

154597

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ ANTHROPOMORPHIC
ROBOT KOLUN MODELLENMESİ VE TERS DİNAMİK
KONTROLÜ**

Elektrik Müh. Akın DELİBAŞ

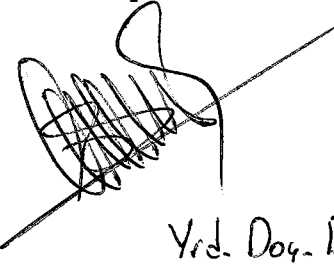
**FBE Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Galip CANSEVER


Prof. Dr. Oruç BİLGİÇ

İSTANBUL, 2004


Yrd. Doç. Dr. Kayhan GÜLEZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÇİZELGE LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
1. GİRİŞ	1
2. ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ	2
2.1 Robot Kolunun Kinematik Modellenmesi	2
2.1.1 Giriş	2
2.1.2 Matematiksel Kavramlar	2
2.1.2.1 Rijit Cismin Konum ve Yönlenmesi	2
2.1.2.2 Dönüşüm Matrisleri ve Düzenlenmesi	3
2.1.2.3 Euler Açılar	4
2.1.2.4 Homojen Dönüşümler	5
2.1.3 Direk Kinematik	7
2.1.3.1 Açık Kinematik Zincir	7
2.1.3.2 Denavit – Hartenberg Gösterimi	9
2.1.3.3 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Direk Kinematik Modeli	11
2.1.4 Ters Kinematik	13
2.1.4.1 Giriş	13
2.1.4.2 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Ters Kinematik Modeli	13
2.1.5 Manipülatör Jakobiyeni	18
2.1.5.1 Geometrik Jakobiyen	18
2.1.5.2 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Jakobiyen Hesabı	19
2.1.5.3 Teklik	20
2.2 Robot Kolun Dinamik Modellenmesi	21
2.2.1 Giriş	21
2.2.2 Lagrange – Euler Denklemleri	24
2.2.3 Robot Manipülatörün Kinetik Enerjisi	25
2.2.4 Robot Manipülatörün Potansiyel Enerjisi	29
2.2.5 Hareket Denklemleri	29
2.2.6 N – E Formülasyonu	30
2.3 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Dinamik Modeli	30
2.4 Robot Kolu Hareketlendiricileri, DC Motor Modellenmesi	33

3.	ROBOT KOLUNUN KONTROLÜ	36
3.1	Giriş	36
3.2	Yörünge Planlanması (Doğrusal Parabolik Fonksiyon)	36
3.3	Hesaplanmış Moment Kontrolü.....	39
3.3.1	İçerdeki İleribeslemeli Çevrimin Çıkarımı	39
3.3.2	PD Dış Çevrim Tasarımı	42
3.3.2.1	Doğal Frekansın Seçimi.....	43
3.3.3	PID Dış Çevrim Tasarımı	46
3.3.4	Hesaplanmış Moment Sınıfındaki Kontrolcüler	51
3.3.4.1	Yaklaşık Hesaplanmış Moment Kontrolde Hata Dinamiği	51
3.3.5	PD Artı Yerçekimi Kontrolcüsü	52
4.	SONUÇLAR ve TARTIŞMA	58
4.1	Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Ters Dinamik Kontrolü	58
	KAYNAKLAR.....	64
	EKLER	66
	Ek 1 İstenilen Yörüngeyi Hesaplayan m. Dosyası	67
	Ek 2 Atalet Matrisini Hesaplayan m. Dosyası.....	68
	Ek 3 Merkezkaç ve Coriolis Matrislerini Hesaplayan m. Dosyası.....	69
	Ek 4 Yerçekimi Matrisini Hesaplayan m. Dosyası.....	70
	Ek 5 İstenilen Robot Yapısını Oluşturan Robotics Toolbox m. Dosyası	71
	ÖZGEÇMİŞ.....	72

SİMGE LİSTESİ

(θ, ϕ, ψ)	Euler açıları
R	Dönüşüm matrisi
A	Homojen dönüşüm matrisi
a_i	O_i ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe
d_i	O_{i-1} ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe
α_i	z_{i-1} ve z_i eksenleri arasındaki açı, x_i eksenine için saat yönünün tersi istikamette ise pozitif
θ_i	x_{i-1} ve x_i eksenleri arasındaki açı, z_{i-1} eksenine için saat yönünün tersi istikamette ise pozitif
$T(q)$	Direk kinematik fonksiyonu
J	Jakobiyen matrisi
d_i	O_{i-1} ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe
d_i	O_{i-1} ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe
L	Lagrangian fonksiyonu
q	Eklem pozisyonları
ξ_i	Genelleştirilmiş (kuvvet/moment)
I	Kütlenin ataleti
τ_{ℓ_i}	i. linkin kinetik enerjisi
τ_{m_i}	i. motorun kinetik enerjisi
kr	Dişli dönüşüm oranı
$\dot{P}_i^*$	Doğrusal hız vektörü
$J_p^{(\ell_i)}$	i. linkin pozisyon jakobiyesi
$J_o^{(\ell_i)}$	i. linkin yönelim jakobiyesi
a	Link uzunluğu
l	bir önceki eklem ile linkin ağırlık merkezine olan uzaklık
t_b	Pozisyon yörüngesinin parabolikten doğrusala geçtiği noktadır.
v_i	i. eklem için müsaade edilen maksimum hız
B	Robot kolun atalet matrisi
C	Robot kolun coriolis ve merkezkaç matrisi
G	Robot kolun yerçekimi matrisi
F	Robot kolun sürtünme matrisi
τ_d	Bozucu etki
e	Yörünge izleme pozisyon hatası
$\dot{e}$	Yörünge izleme hız hatası
$\ddot{e}$	Yörünge izleme ivme hatası
K_p	Oransal sabit
K_i	İntegral sabiti
K_d	Türev sabiti
ζ	Sönüm oranı
ω_n	Doğal frekans
$\hat{B}$	Yaklaşık hesaplanmış atalet matrisi
V	Liapunov fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

PD	Oran – Türev
PID	Oran – İntegral - Türev
L-E	Lagrange – Euler
N-E	Newton – Euler



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Rijit cismin konum ve yönelmesi	3
Şekil 2.2 O-xyz eksen takımının z eksenine etrafında α açısı ile dönmesi	4
Şekil 2.3 Euler Açılarının gösterimi	5
Şekil 2.4 P'nin farklı koordinat eksenlerde gösterimi	6
Şekil 2.5 Eklemlerin genel gösterimi	7
Şekil 2.6 Açık Kinematik Zincirde koordinat dönüşümü.....	8
Şekil 2.7 Denavit – Hartenberg gösterimi	9
Şekil 2.8 Anthropomorphic robot kolu.....	11
Şekil 2.9 Sonsuz θ_1 açısı çözümü.....	14
Şekil 2.10 Dirsek manipülatörlerindeki omuz ofseti	15
Şekil 2.11 Sol kol konfigürasyonu	15
Şekil 2.12 Sağ kol konfigürasyonu.....	16
Şekil 2.13 Link 2 ve 3 için düzlemsel form.....	16
Şekil 2.14 Kabul edilebilir dört çözüm.....	17
Şekil 2.15 Sınır ve iç teklik	21
Şekil 2.16 Sarkaç ve dinamik parametreleri.....	25
Şekil 2.17 Lagrange formülasyonu için link i'nin kinematik anlatımı.....	26
Şekil 2.18 Motor i'nin kinematik anlatımı	28
Şekil 2.19 Manipülatörün fiziksel yapısı.....	31
Şekil 2.20 Motor i'nin kinematik anlatımı	33
Şekil 3.1 DPF yörüngesi ivme grafiği.	38
Şekil 3.2 DPF yörüngesi hız grafiği.	38
Şekil 3.3 DPF yörüngesi pozisyon grafiği.....	39
Şekil 3.4 Hesaplanmış moment kontrol şeması	41
Şekil 3.5 Eklem açıları $\theta_1(t)$ ve $\theta_2(t)$ (rad)	45
Şekil 3.6 Yörünge izleme hatası $e_1(t)$ ve $e_2(t)$ (rad)	46
Şekil 3.7 Moment girişleri (N - m)	46
Şekil 3.8 PID hesaplanmış moment kontrolcüsü	47
Şekil 3.9 Hesaplanmış moment kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) PD kontrol ...	49
Şekil 3.10 Hesaplanmış moment kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) PID kontrol	49
Şekil 3.11 Hesaplanmış moment kontrolcü moment girişleri (N - m) PD kontrol.....	50
Şekil 3.12 Hesaplanmış moment kontrolcü moment girişleri (N - m) PID kontrol	50
Şekil 3.13 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 10rad / s$	54
Şekil 3.14 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 25rad / s$	54
Şekil 3.15 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 50rad / s$	55
Şekil 3.16 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 10rad / s$	56
Şekil 3.17 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 25rad / s$	56
Şekil 3.18 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 50rad / s$	57
Şekil 4.1 Başlangıç Pozisyonu $q = [0 \ 0 \ \pi/2]$	59
Şekil 4.2 Son pozisyon $q = [\pi/2 \ \pi/4 \ \pi/2]$	59
Şekil 4.3 İstenen yörünge, hız ve ivme grafiği.....	60
Şekil 4.4 Ters dinamik kontrol şeması	60
Şekil 4.5 Robot kolu	61
Şekil 4.6 Yörünge izleme hataları	61
Şekil 4.7 Yörünge izleme hataları	62

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 2.1 Anthropomorphic kol için denavit – hartenberg parametreleri	12
Çizelge 4.1 Üç serbestlik dereceli anthropomorphic kolun parametreleri	58



ÖNSÖZ

İnsan hayatında bir çok evre vardır, bu evrelerin bazılarının farkına varabiliriz, bazıları ise biz farkına varıncaya kadar uçup gider. İşte bu tez yeni bir evrenin başlangıcıdır. Neden sonu değildir diye merak ediyorsanız, insan hayatındaki bu evrelerin bana göre aynı akademik yaşamın bir sonu olmadığı gibi sonu yoktur. Yüksek lisans dönemi boyunca işte en çok beni etkileyen öğretim bu olmuştur. Yani bir şeyler devam edip de ortaya meyvelerini çıkardıkça hep başlangıçta olduğunuzu görmeniz. Şu an kendimi sonu olmayan bir başlangıç evresinde hissediyorum bilmiyorum belki de geçici bir duygu.

Lisans hayatım boyunca beni hep iten bu sayede unutamayacağım (unutulmayacak) başarılar elde etmemi sağlayan, daha sonra hiç aklımda yokken beni akademik yaşantı içersine sokan (bin bir mücadele ile) son olarak da robot virüsünü bulaştırıp beni giriş kapısına bırakan, sevgili hocam Prof. Dr. Galip Cansever'e teşekkür etmek isterim.

Onların karşılıksız fedakarlıkları olmasa idi sanırım bu anı asla yaşayamazdım. Bu nasıl bir bağdır ki bir insanı yirmi yıl taşır ve hayıflanmaz. Benim tamam dediğim yerde gelip beni tekrar sırtına alır. Umarım hayat boyu size layık olurum. Evet aileme yani anneme, babama ve abime teşekkür ederim.

Yüksek lisansta tanıştığım tezin oluşmasında büyük faydası bulunan Doç. Dr. Hakan Temeltaş'a, oda arkadaşlarım Janset Kuvulmaz ve Muharrem Mercimek'e teşekkür ederim.

Yine yüksek lisansta tanıştığım ama uzun yıllardır tanıdığımı inandığım eski öğrencim, yeni oda arkadaşım, mesai arkadaşım ve sıkı dostuma Türker Türker'e tezime ve bana olan desteğinden dolayı teşekkür ederim

ÖZET

“Robot” kelimesi ilk olarak 1900’lerin başında bir tiyatro oyununda kullanılmıştır. Burada robotlar insanlar kadar zeki, insan tipinde ve yorulmak nedir bilmeyen makineler olarak tasarlanmışlardır.

II. Dünya.savaşından sonra robot üzerinde ilk çalışmalar başlamıştır. 1960’lı ve 1970’li yıllarda ise büyük bir ivme kazanmıştır. İlk başlarda PID türü klasik kontrolörler kullanılırken, günümüzde dayanıklı ve uyarlanabilir gibi karmaşık kontrol algoritmaları geliştirilmiştir ve robot kollarına uygulanmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde robot kollarının matematiksel modellenmesi üzerine kullanılan tüm metotlara değinilmiştir. Yine aynı bölüm içersinde tezin çalışma konusu olan yapı ile ilgili yani üç serbestlik dereceli anthropomorphic robot kola ait modeller çıkarılmıştır.

Bir robot manipülatör yüksek hızlarda çalıştığı zaman, doğrusal olmamanın getirdiği etkiler, zamanla – değişen katsayılar ve boşluk, sürtünme gibi ilave belirsizlikler sistem hatasının büyümesinde etkili olurlar. Bu dış etkenli giriş veya bozucuların istenmeyen etkileri kompanze edilmek zorundadır. İşte bu noktada sistemin kontrolü gerekmektedir. Bir robot kolu temelde iki sınıf kontrolcü ile kontrol edilebilir. Biri hesaplanmış moment kontrol sınıfındaki kontrolcüler, diğeri akıllı veya uyarlanabilir kontrolcüler ile yapılan kontroldür. Üçüncü bölümde hesaplanmış moment kontrol ailesi üzerine Eğilinmiş ve bu sınıftan kontrolcüler ile uygulamalar yapılmıştır. Sonuç kısmında ise ihtiyaçların ve karmaşanın nasıl gidereleceği üzerine yorumlar yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: 3-dof robot manipülatör, robot kolu modellenmesi, robot kolu kontrolü, hesaplanmış moment kontrol, robot hareket denklemleri.

ABSTRACT

The word robot was introduced into the english language in 1921 by the play- wright Karel Capek in his satirical drama. In this work, robots are machines that resemble people, but work tirelessly.

Early work leading to today's industrial robots can be traced to the period immediately following World War II. Researchment about robotics have been positive acceleration at the period of 1960's to 1970's. Conventional control technics (PD, PID) was chosen for controlling the robot manipulator at that day. Today we have too many opportunity to control that, like robust control, adaptive control.

Modelling of robotic manipulator is focused on at the second part of this thesis. At the same time this part figures out mathematical models about 3dof anthropomorphic robot manipulator that belongs to our research subject's structure.

When a robot manipulator operates at high speed, the effects of nonlinearities, time – varying coefficients, and additional uncertainties such as backlash, fraction, etc., may cause the system error to become large. These unwanted effects of various external inputs or disturbances must somehow be compensated. At that point we have two classes control technics. One of these classes is called computed torque control. Other class is called intelligent or adaptive controllers.

Third part of this thesis tend on computed torque control, and the exercises about this class controllers are conducted. Result part discusses to simplify the complexity.

Keywords: 3-dof robot manipulator, modelling of robot manipulator, control of robot manipulator , Computed torque control, equations of robot motion.

1. GİRİŞ

Endüstriyel uygulamalar gün geçtikçe bilgisayar tabanlı sistemlere doğru gitmektedir. Bu sahada yapılan işlemlerin bir çoğunda sadece o iş için geliştirilmiş makineler tarafından yapılmaktadır. Bu tip makinelerin maliyet bakımından yüksek olması ve tek bir özel amaca yönelik olması araştırmacıları başka çözümlere yöneltmiştir. İşte bu noktada onlara çokta yabancı olmayan robot kavramı ortaya çıkmıştır. Robotlar çevreye kolaylıkla uyum sağlayabilirler. Görevleri kolaylıkla değiştirilebilir ve aynı zamanda üretim maliyetini düşürürler.

“Robot” kelimesi çekoslovakçadaki “Robota” sözünden gelmektedir. Webster’s sözlüğünde şu şekilde tanımlanmıştır: “insanların işlerini yapabilen otomatik bir alettir.” Bu tanıma göre, günlük hayatta kullandığımız bir çok küçük büyük alet bu tanıma girmelidir. Ama giremez. Robot Institute of America daha kesin olan şu açıklamayı yapmıştır: “Robot; özel aletleri, parçaları bir yerden bir yere götürmek için tasarlanmış, tekrar programlanabilir çok fonksiyonlu bir makinedir.”(Fu vd. 1987)

Endüstriyel robotları; dönel ve doğrusal eklemlerle bir araya getirilmiş, esnek olmayan bağlantılardan oluşmuş, genel amaçlı, bilgisayar kontrollü robot kolları olarak tanımlayabiliriz.

Genellikle robot kolların kontrolünde kullanılan hesaplanmış moment kontrol tekniği; hareketlendirici motor ve pinomatik sistem ile ilgili linkin belirli bir açısal pozisyona, belirli bir açısal hız ve belirli bir ivme ile oturması için gerekli moment değerinin matematiksel olarak her örnekleme zamanında hesaplanması esasına dayanmaktadır.

2. ROBOT KOLUNUN MODELLENMESİ

2.1 Robot Kolunun Kinematik Modellenmesi

2.1.1 Giriş

Mekanik bakış açısıyla, robot manipülatörleri şematik olarak, rijit eklemlerin kinematik zincirinden oluşmaktadır. Bu zincir içinde tüm linkler hareketleri sırasında diğer linkleri ve son noktayı etkilemektedir. Buda her eklemin zincirdeki bir önceki eklemlerle olan ilişkisinden çıkarılabilir. Bu bölümde, modellemede ihtiyaç duyulacak matematiksel kavramlar, doğrusal cebrik olarak son noktanın pozisyonu ve yönelimini eklem değişkenleri ve mekanik sabitler yardımıyla elde edilmesini, son noktanın pozisyonu ve yönelimi ile eklem pozisyonlarının çıkarımı incelenecektir. (Spong, 1989), (Craig, 1989)

2.1.2 Matematiksel Kavramlar

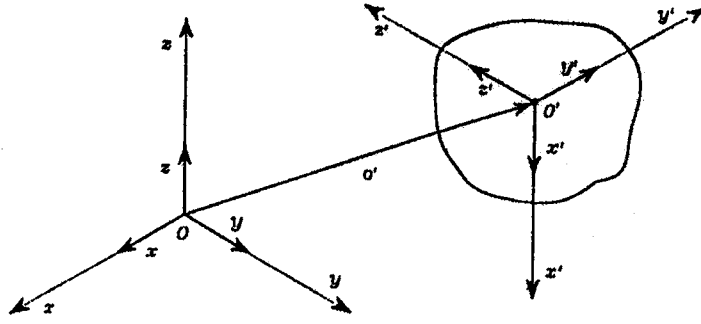
2.1.2.1 Rijit Cismin Konum ve Yönlenmesi

Rijit bir cisim uzayda, referans koordinat eksenine göre pozisyonu ve yönelimi ile gösterilebilir.

Konum, rijit cisme göre saptanmış bir keyfi noktanın koordinatları tarafından temsil edilebilir. Şekil 2.1 de görüldüğü gibi, O-xyz, toprağa yerleştirilmiş bir koordinat sistemi ve O' noktası rijit cisme göre saptanmış bir keyfi nokta olarak ele alınsın. Bu durumda rijit cismin konumu, O-xyz koordinat sistemine göre

$$O' = \begin{bmatrix} O'_x \\ O'_y \\ O'_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

3x1'lik sütun vektörü ile belirlenir.



Şekil 2.1 Rijit cismin konum ve yönelmesi

Rijit cismin yönelmesini göstermek üzere, x', y' ve z' koordinat eksenleri rijit cisme şekildeki gibi tutturulmuştur. Bu eksenler rijit cisimle hareket eden $O'-x'y'z'$ gibi başka koordinat eksenini oluştururlar. Rijit cismin yönelmesi, bu koordinat eksenlerinin yönleri vasıtasıyla açıklanır. (Sciavicco vd.,1999)

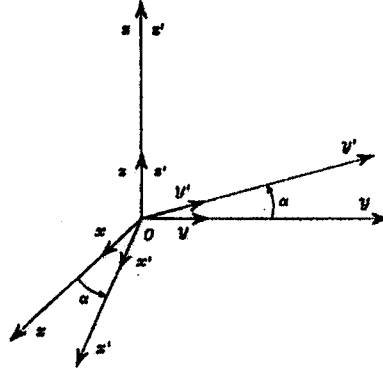
$$\begin{aligned} x' &= x'_x x + x'_y y + x'_z z \\ y' &= y'_x x + y'_y y + y'_z z \\ z' &= z'_x x + z'_y y + z'_z z \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1.2.2 Dönüşüm Matrisleri ve Düzenlenmesi

Rijit cismin referans koordinat eksenindeki yönelimini (2.2) numaralı denklemdeki üç birim vektör ile gösterebiliriz. Dönüşüm matrisi denklem (2.3) deki gibidir.

$$R = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'^T x & y'^T x & z'^T x \\ x'^T y & y'^T y & z'^T y \\ x'^T z & y'^T z & z'^T z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Şekil 2.2'deki O-xyz referans koordinat eksenini z eksenini etrafında α açısıyla döndürüldüğünde oluşan yeni O-x'y'z' koordinat ekseninin birim vektörleri (2.4) numaralı denklemdeki gibi tanımlanabilir.



Şekil 2.2 O-xyz eksen takımının z eksenini etrafında α açısı ile dönmesi

$$x' = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad y' = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Bundan dolayı O-xyz koordinat eksenine göre O-x'y'z' koordinat ekseninin dönüşüm matrisi denklem (2.5) deki gibidir.

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

bu dönüşüme benzer koordinat eksenini y ekseninde β açısıyla, x ekseninde γ açısıyla da yaptığı dönüşümlerinde benzer şekilde denklem (2.6) ve denklem (2.7) deki gibi gösterilebilir.

