

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NLMS ALGORİTMASI İLE UYARLAMALI
GÜRÜLTÜDEN ARINDIRICI**

- 139 809 -

Elektronik ve Haberleşme Müh. Ulaş GÜNTÜRKÜN

**FBE Elektronik ve Haberleşme Anabilim Dalı Haberleşme Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Prof. Metin YÜCEL
(Yücel)

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ünal KÜÇÜK

Yrd. Doç. Dr. Banu DİĞİ
(Digi)

İSTANBUL, 2003

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
2 FIR SÜZGEÇLER	3
2.1 Genel	3
3 STOKASTİK SÜREÇLER	5
3.1 Genel	5
3.2 Ayrık Zamanlı Stokastik Süreçlerin Kısmi Karakterizasyonu	5
3.3 Korelasyon Fonksiyonları	5
3.3.1 Öz İlişki	5
3.3.2 Karşı İlişki	5
3.3.3 Ortalama	6
3.3.4 Değişinti	6
3.3.5 Koveriyans	6
3.3.6 Özel Durumlar	6
3.4 Geniş Anlamda Durağanlık	7
3.5 Korelasyon Matrisi	7
3.5.1 Korelasyon Matrisinin Özellikleri	8
3.6 Beyaz Gürültü	9
3.7 Stokastik İşaret Modelleri	9
3.7.1 Öz Bağımlı (AR) Modeller	10
3.7.1.1 AR Beyazlatma Süzgeci (Süreç Çözümleyicisi)	10
3.7.1.2 AR Renklendirme Süzgeci (Süreç Üreticisi)	11
3.7.1.3 Kararlılık	12
3.7.2 Kayan Ortalamalı (MA) Modeller	12
3.7.3 Öz Bağımlı Kayan Ortalamalı (ARMA) Modeller	13
3.8 Bir Stokastik Sürecin Asimptotik Durağanlığı	13
3.8.1 Klasik Yöntem	14
3.8.2 Asimptotik Durağan Bir AR Sürecin Korelasyon Fonksiyonu	15
3.9 Yule-Walker Denklemleri	16

3.10	Beyaz Gürültünün Değişintisi.....	18
4	SPEKTRUM ANALİZİ.....	20
4.1	Genel.....	20
4.2	Güç Spektral Yoğunluğu	20
4.2.1	Örnek	22
4.2.2	Güç Spektral Yoğunluğunun Özellikleri	23
4.3	Durağan Bir Sürecin Doğrusal Süzgeç Boyunca İletimi	23
4.4	Güç Spektrumu Kestirimi	24
4.4.1	Parametrik Yöntemler.....	24
4.4.1.1	Sistem Tanımlama Yaklaşımı.....	24
4.4.1.2	En Düşük Değişintili Gürültüsüz Cevap Yöntemi	25
4.4.1.3	Öz Değer Çözümlemesine Dayalı Yöntemler	25
4.5	Özet.....	25
5	ÖZ DEĞER ÖZ VEKTÖR ANALİZİ.....	26
5.1	Öz Değer Problemi	26
5.2	Öz Değer ve Öz Vektörlerin Özellikleri	26
5.3	Örnek	28
6	ÜÇGEN DEKOMPOZİSYONU İLE GERÇEKLEŞTİRİLEN DÖNÜŞÜMLER	29
6.1	LDU Dekompozisyonu	29
6.2	UDL Dekompozisyonu	29
6.4	Örnek	31
7	OPTİMUM DOĞRUSAL SÜZGEÇLER (WIENER SÜZGEÇLERİ).....	32
7.1	Genel.....	32
7.2	Optimum Doğrusal Süzgeçlerin Yapısı	32
7.3	Hata Başarım Yüzeyi.....	35
7.4	Diklik Prensibi	38
7.5	Özet.....	40
8	DOĞRUSAL KESTİRİM.....	41
8.1	Genel.....	41
8.2	İleri Yönde Doğrusal Kestirim	41
8.3	Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü	43
8.3.1	Korelasyon Matrisi	44
8.3.2	Karşı İlişki Vektörü	44
8.3.3	Giriş Vektörünün Değişintisi.....	45
8.5	Doğrusal Kestirim İle AR Model Arasındaki İlişki.....	46
8.6	İleri Yönde Kestirimci Hata Süzgeci	47
8.7	Genişletilmiş Wiener-Hopf Denklemleri.....	48
8.7.1	Örnek	49
8.8	Levinson-Durbin Algoritması (LDA).....	50
8.8.1	Levinson-Durbin Algoritmasının Uygulamaları	51
8.9	Kestirim-Hata Süzgeçlerinin Özellikleri	53
8.9.1	Minimum Faz.....	54
8.9.2	Maksimum Faz	55
8.9.3	Beyazlatıcı Süzgeç.....	57

9	UYARLAMALI SÜZGEÇLER	59
9.1	Uyarlama Süreci	59
9.2	Süzgeç Süreci.....	59
9.3	Uyarlamalı Süzgeçlerin Yapısı	59
9.4	En Dik Azalış Yöntemi.....	61
9.5	En Dik Azalış Yönteminin Özeti	62
9.6	En Dik Azalış Yönteminin Kararlılığı	62
9.7	Karesel Ortalama Hata.....	65
9.8	Örnek	67
9.9	Deneyler.....	69
9.9.1	1. Deney:Değişen Öz Değer Dağılımının Algoritmaya Etkisi	69
9.9.2	2. Deney:Değişen Adım Büyüklüğünün Algoritmaya Etkisi	73
9.10	En Küçük Kareler (LMS)Uyarlama Algoritması	74
10	UYARLAMALI GÜRÜLTÜDEN ARINDIRICI	77
10.1	Genel.....	77
10.2	Normalize En Küçük Kareler Yöntemi	77
10.2.1	Deney 1	78
10.2.2	Deney 2	80
10.3	Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminin Yapısı.....	81
10.4	Örnek Azaltıcı.....	83
10.4.1	Deney	84
10.5	Alçak Geçiren Süzgeç.....	86
10.6	Sistemin Gerçekleştirilmesi	89
11.	SONUÇLAR	93
	KAYNAKLAR.....	94
	EKLER	95
Ek 1	Program Kodlarının ve Wav Dosyalarının Bulunduğu CD ROM	96
	ÖZGEÇMİŞ.....	97

SİMGE LİSTESİ

$F_x(x)$	Kümülatif yoğunluk fonksiyonu
H	Hermityen Operatörü
$J_{\min}$	Minimum Hata Vektörü
$J(w)$	Bedel Fonksiyonu
P	Giriş Vektörü İle İstenen Cevap Arasındaki İlişkiyi Tanımlayan Karşı İlişki
R	Korelasyon Matrisi
$r_u(\ell)$	Bir Sürecin Öz İlişki Fonksiyonu
$S(w)$	Güç Spektral Yoğunluğu
$u(n)$	Süzgeç Giriş Vektörü
q	Korelasyon Matrisinin Öz Vektörü
w	Süzgeç Ağırlık Vektörü
$\mu(n)$	Bir sürecin ortalama fonksiyonu
$\sigma_u^2(n)$	Bir Sürecin Değişintisi
λ	Korelasyon Matrisinin Öz Değerleri
$\mathcal{G}_u(l)$	Bir Sürecin Öz Koverians Fonksiyonu
$\mathcal{G}_{uv}(l)$	Bir Sürecin Karşı Koverians Fonksiyonu
∇_k	Gradient Operatörü
Γ_m	Yansıma Katsayısı

KISALTMA LİSTESİ

AGS	Alçak Geçiren Süzgeç
AR	Öz Bağımlı
ARMA	Öz Bağımlı Kayan Ortalamalı
FIR	Sonlu İmpuls Yanıtı
IIR	Sonsuz İmpuls Yanıtı
LDA	Levinson-Durbin Algoritması
LDU	Alt-Köşegen-Üst
LMS	En Küçük Kareler
MA	Kayan Ortalamalı
MSE	Karesel Ortalama Hata
NLMS	Normalize En Küçük Kareler
RLS	Yinelemeli Küçük Kareler
SDA	En Dik Azalış
UDL	Üst-Köşegen-Alt



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 Kokleanın Yapısı	1
Şekil 1.2 Uyarlamalı Gürültü Arındırıcı Sisteminin Blok Diyagramı	2
Şekil 3.1 Stokastik İşaretin Elde Edilmesi	9
Şekil 3.2 Stokastik Süreç Modelinde Giriş-Çıkış İlişkisi	10
Şekil 3.3 AR Beyazlatma Süzgeci	11
Şekil 3.4 AR Renklendirme Süzgeci	12
Şekil 3.5 Kayan Ortalamalı Model	13
Şekil 4.1 Durağan Bir Sürecin Doğrusal Süzgeç Boyunca İletimi	23
Şekil 4.2 Sistem Tanımlama Yaklaşımı	24
Şekil 7.1 Optimum Doğrusal Süzgeçlerin Yapısı	32
Şekil 7.2 FIR Süzgeçte İşaret Akışı	33
Şekil 7.3 IIR Süzgeçte İşaret Akışı	34
Şekil 7.4 Transversal Uyarlamalı Süzgeç	35
Şekil 7.5 Diklik İlkesi	39
Şekil 7.6 Optimum Kestirimci	40
Şekil 8.1 İleri Yönde Doğrusal Kestirimci	42
Şekil 8.2 İleri Yönde Kestirim Hatası	43
Şekil 8.3 Kestirim-Hata Süzgeci	48
Şekil 8.4 Kestirimci İle Kestirim-Hata Süzgeci Arasındaki İlişki	48
Şekil 8.5 İkinci Dereceden Kestirim-Hata Süzgeci	50
Şekil 8.6 Geri Yönde Doğrusal Kestirimci	55
Şekil 8.7 İleri Yönde ve Geri Yönde Kestirimcilerin z Düzleminde Karşılaştırılması	57
Şekil 8.8 Kaskat Bağlı Beyazlatma ve Renklendirme	58
Şekil 9.1 Uyarlamalı Süzgeç Bloğu	59
Şekil 9.2 İkinci Dereceden Uyarlamalı Süzgeç	67
Şekil 9.3 Değişen Öz Değer Dağılımının En Dik Azalış Algoritmasına Etkisi	70
Şekil 9.4 Değişen Adım Büyüklüğünün En Dik Azalış Algoritmasına Etkisi	73
Şekil 10.1 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Blok Diyagramı	77
Şekil 10.2 LMS Algoritması Deneyinde Kullanılacak İşaret Üretici Bloğu	78
Şekil 10.3 LMS Algoritmasıyla Çalışan Uyarlamalı Süzgeç	78
Şekil 10.4 LMS Algoritmasının Öğrenme Eğrisi	79
Şekil 10.5 NLMS Algoritmasının Öğrenme Eğrisi	80
Şekil 10.6 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminin Yapısı	81
Şekil 10.7 Örnek Azaltıcı Blok Diyagramı	83
Şekil 10.8 Örnek Azaltma İşleminin İşaretin Zaman Spektrumuna Etkisi	85
Şekil 10.9 Örnek Azaltma İşleminin İşaretin Frekans Spektrumuna Etkisi	86
Şekil 10.10 Örnek Azaltıcı Sistem Çıkışındaki İşaretin Frekans Spektrumu 1	87
Şekil 10.11 Alçak Geçiren Süzgeç Katsayılarının Elde Edildiği Blok	88
Şekil 10.12 Alçak Geçiren Süzgeç Karakteristiği	89
Şekil 10.13 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Zaman Domenindeki Çizimleri	90
Şekil 10.14 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Logaritmik Genlik Ekseninde Frekans Spektrumu	91
Şekil 10.15 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Doğrusal Genlik Ekseninde Frekans Spektrumu	92

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 6.1 Tanımlar ve Özellikler	29
Çizelge 8.1 Wiener Süzgeci İle İleri Yönde Doğrusal Kestirimcinin Karşılaştırılması	45
Çizelge 9.1 Deneyde Kullanılan Parametreler	70



ÖNSÖZ

Teknolojiyi yönlendirme durumunda olan bilim; ürettiği teknolojinin yarattığı gücün etkisiyle insanlığın yaşanan değişimden tam anlamıyla olumlu yönde etkilenmesi için bazen yeterli olamamakta, teknolojiyi besleme ve geliştirme döngüsü içine sıkışarak kendisi de zarar görmektedir. Oysa özgür düşüncenin ürünü olan bilim, insanlık için en güçlü ışık kaynağı olarak gelişimin sınırsızlığına yol açabilecek, insanlığın beynini yüzyıllardır süren esaretten kurtarabilecek yegane araçtır.

Bilimle uğraşmayı, insanoğlunun gelişimi için bilime yeteneklerim ölçüsünde katkıda bulunmayı hayatta bireysel hedef olarak belirlemiş bir mühendis adayı olarak yaptığım bu tez çalışmasının gelecekteki bilimsel kariyerime temel teşkil etmesini ümit ediyorum.

Bu tez çalışması ana hatlarıyla işaretten uyarlamalı algoritmalarla gürültünün arındırılmasını amaçlamakta ve, kokleası gerektiği gibi işlev görmeyen insanların yaşadığı “kokteyl partisi etkisi” denen sorunun çözümüne katkıda bulunmak için gerekli bir sistemin geliştirilmesini hedeflemektedir.

Çalışmamda, öncelikle “stokastik süreçler” kavramına ve bu kavrama dayanan uyarlamalı süzgeç kuramı hakkında sahip olduğum teorik bilgilere örneklerle birlikte yer vererek yaptığım çalışmanın teorik altyapısının anlaşılabilir olmasını amaçladım. Bunun yanı sıra tez süresince yaptığım deneyleri de ana temanın öncesinde çalışmama dahil ederek gerekli uygulama hazırlığını da gerçekleştirmek istedim. Bunun için kimi temel sorunları analitik yollardan, kimilerini ise yazdığım kodlarla irdeledim. Bunların ışığında bir işaretten referans kullanarak gürültünün arındırılması konusunda geliştirmeye çalıştığım sistemin performansını sonuçlarıyla birlikte ele aldım.

Ayrıca bu çalışmamın, “stokastik süreçler” ve “uyarlamalı süzgeçler” konularında bir Türkçe kaynak olarak kullanılabilmesi için tüm terim ve kısaltmaların mümkün olduğunca Türkçe’sini kullanmaya özen gösterdim.

Çalışmamın okuyan herkes için verimli bir kaynak olmasını diliyorum.

Yaşamın tüm alanlarında beni en çok etkileyen ve olağanüstü zekasını yansıtan hayatı, eserleri ve sözleriyle yolumu aydınlatan Mustafa Kemal Atatürk’ü saygıyla anıyor, çalışmama yaptıkları katkılarından dolayı öncelikle çok sevdiğim aileme, sayın hocalarım Ünal Küçük , Sıtkı Öztürk, Hasan Dinçer, Tülay Yıldırım, Metin Yücel, Ahmet Hamdi Kayran, ve Işın Erer’e, sevgili arkadaşlarım Barış Erdemir, M. Çağatay Serin, Gülşah Sevim, Selmin Günevi, Kadir Elitok, Kıvanç Şengöz, Hakan Oka ve Kubilay Erdoğan’a teşekkür ediyorum.

Haziran 2003,

Ulaş Güntürkün

ÖZET

İnsan kulağında duyma işlevinin yerine getirilmesi için merkez teşkil eden koklea, kimi insanlarda henüz tam olarak anlaşılamayan nedenlerden dolayı gerektiği gibi işlev görmemekte ve bu insanlar gürültüsüz ve sessiz ortamlarda konuşmaya odaklanabilirken birden fazla konuşmanın gerçekleştiği ya da bir konuşmaya başka seslerin eşlik ettiği ortamlarda istenen sese odaklanamamaktadırlar. Bu sorun, tıp ve mühendislik literatüründe yapısı itibarıyla taşıdığı benzerlikten dolayı “kokteyl parti etkisi” adıyla anılmaktadır.

Şu ana kadar kokleanın fiziksel işlevini tam olarak belirlemek için yapılan çalışmaların tıbbi bilimler ayağı bilim adamlarına istenen açılımları sağlayamamaktadır. Bu nedenle iş daha çok laboratuvar ortamında gerçekleştirilen deneylerle mühendis kökenli bilim adamlarının çalışmalarına kalmaktadır.

Kokleanın bir elektriksel modelini oluşturmak, şu aşamada beklentilerin çok üzerinde bir hedef olup bu konuyla ilgili beklentiler, ses lokalizasyonu ve gürültüden arındırma sistemlerinin mükemmelleştirilmesiyle koklea modeline daha iyi çalışan bir yaklaşım getirmekten ibarettir.

Gerek ses lokalizasyonu, gerekse gürültüden arındırma konuları belli kabuller çerçevesinde şu anda gerçekleştirilen sistemler olmakla birlikte, her iki uygulamanın da sınır şartlarının geliştirilerek ilerletilmesi gereklidir.

Sunduğum çalışmada da bir referans gürültüsü yardımıyla NLMS algoritmasıyla çalışan uyarlamalı süzgeç yardımıyla işareti gürültüden arındırma bloğu daha iyi bir performans elde etmek için örnek azaltıcı bloğundan ve alçak geçiren süzgeçten geçirilerek iyi bir performans elde ettim ve bu sonuçları son bölümde yorumladım.

Anahtar kelimeler: Stokastik Süreçler, Uyarlamalı Süzgeçler, Koklea, Ses, Gürültüden Arındırma.

ABSTRACT

In the case the cochlea of a human, being the most important part of human auditory system, does not function properly, it causes that person to have a handicap to focus on a particular speech or sound in an ambience which consists of some several sounds, noises or speeches for some reasons that are not clear yet while this person could listen to and understand a speech in a quite environment. This phenomenon is called “cocktail party effect” for its structural similarity to the ambience experienced during a cocktail party.

The functional structure of the cochlea has not been analyzed completely yet, which makes scientists have difficulties to set a framework. It is for this reason that the scientists coming from engineering origins are anticipated to achieve a framework to supply suitable conditions for the research on this area.

Building a model of cochlea does yet exceed the expectations on this subject. Actually it is now anticipated that a better approach to the cochlea issue could be established by the perfection of “sound localization” and “noise cancellation” rather than building a complete model that exactly describes the mathematical behaviour of the cochlea.

Both “sound localization” and “noise cancellation” tasks are achieved in the current literature being quite dependent of the assumptions nevertheless. It is needed to widen the restrictions those set the needed conditions for the systems to work for the systems being capable of handling more diverse areas of applications.

In this work, I established a noise cancellation system that consists of an adaptive filter working with NLMS algorithm which is followed by a downsampler block and a low-pass filter at the last stage. I aimed to increase the performance of the system using a reference noise recorded in real time and presented the results I achieved.

Keywords: Stochastic processes, adaptive filters, cochlea, sound, noise cancellation.

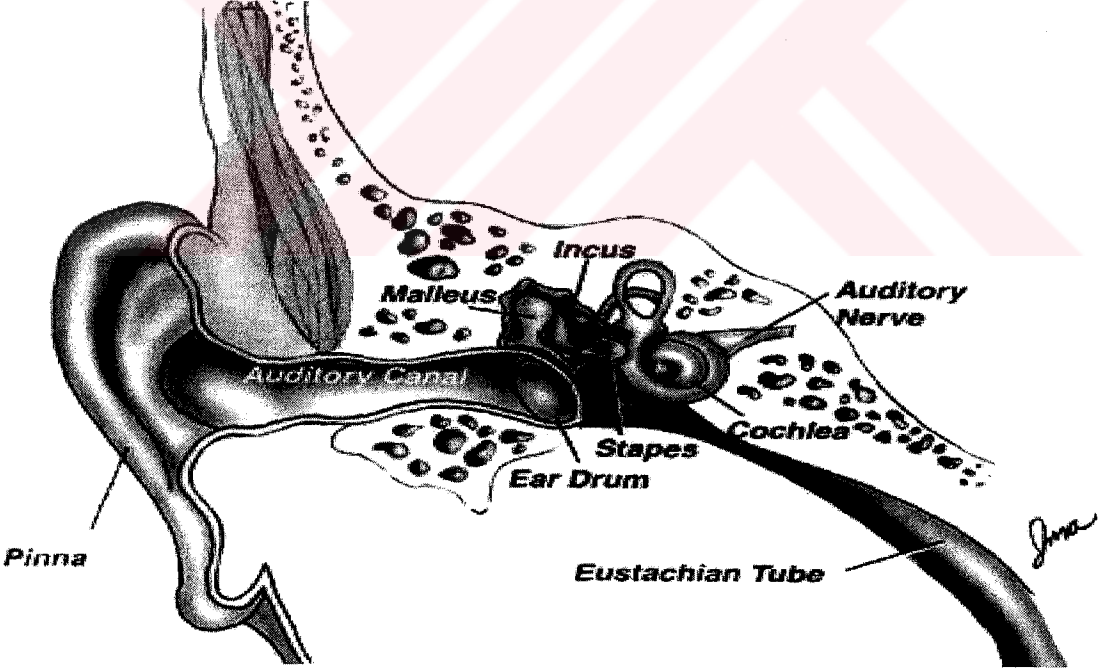
1 GİRİŞ

Bu tez çalışmasının amacı, uyarlamalı süzgeç kuramını kullanarak kokteyl partisi denen fenomenin çözümünde önemli bir aşama olan “gürültüden arındırma” sistemini geliştirmektir. Kokteyl Parti etkisi, kokleasında işlev bozukluğu olan bir kişinin birçok konuşma arasından birisine odaklanmakta yaşadığı zorluk olarak düşünülmektedir (Zeng, Shannon, 1999).

Bu sorunu yaşayan bir insan belli bir sese konsantre olmaya çalıştığında , kokteylde oluşan uğultunun etkisine benzer bir şekilde duymaya çalıştığı sesin yönünü ve içeriğini anlamakta sorun yaşar.

Bu problemin giderilmesi için yapılan çalışmalar kulak içine yerleştirilen elektrotlar yardımıyla kokleanın yerine getiremediği işlevi tamamlamaya yönelik olup halen geliştirilme aşamasındadır (Cheveigne, 1998).

Koklea, kulakta birbirinden farklı birçok fonksiyonu olan bir organdır (Loizou, Poroy, Dorman, 1997).



Şekil 1.1 Kokleanın Yapısı (5)

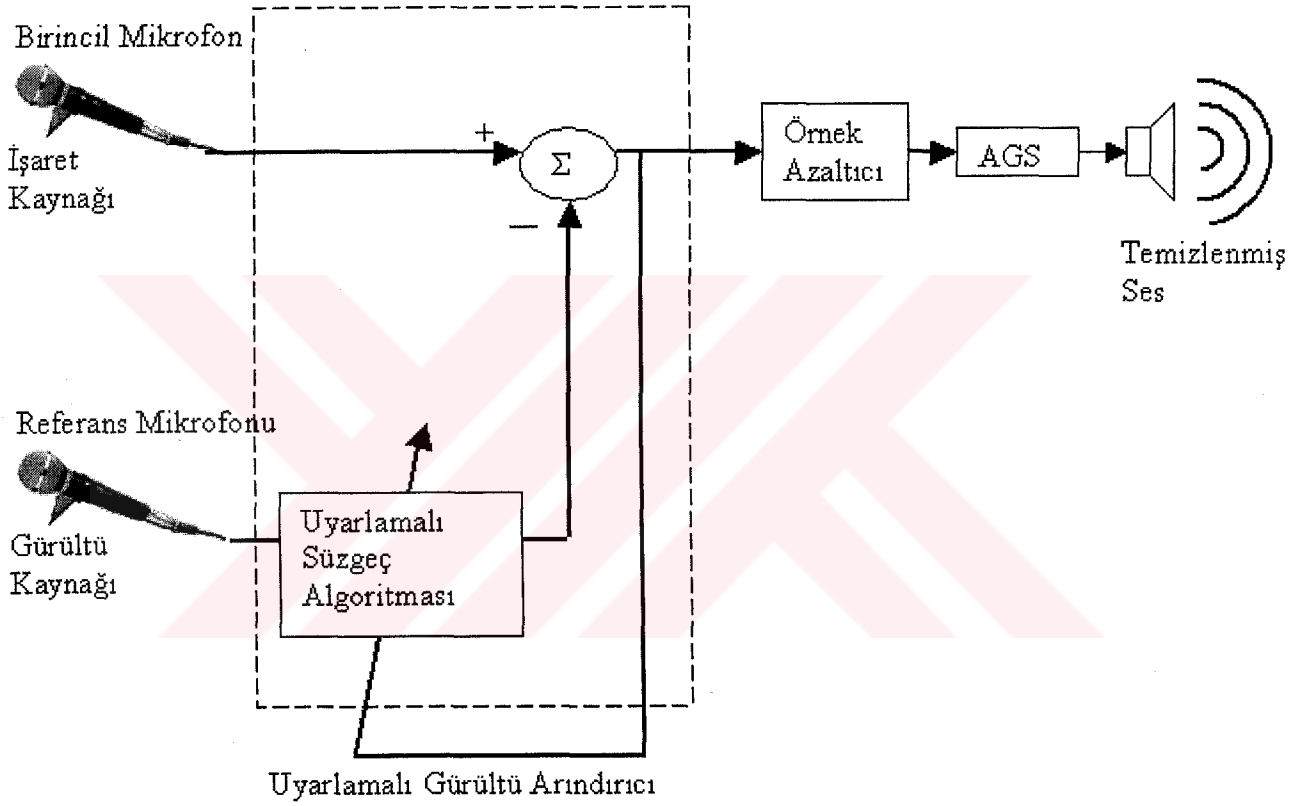
İç kulakta yer alan koklea, ses dalgalarını elektrik işaretine çevirir ve duyma sinirleri (auditory nerve) aracılığıyla beyne iletilmesini sağlar. Bu genel bilgilerin yanı sıra kokleanın elektriksel yapısı henüz tam olarak modellenememiştir.

Dolayısıyla kokteyl parti sorununun giderilmesi için biyolojik bulgulardan öte gözler mühendislik çalışmalarına yönlendirilmiştir (Siravara, Magotra, Loizou, 2002).

Çalışmalar, şu anda ses lokalizasyonu ve gürültü temizleme üzerine yoğunlaşmıştır.

Bu tez çalışmasında, bir referans gürültüsü yardımıyla işaretin gürültüden temizlenmesini gerçekleştirmeye çalıştım. Bunun yanı sıra gürültü seviyesini biraz daha aşağı çekmek için bir örnek azaltıcı bloğu ve ana bant işaretini süzmek için bir alçak geçiren süzgeç kullanarak sistemin performansını geliştirmeyi amaçladım.

Sistemin tümüne ilişkin blok diyagramı aşağıda görülmektedir.



Şekil 1.2 Uyarlamalı Gürültü Arındırıcı Sisteminin Blok Diyagramı

Gürültü temizleme sistemi, bir uyarlamalı süzgeç uygulaması olup bu teoremin temeli stokastik süreçlere dayanmaktadır.

Gürültü temizleme sistemine eşlik eden ses lokalizasyonu ile ilgili çalışmalar da halen geliştirilmeye çalışılmaktadır. Bununla ilgili çalışmalara özet olarak aşağıdaki gibi değinmek mümkündür:

Ses lokalizasyonunda amaç birden fazla sesin olduğu bir ortamda dinleyicinin hangi sesin hangi yönden geldiğine karar verebilmesi ve yönünü bu noktaya dönerek bu sese odaklanabilmesini sağlamaktır (Kuo, Morgan, 1999).

Aynen gürültüden arındırmada olduğu gibi ses lokalizasyonunda da çalışmalar belli kısıtlamalar altında geliştirilegelmiştir.

Ses lokalizasyonu konusunda yürütülen çalışmalarda DSP olduğu kadar yapay sinir ağları da kullanılmaktadır. Genel olarak bu sistemlerin genel çalışma ilkesi aşağıdaki gibidir (Abolfazlian, Karlsen, 1994):

Ses, dizi olarak düşünülüp bir takım fiziksel özelliğin birleşiminden oluştuğu belirtilir. Bergman, insan kulağı sesleri alırken meydana gelen olayları iki değişik süreç işler: Bunlar “birincil (primitive)” süreç ve “şema tabanlı” süreçler olarak adlandırılır. Birincil süreç, ses perdesi, formant, ses kaynağı, parlaklık (intensity) değerlerini kullanarak zaman ve frekans düzlemlerinde gruplara ayırır. Bu gruplama işleminden sonra şema tabanlı süreç devreye girer ve beyin işlevleriyle hangi gruba odaklanması gerektiğine karar verir.

Bu aşamadan sonra gürültü temizleme sistemi devreye girer ve dinleyicinin odaklanmak istediği sesi ana işaret, diğerlerini gürültü olarak düşünüp diğer sesleri devreden çıkarmayı amaçlar.

Bu iki sistemin mükemmelleştirilebilmesi halinde kokteyl parti sorunu büyük ölçüde aşılmış olacaktır.

Benim bu çalışmada amacım, genellikle pratik gerçekleştirmeye yatkın olması nedeniyle tercih edilen LMS algoritması yerine NLMS algoritması kullanarak ve bu sistemin çıkışını da örnek azaltıcı ve alçak geçiren süzgeçle destekleyerek sesteki gürültüyü arındırma konusuna katkıda bulunmaktır.

Lisans ve yüksek lisans seviyesinde aldığım deterministik işaretlerin işlenmesi derslerinin yanı sıra yüksek lisansın son yılında ilgilim stokastik süreçlere kaydı ve bu konuda aldığım derslerle konunun temellerini öğrenmeye başladım.

En Dik Azalış (Steepest Descent), En Küçük Kareler (Least Mean Square), Yinelemeli Küçük Kareler (Recursive Least Squares), ve Kalman Süzgeç teorileriyle ilgili yaptığım teorik ve pratik çalışmalarla konu hakkında deneyim kazandım.

Bunun yanı sıra tezle meşgul olduğum son senemde de yaptığım çalışmalarla uyarlamalı süzgeç kuramını daha detaylı olarak öğrendim ve yaptığım tez çalışmasının teorik altyapısını tamamlamış oldum.

Çalışmamdaki konuların birbiriyle bağlantısını netleştirmek ve bu sayede okunmasını kolaylaştırmak için aşağıdaki bilgilerin yararlı olacağı kanısındayım:

Yaptığım çalışma bir uyarlamalı süzgeç algoritmasıdır. Bu teorinin altında “doğrusal kestirim”, onun öncesinde “optimum süzgeçler”, ve onun altında da “stokastik süreçler” teorileri yer almaktadır.

Bunun için sırayla ilk olarak “stokastik süreçler”, daha sonra “optimum süzgeçler”, onun sonrasında “doğrusal kestirim”, ve son olarak da “uyarlamalı süzgeçler” konularından bahsettim.



