

57472

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA (LMS)
ALGORİTMASI YARDIMIYLA
DOĞRUSAL KANALLARIN DENKLEŞTİRİLMESİ

Elektronik ve Hab. Müh. Serdar CANKURTARAN

F.B.E. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Soner ÖZGÜNEL

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRONİK VE HABERLEŞME MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
HABERLEŞME PROGRAMI

İSTANBUL , 1996

İÇİNDEKİLER	I
TEŞEKKÜR	III
TÜRKÇE ÖZET	IV
İNGİLİZCE ÖZET	V
1. GİRİŞ.....	1
2. WIENER SÜZGEÇ KURAMI.....	4
2.1. Optimum Doğrusal Süzgeçler.....	4
2.2. Diklik Kuralı.....	5
2.3. En Küçük Karesel Ortalama Hata.....	8
2.4. Wiener-Hopf Denklemleri.....	10
2.5. Hata Başarım Yüzeyi.....	12
3. DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ.....	16
3.1. İleri Yönde Doğrusal Öngörü.....	16
3.2. İleri yönde Doğrusal Öngörü Hata Süzgeci.....	20
3.3. Geri Yönde Doğrusal Öngörü.....	22
3.4. Geri yönde Doğrusal Öngörü Hata Süzgeci.....	26
3.5. Levinson-Durbin Yinelemesi.....	28
3.6. Yansıma Katsayıları ile Özilişki Fonksiyonu Arasındaki ilişki.....	35
3.7. İleri Ve Geri Yönde Öngörü Hata Süzgeçlerinin Transfer Fonksiyonları ile Aralarındaki ilişki.....	37
3.8. Öngörü Hata Süzgeçlerinin Özvektör Gösterilimleri....	41
3.9. Kafes (Lattice) Öngörücülleri.....	43
3.10. Kafes Süzgeçlerinin Bağıntıları.....	46
3.11. Geri Yönde Öngörü Hata Dizisinin Üretilmesinin Gram-Schmidt Yöntemi ile Gösterilmesi.....	50
3.12. Kafes Yapısı Kullanılarak Ters Süzgeçleme işlemi.....	51
3.13. Birleşik Süreç Kestirimi.....	52

II

3.14. Blok Kestirimi.....	54
4. EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ.....	58
4.1. En Dik İniş Algoritması.....	60
4.2. En Dik İniş Algoritmasının Kararlılığı.....	61
4.3. Karesel Ortalama Hatanın Geçici Davranışı.....	66
5. EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA(LMS) ALGORİTMASI.....	67
5.1. En Küçük Karesel Ortalama Algoritmasının Uygulaması Ve Yapısının Genel Görünüşü.....	67
5.2. LMS Algoritmasının İncelenmesi.....	69
5.3. LMS Algoritmasının Kararlılığının İncelenmesi.....	71
5.4. Ortalama Tap Ağırlık Vektörünün Davranışı.....	73
5.5. Ağırlık Hatasının İlişki Matrisi.....	74
5.6. Karesel Ortalama Hatanın Davranışı.....	80
5.7. Karesel Ortalama Hatanın Geçici Davranışı.....	84
5.8. LMS Algoritmasının Durağan Olmayan Ortamlardaki Uygulaması.....	88
6. DOĞRUSAL BİR KANALIN BİLGİSAYAR BENZETİMİ.....	93
6.1. Denkleştirici Girişinin İlişki Matrisi.....	95
6.2. Optimum Denkleştirici Katsayıları Ve En Küçük Karesel Ortalama Hatanın Kuramsal İncelenmesi.....	97
6.3. Bilgisayar Benzetim Sonuçları.....	98
6.4. Bilgisayar Benzetim Sonuçlarının Değerlendirilmesi...	100
SONUÇ	111
KAYNAKLAR	113
EK-1	118
EK-2	128
ÖZGEÇMİŞ	131



Bu tezde yapılan çalışmalara katkılarından
dolayı Yrd. Doç. Dr. Soner ÖZGÜNEL'e
teşekkür ederim.

ÖZET

Kanal denkleştirme problemi, son yıllarda birçok araştırmacının ilgi odağı olmuş ve bu konuda oldukça fazla yayın yapılmıştır. Bu çalışmada, En Küçük Karesel Ortalama (LMS) algoritması kullanılarak doğrusal kanalların denkleştirilmesi incelenmektedir.

Uyarlamalı algoritmaların çıkarılması için üç temel yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler, Wiener Süzgeç Kuramı, Kalman Süzgeç Kuramı ve En Küçük Kareler Yöntemi'dir. Bu kuramlar üzerine kurulan uyarlamalı algoritmalarından bazıları ise En Küçük Karesel Ortalama(LMS) algoritması, En Küçük Kareler(RLS) algoritması ve uyarlamalı kafes algoritmalarıdır. Bu çalışmada, En Küçük Karesel Ortalama (LMS) algoritması kullanılmaktadır.

Kanal denkleştirmede amaç, kanal girişindeki işareti yeniden elde edebilmektir. Bu işlem için bir kanal ve bu kanalı denkleştiren bir model kullanılmaktadır. Model, kanalın çıkışına yerleştirilmekte ve böylece kanalın çıkışı modelin girişi olmaktadır. Bu modelin çıkışı ile kanalın girişi arasındaki fark uyarlamalı bir algoritmada kullanılarak kanalın denkleştirilmesi yapılmaktadır. Kanal girişi ile model çıkışı arasındaki farkın karesel değeri uyarlamalı algoritmayla en küçük yapılmaya çalışılmaktadır. Böylece modelin transfer fonksiyonu, kanalın transfer fonksiyonunun tersi olacak şekilde elde edilerek kanalın denkleştirilmesi sağlanır.

Bu tezde, denkleştirme problemi için değişik kanal modelleri seçilmekte ve LMS algoritması kullanılarak bu kanalların denkleştirilmeleri incelenmektedir. Yapılan bilgisayar benzetimlerinde, kanal, iletim ortamı ve algoritmaya ilişkin parametreler farklı değerlerde seçilerek, en küçük karesel ortalama anlamında algoritmanın başarımı incelenmektedir. Benzetimlerde elde edilen sonuçlar değerlendirilerek algoritmanın başarımı irdelenmektedir.

ABSTRACT

In recent years, channel equalization has received a great deal of attention from investigators, and there are many studies on this subject.

In this thesis, the equalization of linear channels using least mean square (LMS) algorithm has been investigated.

The purpose of the "channel equalization" is to undo the distorting effects of the channel, and recover the transmitted signal.

For the adaptive channel equalization, several types of adaptive receivers may be used. There are three distinct methods for deriving recursive algorithms for the operation of adaptive receivers. These methods are based on Wiener filter theory, Kalman filter theory and the method of least squares. Some of the adaptation algorithms based on these theories are the least mean square (LMS) algorithm, the recursive least squares (RLS) algorithm and adaptive lattice algorithm.

In this study, the least mean square (LMS) algorithm is used for the equalization of the linear channels.

In the computer simulations, the performance of the algorithm is investigated for different parameters of channel, noise and the algorithm, based on the mean squares sense. The results of the simulations are discussed for the performance analysis of the system.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada doğrusal bir kanalın En Küçük Karesel Ortalama (LMS) algoritması kullanılarak denkleştirilmesi incelenmektedir. Kanalın denkleştirilmesi işlemini yapan model kanalın çıkışına bağlanmakta ve modelin transfer fonksiyonu, LMS algoritması ile değiştirilmektedir. Denkleştirme işlemi yapılırken kanalın transfer fonksiyonu, iletim ortamındaki gürültünün etkisi ve algoritmanın adım uzunluğu parametresi değiştirilmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanmaktadır. Bu benzetim işleminden önce konuya açıklık getirmek amacıyla kuramsal incelemeye de yer verilmektedir.

Wiener Süzgeç Kuramı, Kalman Süzgeç Kuramı ve En Küçük Kareler yöntemi, uyarlamalı algoritmaların çıkarılmasındaki temel yöntemlerdir. Bu kuramlar üzerine kurulan algoritmalarından bazıları, En Küçük Karesel Ortalama (LMS) algoritması, En Küçük Kareler (RLS) algoritması ve Uyarlamalı Kafes algoritmalarıdır.

Kullanılan LMS algoritması, gradyan tabanlı bir algoritmadır ve uyarlamalı süzgeçlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. Algoritma ile uyarlamalı süzgecin tap ağırlık değerleri otomatik olarak optimum değerlere yaklaştırılmaktadır.

Uyarlamalı süzgeçler, işaret işlemenin önemli bir parçası durumundadır. Bilinmeyen istatistiksel bir ortamda, bir uygulama sonucu elde edilen bir işaret olduğu anda uyarlamalı süzgecin kullanımı önemli kolaylıklar sağlar.