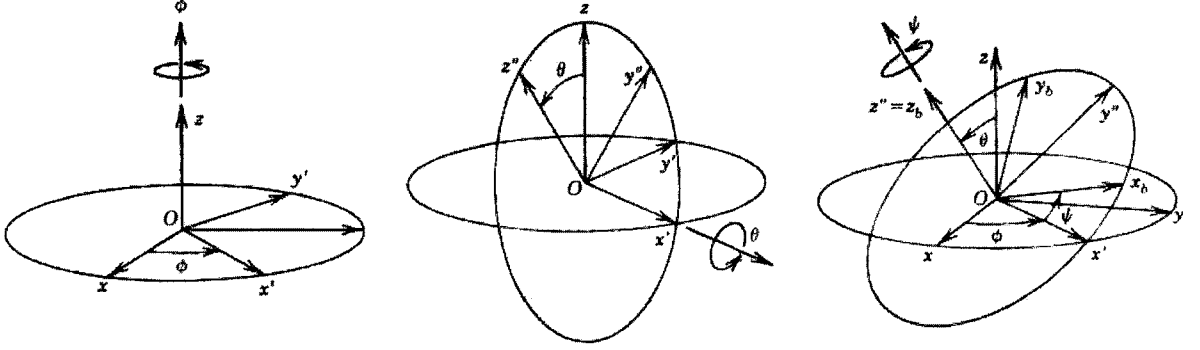
$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.2.3 Euler Açıları

Birbirinden bağımsız üç nicelik olan euler açıları ile dönüşüm matrislerini belirlemek daha genel bir metottur. Şekil 2.3 de gösterilen referans koordinat eksenini ile döndürülmüş

koordinat eksenleri arasında oluşan euler açıları göz önünde bulundurulduğunda, 0-xyz koordinat eksenleri ile ilişkili O-x'y'z' koordinat ekseninin yönelmesi belirtilen bu üç açı (θ, ϕ, ψ) ile belirlenebilir. İlk olarak z eksenini boyunca ϕ açısıyla, sonra oluşan koordinat ekseninde x eksenini boyunca θ açısıyla ve son olarak oluşan koordinat ekseninde z eksenini boyunca ψ açısıyla döndürüldüğünde temel dönüşüm matrisimiz olan R_0^1 türetilmiş olacaktır. (Spong,1989)



Şekil 2.3 Euler Açılarının gösterimi

$$\begin{aligned}
 R_0^1 &= R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} \\
 &= \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bir diğer bağımsız açı setleri (roll=Yalpa, pitch=sapma, Yaw=yunus) rijit cisim yönelmesini tanımlamak üzere robotikte genişçe kullanılır. Sapma ve yunus açılarına karışıklık gelen y ve x eksenleri etrafındaki dönmeyi simgeler.

2.1.2.4 Homojen Dönüşümler

Önceki kısımda belirtildiği gibi referans koordinat eksenine göre rijit cisim üzerindeki uygun bir noktanın pozisyonunu göstermek, rijit cismin uzaydaki pozisyonunu belirtmemiz için yeterlidir. Yönelimi ise cismin üzerinde bulunan eksen takımının birim vektörleri ile tayin edilebilir. Şekil 2.4'de görüldüğü gibi cisim üzerinde keyfi olarak seçilen P noktası ile referans koordinat eksenleri arasındaki vektör p^0 vektörü, iki koordinat eksenleri orijinleri

arasındaki vektör O_1^0 vektörü, seçilen bu P noktası ile yeni koordinat sisteminin orijinin arasındaki vektör p^1 vektörü ve bu iki koordinat eksenindeki dönüşüm matrisi ise R_1^0 dönüşüm matrisidir. (Sciavicco vd.,1999) Geometrik temel kavramlardan yararlanarak P noktasının referans koordinat eksenindeki pozisyonu (2.9) denklemiyle gösterilebilir.

$$p^0 = O_1^0 + R_1^0 p^1 \quad (2.9)$$

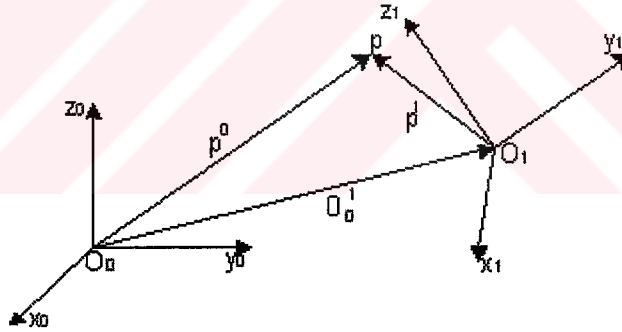
Bundan dolayı denklem (2.9)iki koordinat eksenindeki koordinat dönüşümünü, iki eksen arasına konulmuş vektörler yardımıyla göstermektedir.

Denklem(2.9) her iki tarafı R_1^{0T} ile çarpılırsa ters dönüşüm elde edilebilir.

$$p^1 = -R_1^{0T} O_1^0 + R_1^{0T} p^0 \quad (2.10)$$

Denklem (2.10) dönüşüm matrisinin denklem (2.11) deki özelliğinden yararlanarak denklem (2.12) deki halini alır.

$$R_i^j = (R_j^i)^{-1} = (R_j^i)^T \quad (2.11)$$



Şekil 2.4 P'nin farklı koordinat eksenlerde gösterimi

$$p^1 = -R_0^1 O_1^0 + R_0^1 p^0 \quad (2.12)$$

İki farklı eksen takımında gösterilen aynı P noktası ile birlikte, bu iki koordinat eksenindeki ilişkiyi tam olarak gösterebilmek için genel p vektörü dördüncü birim vektörü eklenerek oluşturulan $\tilde{p}$ vektörünün homojen temsili gerekmektedir.

$$\tilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

(2.9) bağıntısındaki p^0 ve p^1 vektörleri için bu temsili seçerek, koordinat dönüşümü (2.14)

numaralı denklemde olduğu gibi (4x4) bir matris olarak yazılabilir.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & O_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & -R_0^1 O_1^0 \\ O^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Dönüşüm matrisleri için belirtilen bazı özellikler A matrislerinde geçerli olmadığı unutulmamalıdır.

$$A^{-1} \neq A^T \quad (2.16)$$

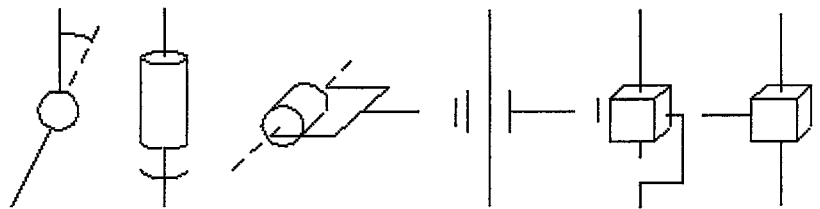
Sonuç olarak homojen dönüşüm matrisi iki eksen takımı arasındaki koordinat dönüşümünü göstermektedir. Önceki bölümde belirtildiği gibi eğer orijinleri birbiri üzerinde ise bu dönüşüm sadece dönüşüm matrisi ile gösterilebilir. Anlatılanlara paralel olarak şu çıkarımı yapmak oldukça kolaydır, birbirini izleyen koordinat eksenleri için dönüşüm (2.17) deki işlem ile birleştirilebilir.

$$\tilde{p}^0 = A_1^0 A_2^1 \dots A_n^{n-1} \tilde{p}^n \quad (2.17)$$

2.1.3 Direk Kinematik

2.1.3.1 Açık Kinematik Zincir

Bir manipülatör kol içindeki her bir link (bağ) elemanının konum ve yönlenmesini tanımlamak için homojen dönüşüm kullanılacaktır. Manipülatörlerde temelde iki tip eklem vardır bunlar dönele (revolute) ve eksensel (prizmatik) eklemlerdir ve Şekil 2.5 de gösterilmektedir.

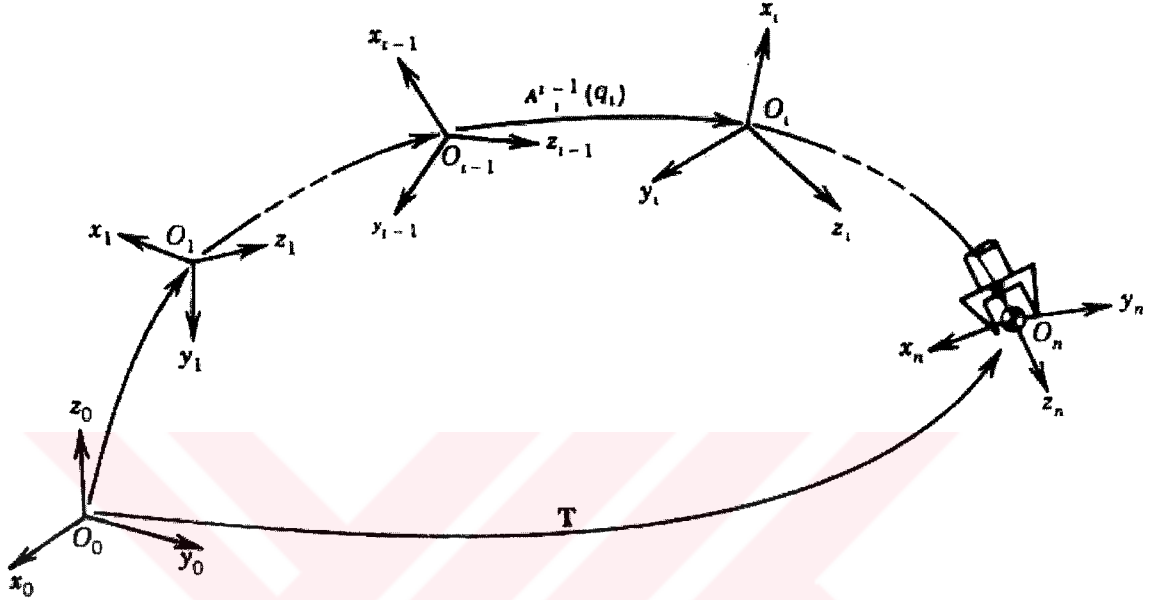


Şekil 2.5 Eklemlerin genel gösterimi

Bir manipülatör kolu temel olarak bir kinematik yapı içerisinde rijit cisim serilerinden oluşur. Şekil 2.6, rijit cisimlerin seri bağlantıları ile modellenmiş bir manipülatör

gösterilmektedir. seri veya açık çevrim yapısı içindeki böyle bir bağlantıdan açık kinematik zincir olarak bahsedilir.

Açık kinematik zincirin her bir elemanı Şekil 2.6’de görüldüğü gibi “0” dan “n”e seri olarak numaralanır.



Şekil 2.6 Açık Kinematik Zincirde koordinat dönüşümü

Genellikle toprağa yerleştirilmiş temel (base) link uygunluk açısından “0” olarak numaralanır. En uzak mesafedeki link, n olarak numaralandırılır. Bir manipülatör kolu, son linke bağlı bir end- efektörün hareketi yoluyla bir görevi yerine getirdiğinden, esas ilgi alanımız son link hareketinin analizi üzerinde odaklaşmalıdır.

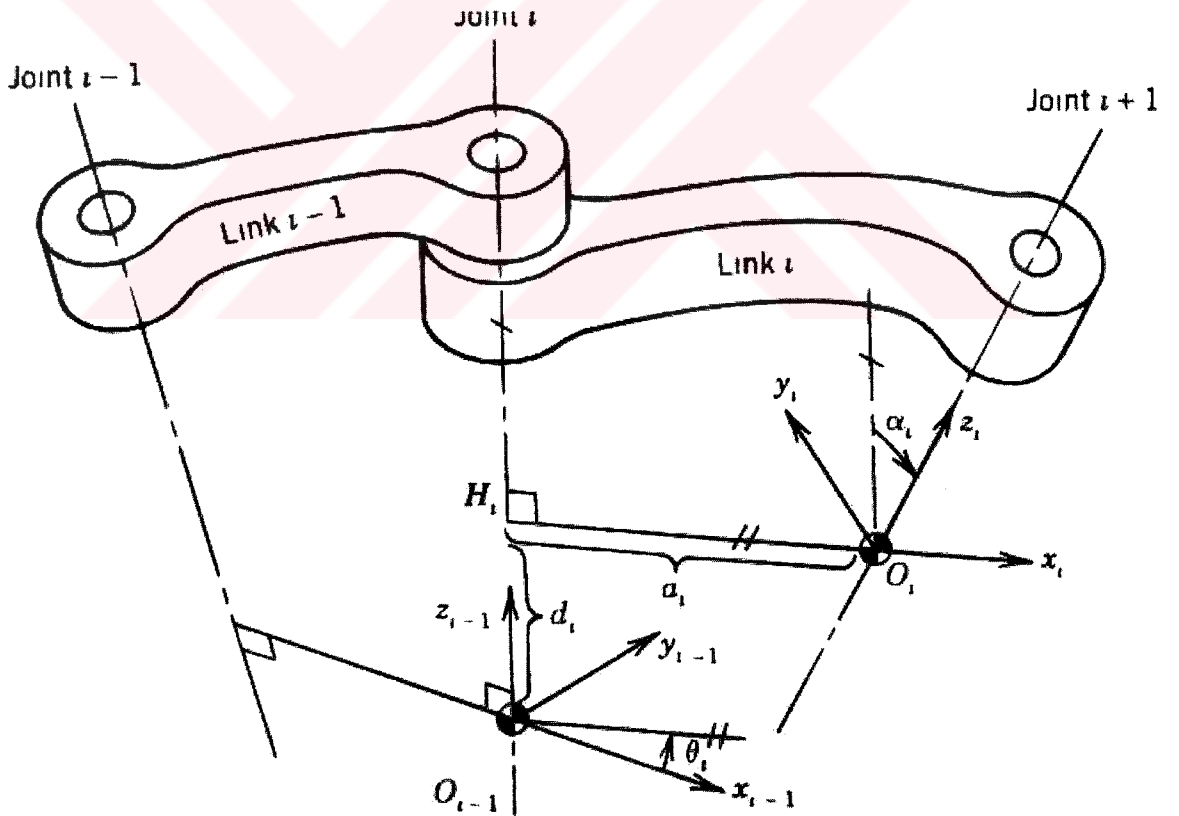
End – efektörün konum ve yönelmesini belirlemek üzere son linke O_n – x_ny_nz_n koordinat sistemi iliştilirsin. Koordinat sisteminin yeri diğer O₀ – x₀y₀z₀ sistem referansına göre (yani temel link) tanımlanır. End – efektörün hareketi, temel ve son link arasındaki orta linklerin hareketiyle olmaktadır. Böylece end – efektörün yeri, temelden uca seri bağlı her bir link elemanının konum ve yönlenmesi araştırılmak suretiyle tespit edilebilir. Bu amaca ulaşmak için, her bir linke bir koordinat sistemi konulur, yani O_i – x_iy_iz_i,(i). Linke konulur.

O_{i-1} – x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1} sistemine göre O_i – x_iy_iz_i sisteminin konum ve yönelmesi, bu sistemler arasında homojen dönüşümü tanımlayan 4x4 boyutlu matris kullanılarak belirlenir. End – efektörün konum ve yönlenmesinden sonra, son sistemden temel sisteme geriye doğru ardışıl

dönüşümler ile elde edilir. Değinilen manipülatör kolu bir açık kinematik zincir olarak varsayıldığından, temel sistem referansına göre end – efektörün yerini bulmak için seri dönüşümler uygulanır. Link (i-1) ve link (i) arasındaki eklemden (i). Eklem olarak bahsedilir. Her bir eklem, eklemin yer değiştirmesine sebep olan bir bireysel hareketlendirici (sürücü ya da uyarıcı) tarafından sürülür. Böylece end – efektörün konum ve yönlenmesi n – adet eklem yer değiştirmesi ile belirlenir. Angeles J. (1982). Takip eden bölümün esas amacı end – efektörün yeri ve eklem yer değiştirmeleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulmak olacaktır.

2.1.3.2 Denavit – Hartenberg Gösterimi

Bu bölümde bir açık kinematik zincir içersinde yer alan bir çift komşu link arasındaki kinematik ilişkinin tanımı ele alınacaktır. Denavit – Hartenberg gösterimi bu kinematik ilişkiyi tanımlayan bir sistematik metot olarak takdim edilecektir. Metot, rijit cisim konum ve yönlenmesinin 4x4 boyutlu matris gösterimi ile temsil edilmesi esasına dayanır ve kinematik ilişkiyi tanımlamak üzere minimum sayıda parametre kullanır. (Denavit J., vd., 1955)



Şekil 2.7 Denavit – Hartenberg gösterimi

Şekil 2.7, (i-1). ve (i). link çiftiyle ve onların ilgili eklemlerini (i-1,i ve i+1) göstermektedir.

(i+1). Eklem boyunca bir z_i eksenini seçilir.

Z_i eksenini z_{i-1} ve z_i eksenlerinin genel normalinin* kesiştiği noktaya O_i orijini, z_{i-1} ekseninin de genel normal ile kesiştiği noktaya O_i' yerleştirilir.

Eklem i den eklem i+1'e doğru, z_{i-1} ve z_i eksenlerinin genel normalini boyunca bir x_i eksenini seçilir.

Sağ el kuralına göre eksen takımını tamamlamak için uygun y_i eksenini seçilir.

İki sistemin bağıl yeri aşağıdaki dört parametre tarafından saptanır.

a_i O_i ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe

d_i O_{i-1} ile O_i' orijinleri arasındaki mesafe

α_i z_{i-1} ve z_i eksenleri arasındaki açı, x_i eksenini için saat yönünün tersi istikamette ise pozitif

θ_i x_{i-1} ve x_i eksenleri arasındaki açı, z_{i-1} eksenini için saat yönünün tersi istikamette ise pozitif

a_i ve α_i parametreleri, link geometrisi tarafından saptanan sabit parametrelerdir. a_i link uzunluğunu, α_i iki eklem eksenleri arasındaki burulma açısını simgeler. Diğer iki parametrelerden d_i ve θ_i den biri eklem hareket ettikçe değişir. Bir dönel eklem için d_i parametresi sabit iken θ_i parametresi eklem yer değiştirmesini belirleyen değişkendir. Diğer yandan, bir eksenel eklem için ise, θ_i sabit iken d_i parametresi eklem yer değiştirmesini belirleyen değişken olacaktır. Bu noktada bu iki koordinat eksenleri arasındaki koordinat dönüşümü aşağıdaki bir dizi dönüşüm ve matematiksel işlem sayesinde çıkarılabilir.

- Seçilen eksen takımını d_i kadar z_{i-1} eksenini boyunca öteleyip θ_i açısıyla döndürüp, yeni oluşan eksen takımıyla olan ilişkisini (2.18) numaralı homojen dönüşüm matrisi ile gösterelim.

$$A_n^{i-1} = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} & 0 & 0 \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Şimdi ise oluşan yeni eksen takımını a_i kadar x_i eksenini boyunca öteleyip α_i açısıyla döndürüp, yeni oluşan eksen takımıyla olan ilişkisini (2.19) numaralı homojen dönüşüm matrisi ile gösterelim.

* İki çizgi arasındaki en az mesafeyi içeren çizgi bu iki çizgi arasındaki genel normaldir.

$$A_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & C_{\alpha_i} & -S_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

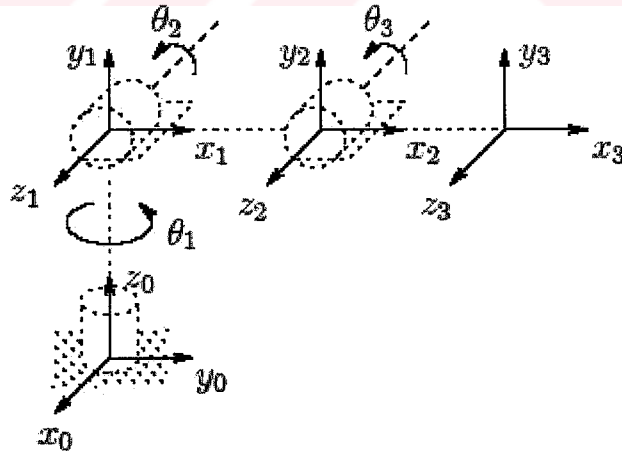
Sonuçta bu ortaya çıkan iki koordinat dönüşüm matrisi çarpılarak bir tek (2.20) deki dönüşüm matrisi elde edilir.

$$A_i^{i-1}(q_i) = A_i^{i-1} A_i^{i'} = \begin{bmatrix} C_{\theta_i} & -S_{\theta_i} C_{\alpha_i} & S_{\theta_i} S_{\alpha_i} & a_i C_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} & C_{\theta_i} C_{\alpha_i} & -C_{\theta_i} S_{\alpha_i} & a_i S_{\theta_i} \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

A_i^{i-1} matrisi (i). sistemin (i-1). Sisteme göre olan konum ve yönlenmesini gösterir. Önceden görüldüğü gibi, A_i^{i-1} in son 3x1 lik sütun vektörü O_i orijinin konumunu verirken, ilk üç 3x1 lik sütun vektörleri ise (i). sistemin koordinat eksenlerinin doğrultman kosinüslerini içerecektir. (Paul R.P., 1981)

2.1.3.3 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Direk Kinematik Modeli

Şekil 2.8 deki anthropomorphic kolu göz önünde bulundurduğumuzda bu kolun iki linkli doğrusal kolun dönel bir eklem eklenmiş hali olduğu gözlemlenebilir. Bu bağlamda bu tip bir eklem yapısı anthropomorphic tipteki endüstriyel robotlarda kullanılmaktadır.



Şekil 2.8 Anthropomorphic robot kolu

Şekilde 0. sistem z_0 ve z_1 eksenlerinin kesiştiği yerde seçilmiştir ($d_1=0$). Bunun yanında z_1 ve z_2 eksenleri paralel ve x_1 ve x_2 eksenleri ise bu iki eklem ile iki linkli düzlemsel bir kol oluşacak şekilde seçilmiştir. Belirtilen şekillerde eksen takımları yerleştirildiğinde, oluşan

sistemler arasındaki ilişkiyi gösteren denavit – hartenberg parametre çizelge 2.1 deki gibidir.

Çizelge 2.1 Anthropomorphic kol için denavit – hartenberg parametreleri

Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

Bulunan bu parametreler ile dönüşüm matrisini oluşturan A_1^0, A_2^1, A_3^2 matrisleri denklem (2.20) yardımıyla aşağıdaki gibi türetilir.(Paul R.P., vd., 1981)

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

denklem (2.21),(2.22),(2.23) ile direk kinematik fonksiyonu olan (2.24) bağıntısı türetilir

$$T_3^0(q) = A_1^0 A_2^1 A_3^2 = \begin{bmatrix} C_1 C_{23} & -C_1 S_{23} & S_1 & C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1 C_{23} & -S_1 S_{23} & -C_1 & S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_2 S_2 + a_3 S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

bağıntıdaki $q = [\vartheta_1 \ \vartheta_2 \ \vartheta_3]^T$ eşitliğinde olduğu gibi eklem açısal pozisyonlarından oluşan bir matristir.

2.1.4 Ters Kinematik

2.1.4.1 Giriş

Direk kinematikte türetilen eşitlik; eklem yer değiştirmeleri ve meydana gelen end – efektör konum ve yönlenmesi arasındaki fonksiyonel ilişkiyi sağlamaktadır. Eklem yer değiştirme değerleri kinematik denklemin sağ yanına konularak, karşılık gelen end – efektör konum ve yönlenmesi hemen bulunur. Verilen eklem yer değiştirme takımı için end – efektör konum ve yönlenmesini bulma problemi direk kinematik problemi olarak bilinir. Bu, bilinen eklem yer değiştirmeleri için kinematik eşitliğin sağ yanını değerlendirmekten ibarettir. (Sciavicco vd.,1999)

Bu bölümde, bir manipülatör kolun end – efektörünün belirli konum ve yönlenme ile hareket etme problemi ele alınacaktır. End – efektörü belirli konum ve yönlenmeye sevk eden eklem yer değiştirmeleri bulmak zorundadır. Bu önceki problemin tersidir, bu sebeple ters kinematik olarak bilinir.