2. FIR SÜZGEÇLER

2.1 Genel

Ayrık zamanlı bir sistemin, pratik uygulamalarda gerçekleştirilebilmesi için :

1-Sonlu bir bellek,

2-Sonlu sayıda işlem sayısı gerektirmeli,

3-Nedensel olmalıdır.

Böyle bir sistemi fark eşitlikleriyle aşağıdaki biçimde tanımlıyabiliriz (Haykin, 1996):

$$\sum_{k=0}^P a(k) y(n-k) = \sum_{k=0}^Q d(k) x(n-k) \Rightarrow \quad (2.1)$$

$$y(n) = - \sum_{k=1}^P a(k) y(n-k) + \sum_{k=0}^Q d(k) x(n-k) \quad (2.2)$$

Bunun yanı sıra sonlu impuls yanıtı bir süzgeç çıkışı aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(n) \quad (2.3)$$

$$= - \sum_{k=1}^P a(k) y(n-k) + \sum_{k=0}^Q d(k) x(n-k) \quad (2.4)$$

$\sum_{k=1}^P a(k)$ teriminin 0 olması durumunda $y(n)$ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y(n) = \sum_{k=0}^Q d(k) x(n-k) \quad (2.5)$$

(2.3) nolu eşitlik ile (2.5) nolu eşitliği birlikte ifade edecek olursak:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^Q d(k) x(n-k) & 0 \leq k \leq Q \\ 0 & k < 0, k > Q \end{cases} \quad (2.6)$$

Böylece sistemin birim genlik yanıtını aşağıdaki gibi tanımlıyabiliriz:

$$h(n) = \begin{cases} d_k, & 0 \leq k \leq Q \\ 0, & k < 0, k > Q \end{cases} \quad (2.7)$$

Süzgecin transfer fonksiyonu ise şöyledir:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^Q d_k z^{-k} \quad (2.8)$$

3. STOKASTİK SÜREÇLER

3.1 Genel

Bir rasgele süreci tamamen tanımlıyabilmek için gözlemler kümesine dayalı olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Pratikte bu genellikle olanaksızdır.

$F_x(x)$ kümülatif yoğunluk fonksiyonunu göstermek üzere olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Manolakis, Ingle, Kogon, 1996):

$$f_x(x) = \frac{F_x(x)}{dx} = \frac{P_r \{x(\zeta) < x\}}{dx} \quad (3.1)$$

3.2 Ayırık Zamanlı Stokastik Süreçlerin Kısmi Karakterizasyonu

Bu nedenle sürecin 1. ve 2. momentlerini kullanarak süreç kısmen tanımlanır.

$$0. \text{ moment: } r_x^{(0)} = E \{x^0(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

$$1. \text{ moment (Ortalama): } r_x^{(1)} = E \{x^1(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \mu_x \quad (3.3)$$

$$2. \text{ moment (Karesel Beklendik Değer): } r_x^{(2)} = E \{x^2(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (3.4)$$

Rasgele bir süreci tanımlamak için aşağıdaki kavramlar kullanılır:

- 1-Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları
- 2-Korelasyon Fonksiyonu
- 3-Ortalama, Değişinti ve Koverians Fonksiyonları

3.3 Korelasyon Fonksiyonları

3.3.1 Öz İlişki

-Bir sürecin öz ilişkisi:

$$r(n, n-l) = E \left[u(n) u^*(n-l) \right] \quad (3.5)$$

3.3.2 Karşı İlişki

-İki sürecin karşı ilişkisi:

$$r_{u,v}(n, n-l) = E[u(n)v^*(n-l)] = r_{u,v}(l) \quad (3.6)$$

3.3.3 Ortalama

-Bir sürecin ortalama fonksiyonu:

$$\mu(n) = E[u(n)] \quad (3.7)$$

3.3.4 Değişinti(Varyans)

-Bir sürecin değişintisi:

$$\sigma_u^2(n) = E\{|u(n)|^2\} - |\mu_u(n)|^2 \quad (3.8)$$

3.3.5 Koverians

-Bir sürecin öz koverians fonksiyonu:

$$c(n, n-l) = r(n, n-l) - \mu(n)\mu^*(n-l) \quad (3.9)$$

$$c(n, n-l) = r(l) - |\mu_u(n)|^2 \quad (3.10)$$

-İki sürecin karşı koverians fonksiyonu:

$$c_{u,v}(l) = r_{u,v}(l) - \mu_u \mu_v^* \quad (3.11)$$

3.3.6 Özel Durumlar

$$r(0) = E[u(n)u(n)^*] = E[|u(n)|^2] : u(n) \text{ sürecinin karesel ortalaması.} \quad (3.12)$$

$$c(0) = r(0) - \mu(n)\mu^*(n) = r(0) - |\mu(n)|^2 = E[|u(n)|^2] - (E[u(n)])^2 \quad (3.13)$$

:u(n) sürecinin değişintisi.

Dolayısıyla bir rasgele süreci kısmi olarak tanımlıyabilmek için sürecin ortalama ve öz ilişki fonksiyonlarının bilinmesi gerekir. Kısmi karakterizasyon sayesinde pratik ölçümler gerçekleştirilebilir ve süreç üzerinde doğrusal işlemler yapılabilir.

3.4 Geniş Anlamda Durağanlık

Bir $u(n)$ rasgele süreci için :

1-Sürecin ortalama değeri : $E[u(n)] = \mu(n)$ sabit bir değere eşitse;

2-Sürecin değişintisi: $\text{var}(u(n)) = \sigma_u^2(n)$ sabit bir değere eşitse;

3-Sürecin öz ilişki fonksiyonu : $r(n, n-k) = r(l) = E[u(n)u(n-l)^*]$ l (lag) gibi bir parametrenin fonksiyonu olarak ifade edilebiliyorsa ;
 $u(n)$ süreci geniş anlamda durağandır.

3.5 Korelasyon Matrisi

$u(n)$ sürecinden $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ biçiminde M tane gözlem yapıp bu gözlemlerin $M \times 1$ boyutlu $\mathbf{u}(n)$ vektöründe tutulduğunu düşünelim:

$$\mathbf{u}(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T \quad (3.14)$$

Sürecin $M \times M$ boyutlu korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{R} = E[u(n)u^H(n)] \quad (3.15)$$

Burada H hermityen operatörünü temsil eder ve eşlenik evrik anlamına gelir. Bu tanımlı aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$$\mathbf{R} = E \left\{ \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \\ \dots \\ u(n-M+1) \end{bmatrix}_{M \times 1} \begin{bmatrix} u^*(n), u^*(n-1), \dots, u^*(n-M+1) \end{bmatrix}_{1 \times M} \right\} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R} = E \begin{bmatrix} u(n)u^*(n) & u(n)u^*(n-1) & \dots & u(n)u^*(n-M+1) \\ u(n-1)u^*(n) & u(n-1)u^*(n-1) & \dots & u(n-1)u^*(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n-M+1)u^*(n) & u(n-M+1)u^*(n-1) & \dots & u(n-M+1)u^*(n-M+1) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R} = E \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & u(n-1)u^*(n-1) & \dots & u(n-1)u^*(n-M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & u(n-M+1)u^*(n-1) & \dots & u(n-M+1)u^*(n-M+1) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Geniş anlamda durağan bir süreç için korelasyon matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.5.1 Korelasyon Matrisinin Özellikleri

1-Ayrık zamanlı durağan bir stokastik sürecin korelasyon matrisi hermityendir.

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{R} \text{ yani } r(-k) = r^*(k) \quad (3.20)$$

2-Korelasyon matrisi toeplitz yapısına sahiptir.

3-Korelasyon matrisi non-negatiftir ve aynı zamanda neredeyse daima pozitif-belirlidir.

4-Korelasyon matrisi modüler bir yapıdadır:

$$\mathbf{R}_{M+1} = \begin{bmatrix} \frac{r(0)}{\mathbf{r}} & \left| \begin{array}{c} \mathbf{r}^H \\ \mathbf{R}_M \end{array} \right. \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{R}_{M+1} = \begin{bmatrix} \frac{r(0)}{r^*(1)} & \left| \begin{array}{c} r(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(M) \end{array} \right. & \begin{array}{c} r(2) \\ r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(M-1) \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ r(0) \\ r^*(1) \\ \vdots \\ r^*(M-2) \end{array} & \begin{array}{c} r(M) \\ r(M-1) \\ r(M-2) \\ \vdots \\ r(0) \end{array} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3.6 Beyaz Gürültü

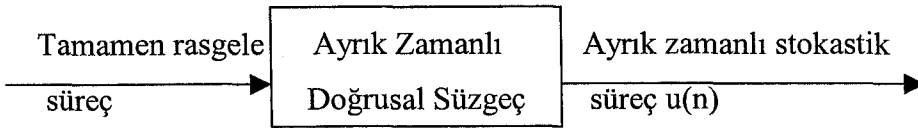
Tüm frekans bandı boyunca sabit enerjiye sahip olan işaretlere denir ve aşağıdaki matematiksel ifadeyle gösterilir:

$$E[v(n)v^*(n)] = \begin{cases} \sigma_v^2, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

3.7 Stokastik İşaret Modelleri

Stokastik modellerin altında şu ana fikir yatar:

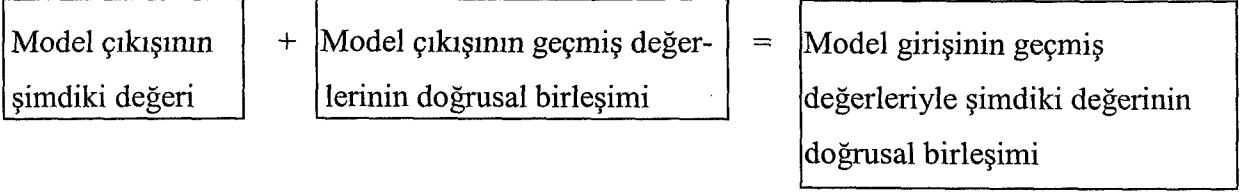
İstatistiksel olarak bağımsız genliklerden oluşan bir diziyi aşağıda görüldüğü gibi doğrusal bir süzgece uygulayarak $u(n)$ gibi yüksel korelasyonlu örneklerden oluşan bir zaman serisi üretilir.



Şekil 3.1 Stokastik İşaretin Elde Edilmesi

Süzgeç girişine uygulanan sürecin sabit dağılımlı, çoğu kez sabit değışintili ve sıfır ortomalalı Gauss süreci olduğu düşünülür.

Yukarıdaki stokastik süreç modelinin giriş-çıkış ilişkisi genellikle aşağıdaki gibi ifade edilebilir:



Şekil 3.2 Stokastik Süreç Modelinde Giriş-Çıkış İlişkisi

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + a_3 u(n-3) + \dots = b_0 v(n) + b_1 v(n-1) + b_2 v(n-2) + b_3 v(n-3) + \dots \quad (3.24)$$

Bu biçimde tanımlanan stokastik sürece doğrusal süreç denir.

Aşağıda bahsedildiği gibi üç tip popüler doğrusal stokastik modelden bahsedilebilir:

3.7.1 Öz Bağlımlı (AR) Modeller

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + a_2^* u(n-2) + \dots + a_M^* u(n-M) = v(n) \quad (3.25)$$

denklemleriyle tanımlanır.

$v(n)$: Beyaz Gauss gürültüsüdür.

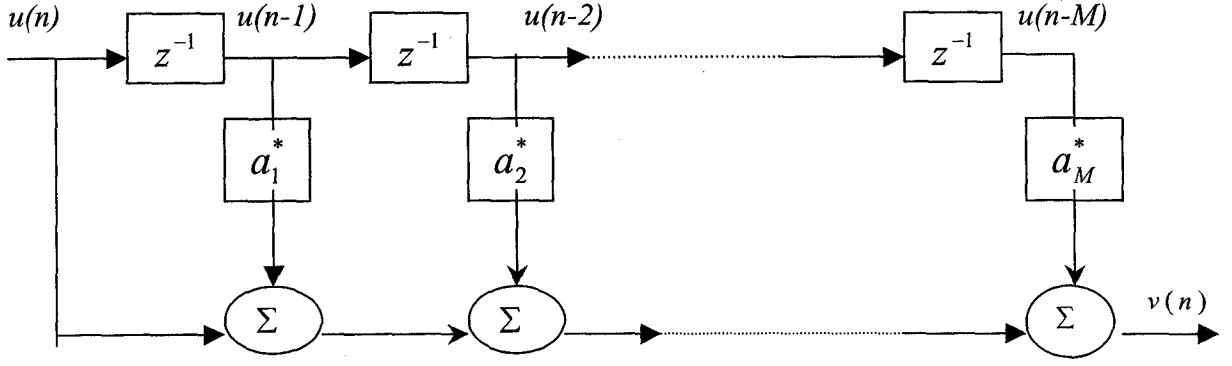
Bu eşitliği aşağıdaki formda yazarak $u(n)$ sürecinin şimdiki değerinin sonlu sayıdaki geçmiş değerlerinin doğrusal birleşimiyle $v(n)$ ile temsil edilen bir hata parametresinin toplamına eşit olduğu görülebilir:

$$u(n) = w_1^* u(n-1) + w_2^* u(n-2) + \dots + w_M^* u(n-M) + v(n) \quad ; \quad w_k = -a_k \quad (3.26)$$

$$\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) = v(n) \Rightarrow \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n} U(z) = V(z) \Rightarrow H(z) = ?$$

Transfer fonksiyonu $H(z)$ in ifade ediliş biçimine göre bir AR model iki işlevi yerine getirebilir:

3.7.1.1 AR Beyazlatma Süzgeci (Süreç Çözümleyicisi)



Şekil 3.3 AR Beyazlatma Süzgeci

yukarıdaki gibi bir $u(n)$ sürecinden $v(n)$ Beyaz Gauss gürültüsü elde edilebilir. AR sürecinin süzgecin girişine uygulandığı bu sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir ve bu sistem bir tüm 0 süzgeçtir.

$$H_A(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n} \quad (3.27)$$

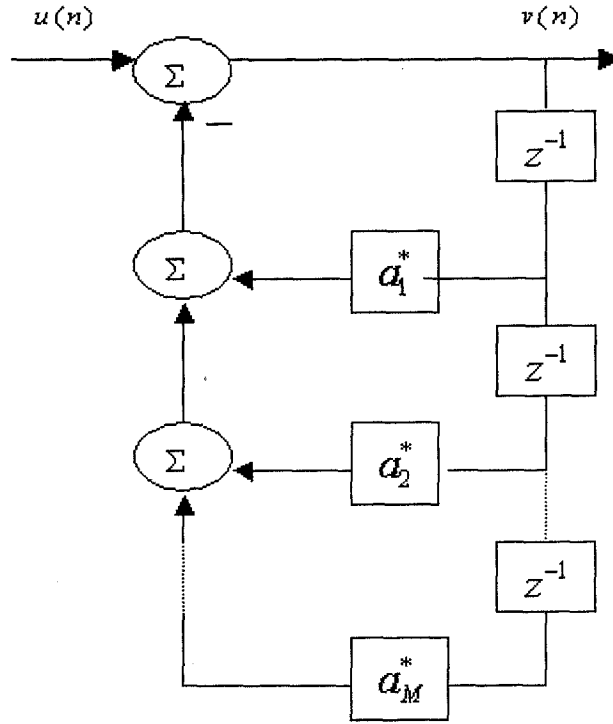
Dolayısıyla bu sistemin impuls yanıtı sonlu süreli dir yani süzgeç bir FIR süzgeçtir.

3.7.1.2 AR Renklendirme Süzgeci (Süreç Üreticisi)

Beyaz gürültü $v(n)$ nin giriş olması durumunda yukarıdaki süzgeci aşağıdaki transfer fonksiyonuna sahip bir süreç üretici olarak kullanabiliriz:

$$u(n) = -a_1^* u(n-1) - a_2^* u(n-2) - \dots - a_M^* u(n-M) + v(n) \quad (3.28)$$

$$H_G(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} \quad (3.29)$$



Şekil 3.4 AR Renklendirme Süzgeci

Süreç üretici süzgecin birim impuls yanıtı $Z^{-1}\{H_G\}$ sonlu süreli değildir. AR süreç üretici tüm kutup süzgeçtir. H_G fonksiyonu, kutuplarıyla tamamen belirlenebilmektedir.

$$H_G(z) = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_M z^{-1})} ; p_1, p_2, \dots, p_M : \text{kutuplar} \quad (3.30)$$

3.7.1.3 Kararlılık

-AR çözümleyicisi doğası gereği kararlıdır.

-AR süreç üretici süzgecin (tüm-kutup) kararlı olması için karakteristik denklemin köklerinin z düzlemi üzerinde birim çember içinde olması gerekir.

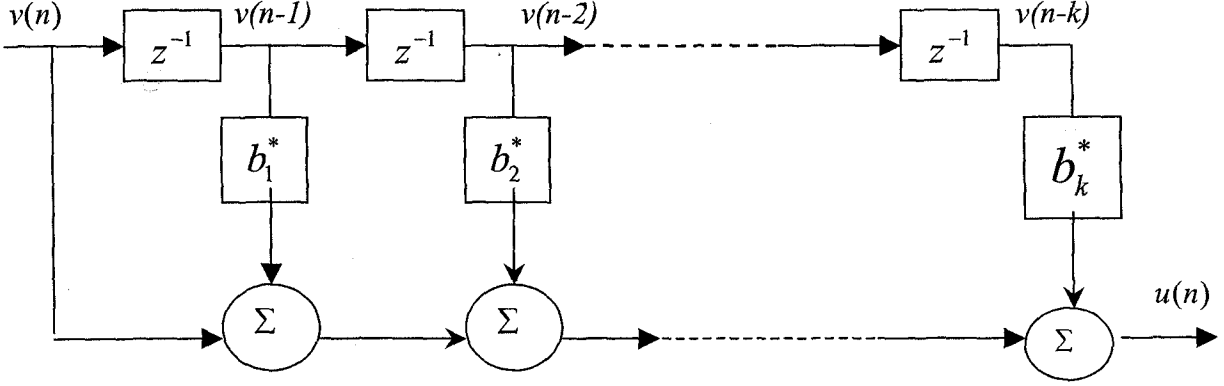
$$\text{Karakteristik denklem: } 1 + a_1^* z^{-1} + a_2^* z^{-2} + \dots + a_M^* z^{-M} = 0 \quad (3.31)$$

3.7.2 Kayan Ortalamalı (MA) Modeller

Kayan ortalamalı bir modelde, ayrık zamanlı doğrusal süzgeç, beyaz gürültüyle sürülen bir tüm-sıfır süzgeçtir.

$$u(n) = v(n) + b_1^* v(n-1) + b_2^* v(n-2) + \dots + b_k^* v(n-k) \quad (3.32)$$

$u(n)$ sürecini, $v(n), v(n-1), v(n-2), \dots, v(n-k)$ örneklerini yukarıdaki sabitlerle ortalayarak elde etmek mümkündür.



Şekil 3.5 Kayan Ortalamalı Model

MA modelleri girişlerine beyaz gürültü verilir çıkışlarında süreç elde edildiği için renklendirme (sentez) süzgeci olarak adlandırılır.

$$H(z) = \frac{U(z)}{V(z)} = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} = 1 + b_1^* z^{-1} + b_2^* z^{-2} + \dots + b_M^* z^{-M} \quad (3.33)$$

Bu süzgeç sonlu impuls yanıtıdır.(FIR)

3.7.3 Öz Bağlanımlı Kayan Ortalamalı (ARMA) Modeller

Bu model, pratikte kullanılan AR ve MA modellerinin genelleştirilmiş halidir.

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + a_2^* u(n-2) + \dots + a_M^* u(n-M) = v(n) + b_1^* v(n-1) + b_2^* v(n-2) + \dots + b_M^* v(n-M) \quad (3.34)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} \quad (3.35)$$

3.8 Bir Stokastik Sürecin Asimptotik Durağanlığı

Bir AR sürecini (3.25) ve (3.26) nolu denklemlerde tanımlamıştık:

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + a_2^* u(n-2) + \dots + a_M^* u(n-M) = v(n) \quad (3.36)$$

$$u(n) = w_1^* u(n-1) + w_2^* u(n-2) + \dots + w_M^* u(n-M) + v(n) \quad ; \quad w_k = -a_k \quad (3.37)$$

Burada $u(n)$ sürecini çıkış olarak düşünüyoruz.

Bu eşitliğin çözümü için klasik yöntem ya da z dönüşümünü kullanmamız gerekir.

3.8.1 Klasik Yöntem

Bu tip bir denklemi çözmek için $u(n)$ 'i genel ve özel çözümün toplamı olarak ifade ederiz.

$$u(n) = u_c(n) + u_p(n) \quad (3.38)$$

Çözüme ($u(n)$) iki aşamada ulaşılır:

$$u(n) + a_1^* u(n-1) + a_2^* u(n-2) + \dots + a_M^* u(n-M) = 0 \quad (3.39)$$

Genellikle $u_c(n)$ aşağıdaki forma sahiptir:

$$u_c(n) = B_1 P_1^n + B_2 P_2^n + \dots + B_M P_M^n ; \quad (3.40)$$

$B_1, B_2, \dots, B_M$: Rasgele sabitler

$P_1, P_2, \dots, P_M$: Karakteristik denklemin kökleri

Özel çözümse aşağıdaki gibidir:

$$u_p(n) = H_G(D)[v(n)] \quad ; \quad D = z^{-1} \quad (3.41)$$

$B_1, B_2, \dots, B_M$ sabitleri, M tane başlangıç koşulunun seçimine bağlıdır.

$u(0) = 0, u(-1) = 0, \dots, u(-M+1) = 0$ olarak seçilebilir. Bu başlangıç koşulları ile $u(1), u(2), \dots, u(M)$ bulunabilir. Sürecin belli zaman anlarındaki istatistiklerini 0 kabul ederek durağanlığını yok etmiş oluruz. Böylece lineer ötelemeyele değişmeme özelliği ortadan kalkar. Fakat yine de eğer $u(n)$ başlangıç koşullarını unutma özelliğine sahipse n sonsuza yaklaştıkça

süreç asimptotik durağan bir özellik kazanır. Bu koşulu sağlamak için AR parametreleri n sonsuza yaklaştıkça özel çözümün sıfıra yakınsıyacak biçimde seçilir.

$$u_c(n) = B_1 P_1^n + B_2 P_2^n + \dots + B_M P_M^n \quad (3.42)$$

$$n \rightarrow \infty \quad p_k^n \rightarrow 0 \Rightarrow |p_k| < 1 ; \text{ tüm } k \text{ lar için}$$

Böylece $u(n)$ çözümünüyle gösterilen ayırık zamanlı stokastik sürecin asimptotik durağan olması için tüm kutupların z -düzleminde birim çemberin içinde yer alması gerekir.

3.8.2 Asimptotik Durağan Bir AR Sürecin Korelasyon Fonksiyonu

Asimptotik durağanlık için gerek koşulun sağlandığını düşünerek AR süreci için aşağıdaki gibi önemli bir yinelemeli denklemi çıkarabiliriz:

$$\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) = v(n) \quad (3.43)$$

Eşitliğin her iki tarafını da $u^*(n-l)$ ile çarpıp beklendik değer operatörünü uygulayalım:

$$E \left[\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) u^*(n-l) \right] = E \left[v(n) u^*(n-l) \right] \quad (3.44)$$

Süreci asimptotik durağan olarak kabul ettiğimiz için $u(n)$, $n-l$ zamanına kadar $v(n)$ hakkında hiçbir bilgi içermez. Yani:

$$n-l \leq 0 \Rightarrow E \left[v(n) u^*(n-l) \right] = 0; \quad (3.45)$$

$$l \geq n \Rightarrow E \left[v(n) u^*(n-l) \right] = 0 \quad (3.46)$$

Başlangıç koşullarını 0 alıp süreci $n > 0$ için incelemeye başlamıştık. Bu durumda 1 nin de sıfırdan büyük olduğu aralığı ele almış oluruz.

Öz ilişki fonksiyonunun tanımını kullanarak (3.44) nolu eşitliğin sol kısmını da inceleyebiliriz:

$$n-l = n-k-lag \Rightarrow lag = l-k$$

Buna göre:

$$\sum_{k=0}^M a_k^* r(l-k) = 0 \quad ; \quad l > 0 \quad a_0 = 1 \quad (3.47)$$

Buradan asimptotik durağan bir AR sürecin öz ilişki fonksiyonunun aşağıdaki fark denklemini sağladığını görürüz:

$$r(l) = w_1^* r(l-1) + w_2^* r(l-2) + w_3^* r(l-3) + \dots + w_M^* r(l-M) \quad , \quad l > 0 \quad , \quad a_k = -w_k \quad (3.48)$$

Dikkate değer bir nokta, bu fark denkleminin AR sürecin kendi fark denklemine benzemesidir. Bu sayede $u(n)$ için bulduğumuz çözümü (3.48) nolu denkleme de uygulayabiliriz:

$$\sum_{k=0}^M a_k^* r(l-k) = 0 \quad ; \quad l > 0 \quad a_0 = 1 \quad (3.49)$$

denkleminin genel çözümü:

$$r(m) = \sum_{k=1}^M c_k p_k^m \quad (3.50)$$

$c_1, c_2, \dots, c_M$:Sabitler ve $p_1, p_2, \dots, p_M$:karakteristik denklemin kökleridir.

AR süreci, asimptotik durağanlık koşulunu, $r(m)$ fonksiyonunda m sonsuza yakınsarsa sağlar.

3.9 Yule-Walker Denklemleri

M dereceli bir AR modelini tamamen tanımlamak için iki parametre kümesinin belirlenmesi gerekir:

-AR katsayıları : $a_1, a_2, \dots, a_M$

-Uyarıcı olarak kullanılan beyaz gürültünün değişintisi : σ_v^2

(3.48) nolu denklemi $l=1$ ve $l=2$ için açalım:

$l=1$:

$$r(1) = w_1^* r(0) + w_2^* r(-1) + w_3^* r(-2) + \dots + w_M^* r(1-M) \quad (3.51)$$

$r(-l) = r^*(l)$ olduğunu hatırlarsak:

$$r(1) = w_1^* r^*(0) + w_2^* r^*(1) + w_3^* r^*(2) + \dots + w_M^* r^*(M-1) \quad (3.52)$$

Denklemin eşleniğini alırsak:

$$r^*(1) = r(0)w_1 + r(1)w_2 + r(2)w_3 + \dots + r(M-1)w_M \quad (3.53)$$

$l=2$:

$$r(2) = w_1^* r(1) + w_2^* r(0) + w_3^* r(-1) + \dots + w_M^* r(2-M) \quad (3.54)$$

$$r(-l) = r^*(l); \quad (3.55)$$

$$r(2) = w_1^* r^*(-1) + w_2^* r(0) + w_3^* r^*(1) + \dots + w_M^* r^*(M-2) \quad (3.56)$$

Denklemin eşleniğini alırsak:

$$r^*(2) = r^*(1)w_1 + r(0)w_2 + r^*(-1)w_3 + \dots + r^*(M-2)w_M \quad (3.57)$$

Benzer yolla elde edilen M tane eşitliğe Yule-Walker denklemleri denir ve aşağıdaki gibi bir matrisle gösterilir:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r^*(M) \end{bmatrix} \quad \text{Yule - Walker denklemleri (3.58)}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{r} \quad (3.59)$$

Bu denklemlerin çözümü bize aradığımız model parametrelerini verir: $w_k = -a_k$

$$\mathbf{w} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_M \end{bmatrix}^T \quad (3.61)$$

3.10 Beyaz Gürültünün Değişintisi

(3.44) nolu eşitliğe geri dönelim:

$$E \left[\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) u^*(n-l) \right] = E \left[v(n) u^*(n-l) \right] \quad (3.62)$$

Burada

$$n-l \leq 0 \Rightarrow E \left[v(n) u^*(n-l) \right] = 0 \quad (3.63)$$

olduğunu söylemiştik.

$l=0$ durumunda bu koşul bozulur ve (3.44) nolu eşitliğin sağ tarafındaki beklendik değer operatörü sıfır olmaz.

Bu da $u(n)$ 'nin $v(n)$ ile ilgili bilgiler içerdiği anlamına gelir. Dolayısıyla $u(n)$ ile $v(n)$ arasında korelasyon olacağı anlamı ortaya çıkar.

$l=0$ için (3.44) nolu eşitliğin sağ tarafı aşağıdaki hale gelir:

$$E \left[v(n) u^*(n) \right] \quad (3.64)$$

$\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) = v(n)$ tanımını hatırlarsak :

$$u(n) = -a_1^* u(n-1) - a_2^* u(n-2) - \dots - a_M^* u(n-M) + v(n) \quad (3.65)$$

Varmak istediğimiz tanımı kolaylaştırmak için $n=2$ için yukarıda $u(n)$ tanımını (3.64) nolu eşitliğe yerleştiririz:

$$E \left[v(2) \left(v(2) - a_1^* u(1) - a_2^* u(0) - \dots \right)^* \right] \quad (3.66)$$

Başlangıç koşullarını dikkate alarak ($u(0) = 0$, $u(-1) = 0$, ... $u(-M+1) = 0$) (3.66) nolu eşitliği şu hale getirebiliriz:

$$E \left[v(2) \left(v(2) - a_1^* u(1) \right)^* \right] \quad (3.67)$$

Yine (3.66) nolu eşitliği kullanarak (3.67) teki $u(1)$ 'i şöyle tanımlıyabiliriz:

$u(1) = v(1)$ Bu ifadeyi de (3.67) de yerine koyarsak:

$$E \left[v(2) \left(v(2) - a_1^* u(1) \right)^* \right] = E \left[v(2) \left(v^*(2) - a_1 v^*(1) \right) \right] \quad (3.68)$$

$$E \left[v(2) \left(v^*(2) - a_1 v^*(1) \right) \right] = E \left[v(2) v^*(2) \right] - a_1 E \left[v(2) v^*(1) \right] \quad (3.69)$$

Yukarıdaki ifadeyi n için genelleştirerek

$$E \left[v(n) u^*(n) \right] = E \left[v(n) v^*(n) \right] = \sigma_v^2 \quad (3.70)$$

olduğunu görürüz.

Böylece $l=0$ için aşağıdaki sonuç ortaya çıkar:

$$\sum_{k=0}^M a_k r(k) = \sigma_v^2 \quad (3.71)$$

(3.71) nolu denklem, öz ilişki dizisini bildiğimiz takdirde beyaz gürültünün değişintisini bulabileceğimizi ifade eder.