Uyarlamalı süzgeçlerin temeli, Wiener ve Hopf(1931) tarafından kendi adlarıyla bilinen, sürekli zamanda integral yapısındaki denklemler sayılmaktadır. Daha sonra, Kolmogorov(1939), Krein(1945) ve Wiener(1949) tarafından en küçük karesel ortalamalı kestirimler üzerine çalışmalar yapılmıştır. Levinson(1947), ilişki matrisinin Toeplitz özelliğini

kullanarak Wiener-Hopf eşitliklerini matrisel yapıda, bir yineleme biçiminde ifade etmiştir. Durbin(1960), Levinson'un elde ettiği matrisel yapıyı, özyinelemeli modellere uygulamıştır. Kailath(1968,1970), doğrusal süzgeçleme problemlerinde yeni bir yaklaşım kullanarak Levinson-Durbin yinelemesini yeniden formüle etmiştir(Kailath ve Frost et al 1968, Kailath ve Geesey et al 1973).

Gradyan kavramının karmaşık yapısı, Widrow(1975a), Monzigo ve Miller(1980) tarafından ele alınmıştır. Haykin(1989) Gram-Schmidt algoritması ve değişik yöntemleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Itaruka ve Saito(1971) Kafes süzgeçlerinin uyarlamalı işaret işlemedeki ilk uygulamalarını yapmışlardır. Robinson(1967) ve Burg(1968), kafes süzgeçleri ile yer katmanlarının modellenmesi çalışmalarında bulunmuşlardır. Marple(1987) ve Haykin(1989) tarafından blok kestirimindeki doğrudan ve dolaylı yöntemler incelenmiştir.

Luenberger(1969) tarafından bir yineleme yöntemi olan, En Dik İniş Yöntemi, çok boyutlu başarımlı yüzeylerin araştırılmasında kullanılmıştır. En Küçük Karesel Ortalama(LMS) algoritması ile ilgili ilk temel çalışmalar Robins ve Monroe(1951) tarafından, istatistikteki gerçek değişken kestiriminin çözümü için geliştirilen istatistiksel yaklaşımla yapılmıştır. Widrow(1975), LMS algoritmasının karmaşık yapıdaki biçimini ilk olarak incelemiştir. Horowitz ve Senne(1981) tarafından LMS algoritmasının kararlılığı ve karesel ortalamaadaki yakınsaması, karmaşık ve gerçel değerler için incelenmiştir. Fisher ve Bershad(1983), tap ağırlık vektörünün özdeğişinti matrisinin zamanla değişimini incelemişlerdir. Haykin(1991), kitabında uyarlamalı süzgeçleri ve uygulanan yöntemleri genel olarak incelemiştir.

Bu çalışmada ise gerçel değerler kullanılarak doğrusal bir kanal modelinde LMS algoritması kullanılarak denkleştirme işlemi, kanal

katsayıları, gürültünün değışintisi ve algoritmanın adım uzunluğu değıştirilerek algoritmanın başarımı incelenmektedir.

Bölümlerin içerikleri şu şekilde özetlenebilir:

Bölüm 2'de, uyarlamalı süzgeçlerin temeli sayılan Optimum Süzgeç Kuramından bahsedilmekte ve optimum doğrusal süzgeçlerin yapıları, kullanılan temel kavramlar gösterilmektedir. Ayrıca en küçük karesel ortalama hatanın bulunması, Wiener-Hopf denklemleri ile hata başarıım yüzeyinin incelenmesi de ele alınmaktadır.

Bölüm 3'te, doğrusal öngörü kavramı ele alınarak ileri ve geri yönde doğrusal öngörüler, özellikleri ve kullanılan yapılar hakkında bilgiler verilmektedir. Ayrıca uygulamada sıkça kullanılan Levinson-Durbin yinelenmesi, bu yinelenenin özellikleri, kafes yapıları ve bu yapılar kullanılarak yapılan süzgeçleme ile kestirimler bölümün diğer kısımlarını oluşturmaktadır.

Bölüm 4, incelenecek LMS algoritmasına zemin hazırlaması açısından gradyan tabanlı bir yöntem olan En Dik İniş Yönteminin incelendiğı bölümdür. Bu bölüm içinde En Dik İniş Yöntemi, kararlılığı ve oluşan hatanın karesel ortalamasının davranışı gösterilmektedir.

Bölüm 5'te, bu çalışmada kullanılan LMS algoritması geniş olarak incelenmektedir. Algoritmanın yapısı, kararlılığı, bulunacak tap ağırlık vektörünün davranışı, ağırlık hatasının ilişki matrisi, karesel ortalama hatanın davranışı ve durağan olmayan ortamlardaki uygulamaları kuramsal olarak gösterilmektedir.

Bölüm 6'da, seçilen doğrusal bir kanal modeli için LMS algoritması kullanılarak denkleştirme benzetimi yapılmaktadır. Bölüm içinde, seçilen model için ilk önce kuramsal inceleme yapılarak elde edilmesi gereken değerler verilmekte, daha sonra yapılan bilgisayar benzetiminin sonuçları verilerek yorumlanmaktadır.

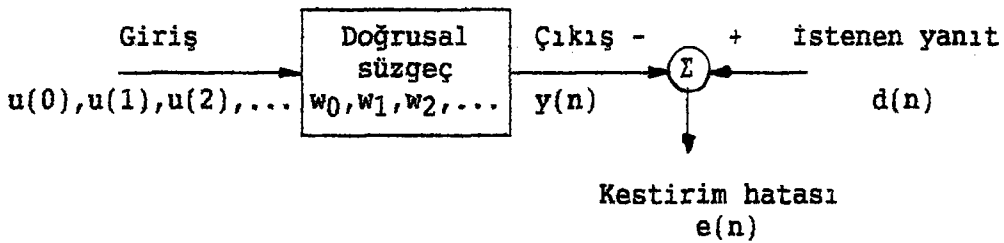
2. WIENER SÜZGEÇ KURAMI

Bu bölümde, genel olarak Wiener süzgeçleri olarak bilinen optimum doğrusal süzgeçler ele alınmaktadır. Bir Wiener süzgeci için gerekli olan kuram, karmaşık değerli girişler ve süzgecin impuls yanıtı üzerine kurulmuştur. Giriş için karmaşık değerli süreçlerin kullanılmasının nedeni ise birçok pratik uygulamada (haberleşme, radar, sonar,...), ilgililenilen temel işaretin karmaşık yapıda olmasındandır.

Bu bölümde, optimum doğrusal süzgeçlerin temel yapısı, kestirim hatası $e(n)$ ile giriş işareti $u(n)$ arasındaki ilişki, kestirim hatası $e(n)$ nin değerinin nasıl en küçük yapılabileceği ya da diğer bir deyişle süzgeç katsayılarının en uygun değerlerinin nasıl hesaplanacağından bahsedilmektedir.

Bu bölümde, daha sonraki bölümler içerisinde sık sık kullanılacak olan optimum süzgeç kuramı, ayrıntılı bir şekilde incelenmekte, temel ifadelerin öğrenilmesi sağlanmaktadır.

2.1. OPTİMUM DOĞRUSAL SÜZGEÇLER



Şekil 2.1 : Süzgeçleme işleminin blok gösterilimi

Doğrusal süzgecin blok gösterilimi Şekil 2.1'deki gibidir. Süzgeç girişinde, $u(0), u(1), u(2), \dots$ ile gösterilen durağan ayrık zamanlı rasgele süreçler yer alır ve süzgeç, impuls yanıtı ile belirlenen $w_0, w_1, w_2, \dots$ katsayılarından oluşmaktadır.

Süzgeç n anında $y(n)$ ile gösterilen bir çıkış üretir. Bu çıkış,

$d(n)$ ile gösterilen istenen yanıtın bir kestirimidir. $e(n)$ ile gösterilen kestirim hatası, istenen yanıt ile süzgeç çıkışı arasındaki fark olarak

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. İstatistiksel olarak kestirim hatası $e(n)$ 'i "mümkün olduğu kadar küçük" yapmak gerekmektedir.