Bunun yanında ters kinematik problem direk kinematik probleme göre aşağıdaki nedenlerden dolayı çok daha karmaşıktır. (Spong, vd., 1989)

- Çözülmesi gereken denklem genellikle doğrusal - olmayan ve her zaman kapalı formda bir sonuç bulunamayabilecek tiptedir.
- Birden çok çözüm oluşabilmektedir.
- Sonsuz çözüm oluşabilir.
- Kabul edilebilir bir çözüm çıkmayabilir.

Burada belirtilen birden fazla çözüm yapının serbestliğine veya hareketliliğine bağlı değil sistemin denavit – hartenberg tablosunda sıfır olmayan parametre sayısına bağlıdır. Örnek olarak altı serbestlikteki bir robot kolunda eğer hiç bir eklem limiti yok ise makul 16 çözüm bulunabilir. Bu durum eklemlerde gerekli limitler yapılarak makul çözümler azaltılabilir.

2.1.4.2 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Ters Kinematik Modeli

Şekil 2.8 deki anthropomorphic kol dikkate alındığında istenen end – efektör pozisyonuna (p) uygun eklem değişkenlerinin ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) bulunmasıdır. Bu tip bir kolun direk kinematiği bilindiği gibi bir önceki kısımda hesaplanmış ve denklem (2.24) de verilmiştir. Ters kinematik problemin çözümü ile ilgili bir dizi geometrik işlem ve çözüm aşağıdaki gibidir;

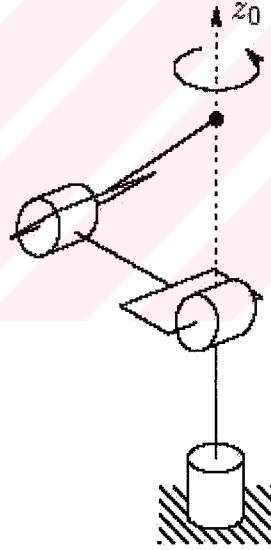
Şekil 2.9 da görüldüğü gibi θ_1 açısı direk olarak end – efektörün pozisyonundan temel geometrik bir yaklaşımla çıkarılabilir.

$$\theta_1 = A \tan(p_x, p_y) \quad (2.25)$$

ters kinematikle ilgili zorluklardan bahsettiğimiz bölümde belirttiğimiz gibi burada da birden fazla çözüm mevcuttur. Örneğin $A \tan(1, -1) = -\frac{\pi}{4}$ iken $A \tan(-1, 1) = +\frac{3\pi}{4}$ dir. Bundan dolayı kabul edilebilir bir ikinci çözüm vardır.

$$\theta_1 = \pi + A \tan(p_x, p_y) \quad (2.26)$$

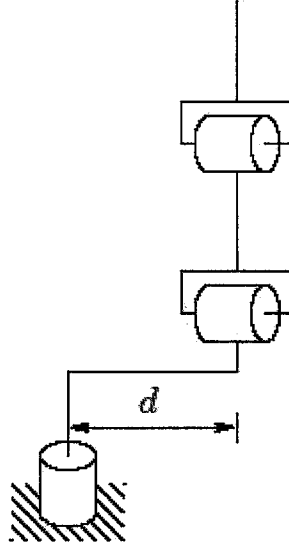
su an gözüken diğer bir kaç kompleksliği şöyle sıralayabiliriz; p_w noktası Şekil 2.9 da olduğu gibi z_0 ekseninde olursa p_x ve p_y sıfır olacağından θ_1 açısı için sonsuz çoklukta çözüm olacaktır.(Spong, vd., 1989)



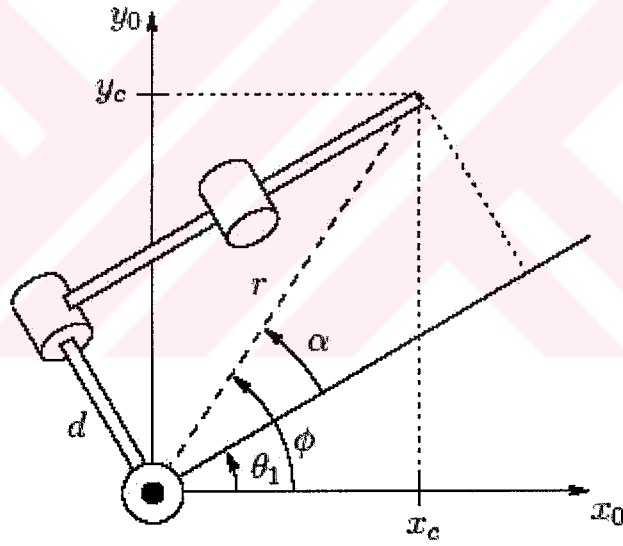
Şekil 2.9 Sonsuz θ_1 açısı çözümü

Bu durum Şekil 2.10 da görüldüğü gibi bir ofset d_1 ekleyerek çözülebilir. Böylelikle sadece iki kabul edilebilir çözüm kalmış olur. Bunlarda Şekil 2.11 ve 2.12 de görüldüğü gibi sol kol ve sağ kol olarak adlandırılır.

Şekil 2.11 deki sol kol konfigürasyonunda geometrik olarak aşağıdaki ifadeleri türetebiliriz.



Şekil 2.10 Dirsek manipulatörlerindeki omuz ofseti

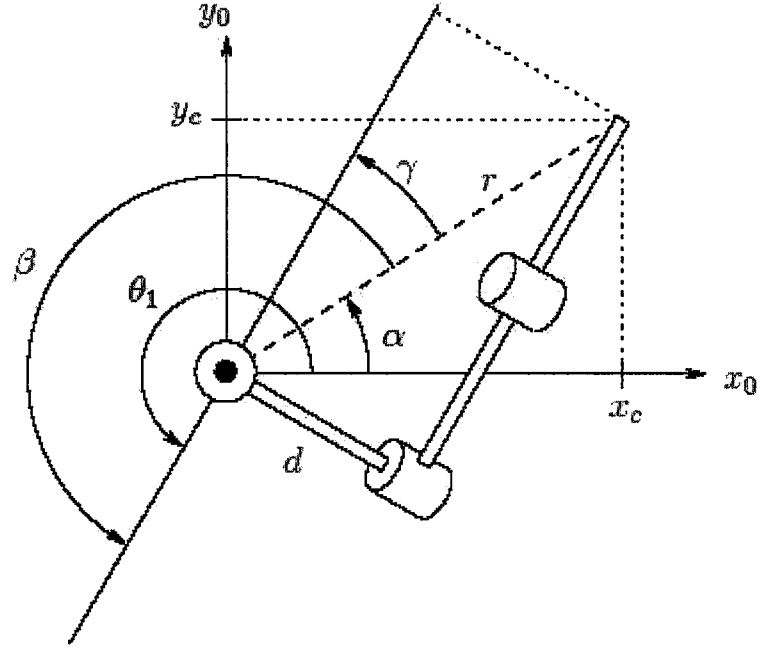


Şekil 2.11 Sol kol konfigürasyonu

$$\vartheta_1 = \phi - \alpha \quad (2.27)$$

$$\phi = A \tan(p_x, p_y) \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= A \tan(d_1, \sqrt{r^2 - d_1^2}) \\ &= A \tan(d_1, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

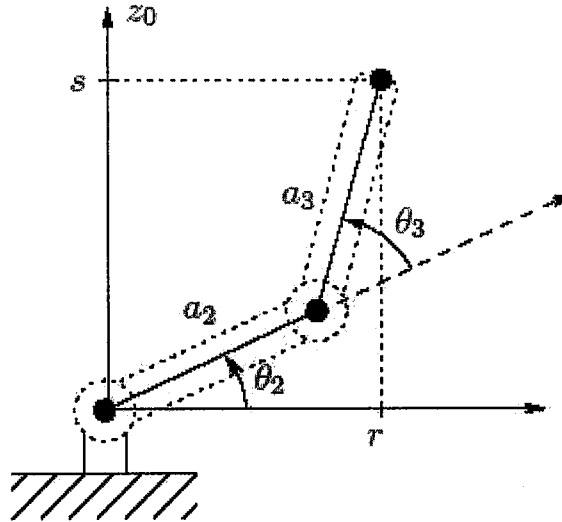


Şekil 2.12 Sağ kol konfigürasyonu

Şekil 2.12 de verilen ikinci çözümde gösterilen sağ kol konfigürasyonunda ise

$$\theta_1 = \text{Atan}(p_x, p_y) - \text{Atan}(d_1, -\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_1^2}) \quad (2.30)$$

θ_2, θ_3 açılarını bulmak için ise Şekil 2.13 deki düzlemsel formda ele alacağız.



Şekil 2.13 Link 2 ve 3 için düzlemsel form

$$\cos \theta_3 = \frac{r^2 + s^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

$$= \frac{p_x^2 + p_y^2 + (p_z - d_1)^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} := D \quad (2.31)$$

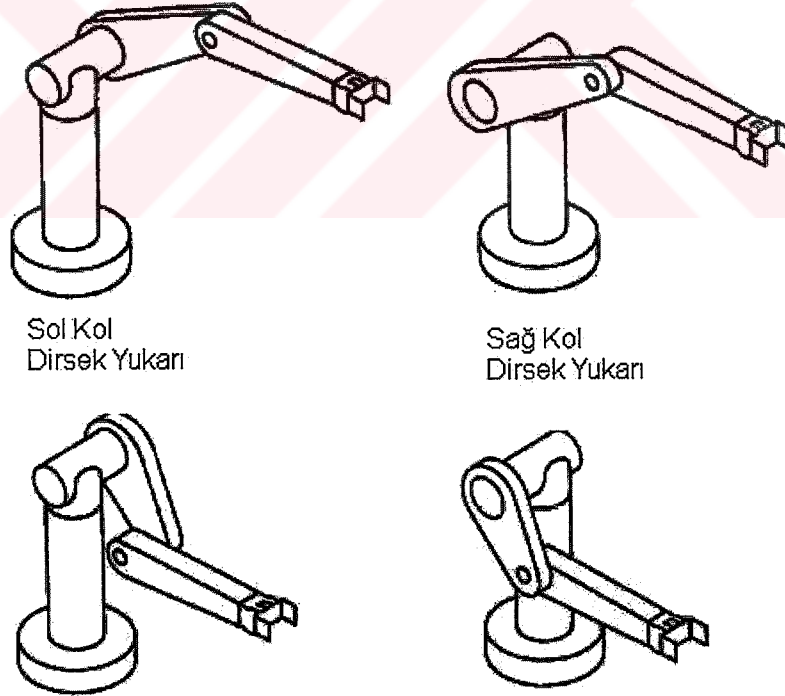
$$\theta_3 = A \tan(D, \pm \sqrt{1 - D^2}) \quad (2.32)$$

buna benzer şekilde θ_2 aşağıdaki gibidir.

$$\theta_2 = A \tan(r, s) - A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3)$$

$$= A \tan(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, p_z - d_1) - A \tan(a_2 + a_3 c_3, a_3 s_3) \quad (2.33)$$

burada θ_3 açısı içinde dirseğin yukarda olması ve dirseğin aşağıda olması olmak üzere iki kabul edilebilir çözüm vardır. Sonuçta Şekil 2.14 de belirtilen sol kol dirsek yukarı, sol kol dirsek aşağı, sağ kol dirsek yukarı ve sağ kol dirsek aşağı olmak üzere dört farklı kabul edilebilir çözüm vardır.



Şekil 2.14 Kabul edilebilir dört çözüm

2.1.5 Manipülatör Jakobiyeni

2.1.5.1 Geometrik Jakobiyen

n serbestlik dereceli bir manipülatörün direk kinematik eşitliği (2.34) deki gibi yazılabilir.

$$T(q) = \begin{bmatrix} R(q) & p(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Bu eşitlikteki $q = [q_1 \dots q_n]^T$ eklemlerin değişkenlerinden oluşan bir vektördür. Manipülatör jakobiyenin esas amacı eklem hızlarının end – efektörün doğrusal ve açısal hızları arasındaki ilişkiyi bulmaktır. Bir başka deyişle end – efektör doğrusal hızı olan $\dot{p}$ ve açısal hızı olan ω 'ı eklem hızları $\dot{q}$ 'nın bir fonksiyonu olan (2.35) ve (2.36) eşitlikleri haline getirmektir.

$$\dot{p} = J_p(q)\dot{q} \quad (2.35)$$

$$\omega = J_o(q)\dot{q} \quad (2.36)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_p \\ J_o \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

geometrik jakobiyeni hesaplayabilmek için dönüşüm matrisinin bir çok özelliğinden ve rijit bir cismin kinematik yapısından faydalanacağız.

$$R(t)R^T(t) = I \quad (2.38)$$

Bilindiği gibi direk kinematik eşitliği end – efektör'ün pozisyon ve yönelimini eklem değişkenleri cinsinden vermekteydi. Fakat buradaki amacımız end – efektörün doğrusal ve açısal hızları ile ilgili olduğundan öncelikle dönüşüm matrisinin zamana bağlı türevini almaktır. (2.38) numaralı denklemin türevini aldığımızda (2.39) eşitliğini elde ederiz.

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = 0 \quad (2.39)$$

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t) \quad (2.40)$$

eşitliğin her iki tarafını $R(t)$ ile çarparsak

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t) \quad (2.41)$$

Bir dizi matematiksel işlem yapıldığında jakobiyeen hesabını kısaca aşağıdaki gibi formülize edip özetleyebiliriz.(Sciavicco vd.,1999) Manipülatör jakobiyeenini bulmak için (2.42) eşitlik yeterlidir. Ama burada görüldüğü gibi bilinmeyen bir iki değişken vardır bunlarda birazdan belirtileceği gibi dönüşüm matrislerinden kolaylıkla elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} J_{p_i} \\ J_{o_i} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} & \text{eksenel} \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} & \text{dönel} \end{cases} \quad (2.42)$$

- z_{i-1} ; R_{i-1}^0 dönüşüm matrisinin üçüncü sütunudur.

$$\begin{aligned} z_{i-1} &= R_1^0(q_1) \dots R_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) z_0 \\ z_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.43)$$

- p ; T_n^0 koordinat dönüşüm matrisinin dördüncü sütununun ilk üç elemanından oluşur.

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= A_1^0(q_1) \dots A_n^{n-1}(q_n) \tilde{p}_0 \\ \tilde{p}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.44)$$

- Aynı şekilde p_{i-1} de T_{i-1}^0 koordinat dönüşüm matrisinin dördüncü sütununun ilk üç elemanından oluşmaktadır.

$$\tilde{p}_{i-1} = A_1^0(q_1) \dots A_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{p}_0 \quad (2.45)$$

2.1.5.2 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Jakobiyeen Hesabı

Robot kolumuzun eklemlerinin hepsi dönel olduğundan denklem (2.42) den yararlanarak jakobiyeen genel denklemimiz (2.46) deki gibi ortaya çıkar.

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times (p - p_0) & z_1 \times (p - p_1) & z_2 \times (p - p_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

denklemde $\times$ ile belirtilen matematiksel işlem vektörel çarpımı simgelemektedir. Gerekli değişkenlerde önceki kısımda belirtildiği gibi koordinat dönüşüm matrislerinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} a_2 C_1 C_2 \\ a_2 S_1 C_2 \\ a_2 S_2 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$p = \begin{bmatrix} C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) \\ a_2 S_2 + a_3 S_{23} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} S_1 \\ -C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

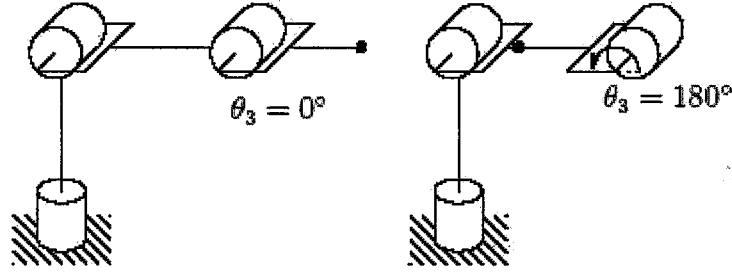
$$J = \begin{bmatrix} -S_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & -C_1(a_2 S_2 + a_3 S_{23}) & -a_3 C_1 S_{23} \\ -C_1(a_2 C_2 + a_3 C_{23}) & -S_1(a_2 S_2 + a_3 S_{23}) & -a_3 S_1 S_{23} \\ 0 & a_2 C_2 + a_3 C_{23} & a_3 C_{23} \\ 0 & S_1 & S_1 \\ 0 & -C_1 & -C_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

2.1.5.3 Teklik

Jakobiyen matris eklem hızlarından oluşan $\dot{q}$ vektörü ile end – efektörün hızının oluşturduğu v vektörü arasındaki ilişkiyi gösteren bir vektördür. Manipülatör teklik noktalarını belirlemek aşağıdaki nedenlerden dolayı önemlidir.(Spong, vd., 1989)

- Teklik, yapıdaki azalan serbestlikleri belirler
- Sistem teklik noktalarında iken ters kinematik için sonsuz çözümler ortaya çıkar
- Teklik noktalarının yakınlarında işletme uzayındaki küçük hızlar eklem uzaylarında büyük hızlara sebep olur.

Teklik temelde ikiye ayrılır. Şekil 2.15 deki gibi sınır tekliği ve iç tekliktir.



Şekil 2.15 Sınır ve iç teklik

Kullanacağımız anthropomorphic robot kolu bu teklik noktalarının incelenmesi için uygun özelliklere sahiptir. Jakobiyen matrisin determinantı alındığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\det J_{11} = a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \quad (2.51)$$

bilindiği gibi bu determinant eşitliğini sıfır yapan noktalar teklik noktalarıdır.

$s_3 = 0$ noktası denklemi sıfıra eşitlediğinden $\theta_3 = 0$ veya π teklik noktalarındandır bunları Şekil 2.15 de görebilmekteyiz. Bundan başka $(a_2 c_2 + a_3 c_{23})$ denklemini sıfıra eşitleyen noktalardan ise Şekil 2.9 da görülen z_0 eksen oluşur. Kısaca bu tip bir robot kolu omuz ofseti kullanılmadığında iki eklem açısı ve bir eksen teklik bölgesini oluşturmaktadır.

2.2 Robot Kolun Dinamik Modellenmesi

2.2.1 Giriş

Robot kol dinamiği, robot kol hareket denklemlerinin matematiksel formülasyonu ile ilgilidir. Bir manipülatörün dinamik hareket denklemleri, o manipülatörün dinamik davranışını tanımlayan matematiksel denklem takımlarıdır. Bu tip hareket denklemleri robot kol hareketinin bilgisayar simülasyonu, robot kol için uygun kontrol denklemlerinin tasarımı ve de robot kolun yapısı ve kinematik tasarımının geliştirilmesi konularında son derece yararlıdır. Bu bölümde, incelememizi daha çok, kontrol amaçlarına uygun dinamik hareket denklemlerinin özellikleri ve formülasyonu üzerinde yoğunlaştırmayı bir kontrolcü bakış açısından gerekli görmekteyiz. (Bucak, 1991) Manipülatör kontrolünde amaç bir takım önceden belirlenmiş sistem performansı ve istenen amaçları karşılamak üzere bir bilgisayar kontrollü manipülatörün dinamik cevabının korunmasını sağlamaktır. Genel olarak, bir manipülatörün dinamik cevabı kontrol algoritmalarının verimine ve manipülatörün dinamik modeline bağlıdır. Kontrol problemi; fiziksel robot kol sisteminin dinamik modellerini elde etmekten ve istenen sistem cevap ve

performansını sağlamak üzere uygun kontrol kural ve stratejilerini belirlemekten ibarettir, işte bu bölüm, özellikle bilgisayar kontrollü robotların dinamik davranış ve özelliklerini modelleme ve geliştirme hakkında olacaktır.

Bir robot kolun gerçek dinamik modeli Newton ve lagrangian mekaniği gibi bilinen fiziksel mekanik kurallarından elde edilebilir. Bu belirlenen geometrik ve eylemsizlik parametreleri yönünden, çeşitli eklemlerden oluşmuş manipülatörler için dinamik hareket denklemlerinin geliştirilmesine imkân sağlar. Lagrange-Euler (L-E) ve Newton-Euler (N-E) formülasyonları gibi geleneksel yaklaşımlar, gerçek robot kol hareket denklemlerini geliştirmek amacı ile sistematik bir şekilde uygulanabilir. Rijit cisim robot kol dinamiğini tanımlayan çeşitli formdaki robot kol hareket denklemleri bu iki formülasyondan elde edilir, işte bu iki formülasyondan elde edilen çeşitli hareket denklemleri, benzer (fiziksel) robot manipülatörün dinamik davranışını tanımlamaları açısından birbirleriyle eşdeğer olmalarına karşılık, çeşitli amaçlar için elde edilmek istenildiğinde yapıları bakımından farklılık gösterebilmektedirler, Örneğin, bazıları hızlı hesaplama (kompütasyon) zamanını sağlayabilmek, bazıları da kontrol analiz ve sentezini kolaylaştırabilmek ya da bilgisayar simülasyonunu iyileştirebilmek amaçları için geliştirilir ve tercih edilirler.

L-E formülasyonu üzerine kurulu bir manipülatör dinamik modelinin türetilmesi basit ve sistematiktir. Rijit cisim hareketi varsayılarak elektronik kontrol aygıtlarının dinamiği, boşluk ve dişli sürtünmesi dışarda tutulduğunda sonuçta gelinecek hareket denklemleri bir ikinci dereceden (kuplajlı) doğrusal olmayan diferansiyel denklem takımıdır. Bu denklem takımlarının örneğin bir altı eklemlerli Stanford robot kolu için, doğrusal olmayan terimler içerdiği ve eylemsizlik terimi, eklemler arasında kuplaj tepki kuvvetleri (Coriolis ve merkezkaç) ve yerçekimi etkilerinden meydana geldiği, 4x4 boyutlu homojen dönüşüm matris gösterilimi kullanan Bejczy tarafından 1974 yılında tespit edilmiş bulunmaktadır. Ayrıca, bu kuvvet moment ifadeleri manipülatörün fiziksel parametrelerine, ani eklem konfigürasyonuna, eklem hız ve ivmesine ve taşınan yüke bağlıdır. L-E hareket denklemleri, robot kol dinamikleri için durum denklemlerini sağlar ve eklem değişkenli ileri uzay kontrol problemlerini analiz etmek ve tasarlamak üzere kullanılabilir. Mesela, "ileri dinamik" problemini çözmek için kullanılabilir, yani verilecek olan istenen kuvvet/moment değerleri için, dinamik denklemler sonradan genelleştirilmiş koordinatlar ve onların hızlarını çözmek üzere entegre edilecek eklem ivmelerini çözmek amacı ile kullanılırlar, ya da "ters dinamik" probleminde, yani verilen bir istenen genelleştirilmiş koordinat takımları ve onların ilk iki zaman türevleri için genelleştirilmiş kuvvet/moment ifadesini hesaplamak amacı ile kullanılırlar. Daha verimli hareket denklemlerini türetebilmek üzere bir alternatif olarak odak noktası; N-E hareket denklemleri üzerine kurulu genelleştirilmiş kuvvet/moment ifadelerini

hesaplayacak verimli algoritmaları geliştirme amacına yönelmiştir. Türetme basit, fakat basit olduğu kadar da karmaşıktır ve vektörel çarpım terimleri içermektedir. Kontrol aygıtının dinamiği, boşluk ve dişli sürtünmesi hariç tutulduğunda, sonuçta elde edilecek dinamik denklemler ileri ve geri ardışıl (rekürsif) denklem takımı olacaktır. Bu ardışıl denklem takımı robot linklerine sırayla uygulanır. İleri ardışıl işlemler; doğrusal ve açısal hızlar ve her bir linkin kütle merkezindeki doğrusal ivmeler gibi atalet koordinat sisteminden el koordinat sistemine doğru olan kinematik bilgiyi verirler. Geri ardışıl işlemler ise, manipülatörün end-efektöründen baz (temel) referans sistemine doğru her bir link üzerine etkiyen kuvvet ve momentleri verirler. Bu formülasyonun en önemli sonucu şudur: Genelleştirilmiş kuvvet/moment ilişkisinin hesaplama (kompütasyon) zamanı robot kolunun eklem sayısı ile doğrusal orantılıdır. Bu algoritma, eklem değişkenli uzayda (eklem hızı, ivmesi gibi değişkenler), bir robot kolun basit bir gerçek-zaman kontrolü için son derece uygundur.