4. SPEKTRUM ANALİZİ

4.1 Genel

Öz ilişki fonksiyonu, bir stokastik sürecin ikinci dereceden istatistikleriyle tanımlanan zaman domeni gösterimidir. Böyle bir sürecin ikinci derece istatistiklerini kullanarak elde edilen frekans domeni gösterimine ise güç spektral yoğunluğu denir.

Spektrum analizine sürecin Fourier dönüşümünü kullanarak güç elde edilecek matematiksel ifadeleri belirleyerek başlayalım:

4.2 Güç Spektral Yoğunluğu

$u(n)$: Geniş anlamda durağan sonsuz uzunluklu zaman serisi.

Sürecin sıfır ortalamalı olduğunu düşünelim. Anlık olarak dikkatimizi zaman serisinin pencerelenmiş bir kısmına yoğunlaştıralım:

$$u_N(n) = \begin{cases} u(n), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & n > N, n < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Bu ayrık zamanlı işaretin Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi olup $\omega, (-\pi, \pi]$ aralığında değişen açısal frekanstır.

$$U_N(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} u_N(n) e^{-j\omega n} \quad (4.2)$$

Genel olarak, $U_N(\omega)$ kompleks değerlidir ve eşleniği şöyledir (Haykin, 1996) :

$$U_N^*(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} u_N^*(k) e^{j\omega k} \quad (4.3)$$

Bu ifade ile eşleniği çarpılırsa modülünün karesi elde edilir:

$$|U_N(\omega)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} u_N(n) e^{-j\omega n} u_N^*(k) e^{j\omega k} \quad (4.4)$$

Eşitliğin Her iki tarafının da istatistiksel beklendik değerini alalım:

$$E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} E\left[u_N(n)u_N^*(k)\right] e^{-jw(n-k)} \quad (4.5)$$

$lag = n - k$; şeklinde bir zaman farkı tanımlansın. Eşitliği buna göre düzenliyelim:

$$E\left[u_N(n)u_N^*(k)\right] = E\left[u_N(n)u_N^*(n-lag)\right] = r(lag) \quad (4.6)$$

$$E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} r(n-k) e^{-jw(n-k)} \quad (4.7)$$

$l = n - k$; olarak diğer bir fark tanımlayalım ve yukarıdaki serilerin sınırlarını bu farka göre düzenliyelim:

$$\frac{1}{N} E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{l=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|l|}{N}\right) r(l) e^{-jwl} \quad (4.8)$$

N sonsuza yaklaştıkça $1 - \frac{|l|}{N}$ ifadesi de 1'e yakınsar. Bu durum aşağıdaki limit ifadesiyle gösterilebilir:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E\left[|U_N(w)|^2\right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l) e^{-jwl} \quad (4.9)$$

Bu limite verilen ad, beklendik değerin spektral yoğunluğudur:

$$S(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E\left[|U_N(w)|^2\right] \quad (4.10)$$

Son olarak güç spektral yoğunluğunun matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\boxed{S(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l) e^{-jwl}} \quad (4.11)$$

4.2.1 Örnek

Öz ilişki fonksiyonu $r(\ell) = a^{|\ell|}$, $-1 < a < 1$ ile verilen geniş anlamda durağan sıfır ortalamalı $u(n)$ sürecinin güç spektral yoğunluğunun bulunması:

$$\begin{aligned}
 R(e^{jw}) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a^{|\ell|} e^{-jw\ell} \quad -1 < a < 1 \\
 &= \sum_{-\infty}^0 a^{|\ell|} e^{-jw\ell} + \sum_0^{\infty} a^{|\ell|} e^{-jw\ell} - 1 \\
 &= \sum_0^{\infty} a^{\ell} e^{jw\ell} + \sum_0^{\infty} a^{\ell} e^{-jw\ell} - 1 \\
 &= \sum (a e^{jw})^{\ell} + \sum (a e^{-jw})^{\ell} - 1 \\
 &= \frac{1}{1 - a e^{jw}} + \frac{1}{1 - a e^{-jw}} = \frac{1 - a e^{-jw} + 1 - a e^{jw}}{1 - a e^{-jw} - a e^{jw} + a^2 e^0} \\
 &= \frac{2 - a e^{-jw} - a e^{jw}}{a^2 + 1 - a \left(\frac{e^{jw} + e^{-jw}}{2} \right) * 2} - 1 \\
 &= \frac{2 - a e^{jw} - a e^{-jw} - a^2 - 1 + a e^{-jw} + a e^{jw}}{1 + a^2 - 2a \cos w} - 1 \\
 &= \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos w} \quad ; \quad -1 < a < 1
 \end{aligned}$$

MATLAB Fonksiyonları:

$y = \text{conv}(h, x)$;

$y = \text{filter}(d, [1], x)$;

$y = \text{df2latcf}(a)$: Latis katsayıları

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{j(e^{jx} - e^{-jx})}{2}$$

IID: Bağımsız ve Benzer Dağılımlı (Independent and identically distributed)

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad ;$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \quad ;$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$$

$$A \cos 2\pi f m t \xrightarrow{F} \frac{A}{2} \delta(f - fm) + \frac{A}{2} \delta(f + fm)$$

4.2.2 Güç Spektral Yoğunluğunun Özellikleri

$$1-S(w) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r(l)e^{-jwl}, \quad -\pi < w \leq \pi \quad (4.12)$$

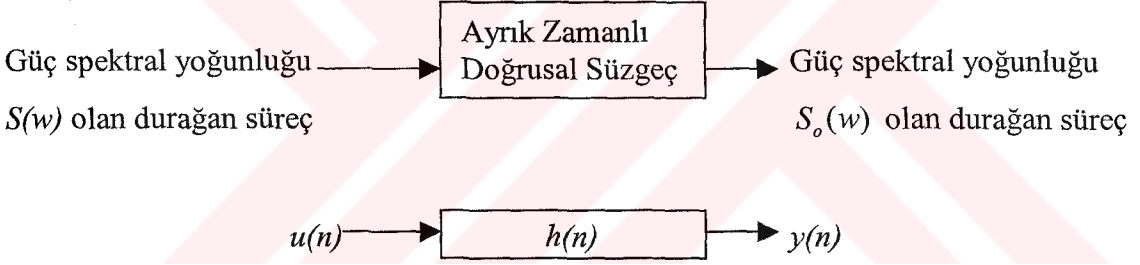
$$r(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(w)e^{jwl} dw \quad (4.13)$$

2-Güç spektral yoğunluğunun frekans desteği Nyquist aralığı olarak adlandırılan $-\pi < w \leq \pi$ aralığıdır. Bu aralığın dışında $S(w)$ aşağıda görüldüğü gibi periyodiktir.

$$S(w + 2k\pi) = S(w) \quad k: \text{tamsayı}$$

3-Güç spektral yoğunluğu gerçel değerli, ve non-negatiftir.

4.3 Durağan Bir Sürecin Doğrusal Süzgeç Boyunca İletimi



Şekil 4.1 Durağan Bir Sürecin Doğrusal Süzgeç Boyunca İletimi

$$S(w + 2k\pi) = S_o(w) \quad (4.14)$$

$$r_u(l) = E[u(n)u^*(n-l)] \quad (4.15)$$

$$r_y(l) = E[y(n)y^*(n-l)] \quad (4.16)$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)u(n-i) \quad (4.17)$$

$$y^*(n-l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k)u^*(n-l-k) \quad (4.18)$$

$$r_y(l) = E[y(n)y^*(n-l)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)u(n-i) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k)u^*(n-l-k) \quad (4.19)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)h^*(k)u(n-i)u^*(n-l-k) \quad (4.20)$$

$r_y(l)$ 'nin z - dönüşümü:

$$S_o(w) = \left| H(e^{jw}) \right|^2 S(w) \quad (4.21)$$

4.4 Güç Spektrumu Kestirimi

Pratikte oldukça önemli bir konu, geniş anlamda durağan bir sürecin (wss) güç spektral yoğunluğunu kestirebilmektir. Literatürde bu iş için iki kestirim yöntemi bulunmaktadır:

- Parametrik yöntemler
- Parametrik olmayan yöntemler

4.4.1 Parametrik Yöntemler

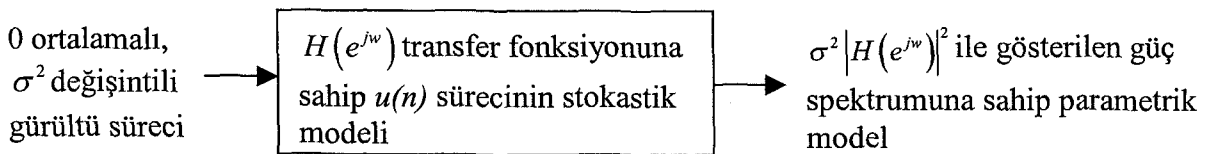
Güç spektral yoğunluğunun parametrik yöntemle kestiriminde üç farklı yaklaşımdan bahsedilebilir.

Sistem tanımlama yaklaşımı en popüler yaklaşım olduğu için diğer yöntemlerin yalnızca aşağıdaki gibi isimlerine değinmek yeterli olacaktır:

En Düşük Değişintili Gürültüsüz Cevap Yöntemi

Öz Değer Çözümlemesine Dayalı Yöntemler

4.4.1.1 Sistem Tanımlama Yaklaşımı



Şekil 4.2 Sistem Tanımlama Yaklaşımı

Parametrik yöntemlerin bu tipinde bir oran fonksiyonu ya da e^{-jw} terimine dayalı bir fonksiyon, modelin transfer fonksiyonu olarak kabul edilir ve yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi modeli sürmek için bir beyaz gürültü süreci kullanılır.

Elde edilen modelin güç spektrumu istenilen spektrum kestirimini verir.

Uygulama alanına göre, aşağıdaki modellerin birini kullanmak mümkündür:

- i) Tüm-kutup transfer fonksiyonuna sahip bir AR modeli

$$H_G(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} \quad (4.22)$$

ii) Tüm sıfır transfer fonksiyonuna sahip bir MA modeli

$$H_G(z) = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} \quad (4.23)$$

iii) Kutup-sıfır transfer fonksiyonuna sahip bir ARMA modeli

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} \quad (4.24)$$

$$S_o(w) = \sigma^2 \left| H(e^{jw}) \right|^2 \quad (4.25)$$

Böylece problem sistem çıkışında üretilen süreci kabul edilebilir bir şekilde tanımlayan modelin parametrelerini kestirme sorununa dönüşmüş olur.

Güç spektral yoğunluğu kestirimine bu biçimde getirilen yaklaşıma sistem tanımlama denir.

Yukarıda tanımlanan modeller arasında aşağıdaki nedenlerden dolayı AR modeli en yaygın olarak kullanılandır.:

1-Bilinmeyen AR parametrelerini tanımlayan denklem takımının doğrusal (lineer) formda olması

2-Sonucu hesaplamak üzere etkili algoritmalar geliştirebilme şansı

4.5 Özet

Geniş anlamda durağan bir sürecin öz ilişki matrisinin hermityen olması, öz ilişki fonksiyonunun ayırık zamanlı Fourier dönüşümü olarak tanımlanan güç spektral yoğunluğunun gerçel değerli olmasını sağlar.

Bu nedenle güç spektral yoğunluğu sürece ilişkin faz bilgisini bozar. Bu kısıtlamaya rağmen güç spektral yoğunluğu, geniş anlamda durağan süreçlerin korelasyon özelliklerini belirlemek için etkin ve genel kabul gören bir yöntemdir.

5. ÖZ DEĞER ÖZ VEKTÖR ANALİZİ

Geniş anlamda durağan bir sürecin korelasyon matrisinin Hermityen olduğunu biliyoruz. Hermityen matrisin önemli bir özelliği öz değerler ve öz vektörler yardımıyla analiz edilmeye elverişli olmasıdır.

5.1 Öz Değer Problemi

$u(n)$: Mx1 boyutlu geniş anlamda durağan ayrık zamanlı stokastik süreç

R : $u(n)$ 'in MxM boyutlu korelasyon matrisi

Aşağıdaki koşulu sağlayan Mx1 boyutlu q vektörünü bulmaya çalışıyoruz (Manolakis, Ingle, Kogon, 1996):

$$Rq = \lambda q \quad (5.1)$$

λ :Sabit

Bu koşul, q_i 'lerin Hermityen matris R ile λq 'lara dönüştürüldüğünü gösterir.

λ sabit olduğu için, q ,sol tarafından birim matrisle çarpılıp parantez dışına taşınabilir. Tipik bir MxM boyutlu matris için bu şekilde M tane vektör olacaktır:

$$(R - \lambda I)q = 0 \Rightarrow \quad (5.2)$$

$$\text{Det}(R - \lambda I) = 0 \quad \dots \text{ Korelasyon matrisi } R \text{'nin karakteristik denklemi} \quad (5.3)$$

Bu determinantın q vektörü içinde M tane çözümü vardır.

λ : R matrisinin i inci öz değeri

q : $Rq_i = \lambda q_i$ olacak şekilde sıfır olmayan bir vektör

q_i vektör, λ_i 'ye eşlik eden öz vektör adını alır.

→ Bir öz vektör sadece bir öz değere karşılık gelebilir.

→ Fakat bir öz değer, birden çok sayıda öz vektöre karşılık gelebilir.

5.2 Öz Değer ve Öz Vektörlerin Özellikleri

$$1- Rq = \lambda q \Rightarrow R^k q = \lambda^k q \quad (5.4)$$

Bu özellik aşağıdaki sonuçlara ulaşmamızı sağlar:

- R 'nin her öz vektörü aynı zamanda R^k 'nin de öz vektörüdür.

2- $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$: R 'nin sırasıyla ayırık öz değerlerine ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$) karşılık gelen öz vektörler

$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ doğrusal bağımsızdır

3- R 'nin tüm öz değerleri gerçel ve non-negatiftir.

4- Öz vektörler $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ birbirine diktir.

$$\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j = 0 \quad i \neq j$$

5- Üniter Benzerlik Dönüşümü:

- $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$: R 'nin sırasıyla ayırık öz değerlerine ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$) karşılık gelen öz vektörler

$$\mathbf{q}_i^H \mathbf{q}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ olmak üzere}$$

$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_M]$ şeklinde bir $\mathbf{Q}$ matrisi tanımlansın.

Bu da $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M$ vektörlerinin bir ortonormal küme oluşturacağı anlamına gelir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd \quad (5.5)$$

$\downarrow$
 $\mathbf{q}_i^H$

$\downarrow$
 $\mathbf{q}_j$

$$\left. \begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array} \right\} ac + bd = a^2 + b^2 \quad \left. \begin{array}{l} a \neq c \\ b \neq d \end{array} \right\} ac + bd = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}} \right\} \text{ortonormal}$$

$\Lambda = M \times M$ köşegen matris

$$= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i \Rightarrow \boxed{\mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \Lambda} \Rightarrow \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \Lambda \quad (5.7)$$

$$\boxed{\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{Q} = \Lambda} \quad (5.8)$$

Korelasyon matrisi R , bir benzerlik dönüşümüyle köşegen hale getirilebilir.

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{Q}\Lambda \Rightarrow \mathbf{RQQ}^H = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H \quad (5.9)$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^H} \quad (5.10)$$

5.3 Örnek

$$R_u = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} ; \quad -1 < a < 1$$

$$1- \boxed{\det(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) = 0} \Rightarrow$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2 = 0 \Rightarrow (1-\lambda-a)(1-\lambda+a) = 0$$

$$\lambda_1 = 1-a \quad \lambda_2 = 1+a$$

2-

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{Q}\Lambda$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2] \text{ let } \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} j \\ v \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ t & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ t & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} +at & y+av \\ t+a & ay+v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ax & y+ay \\ t-at & v+av \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} t = -x \\ y = v \end{matrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{QQ}^H = \mathbf{I}} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & -x \\ -y & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x^2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. ÜÇGEN DEKOMPOZİSYONU İLE GERÇEKLEŞTİRİLEN DÖNÜŞÜMLER

Üçgen- matris dekompozisyonları, süzgecin nedensel ya da nedensel olmayan biçimde çalışmasına yol açacak dönüşümleri meydana getirir.

Bu yüzden bu haritlamalar, doğrusal süzgeçler için önemli bir rol oynar.

Bu dönüşümler aşağıdaki gibi ikiye ayrılabilir:

Alt-köşegen-üst (lower-diagonal-upper LDU) → süzgecin nedensel olmasını sağlar.

Üst-köşegen-alt (upper-diagonal-lower UDL) → nedensel olmayan bir süzgeçe yol açar.

6.1 LDU Dekompozisyonu

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} \mathbf{D}_L \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^H \quad ;$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} \mathbf{D}_L \mathbf{U}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{ \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M \}$$

6.2 UDL Dekompozisyonu

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{D}_U \mathbf{L}^H \quad ;$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^D \quad ;$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{D}_U \mathbf{U}^H$$

Çizelge 6.1 Tanımlar ve Özellikler

Tanımlar	
Ortalama Değer: $\mu_u = E[u(n)]$	Öz İlişki: $r_u(\ell) = E[u(n)u^*(n-\ell)]$
Karşı-İlişki: $r_{uv}(\ell) = E[u(n)v^*(n-\ell)]$	Güç Spektral Yoğunluğu: $R_u(e^{j\omega}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} r_u(\ell)e^{-j\omega\ell} \quad R_u \triangleq S_w(e^{j\omega})$
Öz Koverians: $\mathcal{G}_u(l) = r_u(l) - \mu_u ^2$	Karşı Güç Spektral Yoğunluğu: $R_{uv}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{uv}(l)e^{-j\omega l}$
Karşı Koverians:	Değişinti:

$\mathcal{G}_{uv}(l) = r_{uv}(l) - \mu_u \mu_v^*$	$\sigma_u^2 = E \left[u(n) ^2 \right] - \mu_u ^2$	
Özellikler		
Öz ilişki fonksiyonu $r_u(\ell)$, non-negatif ve belirlidir.	Güç Spektral Yoğunluğu, sıfırdan büyük $R_u(e^{j\omega}) \geq 0$ ve gerçel değerlidir	
$r_u(\ell) = r_u^*(-\ell)$	$R_u(e^{j\omega}) = R_u(e^{-j\omega})$ (Gerçel bir dizi için)	
$ r_u(\ell) \leq r_u(0)$		
Karşı Korelasyon: $r_{uv}(\ell) = r_{vu}^*(-\ell)$	Karşı Güç Spektral Yoğunluğu: $R_{uv}(z) = R_{vu}^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$	
$Z \left\{ h^*(-n) \right\} = H^*\left(\frac{1}{Z^*}\right)$	$R_{xy}(z) = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) R_x(z)$	
	$R_{yx}(z) = H(z) R_x(z)$ $R_y(z) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) R_x(z)$	
Kararlı Bir sistem için, $H(z)$ ve $H(z^{-1})$ 'in yakınsaklık bölgeleri birim çemberin içinde yer alır	$R_{xy}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) R_x(e^{j\omega})$ $R_{yx}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) R_x(e^{j\omega})$ $R_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) R_x(e^{j\omega})$ $R_y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) ^2 R_x(e^{j\omega})$	
Doğrusal Zamanda Ötelemeyle Değişmeyen Bir Sistemde Elde Edilen Rasgele Durağan Süreçlerin İkinci Derece Momentleri		
Zaman	Frekans	z-Düzlemi
$y(n) = h(n) * x(n)$		
$r_{yx}(l) = h(l) * r_x(l)$	$R_{yx}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) R_x(e^{j\omega})$	$R_{yx}(z) = H(z) R_x(z)$
$r_{xy}(l) = h^*(-l) * r_x(l)$	$R_{xy}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) R_x(e^{j\omega})$	$R_{xy}(z) = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) R_x(z)$

$r_y(l) = h(l) * r_{xy}(l)$	$R_y(e^{jw}) = H(e^{jw}) R_{xy}(e^{jw})$	$R_y(z) = H(z) R_{xy}(z)$
$r_y(l) = h(l) * h^*(-l) * r_x(l)$	$R_y(e^{jw}) = H(e^{jw}) ^2 R_x(e^{jw})$	$R_y(z) = H(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) R_x(z)$

6.4 Örnek

Aşağıdaki harmonik süreci düşünelim:

$$\chi(n) = \cos(0.1\pi n + \phi_1) + 2\sin(1.5 + \phi_2)$$

ϕ_1 ve ϕ_2 $[0, 2\pi]$ aralığında dağılmış rasgele değerlerdir. $\chi(n)$ 'in ilk terimi $w_1 = 0.1\pi$ ile periyodiktir.

$$f_1 = \frac{0.1\pi}{2\pi} \Rightarrow T_1 = 20 \text{ İkinci terim ise neredeyse periyodiktir.}$$

$$2\pi f_2 = 1.5 \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{1.5} = \frac{4\pi}{3} \cong 4$$

$$\mu_x(n) = E[x(n)] = E[\cos(0.1\pi + \phi_1) + 2\sin(1.5 + \phi_2)] = 0$$

ϕ_1 ile ϕ_2 'nin karşılıklı bağımsız olduğunu düşünerek öz ilişki dizisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} r_x(n_1, n_2) &= E[x(n_1)x^*(n_2)] \\ &= E[\{\cos(0.1\pi n_1 + \phi_1) + 2\sin(1.5n_1 + \phi_2)\} \{\cos(0.1\pi n_2 + \phi_1) + 2\sin(1.5n_2 + \phi_2)\}] \end{aligned}$$

ϕ_1 ve ϕ_2 IID rasgele değişkenler olduklarından;

$$E[\cos(0.1\pi n_1 + \phi_1) + 2\sin(1.5n_1 + \phi_2)] = E[2\sin(1.5n_1 + \phi_1)\cos(0.1\pi n_2 + \phi_2)] = 0$$

$$\text{Then, } r_x(n_1, n_2) = E[\cos(0.1\pi n_1 + \phi_1)\cos(0.1\pi n_2 + \phi_1)] + 4E[\sin(1.5n_1 + \phi_2)\sin(1.5n_2 + \phi_2)]$$

$$\begin{aligned} &= E\left[\frac{1}{2}\cos(0.1\pi(n_1 + n_2) + 2\phi_1) + \frac{1}{2}\cos(0.1\pi(n_1 - n_2))\right] + 4E\left[\frac{1}{2}\cos(1.5(n_1 - n_2)) - \frac{1}{2}\cos(1.5(n_1 + n_2) + 2\phi_2)\right] \\ &= \frac{1}{2}[(0.1\pi(n_1 - n_2))] + 2\cos[1.5(n_1 - n_2)] \end{aligned}$$

$$r_x(\ell) = \frac{1}{2}\cos 0.1\pi\ell + 2\cos 1.5\ell \quad ; \quad \ell = n_1 - n_2$$

$$\text{Line spet} = \frac{1}{4}\delta(w - 0.1\pi) + \frac{1}{4}\delta(w + 0.1\pi) + \delta(w - 1.5) + \delta(w + 1.5)$$

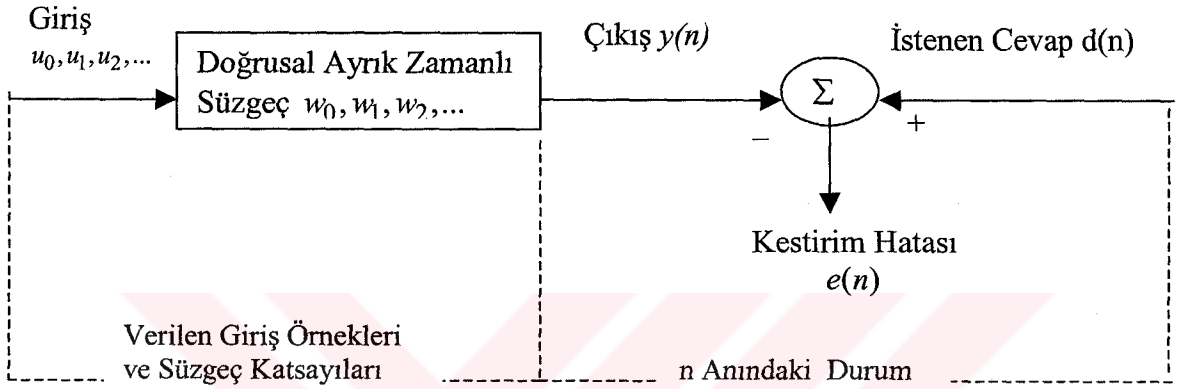
7. OPTİMUM DOĞRUSAL SÜZGEÇLER (WIENER SÜZGEÇLERİ)

7.1 Genel

Wiener süzgeç teorisi, süzgecin impuls cevabı üzerinden genel olarak kompleks değerler alabilen zaman serisi için formüle edilmiştir.

Kompleks değerlerin dikkate alınmasının nedeni, haberleşme, radar, sonar gibi birçok pratik uygulamada anabant işareti kompleks formda olmasıdır.

7.2 Optimum Doğrusal Süzgeçlerin Yapısı



Şekil 7.1 Optimum Doğrusal Süzgeçlerin Yapısı

Süzgeç, impuls yanıtı $w_0, w_1, w_2, \dots$ ile temsil edilmektedir. Ayrık n zamanında süzgeç $y(n)$ ile gösterilen bir çıkış üretir. Bunun yanı sıra istenen cevap n anında ölçülen gerçek değer olup bilinmektedir. Süzgeç çıkışı ile istenen çıkış karşılaştırılarak süzgeç çıkışının istenen cevaptan ne kadar uzak olduğunu bulabiliriz.

Kestirim hatası $e(n)$, istenen cevapla süzgeç çıkışı arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır. $e(n) = d(n) - y(n)$ Yapılması gereken iş, belli bir istatistiksel ölçüte dayalı olarak $e(n)$ 'i mümkün olduğunca küçültmektir (Haykin, 1996).

n anında süzgeç katsayılarını $e(n)$ 'i en azlayacak şekilde hesaplarız. Elde ettiğimiz yeni süzgeç ağırlıklarını kullanarak $y(n+1)$ 'i hesaplarız. Aynı güncellemeyi $n+1$ anı için de yaparak sürecin $n+2$ anında alacağı değeri kestirmiş oluruz. Böylece süzgecimizi $n+2$ anında sürecin alacağı değeri kestirmek amacıyla optimize etmiş oluruz. Optimum süzgeçler, birçok pratik uygulamada farklı amaçlar için kullanılabilir. Bunlar aşağıdaki ana gruplara ayrılabilir:

-Veri düzeltme:

$u(n)$ 'in ölçüldüğünü düşünelim. $y(n+3)$ 'ü hesaplamak için $y(n+1)$ ve $y(n+2)$ kestirimleri kullanılır. $u(n+3)$ 'ü de ölçtüktan sonra $e(n)$ 'in değerine göre ağırlıklarımızı güncelleyebiliriz.

Böylelikle geçmişteki kestirimlerimiz $y(n+1)$ ve $y(n+2)$ 'yi düzelterek elimizdeki veri kümesini daha sağlıklı kılmış oluruz.

-Doğrusal Kestirim

-Gürültüden Arındırma

Şu ana dek süzgeçlerin yapısıyla ve çalışma koşullarıyla ilgili iki kısıtlama yapıldı:

1-Matematiksel analizinin kolay olması amacıyla süzgecin doğrusal olduğu düşünüldü.

2-Dijital yazılım ve donanımla hayata geçirilebilmesi için süzgecin ayrık zaman domeninde çalıştırıldığı düşünüldü.

Süzgeçler üzerindeki çalışmamızı derinleştirmek için iki keyfi seçime daha ihtiyaç vardır:

1-Süzgecin impuls yanıtının sonlu ya da sonsuz süreli olması.

2-Optimizasyon için kullanılacak istatistiksel ölçüt

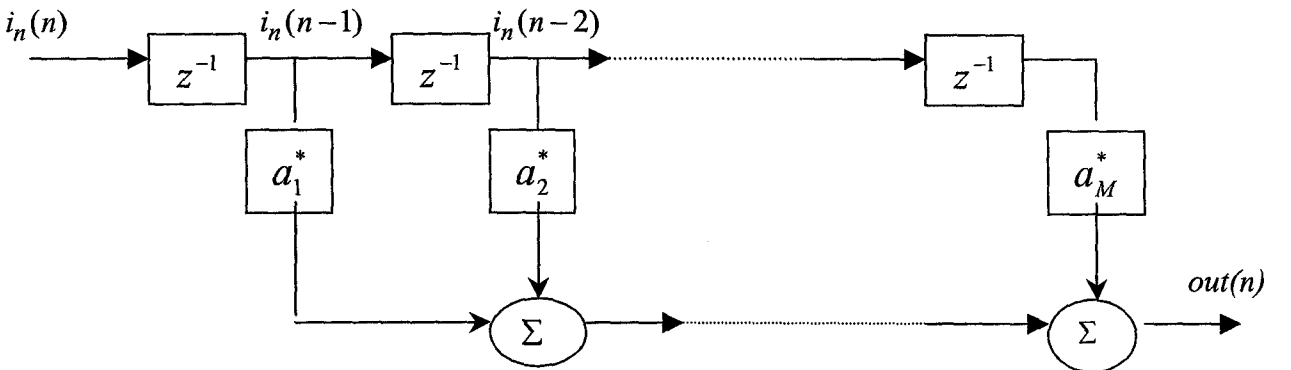
FIR ya da IIR süzgeç seçimi, pratikte karşılaşılabilecek koşullara göre verilecek bir karardır.