2.2. DİKLİK KURALI

Şekil 2.1'de tanımlanan istatistiksel süzgeçleme işlemini yeniden ele alalım. Süzgecin impuls yanıtları, w_0, w_1, w_2 ile süzgeç girişi $u(0), u(1), u(2), \dots$ karmaşık değerli ve sonsuz süreli olarak kabul edilmiştir. Süzgeç çıkışı $y(n)$, n anında doğrusal katlama toplamı

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \cdot u(n-k) \quad (2.2)$$

biçiminde gösterilir. Buradaki $*$ işareti karmaşık eşlenik anlamına gelmektedir. Eşitliğin sağ tarafı, süzgeç katsayısı w_k ile süzgeç girişi $u(n-k)$ 'nin bir iç çarpımıdır. Süzgeç girişi ve istenen yanıtın her ikisi birden sıfır ortalamalı ve geniş anlamda durağan kabul edilmektedir. Doğal olarak istenen yanıt $d(n)$ 'nin kestirimi bir hata meydana getirecektir. Bu da

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2.3)$$

olarak gösterilir. Kestirim hatası, $e(n)$, rastgele değişen bir değerdir. Optimum süzgeci gerçeklemek için kestirim hatası $e(n)$ 'nin karesel ortalama değerini en küçük olacak şekilde seçeriz. Karesel ortalama hata

$$\begin{aligned} J &= E[e(n) \cdot e^*(n)] \\ &= E[|e(n)|^2] \end{aligned} \quad (2.4)$$

biçiminde gösterilir.

Süzgeç girişindeki bilgiler karmaşık yapıda olduğundan süzgeç

katsayıları da karmaşık değerlidir. Bu nedenle k . süzgeç katsayısı w_k

$$w_k = a_k + jb_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

biçiminde karmaşık yapıda gösterilebilir.

Gradyan operatörü, ∇ ile gösterilmekte ve gradyan vektörün k . elemanı

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

biçiminde olmaktadır. Eldeki böyle bir yapı için J fonksiyonuna gradyan operatörü uygulanınca, bir çokboyutlu karmaşık gradyan vektör $\nabla(J)$ elde edilir. Bu gradyan vektörünün k . elemanı

$$\nabla_k(J) = \frac{\partial J}{\partial a_k} + j \frac{\partial J}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

biçiminde ifade edilir. Verilen bu eşitlikte karmaşık gradyan fonksiyonunun geçerli olabilmesi için J 'nin gerçel değerli olması gerekmektedir. Gradyan işlevi genellikle ilgilenilen fonksiyonun sabit noktalarının bulunması için kullanılmaktadır.

J fonksiyonu en küçük değerde olduğunda gradyan vektörünün bütün elemanları sifıra eşittir, yani

$$\nabla_k(J) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Bu koşulların elde edilmesi anında, süzgecin karesel ortalama değer anlamında optimum olduğu söylenebilir. (2.4) ile (2.7) eşitliklerinin birleştirilmesi sonucunda

$$\nabla_k(J) = E \left[e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} + e^*(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} + j e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} + j e^*(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} \right] \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.3) ve (2.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} &= -u(n-k) & \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} &= -u(n-k) \\ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} &= ju(n-k) & \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} &= -ju(n-k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

ifadeleri yazılabilir. Bulunan bu sonuçlar (2.9)'da yerine konursa, sonuç olarak

$$\nabla_k(J) = -2E[u(n-k).e(n)^*] \quad (2.11)$$

elde edilir. $e_0(n)$, süzgeç optimum koşulda çalışırken elde edilen kestirim hatasının özel değeri olarak tanımlansın. (2.8) eşitliğinde belirtilen şartların sağlanabilmesi için

$$E[u(n-k).e_0(n)^*] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

olması gerektiği bulunabilir. Bu eşitlik, J fonksiyonunun en küçük değerde olması için, yani optimum koşulda çalışması için gerek ve yeter koşulun, giriş vektörünün her elemanı ile kestirim hatası $e_0(n)$ 'nin ortagonal yani dik olması gerektiğini göstermektedir.

Bu ifade optimum süzgeçleme konusundaki en değerli kuramlardan biri olan diklik kuralını oluşturur. (2.2) eşitliği kullanılarak çıkış ile hata arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} E[y(n).e(n)] &= E\left[\sum_{k=0}^{\infty} w_k \cdot u(n-k).e(n)^*\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} w_k \cdot E[u(n-k).e(n)^*] \end{aligned} \quad (2.13)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir.

Optimum karesel ortalama hata değeri $y_0(n)$ ile bu andaki kestirim hatası $e_0(n)$ ile gösterilsin. (2.12)'de tanımlanan diklik kuralını kullanılarak

$$E[y_0(n).e_0(n)] = 0 \quad (2.14)$$

sonucu yazılabilir. Süzgeç optimum koşulda çalışıyorsa, süzgeç çıkışında üretilen istenen yanıtın kestirimi $y_0(n)$ ile ilgili kestirim hatası $e_0(n)$ birbirlerine diktir.

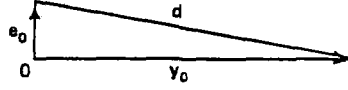
Süzgeç çıkışındaki istenen yanıtın kestirimi

$$\hat{d}(n/U_n) = y_0(n) \quad (2.15)$$

biçiminde yeniden tanımlansın. $\hat{d}(n|U_n)$ kestirimi sıfır ortalamalıdır. Çünkü tap girişleri sıfır ortalamalı olarak kabul edilmiştir. Bu koşul, sıfır ortalamalı kabul edilen istenen yanıt $d(n)$ 'e uygundur.

Diklik Kuralının Geometrik Anlamı :

d , y_0 ve e_0 sembolleri ile gösterilen sırası ile istenen yanıt, süzgeç çıkışı ve ilgili kestirim hatası, Şekil 2.2'de gösterildiği gibi bir yapı oluşturur. Bu şekil, yalnızca süzgecin optimum koşulda çalıştığı durum için geçerlidir.



Şekil 2.2 : İstenen yanıt, süzgeç çıkışı ve kestirim hatası arasındaki ilişkinin geometrik gösterilimi.

2.3. EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA HATA

Şekil 2.1'deki doğrusal süzgeç optimum koşulda çalıştığı anda, (2.1) eşitliği

$$\begin{aligned} e_0(n) &= d(n) - y_0(n) \\ &= d(n) - \hat{d}(n|U_n) \end{aligned} \quad (2.16)$$

biçimini alır. Bu eşitliğin ikinci satırı yeniden düzenlenirse

$$d(n) = \hat{d}(n|U_n) + e_0(n) \quad (2.17)$$

elde edilir. $J_{\min}$ ile gösterilen en küçük karesel ortalama hata ise

$$J_{\min} = E[|e_0(n)|^2] \quad (2.18)$$

biçimindedir. (2.17) ifadesinin her iki yanının karesel ortalamaları alınarak diklik kuralı uygulanırsa

$$d(n) = \hat{d}(n|U_n) + e_0(n) \quad (2.19)$$

$$E[d(n) \cdot d(n)^*] = E[\{\hat{d}(n|U_n) + e_0(n)\} \cdot \{\hat{d}(n|U_n)^* + e_0(n)^*\}]$$

$$= E[\hat{d}(n/U_N) \cdot \hat{d}^*(n|U_N)] + E[\hat{d}(n|U_N) \cdot e_O^*(n)] \\ + E[e_O(n) \cdot \hat{d}^*(n|U_N)] + E[e_O(n) \cdot e_O^*(n)]$$

bulunur. Her bir ifadenin eşdeğeri yazılarak

$$\sigma_d^2 = \sigma_d^2 + J_{\min} \quad (2.20)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $J_{\min}$ çekilirse eşitlik

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \sigma_d^2 \quad (2.21)$$

biçimini alır. Buradaki σ_d^2 , istenen yanıtın değışintisi, σ_d^2 ise kestirimin değışintisidir. Her ikisi birden sıfır ortalamalı kabul edilmektedir. Karesel ortalama hata her zaman 0 ile 1 arasında olduğundan (2.21) eşitliği normalize edilebilir. Bu eşitliğin her iki yanını σ_d^2 'ye bölünürse

$$\frac{J_{\min}}{\sigma_d^2} = 1 - \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2} \quad (2.22)$$

elde edilir. Bu eşitlik her zaman için geçerlidir. Çünkü $\sigma_d^2 > 0$ olduğundan hiç bir zaman sıfır olmaz. Eşitliğin sol tarafı

$$\varepsilon = \frac{J_{\min}}{\sigma_d^2} \quad (2.23)$$

biçiminde daha sade bir biçimde ifade edilebilir. Burada ε , normalize karesel ortalama hata diye isimlendirilir. (2.23) eşitliğinden yararlanılarak (2.22) eşitliği için

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sigma_d^2}{\sigma_d^2} \quad (2.24)$$

yazılır. Bu eşitlik hiç bir zaman negatif değeri almaz ve σ_d^2 / σ_d^2 oranı daima pozitif bir değerdir. Yani

$$0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad (2.25)$$

olmaktadır. Eğer ε sıfırsa, istenen yanıt ile süzgeç çıkışındaki kestirim arasında tam bir uyum vardır ve süzgeç mükemmel uyumlu

çalışmaktadır denir. Diğer taraftan eğer ε , 1'e eşit ise, bu iki büyüklük arasında hiç bir uyum yoktur ve süzgeç en kötü şekilde çalışmaktadır.