N-E formülasyonunun verimi; vektör formülasyonuna ve onun ardışıl karakterine bağlı iken, L-E hareket denklemlerinin verimsizliği, kısmen kinematik zinciri tanımlayan 4×4 boyutlu homojen matrislerden ortaya çıkmaktadır. Lagrange formülasyonunun kompütasyon yani hesaplama zamanının daha da iyileştirilmesi için, Hollerbach 1980 yılında ardışıl huyulu lagrangian formülasyonunu geliştirmiştir. Oysa, ardışıl denklemler; durum uzayında kontrolör tasarımına bir anlam kazandırmada, faydası son derece büyük olan dinamik model yapısını bozarlar. Durum uzayı kontrol analizi için, bir manipülatörün dinamik davranışını tanımlayan kapalı form diferansiyel denklemlerin açık ve kesin tanımlı bir ifadesi (durum denklemleri) her zaman için elde edilmek istenir. Ayrıca, denklemlerdeki etkileşim ve kuplaj tepki kuvvetleri kolaylıkla teşhis edebilmelidir ki, bunların etkilerini kompanze etmek üzere uygun bir kontrolör tasarlanabilsin. Verimli bir hareket denklem takımı elde etmek üzere geliştirilen bir diğer yaklaşım ise; kontrol analizi için, uygun vektör matris formunda tam olarak ifade edilebilen hareket denklemlerini türetmek üzere kullanılan genelleştirilmiş d'Alembert (G-D) prensibidir. L-E hareket denklemlerine göre dinamik katsayıların daha hızlı hesabını mümkün kılmasının yanısıra, G-D hareket denklemleri linklerin öteleme (translasyonel) ve dönme (rotasyonel) etkilerinin katkısını açık biçimde tanımlar. Böyle bir bilgi durum uzayında bir kontrolör tasarımında faydalı olur. Hesap verimliliği Euler dönüşüm matrisleri (veya dönme matrisleri) ve eklemler arasında bağlı (relatif) konum vektörleri kullanan kapalı bir formülasyondan sağlanır.

Bu bölümde daha çok L-E ve N-E hareket denklemleri üzerinde durulacaktır.

2.2.2 Lagrange – Euler Denklemleri

Bir manipülatörün genel hareket denklemleri, L – E formülasyonunun konservatif olmayan sistemlere doğrudan uygulanması ile uygun şekilde ifade edilebilir. Lagrangian dinamiğinin Denavit – Hartenberg link koordinat sistemi gösterimi ile birlikte doğrudan uygulanışı, manipülatör hareket denklemleri üzerinde uygun ve kapalı bir algoritmik tanımlamaya olanak sağlar. (Sciavicco, vd., 1999). Algoritma, hem analiz hem de bilgisayar gerçekleştirmesindeki kolaylıklar ve matris işlemleri açısından ifade edilir.

Dinamik ve kontrol denklemlerinin değerlendirilmesi, bu bölümde türetilmiş kapalı matris algoritması üzerinde olacaktır.

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_i} - \frac{dL}{dq_i} = \xi_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.52)$$

Lagrange – euler denkleminin genel gösterimi olan denklem (2.52) de,

L = Lagrangian fonksiyonu = Kinetik enerji τ – Potansiyel enerji v

q_i = Robot kolun genelleştirilmiş koordinatları

ξ_i = Link i'yi sürmek üzere eklem i'de ki sisteme uygulanan genelleştirilmiş kuvvet (veya moment)

Lagrange – Euler Formülasyonunu ile hareket denklemlerinin oluşturulmasını daha iyi anlayabilmek için basit bir sarkacın dinamik modelini çıkaralım. (Spong, vd., 1989) Şekil 2.16 da görülen τ hareketi sağlayan moment, k_r dişli dönüşüm oranı, I_m saftın ataleti, θ açısal pozisyonu göstermektedir. Sistemin kinetik enerjisini denklem 2.53 deki gibi oluşturabiliriz.

$$\tau = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.53)$$

potansiyel enerji ise denklem (2.54)deki gibidir

$$v = mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (2.54)$$

sistemin lagrangianı denklem (2.55) deki gibi elde edilir.

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_m k_r^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (2.55)$$

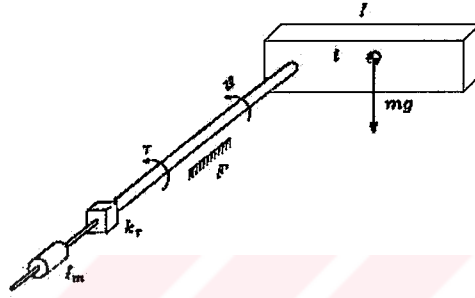
elde ettiğimiz bu lagrangian denklem (2.52) de yerine konduğunda (2.56) eşitliği elde edilir.

$$\xi = (I + I_m k_r^2) \ddot{\theta} + mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (2.56)$$

elde edilen bu kuvvete ters yönde etki eden sürtünme kuvvetini çıkarttığımızda (2.57) elde edilir.

$$\tau = (I + I_m k_r^2) \ddot{\theta} + F \dot{\theta} + mg\ell(1 - \cos \theta) \quad (2.57)$$

buradan anlaşılmaktadır ki genel robot manipülatörü için lagrangian fonksiyonu oluşturmak için toplam kinetik enerjisinden toplam potansiyel enerjisi çıkarılması gerekmektedir.



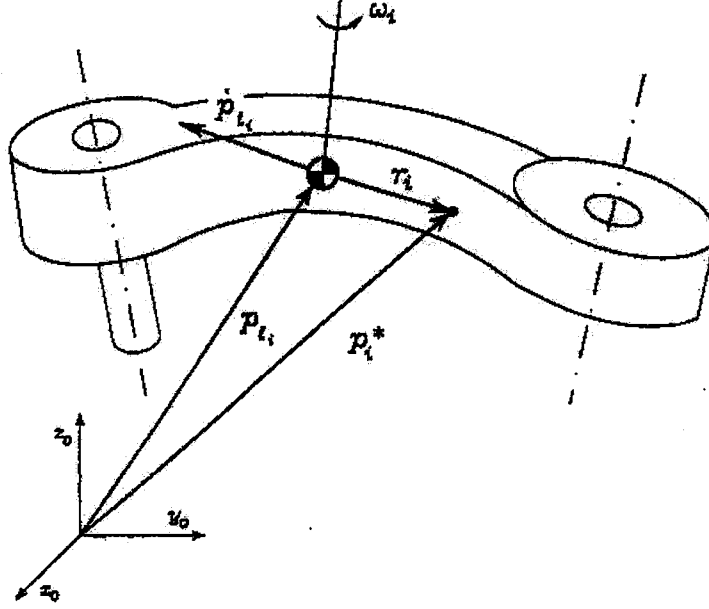
Şekil 2.16 Sarkaç ve dinamik parametreleri

2.2.3 Robot Manipülatörün Kinetik Enerjisi

Robot manipülatörün toplam kinetik enerjisi için; link ve manipülatör hareketlendiricisinin kinetik enerjileri olmak üzere iki kısma ayrılır ve toplam kinetik enerji için denklem (2.58) çıkartılır.

$$\tau = \sum_{i=1}^n (\tau_{\ell_i} + \tau_{m_i}) \quad (2.58)$$

Öncelikle linkin kinetik enerjisi için Şekil 2.17 yardımıyla denklem (2.59) üretebiliriz.



Şekil 2.17 Lagrange formülasyonu için link i'nin kinematik anlatımı

$$\tau_{\ell_i} = \frac{1}{2} \int_{V_{\ell_i}} \dot{p}_i^{*T} \dot{p}_i^* \rho dV \quad (2.59)$$

burada; $\dot{p}_i^*$ doğrusal hız vektörünü, ρ , dV hacminde elementer parçacığın yoğunluğu, V_{ℓ_i} i.linkin hacmini belirtmektedir. Bu denklemde bilinmeyen olarak gözüken parametreler aşağıda belirtilen bir dizi denklem ile hesaplanabilir.

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \end{bmatrix}^T = p_i^* - p_{\ell_i} \quad (2.60)$$

atalet baz matrisi aşağıdaki gibi (McKerrow P.J., 1991)

$$I_{\ell_i} = \begin{bmatrix} \int (r_{iy}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & - \int r_{ix} r_{iy} \rho dV & - \int r_{ix} r_{iz} \rho dV \\ * & \int (r_{ix}^2 + r_{iz}^2) \rho dV & - \int r_{iy} r_{iz} \rho dV \\ * & * & \int (r_{ix}^2 + r_{iy}^2) \rho dV \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\omega_i^i = R_i^T \omega_i \quad (2.62)$$

$$I_{\ell_i} = R_i I_{\ell_i}^i R_i^T \quad (2.63)$$

denklemlerden elde ettiğimiz bu çıkarımları (2.59) daki eşitliğe yazdığımızda denklem (2.64) elde edilir.

$$\tau_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{p}_{\ell_i}^T \dot{p}_{\ell_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T R_i I_{\ell_i}^i R_i^T \omega_i \quad (2.64)$$

Bu noktada sistemin kinetik enerjisini eklem değişkenleri cinsinden belirtmemiz gerekir. Bu işlemi gerçekleştirmek için geometrik jakobiyen hesabı kullanılabilir.

$$\dot{p}_{\ell_i} = J_{P_1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{P_i}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = J_P^{(\ell_i)} \dot{q} \quad (2.65)$$

$$\dot{\omega}_{\ell_i} = J_{O_1}^{(\ell_i)} \dot{q}_1 + \dots + J_{O_i}^{(\ell_i)} \dot{q}_i = J_O^{(\ell_i)} \dot{q} \quad (2.66)$$

$$J_P^{(\ell_i)} = \begin{bmatrix} J_{P_1}^{(\ell_i)} & \dots & J_{P_i}^{(\ell_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$J_O^{(\ell_i)} = \begin{bmatrix} J_{O_1}^{(\ell_i)} & \dots & J_{O_i}^{(\ell_i)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

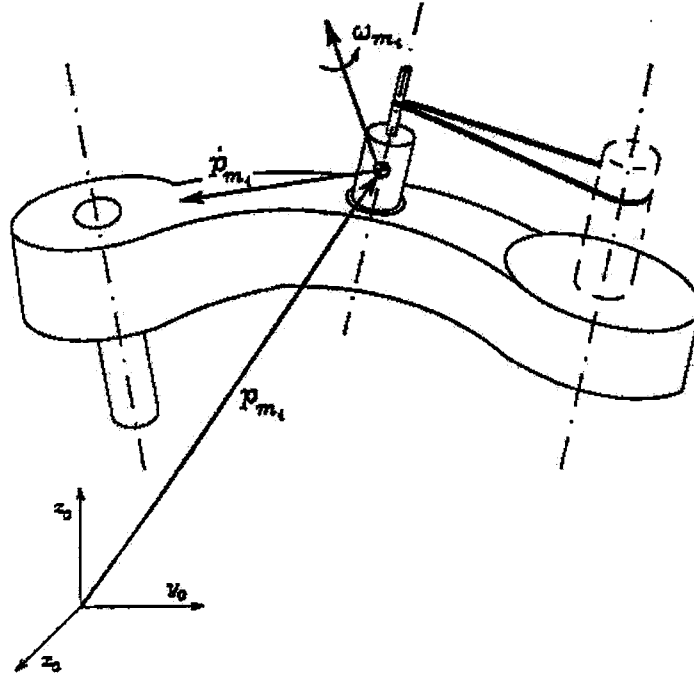
$$J_{P_j}^{(\ell_i)} = \begin{cases} z_{j-1} \\ z_{j-1} \times (p_{\ell_i} - p_{j-1}) \end{cases} \text{ eksensel, dönel eklem} \quad (2.69)$$

$$J_{O_j}^{(\ell_i)} = \begin{cases} 0 \\ z_{j-1} \end{cases} \text{ eksensel, dönel eklem} \quad (2.70)$$

denklem (2.69) ve denklem (2.70) deki p_{j-1} pozisyon vektörünü, z_{j-1} , z ekseninin birim vektörünü göstermektedir.

Sonuç olarak bir linke ait kinetik enerji denklemini aşağıdaki (2.71) numaralı eşitlikle elde edebiliriz.

$$\tau_{\ell_i} = \frac{1}{2} m_{\ell_i} \dot{q}^T J_P^{(\ell_i)T} J_P^{(\ell_i)} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_O^{(\ell_i)T} R_i I_{\ell_i}^i R_i^T J_O^{(\ell_i)} \dot{q} \quad (2.71)$$



Şekil 2.18 Motor i'nin kinematik anlatımı

Manipülâtör linkinin kinematik eşitliğinden sonra manipülâtörü hareket ettiren motora ait kinematik eşitliğinde bulunması gerekmektedir referans şekil olan Şekil 2.18 de görüldüğü gibi teoride i. linkin motoru i-1. link üzerine yerleştirilir. Oysaki pratikte durum böyle değildir. Motor mümkün olduğunca temele yakın yapılarak sisteme binen ağırlığın minimuma indirilmesi istenir. Motorun kinematik eşitliği yine linkin kinematiğinde olduğu gibi bir dizi matematiksel işlemler sonucunda aşağıdaki (2.72) denklemi ile elde edilir.

$$\tau_{m_i} = \frac{1}{2} m_{m_i} \dot{q}^T J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T J_O^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_O^{(m_i)} \dot{q} \quad (2.72)$$

sonuç olarak link ve motorun kinetik enerjilerinin topladığımızda manipülâtör için toplam kinetik enerjiyi bulmuş olacağız.

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} \quad (2.73)$$

$$B(q) = \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} J_P^{(\ell_i)T} J_P^{(\ell_i)} + J_O^{(\ell_i)T} R_{\ell_i} I_{\ell_i}^{\ell_i} R_{\ell_i}^T J_O^{(\ell_i)} + m_{m_i} J_P^{(m_i)T} J_P^{(m_i)} + J_O^{(m_i)T} R_{m_i} I_{m_i}^{m_i} R_{m_i}^T J_O^{(m_i)}) \quad (2.74)$$

2.2.4 Robot Manipülâtörün Potansiyel Enerjisi

Lagrange formülasyonunu elde etmek için manipülâtörün potansiyel enerjisinin de hesaplanması gerekmektedir. Potansiyel enerjide; kinetik enerji hesaplanmasındaki yaklaşımla link ve motorun olmak üzere iki kısımda incelenebilir.

$$v = -\sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} g_0^T p_{\ell_i} + m_{m_i} g_0^T p_{m_i}) \quad (2.75)$$

2.2.5 Hareket Denklemleri

Manipülâtöre ait kinetik ve potansiyel enerjiler hesaplandıktan sonra lagrange denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= \tau(q, \dot{q}) - v(q) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} g_0^T p_{\ell_i}(q) + m_{m_i} g_0^T p_{m_i}(q)) \end{aligned} \quad (2.76)$$

lagrange denkleminin belirtilen şekilde türevi alındığında hareket denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j + g_i(q) &= \xi_i \\ h_{ijk} &= \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (2.77)$$

sonuç olarak sisteme etkiyen sürtünme kuvvetlerini ve manipülâtörün end – efektörünün dış dünya olan etkileşimini denkleminize kattığımızda ortaya (2.78) eşitliği çıkar.

$$B(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + F_v \dot{q} + F_s \operatorname{sgn}(\dot{q}) + g(q) = \tau - J^T(q) h \quad (2.78)$$

buradaki C (nxn) boyutunda bir matristir ve c_{ij} elemanlarından oluşur.

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (2.79)$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (2.80)$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (2.81)$$

2.2.6 N – E Formülasyonu

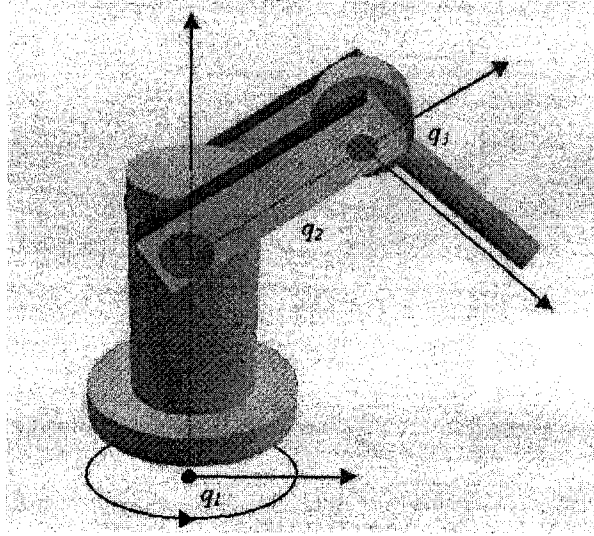
Bir önceki bölümde, gerçek zamanda her bir yörünge verilen eklem konumları, hızları ve ivmelerinden yararlanarak, nominal eklem momentlerini hesaplamak üzere kullanılan L – E hareket denklemlerinin açık çevrim kontrolü için bir hesap karmaşası ortaya çıkardığı gözlenmişti. Bu problemin başlıca nedeninin 4x4 boyutlu homojen dönüşüm matrisleri kullanan L – E hareket denklemlerinin yetersizliği olduğu belirlenmişti. Gerçek zaman kontrolünü başarabilmek için, Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerinin ihmal edildiği bir basitleştirilmiş robot kol dinamik modeli ileri sürülmüştür. Bu model eklem momentleri için, hesaplama zamanını ulaşabilecek bir sınıra kadar (mesela, bir PDP 11/45 bilgisayar kullanan her bir set noktası için 10ms'den daha az) indirgenebilir. Oysa robot kolu büyük hızlarda hareket ettiği zaman, Coriolis ve merkezkaç kuvvetleri eklem momentlerinde önem kazanır. Böylece basitleştirilmiş robot kol dinamiği, bir robot kol hareketini, tipik üretim ortamında arzu edilmeyen düşük hızlarla kısıtlamış olacaktır. Ayrıca Coriolis ve merkezkaç kuvvetlerini ihmal etmekten kaynaklanacak eklem momentlerindeki hatalar; düzeltici momentlere olan aşırı gereksinimlerden dolayı robot kolunun büyük hızlarda hareket ettiği durumlarda geri besleme kontrolü ile düzeltilemeyecektir.

İşte; daha verimli bir hareket denklemleri türetmek üzere bir alternatif olarak, bir çok araştırma Newton'un ikinci kanununa yönelmiş ve bir açık kinematik zincir için N – E hareket denklemlerinin bir çok formlarını geliştirmişlerdir. Bu förmülasyon, bir robot kola uygulandığı zaman, bir sürü vektörel çarpma terimleri içeren ileri ve geri ardışıl denklem takımlarından meydana geldiği görülecektir. Bu förmülasyonun en önemli özelliği şudur: uygulanan momentlerin hesaplama zamanı,gerçek zaman kontrole izin verecek şekilde önemli oranda düşürür. Türetme; d'Alembert prensibi ve bir robot kolun hareketli linklerinin kinematik ilişkisini baz koordinat sisteminde göre tanımlayan bir matematiksel denklem takımı üzerine kuruludur.(Bucak, 1991)

2.3 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Dinamik Modeli

Üç linkli yapıda pozisyon tanımı için $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ terimini, link uzunluklarına a_1, a_2, a_3 , linklerin ağırlık merkezlerine olan uzaklıklarına l_1, l_2, l_3 , link ağırlıklarına m_1, m_2, m_3 , silindirik link yarıçapı R, silindirik linkler ile ilgili parametrelerden $E_1 = m_1 R^2 / 2, E_i = m_i l_i^2 / 12, A_i = m_i R^2 / 2, I_i = m_i l_i^2 / 12$ ve hareketlendirici motorlarında eklem noktalarındaki eksen takımlarının orijin noktaları ile motorların ağırlık merkezleri üst üste gelecek şekilde yerleştirildiği bilinerek, belirtilen şekilde bir dizi işlem yapıldığında

sistemin jakobiye matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 2.19 Manipulatörün fiziksel yapısı

$$J_p^{l_1} = \begin{bmatrix} J_{p_1}^{l_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$J_p^{l_2} = \begin{bmatrix} J_{p_1}^{l_2} & J_{p_2}^{l_2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 & -\cos \theta_1 (a_1 + l_2 \sin \theta_2) & 0 \\ -l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 & -\sin \theta_1 (a_1 + l_2 \sin \theta_2) & 0 \\ 0 & 2 \sin \theta_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

bundan sonraki denklemlerde anlaşılabilirliği artırmak ve terim kalabalığını engellemek için $\cos$ ifadesi yerine c , $\sin$ ifadesi yerine s kısaltmaları kullanılacaktır.

$$J_p^{l_3} = \begin{bmatrix} J_{p_1}^{l_3} & J_{p_2}^{l_3} & J_{p_3}^{l_3} \end{bmatrix}$$

$$J_p^{l_3} = \begin{bmatrix} -a_2 c_1 c_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ a_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$J_{p_2}^{l_3} = \begin{bmatrix} -c_1 (a_1 + a_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ -s_1 (a_1 + a_2 s_2 + l_3 s_{23}) \\ s_1 (a_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23}) + c_1 (a_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23}) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$J_{p_3}^{l_3} = \begin{bmatrix} c_1(a_1 + l_3 s_{23}) \\ s_1(a_1 + l_3 s_{23}) \\ s_1(a_2 c_1 c_2 + l_3 c_1 c_{23} - a_2 s_1 c_2) + c_1(a_2 s_1 c_2 + l_3 s_1 c_{23} - a_2 c_1 c_2) \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Dinamik denklemdaki matrisleri tek tek hesaplayacak olursak (Efe M.O., vd., 1998)

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (2.88)$$

$$B_{11} = m_2 l_2^2 \cos^2(q_2) + m_3(a_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3))^2 + E_1 + A_2 \sin^2(q_2) + E_2 \cos^2(q_2) + A_3 \sin^2(q_2 + q_3) E_3 \cos^2(q_2 + q_3) \quad (2.89)$$

$$B_{22} = m_2 l_2^2 \sin^2(q_2) + m_3(a_2^2 + l_3^2 + 2a_2 l_3 \cos(q_3)) + I_2 + I_3 \quad (2.90)$$

$$B_{23} = B_{32} = m_3(l_3^2 + l_3 a_2 \cos(q_3)) + I_3 \quad (2.91)$$

$$B_{33} = m_3 l_3 + a_3 \quad (2.92)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 2hc_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2hc_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\ -hc_1 \dot{q}_1^2 + 2hc_4(\dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2) + hc_3 \dot{q}_2^2 \\ -hc_2 \dot{q}_1^2 - hc_4 \dot{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

$$hc_1 = (-m_2 l_2^2 + A_2 - E_2) \cos(q_2) \sin(q_2) + (A_3 - E_3) \cos(q_2 + q_3) \sin(q_2 + q_3) + m_3(a_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3))(-a_2 \sin(q_2) - l_3 \sin(q_2 + q_3)) \quad (2.94)$$

$$hc_2 = \sin(q_2 + q_3)(-m_3 l_3 a_2 \cos(q_2) + (-m_3 l_3^2 + A_3 - E_3) \cos(q_2 + q_3)) \quad (2.95)$$

$$hc_3 = m_2 l_2^2 \cos(q_2) \sin(q_2) \quad (2.96)$$

$$hc_4 = -m_2 a_2 l_3 \sin(q_3) \quad (2.97)$$

son olarak da yerçekimi matrisini de (2.98) eşitliğindeki gibi hesaplarız. matristeki G terimleri yerçekimi sabitini temsil etmektedir.