Bir FIR süzgeç yalnızca ileri besleme yolları içermesi nedeniyle süzgeç kararlı yapıda olup giriş çıkış ilişkisi yalnızca ileri besleme yollarından sağlanmaktadır.

$$H_{FIR}(z) = \sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n} \quad n \rightarrow \infty \quad H_{FIR}(z) \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

$$= \frac{Out(z)}{In(z)}$$

$$Out(z) = \sum a_n^* z^{-n} In(z) \quad (7.2)$$



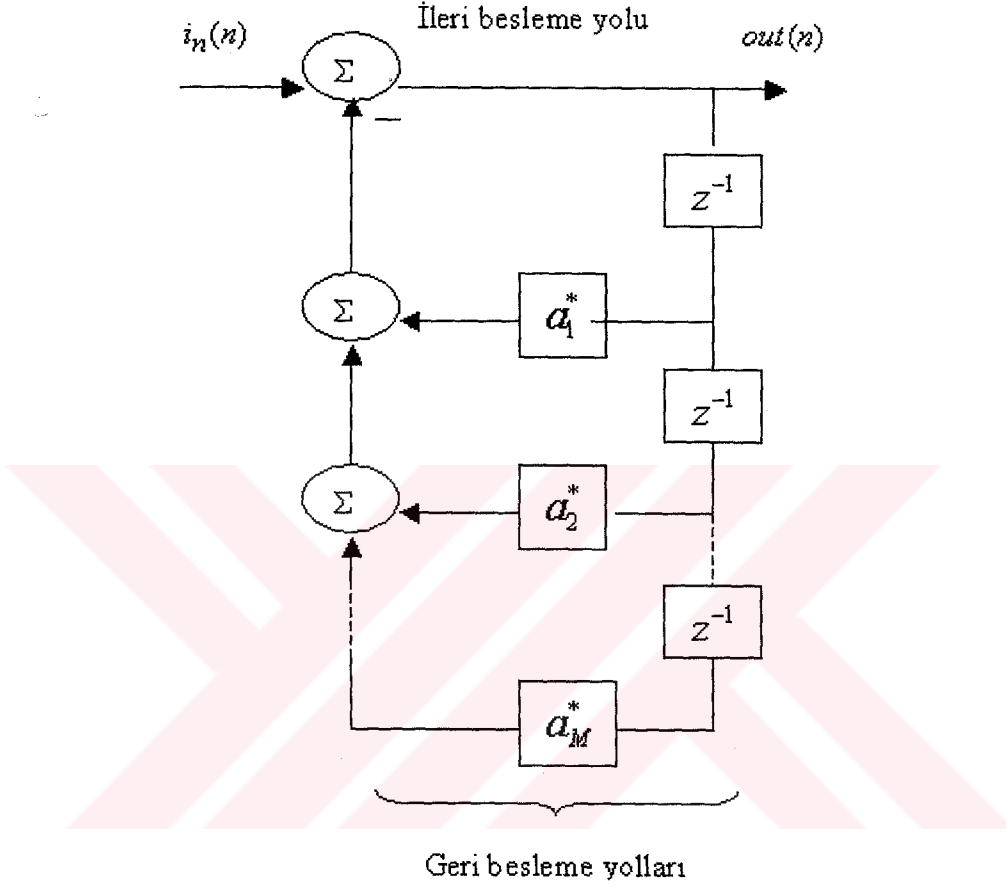
Şekil 7.2 FIR Süzgeçte İşaret Akışı

Yukarıda görülen yapı süzgeçteki işaret akışı impuls yanıtının sonlu olmasını beraberinde getirir. Öte taraftan IIR süzgeç hem ileri hem de geri besleme yolları içerir.

$$H_{IIR}(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^M a_n^* z^{-n}} = \frac{Out(z)}{In(z)} \quad (7.3)$$

$$in(n) = out(n) + a_1 out(n-1) + a_2 out(n-2) + \dots + a_M out(n-M) \quad (7.4)$$

$$out(n) = in(n) - a_1 out(n-1) - a_2 out(n-2) - \dots - a_M out(n-M) \quad (7.5)$$



Şekil 7.3 IIR Süzgeçte İşaret Akışı

Süzgeçte geri besleme yollarının bulunması, süzgeç çıkışının ve bazı ara kısımların girişe geri beslenmesi anlamına gelir. Böylece özel olarak tasarlanmadıkça süzgecin geri besleme yolları içermesi onu kararsız kılar ve bu da osilasyona yol açar. Süzgeç kararlılığı vazgeçilmez olduğunda bu tip bir çalışma kabul edilemez.

Özel olarak süzgeç tasarımını bir bedel fonksiyonunu en azlıyarak ya da aşağıdaki listeden bir performans ölçütü seçerek yapmak mümkündür.

1-Kestirim hatasının karesel ortalaması

2-Kestirim hatasının mutlak değerinin beklendik değeri

3- Kestirim hatasının mutlak değerinin üçüncü dereceden beklendik değeri

Birinci seçenek, diğer ikisine göre matematiksel gerçekleştirilebilirliği nedeniyle açık bir avantaja sahiptir. Özel olarak, karesel ortalama hata ölçütünün seçilmesi, süzgecin impuls yanıtındaki bilinmeyen parametrelere bağlı bedel fonksiyonunun ikinci derece istatistikler türünden bağlı olmasını sağlar. Bunun ötesinde, bedel fonksiyonu, süzgecin optimum çalıştığı koşulları belirleyen tek bir minimum noktasına sahiptir.

Birçok uygulamada negatif ve pozitif hatalar eşit derecede zararlı olduğu için, pozitif ve negatif hataya eşit derecede ağırlık veren bir ölçüt seçilmelidir.

Birinci seçenek $(|e(n)|^2)$ ve ikinci seçenek $(|e(n)|)$ ya da $|e(n)|$ 'in başka bir gücü bu gereksinimi sağlar. Karesel hata ölçütü, hatanın mutlak değeri ölçütüne göre büyük hataların etkisinin çok daha fazla olmasını sağlar. Bu da karesel hata ölçütünün hatanın mutlak değeri ölçütüne göre daha duyarlı olmasını sağlar.

Bu istatistiksel optimizasyonun matematiksel çözümünü aslında birbirinin tamamlayıcısı olan fakat birbirinden tamamen farklı iki yolla ortaya koymamız mümkündür.

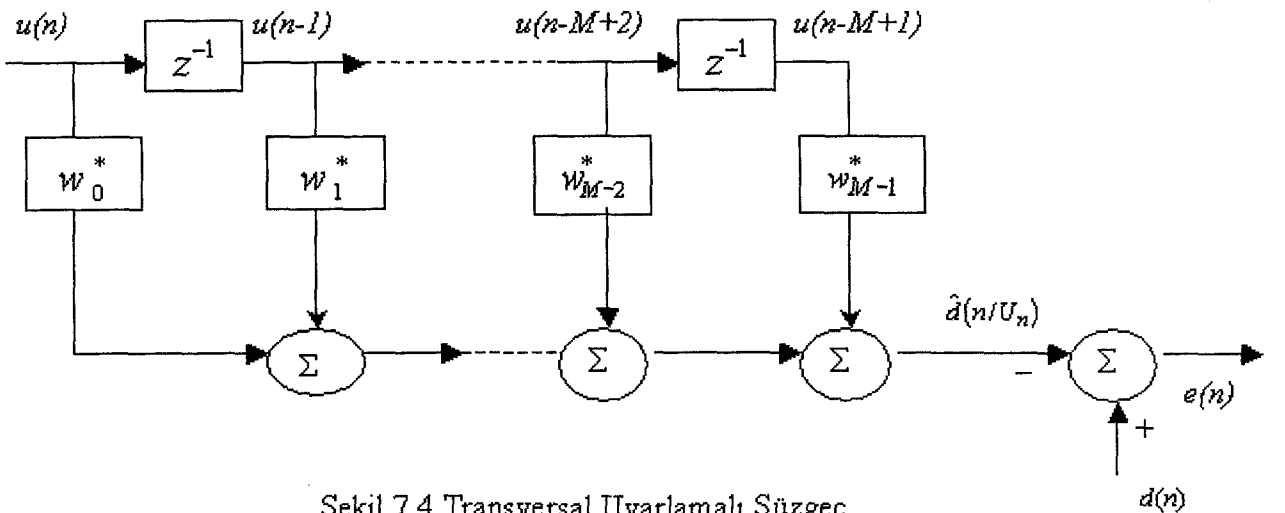
-Bir yaklaşım, diklik prensibi olarak bilinen çok önemli bir teoremin ortaya çıkmasını sağlamıştır.

-Diğeri ise bedel fonksiyonunun süzgeç katsayılarına ikinci dereceden bağımlılığıyla tanımlanan hata-performans yüzeyine dayanır.

7.3 Hata Başarım Yüzeyi

Doğrusal en küçük karesel ortalama hatayı belirlemek için karesel ortalama hatayı en azlıyan katsayı vektörünün ($\mathbf{w}$) değerini bulmalıyız.

$\mathbf{J}$, aşağıda görülen transversal (yanal) süzgecin tap-ağırlıklarına bağlı bedel fonksiyonudur.



$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n/U_n) \quad (7.6)$$

$$= d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k^* u(n-k) \quad (7.7)$$

$$J = E \left[e(n) e^*(n) \right] \quad (7.8)$$

$\mathbf{w}$: Tap-ağırlık vektörü

$\mathbf{u}(n)$: Tap-giriş vektörü

$$J(\mathbf{w}) = E \left\{ |e|^2 \right\} = E \left\{ (d - \mathbf{w}^H \mathbf{u})(d^* - \mathbf{u}^H \mathbf{w}) \right\} \quad (7.9)$$

$$J(\mathbf{w}) = E \left[|dd^*| \right] - E \left[d \mathbf{u}^H \mathbf{w} \right] - E \left[\mathbf{w}^H \mathbf{u} d^* \right] + E \left[\mathbf{w}^H \mathbf{u} \mathbf{u}^H \mathbf{w} \right] \quad (7.10)$$

$$= E \left[|d|^2 \right] - E \left[d \mathbf{u}^H \right] \mathbf{w} - \mathbf{w}^H E \left[\mathbf{u} d^* \right] + \mathbf{w}^H E \left[\mathbf{u} \mathbf{u}^H \right] \mathbf{w} \quad (7.11)$$

Bu aşamada diğer bir tanıma ihtiyacımız var:

Giriş vektörü ile istenen cevap arasındaki ilişkiyi tanımlayan karşı ilişik vektörü

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} d^* \quad (7.12)$$

$$\sigma_d^2 = E \left[|d|^2 \right] - |\mu_d|^2 \rightarrow \quad (7.13)$$

$$E \left[|d|^2 \right] = \sigma_d^2 \quad (7.14)$$

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_u^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{P} - \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (7.15)$$

$J(\mathbf{w})$, $\mathbf{w}$ üzerinde mükemmel kare olarak ifade edilirse;

$$J(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} + (\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^H \mathbf{R} (\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}) \quad (7.16)$$

$J(\mathbf{w})$ 'yi en azlamak için son terimi sıfır yapmamız gerekir.

$$\boxed{J_{\min}(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}} \quad (7.17)$$

$$\mathbf{w} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = 0 \Rightarrow \quad (7.18)$$

$$\boxed{\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}} \quad (7.19)$$

Bu durumda optimum süzgeç katsayılarına göre bedel fonksiyonunu yeniden tanımlayabiliriz:

$$J_{\min}(w) = \sigma_d^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{w}_0 \quad (7.20)$$

Burada σ_d^2 , istenilen işaretin değışintisi ve gücüdür.

... nolu denklem, bize optimum süzgeç katsayılarını bulmak için $\mathbf{R}^{-1}$ 'in hesaplanması gerektiğini söyler.

Bu aşamada artık normal denklem kümesi adıyla da bilinen Wiener-Hopf denklemlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\boxed{\mathbf{R}\mathbf{w}_0 = \mathbf{P}} : \text{Wiener-Hopf denklemleri (Normal Denklemler)} \quad (7.21)$$

Matris formunda verilen bu denklem takımı açıldığında aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)] \quad (7.22)$$

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{u}(n)d^*(n)] \quad (7.23)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{P} = E \left\{ \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M+1) \end{bmatrix} d^*(n) \right\} \quad (7.25)$$

$$\mathbf{P} = E \begin{bmatrix} u(n)d^*(n) \\ u(n-1)d^*(n) \\ u(n-2)d^*(n) \\ \vdots \\ u(n-M+1)d^*(n) \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

$$\mathbf{P} = E \begin{bmatrix} p(0) & p(-1) & p(-2) & \cdots & p(1-M)^T \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

$$\boxed{\mathbf{R}\mathbf{w}_0 = \mathbf{P}} \quad (7.28)$$

7.4 Diklik Prensibi

$y(n)$, transversal süzgecin çıkışını göstermek üzere süzgeç çıkışındaki hata ve hatanın gücünü aşağıdaki gibi tanımlıyorduk:

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (7.29)$$

$$J = E[e(n)e^*(n)] \quad (7.30)$$

$$= E[|e(n)|^2] \quad (7.31)$$

Problem, yine J 'nin en düşük değerine ulaşacağı optimum koşulları belirlemekten ibarettir.

Kompleks değerli giriş verisi için, genellikle süzgeç katsayıları da komplekstir.

k 'nci süzgeç katsayısını aşağıdaki genel gösterimle ifade edebiliriz:

$$w_k = a_k + jb_k \quad (7.32)$$

k 'nci katsayının gerçek ve sanal kısımlarına göre birinci dereceden türevlere bağlı bir gradient vektörü tanımlıyarak J 'nin en düşük değerine ulaşacağı noktayı bulabiliriz:

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k} \quad (7.33)$$

$$\nabla_k J = 0 \quad (7.34)$$

$$\nabla_k J = E \left[\frac{de(n)e^*(n)}{da_k} + j \frac{de(n)e^*(n)}{db_k} \right] \quad (7.35)$$

$$= E \left[\frac{de(n)}{da_k} e^*(n) + \frac{de^*(n)}{da_k} e(n) + j \frac{de(n)}{db_k} e^*(n) + j \frac{de^*(n)}{db_k} e(n) \right] \quad (7.36)$$

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (7.37)$$

$$e(n) = d(n) - \sum w_k^* u(n-k) \quad (7.38)$$

$$= d(n) - \sum (a_k + jb_k)^* u(n-k) \quad (7.39)$$

$$= d(n) - \sum (a_k + jb_k) u(n-k) \quad (7.40)$$

Bu durumda aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{de(n)}{da_k} = -u(n-k) \quad ; \quad (7.41)$$

$$\frac{de^*(n)}{da_k} = -u^*(n-k) \quad (7.42)$$

$$\frac{de(n)}{db_k} = ju(n-k) \quad ; \quad (7.43)$$

$$\frac{de^*(n)}{db_k} = -ju^*(n-k) \quad (7.44)$$

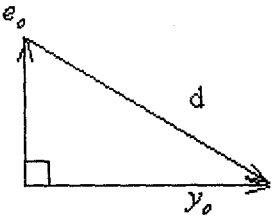
$$\nabla_k J = E \left[-u(n-k)e^*(n) - u^*(n-k)e(n) - u(n-k)e^*(n) + u^*(n-k)e(n) \right] \quad (7.45)$$

$$\nabla_k J = 2E \left[u(n-k)e^*(n) \right] \quad (7.46)$$

Kestirim hatasını en azlamak için $E \left[u(n-k)e^*(n) \right]$ sıfır olmalıdır.

$$2E \left[u(n-k)e_o^*(n) \right] = 0 \quad (7.47)$$

Bu denklemin yorumu aşağıdaki gibidir: J bedel fonksiyonunun en az değerine ulaşması için gerek ve yeter koşul ; n anında alınan her bir giriş örneğinin kestirim hatası $e_o(n)$ 'e dik olmasıdır. Bu durum, gerçekten de diklik ilkesi olarak adlandırdığımız doğrusal kestirim teorisinin en önemli teoremlerinden birisini meydana getirir. Ayrıca bu koşul sayesinde doğrusal süzgecin optimum koşullarda çalışıp çalışmadığı da test edilebilir.



Şekil 7.5 Diklik İlkesi

7.5 Özet

Aşağıda blok şeması verilen sistemde $\mathbf{R}\mathbf{w}_o = \mathbf{P}$ eşitliğinde optimum süzgeç katsayılar vektörü $\mathbf{w}_o^*$ 'ı bulmak için aşağıdaki MATLAB komutu kullanılabilir:

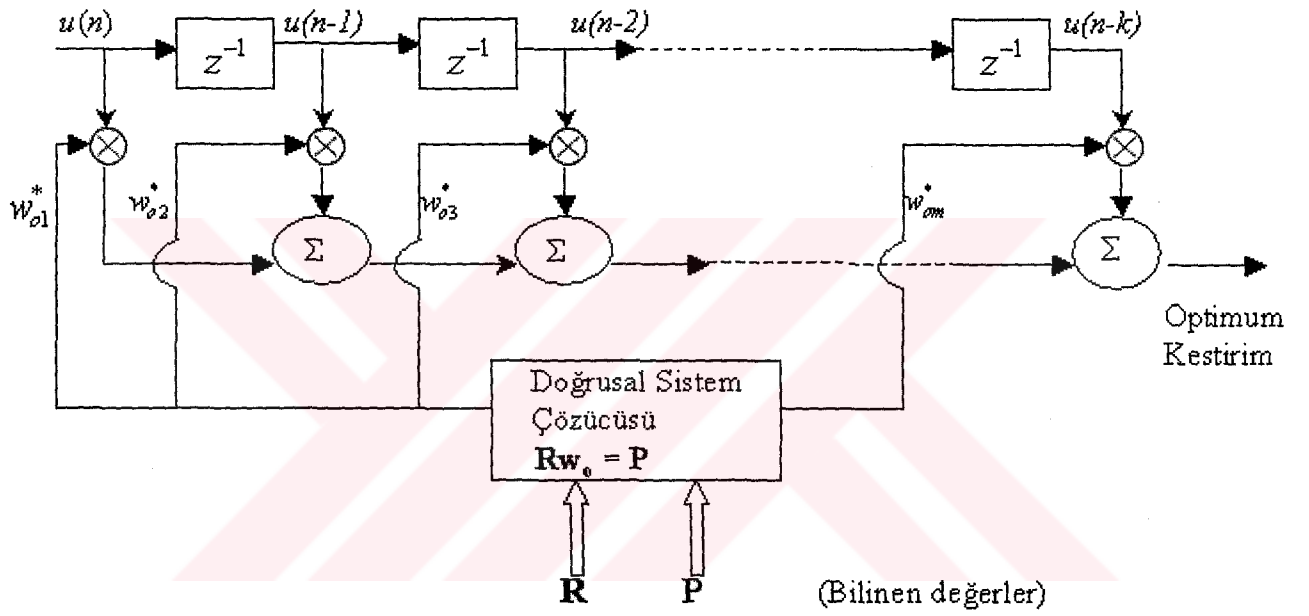
```
copt=R\P
```

En düşük karesel ortalama hatayı bulmak için:

```
Popt=py-dot(conj(d),copt)
```

Optimum süzgeci gerçekleştirmek için:

```
yest=filter(copt,1,u)
```



Şekil 7.6 Optimum Kestirimci

8. DOĞRUSAL KESTİRİM

8.1 Genel

Zaman serileri analizinde en önemli sorunlardan birisi var olan belli sayıda örnekten oluşan geçmiş değerler kümesini kullanarak ayrık zamanlı bir durağan sürecin gelecekteki değerlerini kestirmektir.

Özel olarak böyle bir sürecin n anına kadarki M tane değerini ele alalım:

$$u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$$

$U_{n-1} : u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ değerlerinin gerdiği M boyutlu uzay

$\hat{u}(n/U_{n-1}) : u(n)$ 'in kestirilen değeri

Bu değerler için doğrusal kestirim başlığı altında aşağıdaki uygulamalar gerçekleştirilebilir:

-Doğrusal kestirimin ileri yönde doğrusal kestirim olarak adlandırılan uygulamasında, kestirilen değer, geçmiş değerlerin $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ doğrusal birleşimidir. (Lineer kombinasyonu)

-Geri yönde doğrusal kestirim de bu ana başlığın altında yer alıp bu uygulamada $u(n), u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M+1)$ değerleri kullanarak $u(n-M)$ geçmiş değeri hesaplanır.

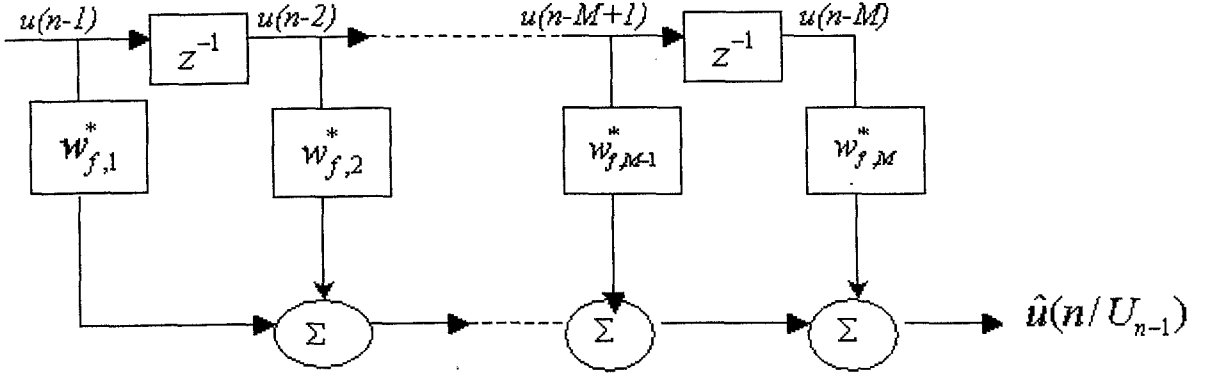
Wiener süzgeç teorisini, geniş anlamda durağan süreçlerin ileri ve yönde doğrusal kestirimini karesel ortalama hata ölçütüne göre optimize etmek amacıyla kullanırız. Bu tip bir sürecin korelasyon matrisi Toeplitz yapıdadır ve bu yapı etkili algoritmaların tasarlanabilmesine olanak tanır.

8.2 İleri Yönde Doğrusal Kestirim

Aşağıda görülen ileri yönde doğrusal kestirimci, M tane tap ağırlığına ve tap girişine sahip bir transversal süzgeçtir.

Bu giriş değerlerinin sıfır ortalamalı geniş anlamda durağan bir süreçten elde edildiği düşünülmektedir.

Bunun yanı sıra tap ağırlıklarının da Wiener süzgeç teorisine uygun olarak karesel ortalama anlamında optimize edildiği düşünülmektedir.



Şekil 8.1 İleri Yönde Doğrusal Kestirimci

$u(n)$ 'nin kestirilen değeri $\hat{u}(n/U_{n-1})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{u}(n/U_{n-1}) = \sum_{k=1}^M w_{f,k}^* u(n-k) \quad (8.1)$$

Süzgeç çıkışında elde edilmek istenen değer $d(n)$ olup sürecin n anındaki değerine eşittir.

Bunun yanı sıra bir de elde edilen gerçek değer vardır. Bunu da kestirilen değer olarak yukarıda tanımlamıştık.

$$d(n) = u(n)$$

İleri yönde kestirim hatası $u(n)$ ile kestirilen değer arasındaki farka eşit olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f_M(n) = u(n) - \hat{u}(n/U_{n-1}) \quad (8.2)$$

M , kestirimcinin derecesini belirtir ve kestirimin yapılabilmesi için saklanması gereken geçmiş değer sayısına eşittir.

P_M yanlış kestirim olarak adlandırılıp aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$P_M = E \left[|f_M(n)|^2 \right] \quad (8.3)$$

Ortalaması sıfır olarak düşünülen giriş değerleri sayesinde $f_M(n)$ de sıfır ortalamalı olacaktır.

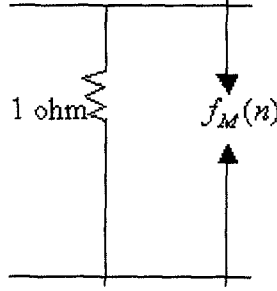
Bu koşul altında P_M , $f_M(n)$ 'in değişintisine eşittir.

$$\sigma_{f_M}^2 = E\left[|f_M(n)|^2\right] - |\mu_{f_M}|^2 \quad (8.4)$$

$$= E\left[|f_M(n)|^2\right] - 0 \quad (8.5)$$

P_M hakkında yapılabilecek diğer bir saptama da aşağıdaki gibidir:

İleri yönde kestirim hatasının ensemble- ortalama değeri 1 ohmluk bir yük üzerinde ölçüldüğü düşünülerek aşağıdaki gibi ifade edilebilir:



Şekil 8.2 İleri Yönde Kestirim Hatası

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{1} = V^2 = E\left[|f_M(n)|^2\right] \quad (8.6)$$

8.3 Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü

$\mathbf{w}_f$: İleri yönde kestirimcinin $M \times 1$ boyutlu ağırlık vektörü

$$\mathbf{w}_f = [w_{f,1}, w_{f,2}, \dots, w_{f,M}]^T \quad (8.7)$$

$\mathbf{w}_f$ vektörü için Wiener-Hopf denklemlerini çözmek için aşağıdaki niceliklerin bilinmesi gerekir:

1-Tap girişlerine ait $M \times M$ boyutlu korelasyon matrisi

$$u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$$

2-Tap girişleriyle istenen değer $u(n)$ arasındaki $M \times 1$ boyutlu karşı korelasyon vektörü

Bu değerlerin yanı sıra P_M 'in bulunabilmesi için üçüncü olarak $u(n)$ 'in değışintisinin de bilinmesi gerekir.

Bu değerleri sırasıyla aşağıdaki gibi inceliyebiliriz:

8.3.1 Korelasyon Matrisi

$$\mathbf{u}(n-1) = [u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)]^T \quad (8.8)$$

Tap giriş vektörünü yukarıdaki gibi tanımladıktan sonra bunlara ilişkin korelasyon matrisini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{u}(n-1)\mathbf{u}^H(n-1)] \quad (8.9)$$

$$\mathbf{R} = E \left\{ \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^*(n-1) & u^*(n-2) & \dots & u^*(n-M) \end{bmatrix} \right\} \quad (8.10)$$

$$\mathbf{R} = E \begin{bmatrix} u(n-1)u^*(n-1) & u(n-1)u^*(n-2) & \dots & u(n-1)u^*(n-M) \\ u(n-2)u^*(n-1) & u(n-2)u^*(n-2) & \dots & u(n-2)u^*(n-M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(n-M)u^*(n-1) & u(n-M)u^*(n-2) & \dots & u(n-M)u^*(n-M) \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

$u(n)$ 'in geniş anlamda durağan bir stokastik süreç olduğunu biliyoruz. Geniş anlamda durağan olma özelliği beraberinde korelasyon matrisinin zamanla ötelemeyele değişmemesini de beraberinde getirir. Böylece yukarıda gösterilen korelasyon matrisini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

8.3.2 Karşı İlişki Vektörü

Tap girişleri $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ ile istenen cevap $u(n)$ arasındaki karşı korelasyon vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{r} = E[\mathbf{u}(n-1)u^*(n)] \quad (8.13)$$

$$\mathbf{r} = E \left\{ \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(n-M) \end{bmatrix} u^*(n) \right\} = E \begin{bmatrix} u(n-1)u^*(n) \\ u(n-2)u^*(n) \\ \vdots \\ u(n-M)u^*(n) \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(-1) \\ r(-2) \\ \vdots \\ r(-M) \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

8.3.3 Giriş Vektörünün Değişintisi

$$\sigma_u^2 = E[|u(n)|^2] - |\mu_u|^2 = E[|u(n)|^2] \quad (8.16)$$

$$\sigma_u^2 = E[u(n)u^*(n)] = r(0) \quad (8.17)$$

Bu aşamada Wiener Süzgeci İle İleri Yönde Doğrusal Kestirimci arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları aşağıdaki gibi bir tablo halinde ele almak karışıklıkları önlemek için yararlı olacaktır.

Çizelge 8.1 Wiener Süzgeci İle İleri Yönde Doğrusal Kestirimcinin Karşılaştırılması

Nicelik	Wiener Süzgeci	İleri Yönde Doğrusal Kestirimci
Tap-Giriş Vektörü	$\mathbf{u}(n)$	$\mathbf{u}(n-1)$
İstenen Cevap	$\mathbf{d}(n)$	$\mathbf{u}(n)$
Tap Ağırlık Vektörü	$\mathbf{w}_o$	$\mathbf{w}_f$
Kestirim Hatası	$E(n)$	$f_M(n)$
Tap Girişlerine İlişkin Korelasyon Matrisi	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Tap Girişleriyle İstenen Cevap Arasındaki Karşı Korelasyon Vektörü	$\mathbf{P}$	$\mathbf{r}$
En Düşük Karesel Ortalama Hata	$J_{\min}$	P_M

Bu tablodaki ifadeleri kullanarak az önce değinilen Wiener – Hopf denklemlerinin çözümünü ileri yönde doğrusal kestirimciye uyarlıyarak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

$$\boxed{\mathbf{R}\mathbf{w}_f = \mathbf{r}} \quad (8.18)$$

$$\boxed{P_M = r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_f} \quad (8.19)$$

8.5 Doğrusal Kestirim İle AR Model Arasındaki İlişki

Wiener-Hopf denklemlerinin ileri yönde doğrusal kestirimciye uyarlanmış biçimi ile bir AR modelini tanımlayan Yule-Walker denklemlerini karşılaştırmak oldukça bilgilendiricidir.