2.4. WIENER-HOPF DENKLEMLERİ

Süzgecin optimum çalışması için gerek ve yeter koşul (2.12)'de tanımlanan diklik kuralıdır. Optimum çalışma için gerekli olan bu gerek ve yeter koşul, (2.2) ve (2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$E[u(n-k) \cdot \{d(n) - \sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} \cdot u(n-i)\}^*] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Buradaki w_{oi} , optimum süzgecin impuls yanıtının i . katsayısıdır. Bu eşitlik düzenlenerek

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} \cdot E[u(n-k) \cdot u(n-i)^*] = E[u(n-k) \cdot d(n)^*], \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.27)$$

şeklinde yazılır. (2.27) eşitliğinin her iki yanı yorumlanırsa;

1-) Eşitliğin sol tarafındaki $E[u(n-k) \cdot u(n-i)^*]$ ifadesi, süzgeç girişinin özilişki fonksiyonuna

$$r(i-k) = E[u(n-k) \cdot u(n-i)^*] \quad (2.28)$$

eşittir.

2-) Eşitliğin sağ tarafındaki $E[u(n-k) \cdot d(n)^*]$ ifadesi ise, süzgeç girişi $u(n-k)$ ile istenen yanıt $d(n)$ arasındaki çapraz ilişkiye eşit

$$p(-k) = E[u(n-k) \cdot d(n)^*] \quad (2.29)$$

olduğu bulunur. (2.27), (2.28) ve (2.29) eşitlikleri yardımıyla süzgecin optimum çalışması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} \cdot r(i-k) = p(-k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Wiener-Hopf denklemleri diye isimlendirilen bu eşitlikte optimum süzgeç katsayıları, iki ilişki

fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Wiener-Hopf, sonlu sayıda tap sayısı içeren doğrusal süzgeçlere uyarlanırsa bu denklemdeki eşitlik sayısı M'e düşer.

$$\sum_{i=0}^{\infty} w_{oi} \cdot r(i-k) = p(-k) , k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.31)$$

Burada M, süzgecin tap sayısını gösterir.

Wiener-Hopf Denklemlerinin Matris Gösterilimi :

Şekil 2.3'te doğrusal bir süzgecin yapısı görülmektedir. Şekil 2.3'teki doğrusal süzgece ait tap girişleri $u(n), \dots, u(n-M+1)$ 'in ilişki matrisi R

$$R = E[u(n) \cdot u^H(n)] \quad (2.32)$$

biçiminde M*M boyutlu bir matristir. Burada $u(n)$

$$u(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T \quad (2.33)$$

biçiminde M*1 boyutlu tap giriş vektörüdür.

ilişki matrisi

$$R = \begin{bmatrix} r^*(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r^*(1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^*(M-1) & r^*(M-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

şeklinde açık olarak gösterilebilir.

Benzer şekilde süzgecin tap girişleri ile istenen yanıt arasındaki çapraz ilişki vektörü de

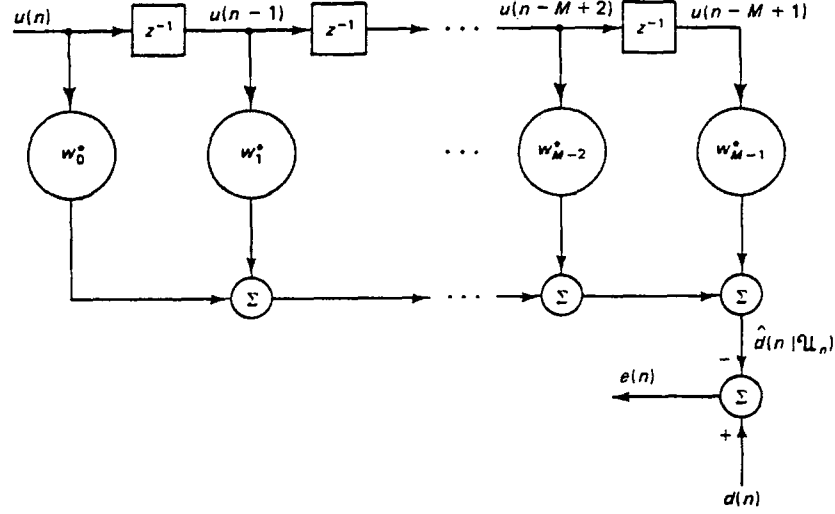
$$p = E[u(n) \cdot d^*(n)] \quad (2.35)$$

biçiminde veya açık şekli ile

$$p = [p(0), p(-1), \dots, p(1-M)]^T \quad (2.36)$$

biçiminde gösterilebilir. Wiener-Hopf denklemleri matrisel yapıda

$$R \cdot w_0 = p \quad (2.37)$$



Şekil 2.3 : Doğrusal Süzgeç

biçiminde tekrar yazılabilir. Bu formül yardımıyla w_0 'ı bulabilmek için, ilişki matrisi R , tekil olmayan bir matris olarak kabul edilir. (2.37) eşitliğinin her iki yanı ilişki matrisinin tersi R^{-1} , ile çarpılırsa

$$w_0 = R^{-1} \cdot p \quad (2.38)$$

sonucu elde edilir. Optimum tap ağırlıklarının bulunabilmesi için, iki büyüklüğün biliniyor olması gerekir. Bunlar, tap giriş vektörünün ilişki matrisi R ve tap giriş vektörü $u(n)$ ile istenen yanıt $d(n)$ arasındaki çapraz ilişki vektörü p 'dir.

2.5. HATA BAŞARIM YÜZEYİ

Wiener-Hopf denklemleri, Şekil 2.3'teki doğrusal süzgeç yapısı kullanılarak J fonksiyonunun değişiminin incelenmesi ile de bulunabilir. Bunun için kestirim hatası $e(n)$

$$e(n) = d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k \cdot u(n-k) \quad (2.39)$$

biçiminde yeniden yazılsın. (2.39) eşitliği ile bu eşitliğin eşleniği kullanılarak J fonksiyonu

$$\begin{aligned}
J &= E[e(n).e^*(n)] \\
&= E[|d(n)|^2] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k.E[u(n-k).d(n)] - \sum_{k=0}^{M-1} w_k.E[u(n-k).d(n)]^* \\
&\quad + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} w_k.w_i.E[u(n-k).u(n-i)]^*
\end{aligned} \tag{2.40}$$

biçiminde açık şekli ile yazılabilir. Şimdi (2.40) eşitliğinin ikinci satırının sağ tarafındaki dört tane ifade sırasıyla şöyle yorumlanabilir:

$$\begin{aligned}
a-) E[d(n).d^*(n)] \text{ ifadesi, istenen yanıtın değışintisine} \\
\sigma_d^2 = E[d(n).d(n)]^*
\end{aligned} \tag{2.41}$$

eşittir.

b-) $E[u(n-k).d(n)]^*$ ifadesi, tap giriş vektörü $u(n)$ ile istenen yanıt $d(n)$ arasındaki $M \times 1$ boyutlu çapraz ilişkiye

$$p(-k) = E[u(n-k).d^*(n)] \tag{2.42}$$

eşittir.

$$\begin{aligned}
c-) E[u^*(n-k).d(n)] \text{ ifadesi, çapraz ilişki, } p(-k)'nin \\
p^*(-k) = E[u^*(n-k).d(n)]
\end{aligned} \tag{2.43}$$

biçiminde karmaşık eşleniğidir.

$$\begin{aligned}
d-) E[u(n-k).u^*(n-i)] \text{ ifadesi, tap girişleri arasındaki ilişkiye} \\
r(i-k) = E[u(n-k).u^*(n-i)]
\end{aligned} \tag{2.44}$$

eşit olarak bulunur.

Karesel ortalama hata J , yukarıdaki açıklamalar yardımıyla

$$J = \sigma_d^2 - \sum_{k=0}^{M-1} w_k.p(-k) - \sum_{k=0}^{M-1} w_k.p^*(-k) + \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} w_k.w_i.r(i-k) \tag{2.45}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu ifadedeki tap girişleri ile istenen yanıt birleşik durağan süreçlerdir. Karesel ortalama hata J , süzgecin tap ağırlıklarının ikinci dereceden bir fonksiyonudur. J değışim yüzeyi bir çanak şeklindedir. Bu yüzey yalnızca bir noktada en küçük değere sahiptir. Bu en küçük değerde J fonksiyonu, J_{min} ile gösterilir. Bu

noktada gradyan vektör

$$\nabla_k(J) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.46)$$

ile gösterildiği gibi 0'a eşittir. Tap ağırlığının k. elemanı w_k

$$w_k = a_k + j.b_k$$

biçiminde karmaşık bir yapıya sahip olduğu düşünülürse gradyan vektör

$$\begin{aligned} \nabla_k(J) &= \frac{\partial J}{\partial a_k} + j \frac{\partial J}{\partial b_k} \\ &= -2.p(-k) + 2 \sum_{i=0}^{M-1} w_i.r(i-k) \end{aligned} \quad (2.47)$$

yazılır. Süzgecin optimum çalışması için (2.46) eşitliğindeki gerek ve yeter koşul, (2.47) eşitliğine uygulanıp düzenlenirse

$$\sum_{i=0}^{M-1} w_{oi}.r(i-k) = p(-k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

olan Wiener-Hopf denklemleri yeniden elde edilir.