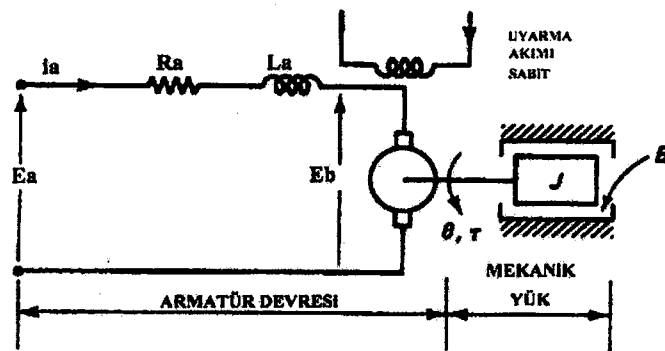
$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ (m_2 l_2 + m_3 a_2) G \cos(q_2) + m_3 l_3 G \cos(q_2 + q_3) \\ m_3 l_3 G \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

2.4 Robot Kolu Hareketlendiricileri, DC Motor Modellenmesi

Robot kollarının hareketlendirme sistemlerinde hidrolik ve elektriksel sistemler genelde tercih edilmektedir. Bunların içinden DC servomotorlar kontrol kolaylığı ve doğrusallığa yakınlıkları nedeniyle daha çok tercih edilmektedir. DC servomotor piyasada genellikle bilgisayar kontrollü cihazlarda (disket sürücüler, teyp sürücüler, yazıcılar, kelime işlemciler, tarayıcılar vs.) kullanılır. Orta ve büyük güçlü servomotorlar ise sanayide genellikle robot sistemler ile sayısal kontrollü hassas diş açma tezgahlarında kullanılır. (Küçükdemiral, 2002)

DC servomotorlarda alan sargıları rotor sargılarına seri veya paralel bağlanır. Endüi sargılarında bağımsız olarak uyarılan alan sargılarının akısı, endüi sargılarından geçen akımın fonksiyonu değildir. Bazı DC servomotorlarda manyetik alan sargısı yerine sabit bir mıknatıs bulunur. Bu tip motorlarda manyetik akı sabittir. Uyarma sargıları endüiden bağımsız olan veya sabit mıknatısla uyarılan motorlarda hız kontrolü, endüi gerilimi ile yapılabilir. Bu tip kontrol yöntemine endüi kontrol yöntemi denir.

Uyarma sargılarının yarattığı akı ile yapılan kontrollerde ise endüi akımı sabit tutulur. Statorda bulunan uyarım sargılarının yarattığı akının kontrolü ile hız ayarlanır. Bu tip motorlara alan kontrollü motorlar denir. Fakat rotor sargılarından geçen akımın sabit tutulabilmesi ise ciddi bir problemdir. Zira rotor akımı yükün ve kaynağın birer fonksiyonudur. Endüi kontrollü motorlara göre alan kontrollü motorların zaman sabitleri daha büyüktür. DC servomotorlar genellikle elektronik hareket kontrolörleri adı verilen servo sürücüler ile kontrol edilirler. Servo sürücüler servomotorun hareketini kontrol eder. Kontrol edilen büyüklükler çoğu zaman noktadan noktaya konum kontrolü, hız kontrolü ve ivme kontrolüdür. PWM tekniği adı verilen darbe genişlik modülasyonu genellikle robot kontrol sistemlerinde, sayısal kontrol sistemlerinde ve konum kontrolörlerinde kullanılırlar.



Şekil 2.20 Motor i'nin kinematik anlatımı

Şekil 2.20'deki servomotor sistemini göz önüne alırsak, uyarma akımının sabit olduğu varsayımı altında motorun indüklediği moment,

$$T = K_m i_a \quad (2.99)$$

şeklindedir. Burada K_m motor moment sabitidir ve i_a rotor akımıdır. Dikkat edilecek olursa akım ifadesinin işareti değişecek olursa moment ifadesinin de yönü değişecektir. Rotor hareket halindeyken manyetik akı ve açısal hızla orantılı olarak rotor sargılarında belli bir gerilim indüklenir. Bu gerilim ifadesi;

$$E_b = K \frac{d\theta}{dt} \quad (2.100)$$

şeklindedir. Burada E_b ifadesi ters elektromotor kuvveti; θ , motorun dönme açısını; K , ise ters elektromotor kuvvet katsayısını yada diğer bir değiş ile hız katsayısını sembolize etmektedir. DC servomotorunun hızı, endüi gerilimi E_a nın ayarlanması sonucu elde edilmektedir. Rotor devresi için difransiyel denklem takımı;

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_b = E_a \quad (2.101)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K \frac{d\theta}{dt} = E_a \quad (2.102)$$

şeklindedir. Aynı motora ait mekanik sistem için denklem takımı ise;

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta_0 \frac{d\theta}{dt} = T = K_m i_a \quad (2.103)$$

şeklindedir. Yukarıdaki bağıntılarda adı geçen terimler:

$L_a(H)$ = Rotor devresi toplam endüktansı,

$J_0(kgm^2)$ = Yük, motor ve enkoder toplam eylemsizlik momenti,

$B_0(Nms/rad)$ = Yük, motor ve enkoder toplam sürtünme katsayısı,

$R_a(\Omega)$ = Rotor devresi toplam direnci,

$\dot{I}_a(A)$ = Rotor devresi akımı

Şeklindedir. Yukarıdaki bağıntılar düzenlenirse ve çıkış büyüklüğü olarak motor pozisyonu, giriş büyüklüğü olarak da besleme gerilimi alınır, oluşan motor transfer fonksiyonuna

bakıldığında elektriksel zaman sabitlerinin mekaniksel zaman sabitlerine oranla çok, çok küçük olduğu kabul edilirse transfer fonksiyonu aşağıdaki şekli alır.(Sarioğlu, 2000)

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_T}{s(JLs^2 + JR s + K_E K_T)} \quad (2.104)$$

3. ROBOT KOLUNUN KONTROLÜ

3.1 Giriş

Bu bölümde robot manipülatörleri için ileri yönde hesaplanmış moment kontrolü başlığı altında toplanmış bir dizi kontrol metodunu inceleyeceğiz. Bu metottan iyi bir performans almak için robot kolunun tüm parametrelerinin açıkça belirtilmesi gerekmektedir. (Lewis F.L., vd., 1993) Bu bölümde ayrıca yörünge üretimiyle ilgili bir dizi hesaplama da bakılacaktır.

Robot manipülatörlerindeki temel problem önceden planlanmış istenilen yörüngeyi takip etmesidir. Robot kolunun herhangi bir görevi gerçekleştirmeden önce doğru zamanda doğru yerde konumlandırılmış olmalıdır. Bu bölümde kontrol algoritması kolay anlaşılır ve uygulamada iyi olan hesaplanmış moment üzerine yoğunlaşacağız. Kontrolcünün tasarım problemi içerdeki çevrim dizaynı ve dışarıdaki çevrim dizaynı olmak üzere ayrıştırılmıştır. Yine bu bölümün ilerleyen kısımlarında ise PID kontrolcü ile bağımsız eklem kontrolünü, modern tekniklerin hesaplanmış moment kontrolünde nasıl kullanıldığına dair bilgiler içeren konular üzerinde durulacaktır.

Kontrol kısmı altında robotun boş bir uzayda, yani çevre ile bağlantısı olmayan bir ortamda hareket ettiğini kabul edilecektir. Aynı zamanda sistemi, parametreleri iyi bilinen rijit sistem olarak kabul edilecektir.

Robot kolun kontrolünü yapmadan önce istenilen yörüngeyi çıkarmak gerekir bu problemle ilgili bir çok yayın bulunmaktadır. Bu metotlardan parabolik doğrusal fonksiyon metodu kullanılacaktır.

3.2 Yörünge Planlanması (Doğrusal Parabolik Fonksiyon)

Polinomun enterpolasyonu kullanıldığında her örnekleme periyodunda ivme doğrusaldır. Buna rağmen bir çok pratik uygulamada her örnekleme periyodunda ivmenin sabit bir değer alması sağlanmıştır. Örneğin herhangi gerçek bir robot kol için hareketlendiriciler için Newton'un yasalarına göre doğrusal olduklarında her örnekleme periyodunda sabit ivme kullanılabilir. Bunun yanında bir çok endüstriyel robot kontrolcüsü her örnekleme periyodunda sabit ivmeyi kullanan bir yaklaşımla tasarlanmaktadır.

Sabit ivmelenme profili Şekil 3.1 deki gibidir. Buna ilişkin hız ve pozisyon profilleri Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 olduğu gibi elde edilir. Pozisyon yörüngesi üç parçadır; karesel veya parabolik

başlangıç kısmı, doğrusal orta bölüm ve parabolik son bölüm. Bu bağlamda pozisyon yörüngesi üzerindeki noktaları Parabolik doğrusal fonksiyon yaklaşımı ile hesaplayacağız.

Oluşturulan denklem takımlarındaki t_b pozisyon yörüngesinin parabolikten doğrusala geçtiği noktadadır, $q_{d_i}(t)$ pozisyonları her eklem için önceden belirtilmelidir. Şekil 3.3 deki yörünge aşağıdaki denklem ile elde edilir. (Lewis F.L., vd., 1993)

$$q_{d_i}(t) = \begin{cases} a_i + (t - t_k)b_i + (t - t_k)^2 c_i, & t_k \leq t < t_k + t_b \\ d_i + v_i t, & t_k + t_b \leq t < t_{k+1} - t_b \\ e_i + (t - t_{k+1})f_i + (t - t_{k+1})^2 g_i, & t_{k+1} - t_b \leq t \leq t_{k+1} \end{cases} \quad (3.1)$$

Denklemdaki v_i katsayısı her eklem için müsaade edilen maksimum hızı göstermektedir. İleri yönde katsayıların hesabı denklem (3.2) deki gibidir.

$$a_i = q_i(t_k) \quad (3.2)$$

$$b_i = \dot{q}_i(t_k) \quad (3.3)$$

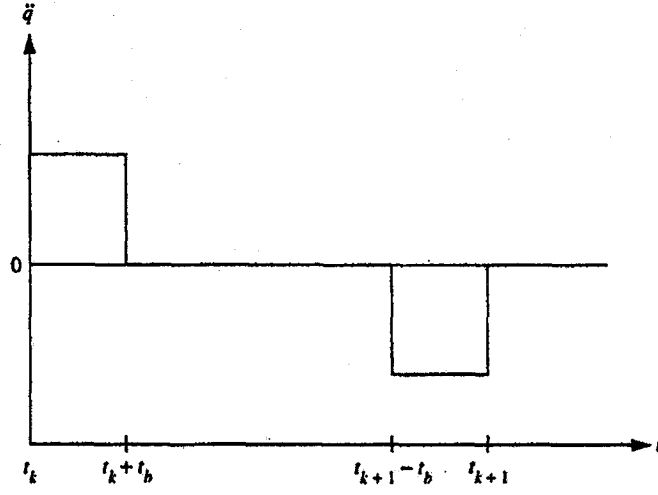
$$c_i = \frac{v_i - \dot{q}_i(t_k)}{2t_b} \quad (3.4)$$

$$d_i = \frac{q_i(t_k) + q_i(t_{k+1}) - v_i t_{k+1}}{2} \quad (3.5)$$

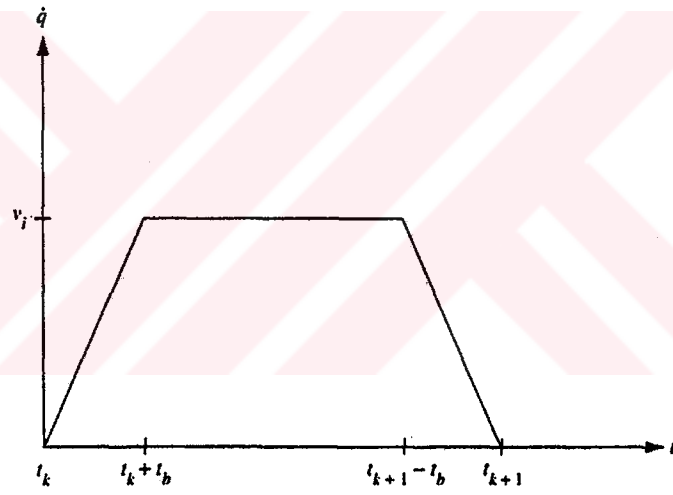
$$e_i = q_i(t_{k+1}) \quad (3.6)$$

$$f_i = \dot{q}_i(t_{k+1}) \quad (3.7)$$

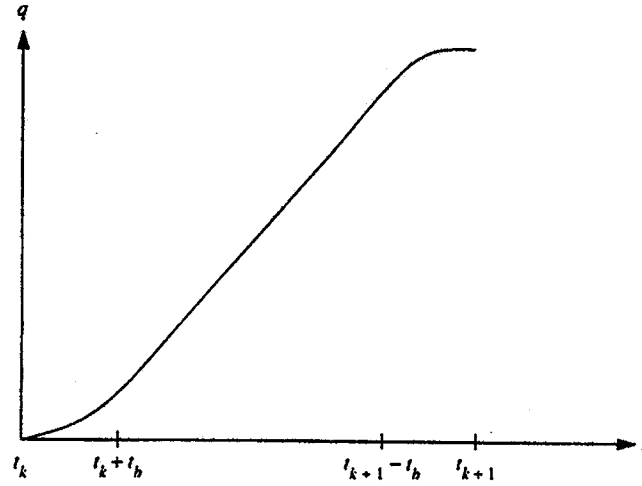
$$g_i = \frac{v_i t_{k+1} + q_i(t_k) - q_i(t_{k+1}) + 2t_b[(\dot{q}_i(t_{k+1}) - v_i)]}{2t_b^2} \quad (3.8)$$



Şekil 3.1 DPF yörüngesi ivme grafiği.



Şekil 3.2 DPF yörüngesi hız grafiği.



Şekil 3.3 DPF yörüngesi pozisyon grafiği.

3.3 Hesaplanmış Moment Kontrolü

Robot kavramı endüstride yer kazandığı günden bugüne kadar, robot kontrolünde bir çok metot kullanılmıştır. Bu metotlara bakıldığında bir çoğu hesaplanmış moment kontrolünü baz almakta olduğu görülmektedir. Hesaplanmış moment aynı zamanda, geri besleme doğrusallaştırılmasının özel bir uygulamasıdır. Bu sayede modern sistem teorisindeki popülerliği artmıştır.(Hunt, vd., 1983) Öyle ki robot kontrolünü sınıflandırmanın bir yolu olarak, hesaplanmış moment tipinde olanlar ve olmayanlar diye bir kriter ortaya çıkmıştır.

Bölümün daha sonraki kısımlarında geniş bir tasarım aralığına ait bu kontrolcü incelenecektir. Aynı zamanda bu teknik bize bağımsız eklem kontrolü ve diğer modern kontrol metotlarının tasarımı için temel teşkil edecektir.

3.3.1 İçerdeki İleri beslemeli Çevrimin Çıkarımı

Robot Kolun Dinamik Modeli

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + F_s(\dot{q}) + g(q) + \tau_d = \tau \quad (3.9)$$

veya

$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (3.10)$$

eklem değişkenleri $q(t)$, $\tau(t)$ kontrol moment, $\tau_d(t)$ bozucu etkiyi, eğer dinamik model sistemin hareketlendiricilerini de kapsıyorsa $\tau(t)$ giriş gerilimini simgeler.

Burada her örnekleme zamanında oluşan $q(t)$ ile önceden belirlenen yörünge ile elde edilen $q_d(t)$ den izleme hatası oluşturulur.

$$e(t) = q_d(t) - q(t) \quad (3.11)$$

Uygulanan $\tau(t)$ momenti sistemin yörünge takibindeki etkileri ve yörünge hatasının ikinci türevi de aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{e} = \dot{q}_d - \dot{q} \quad (3.12)$$

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d - \ddot{q} \quad (3.13)$$

sistemin dinamik modelinden $\ddot{q}$ terimini çekersek denklem (3.13) yerine konduğunda denklem (3.14) elde edilir.

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d + B^{-1}(N + \tau_d - \tau) \quad (3.14)$$

$$u = \ddot{q}_d + B^{-1}(N - \tau) \quad (3.15)$$

$$w = B^{-1}\tau_d \quad (3.16)$$

Yörünge izleme hata dinamiği (3.17) eşitliğindeki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (3.17)$$

Bu doğrusal hata sistemi kontrol girişi $u(t)$ ve bozucu etki $w(t)$ ile sürülmektedir. Denklem (3.17) bu genel geri beslemeli doğrusallaştırmanın özel bir kısmıdır.

Geri besleme doğrusallaştırmanın denklem (3.15)'e yaptığı dönüşümle denklem (3.18) elde edilir.

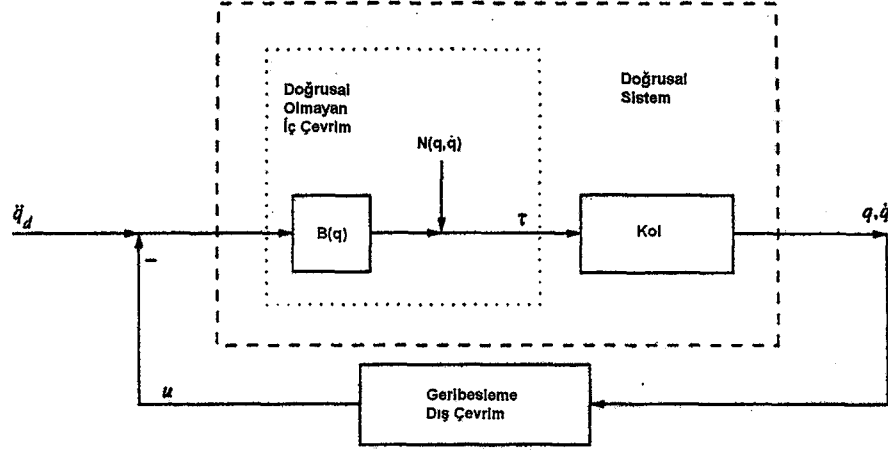
$$\tau = B(\ddot{q}_d - u) + N \quad (3.18)$$

Bu denklem hesaplanmış moment kontrol yasasıdır. Denklem (3.18)'e çıkarımı boyunca izlenen yol; denklem(3.9)'dan denklem (3.17)'a kadar durum uzay transformasyonu bulunmamaktadır. Bundan dolayı eğer kontrol işaretimizi (3.15)deki eşitlik gibi seçersek bu yaklaşım denklem (3.17) kararlı hale getirecek ve hata sıfıra gidecektir. (3.18) eşitliğindeki $\tau(t)$ doğrusal-olmayan kontrol işareti robot kolun yörüngeyi takip etmesini sağlamaktadır. Denklem (3.18), denklem (3.10)da yerine konduğunda,

$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = B(\ddot{q}_d - u) + N \quad (3.19)$$

veya

$$\ddot{e} = u + B^{-1}\tau_d \quad (3.20)$$



Şekil 3.4 Hesaplanmış moment kontrol şeması .

Denklem (3.17) kararlı hale getirmek zor değildir. Bunun yanında doğrusal olmayan (3.15) eşitliği, her bir parçası Newton yasalarına uyan n tane alt sistem ile basit bir tasarım problemine dönüştürülür.

Sonuçta Şekil 3.4 de görülen kontrol şeması ortaya çıkmıştır. Şunu belirtmekte fayda vardır, bu sistem içindeki doğrusal olmayan çevrime ilaveten dışarıdaki kontrol sinyali $u(t)$ yi seçmek için bir çok yol vardır. $u(t)$, $q(t)$ ve $\dot{q}(t)$ 'ye bağlı olduğu müddetçe dışarıdaki döngü, geri besleme çevrimi olacaktır. Genelde, dinamik dengeleyici $H(s)$ denklem (3.21) deki gibi seçilir.

$$U(s) = H(s)E(s) \quad (3.21)$$

$$T(s) = S^2I - H(s) \quad (3.22)$$

Buradan hareketle bilinmelidir ki hesaplanmış moment kontrol robot dinamiğinin ters çevrilmesidir. İşte bu yüzden hesaplanmış moment kontrolü bazı yayınlarda ters dinamik kontrol olarak anılmaktadır.

Uygulanacak momenti hesaplamak için denklem (3.18)'u elde etmiştik. Bu değeri hesaplamak için birçok yol mevcuttur. Bunlardan biri her örnekleme zamanında matrislerin çarpımıyla

elde edilebilir. Ama bazı durumlarda analitik olmayan ifadeler çalışmayı durdurabilir. Moment hesaplamak için en iyi yol Newton – euler ters dinamik formülasyonudur. (Craig J.J., 1989) ($\ddot{q}_d - u \Leftrightarrow \ddot{q}(t)$)

3.3.2 PD Dış Çevrim Tasarımı

Kontrol sinyali olan $u(t)$ yi seçmenin bir yoluda oransal artı türevsel geri beslemedir.

$$u = -K_v \dot{e} - K_p e \quad (3.23)$$

Robot kolun giriş denklemi (3.24)'de olduğu gibidir.

$$\tau = B(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e) + N(q, \dot{q}) \quad (3.24)$$

Belirtilen tipteki kontrolcü Şekil 3.8 deki PID tipinin $K_i = 0$ olduğu durumdur.