Her iki denklem kümesini de yeniden hatırlayalım:

-Wiener-Hopf Denklemleri:

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{r} \quad (8.20)$$

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{u}(\mathbf{n}-1)\mathbf{u}^H(\mathbf{n}-1)] \quad (8.21)$$

$$\mathbf{w}_f = [w_{f,1}, w_{f,2}, \dots, w_{f,M}]^T \quad (8.22)$$

$$\mathbf{r} = E[\mathbf{u}(\mathbf{n}-1)u^*(n)] \quad (8.23)$$

Matris formu:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \cdots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \cdots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{f,1} \\ w_{f,2} \\ \vdots \\ w_{f,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(M) \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

-Yule-Walker Denklemleri:

$$\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) = v(n) \quad (8.25)$$

$$E \left[\sum_{k=0}^M a_k^* u(n-k) u^*(n-k) \right] = E[v(n) u^*(n-k)] \quad (8.26)$$

$$\text{lag} = l - k;$$

$$\sum a_k^* r(l-k) = 0 \quad ; \quad l > 0 \quad a_0 \quad (8.27)$$

$$r(lag) = r(l) = w_1^* r(l-1) + w_2^* r(l-2) + \dots + w_M^* r(l-M) \quad ; \quad a_k = -w_k \quad (8.28)$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{f,1} \\ w_{f,2} \\ \vdots \\ w_{f,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^*(1) \\ r^*(2) \\ \vdots \\ r^*(M) \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{r} \quad (8.30)$$

Görüldüğü gibi iki denklem takımı da tamamen aynı matematiksel forma sahiptir. Bunun ötesinde, doğrusal kestirim durumu için

$$P_M = r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_f \quad (8.31)$$

eşitliği ortalama gücü yani değişintiyi tanımlar ve AR modeli uyarmak için kullanılan beyaz gürültünün aşağıda verilen değişinti ifadesiyle aynı matematiksel yapıya sahiptir.

$$\sigma_v^2 = \sum_{k=0}^M a_k r(k) \quad (8.32)$$

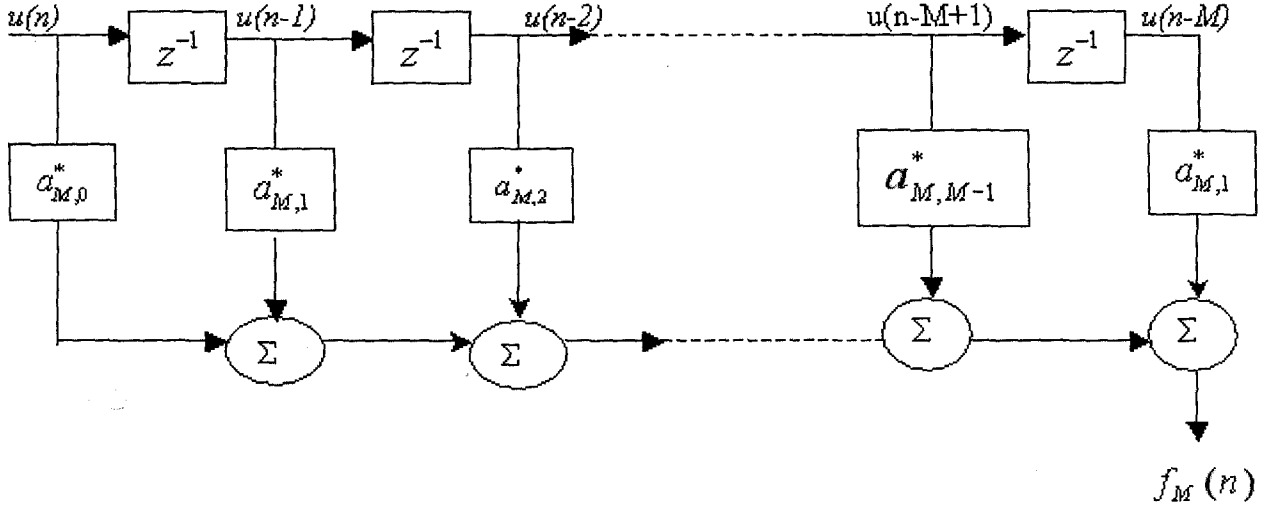
Eğer sürecimiz M. dereceden AR tipindeyse ileri yönde kestirimcinin karesel ortalama anlamında optimize edilmesiyle elde edilen tap-ağırlıkları ile karşılık gelen AR sürecinin parametrelerinin teoride aynı olması gerekir. Bu ilişki, ileri yönde doğrusal kestirimci ile AR modelinin aynı formdaki matematiksel eşitliklerle tanımlanmasından dolayı şaşırtıcı olmamalıdır.

Fakat süre. AR değilse ileri yönde kestirimci yalnızca bir yakınsaklık sağlayabilir.

8.6 İleri Yönde Kestirimci Hata Süzgeci

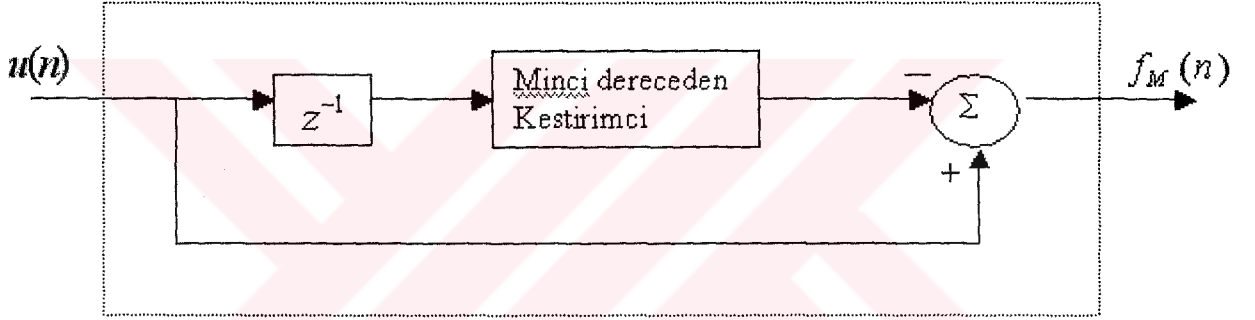
İleri yönde hata kestirimcisi M tane birim geciktirici elemandan ve tap-girişleri $u(n-1)$, $u(n-2)$, ..., $u(n-M)$ ile sırasıyla beslenen $w_{f,1}, w_{f,2}, \dots, w_{f,M}$ tap ağırlıklarından oluşur. Elde edilen çıkış, $u(n)$ 'in kestirimidir.

Kestirim-Hata Süzgecine ilişkin blok gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 8.3 Kestirim-Hata Süzgeci

Kestirimci ile Kestirim-Hata süzgeci arasındaki ilişki aşağıdaki blok diyagramla gösterilebilir:



Şekil 8.4 Kestirimci İle Kestirim-Hata Süzgeci Arasındaki İlişki

8.7 Genişletilmiş Wiener-Hopf Denklemleri

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_f = \mathbf{r} \quad : \text{Wiener-Hopf denklemleri} \quad (8.33)$$

$$P_M = r(0) - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_f \quad : \text{İleri kestirim hata gücü} \quad (8.34)$$

Bu iki denklem takımını aşağıdaki gibi tek bir matris ile göstermek mümkündür:

$$\begin{pmatrix} r(0) & \mathbf{r}^H \\ \mathbf{r} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

Bu ifadede $\mathbf{0}$, $M \times 1$ lik sıfır vektörünü gösterir ve

$$\mathbf{a}_M = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{w}_f \end{bmatrix} \text{ olarak tanımlıdır.} \quad (8.36)$$

8.7.1 Örnek

Kestirim hata süzgeci $M=1$ için Wiener-Hopf denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) \\ r^*(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} r(0) & r(1) \\ r^*(1) & r(0) \end{vmatrix} = r^2(0) - |r(1)|^2 \quad (8.38)$$

$$a_{1,0} = \frac{P_1}{\Delta_r} r(0) \quad ; \quad a_{1,1} = -\frac{P_1}{\Delta_r} r^*(1) \quad (8.39)$$

$a_{1,0} = 1$ olduğu için ;

$$P_1 = \frac{\Delta_r}{r(0)} \quad ; \quad a_{1,1} = -\frac{r^*(1)}{r(0)} \quad (8.40)$$

$M=2$ için durum ne olurdu?

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) & r(2) \\ r^*(1) & r(0) & r(1) \\ r^*(2) & r^*(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} r(0) & r(1) & r(2) \\ r^*(1) & r(0) & r(1) \\ r^*(2) & r^*(1) & r(0) \end{vmatrix} \quad (8.42)$$

$$a_{2,0} = \frac{P_2}{\Delta_r} [r^2(0) - Ir(1)I^2] \quad ; \quad a_{2,1} = \frac{P_2}{\Delta_r} [r^*(1)r(0) - r(1)r^*(2)] \quad (8.43)$$

$$a_{2,2} = \frac{P_2}{\Delta_r} [(r^*(1))^2 - r(0)r^*(2)] \quad (8.44)$$

$a_{2,0} = 1$ olduğuna göre:

$$P_2 = \frac{\Delta_r}{r^2(0) - |r(1)|^2} \quad (8.45)$$

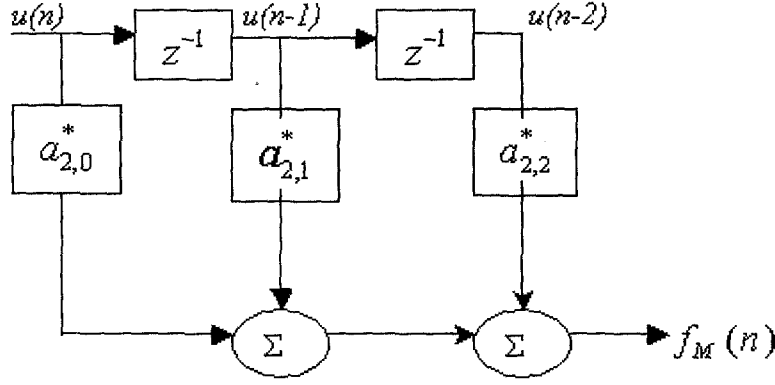
Böylece,

$$a_{2,1} = -r^* \frac{[r(0) - r(1)r^*(2)]}{r^2(0) - |r(1)|^2} \quad (8.46)$$

$$a_{2,2} = \frac{(r^*(1))^2 - r(0)r^*(2)}{r^2(0) - |r(1)|^2} \quad (8.47)$$

M = 2 için,

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) = u(n) \dots \text{AR} (2)$$



Şekil 8.5 İkinci Dereceden Kestirim-Hata Süzgeci

AR için σ_v^2 ,

$$\text{FLP için } P_m = \sigma_v^2 - \mathbf{r}^H \mathbf{w}_f \quad (8.48)$$

P_M σ_v^2 'ye yaklaştıkça daha iyi bir kestirimci elde ederiz.

8.8 Levinson-Durbin Algoritması (LDA)

LDA, genişletilmiş Wiener-Hopf denklemlerini çözerek kestirim-hata süzgeç katsayılarını ve kestirim-hata gücünü hesaplamak için direk bir yöntemdir. Bu yöntem doğası itibarıyla yinelemeli olup süzgeç tap-girişlerine ilişkin korelasyon matrisinin Toeplitz yapıda olması özelliğini kullanır.

Temel olarak, prosedür, m. dereceden kestirim-hata süzgecini hesaplamak için m-1. derecede elde ettiği değerleri kullanır.

$$m=1,2,\dots,M$$

M, süzgecin son derecesidir.

Algoritmanın en önemli özelliği işlem sayısını azaltarak hesaplamaları kolaylaştırmasıdır.

İleri yönde kestirim için Levinson-Durbin algoritmasının genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$P_0 = r(0) \quad (8.49)$$

$$\mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_{m-1}^* \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

$$\Gamma_m = -\frac{\Delta_{m-1}}{P_{m-1}} \quad (8.51)$$

$$P_m = P_{m-1} (1 - |\Gamma_m|^2) \quad (8.52)$$

$$\Delta_{m-1} = \sum_{l=1}^{m-1} r(l-m) a_{m-1,l} \quad (8.53)$$

8.8.1 Levinson-Durbin Algoritmasının Uygulamaları

1- $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ve P_0 verilmiş olsun.

$M=3$

Amaç süzgeç parametrelerini ve hata gücünü bulmaktır:

$a_{3,1} \ a_{3,2} \ a_{3,3} \ P$?

$M=1$

$a_{1,0}=1;$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \Gamma_1 \mathbf{a}_0^* \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}_0 = a_{1,0} = 1$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix}$$

$M=2;$

$a_{2,0}=1;$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 + |\Gamma_2| \Gamma_1^* \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

$$P_2 = P_1 (1 - |\Gamma_2|^2)$$

$M=3;$

$a_{3,0}=1;$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_2^{B*} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2}^* \\ a_{2,1}^* \\ a_{2,0}^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ a_{2,1} + \Gamma_3 a_{2,2}^* \\ a_{2,2} + \Gamma_3 a_{2,1}^* \\ \Gamma_3 a_{2,0}^* \end{bmatrix}$$

$$P_3 = P_2 (1 - |\Gamma_3|^2)$$

2- M=3 için tap-ağırlıkları verilmiş olsun ve yansıma katsayıları istensin:

$$\Gamma_3 = a_{3,3}; \Gamma_2 = a_{2,2}; \Gamma_1 = a_{1,1}$$

M=3 :

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_2^{B*} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2}^* \\ a_{2,1}^* \\ a_{2,0}^* \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{3,1} &= a_{2,1} + \Gamma_3 a_{2,2}^* \\ a_{3,2} &= a_{2,2} + \Gamma_3 a_{2,1}^* \\ a_{3,3} &= \Gamma_3 a_{2,0}^* = \Gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a_{3,1} &= a_{2,1} + \Gamma_3 \Gamma_2^* \\ a_{3,2} &= \Gamma_2 + \Gamma_3 a_{2,1}^* \end{aligned} \right\} \quad \Gamma_3 \text{ ve } \Gamma_2 \text{ bulunabilir.}$$

M=2 :

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_1^{B*} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{2,1} \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{1,1}^* \\ a_{1,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 \Gamma_1^* \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{2,1} = \Gamma_1 + \Gamma_2 \Gamma_1^* \Rightarrow \Gamma_1 \text{ bulunabilir.}$$

3- P₀ ve yansıma katsayıları verilip öz ilişki dizisi M=3 için istensin:

Bunun için önce tap-ağırlıklarını bulmamız gerekir.

M = 1 :

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} r(0) & r(1) \\ r^*(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix}; r(0) = P(0)$$

$$r^*(1) + r(0)\Gamma_1 = 0 \Rightarrow r(1) = -P(0)\Gamma_1^*$$

M = 2 :

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2\Gamma_1^* \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) \\ r^*(1) & r(0) & r(1) \\ r(2) & r^*(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2\Gamma_1^* \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r(2) + r^*(1)(\Gamma_1 + \Gamma_2\Gamma_1^*) + r(0)\Gamma_2 = 0$$

$$r(2) = -r^*(1)[\Gamma_1 + \Gamma_2\Gamma_1^*] - r(0)\Gamma_2$$

M = 3 :

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{3,0} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_3 \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2,2}^* \\ a_{2,1}^* \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & r(3) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.9 Kestirim-Hata Süzgeçlerinin Özellikleri

Bir ileri yönde kestirimciyi tanımlayan eşitlik aşağıdaki gibidir:

$$f_m(n) = w_{f,0}^* u(n) - [w_{f,1}^* u(n-1) + w_{f,2}^* u(n-2) + \dots + w_{f,m}^* u(n-m)] \quad (8.54)$$

$$= a_{m,0}^* u(n) + a_{m,1}^* u(n-1) + a_{m,2}^* u(n-2) + \dots + a_{m,m}^* u(n-m) \quad (8.55)$$

$$f_m(n) = \sum_{k=0}^m a_{m,k}^* u(n-k) \Rightarrow F_m(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k}^* u(z) z^{-k} \quad (8.56)$$

$$H_{f,m}(z) = \frac{F_m(z)}{U(z)} = \sum_{k=0}^m a_{m,k}^* z^{-k} \quad (8.57)$$

8.9.1 Minimum Faz

$$H_{f,1}(z) = \sum_{k=0}^1 a_{n,k}^* z^{-k} = a_{1,0}^* + a_{1,1}^* z^{-1} = 1 + \Gamma_1^* z^{-1} \Rightarrow \quad (8.58)$$

$$H_{f,1}(z) = 0 \Rightarrow z^{-1} \Gamma_1^* = -1 \Rightarrow z = -\Gamma_1^* \quad \left. \vphantom{H_{f,1}(z) = 0} \right\} \quad (8.59)$$

$$H_{f,1}(z) = \infty \Rightarrow z^{-1} \Gamma_1^* = \infty \Rightarrow z = 0 \quad \left. \vphantom{H_{f,1}(z) = \infty} \right\} \quad (8.60)$$

$H_{f,1}(z)$, $z = -\Gamma_1^*$ de bir sıfıra ve $z = 0$ da bir kutba sahiptir.

Yansıma katsayısının modülü birden küçük olduğuna göre $|\Gamma_1| < 1 \Rightarrow$ bu sıfır birim çemberin içinde yer almalıdır.

$H_{f,1}(z)$, birim çemberin dışında bir sıfıra sahip değildir.

$$H_{f,2}(z) = 1 + \Gamma_1^* z^{-1} + a_{2,2}^* z^{-2} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-\Gamma_1^* + \sqrt{\Gamma_1^{*2} - 2\Gamma_2^*}}{2} \quad (8.61)$$

$$z_1 = a + jb \quad (8.62)$$

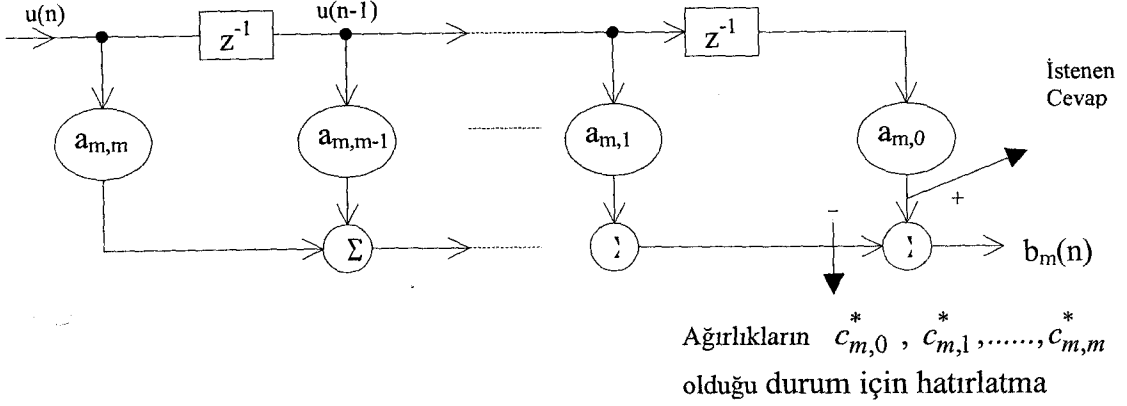
Eğer $|\Gamma_1|$ ve $|\Gamma_2|$ 1'den küçükse, a ve b de 1'den küçük olacaktır. Bu durumda $|z| < 1$ olup $H_{f,2}(z)$ de birim çemberin ne üzerinde ne de dışında bir sıfıra sahip olacaktır. Böylece bir kestirim-hata süzgecinin transfer fonksiyonu olan $H_{f,m}(z)$ in aşağıdaki koşul altında m'nin tüm değerleri için birim çemberin ne üzerinde ne de dışında sıfırı olacaktır.

$$|\Gamma_m| < 1$$

Bu koşulu sağlayan süzgece belli bir genlik cevabı için z'nin birim çember üzerindeki tüm değerleri için minimum faz cevabına sahip olması dolayısıyla minimum fazlı denir.

Bunun ötesinde, süzgecin genlik ve faz yanıtları birbirine bağlıdır.

8.9.2 Maksimum Faz



Şekil 8.6 Geri Yönde Doğrusal Kestirimci

$$b_m(n) = u(n)a_{m,m} + u(n-1)a_{m,m-1} + \dots + a_{m,1}u(n-m+1) + a_{m,0}u(n-m) \quad (8.63)$$

$$b_m(n) = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}u(n-k) \quad (8.64)$$

$$\mathbf{B}_m(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}U(z)z^{-k} \Rightarrow \quad (8.65)$$

$$H_{b,m}(z) = \frac{B_m(z)}{u(z)} = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}z^{-k} \quad (8.66)$$

$$H_{f,m}(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k}z^{-k} \text{ olduğunu hatırlayıp öncelikle } H_{f,m}^*(z) \text{ 'i bulalım:} \quad (8.67)$$

$$H_{f,m}^*(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k}(z^*)^{-k} \quad (8.68)$$

(8.68)'de z yerine resiprok kompleks eşleniği z^* konarak aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$H_{f,m}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sum_{k=0}^m a_{m,k}z^k \quad (8.69)$$

Daha sonra (8.69)'da k yerine $m-k$ koyalım:

$$H_{f,m}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}z^{m-k} = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k}z^m z^{-k} \quad (8.70)$$

$$H_{f,m}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = z^m \underbrace{\sum_{k=0}^m a_{m,m-k} z^{-k}}_{H_{b,m}(z)} \quad (8.71)$$

$$H_{b,m}(z) = z^{-m} H_{f,m}^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \quad (8.72)$$

Transfer fonksiyonunu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayırarak ifade edelim:

$$H_{f,m}(z) = \prod_{i=1}^m (1 - z_i z^{-1}) \quad (8.73)$$

$\downarrow$
 $\rightarrow z = z_i$

z_i , $H_{f,m}(z)$ 'in i inci sıfırını göstermektedir.

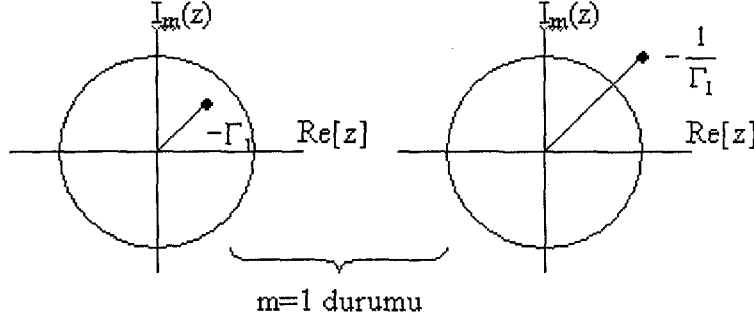
Bu transfer fonksiyonunun sıfırları aşağıdaki gibi yerleşmiştir:

$$H_{b,m}(z) = \prod_{i=1}^m z^{-m} (1 - z_i^* z) \quad (8.74)$$

$\downarrow$
 $\rightarrow \frac{1}{z^*} = z_i \Rightarrow \frac{1}{z} = z_i^* \Rightarrow z = \frac{1}{z_i^*}$
 $1 - z_i^* z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{z_i^*}$

Sıfırlar, yukarıda görüldüğü gibi $\frac{1}{z_i^*}$ 'dedir.

Bu da ileri yönde kestirimci ile geri yönde kestirimcinin sıfırlarının birim çembere göre z düzleminde birbirinin tersi olduğunu gösterir.



Şekil 8.7 İleri Yönde ve Geri Yönde Kestirimcilerin z Düzleminde Karşılaştırılması

Sonuç olarak, $|\Gamma_m| < 1 \quad \forall m$ eşitsizliği nedeniyle geri yönde kestirim hata süzgecinin tüm sıfırları z düzleminde birim çemberin dışındadır.

Buna dayanarak aşağıdaki saptamayı yapabiliriz:

Geri yönde kestirim hata süzgeci, belli bir genlik cevabı için z 'nin birim çember üzerindeki tüm değerleri için maksimum faz cevabına sahip olması dolayısıyla maksimum fazlı denir.

8.9.3 Beyazlatıcı Süzgeç

Tanımı dolayısıyla, bir beyaz gürültü süreci, tamamen rasgele bir diziden oluşur. $v(n)$ ile gösterilen, sıfır ortalamalı ve σ_v^2 değişintisine sahip böyle bir süreci aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$E[v(k)v^*(n)] = \begin{cases} \sigma_v^2, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (8.75)$$

Buna göre, $n-1$ anı da dahil olmak üzere n anındaki değerinin tüm geçmiş değerleriyle ilişkisiz olması ve bu ilişkisiz olma durumunun n anındaki değer ile gelecekteki değerleri de kapsamaması nedeniyle beyaz gürültü sürecinin tamamen kestirilemez olduğunu söylemek mümkündür.

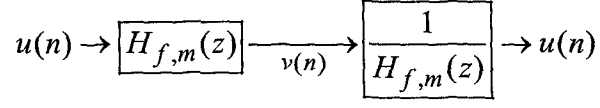
Kestirim-hata süzgeçlerinin diğer bir özelliği de şudur:

Girişine uygulanan ayrık zamanlı stokastik sürecin örnekleri arasındaki ilişki bilindiği takdirde kestirim-hata süzgeci, bir süreci beyazlatabilmektedir.

Bu özellik şu şekilde genişletilebilir:

Kestirim-hata süzgecinin derecesini arttırdıkça giriş örnekleri arasındaki ilişkiyi azaltabiliriz. Böylece belli bir dereceye ulaşıldığında süzgeç çıkışında tamamen korelasyonsuz (ilişkisiz)

örneklerden oluşan bir dizi elde edilebilir. Böylece süzgeç girişine uygulanan sürecin beyazlatılması sağlanmış olur.



Şekil 8.8 Kaskat Bağlı Beyazlatma ve Renklendirme

9. UYARLAMALI SÜZGEÇLER

Bir uyarlamalı süzgeçte iki temel olay yer alır:

9.1 Uyarlama Süreci

Bu süreçte bir algoritmaya bağlı kalınarak tap-ağırlıklarının otomatik ayarlanması gerçekleştirilir.

9.2 Süzgeç Süreci

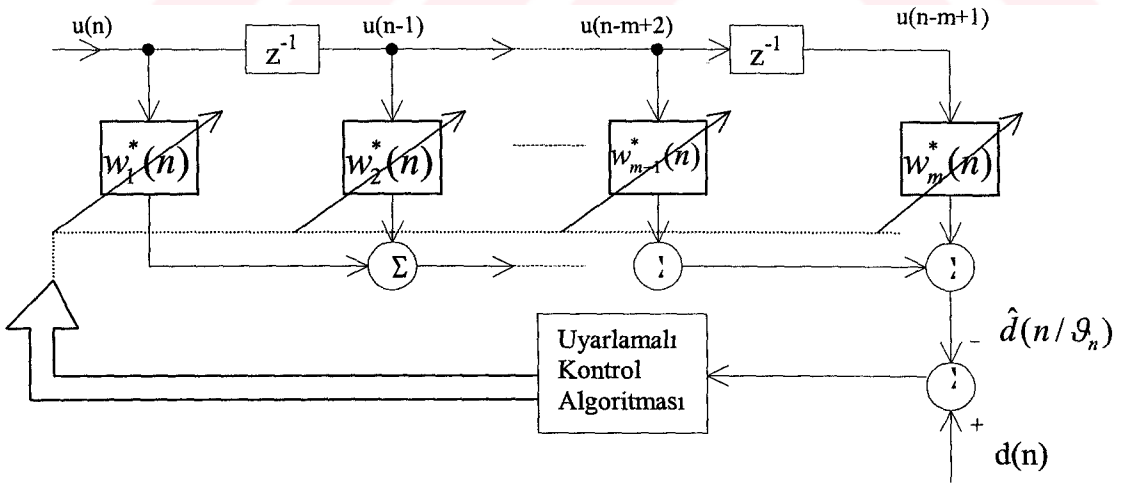
Bu süreçte ise önce istenen değerin bir kestirimini elde etmek amacıyla tap-girişleri ile bunlara karşılık gelen tap-ağırlıkları çarpılır. Daha sonra istenen cevapla elde edilen kestirim arasında karşılaştırma yapılarak hata elde edilir.

Bu kestirim hatası, uyarlama sürecine giriş teşkil ederek geri besleme döngüsünü kapatmış olur.

Uyarlamalı süreçleri gerçekleştirmek için şu ana kadar çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir. Bunların arasında yer alan LMS (En düşük kareler) yöntemi, basitliğiyle öne çıkar , ve ne korelasyon fonksiyonlarının ne de matris tersi işleminin alınmasını gerektirir.

LMS algoritmasının öncesinde en dik azalış (SDA) adıyla bilinen bir optimizasyon algoritmasının tanınmasında yarar vardır. Bu yöntem, hata-performans yüzeyinin kendisini bilmeksizin irtasyonlarla bu yüzeyin en az noktasını bulmayı amaçlamaktadır. SDA, LMS öncesinde bir temel oluşturur.

9.3 Uyarlamalı Süzgeçlerin Yapısı



Şekil 9.1 Uyarlamalı Süzgeç Bloğu

Bir uyarlamalı süzgeç, iki ana kısımdan oluşur:

- 1- n anında değerleri $w_1(n)$, $w_2(n)$, ..., $w_m(n)$ olan ayarlanabilir tap-ağırlıkları
- 2- Bu ağırlıkları uyarlamalı olarak değiştirecek bir mekanizma

Süzme işlemi sırasında, istenen cevap adı verilen $d(n)$ işareti de tap-girişleriyle birlikte süzgece uygulanır.

İstenen cevap, süzgecin ağırlık değerlerini ayarlamak için bir referans teşkil eder.

n anında $\mathbf{u}(n)$ tap giriş vektörüne karşılık gelen istenen cevabın kestirimi $\hat{d}(n/U_n)$ ile gösterilir. Bu gösterimde U_n , tap girişleri $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ ' in gerdiği uzayı temsil eder. Bu kestirim ile istenen değer $d(n)$ 'in gerçek değerini karşılaştırarak $e(n)$ ile gösterilen kestirim hatası tanımlanabilir:

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n/U_n) \quad (9.1)$$

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{u}(n) \quad (9.2)$$

$\mathbf{w}^H(n)\mathbf{u}(n)$; aşağıda tanımlanan $\mathbf{w}(n)$ ile $\mathbf{u}(n)$ 'in iç çarpımıdır.

$$\mathbf{w}^T(n) = [w_1(n) \quad w_2(n) \quad \dots \quad w_M(n)] \quad (9.3)$$

$$\mathbf{u}^T(n) = [u_1(n) \quad u_2(n-1) \quad \dots \quad u_M(n-M+1)] \quad (9.4)$$

Eğer $\mathbf{u}(n)$ ile $d(n)$ karşılıklı durağansa bedel fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$J(n) = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{P} - \mathbf{P}^H\mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n) \quad (9.5)$$

Hata performans yüzeyinin en düşük noktasında tap-ağırlık vektörü optimum değeri olan $\mathbf{w}_0$ 'a ulaşır.

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_0 = \mathbf{P} \quad (9.6)$$

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{P}^H\mathbf{w}_0 \quad (9.7)$$

Durağan bir ortamda çalışan bir uyarlamalı süzgeç için, hata-performans yüzeyi de durağandır ve sabit bir şekle sahiptir. Esas sorun, hata-performans yüzeyi sürekli hareket halinde olan ve şekil itibarıyla da değişim içinde olan, durağan olmayan bir ortamda çalışacak bir uyarlamalı süzgeç tasarlamaktır. Bu nedenle girişler durağan değilse süzgecin görevi yalnızca hata-

performans yüzeyinin en az noktasını bulmak değil, aynı zamanda yüzeyin sürekli değişimini izleyebilmektir.

9.4 En Dik Azalış (Steepest Descent) Yöntemi

Bir uyarlamalı süzgecin yerine getirmesi gereken görev, normal denklemin çözülmesiyle bulunan tap-ağırlık sonucunu sağlamaktır. Bu çözüm her ne kadar direk bir yol olsa da giriş verisi ve tap ağırlıkları çok sayıda değerden oluşuyorsa hesaplamada zorluklar meydana gelmektedir.

Alternatif bir prosedür, Murray tarafından ortaya atılan oldukça eski bir yöntem olan en dik azalış yöntemidir.

Karesel ortalama hatanın ($J_{\min}$) optimum değerini bulabilmek için en dik azalış yöntemi aşağıdaki biçimde ilerler:

1-Tap-ağırlık vektörü $w(0)$ 'a rasgele bir değer atılarak algoritma başlatılır. $w(0)$ 'ın değeri, hata-performans yüzeyinin en az noktasının olabileceği yerin anlık kestirimini belirtir. Tipik olarak bu değer sıfır vektörü olarak seçilir.