En Küçük Karesel ortalama Hata :

Şekil 2.3'te gösterilen süzgeç, karesel ortalama hata anlamında optimum iken süzgeç çıkışında üretilen istenen yanıtın kestirimi $\hat{d}(n|U_n)$

$$\begin{aligned} \hat{d}(n|U_n) &= \sum_{k=0}^{M-1} w_{ok}.u(n-k) \\ &= w_o^H.u(n) \end{aligned} \quad (2.48)$$

biçiminde bulunabilir. (2.48) eşitliğindeki w_o , optimum süzgecin, $w_{o1}, w_{o2}, \dots, w_{o,M-1}$ elemlerinden oluşan tap ağırlık vektörü ve $u(n)$, tap giriş vektörüdür. $u(n)$, sıfır ortalamalı kabul edilmişti. Dolayısıyla $\hat{d}(n|U_n)$ de sıfır ortalamalı olur. $\hat{d}(n|U_n)$ 'nin değişintisinin vektörel gösterilimi

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_d^2 &= E[w_o^H.u(n).u(n).w_o] \\ &= w_o^H.E[u(n).u(n)].w_o \\ &= w_o^H.R.w_o \end{aligned} \quad (2.49)$$

olarak yazılır. $R.w_o$ yerine (2.37)'de bulunan sonuç yazılarak

$$\begin{aligned}\sigma_d^2 &= w_0 \cdot p \\ &= p^H \cdot w_0\end{aligned}\quad (2.50)$$

ifadesi bulunur. Bu ifade, (2.21) eşitliğinde yerine konarak

$$\begin{aligned}J_{\min} &= \sigma_d^2 - p^H \cdot w_0 \\ &= \sigma_d^2 - p^H \cdot R \cdot p\end{aligned}\quad (2.51)$$

elde edilir.

Hata Başarım Yüzeyinin Kanonik Biçimi :

Daha önce (2.45) eşitliğinde tanımlanan karesel ortalama hata J , matrisel yapıda, ilişki matrisi R ve çapraz ilişki vektörü p kullanılarak yeniden

$$J = \sigma_d^2 - w^H \cdot p - p^H \cdot w + w^H \cdot R \cdot w \quad (2.52)$$

biçiminde yazılsın. Şimdi (2.51) eşitliğinden σ_d^2 terimi çekilerek (2.51) eşitliğinde yerine konursa karesel ortalama hatanın kuadratik hali

$$J = J_{\min} + (w - w_0)^H \cdot R \cdot (w - w_0) \quad (2.53)$$

olarak bulunur. ilişki matrisinin özdeğerler ve özvektörler cinsinden ifadesi

$$R = Q \cdot \Lambda \cdot Q^H \quad (2.54)$$

şeklindedir. Bu eşitlik, (2.53) eşitliğinde yerine konursa

$$J = J_{\min} + (w - w_0)^H \cdot Q \cdot \Lambda \cdot Q^H \cdot (w - w_0) \quad (2.55)$$

eşitliği elde edilir. (2.55) eşitliğini kanonik halde

$$v = Q^H \cdot (w - w_0) \quad (2.56)$$

olarak tanımlansın. (2.55) eşitliğinde (2.56) eşitliği yerine konularak

$$J = J_{\min} + v^H \cdot \Lambda \cdot v \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned}J &= J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \cdot v_k \cdot v_k^* \\ &= J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \cdot |v_k|^2\end{aligned}\quad (2.58)$$

elde edilir. Bu elde edilen (2.58) eşitliği karesel ortalama hata J 'nin kanonik biçimini ifade eder.

3. DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ

Ayrık zamanlı süreçler kullanılarak yapılan incelemelerde karşılaşılan en önemli problemlerden biri de, durağan ayrık zamanlı rastgele sürecin, gelecekteki bir değerinin, geçmişteki örnek değerler kümesi yardımıyla öngörülmesi işlemidir. Öngörü işlemi, örneğin $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ örnek değerleri kullanılarak $u(n)$ 'nin bir kestirimini elde etmek biçiminde tanımlanmaktadır. $u_{n-1}, u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ örneklerinin oluşturduğu M boyutlu küme ve $u(n|U_{n-1})$ de verilen bu örnekler kümesinin bir öngörü değeri olarak tanımlanmaktadır. Doğrusal öngörü yapılırken, öngörü değeri, $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ örneklerinin bir doğrusal birleşimi olarak ifade edilir. Bu türden, geçmişteki örnek değerler kümesi kullanılarak yapılan öngörü işlemine ileri yönde tek adımlı doğrusal öngörü veya kısaca ileri yönde doğrusal öngörü denilir. Öngörü işleminin bir başka biçimi de, $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ örnekleri yardımıyla $u(n-M)$ örneğinin bulunması işlemidir. Bu ikinci türden öngörü işlemi de geri yönde doğrusal öngörü diye adlandırılır.

Bu bölümde, Wiener Süzgeç Kuramı temel alınarak ileri ve geri yönde öngörü işlemleri, bu öngörülerin yapıldığı yapılar ile bu yapılarda kullanılan ifadelerin anlamları ve bulunması için geliştirilen yöntemler incelenecektir.

3.1. İLERİ YÖNDE DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ

Şekil 3.1'de, M tane tap ağırlığına sahip doğrusal süzgeci içeren ileri yönde öngörücünün yapısı görülmektedir. Buradaki girişlerin hepsi, geniş anlamda durağan ve sıfır ortalamalı rasgele süreçler olarak kabul edilir. Bu kabuller altında, Wiener süzgeç kuramı uyarınca tap ağırlıklarının optimum değerlere sahip olduğu kabul edilsin. İleri yönde öngörü değeri $\hat{u}(n|U_n)$

$$\hat{u}(n|U_{n-1}) = \sum_{k=1}^M w_{0k}^* \cdot u(n-k) \quad (3.1)$$

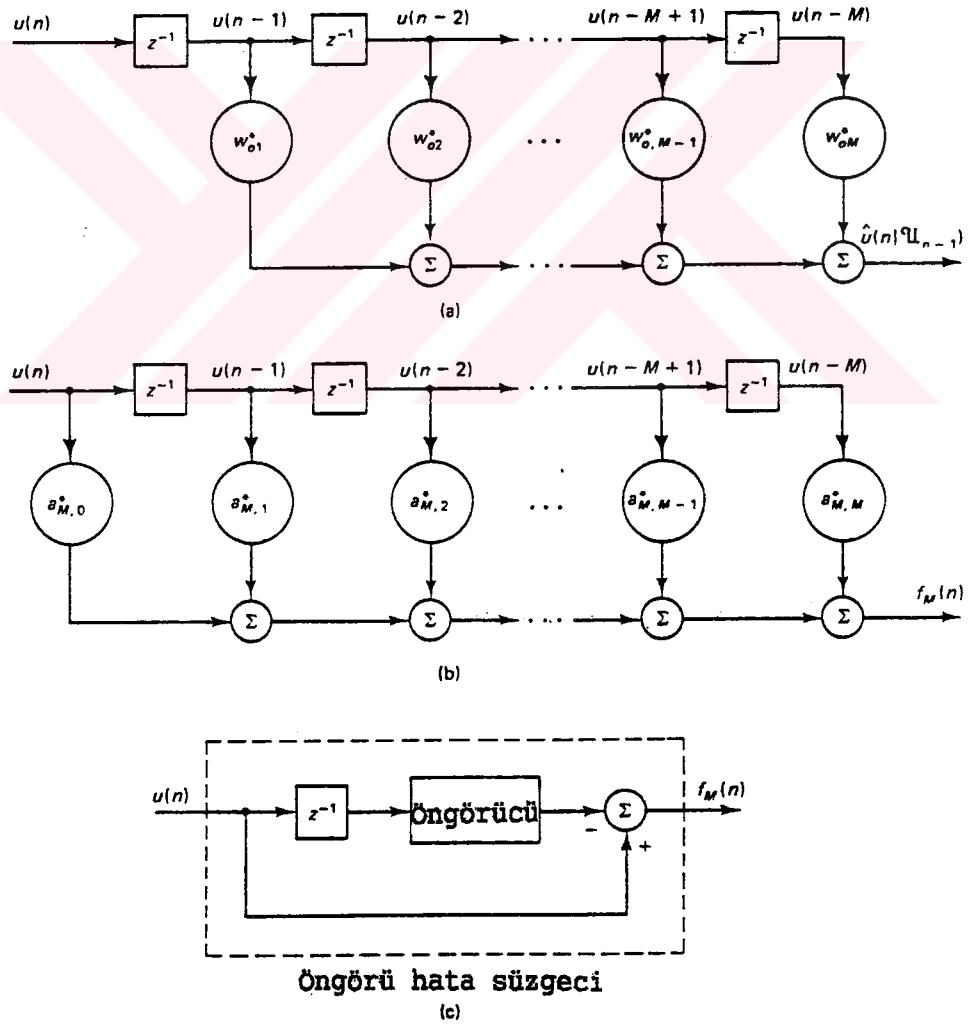
biçiminde tanımlanır. İstenen yanıt $d(n)$, giriş değişkeninin n anındaki değeri $u(n)$ 'e eşittir:

