$ için Hamming pencereli Ricker dalgacığının güç spektrum kestirimi ve a_k değerleri

var = 0.035

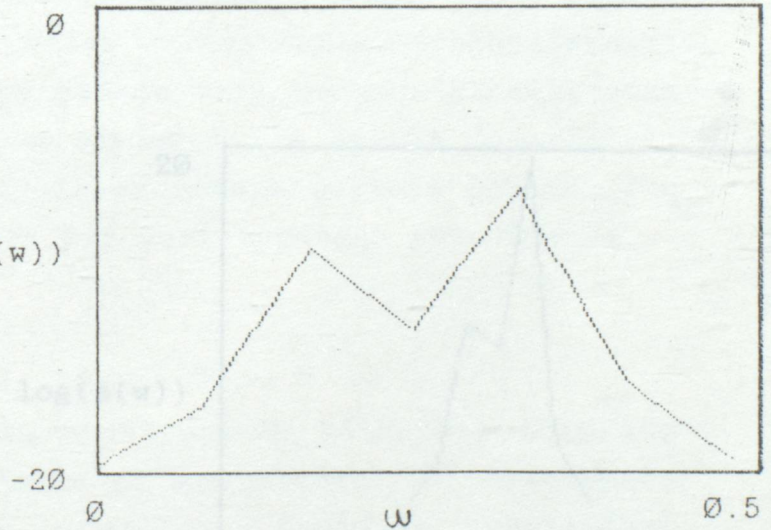
$$a_1 = -0.519$$

$$a_2 = 0.281$$

$$a_3 = 0.093$$

$$a_4 = 0.09$$

$10 \cdot \log(s(\omega))$



Sekil 4.2.19. $m=4$, $N=40$ için penceresiz Ricker dalgacığının güç spektrum kestirimi ve a_k değerleri

4.2.2. ML Kestirim Örneği

4.3. FREKANS SEÇİLEBİLİRLİĞİ

Bu kısımda eldeki bir AR işleminin ML kestirimi aşağıda sunulmuştur.

$$\text{var} = 0.72$$

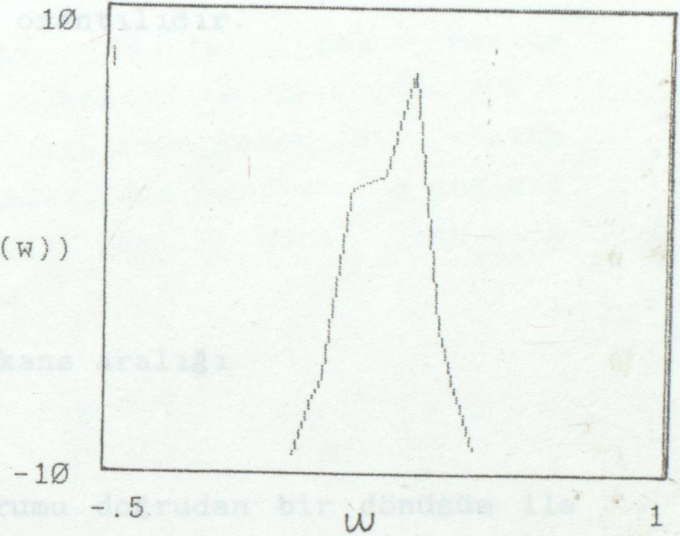
$$a_1 = -0.909$$

$$a_2 = 0.453$$

$$a_3 = -0.003$$

$$a_4 = 0.088$$

$$10 \cdot \log(s(\omega))$$



Şekil 4.2.20. $m=4$, $N=20$ için bir AR işleminin güç spektrum kestirimi ve ak değerleri

$$\text{var} = 0.9$$

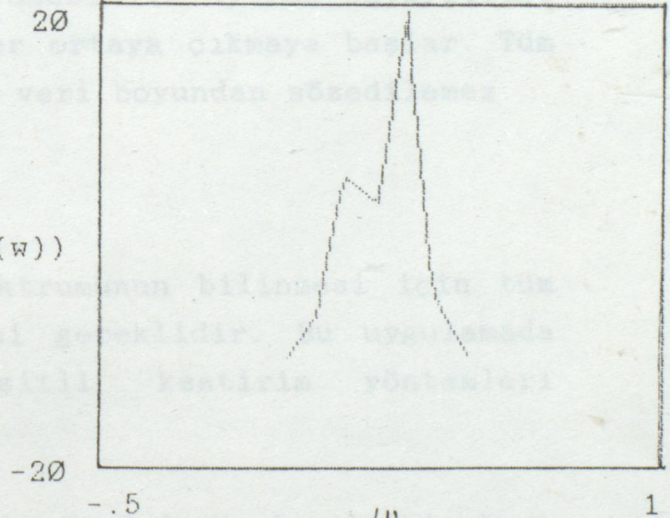
$$a_1 = -1.23$$

$$a_2 = 0.865$$

$$a_3 = -0.009$$

$$a_4 = 0.074$$

$$10 \cdot \log(s(\omega))$$



Şekil 4.2.21. $m=4$, $N=64$ için ML kestirimi

4.3. FREKANS SEÇİLEBİLİRLİĞİ

Gözlem aralığının dar olduğu durumlarda spektrumda birbirine yakın iki doruğun ayırdedilebilmesi güçleşir. Veri boyu spektrum ilişkisi kestirimin en temel sorununu oluşturur. Heisenberg kuralına göre, gözlem uzunluğu T ile frekans seçilebilirliği doğru orantılıdır.

$$T = \frac{1}{\Delta f} \cdot k$$

T , gözlem aralığı

Δf , seçilebilir en yakın frekans aralığı

k , sabit bir sayı

Fourier spektrumu spektrumu doğrudan bir dönüşüm ile hesaplar. Bu yüzden Heisenberg kuralı burada uygulanabilir. Şekil 4.3.1 de bu ilişki gösterilmiştir.