2- Bu anlık kestirimi kullanarak karesel ortalama hata $J(n)$ 'in gradienti olarak tanımlanan gradient vektörü hesaplanır.

3- Bir önceki adımda belirlenen ağırlık vektörü $w(n)$, gradient vektöründe ters yönde güncellenir.

4-İkinci adıma geri dönülür ve işlemler tekrarlanır:

Ağırlık vektörünün gradient vektörüne ters yönde yani hata-performans yüzeyi üzerinde en dik biçimde azalacak şekilde güncellenerek tap-ağırlık vektörünün optimum noktasına ulaştığı en düşük karesel hata $J_{\min}$ 'e ulaşılmış olur.

$\nabla(n)$, n anında gradient vektörünü gösterebilir. En dik azalış yöntemine göre $n+1$ anındaki ağırlık vektörü aşağıdaki gibi basit bir iterasyonla bulunur:

$$w(n+1) = w(n) + \frac{1}{2} \mu [-\nabla(n)] \quad (9.8)$$

Bu ifadede μ pozitif reel-değerli bir sabit sayıdır.

Karesel ortalama hata fonksiyonu (bedel fonksiyonu) $J(n)$ 'in tap-ağırlık vektörü $w(n)$ 'e göre türevini alarak gradient vektörünü aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n) \quad (9.9)$$

En dik azalış algoritmasının uygulaması için, korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ ve karşı korelasyon vektörü $\mathbf{P}$ 'nin değerlerinin bilindiği varsayılır ve böylelikle elimizde olan ağırlık vektörünün n anındaki değeri için gradient vektörü $\nabla(n)$ hesaplanır.

Böylece (9.9) nolu eşitliği (9.8) de yerine koyarak güncellenmiş ağırlık vektörünün değerini hesaplayabiliriz:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu [\mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

Açıkça görülmektedir ki bir iterasyondan diğerine ilerlerken ağırlık vektörüne ne kadar büyük bir düzeltme uygulanacağını kontrol eden parametre μ dür.

Bu yüzden μ 'ye adım büyüklüğü ya da ağırlaştırma sabiti denir. (9.10) nolu eşitlik en dik azalış yönteminin matematiksel formülasyonunu gösterir.

9.5 En Dik Azalış Yönteminin Özeti

1-Tap-ağırlık vektörü $\mathbf{w}(0)$ 'a anlık bir değer atıyarak algoritma başlatılır.

2-Gradient vektörü $J(n)$ hesaplanır.

3-Ağırlık vektörü $\mathbf{w}(n)$ güncellenir.

4-İkinci adıma geri dönülür ve işlemler tekrarlanır:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}(n) \quad (9.11)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \mu [-\nabla(n)] \quad (9.12)$$

$$= \mathbf{w}(n) + \mu [\mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)] \quad (9.13)$$

9.6 En Dik Azalış Yönteminin Kararlılığı

En dik azalış algoritmasının kararlılık koşulunu belirlemek için algoritmanın doğal modlarını belirlememiz gerekir:

n anındaki ağırlık-hata vektörü: $\mathbf{c}(n) = \mathbf{w}(n)\mathbf{w}_o$

$\mathbf{c}(n+1)$ 'i bulmak için yukarıdaki tanımı kullanalım:

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \mathbf{c}(n) \quad (9.14)$$

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) \mathbf{w}_0 \quad (9.15)$$

$$\mathbf{c}(n+1) = [\mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{P} - \mu \mathbf{R} \mathbf{w}(n)] \mathbf{w}_0 \quad (9.16)$$

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{w}(n) \mathbf{w}_0 + \mu \mathbf{P} \mathbf{w}_0 - \mu \mathbf{R} \mathbf{c}(n) \quad (9.17)$$

$$= \mathbf{c}(n) - \mu \mathbf{R} \mathbf{c}(n) \quad (9.18)$$

Böylece ağırlık-hata vektörünün güncellenmesi için aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur:

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \mathbf{c}(n) \quad (9.19)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H$ olduğunu düşünerek aşağıdaki düzenlemeyi yapabiliriz:

$$\mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H) \mathbf{c}(n) \quad (9.20)$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki yanını da $\mathbf{Q}^H$ ile çarpıp üniter matris özelliğini $\mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1}$ kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz:

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{Q}^H \mathbf{I} - \mu \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H) \mathbf{c}(n) \quad (9.21)$$

$$= (\mathbf{Q}^H - \mu \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H) \mathbf{c}(n) \quad (9.22)$$

$$= (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n) \quad (9.23)$$

Artık yeni bir koordinat kümesine göre aşağıdaki eşitlikleri tanımlayabiliriz:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n) \quad (9.24)$$

$$= \mathbf{Q}^H [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_0] \quad (9.25)$$

$\mathbf{v}(n)$ 'in güncellenmesi için izlenecek yol aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n); \quad (9.26)$$

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{c}(n) = \mathbf{v}(n) \quad (9.27)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{v}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}) \mathbf{v}(n)} \quad (9.28)$$

$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ alınarak $\mathbf{v}(n)$ 'in başlangıç değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{Q}^H [\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_o] \quad (9.29)$$

$$\mathbf{v}(0) = -\mathbf{Q}^H \mathbf{w}_o \quad (9.30)$$

En dik azalış algoritmasının doğal modu aşağıdaki gibidir:

$$v_k(n+1) = (1 - \mu \lambda_k) v_k(n) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (9.31)$$

λ_k , korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ 'nin k ncı öz değeridir.

$$v_k(1) = (1 - \mu \lambda_k) v_k(0) \Rightarrow \quad (9.32)$$

$$v_k(2) = (1 - \mu \lambda_k) v_k(1) = (1 - \mu \lambda_k)^2 v_k(0) \quad (9.33)$$

Böylece aşağıdaki genel kurala erişilmiş olur:

$$v_k(n) = (1 - \mu \lambda_k)^n v_k(1) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (9.34)$$

Korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ 'nin tüm öz değerleri pozitif ve gerçel olduğu için $v_k(n)$ osilasyon yapmayacaktır. En dik azalış algoritmasının kararlılığı ya da yakınsaklığı için, bu geometrik oranın genliği tüm k lar için 1'den küçük olmalıdır.

$$|1 - \mu \lambda_k| < 1 \Rightarrow \quad (9.35)$$

$$-1 < 1 - \mu \lambda_k < 1 \Rightarrow \quad (9.36)$$

$$0 < 2 - \mu \lambda_k < 2 \Rightarrow \quad (9.37)$$

$$0 < \mu \lambda_k < 2 \quad (9.38)$$

Bu eşitsizlikten şu sonuç çıkarılabilir:

En dik azalış algoritmasının yakınsaklığı ya da kararlılığı için gerek ve yeter koşul aşağıdaki gibidir:

$$\boxed{0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}} \quad (9.39)$$

$\lambda_{\max}$, korelasyon matrisinin en büyük öz değerini gösterir.

Orijinal tap-ağırlık vektörü $\mathbf{w}(n)$ 'nin transient davranışını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}^H [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o]$$
 olduğunu biliyoruz.

Eşitliğin her iki tarafını da $\mathbf{Q}$ ile çarpıp $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H = \mathbf{I}$ gerçeğini kullanıp eşitliği $\mathbf{w}(n)$ için çözerek istenen sonuca ulaşmak mümkündür:

$$\mathbf{Q}\mathbf{v}(n) = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^H [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o] \quad (9.40)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_o \quad (9.41)$$

$$\boxed{\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_o + \mathbf{Q}\mathbf{v}(n)} \quad (9.42)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_o + [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_M] \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_M(n) \end{bmatrix} \quad (9.43)$$

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_o + \sum_{k=1}^M \mathbf{q}_k v_k(n) \quad (9.44)$$

$$v_k(n) = (1 - \mu\lambda_k)v_k(0) \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Bundan yola çıkarak i inci tap-ağırlığının transient davranışını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$v_i(n) = w_{oi} + \sum_{k=1}^M q_{ki} v_k(0) (1 - \mu\lambda_k)^n, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.45)$$

Burada w_{oi} i inci tap-ağırlığının optimum değeri olup q_{ki} ise k inci öz vektörün i inci elemanıdır.

9.7 Karesel Ortalama Hata

Herhangi bir n anında karesel ortalama hatanın aşağıdaki gibi olduğunu belirtmiştik:

$$J(w) = \sigma d^2 - \mathbf{P}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H \mathbf{R} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (9.46)$$

$$= J_{\min} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H \mathbf{R} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (9.47)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H; \quad (9.48)$$

$$J = J_{\min} + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^H \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (9.49)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}^H (\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) \quad (9.50)$$

$$J = J_{\min} + \mathbf{v}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{v} \quad (9.51)$$

$$= J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k v_k v_k \quad (9.52)$$

$$= J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k |v_k|^2 \quad (9.53)$$

$$v_k(n) = (1 - \mu \lambda_k)^n v_k(0) \quad (9.54)$$

ifadesini yukarıdaki eşitlikte yerine koyarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$J(n) = J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k (1 - \mu \lambda_k)^{2n} |v_k(0)|^2 \quad (9.55)$$

SDA yakınsak olduğu zaman, yani adım büyüklüğü μ tanımlanan aralıkta seçildiğinde, başlangıç koşullarından bağımsız olarak en düşük karesel hataya algoritma mutlaka ulaşacaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(n) = J_{\min} \quad (9.56)$$

Karesel ortalama hata $J(n)$ (mse) 'nin iterasyon sayısı n 'ye bağlı olarak çizdirilmesiyle elde edilen eğriye öğrenme eğrisi denir.

Yukarıdaki eşitlikten SDA'nın öğrenme eğrisinin her biri algoritmanın bir doğal moduna karşılık gelen exponensiyellerin toplamından oluştuğu görülmektedir. Genel olarak başlangıç değeri $J(0)$ 'dan son değer $J_{\min}$ 'e gidilirken k ıncı doğal mod için exponensiyel bozulma aşağıdaki zaman sabitine sahiptir:

$$\tau_{k,mse} \approx -\frac{1}{2(n-(1-\mu\lambda_k))}; \quad (9.57)$$

Küçük μ değerleri için bu ifade yaklaşık olarak şöyledir:

$$\tau_{k,mse} \approx \frac{1}{2\mu\lambda_k} \quad (9.58)$$

9.8 Örnek

Bu örnekte, gerçel değerli bir AR sürecini işleyen kestirimciye uygulanan SDA'nın transient davranışını incelemekteyiz. Kestirimci, $w_1(n)$ ve $w_2(n)$; olmak üzere iki tap ağırlığına sahip olup bu tap-ağırlıklarının zamana (n) bağımlılıkları kestirimcinin transient davranışını gösterir. İkinci dereceden fark denklemiyle tanımlanan AR süreci $\{u(n)\}$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) = v(n) \quad (9.59)$$

$v(n)$, sıfır ortalamalı, σ_v^2 değişintisine sahip beyaz gürültüden elde edilmiş bir süreçtir.

AR parametreleri a_1 ve a_2 , karakteristik denklemin köklerine eşit olacak şekilde seçilmiştir:

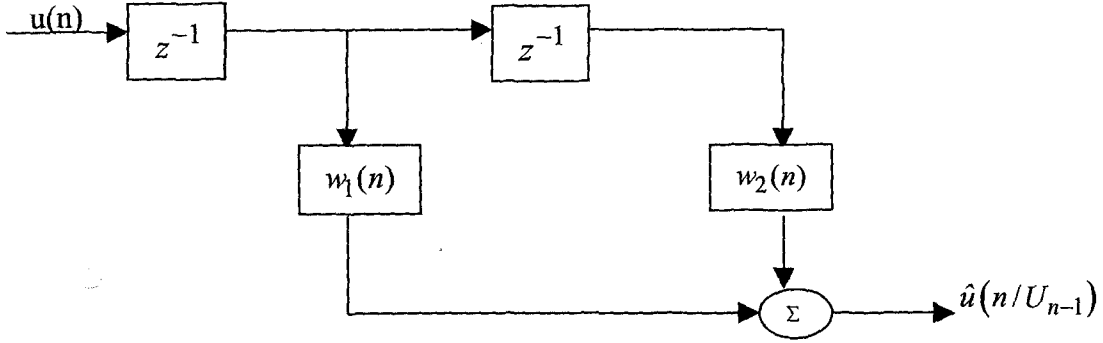
$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0; \quad a_1^2 < 4a_2 \quad (9.60)$$

a_1 ve a_2 'ye atanan özel değerler, öz değer dağılımı $x(R)$ ile belirlenmiştir. Bu a_1 ve a_2 için beyaz gürültünün değişintisi σ_v^2 $\{u(n)\}$ sürecinin değişintisini 1'e eşitliyecek şekilde seçilmiştir. $\sigma_u^2 = 1$

Burada yapılması gereken iş, aşağıdaki iki duruma göre SDA'nın transient davranışını belirlemektir:

1-Değişen öz değer dağılımı $x(R)$ ve sabit adım büyüklüğü μ

2-Değişen adım büyüklüğü μ ve sabit öz değer dağılımı $x(R)$



Şekil 9.2 İkinci Dereceden Uyarlamalı Süzgeç

Adımlar:

1- AR sürecinin karakterizasyonu:

$$R = \begin{pmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{pmatrix} ; r(0) = \sigma_u^2 ; r(1) = -\frac{a_1}{1+a_2} \sigma_u^2 \quad (9.61)$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1+a_2}{1-a_2} \right) \frac{\sigma_u^2}{(1+a_2)^2 - a_1^2} \quad (9.62)$$

$$\lambda_1 = \left(1 - \frac{a_1}{1+a_2} \right) \sigma_u^2 ; \lambda_2 = \left(1 + \frac{a_1}{1+a_2} \right) \sigma_u^2 \quad (9.63)$$

$$x(R) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1-a_1+a_2}{1+a_1+a_2} \quad (9.64)$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

2- $\mu = 0.3$;

$$v(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\mu\lambda_1)^n v_1(0) \\ (1-\mu\lambda_2)^n v_2(0) \end{bmatrix} \quad (9.66)$$

İki taplı kestirimci optimize edildiğinde optimum tap-ağırlık vektörünü aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$w_0 = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \text{ ve } J_{\min} = \sigma_u^2$$

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad J_{\min} = \sigma_u^2$$

$$v(0) = -\mathbf{Q}^H \mathbf{w}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix} \text{ olduğunu biliyoruz}$$

$$J(n) = J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k |v_k(n)|^2 \quad (9.67)$$

olduğunu biliyorduk.

Ele aldığımız örnekte;

$$J(n) - J_{\min} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k |v_k(n)|^2 \quad (9.68)$$

$$J(n) - J_{\min} = \lambda_1 |v_1(n)|^2 + \lambda_2 |v_2(n)|^2 \quad (9.69)$$

olacaktır.

3-

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_0 + \sum_{k=1}^M \mathbf{q}_k v_k(n) = \begin{bmatrix} w_1(n) \\ w_2(n) \end{bmatrix} \quad (9.70)$$

olduğunu biliyorduk.

Buna göre $\mathbf{w}(n)$ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mathbf{w}(n) = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} + \mathbf{q}_1 v_1(n) + \mathbf{q}_2 v_2(n) \quad (9.71)$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} v_2(n) \\ -v_2(n) \end{bmatrix} \quad (9.72)$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 + (v_1(n) + v_2(n)) / \sqrt{2} \\ -a_2 + (v_1(n) - v_2(n)) / \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

9.9 Deneyler

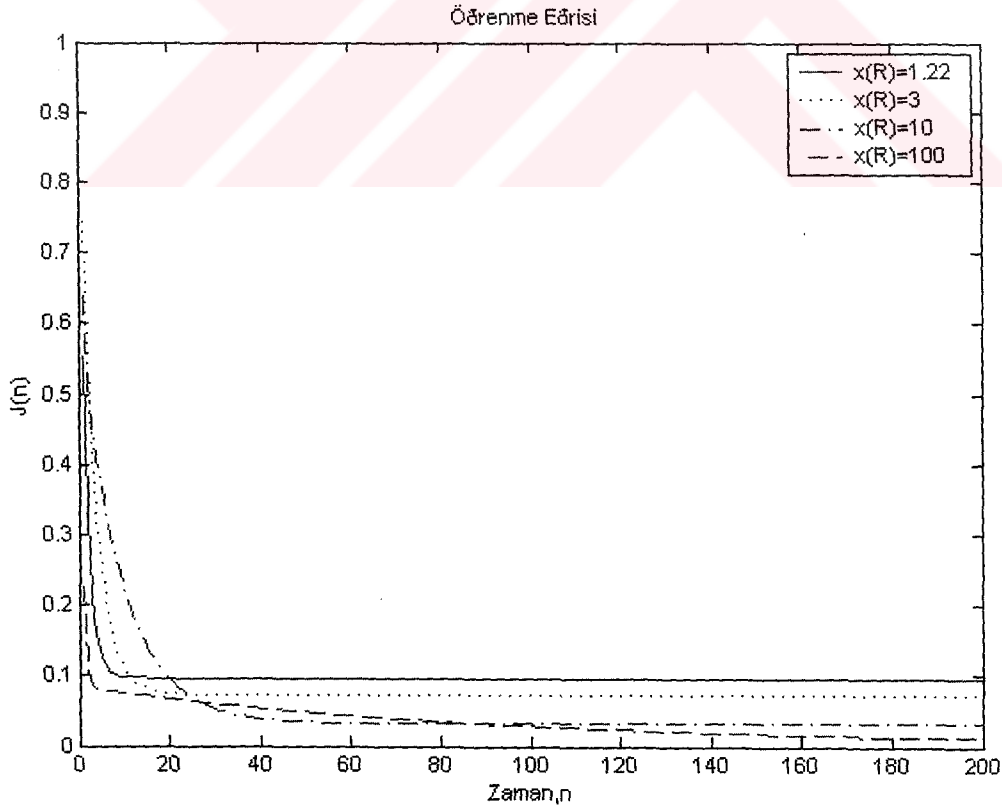
9.9.1 1. Deney: Değişen Öz Değer Dağılımının Algoritmaya Etkisi

Bu deneyde, adım büyüklüğü μ 'ye 0.3 değeri atanmıştır. Deneyler aşağıda verilen 4 AR veri kümesi için gerçekleştirilmiştir.

Çizelge 9.1 Deneyde Kullanılan Parametreler

	AR Parametreleri		Öz Değer		Öz Değer Dağılımı	En Düşük Karesel Ortalama Hata
Durum	a_1	a_2	λ_1	λ_2	$x = \lambda_1 / \lambda_2$	$J_{\min} = \sigma_v^2$
1	-0.1950	0.95	1.1	0.9	1.22	0.0965
2	-0.9750	0.95	1.5	0.5	3	0.0731
3	-1.5955	0.95	1.818	0.182	10	0.0322
4	-1.9114	0.95	1.957	0.0198	100	0.0038

Karesel ortalama hata $J(n)$ 'i n 'ye bağılı olarak yukarıda verilen birbirinden farklı öz değer dağılımları için çizdirdiğimde öz değer dağılımı arttıkça yani giriş süreci daha korelasyonlu hale geldikçe en düşük karesel ortalama hata $J_{\min}$ 'in düştüğünü gördüm. Bu teoriyi doğrulayan gayet mantıklı bir durumdu. Kestirimci, daha yüksek korelasyonlu bir süreci, daha düşük korelasyonlu bir sürece göre daha doğru kestirir.



Şekil 9.3 Değişen Öz Değer Dağılımının En Dik Azalış Algoritmasına Etkisi

Katsayılar:

$$a1=-0.195000$$

$$a2=0.950000$$

$$\text{varyans}=0.096500$$

Öz Degerler:

$$L1=1.099715$$

$$L2=0.899767$$

Öz Deger Dagilimi:

$$L1/L2=1.222222$$

Son Ağırılıklar:

$$0.195000$$

$$-0.950000$$

Katsayılar:

$$a1=-0.975000$$

$$a2=0.950000$$

$$\text{varyans}=0.073100$$

Öz Degerler:

$$L1=1.499487$$

$$L2=0.499829$$

Öz Deger Dagilimi:

$$L1/L2=3.000000$$

Son Ağırılıklar:

$$0.975000$$

$$-0.950000$$

Katsayılar:

$a_1 = -1.595500$

$a_2 = 0.950000$

$\text{varyans} = 0.032200$

Öz Degerler:

$L_1 = 1.816643$

$L_2 = 0.181639$

Öz Deger Dagilimi:

$L_1/L_2 = 10.001410$

Son Ağırlıklar:

1.595483

-0.949983

Katsayılar:

$a_1 = -1.911400$

$a_2 = 0.950000$

$\text{varyans} = 0.003800$

Öz Degerler:

$L_1 = 1.968912$

$L_2 = 0.019682$

Öz Deger Dagilimi:

$L_1/L_2 = 100.036269$

Son Ağırlıklar:

1.473715

-0.512315

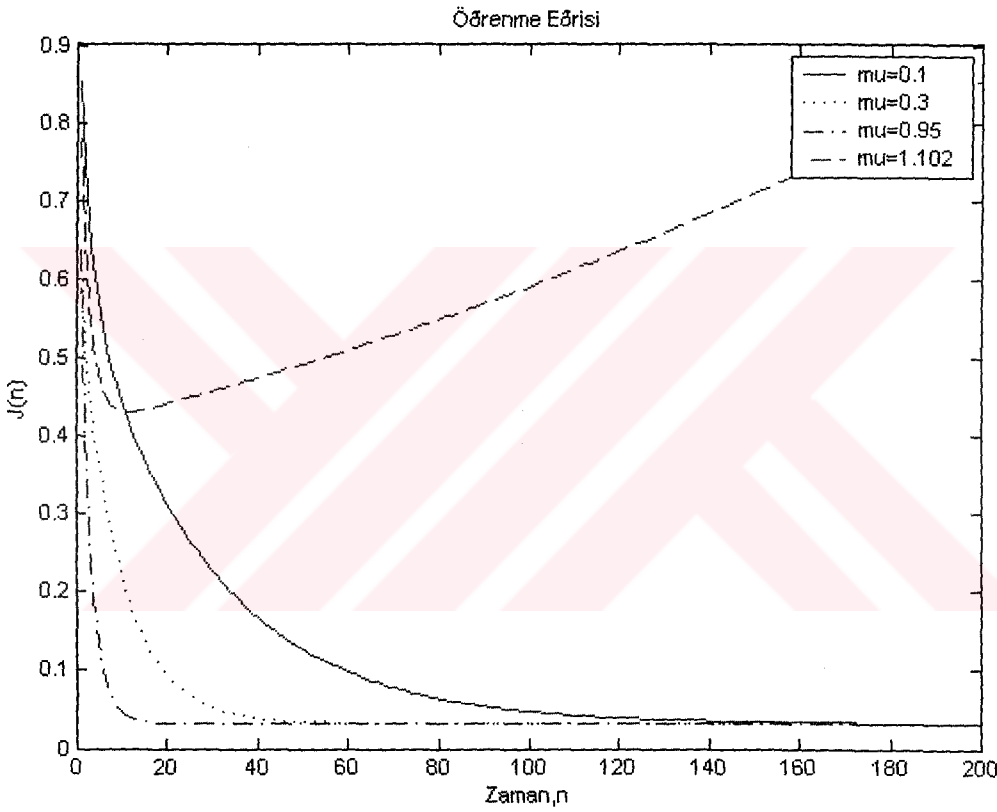
9.9.2 2. Deney:Değişen Adım Büyüklüğünün Algoritmaya Etkisi

Bu deney, öz değer dağılımı $x(R)=10$ alınıp adım büyüklüğü μ ise değiştirilerek gerçekleştirilmiştir.

Adım büyüklüğü arttıkça öğrenme eğrisinin aşağıdaki koşul altında en düşük değerine daha hızlı bir şekilde ulaştığı gözlenmiştir.

$$\mu < \mu_{\max} = \frac{2}{\lambda_{\max}} = 1.100932$$

Eğer μ yukarıdaki sınırı aşarsa algoritma aşağıda görüldüğü gibi hiç yakınsamaz.



Şekil 9.4 Değişen Adım Büyüklüğünün En Dik Azalış Algoritmasına Etkisi

Katsayılar:

$a1=-1.595500$

$a2=0.950000$

varyans=0.032200

Öz Degerler:

$L1=1.816643$

$$L2=0.181639$$

Öz Deger Dagilimi:

$$L1/L2=10.001410$$

Yakınsama Koşulu:

$$\mu < 1.100932 = (2/L_{\max})$$

$\mu=1.102$ İçin Son Ağırlıklar:

$$1.119863$$

$$-1.425637$$

>>

9.10 En Küçük Kareler (LMS)Uyarlama Algoritması

En dik azalış algoritmasının özetiyle başlayalım:

-En dik azalış algoritmasında tap-ağırlık vektörüne $\mathbf{w}(0)$ gibi bir başlangıç değeri atanır.

-Daha sonra ise $J(n)$ 'in gradient vektörü aşağıdaki yöntemle hesaplanır:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = \frac{\partial (\sigma_d^2 - \mathbf{w}^H(n)\mathbf{P} - \mathbf{P}^H\mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^H(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n))}{\partial \mathbf{w}(n)} \quad (9.74)$$

$$\nabla(n) = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} \quad (9.75)$$

-Ağırlık vektörü aşağıdaki yöntemle güncellenir:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \mu [-\nabla(n)] \quad (9.76)$$

$$= \mathbf{w}(n) + \mu [-\mathbf{P} - \mathbf{R}\mathbf{w}(n)] \quad (9.77)$$

Yukarıdaki özetle görüldüğü gibi en dik azalış algoritmasında korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ ile karşı korelasyon vektörü $\mathbf{P}$ algoritmanın başında hesaplanmaktadır. Güncelleme yalnızca ağırlık vektörü $\mathbf{w}$ için söz konusudur.

Eğer her iterasyonda gradient vektörünü doğru bir biçimde ölçmek gerçekten mümkün olsaydı uygun bir adım büyüklüğü ile optimum Wiener çözümüne en dik azalış algoritmasıyla ulaşılabilirdi.

Fakat gerçekte gradient vektörünün gerçek ölçümlerinin yapılması olanaksızdır, ve bu değer eldeki veriden kestirilmelidir. Bunu yapan algoritmalarından birisi LMS (en küçük kareler) algoritmasıdır. LMS algoritmasının en önemli özelliklerinden birisi basitliği olup karmaşık korelasyon fonksiyon hesapları gerektirmediği gibi matris tersi işlemini de gerektirmez.

Gradient vektörü $\nabla(n)$ 'nin kestirimini yapmak için izlenmesi gereken yöntem hiç kuşkusuz $\nabla(n) = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{w}$ denkleminde korelasyon matrisi $\mathbf{R}$ ve karşı korelasyon vektörü $\mathbf{P}$ 'nin yerine bunların kestirimlerini koymaktır.

$\mathbf{R}$ ve $\mathbf{P}$ 'nin kestirimlerini elde etmek için en basit yol aşağıda tanımlandığı gibi tap-giriş vektörü ve istenen cevaba dayalı anlık tahminleri kullanmaktır:

Korelasyon matrisinin gerçek ölçümü $\mathbf{R} = E[\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)]$ yerine anlık kestirim

$$\hat{\mathbf{R}}(n) = \mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n) ; \quad (9.78)$$

Karşı korelasyon vektörünün gerçek ölçümü $\mathbf{P} = E[\mathbf{u}(n)d^*(n)]$ yerine anlık kestirim:

$$\hat{\mathbf{P}}(n) = \mathbf{u}(n)d^*(n) \quad (9.79)$$

Buna göre gradient vektörünün anlık kestirimi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\nabla}(n) = -2\mathbf{u}(n)d^*(n) + 2\mathbf{u}(n)\mathbf{u}^H(n)\hat{\mathbf{w}}(n) \quad (9.80)$$

Endik azalış algoritmasından bahsedildiği üzere ağırlıklar da aşağıda belirtildiği gibi güncellenir:

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \frac{1}{2}\mu[-\hat{\nabla}(n)] \quad (9.81)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{u}(n)[d^*(n) - \mathbf{u}^H(n)\hat{\mathbf{w}}(n)] \quad (9.82)$$

Böylece elde edilen sonucu aşağıdaki denklem çifti ile ifade edebiliriz:

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n)\mathbf{u}(n) \quad (9.83)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{u}(n) e^*(n) \quad (9.84)$$

$e(n)$ kestirim hatasını gösterir ve alacağı değer tap-ağırlık vektörü kestirimi $\hat{\mathbf{w}}(n)$ 'in değerine bağlıdır.

İteratif prosedür, anlık tahmin $\hat{\mathbf{w}}(0)$ ile başlatılır. Bu değer için uygun bir seçim null vektördür:,

$$\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0} \quad (9.85)$$

İlk bakışta anlık kestirimlere dayandığı için LMS algoritmasının iyi bir performans gösteremeyeceği düşünülse de LMS algoritması yapı olarak yinelemelidir ve bunun sonucunda uyarılama süresi boyunca LMS bu tahmini değerleri ortalama ve istenilen performansa ulaşılmasını sağlar.

Burada anlatıldığı biçimde LMS algoritmasının çıkarılışı en dik azalış algoritmasına bir yakınsama olarak görülebilir.