$$d(n) = u(n) \quad (3.2)$$

İleri yönde öngörü hatası $u(n)$ ile bu değer öngörü değeri olan $\hat{u}(n|U_{n-1})$ 'in arasındaki farka eşittir. İleri yönde öngörü hatasını $f_M(n)$

$$f_M(n) = u(n) - \hat{u}(n|U_{n-1}) \quad (3.3)$$

ile ifade edilmektedir. Buradaki M , ileri yönde öngörü hatası için



Şekil 3.1 (a) Öngörücü; (b) Öngörü hata süzgeci; (c) Öngörücü ile Öngörü hata süzgeci arasındaki ilişki

öngörücünün derecesini gösterir. Öngörü hatasının en küçük karesel ortalama değeri olan P_M

$$P_M = E[|f_M(n)|^2] \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. P_M 'in bir diğer anlamıda ileri yönde öngörü hatasının ortalama gücüdür. w_0 , Şekil 3.1(a)'daki ileri yönde öngörücünün $M \times 1$ boyutlu tap ağırlık vektörünü göstermektedir. Tap ağırlık vektörü w_0 açık olarak

$$w_0 = [w_{01}, w_{02}, \dots, w_{0M}]^T \quad (3.5)$$

biçiminde gösterilebilir.

Tap ağırlık vektörü w_0 'ın, Wiener-Hopf denklemleri yardımıyla bulunabilmesi için tap girişleri $u(n-1), \dots, u(n-M)$ 'in $M \times M$ boyutlu ilişki matrisi R ile tap girişleri ve istenen yanıt $u(n)$ arasındaki $M \times 1$ boyutlu çapraz ilişki vektörü p 'nin bilinmesi gereklidir. P_M 'in hesaplanabilmesi için üçüncü bir büyüklüğün, $u(n)$ 'nin değışintisinin bilinmesi gereklidir. Şimdi bu üç büyüklük teker teker incelensin:

1. Tap girişlerinin $M \times 1$ boyutlu tap giriş vektörü $u(n-1)$ olarak gösterilir. $u(n-1)$ 'in açık biçimi

$$u(n-1) = [u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)]^T \quad (3.6)$$

şeklindedir. Buradan tap girişlerinin ilişki matrisi

$$R = E[u(n-1) \cdot u^H(n-1)]$$

$$= \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir.

2. Tap girişleri vektörü $u(n-1)$ ile istenen yanıt $u(n)$ arasındaki çapraz ilişki vektörü

$$\begin{aligned}
E[u(n-1).u^*(n)] &= \begin{bmatrix} E[u(n-1).u^*(n)] \\ E[u(n-2).u^*(n)] \\ \vdots \\ E[u(n-M).u^*(n)] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r(-1) \\ r(-2) \\ \vdots \\ r(-M) \end{bmatrix} \\
&= r
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde gösterilir.

3. İstenen yanıt $u(n)$ 'nin değışintisi, $u(n)$ sıfır ortalamalı olduğundan $r(0)$ 'a eşittir.

Tablo 3.1'de, Wiener süzgeci, ileri yönde öngörücü ve daha sonra incelenecek olan geri yönde öngörücüde kullanılan değışik büyüklükler gösterilmektedir.

Bu tablo kullanılarak, (2.37) eşitliğindeki normal denklem, durağan girişler için ileri yönde öngörü problemine uyarlanırsa

$$R.w_0 = r \tag{3.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.51) eşitliğinin ilk satırda kullanılan ifadeler ileri yönde öngörü hata gücü için

TABLO 3.1 : Wiener süzgeç değışkenlerinin özeti

	Wiener süzgeci Şekil 2.1	İleri yönde öngörücü Şekil 3.1(a)	Geri yönde öngörücü Şekil 3.2(a)
Tap giriş vektörü	$u(n)$	$u(n-1)$	$u(n)$
İstenen yanıt	$d(n)$	$u(n)$	$u(n-M)$
Tap ağırlık vektörü	w_0	w_0	g
Kestirim hatası	$e(n)$	$f_M(n)$	$f_M(n)$
Tap girişlerinin ilişki matrisi	R	R	R
Tap girişleri ve istenen yanıt arasındaki çapraz ilişki vektörü	p	r	r^{B*}
En küçük karesel ortalama hata	J_{min}	P_M	P_M

$$P_M = r(0) - r^H \cdot w_0 \quad (3.10)$$

biçiminde yazılabilir.

(3.9) ve (3.10) eşitliklerinden de görüleceği gibi, ileri yönde öngörücünün tap ağırlık vektörü w_0 ve ileri yönde öngörü hatasının gücü P_M yalnızca giriş değişkenlerinin özilişki fonksiyonu ile elde edilebilir.

3.2. İLERİ YÖNDE ÖNGÖRÜ HATA SÜZGEÇİ

Şekil 3.1(a)'da görülen ileri yönde öngörücünün çıkışındaki istenen yanıtın öngörü değerinin nasıl bulunacağı (3.1) eşitliğinde belirtilmişti. Şimdi (3.1) ve (3.3) eşitliklerini kullanarak ileri yönde öngörü hatası

$$f_M(n) = u(n) - \sum_{k=1}^M w_{0k} \cdot u(n-k) \quad (3.11)$$

biçiminde yeniden tanımlanabilir. Tap ağırlıkları $a_{M,k}$, $k=0,1,\dots,M$, olacak biçimde yeni bir süzgeç düşünölsün. Bu yeni tap ağırlıkları ile ileri yönde öngörücünün tap ağırlıkları arasında

$$a_{M,k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -w_{0k}, & k = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.12)$$

biçiminde bir ilişki vardır. Bu ilişki yardımıyla (3.11) eşitliğinin sağ tarafı tek ifadeye indirgenerek

$$f_M(n) = \sum_{k=0}^M a_{M,k} \cdot u(n-k) \quad (3.13)$$

biçiminde yazılabilir. Bu giriş-çıkış ilişkisi, Şekil 3.1(b)'deki süzgeç ile gösterilir. $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M)$ kümesi yardımıyla ileri yönde öngörü hatası $f_M(n)$ 'i üreten bu süzgeç, çıkışındaki hatanın isminden dolayı ileri yönde öngörü hata süzgeci diye adlandırılır.

İleri Yönde Öngörü için Genişletilmiş Normal Denklem

(3.9) ve (3.10) eşitlikleri, bir matris altında

$$\begin{bmatrix} r(0) & r^H \\ r & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

biçiminde yazılabilir. Burada 0; M*1 boyutlu sıfır vektörüdür. Eşitliğin sol tarafındaki (M+1)*(M+1) boyutlu, ileri yönde öngörü hata süzgecinin tap girişlerine ait ilişki matrisinin açık şekli

$$\begin{bmatrix} r(0) & r^H \\ r & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & \dots & r(M) \\ r(-1) & r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-2) & r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M) & r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

biçimindedir. Benzer şekilde, (3.14) eşitliğinin sol tarafındaki (M+1)*1 boyutlu vektör de (3.12) eşitliği yardımıyla

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{M,0} \\ a_{M,1} \\ \vdots \\ a_{M,M} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

ileri yönde öngörü hata süzgeci vektörüne eşit olduğu bulunur. (3.15) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak (3.14) eşitliği açık bir şekilde

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M) & r(-M+1) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{M,0} \\ a_{M,1} \\ \vdots \\ a_{M,M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

biçiminde yazılır. (3.17) eşitliğindeki matrisel ifadeyi de (M+1) tane eşitlikten oluşan bir sistem halinde

$$\sum_{i=0}^M a_{M,1-r(1-i)} = \begin{cases} P_M, & i = 0 \\ 0, & i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.18)$$

gösterilebilir. Bu son iki eşitliğe, ileri yönde öngörü hata süzgecinin genişletilmiş normal denklemi denmektedir.