Veri boyunun spektrumda yaptığı ikinci bir etkide piklerin yerlerindeki kaymalar ve kestirilen frekanslardaki hatalardır. Ancak bu hata sadece veri boyunun kısalığından kaynaklanmaz. Veri boyunun büyümesi ile ayırma duyarlılığı artmasına rağmen yalancı pikler ortaya çıkmaya başlar. Tüm yöntemler için geçerli tek bir veri boyundan sözedilemez.

4.4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Teoride, bir verinin spektrumunun bilinmesi için tüm zaman eksenini boyunca bilinmesi gereklidir. Bu uygulamada imkansız olduğu için çeşitli kestirim yöntemleri geliştirilmiştir.

Bu çalışmada AR ve ML kestirimleri incelenmiş bazı yapay verilerle karşılaştırmalar yapılmıştır. Elde edilen spektrumun iyi olabilmesi için önbilgilerin akıllıca değerlendirilmesi gereklidir. Özellikle spektrumu kestirmek

için kullanılacak yöntemin seçimine özen göstermek gerekir. Özellikle periyodik veriler için Fourier dizileri, geçici veriler için Fourier dönüşümü ve rasgele veriler için güç yoğunluğu spektrumu kullanılması uygun olur. Uygulamada gereken titizlik ancak yöntemlerin özelliklerinin bilinmeleri ile sağlanabilir ve bunun yanı sıra deneyim gereklidir.

[21] Sonuç olarak kestirim teorisi çok sayıda araştırmacının çalışma konusu olmasına ve bu konuda yoğun çalışmalara rağmen, basitçe uygulanabilecek bir yöntem bulunmamaktadır. Doğru kestirimler için aynı veride değişik yöntemlerin kullanılmasının yanı sıra benzetim çalışmalarında yararlı olacaktır.

[4] Nesimi Canitez, Uğur Yaramancı, Hüseyin Özdemir
"Spektral Analiz ve Jeofizik Uygulamaları"

[5] J. Makhouf, "Linear prediction: A tutorial review,"
Proc. IEEE, pp. 561-569, Apr. 1975

[6] B. Dickinson, "Two recursive estimates of autoregressive
models based on maximum likelihood," J. Statist. Computation
Simulation, vol. 7, pp. 85-92, 1978

[7] J. Wisc, "The autocorrelation function and the spectral
density function," Biometrika, no. 42, pp. 151-159, 1955

[8] Y. Bresler, A. Macovski, "Exact Maximum Likelihood Parameter
Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise,"
IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal
Processing, vol. ASSP-34, No. 5, pp. 1061-1069, October 1986

[9] R. A. Lipp, "2-Dimensional Signals and Image Processing,"
Prentice Hall, 1992

[10] Wiener, N. "Generalized Harmonic Analysis," Acta
Mathematica 55, 177-238, 1932

[11] "İşaret ve Sistem Analizinde Olasılık Yöntemleri,"
Cev. Doç. Metin Yücel, sf. 171-209

KAYNAKLAR

- [12] A.V. Oppenheim, R.W. Scafer, "Digital Signal Processing,"
Prentice Hall, 1983
- [1] Steven M.Kay, Stanley Lawrence Marple " Spectrum
Analysis-A Modern Perspective " Proceedings of the IEEE,
Vol.69, No.11, November 1981.
- [2] Simon Haykin, " Adaptive Filter Theory "
- [3] Steven M.Kay, " Recursive Maximum Likelihood Estimation
of Autoregressive Processes " IEEE Transactions on
Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-31, No.1,
February 1983.
- [4] Nezihi Canitez, Uğur Yaramancı, Hüseyin Özdemir
"Spektral Analiz ve Jeofizik Uygulamaları"
- [5] J.Makhoul, "Linear prediction: A tutorial review,"
Proc.IEEE, pp.561-580, Apr.1975
- [6] B.Dickinson," Two recursive estimates of autoregressive
models based on maximum likelihood,"J.Statist.Computation
Simulation, vol.7, pp. 85-92, 1978
- [7] J.Wise, " The autocorrelation function and the spectral
density function," Biometrika, no.42, pp.151-159, 1955
- [8] Y.Bresler,A.Macovski,"Exact Maximum Likelihood Parameter
Estimation of Superimposed Exponential Signals in Noise,"
IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal
Processing, vol.ASSP-34, NO.5, pp.1081-1089,October 1986
- [9] J.S. Lim, 2-Dimensional Signals and Image Processing,
Prentice Hall,1990
- [10] Wiener, N."Generalized Harmonic Analysis", Acta
Mathematica,55, 177-238, 1930

[11] "İşaret ve Sistem Analizinde Olasılık Yöntemleri,"
Çev.Doç.Metin Yücel, sf. 171-209

[12] A.V.Oppenheim, R.W.Scafer,"Digital Signal Processing,"
Prentice Hall, 1975

[13] A.V.Oppenheim, R.W.Scafer," Discrete Time Signal
Procssing",Prentice Hall, 1989

ÖZGEÇMİŞ

Faruk Sarı 1968 yılında izmir'de doğdu. ilk orta ve lise öğrenimini izmir'de tamamladı. 1985 yılında Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümüne girdi. 1989 yılında buradan mezun oldu ve aynı yıl Yıldız Üniversitesi Telekominikasyon dalında mastıra başladı. Halen Yıldız Üniversitesi Kocaeli Mühendislik Fakültesinde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