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n) \mathbf{u}(n) \quad (9.86)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{u}(n) e^*(n) \quad (9.87)$$

$$J(n) = J_{ex}(n) + J_{\min} \quad (9.88)$$

$J(n)$:Karesel ortalama hatanın ensemble - ortalaması

$E[J(n)]$ 'in n 'ye bağlı olarak çizdirilmesiyle elde edilen eğriye LMS algoritmasının ensemble-ortalama öğrenme eğrisi denir.

$$E[J(n)] = J_{\min} + E[J_{ex}(n)] \quad (9.89)$$

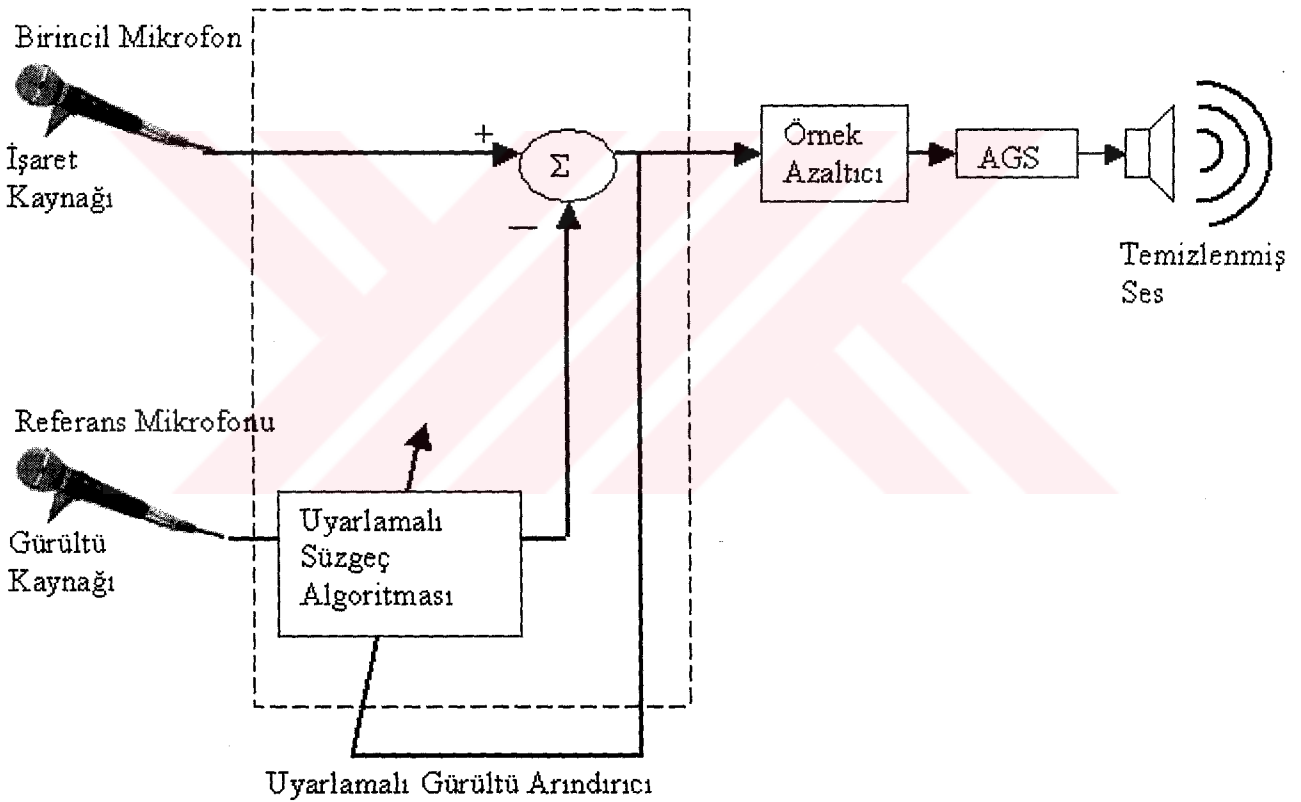
$J_{ex}(n)$; ek karesel ortalama hatayı temsil eder ve karesel ortalama hata $J(n)$ ile n anında algoritmanın ürettiği en düşük hata $J_{\min}$ arasındaki fark olarak tanımlanır.

10. UYARLAMALI GÜRÜLTÜDEN ARINDIRICI

10.1 Genel

İsminden de anlaşılacağı üzere uyarlamalı gürültüden arındırma işlemi, alınan bir işareten uyarlamalı algoritmalar yardımıyla gürültüyü çıkararak işaret/gürültü oranını arttırmayı amaçlamaktadır. Rasgele bir bakış açısıyla ortaya atılabilecek gürültüyü alınan işareten direk olarak çıkarma fikri çıkış gürültüsünün gücünü daha da arttırarak çok kötü bir sonuç verebilir. Fakat uygun koşullar altında süzme işlemi uyarlamalı olarak kontrol edildiği takdirde direk süzmeye göre çok daha iyi bir performans elde edilebilir.

Temel olarak bir uyarlamalı gürültü arındırıcı, aşağıda görüldüğü gibi çift girişli, kapalı, uyarlamalı bir geri besleme sistemidir. Sistemin girişleri birincil sensör ve referans sensöründen elde edilir.



Şekil 10.1 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Blok Diyagramı

Yukarıdaki sistemde referans mikrofonunun işaret kaynağından yeterince uzağa yerleştirilmiş olması gerekmektedir. Bu sayede referans mikrofonunun çıkışından yalnızca gürültü elde edilecektir. Uyarlamalı algoritma olarak LMS ya da NLMS (Normalize LMS) kullanılabilir.

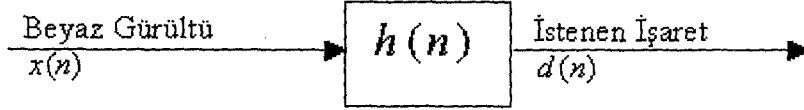
10.2 Normalize En Küçük Kareler Yöntemi

NLMS algoritması, LMS algoritmasına göre daha hızlı bir yakınsama grafiğine sahiptir.

Bu yüzden yukarıdaki sistemde LMS yerine NLMS algoritmasını kullanmayı tercih etmekteyim. LMS algoritmasıyla NLMS algoritmasını karşılaştırmak için aşağıdaki belirttiğim iki deneyi yaptım:

10.2.1 Deney 1

LMS ve NLMS algoritmalarına referans teşkil etmeleri amacıyla girişine rasgele işaret verilen bir süzgeç kullanıyorum. Bu süzgeç, girişe belli katsayıları uygulayarak çıkışında istenen işaret olarak adlandırdığım bir işaret üretiyor.

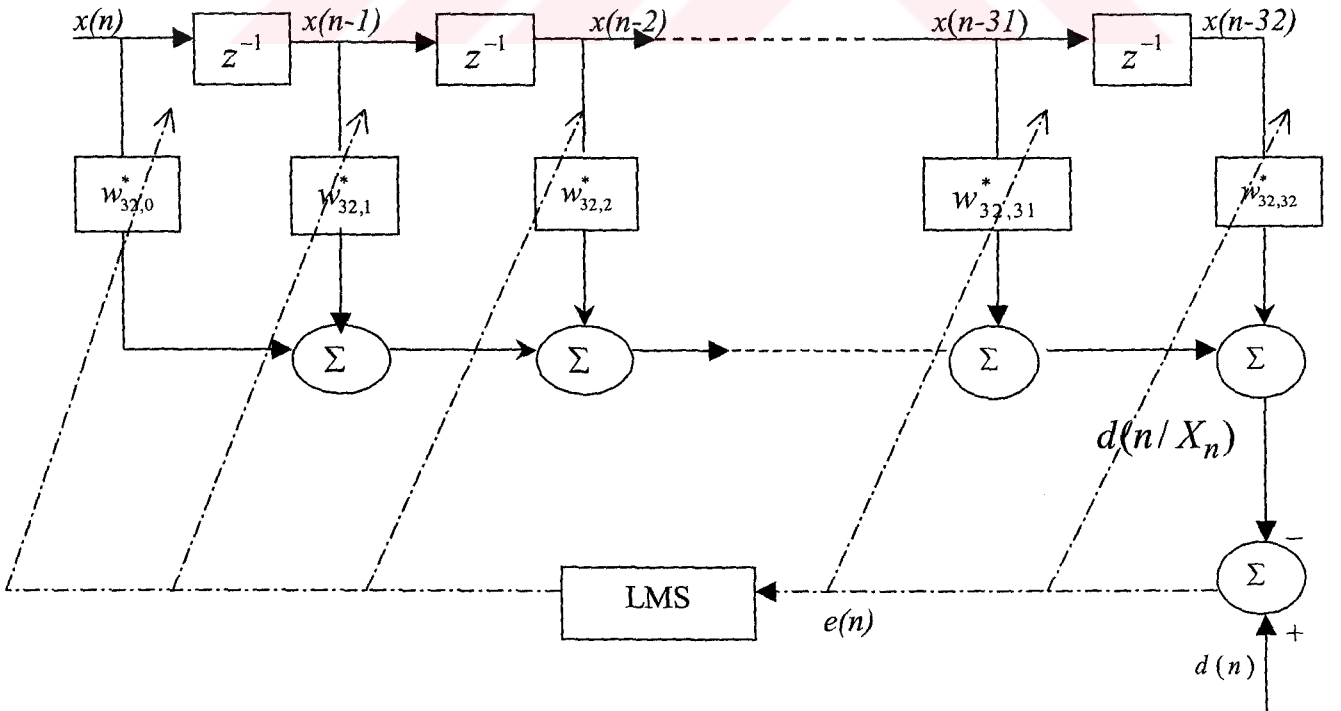


Şekil 10.2 LMS Algoritması Deneyinde Kullanılacak İşaret Üretici Bloğu

Yukarıda görülen sistemde girişine beyaz gürültü uygulanan süzgeç, çıkışta $d(n)$ işaretini üretmektedir.

İkinci bir sistemde ise LMS algoritmasıyla çalışan bir uyarlamalı süzgeç kullanıyorum ve yukarıdaki süzgecin çıkışını istenen işaret olarak kullanıp uyarlamalı LMS süzgecinin $h(n)$ impuls yanıtına yakınsamasını amaçlıyorum.

Bu amaçla kullandığım sistemin blok diyagramı aşağıdaki gibidir:

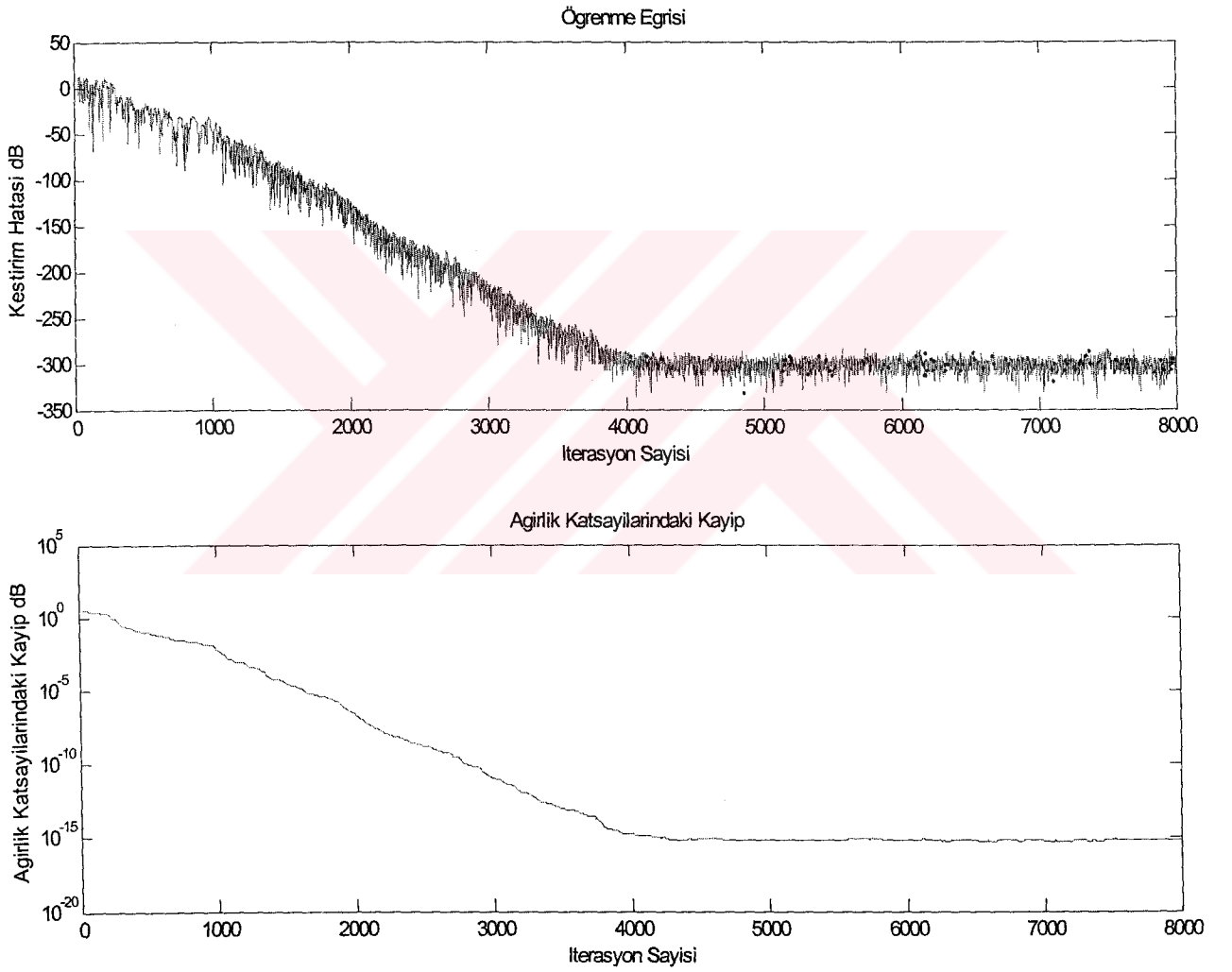


Şekil 10.3 LMS Algoritmasıyla Çalışan Uyarlamalı Süzgeç

Yukarıdaki uyarlamalı süzgecin görevi, her adımda $e(n)$ ile gösterilen hata işaretini küçültürerek süzgeç çıkışı $d(n/X_n)$ istenen işarete $d(n)$ yakınsatmaktır. Uyarlama sürecinin sonunda $\mathbf{w}(n)$ katsayı vektörünün de $\mathbf{h}(n)$ birim impuls yanıtına yakınsaması beklenir. Adım büyüklüğünü 0.01 seçip aşağıdaki eşitliklerle sistemin programını yazarak aşağıda verilen grafikler elde edilmiştir:

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n)\mathbf{x}(n) \quad (10.1)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \mu \mathbf{x}(n)e^*(n) \quad (10.2)$$



Şekil 10.4 LMS Algoritmasının Öğrenme Eğrisi

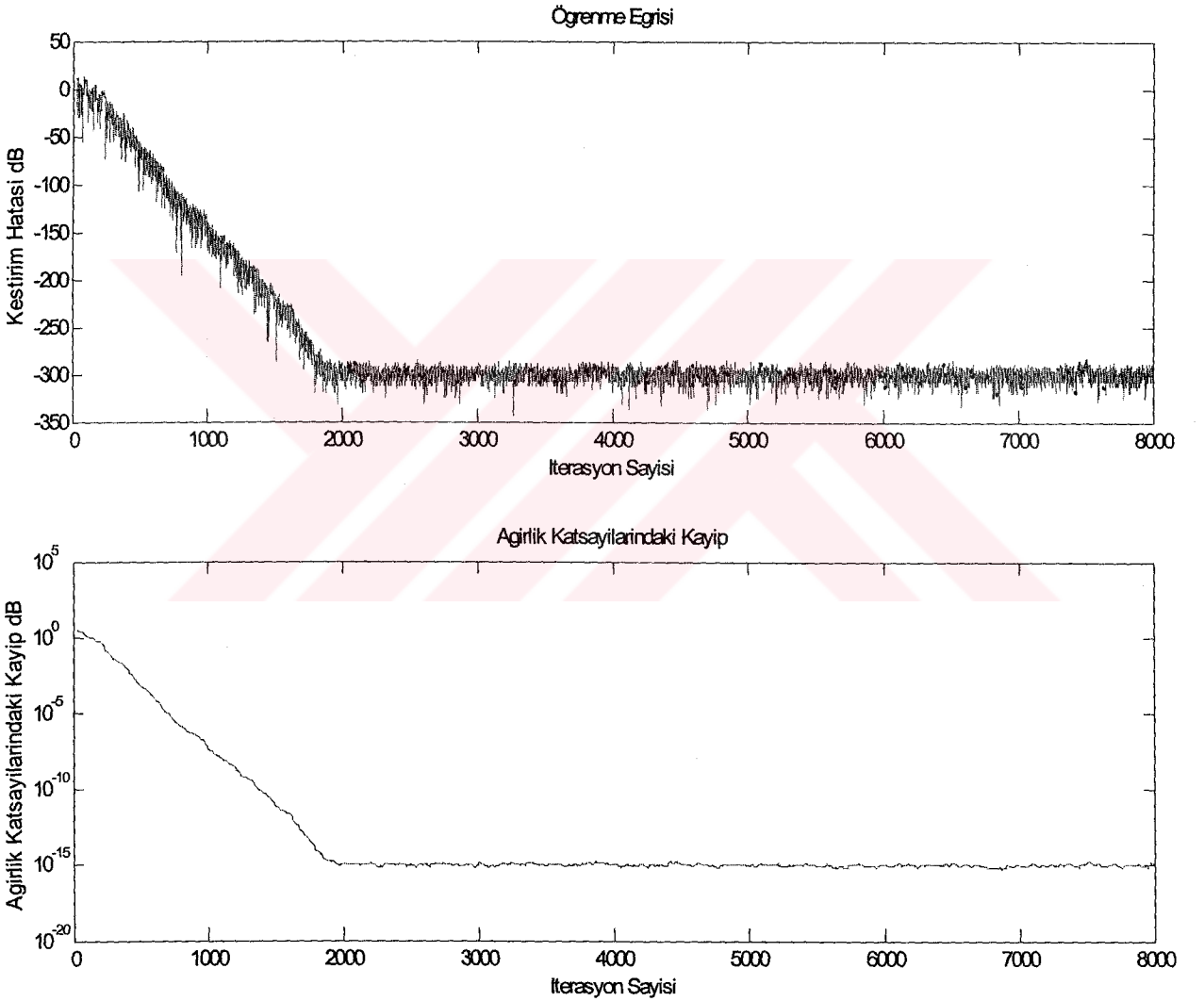
Yukarıda görüldüğü gibi algoritma 0.01 adım büyüklüğü için 4000 iterasyondan sonra yakınsamıştır.

10.2.2 Deney 2

Yukarıdaki sistemde LMS yerine aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan NLMS algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^H(n)\mathbf{x}(n) \quad (10.3)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu e(n)\mathbf{x}(n-i)}{\sum_{i=0}^N \mathbf{x}^2(n-i)} \quad (10.4)$$

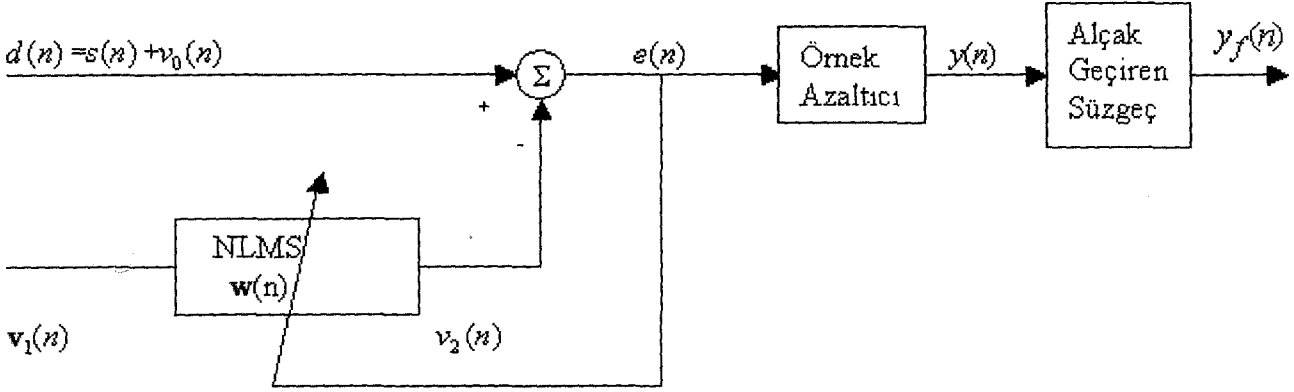


Şekil 10.5 NLMS Algoritmasının Öğrenme Eğrisi

Yukarıdaki deneyde adım büyüklüğü 1 alınmış ve algoritma yaklaşık 2000 iterasyonda yakınsamıştır. Bu da LMS algoritmasının hemen hemen 2 katı bir hıza eşittir. NLMS algoritmasının LMS algoritmasına göre avantajı böylece gösterilmiş olur.

10.3 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminin Yapısı

Aşağıda uyarlamalı gürültü temizleme için kullanılan sistemin blok diyagramı görülmektedir:



Şekil 10.6 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminin Yapısı

$s(n)$: Gürültüden arındırılmış işaret

$v_0(n)$: Bilinmeyen gürültü

$d(n)$: Gürültü ve temiz işaretin kombinasyonundan oluşan kayıt işareti

$w(n)$: Uyarlamalı süzgeç katsayıları

$e(n)$: Çıkış işareti

$v_1(n)$: Referans gürültüsü

$v_2(n)$: Uyarlamalı süzgeç çıkışı

Bu sistemde amaç $d(n)$ işaretinin içindeki $v_0(n)$ gürültüsüne yakınsayan bir gürültü elde etmektir. Bu sayede bilinmeyen $v_2(n)$ ile ona yakınsayarak elde edilen gürültü işaretinin birbirinden çıkarılmasıyla $d(n)$ in içindeki temiz işaret elde edilmiş olacaktır. Bu amaçla $v_1(n)$ referans gürültüsü kullanılmaktadır. Uyarlamalı süzgecin her iterasyonunda $v_2(n)$, $v_0(n)$ 'e biraz daha yakınsıyacak ve algoritma yeterli sayıda iterasyondan sonra çıkışta gürültüden arındırılmış işaretin elde edilmesini sağlayacaktır.

$$e(n) = d(n) - v_2(n) \quad (10.5)$$

$$e(n) = s(n) + v_0(n) - v_2(n) \quad (10.6)$$

$e(n)$, hata işareti olup şaşırtıcı görünse de uyarlama sonunda temiz işaret temsil edecektir. Algoritmanın yakınsaması ve süzgeç çıkışındaki $v_0(n) - v_2(n)$ farkı her iterasyonda küçülmeli ve böylelikle süzgeç katsayıları her seferinde hatayı küçültecek yönde güncellenmelidir.

Bunun için sistem çıkışındaki hatanın karesel ortalama gücünü ele alalım:

$$E[e^2(n)] = E[(s(n) + v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.7)$$

$$= E[s^2(n) + 2s(n)(v_0(n) - v_2(n)) + (v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.8)$$

$$= E[s^2(n)] + 2E[s(n)(v_0(n) - v_2(n))] + E[(v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.9)$$

$s(n)$ ile gösterilen temiz işaret hem $v_0(n)$, hem de $v_2(n)$ işaretleri ile korelasyonsuzdur. Bu sayede yukarıdaki toplama işleminde ortadaki terim sifıra eşit olacaktır. Böylece hatanın gücü aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$E[e^2(n)] = E[s^2(n)] + E[(v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.10)$$

$s(n)$ işaretini elde etmeyi istediğimiz işaret, $e(n)$ 'i de istediğimiz işarete yakınsamamızı sağlayan işaret olarak düşünürsek sistemin genel hatasını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$E[e^2(n)] - E[s^2(n)] = E[(v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.11)$$

$$P = E[(v_0(n) - v_2(n))^2] \quad (10.12)$$

NLMS algoritmasının hedefi hatayı en azlıyarak sifıra yaklaştırmaktır. Açıkça görülmektedir algoritmanın amacı aşağıdaki duruma ulaşmaktır:

$$v_2(n) \cong v_0(n)$$

Bir adım daha ilerlersek bu duruma ulaşmak için gerek şart anlaşılabilir:

$$E[(v_0(n) - v_2(n))^2] = E[(v_0(n))^2] + E[(v_2(n))^2] - 2E[v_0(n)v_2(n)] \quad (10.13)$$

Yukarıdaki ifadede, eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terimin hatayı arttırıcı etkide oldukları görülmektedir. Bunların arttırıcı etkisine karşı hatayı azaltmak için elimizde bulunan tek terim

$$2E[v_0(n)v_2(n)]$$

dir. Bu terimi aşağıdaki biçimde de ifade edebiliriz:

$$2E[v_0(n)v_2(n)] = 2E[v_0(n)\mathbf{w}^H(n)\mathbf{v}_1(n)] \quad (10.14)$$

$$= 2\mathbf{w}^H(n)E[v_0(n)\mathbf{v}_1(n)] \quad (10.15)$$

Burada

$$E[v_0(n)\mathbf{v}_1(n)]$$

terimi, kullandığımız referans gürültüsü ile bilinmeyen gürültü arasındaki korelasyonu temsil eder. Hatanın azalması için bu terimin kesinlikle sıfır olmaması gerekir. Yani başka bir deyişle algoritmanın başarılı olması için bilinmeyen gürültü ile korelasyonlu bir gürültü kullanmamız gerek şarttır. Aksi taktirde yani kullanılan referans gürültüsü, bilinmeyen gürültüden korelasyonsuz ise hata gitgide artar ve işareti gürültüden arındırmak mümkün olmaz.

Sistemde kullandığım uyarlamalı algoritma NLMS algoritması olup aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$\text{Referans Gürültüsü Kestirimi: } v_2(n) = \sum_{i=0}^N \mathbf{w}(n)\mathbf{v}_1(n-i) \quad (10.16)$$

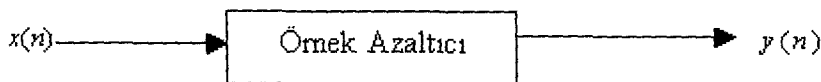
N : Süzgeç derecesi

$$\text{Hata Kestirimi: } e(n) = s(n) + v_0(n) - v_2(n) \quad (10.17)$$

$$\text{Süzgeç Katsayılarının Güncellenmesi : } \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\mu e(n)\mathbf{v}_1(n-i)}{\sum_{i=0}^N \mathbf{v}_1^2(n-i)} \quad 0 \leq i \leq N \quad (10.18)$$

Uyarlamalı sistem çıkışına eklenen aşağı örnekleyicinin amacı ise gürültü işaretinin sabit bir enerjiye sahip olması ilkesinden yararlanarak gürültü genliğini biraz daha düşürmektir. Aşağı örnekleme prensibini aşağıdaki gibi ele alabiliriz:

10.4 Örnek Azaltıcı



Şekil 10.7 Örnek Azaltıcı Blok Diyagramı

$M > 1$: Örnek azaltma oranı

Yukarıda görülen örnek azaltıcı bloğunun çıkışında elde edilen işaret , giriş işaretinden M kat az örnek içermektedir. Bu ilişkiyi aşağıdaki gibi formülize edebiliriz:

$$y(n) = x(nM) \quad (10.19)$$

Sistem çıkışının ayrık Fourier Dönüşümü:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_{N/M}^{nk} \quad ; k = 0 \rightarrow \frac{N}{M} - 1 \quad (10.20)$$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p) \delta(nM - p) \right) W_{N/M}^{nk} \quad (10.21)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left(x(n) \frac{1}{M} \sum_{p=-\infty}^{\infty} W_M^{-mp} \right) W_{N/M}^{pk/M} \quad (10.22)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) W_N^{pk} W_M^{-mp} \quad (10.23)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) W_N^{p \left(k - m \frac{N}{M} \right)} \quad (10.24)$$

$$Y(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} X \left(k - m \frac{N}{M} \right) \quad ; k = 0 \rightarrow \frac{N}{M} - 1 \quad (10.25)$$

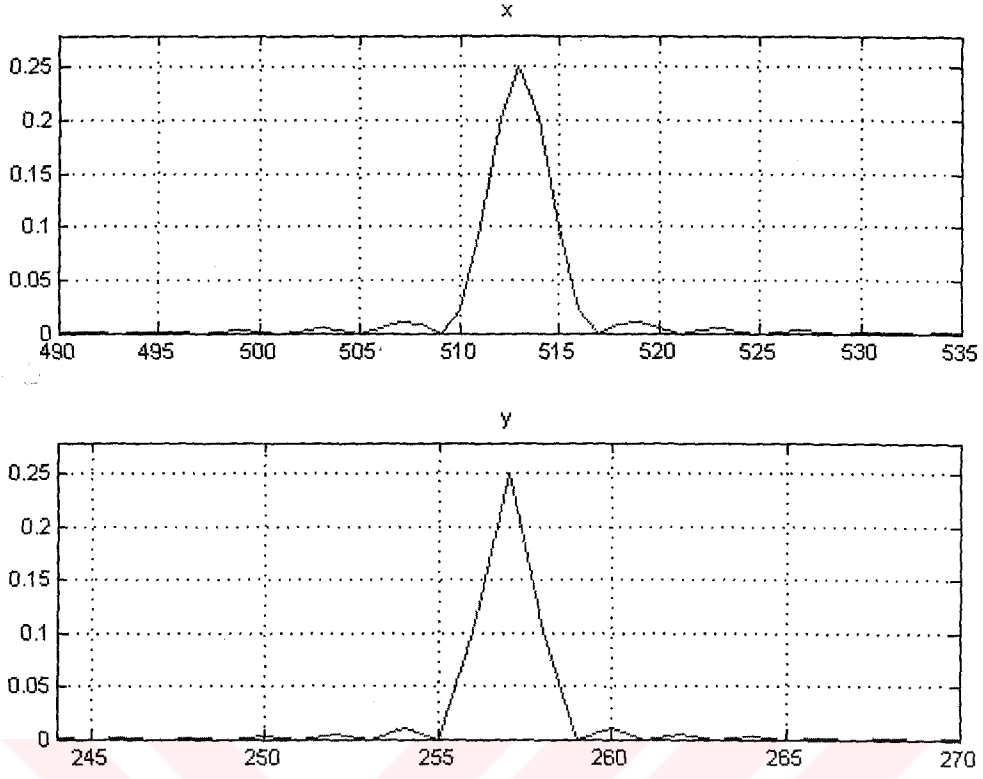
Buradan elde edilen sonuç şudur: Örnek sayısı $1/M$ katına düşürülen işaretin frekans spektrumunda genlikler de M kat küçülür ve işaretin anaband genişliği M katına çıkar. Bu prensibin uygulamasını aşağıdaki deneyde görebiliriz:

10.4.1 Deney

Sonuçları aşağıda verilen deneyde

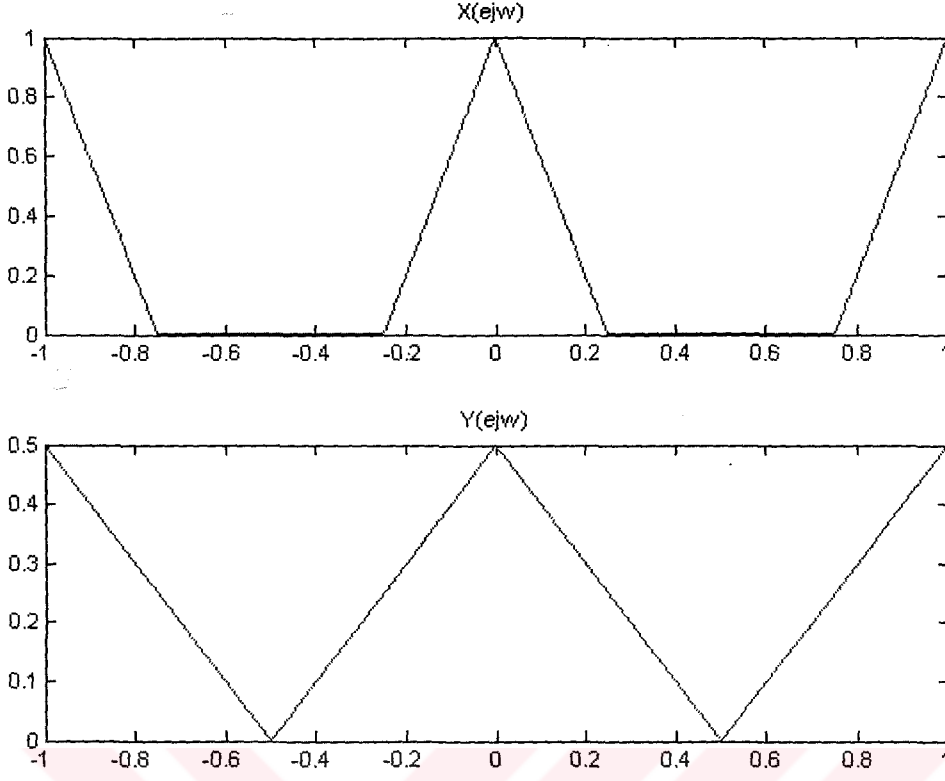
$$x(n) = \frac{\text{sinc}^2(0.25(n-512))}{4} \quad \text{orijinal işaretinin örnek sayısı, } M=2 \text{ seçilerek 2 katına}$$

düşürülmüş ve elde edilen $y(n) = x(2n)$ işareti ile zaman ve frekans domeninde karşılaştırılmıştır.