Kapalı çevrim hata dinamiği ise (3.25) eşitliği ile gösterildiği gibidir.

$$\ddot{e} + K_v \dot{e} + K_p e = w \quad (3.25)$$

Durum uzay formunda

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (3.26)$$

Kapalı çevrim karakteristik polinomu

$$\Delta_c(s) = |S^2 I + K_v S + K_p| \quad (3.27)$$

PD kazançların seçimi genelde $n \times n$ diyagonal kazanç matrisidir.

$$K_v = \text{diag}\{K_{v_i}\}, \quad K_p = \text{diag}\{K_{p_i}\} \quad (3.28)$$

$$\Delta_c(s) = \prod_{i=1}^n (s^2 + k_{v_i} s + k_{p_i}) \quad (3.29)$$

denklemden görüldüğü gibi k_{p_i} ve k_{v_i} pozitif olduğu sürece asimptotik kararlıdır.

İkinci dereceden standart bir polinom denklemi (3.30)'da olduğu gibidir.

$$p(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.30)$$

ζ , sönüm oranı ve ω_n , doğal frekanstır. Bundan dolayı PD katsayıları aşağıdaki gibi seçilirse istenilen hata giderimi sağlanabilir.

$$k_{p_i} = \omega_n^2 \quad , \quad k_{v_i} = 2\zeta\omega_n \quad (3.31)$$

Bunun yanında robot kollarının tasarımında üst aşım istenilmeyen bir durumdur. Çünkü; üst aşımarda yörünge dışına çıkılacak ve yüzey tahrip edilecektir. Bundan dolayı PD katsayıları aşağıdaki eşitlikte olduğu gibi seçilerek sistemin kritik sönümlü olması sağlanır. ($\zeta \geq 1$)

$$k_{v_i} = 2\sqrt{k_{p_i}} \quad , \quad k_{p_i} = k_{v_i}^2 / 4 \quad (3.32)$$

3.3.2.1 Doğal Frekansın Seçimi

Doğal frekans ω_n sistem cevabının hızını kontrol etmektedir. Hızlı bir cevap için daha geniş seçilmelidir. Bu kısımda ise bir kaç ilave seçim yöntemlerini değerlendirilecektir. Paul 1981 de yapmış olduğu yayında belirttiği gibi doğal frekans seçilirken bazı üst sınırlar bulunmaktadır.(Paul, 1981) Sanayideki bir çok robot devasa kollara sahip olsa da bunlarında bir esnekliği vardır.

$$\omega_r = \sqrt{k_r / J} \quad (3.33)$$

j, linkin ataleti, k_r ise linkin sertliğidir. Kontrolü yaparken seçtiğimiz PD katsayıları ile linklerin esnekliğinden oluşacak rezonans durumuna sokmamak için; doğal frekans belli bir değerin altında olmalıdır. $\omega_n < \omega_r / 2$. Tabii ki link yapımında kullanılan madde ne olursa olsun tasarıma göre linke ait atalet değişecektir. Bu yüzden maksimum doğal frekans için hesaplama yapılması gerekmektedir.

Doğal frekans için bir diğer üst sınır ise sistem hareketlendiricilerin sınırları ile ilişkilidir. Herhangi bir anda hareketlendiricilerden onların sağlayabileceği maksimum momentten daha fazla bir moment istenildiğinde işlem doğru olarak gerçekleştirilmeyecektir.

Kapalı çevrim hata sisteminin transfer fonksiyonu (3.34) eşitliğinde olduğu gibidir.

$$e(s) = (s^2 I + K_v s + K_p)^{-1} w(s) \quad (3.34)$$

yada K_v ve K_p diyagonal ise,

$$e_i(s) = \frac{1}{s^2 + k_{v_i} s + k_{p_i}} w(s) \equiv H(s) w(s) \quad (3.35)$$

$$\dot{e}_i(s) = \frac{s}{s^2 + k_{v_i}s + k_{p_i}} w(s) \equiv sH(s)w(s) \quad (3.36)$$

Bozucu etki ve robotun atalet matrisinin sınırlı olduğunu varsaydığımızda

$$\|w\| \leq \|B^{-1}\| \|\tau_d\| \leq \bar{m} \bar{d} \quad (3.37)$$

$\bar{m}$ ve $\bar{d}$ robotun karakteristiğinden bilinen değerler.

$$\|e_i(t)\| \leq \|H(s)\| \|w\| \leq \|H(s)\| \bar{m} \bar{d} \quad (3.38)$$

$$\|\dot{e}_i(t)\| \leq \|sH(s)\| \|w\| \leq \|sH(s)\| \bar{m} \bar{d} \quad (3.39)$$

L_2 – normunu seçersek

$$\sup_w \|H(jw)\|_2 = 1/k_{p_i} \quad (3.40)$$

$$\|e_i(t)\|_2 \leq \bar{m} \bar{d} / k_{p_i} \quad (3.41)$$

$$\sup_w \|jwH(jw)\|_2 = 1/k_{v_i} \quad (3.42)$$

$$\|\dot{e}_i(t)\|_2 \leq \bar{m} \bar{d} / k_{v_i} \quad (3.43)$$

kritik sönümün bu durumunda görüldüğü gibi pozisyon hatası k_{p_i} ile hız hatası k_{v_i} ile azalmaktadır.

Örnek 3.3.1 : PD Hesaplanmış Moment Simülasyonu (Lewis 1993)

Bu örnekte seçilen PD katsayıların seçimi ve sonuçlarına ilişkin bir örnek yapılacaktır.

İki linkli düzlemde hareket eden bir robota ait dinamik eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 + m_2a_2^2 + 2m_2a_1a_2 \cos \theta_2 & m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos \theta_2 \\ m_2a_2^2 + m_2a_1a_2 \cos \theta_2 & m_2a_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2a_1a_2(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \sin \theta_2 \\ m_2a_1a_2\dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)ga_1 \cos \theta_1 + m_2ga_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2ga_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

standart bir şekilde yazacak olursak

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau \quad (3.45)$$

linklerin ağırlıklarını 1 kilogram ve uzunluklarını da 1 metre alalım.

PD hesaplanmış moment yasası aşağıdaki gibidir,

$$\tau = B(q)(\ddot{q}_d + K_v\dot{e} + K_p e) + C(q, \dot{q}) + G(q) \quad (3.46)$$

yörünge izleme hatası (3.47) eşitliğinde olduğu gibi tanımlanmıştır.

$$e = q_d - q \quad (3.47)$$

istenilen yörünge olarakta aşağıdaki eşitlikleri seçelim.

$$\theta_{1d} = g_1 \sin(2\pi / T) \quad (3.48)$$

$$\theta_{2d} = g_2 \cos(2\pi / T) \quad (3.49)$$

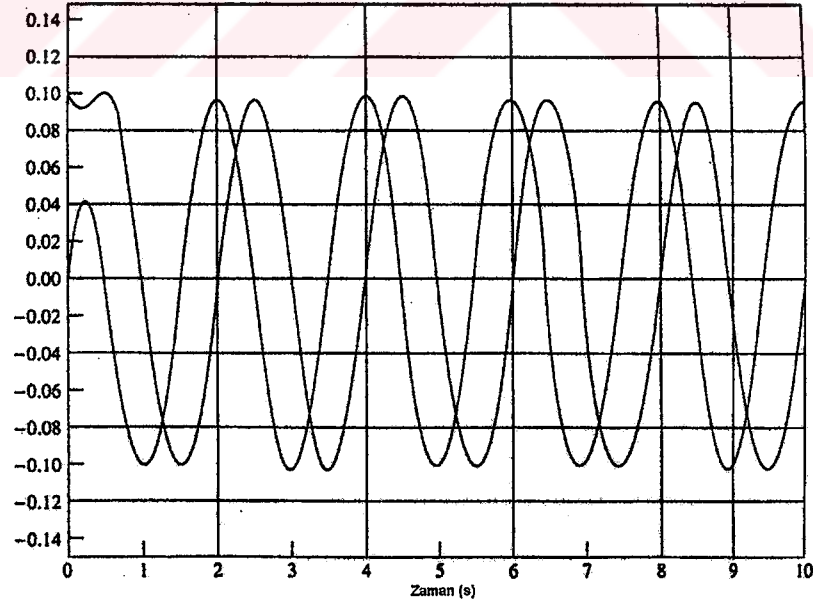
periyot $T=2s$ ve genlik $g_1=0.1rad$. ≈ 6 deg. İyi bir yörünge izleme içinde zaman sabitini 0.1s alalım. Kritik sönüm için $K_v = diag\{K_{v_1}\}$, $K_p = diag\{K_{p_1}\}$

$$\omega_n = 1/0.1 = 10$$

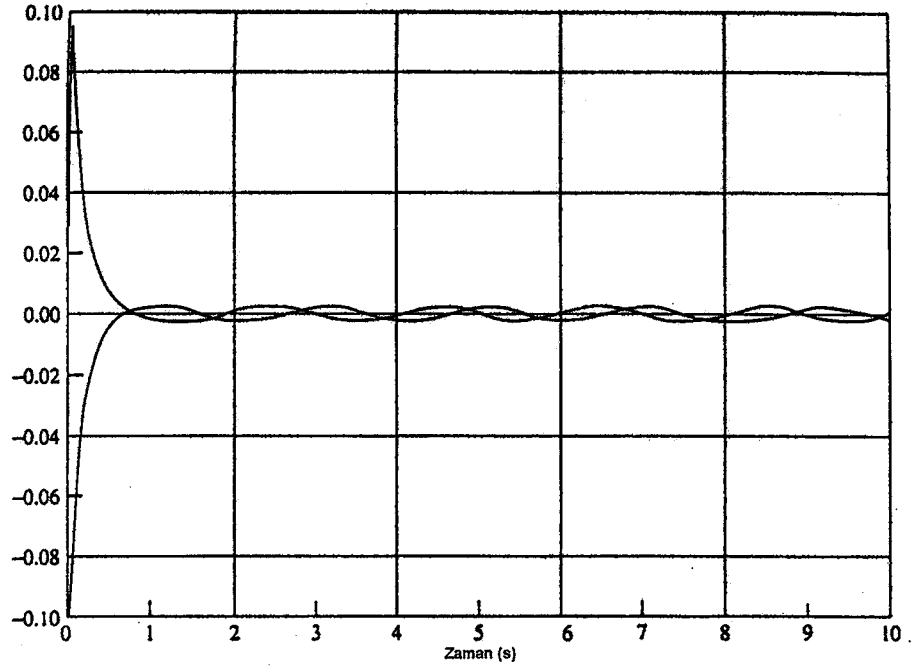
$$k_p = \omega_n^2 = 100$$

$$k_v = 2\omega_n = 20$$

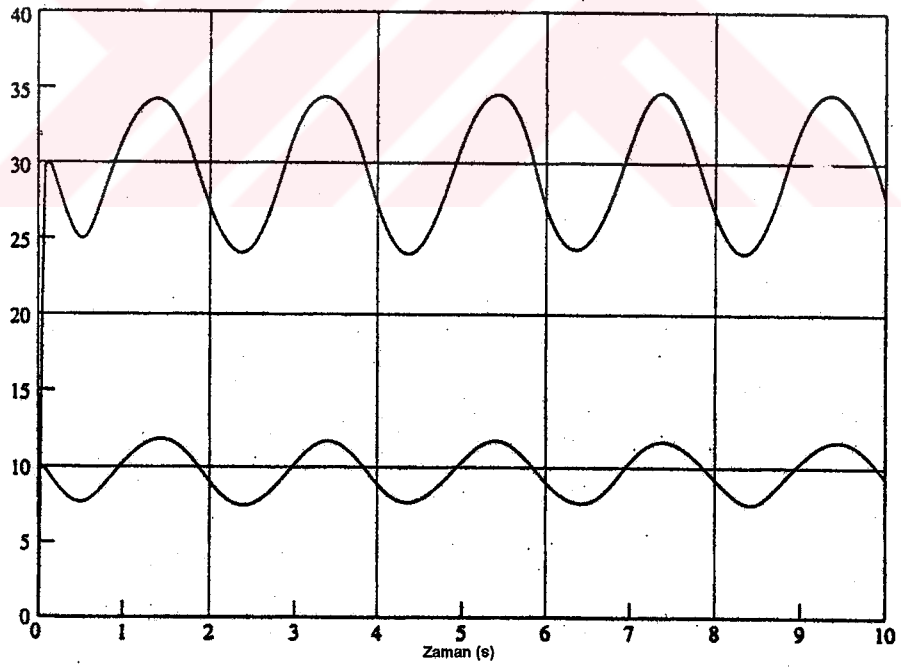
(3.50)



Şekil 3.5 Eklem açıları $\theta_1(t)$ ve $\theta_2(t)$ (rad) .



Şekil 3.6 Yörünge izleme hatası $e_1(t)$ ve $e_2(t)$ (rad) .



Şekil 3.7 Moment girişleri (N - m) .

3.3.3 PID Dış Çevrim Tasarımı

Bir önceki kısımda gördüğümüz gibi eğer kol parametreleri çok iyi biliniyorsa ve hiç bir

bozucu etki yok ise PD hesaplanmış moment kontrol çok iyi sonuçlar vermektedir. Oysaki klasik kontrol teorisinden de bildiğimiz gibi sabit bir bozucu etki ile PD kontrol sıfır olmayan bir sürekli hal hatası vermektedir. İşte bu hata sistemin ileri besleme çevrimine bir integratör ekleyerek sistemin tipi I yapılır ve giderilir.

$$\dot{\varepsilon} = e \quad (3.51)$$

$$u = -K_v \dot{e} - K_p e - K_i \varepsilon \quad (3.52)$$

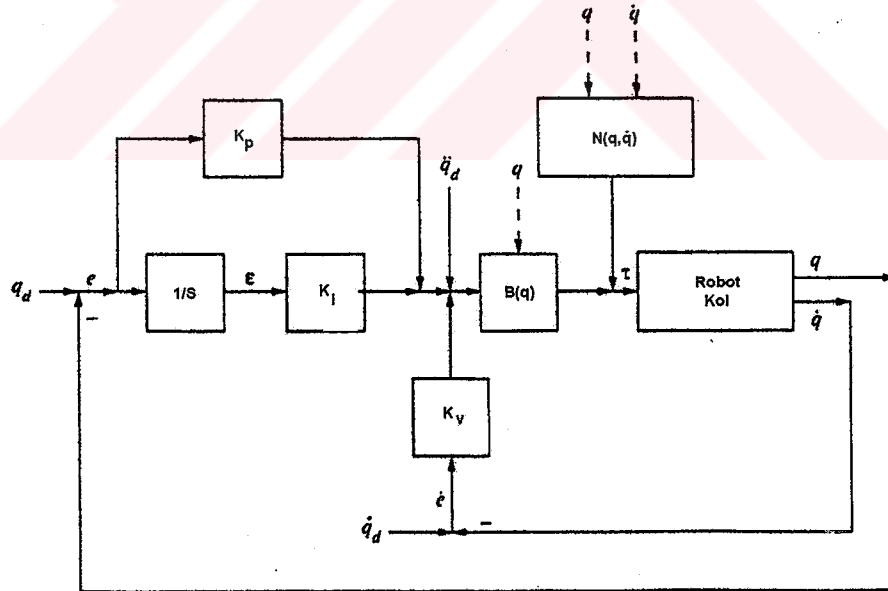
böylelikle kol kontrol girişi (3.53) eşitliğinde olduğu gibi oluşur.

$$\tau = B(q)(\ddot{q}_d + K_v \dot{e} + K_p e + K_i \varepsilon) + N(q, \dot{q}) \quad (3.53)$$

Hata dinamiği denklem (3.54) deki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (3.54)$$

PID hesaplanmış moment kontrole ait blok diyagram Şekil 3.8'deki gibidir.



Şekil 3.8 PID hesaplanmış moment kontrolcüsü .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -K_i & -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} w \quad (3.55)$$

Kapalı çevrim karakteristik polinomu

$$\Delta_c(s) = |S^3 I + K_v S^2 + K_p S + K_i| \quad (3.56)$$

Diyagonal kontrol kazançları

$$K_v = \text{diag}\{K_{v_i}\}, \quad K_p = \text{diag}\{K_{p_i}\}, \quad K_i = \text{diag}\{K_{i_i}\} \quad (3.57)$$

$$\Delta_c(s) = \prod_{i=1}^n (s^3 + k_{v_i} s^2 + k_{p_i} s + k_{i_i}) \quad (3.58)$$

Routh testi ile kapalı çevrimin nerede karalı olacağını (3.60) eşitlikte olduğu gibi buluruz.

$$k_{i_i} < k_{v_i} k_{p_i} \quad (3.59)$$

buradan anlaşıldığı gibi integral kazancı çok büyük seçilmemelidir.

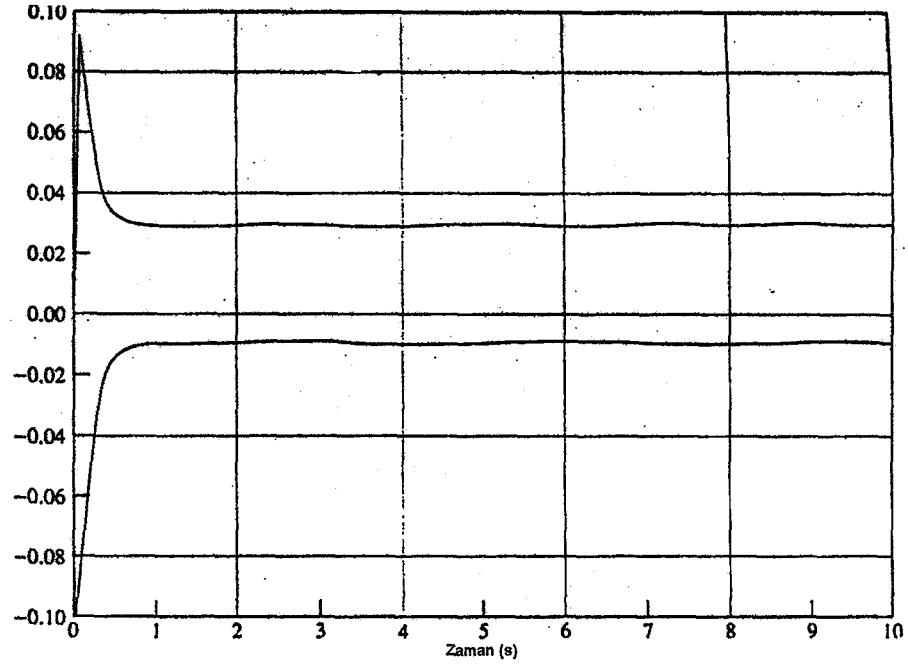
Bilinmelidir ki integral kontrolünün iyi taraflarının yanında bazı beklenmedik sonuçlarında gerçek uygulamalarda yanlarında getirebilir. Şöyle ki PD tipi bir kontrolcü sorun çıkarabilirde çıkarmayabilirde ama PID tipi kontrolcü robot sisteminin hareketlendiricilerinin bir moment ve gerilim sınırı olduğu düşünüldüğünde integral kontrol, integratör windup diye bilinen etki ile sistemde tahribata yol açabilir.(Lewis, 1992)

Pratikte üst ve alt moment sınırlarını belirleyip girişin önünde bir filtre yapmak başlangıçta doğru gelse integratör üst sınırı aştığında dahi sisteme üst sınır değeri gelecek ve yanlış bir kontrol girişi uygulanmış olacaktır. Aynı durum alt sınır içinde geçerlidir.

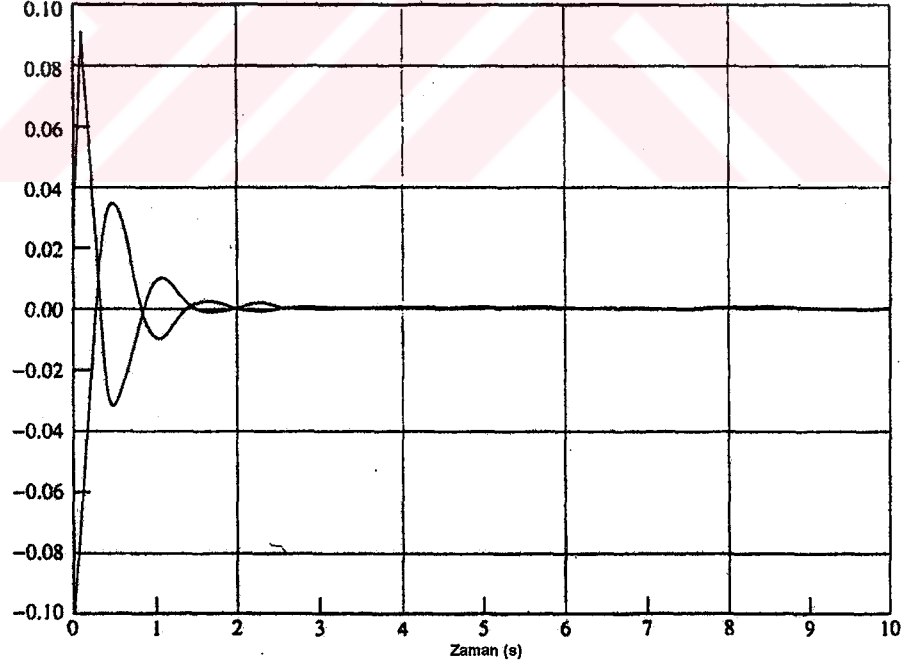
İntegrator windup problemi dijital kontrol sistemlerinde antiwindup uygulamaları ile kolaylıkla giderilebilir.

Bir sonraki örnek bize bilinmeyen bir bozucu etkide integral teriminin kullanılabilirliğini anlamamız açısından bir fikir verecektir.