3.3. GERİ YÖNDE DOĞRUSAL ÖNGÖRÜ

Bu ana kadar $u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M)$ örnekleri yardımıyla $u(n)$ 'nin öngörüsünün yapılması, yani ileri yönde öngörü ele alındı. Doğal olarak aynı örnekleri kullanılarak geri yönde bir öngörü yapmak da mümkündür. Bu da, $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ örnekleri yardımıyla $u(n-M)$ 'in öngörüsünün yapılması anlamına gelir. Bu şekilde yapılan öngörüye geri yönde öngörü adı verilir.

$U(n), u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ örneklerinin oluşturduğu M boyutlu bir küme olarak tanımlanır. Tap girişleri olarak $u(n)$ kümesi kullanıldığında $u(n-M)$ 'in doğrusal öngörüsü

$$\hat{u}(n-M|U_n) = \sum_{k=1}^M g_k \cdot u(n-k+1) \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir.

Burada, $g_1, g_2, \dots, g_M$ tap ağırlıklarıdır. Şekil 3.2(a)'da (3.19) eşitliğinde tanımlanan geri yönde öngörücünün yapısı verilmiştir. Tap ağırlıkları, Wiener süzgeç kuramı uyarınca optimum değerlere sahip olduğu kabul edilerek geri yönde öngörüdeki istenen yanıt

$$d(n) = u(n-M) \quad (3.20)$$

biçiminde yazılır. Geri yönde öngörü hatası, $u(n-M)$ ile öngörü değeri $\hat{u}(n-M|U_n)$ arasındaki farka eşittir. Geri yönde öngörü hatasını $b_M(N)$ ile gösterilir ve

$$b_M(n) = u(n-M) - \hat{u}(n-M|U_n) \quad (3.21)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Öngörü hatasının en küçük karesel ortalama değeri aynı ileri yönde öngöründe olduğu gibi P_M ile gösterilir ve

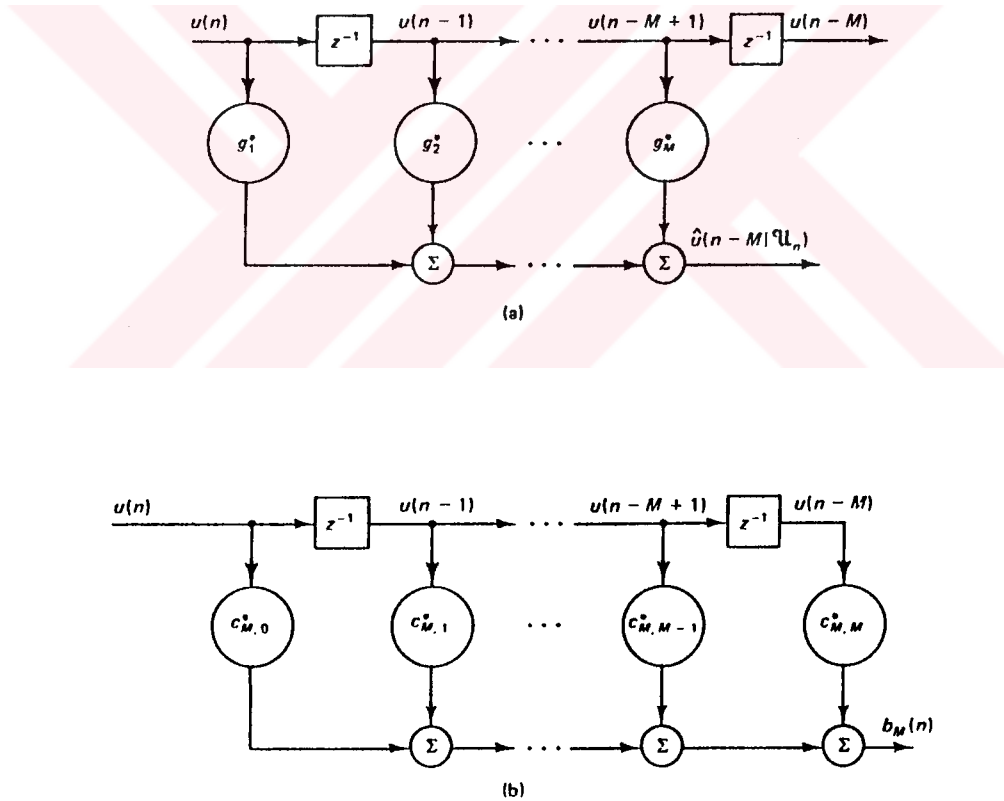
$$P_M = E[|b_M(n)|^2] \quad (3.22)$$

eşitliği ile tanımlanır. P_M benzer şekilde, geri yönde öngörü hatasının ortalama gücü olarak da yorumlanabilir.

$\mathbf{g}$, Şekil 3.2(a)'daki geri yönde öngörücünün $M \times 1$ boyutlu tap ağırlık vektörüdür ve

$$\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_M]^T \quad (3.23)$$

olarak gösterilir.



Şekil 3.2 (a) Geri yönde öngörücü (b) Geri yönde öngörü hata süzgeci

Geri yönde öngörücünün tap ağırlık vektörü g vektörü, normal denklem yardımıyla elde edilebilmesi için, tap girişlerinin $M \times M$ boyutlu ilişki matrisi R ile tap girişleri ile istenen yanıt $u(n-M)$ arasındaki $M \times 1$ boyutlu çapraz ilişki vektörü p 'nin bilinmesi gereklidir. P_M 'nin hesaplanabilmesi için üçüncü bir büyüklüğün, istenen yanıtın değişim-tisinin biliniyor olması gereklidir. Şimdi bu büyüklükler teker teker incelensin:

1. Şekil 3.2(a)'daki geri yönde öngörücünün tap giriş vektörü $u(n)$ ile gösterilir. $u(n)$ 'nin açık biçimi

$$u(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T \quad (3.24)$$

şeklindedir. Buradan tap girişlerinin ilişki matrisi

$$R = E[u(n) \cdot u^H(n)]$$

$$= \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(M-1) \\ r(-1) & r(0) & \dots & r(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(-M+1) & r(-M+2) & \dots & r(0) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

şeklinde ifade edilir.

2. Tap girişleri vektörü $u(n)$ ile istenen yanıt $u(n-M)$ arasındaki çapraz ilişki vektörü

$$\begin{aligned} E[u(n) \cdot u^*(n-M)] &= \begin{bmatrix} E[u(n) \cdot u^*(n-M)] \\ E[u(n) \cdot u^*(n-M)] \\ \vdots \\ E[u(n) \cdot u^*(n-M)] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r(M) \\ r(M-1) \\ \vdots \\ r(1) \end{bmatrix} \\ &= r^{B*} \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklinde gösterilir. Burada özilişki fonksiyonunun Hermitian özelliği kullanılmıştır. B, geri yönde olduğunu göstermekte ve * karmaşık eşlenik anlamına gelmektedir.

3. istenen yanıt, $u(n-M)$ 'nin değışintisi $r(0)$ 'a eşittir.

Tablo 3.1'in son sütunundaki geri yönde öngörücüye ait ifadeler yardımıyla (2.37) eşitliğindeki normal denklem, durağan girişler için geri yönde öngörü problemine uygulanırsa

$$R.g = r^{B*} \quad (3.27)$$

elde edilir. (2.51) eşitliğini geri yönde öngörü hata gücü için

$$P_M = r(0) - r^{BT}.g \quad (3.28)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. İleri yönde doğrusal öngörü işleminde olduğu gibi, geri yönde öngörü işleminde de tap ağırlıkları ve geri yönde öngörü hata gücünü bulabilmek için giriş değışkenlerinin özilişki fonksiyonu R'yi bilmek gereklidir.

İleri Ve Geri Yönde Öngörücüler Arasındaki İlişki

İleri ve geri yönde öngörülere ait normal denklemlerin sağ taraflarındaki vektörler karşılaştırıldığında, (3.27) eşitliğinin (3.9) eşitliğine göre iki farklılığı göze çarpar:

(i) (3.27) eşitliğindeki vektör geri yönde sıralanmıştır.

(ii) Vektörün elemanları karmaşık eşlenik şeklindedir.