Şekil 10.8 Örnek Azaltma İşleminin İşaretin Zaman Spektrumuna Etkisi

Yukarıdaki ilk grafikte orijinal işaret $x(n)$, 1025 örnekten oluşurken $y(n)$ işareti 513 örnekten oluşmaktadır.



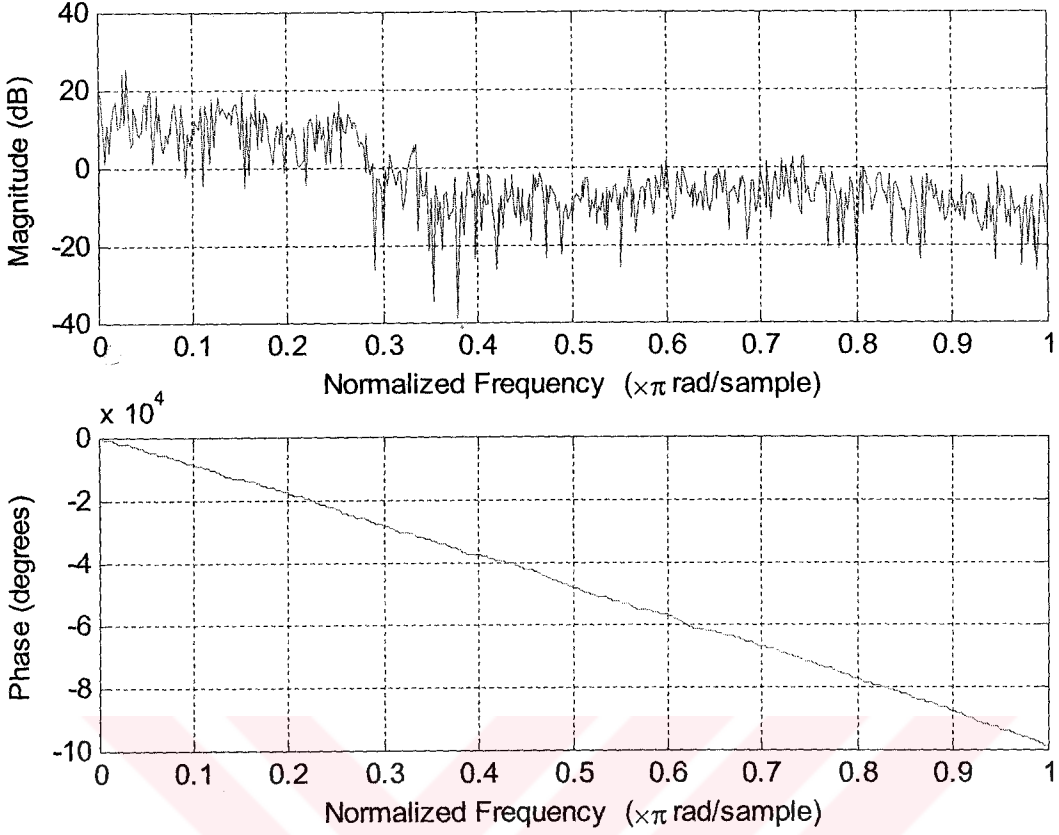
Şekil 10.9 Örnek Azaltma İşleminin İşaretin Frekans Spektrumuna Etkisi

Yukarıda ise x ve y işaretlerinin frekans spektrumları görülmektedir. Görüldüğü gibi örnek sayısı iki kat azaltılmış $y(n)$ işaretinin frekans spektrumunda genlikler yarıya düşmüş, bant genişliği ise iki katına çıkmıştır.

Bu ilkedan yola çıkarak gürültülü bir işaretin örnek oranını azaltarak içerdiği gürültünün genliğinin $1/M$ katına düşeceğini öngörerek uyarlamalı gürültü arındırıcı bloğuna bir örnek azaltıcı bloğu ekledim ve gürültü genliğinin gerçekten de azaldığı sonucunu elde ettim.

10.5 Alçak Geçiren Süzgeç

Bir sonraki adımda ise temizlenmiş ana bant işaretini süzmek için bir alçak geçiren süzgeç kullandım. Örnek azaltıcı sistem çıkışındaki işaretin frekans spektrumu aşağıdaki gibi olduğu için alçak geçiren süzgecin kesim frekansını buna uygun olarak aşağıdaki gibi hesapladım:

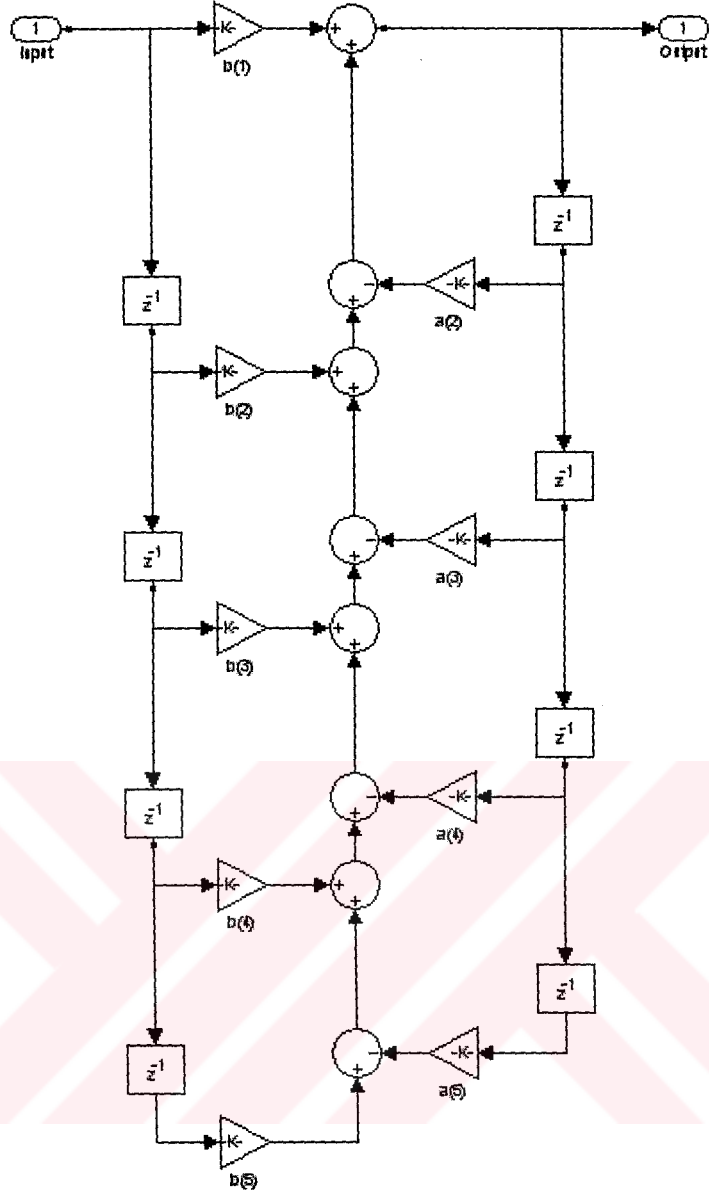


Şekil 10.10 Örnek Azaltıcı Sistem Çıkışındaki İşaretin Frekans Spektrumu

Örnek azaltıcı blok, işaretin örnekleme frekansını 16 KHz'den 8 KHz'e indirdiği için anabant frekansını $0,3 \times 8 = 2,4$ KHz olarak belirledim ve alçak geçiren süzgeç katsayılarını aşağıdaki MATLAB- DSP Blockset bloğuyla aşağıdaki gibi hesapladım:

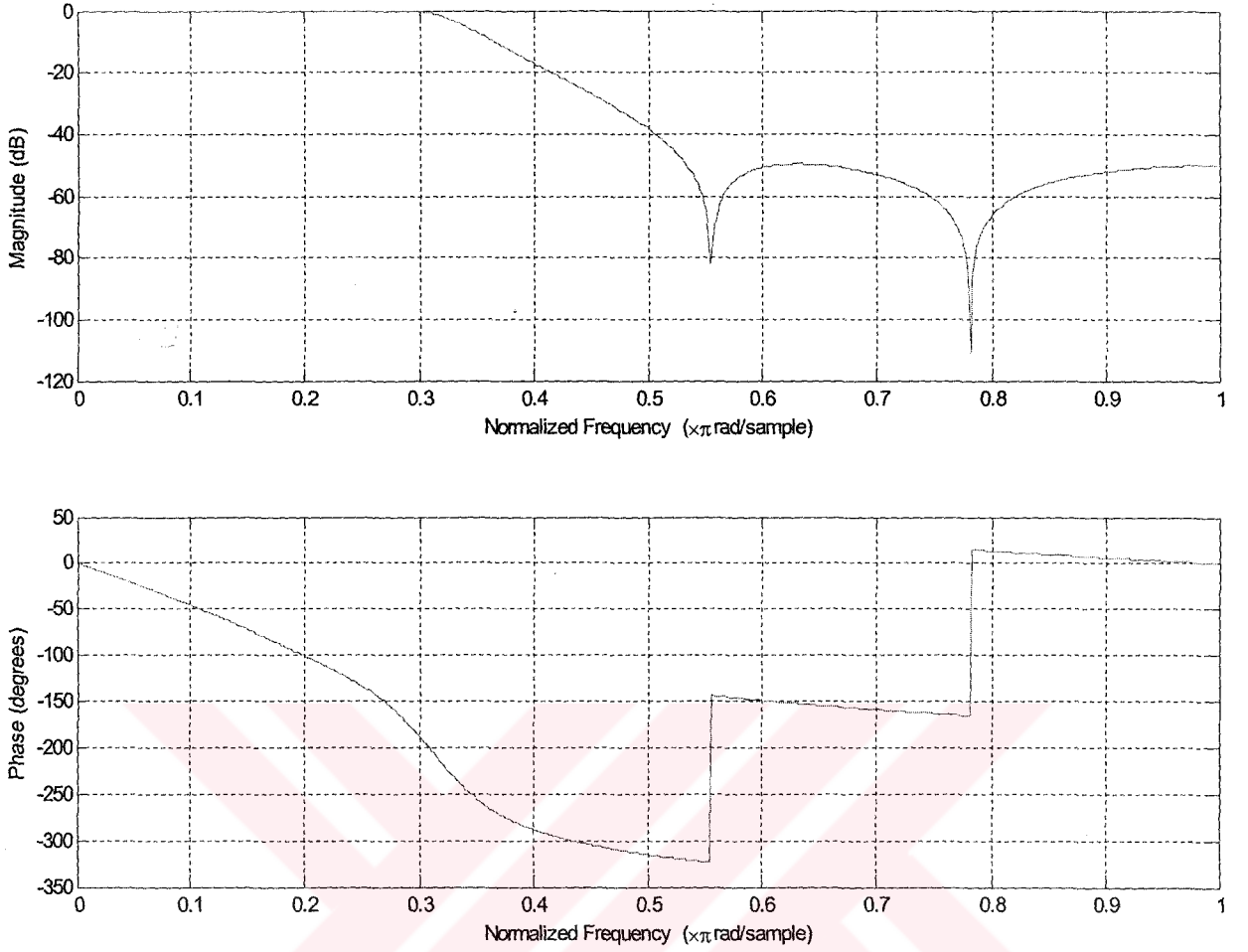
```
b=[0.028 0.053 0.071 0.053 0.028]; %Numerator=pay
```

```
a=[1.000 -2.026 2.148 -1.159 0.279]; %Denominator=payda
```



Şekil 10.11 Alçak Geçiren Süzgeç Katsayılarının Elde Edildiği Blok

Alçak geçiren süzgeç karakteristiği aşağıda görülmektedir:



Şekil 10.12 Alçak Geçiren Süzgeç Karakteristiği

10.6 Sistemin Gerçekleştirilmesi

Sistemin gerçekleştirilmesi için kullandığım donanım birimleri aşağıdaki gibidir:

- İşaret kaynağı ve referans işaretlerini almak ve kaydetmek için iki mikrofon ve iki bilgisayar,
- Gürültü kaynağı olarak elektrik süpürgesi

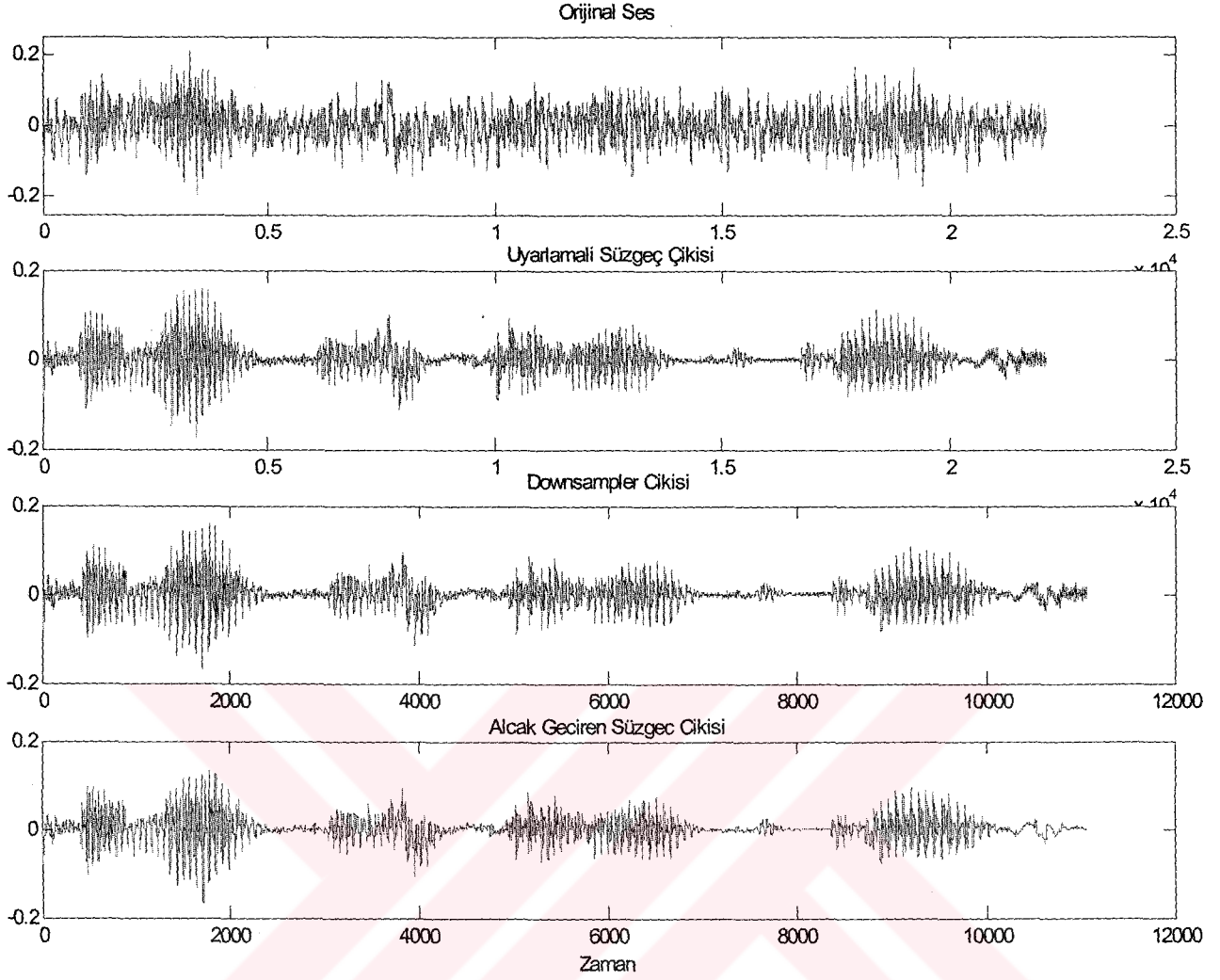
Dışarıdan ses almayan bir odada, elektrik süpürgesinin 10 cm uzağına ve elektrik süpürgesinden 1 m uzaklıktaki bir noktaya iki adet mikrofonu yerleştirdim.

Elektrik süpürgesinden gelen referans işaretiyle birlikte işaret kaynağı olarak kendi sesimi kullandım. Her iki bilgisayara da kurduğum wav kaydedicileri programıyla sesleri 16 Khz lik örnekleme frekansında her örneğe 16 bit yer ayıracak şekilde kaydettim.

Daha sonra ise sırada bu işaretlerin programa giriş olarak kullanılması vardı.

Gürültü işareti “gurultukaydi.wav”; ve gürültülü sesi de “kayit.wav” isimli dosyalarda ekte sunduğum CD’de bulunabilir.

NLMS algoritmasını kullanarak yaptığım çalışmanın ekran çıktıları aşağıdaki gibidir:



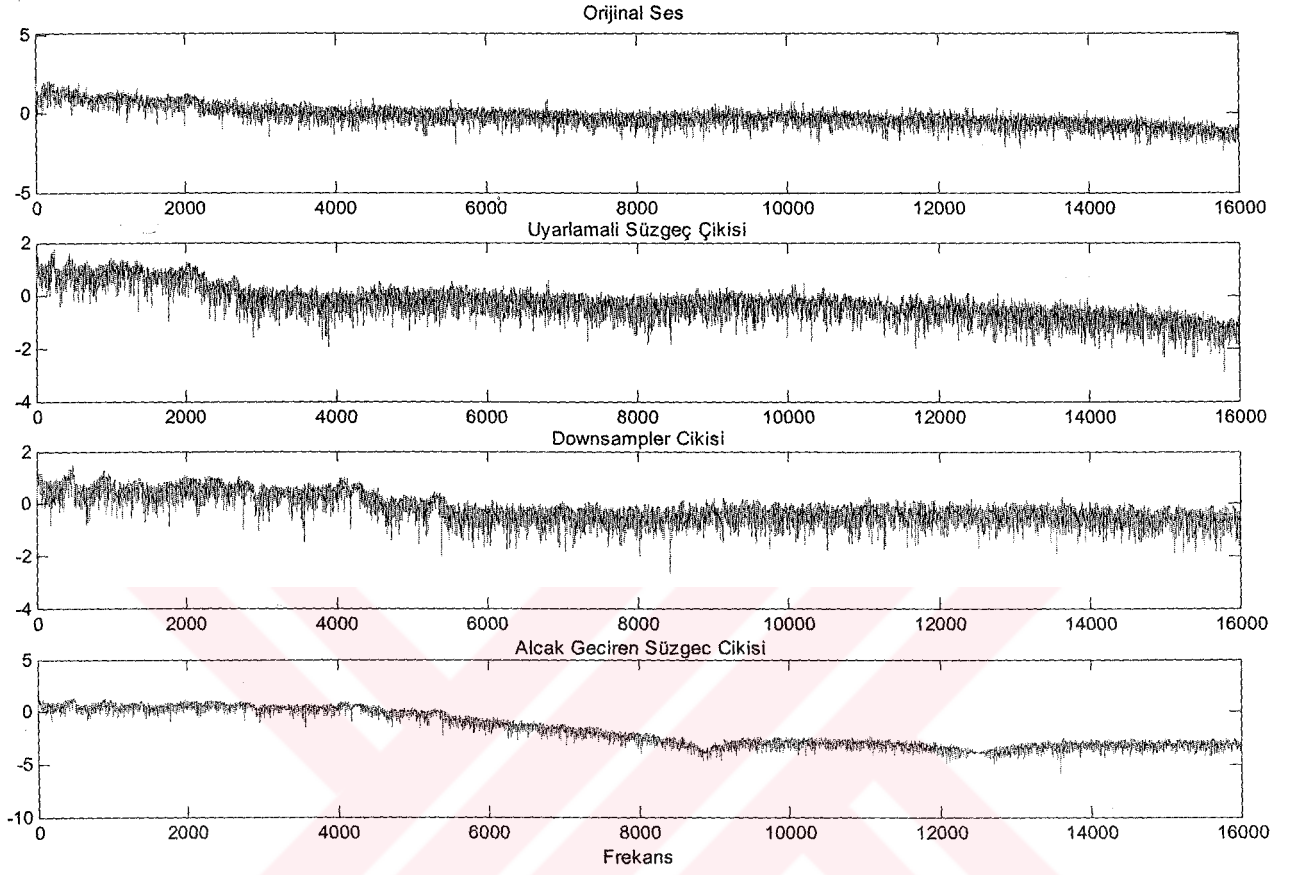
Şekil 10.13 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Zaman Domenindeki Çizimleri

Yukarıda alt alta görülen şekillerden en üstteki gürültülü kayıt işaretini zaman domeninde göstermektedir.

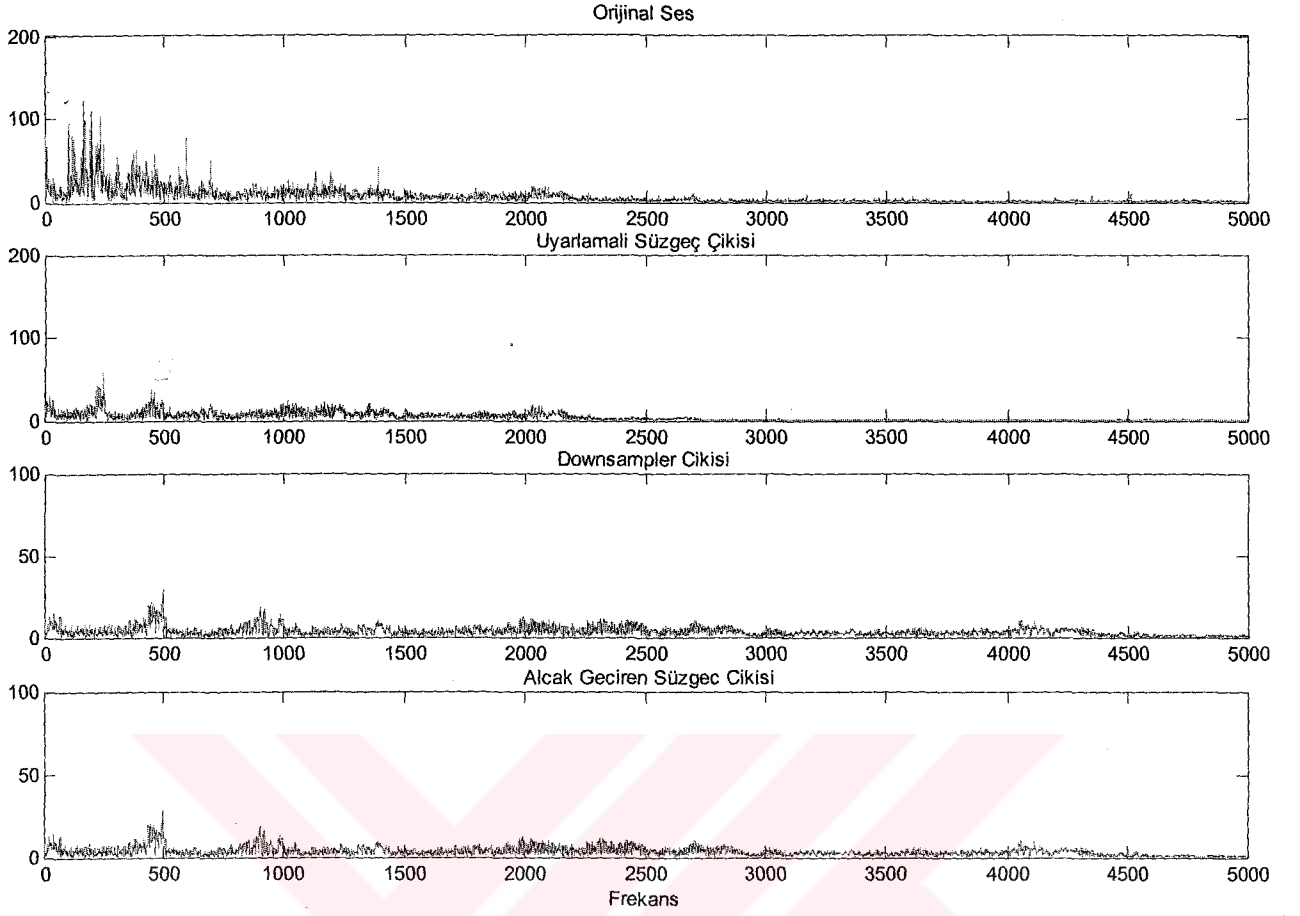
Bu işaret uyarlamalı süzgeçten geçirildikten sonra “Uyarlamalı Süzgeç Çikisi” isimli grafik elde edilmektedir. Görüldüğü gibi işaretin gürültüden yüksek bir oranda temizlendiği açıktır. Bu işaret “anc_cikisi.wav” adıyla ekteki CD’de bulunabilir.

Daha sonra bu işaretin de örnek azaltıcı bloğuna uygulanmasıyla gürültünün frekans domeninde yayılarak genliğinde azalma meydana gelmesini amaçladım “Downsampler Çikisi” isimli grafiği elde ettim. Bu işaret de “downsampler_cikisi.wav” olarak kaydettim. Son olarak bu işareti de 2400 Khz kesim frekansına sahip alçak geçiren süzgeçten geçirerek “Alcak Geciren Süzgeç Çikisi” isimli grafiği elde ettim. Bu işaret de ‘lpf_cikisi.wav’ isimli dosyadan dinlenebilir.

Altteki şekiller ise tüm aşamaların frekans spektrumunu göstermektedir:
Üstteki şekil, logaritmik eksenle, alttaki ise ondalık eksenle çizdirilmiştir.



Şekil 10.14 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Logaritmik Genlik Ekseninde Frekans Spektrumu



Şekil 10.15 Uyarlamalı Gürültüden Arındırıcı Sisteminde Yer Alan İşaretlerin Doğrusal Genlik Ekseninde Frekans Spektrumu

11. SONUÇLAR

Yaptığım çalışmada referans mikrofonu sayesinde işaretin içinde karakteristik özelliklerinden hiçbirini bilinmeyen bir gürültünün çıkarılmasına dayalı sistemin performansını geliştirmeye çalıştım. Elde ettiğim sonuçlarla bir örnek azaltıcı bloğun sistem performansını önemli ölçüde arttırdığını gördüm.

Bunun yanı sıra sunduğum sistemde referans gürültüsünün işaretin içindeki bilinmeyen gürültüyle (10.5) – (10.18) eşitliklerinde açıkladığım sebeplerden dolayı mutlaka korelasyonlu olması gibi bir kısıtlama söz konusudur.

Daha “robust” bir gürültü arındırıcı sisteminin tasarlanabilmesi için bu kısıtlamanın mümkünse kaldırılması, en azından geliştirilmesi gereklidir. Bunun için de gerçek zamanlı kaydedilen referans gürültüsü yerine sentetik verinin kullanıldığı bir sistem, ya da tek sensöre dayalı bir sistem ileride yapmayı hedeflediğim çalışmalardır.



KAYNAKLAR

Abolfazlian A. R. K., Karlsen, B. L. (1994), "The Cocktail Party Listener", Technical Report DAIMI PB 482, Computer Science Department, Aarhus University, ISSN 0105-8517, Kopenhagen.

Cheveigne A. , (1998), "The Auditory System As a Separation Machine", CNSR Publications, Paris.

Haykin S., (1996) "Adaptive Filter Theory", Ptentice - Hall, Inc.Upper Saddle River, New Jersey.

Kuo S. M. , Morgan D. R. , (1999), "Active Noise Control", Proceedings of IEEE, Volume 87, Number 6, New Jersey.

Loizou P. C. , Poroy O. , Dorman M., (1997), "The Effect of Parametric Variations of Cochlear Implant Processors on Speech Understanding" Rirchardson, Texas.

Manolakis D.C. , Ingle V. K. , Kogon S. M. , (1996) "Digital Signal Processing", Ptentice - Hall, Inc.Upper Saddle River, New Jersey.

Siravara B. , Magotra N. , Loizou P. C. , (2002), "A Novel Approach for Single Microphone Active Noise Control", Publications of University of Texas, Dallas.

Zeng F. , Shannon R. V. , (1999), "Psychophysical Laws Revealed by Electric Hearing", University of Maryland, House Ear Institute, Los Angeles.

INTERNET KAYNAKLARI

[1]www.infoscience.otago.ac.nz

[2]www.cnel.ufl.edu

[3]www.ucihs.uci.edu

[4]www.ieee.org

[5]www.ece.wpi.edu/research

EKLER

Ek 1 Program Kodlarının ve Wav Dosyalarının Bulunduğu CD ROM



Ek 1 Program Kodlarının ve Wav Dosyalarının Bulunduğu CD ROM

Çalışmamda kullandığım MATLAB programında yazdığım kodların test edilebilmesi, kaydettiğim gürültülerin ve temizlenmiş seslerin elektronik kaydının bulunması için hazırladığım CD ROM'u ekliyorum.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 18.07.1978

Doğum yeri Ardahan

Lise 1991-1994 Bursa Atatürk Lisesi

Lisans 1995-2000 Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fak.
Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2000-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektronik ve Haberleşme Müh. Anabilim Dalı,
Haberleşme Programı

Çalıştığı kurum

2001-Devam ediyor Figes Ltd. Uygulama Mühendisi