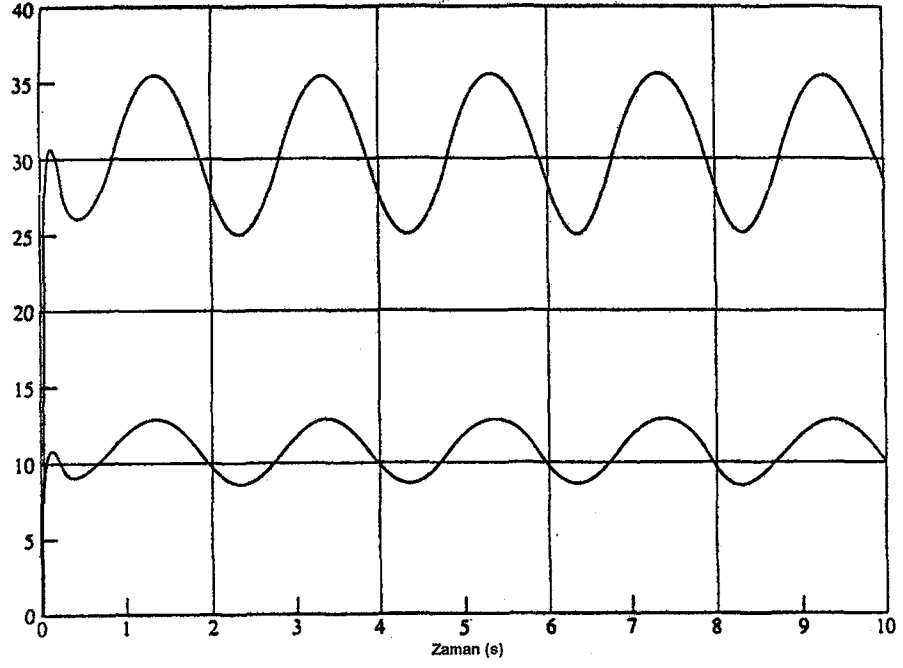
Örnek 3.3.2 : Bir önceki örnekte hatırladığımız gibi PD tipi bir kontrolcüyü iki linkli bir sistem üzerinde uygulamıştık, bu uygulamada ise aynı sisteme sabit bir bozucu etki ekleyerek ikisi arasında bir karşılaştırma yapacağız.(Lewis, 1993)



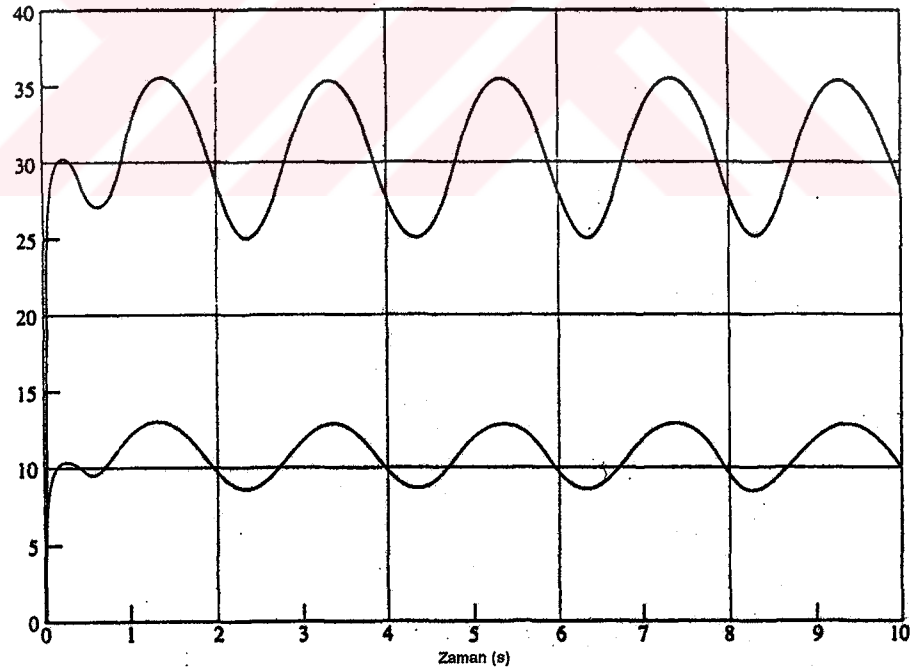
Şekil 3.9 Hesaplanmış moment kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) PD kontrol



Şekil 3.10 Hesaplanmış moment kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) PID kontrol



Şekil 3.11 Hesaplanmış moment kontrolcü moment girişleri (N - m) PD kontrol



Şekil 3.12 Hesaplanmış moment kontrolcü moment girişleri (N - m) PID kontrol

Böylelikle kol dinamiği

$$B(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + \tau_d = \tau \quad (3.60)$$

τ_d bozucu etkisi her komponent için sabit 1 N-m dir. Bu aynı zamanda dinamik modelde bilinmeyen sürtünme katsayısının etkisini de kapsamaktadır.

PD tipi kontrolcüde görülmektedir ki en geniş hata 0.033 rad yani yaklaşık 2 deg az bir değerdir. bu kontrolcüye integral kazancı olarak 500 eklenince sistem sıfır sürekli hal hatası ve bir az daha iyi bir cevap vermiştir.

Her iki kontrolcüde de görüldüğü gibi uygulanan moment girişleri arasında büyük bir fark yoktur.

3.3.4 Hesaplanmış Moment Sınıfındaki Kontrolcüler

Bu sınıftaki kontrolcülere giriş yapmada önce kontrol yasası üzerinde bazı değişiklikler yapmak gerekir.

$$\tau_c = \hat{B}(\ddot{q}_d - u) + \hat{N} \quad (3.61)$$

matrisler üzerindeki bu üçgen işaretler matrislerin sistemin ağırlığı ve ofset durumuyla seçilebilen matrisler olduğunu göstermektedir. Doğal olarak bunları $\hat{B} = B(q)$ ve $\hat{N} = N(q, \dot{q})$ şeklinde seçmekte bir yoldur.

Bazı durumlarda $B(q)$ matrisi tam olarak bilinmeyebilir (bilinmeyen yükler) veya $N(q, \dot{q})$ matrisi de tam olarak bilinmeyebilir. (bilinmeyen sürtünme katsayıları) Bu gibi durumlarda $\hat{B}$ ve $\hat{N}$ matrisleri en iyi tahmin edilmiş matrislerdir. Bunların dışında $B(q)$ ve $N(q, \dot{q})$ matrislerinin her örnekleme zamanında hesaplanması kullanılan donanımdan dolayı mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda ele aldığımız bu eşitlik ile tanımladığımız kontrol metoduna “*Yaklaşık Hesaplanmış Moment Kontrol*” diyoruz.

Aslında $\hat{B} \neq B$ ve $\hat{N} \neq N$ olmadığı durumlarda yukarıda belirttiğimiz şekildeki bir kontrolcünün dıştaki çevrim kazancı yeterince büyük seçilirse oldukça iyi sonuçlar verebilir.

3.3.4.1 Yaklaşık Hesaplanmış Moment Kontrolde Hata Dinamiği

$$B\ddot{q} + N + \tau_d = \hat{B}(\ddot{q}_d - u) + \hat{N} \quad (3.62)$$

$$\hat{B}\ddot{q}_d - B\ddot{q} = \hat{B}u + \tau_d(N - \hat{N}) \quad (3.63)$$

denklemin sol tarafına $\hat{B}\ddot{q}_d - \hat{B}\ddot{q}_d$, sağ tarafına $Mu - Mu$ eklenirse

$$B\ddot{e} = Bu - (B - \hat{B})u + \tau_d + (B - \hat{B})\ddot{q}_d + (N - \hat{N}) \quad (3.64)$$

veya

$$\ddot{e} = u - \Delta u + d \quad (3.65)$$

$$\Delta = B^{-1}(B - \hat{B}) = I - B^{-1}\hat{B} \quad (3.66)$$

$$\delta = B^{-1}(N - \hat{N}) \quad (3.67)$$

ve bozucu etkide

$$d(t) = B^{-1}\tau_d + \Delta\ddot{q}_d(t) + \delta(t) \quad (3.68)$$

Eğer tam hesaplanmış moment kontrol kullanılmış olsa idi $\Delta = 0$ ve $\delta = 0$ olacaktı. Aksi takdirde hata sistemi istenilen ivmelenme ve doğrusal olmayan eksik bir terim ile sürülecek. Böylelikle yörünge izleme hatası hiç bir zaman sıfır olmayacak. Daha fazlası kontrol işareti olan $u(t)$, $(I - \Delta)$ ile çarpılarak çok zor bir kontrol problemi ortaya çıkaracaktır.

Dıştaki çevrimde PD geri besleme seçildiğinde sistem (3.69) eşitliğinde olduğu gibi oluşacaktır.

$$\ddot{e} + K_v\dot{e} + K_p e = \Delta(K_v\dot{e} + K_p e) + d(t) \quad (3.69)$$

Bu tip bir sistemde K_v ve K_p kararlılığı sağlayacak şekilde seçilse dahi sistemin davranışı ile ilgili kesin bir kanıya varılamaz. Bunun nedeni iki tip probleme bağlıdır: birincisi bozucu etki terimi $d(t)$, diğeri ise hata ve hatanın türevinin fonksiyonudur. $\Delta(K_v\dot{e} + K_p e)$

3.3.5 PD Artı Yerçekimi Kontrolcüsü

$\hat{B} = I$, $\hat{N} = G(q) - \ddot{q}_d$ olduğu durumlarda PD artı yerçekimi kontrol kullanışlı bir hesaplanmış moment kontrol ailesinden bir kontrolcüdür. PD geri besleme olarak seçildiğinde, τ_c denklem (3.70) deki gibi olacaktır. (Arimoto, 1984)

$$\tau_c = K_v\dot{e} + K_p e + G(q) \quad (3.70)$$

Bu tipte bir kontrolcü kesin hesaplanmış moment kontrolcünden uygulama bakımından çok daha basittir. Kol çalışma durumunda değilken, sıfır olmayan terimler; yerçekimi, bozucu etki ve doğal olarak bunlara bağlı olan kontrol momenti PD artı yerçekimi tipindeki bir kontrolcüde istenilen nokta girildiğinde iyi bir performans sergilemektedir. PD+ Yerçekimi kontrolde bir set noktası girildiğinden istenilen pozisyon doğal olarak sabit bir değer alacak ve bunu takiben türevi yani $\dot{q}_d = 0$ olacaktır.

Kapalı Çevrim Sistem

Sürtünmeyi göz ardı ettiğimizde robot dinamiği aşağıdaki gibidir.

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (3.71)$$

$\dot{q}_d = 0$ olduğunda kontrol yasası kapalı çevrim dinamiği

$$B\ddot{q} + C\dot{q} + K_v\dot{q} - K_p e = 0 \quad (3.72)$$

Liapunov Fonksiyonu

Liapunov fonksiyonunu denklem (3.73) deki gibi seçersek

$$V = \frac{1}{2}(\dot{q}^T B \dot{q} + e^T K_p e) \quad (3.73)$$

ve türevide (3.74) eşitliğindeki hali alır.

$$\dot{V} = \dot{q}^T (B\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{B}\dot{q} - K_p e) \quad (3.74)$$

Kapalı çevrim dinamiğini denklem (3.74) de yerine koyarsak

$$\dot{V} = \dot{q}^T (\frac{1}{2}\dot{B} - V_m)\dot{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \quad (3.75)$$

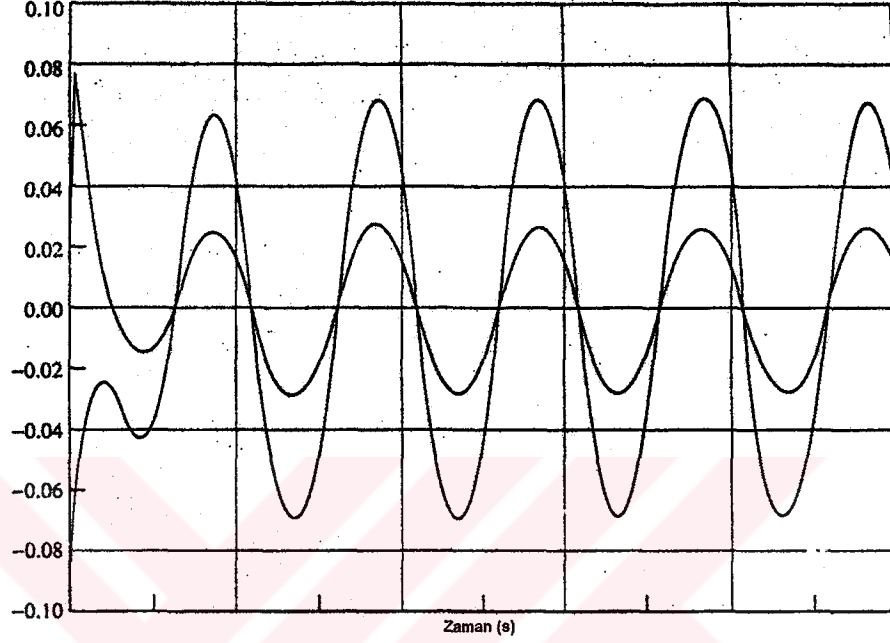
ilk terimin eğrisel simetriği bize denklem (3.76) verir.

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \quad (3.76)$$

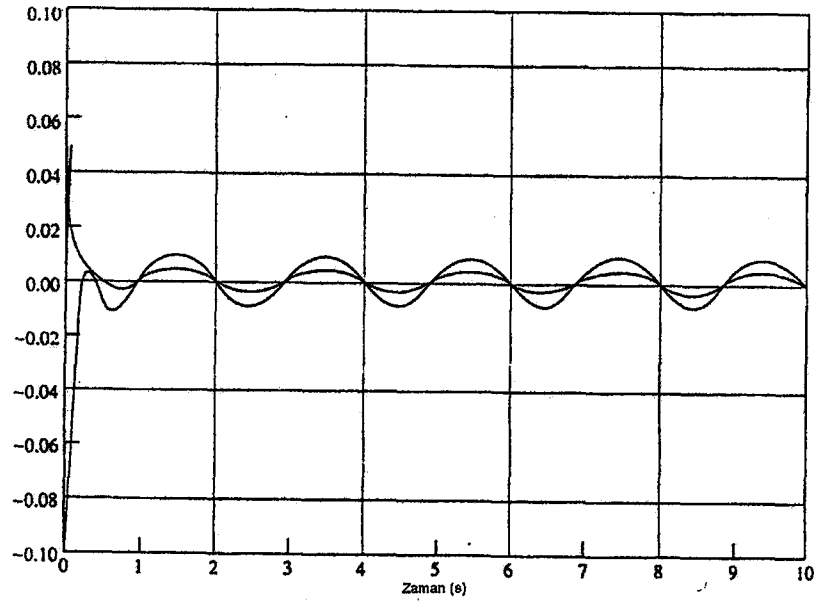
$x = [e^T \quad \dot{q}^T]^T$ olduğu durumda V pozitif tanımlı, $\dot{V}$ sadece negatif yarı tanımlıdır. Böylelikle Liapunov ile sistemin hata ve eklem hızları sınırlı olduğu durumlarda kararlı olduğu gösterilmektedir.

Örnek 3.3.3 : PD+ Yerçekimi kontrolü uygulayacağımız bu örneğimizde de yine daha önce örneklerde kullanılmış olduğumuz aynı kol ve yörünge ile çalışacağız.

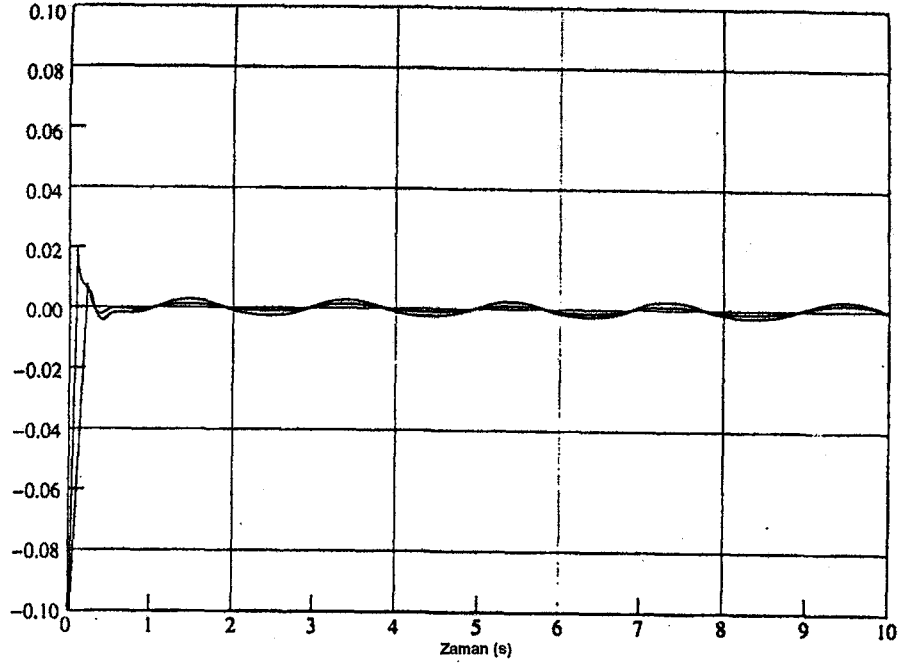
$$\begin{aligned}\tau_{c1} &= k_v \dot{e}_1 + k_p e_1 + (m_1 + m_2)ga_1 \cos \theta_1 + m_2 ga_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \tau_{c2} &= k_v \dot{e}_2 + k_p e_2 + m_2 ga_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}\quad (3.77)$$



Şekil 3.13 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$



Şekil 3.14 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 25 \text{ rad/s}$

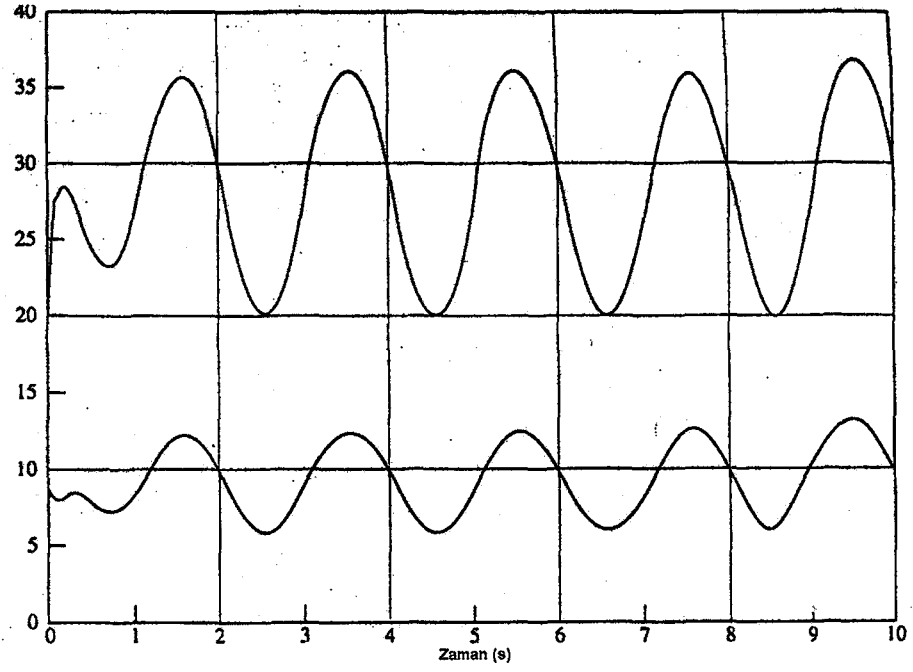


Şekil 3.15 PD+ Yerçekimi kontrol yörünge izleme hatası $e_1(t)$, $e_2(t)$ (rad) $\omega_n = 50 \text{ rad/s}$

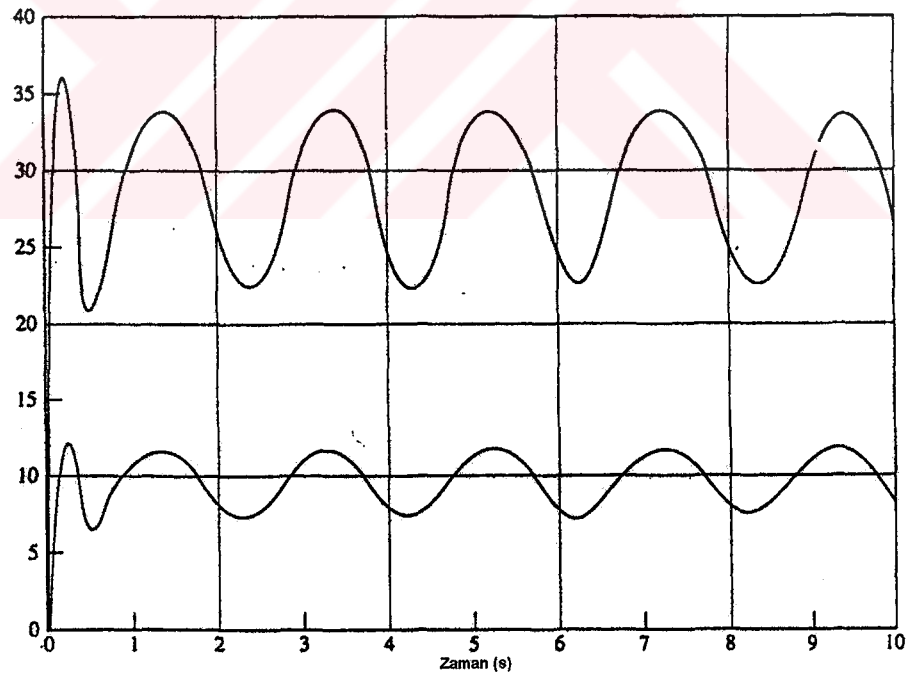
$$k_p = \omega_n^2, \quad k_v = 2\omega_n \quad (3.78)$$

Yukarıdaki grafiklerde değişik doğal frekanslara sistemlerin cevapları görülmektedir. ω_n ve PD kazançları ile sistemin performansı iyileştirilebilir. PD kazancı ne kadar büyük seçilirse seçilsin yörünge izleme hatası hiç bir zaman sıfıra ulaşmamaktadır. Ama bunun yanında sıfıra ulaşmasa da sınırlı bir bantta gidip gelmektedir. $\omega_n = 50$, $k_p = 2500$, $k_v = 100$ değerleri için bir çok yapıda oldukça uygun cevaplar elde edilmiştir.

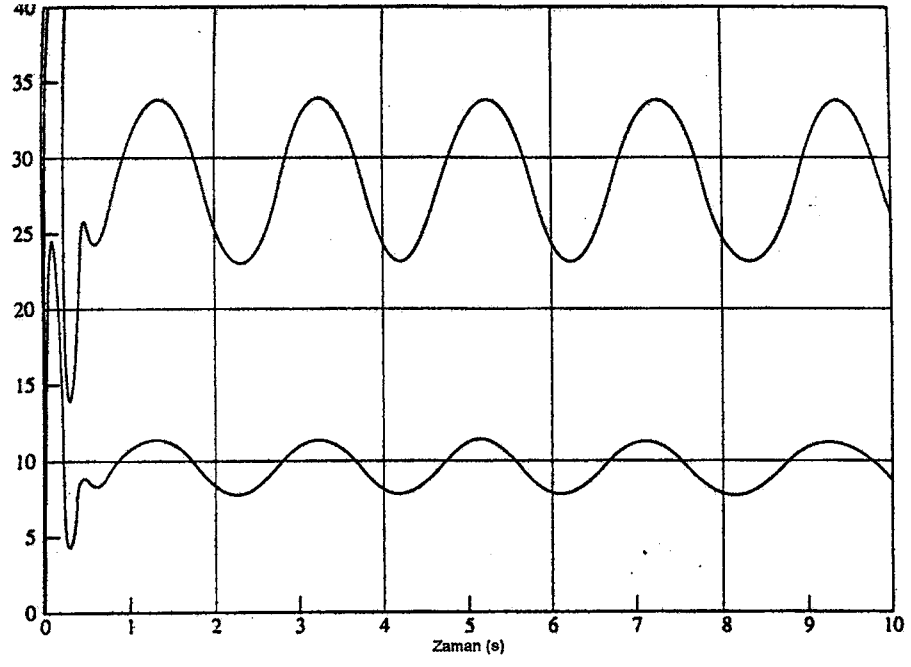
Şunu belirtmekte fayda vardır ki hatanın dc değeri sıfıra eşittir. Bu tip bir kontrolcüye ait kontrol giriş momentleri Şekil 3.16, 3.17, 3.18 görülmektedir. Şekillerden görüldüğü üzere yüksek kazançlardaki moment değerleri oldukça küçük olması ilginç bir tespittir. Çünkü yaygın kanı PD kazancı ne kadar artarsa sisteme uygulanan moment değeri de o derece artar düşüncesidir.



Şekil 3.16 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$



Şekil 3.17 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 25 \text{ rad/s}$



Şekil 3.18 PD+ Yerçekimi kontrol giriş moment değerleri (N-m) $\omega_n = 50 \text{ rad/s}$

4. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

4.1 Üç Serbestlik Dereceli Anthropomorphic Kolun Ters Dinamik Kontrolü

Üçüncü bölümde teorik olarak anlatılıp örneklerle kendi içindeki çeşitleri üzerinde karşılaştırmalar yapılan hesaplanmış moment kontrol ailesinden ters dinamik kontrol ile yine ikinci bölümde modellenmesi anlatılan üç serbestlik dereceli anthropomorphic robot kolun aşağıda belirtilen yörüngedeki performansı üzerine bir uygulama gerçekleştireceğiz.

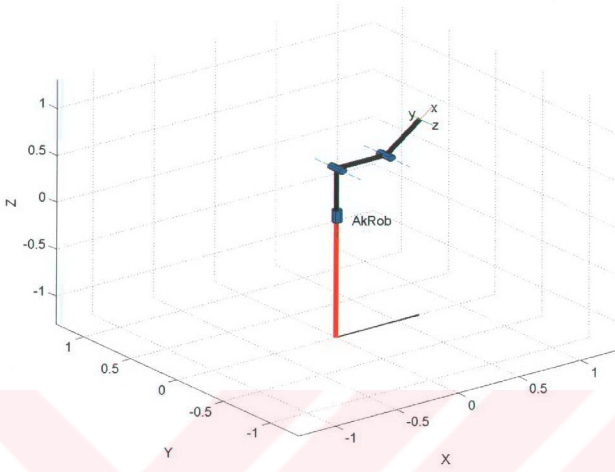
Çizelge 4.1 Üç serbestlik dereceli anthropomorphic kolun parametreleri

	Uzunluk(m)	Ağırlık merkezine olan uzaklık(m)	Ağırlık (kg)	Silindirik link yarıçapı	Silindirik link param. E	Silindirik link param.A	Silindirik link param.I
Link 1	0.5	0.2	4	0.05	0.005	0.005	-
Link 2	0.4	0.2	2	0.05	0.01	0.00375	0.01
Link 3	0.4	0.2	1	0.05	0.01	0.00375	0.01

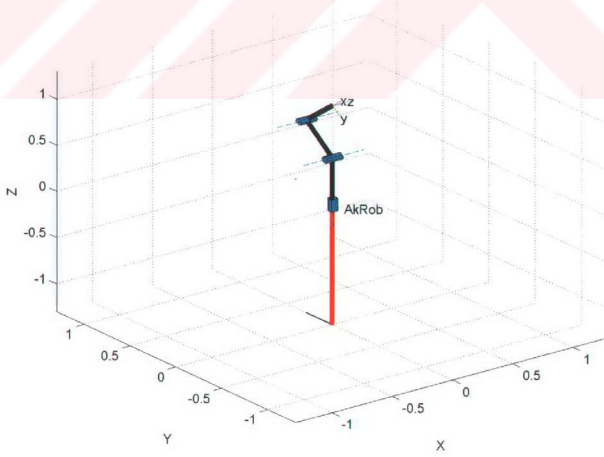
Sistemin modelini ve kontrolünü gerçekleyen simülasyonu işletmek üzere matlab ve simulink programlarını robot yapımızın görsel işleyişi için ise yine simulink programının robotik araç kutusunu kullanacağız.

Robot kolunun başlangıç pozisyonu Şekil 4.1 de son pozisyonu ise Şekil 4.2 de görülmektedir.

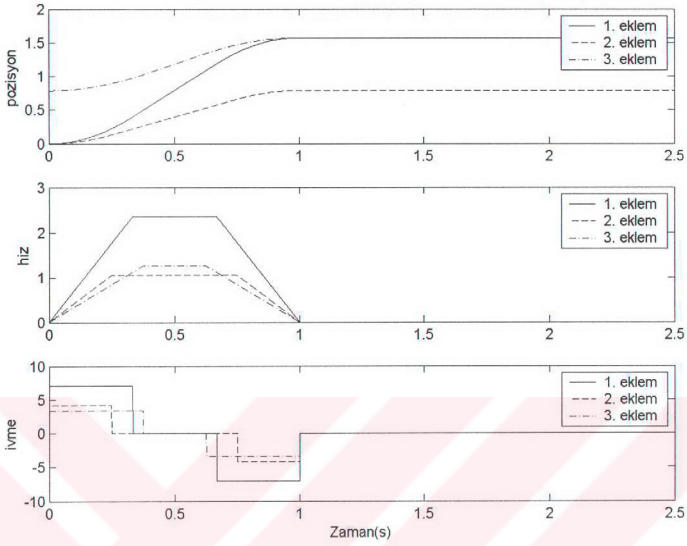
İşte bu iki durum arasındaki geçiş halinde izlenecek yörünge buna bağlı hız ve ivme değerleri daha önceki bölümlerde anlatılan teknik ile Ek1 deki program sayesinde hesaplanmıştır. İlgili şekiller Şekil 4.3 deki gibidir.



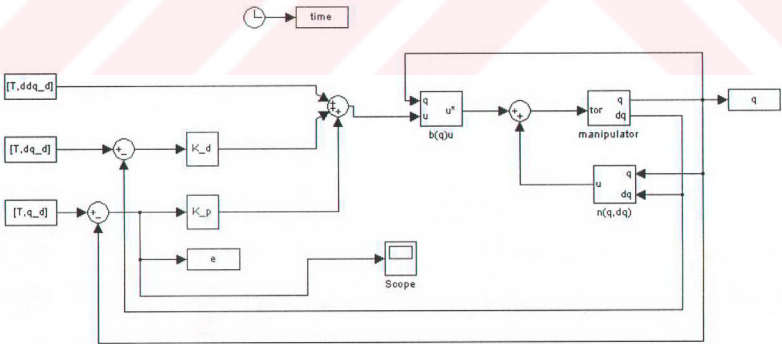
Şekil 4.1 Başlangıç Pozisyonu $q = [0 \ 0 \ \pi/2]$



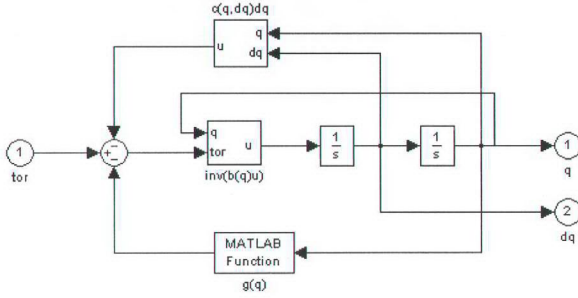
Şekil 4.2 Son pozisyon $q = [\pi/2 \ \pi/4 \ \pi/2]$



Şekil 4.3 İstenen yörünge, hız ve ivme grafiği



Şekil 4.4 Ters dinamik kontrol şeması

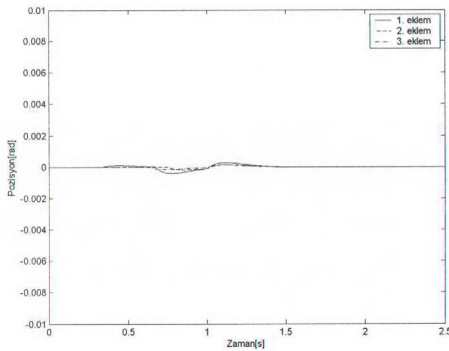


Şekil 4.5 Robot kolu

Kontrolcünün P ve D katsayıları üçüncü bölümdeki kazanç belirleme kriterlerine göre (4.1) eşitliğindeki gibi seçilir ve dinamik model oluşturmak için yazılan diğer kodlar ise Ek2, Ek3, Ek4 de bulabilirsiniz.

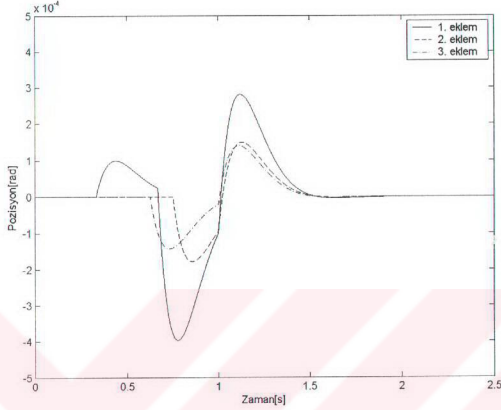
$$K_p = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$K_d = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.6 Yörünge izleme hataları

Şekil 4.6 görülen yörünge izleme hatası daha gerçekçi bir izlenim vermek için grafik sınırları yaklaşık $+0.5$ derece ile -0.5 arasında tutulmuştur. Hataların ayrıntılı incelenebilmesi için sınırları daha azaltırsak Şekil 4.7 deki hata grafiği oluşur.



Şekil 4.7 Yörünge izleme hataları

Kontrol amacı olarak tayin edilen yörüngede birinci link, sıfır pozisyonundan $+\pi/2$ lik bir açı yapacak şekilde, ikinci link, yine sıfır pozisyonundan $+\pi/4$ lük bir açı yapacak şekilde, üçüncü link, $+\pi/4$ pozisyonundan $+\pi/2$ lik bir açı yapacak şekilde hareketlerini sıfır ile bir saniye arasında tamamlaması istenmektedir. Görüldüğü gibi her üç eklemde tam olarak oturması 1.5 ile 2.0 saniye arasında gerçekleşmektedir. Yörünge izleme hata eğrisine bakıldığında düşük hızlarda sıfır hata oluşurken yüksek hızlarda hata artmaktadır. Büyük hata sıçramaları ile yörüngelerin parabolikten doğrusala yine doğrusaldan parabolige geçiş noktalarında gözlenmektedir. Başlangıç anında birinci linkte oluşan ve diğer linklerde oluşmayan pozitif bir hata oluşmasının nedeni eklem hareketleri ile yerçekimi etkisi arasındaki ilişkiden kaynaklanmasıyla beraber birinci linkin atalet momentinin yüksek olması da söylenebilir. Pozitif ve negatif sıçramaların nedeni ise yörünge tayini kısmında anlatıldığı gibi robot kollarında gerçekte sabit ivmelenme yerine doğrusal ivmelenme olmasıdır. Buna rağmen hesap kolaylığı ve ihmal edilebilecek kadar az bir hata üretmesi nedeniyle istenilen ivmenin sabit seçilmesidir. Bunun yanında linkler arasında hata bakımından farklılıklar olmasının başlıca nedeni linklerin birbirlerine olan etkileridir. End – efektörün bağlı bulunduğu linkten temele doğru gidildikçe ilgili eklem gelen bozucu etki giderek artmaktadır. Daha önceki

bölümlerde uygulaması yapılan iki linkli düzlemsel robot kolda da görüldüğü gibi hesaplanmış moment kontrol ailesinden bir kontrolcünün iyi bir performans almak için yapının tamamının çok iyi bir şekilde modellenmesine ihtiyaç vardır. Bu modelleme gerçek bir sisteme geçildiğinde o kadarda kolay olmadığı gözlenmektedir. Özellikle sistem parçalarının atalet momentlerinin hesabı her bir parçanın içeriğine bağlı olduğundan. Yapı oluşturulurken kullanılan metal cinsi ve yoğunluğuna kadar tüm değerler doğru olarak alınmalıdır. Tabi ki bu zor şartlar bu tip kontrolcünün kullanımına engel olmamalıdır, bu yüzden sistem mümkün olduğunca düzgün geometrik şekillerden ve her bir elemanın aynı cins alaşımdan yapılmış olması sağlandığında bu hesaplama içerisindeki çok karmaşık terimler bugüne kadar yapılmış yaklaşımlarla basitleştirilebilir.

Hesaplamayı basitleştirmenin başka yolları da mevcuttur, bunlar; dayanıklı kontrol metotları ile karmaşık hesaplama gerektiren parametrelere sınır tayin edilmesi ve bu sayede hesaplamaların basitleştirilmesidir.

Sonuç olarak robot kontrolünde temel problem yörünge izlenmesidir. Bu problemin giderilmesi temelde iki bölümde incelenebilir. Birincisi bizim bu tezde incelediğimiz hesaplanmış moment kontrol sınıfı diğeri ise akıllı, uyarlanabilir kontrol sınıfıdır.

KAYNAKLAR

- Angeles J. (1982), "Spatial Kinematic Chains: Analysis, Sythesis, Optimization" Springer – Verlag, Berlin
- Arimoto S., F.Miyazaki, (1984), "Stability and robustness of PID feedback control for robot manipulators of sensory capability", MIT press.
- Corke P.I. (1996), "A Robotics Toolbox for Matlab", IEEE Robotics and Automation Magazine
- Craig J.J. (1989), "Introduction to robotics: Mechanics and Control. ", Addison Wesley
- Denavit J., Hartenberg R.S (1955), "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", ASME J. Applied Mechanics, USA.
- Efe M.O., Kaynak O. (1998), "A comparative study of neural network structures in identification of nonlinear systems", Pergamon Mechatronics
- Fu K.S.ve Gonzalez R.C., Lee C.S.G. (1987), "Robotics control, sensing, vision and intelligence", Mc.Graw-Hill Book Company, Newyork.
- Hollerbach J.M., Sahar G. (1983), "Wrist-partitioned inverse kinematic accelerations and manipulator dynamics", Int. J. Robotics Research
- Hunt, L. R., R. Su, and G. Meyer, (1983), "Global transformations of nonlinear systems", IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-28, no.1, pp. 24 – 31,
- İ.Ö. Bucak (1991), "Bir Robot Manipülâtör İçin Adaptif Model İzleme Kontrol Sistemi", İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Küçükdemiral İ.B., (2002), "Nöral – Genetik Tabanlı Optimal Bulanık Kontrolörün Gerçeklenmesi ve DC Servomotorlara Uygulanması", YTÜ Doktora Tezi.
- Lewis F.L. (1992), "Applied Optimal Control and Estimation", Prentice Hall, New Jersey
- Lewis F.L., Abdallah C.T., Dawson D.M. (1993), "Control of Robot Manipulators", Macmillan , USA.
- McKerrow P.J. (1991), "Introduction to Robotics", Addison Wesley , Singapore
- Ogata K. (2002), "Modern Control Engineering", Prentice Hall , New Jersey
- Ortega R. , M.W. Spong (1988), "adaptive motion control of rigid robots: a tutorial", IEEE Conf. Decision Control
- Paul R.P. (1981), "Robot Manipulators, Mathematics, Programming and Control", MIT Pres, Cambridge
- Paul R.P., Shimano B.E., Mayer G. (1981),"Kinematic control equations for simple manipulators", IEEE trans. Systems, Man, and Cybernetics
- Sarıoğlu M.K. (2000) , "Elektrik Makinalarının Temelleri", İTÜ yayınları
- Sciavicco L. ve Siciliano B. (1999), "Modelling and Control of Robot Manipulator" Springer – Verlag, London.
- Spong M. W. ve Vidyasagar M. (1989), "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons,

USA.

Wit C.C. de, Siciliano B., Bastin G. (1996), "Theory of Robot Control", Springer – Verlag, Great Britain.



EKLER

Ek 1	İstenilen Yörüngeyi Hesaplayan m. Dosyası
Ek 2	Atalet Matrisini Hesaplayan m. Dosyası
Ek 3	Merkezkaç ve Coriolis Matrislerini Hesaplayan m. Dosyası
Ek 4	Yerçekimi Matrisini Hesaplayan m. Dosyası
Ek 5	İstenilen Robot Yapısını Oluşturan Robotics Toolbox m. Dosyası

Ek 1 İstenilen Yörüngeyi Hesaplayan m. Dosyası

```

function [T,q,dq,ddq,err] = trapez(q_i,q_f,dq_c,t_f,Ts);

% zaman vektörü
T = (0:Ts:t_f);
n = size(T,1);

% değişkenlerin yüklenmesi
q = zeros(n,1);
dq = zeros(n,1);
ddq = zeros(n,1);
err = 0;
delta = q_f - q_i;
dq_c = sign(delta)*abs(dq_c);
if (delta ~= 0),
    dq_r = abs(delta/t_f);
    err = (abs(dq_c) <= dq_r) * (abs(dq_c) > 2*dq_r);
    if (err==0)
        t_c = t_f - delta/dq_c;
        n1 = max(1,fix(n*t_c/t_f));
        n2 = n - n1;
        ddq_c = dq_c/t_c;
% yörünge tayini
        q = [q_i + 0.5*ddq_c*T(1:n1).^2
            q_i + dq_c*(T(n1 + 1:n2)-0.5*t_c);
            q_f - 0.5*ddq_c*(T(n2 + 1:n) - t_f).^2];
        dq = [ddq_c*T(1:n1);
            dq_c*ones(n2 - n1,1);
            ddq_c*(t_f - T(n2 + 1:n))];
        ddq(1:n1) = ddq_c*ones(1,n1);
        ddq(n2 + 1:n) = - ddq_c*ones(1,n1);
    end;
end;

```

Ek 2 Atalet Matrisini Hesaplayan m. Dosyası

```

function BQ_ant = bqmatrix_ant(a,b,c,d,e,f)

a1=0.5;      %m
a2=0.4;
a3=0.4;
I1 = 0.2;    %m
I2 = 0.2;
I3 = 0.2;
m1=4;
m2=3;
m3=3;
R=0.05;

E1 = m1*(R*R)/2;
E2 = m2*(I2*I2)/12;
E3 = m3*(I3*I3)/12;
A1 = m1*(R*R)/2;
A2 = m2*(R*R)/2;
A3 = m3*(R*R)/2;
I2 = m2*(I2*I2)/12;
I3 = m3*(I3*I3)/12;
% yerçekimi ivmesi
g = 9.81;
% B matrisinin hesabı
Bq(1,1)=(m2*I2^2*cos(b)*cos(b)+m3*(a2*cos(b)+I3*cos(b+c))^2+E1+A2*sin(b)*sin(b)+E2*cos(b)*cos(b)+A3*sin(b+c)*sin(b+c)+E3*cos(b+c)*cos(b+c));
Bq(1,2)=0;
Bq(1,3)=0;
Bq(2,1)=0;
Bq(2,2)=(m2*I2^2*sin(b)*sin(b)+m3*(I2*I2+I3*I3+2*a2*I3*cos(c))+I2+I3);
Bq(2,3)=(m3*(I3*I3+I3*a2*cos(c))+I3);
Bq(3,1)=0;
Bq(3,2)=Bq(2,3);
Bq(3,3)=(m3*I3+I3);
moment = [d,e,f];
BQ_ant = (Bq*moment);

```

Ek 3 Merkezkaç ve Coriolis Matrislerini Hesaplayan m. Dosyası

```

function CQDQ_ant = cqdqmatrix_ant(a,b,c,d,e,f)

a1=0.5;      %m
a2=0.4;
a3=0.4;
I1 = 0.2;    %m
I2 = 0.2;
I3 = 0.2;

m1=4;
m2=3;
m3=3;
R=0.05;

E1 = m1*(R*R)/2;
E2 = m2*(I2*I2)/12;
E3 = m3*(I3*I3)/12;
A1 = m1*(R*R)/2;
A2 = m2*(R*R)/2;
A3 = m3*(R*R)/2;
I2 = m2*(I2*I2)/12;
I3 = m3*(I3*I3)/12;

% yerçekimi ivmesi
g = 9.81;

hc1 = ((-m2*I2*I2+A2-E2)*cos(b)*sin(b)+(A3-E3)*cos(b+c)*sin(b+c)+m3*(a2*cos(b)+I3*cos(b+c))*(-a2*sin(b)-I3*sin(b+c)));
hc2 = (sin(b+c)*(-m3*I3*a2*cos(b)+(-m3*I3*I3+A3-E3)*cos(b+c)));
hc3 = (m2*I2*I2*cos(b)*sin(b));
hc4 = (-m2*a2*I3*sin(c));

CQDQ_ant(1,1)=(2*hc1*d*e+2*hc2*d*f);
CQDQ_ant(2,1)=(-hc1*d*d+2*hc4*(e*f+f*f)+hc3*e*e);
CQDQ_ant(3,1)=(-hc2*d*d-hc4*e*e);

```

Ek 4 Yerçekimi Matrisini Hesaplayan m. Dosyası

```

function GQ_ant = gqmatrix_ant(a,b,c)

a1=0.5;      %m
a2=0.4;
a3=0.4;
I1 = 0.2;    %m
I2 = 0.2;
I3 = 0.2;

m1=4;
m2=3;
m3=3;
R=0.05;

E1 = m1*(R*R)/2;
E2 = m2*(I2*I2)/12;
E3 = m3*(I3*I3)/12;
A1 = m1*(R*R)/2;
A2 = m2*(R*R)/2;
A3 = m3*(R*R)/2;
I2 = m2*(I2*I2)/12;
I3 = m3*(I3*I3)/12;

% yerçekimi ivmesi
g = 9.81;

GQ_ant(1)=0;
GQ_ant(2)=((m2*I2+m3*a2)*g*cos(b)+m3*I3*g*cos(b+c));
GQ_ant(3)=(m3*I3*g*cos(b+c));

```


Ek 5 İstenilen Robot Yapısını Oluşturan Robotics Toolbox m. Dosyası

```
L1=link([pi/2 0 0 0.5 0]);  
L2=link([0 0.4 0 0 0]);  
L3=link([0 0.4 0 0 0]);  
r=robot({L1 L2 L3});
```

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 24.11.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993-1997 Hasan Polatkan Lisesi

Lisans 1997-2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Elektrik – Elektronik
Müh. Fak. Elektrik Müh. BölümüYüksek Lisans 2001-2004 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Müh. Anabilim Dalı,
Kontrol ve Otomasyon Programı**Çalıştığı kurum**Araştırma 2001-Devam ediyor YTÜ Elektrik – Elektronik Fakültesi
Görevlisi