Bu farklılıkları gidermek için (3.27) eşitliğinin sağ yanındaki vektörün elemanları geri yönde sıralansınlar. Bu işlem anında eşitlik

$$R^T.g^B = r^* \quad (3.29)$$

biçimini alır. R^T , ilişki matrisi R'nin tranzpozudur. Eşitliğin her iki yanının karmaşık eşleniği alınırsa, eşitlik

$$R^H.g^{B*} = r \quad (3.30)$$

biçimine dönüşür. R ilişki matrisinin $R^H = R$ özelliği kullanılarak bu eşitlik için

$$R.g^{B*} = r \quad (3.31)$$

yazılabilir. (3.9) ve (3.31) eşitliklerini karşılaştırarak, ileri yönde öngörücü ile geri yönde öngörücünün tap ağırlıkları arasındaki ilişkinin

$$g^{B*} = w_0 \quad (3.32)$$

olduğu görülür. Öngörü hata gücü P_M , hem ileri yönde hem de geri yönde öngörüler için aynı sembol ile gösterilmişti. Bunun nedenini göstermek için, $r^{BT}.g = r^T.g^B$ ilişkisi kullanılarak (3.28) eşitliği

$$P_M = r(0) - r^T.g^B \quad (3.33)$$

biçiminde yazılıp (3.33) eşitliğinin her iki yanının karmaşık eşleniği alınırsa eşitlik

$$P_M = r(0) - r^H.g^{B*} \quad (3.34)$$

biçimine dönüştürülür. P_M ve $r(0)$ gerçel değerli olduğundan bu işlem den etkilenmezler. (3.10) ve (3.34) eşitlikleri, (3.32) eşitliğindeki ifade kullanılarak karşılaştırıldığında, geri yönde öngörü hata gücü ile ileri yönde öngörü hata gücünün tamamen aynı olduğu görülür. Bu nedenle her iki hata gücü de aynı sembol ile gösterilir.

3.4. GERİ YÖNDE ÖNGÖRÜ HATA SÜZGEÇİ

Geri yönde öngörü hatası $b_M(n)$, istenen yanıt $u(n-M)$ ile bu yanıtın doğrusal öngörüsü $u(n-M|U_n)$ arasındaki farka eşittir. (3.19) ve (3.21) eşitlikleri yardımıyla geri yönde öngörü hatası $b_M(n)$

$$b_M(n) = u(n-M) - \sum_{k=1}^M g_k^* . u(n-k+1) \quad (3.35)$$

olarak yazılabilir. Tap ağırlıkları $c_{M,k}$, $k=0,1,\dots,M$, olacak şekilde yeni bir süzgeç düşünölsün. Bu yeni tap ağırlıkları ile geri yönde öngörücünün tap ağırlıkları arasında

$$c_{M,k} = \begin{cases} -g_{k+1} , & k = 0 \\ 1 , & k = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.36)$$

biçiminde bir ilişki vardır. Bu ilişki yardımıyla (3.35) eşitliği yeniden yazılırsa eşitlik

$$b_M(n) = \sum_{k=0}^M c_{M,k} \cdot u(n-k) \quad (3.37)$$

biçimini alır. (3.32) eşitliğinin yardımı ile geri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıkları, ileri yönde öngörücünün tap ağırlıkları cinsinden

$$c_{M,k} = \begin{cases} -w_{0k,M-k}^* , & k = 0, 1, \dots, M-1 \\ 1 , & k = M \end{cases} \quad (3.38)$$

şeklinde ya da ileri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıkları cinsinden

$$c_{M,k} = a_{M,M-k} , \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik yardımıyla geri yönde öngörü hata süzgecinin giriş-çıkış ilişkisi

$$b_M(n) = \sum_{k=0}^M a_{M,M-k} \cdot u(n-k) \quad (3.40)$$

biçimini alır. Bu giriş-çıkış ilişkisi, Şekil 3.2(c)'deki süzgeçte gösterilmiştir. (3.40) eşitliğinden de görüleceği gibi ileri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıklarınının karmaşık eşlenikleri alınarak yerleri tersine çevrilirse süzgeç, geri yönde öngörü hata süzgecine dönüşür.

Geri yönde Öngörü için Genişletilmiş Normal Denklem :

(3.27) ve (3.28) eşitlikleri bir matris altında

$$\begin{bmatrix} R & r^{B*} \\ r^{BT} & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_M \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

biçiminde yazılabilir. Burada 0, M*1 boyutlu sıfır vektörüdür. Eşitliğin

sol tarafındaki $(M+1)*(M+1)$ boyutlu, geri yönde öngörü hata süzgecinin tap girişlerinin ilişki matrisi R 'nin açık şekli

$$\left[\begin{array}{c|c} R & r^{B*} \\ \hline r^{BT} & R \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} r(0) & r(1) & . & . & r(2) & r(M) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ r(-M+1) & r(-M+2) & . & . & r(0) & r(1) \\ \hline r(-M) & r(-M+1) & . & . & r(-1) & r(0) \end{array} \right] \quad (3.42)$$

biçimindedir. (3.42), (3.35) ve (3.39) eşitliklerini kullanarak (3.41) eşitliği

$$\left[\begin{array}{cccc} r(0) & r(1) & . & . & r(M) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ r(-M+1) & r(-M+2) & . & . & r(1) \\ r(-M) & r(-M+1) & . & . & r(0) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_{M,M}^* \\ . \\ . \\ a_{M,1}^* \\ a_{M,0}^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ P_M \end{array} \right] \quad (3.43)$$

şeklinde açık biçimde gösterilebilir. (3.43) eşitliğindeki matrisel ifade de $(M+1)$ tane eşitlikten oluşan bir sistem olarak

$$\sum_{i=0}^M a_{M,M-i}^* r(1-i) = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, M \\ P_M, & i = M \end{cases} \quad (3.44)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu son iki eşitliğe, geri yönde öngörü hata süzgecinin genişletilmiş normal denklemi denir.

3.5. LEVINSON-DURBIN YİNELEMESİ

Bu kısımda, daha önce çıkarılan, genişletilmiş normal denklem yardımıyla öngörü hata süzgeci katsayılarını ve öngörü hata gücünü doğrudan hesaplamada kullanılacak bir yöntem gösterilecektir. Bu yöntem, bir yineleme işlemidir ve ilişki matrisinin Toeplitz yapısını kullanılması ile gerçekleşir. Bu yöntem, ilk olarak Levinson(1947) tarafından kullanıldığı, daha sonraları Durbin(1960) tarafından yeniden

düzenlendiği için Levinson-Durbin yinelemesi olarak adlandırılmıştır. Yöntem, m. dereceden bir öngörü hata süzgecinin uygun çözümünü hesaplamak için, (m-1). dereceden bir süzgecin genişletilmiş normal denkleminin çözümünden yararlanır. Süzgeç dereceleri $m=1,2,\dots,M$ şeklindedir ve M sonuncu süzgecin derecesidir. Levinson-Durbin yineleme yönteminin incelenbilmesi için ileri ve geri yönde öngörülere ait matrisel ifadelerden yararlanılacaktır. a_m , m. dereceden bir ileri yönde öngörü hata süzgecinin $(m+1)*1$ boyutlu tap ağırlık vektörü olarak tanımlanmaktadır. Geri yönde öngörü hata süzgecinin de $(m+1)*1$ boyutlu tap ağırlık vektörü, a_m vektörünün elemanlarının tersine dizilmiş ve karmaşık eşleniklerinin alınmış hali olan a^{B*} 'dir. Bu gösterimdeki m indisi, tap ağırlık vektörünün ait olduğu süzgecin derecesini göstermektedir. Levinson-Durbin tekrarı eşdeğer iki yoldan biriyle yapılabilir:

1. Bir ileri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlık vektörü, bir alt dereceli ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerinin tap ağırlık vektörleri cinsinden

$$a_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ B^* \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, Γ_m sabit bir sayıdır. Matrisel ifade

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + \Gamma_m \cdot a_{m-1,m-k}^*, \quad k = 0,1,\dots,m \quad (3.46)$$

açık biçimi ile de gösterilebilir. Bu eşitlikte, $a_{m,k}$, m. dereceden ileri yönde öngörü hata süzgecinin k. tap ağırlığı $a_{m-1,m-k}^*$ da, (m-1). dereceden geri yönde öngörü hata süzgecinin k. tap ağırlığıdır. (3.46) eşitliğinde $a_{m-1,0}=1$ ve $a_{m-1,m}=0$ 'dır.

2. Benzer şekilde, bir geri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlık vektörü de, bir alt dereceli ileri ve geri yönde öngörü süzgeçlerinin tap ağırlık vektörleri cinsinden

$$a_m^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B^* \\ a_{m-1} \end{bmatrix} + \Gamma_m^* \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlik de

$$a_{m,m-k}^* = a_{m-1,m-k}^* + \Gamma_m^* a_{m-1,k}^*, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.48)$$

açık biçimi ile yazılabilir. Burada, $a_{m,m-k}^*$, m. dereceden geri yönde öngörü hata süzgecinin k. tap ağırlığıdır.

Levinson-Durbin yinelemesi, genellikle (3.45) ve (3.46) eşitliklerinde gösterilen ileri yönde öngörü durumu için formüle edilmiştir. Γ_m sabitinin yineleme yöntemindeki anlamını belirlemek için aşağıdaki dört tane açıklamadan yararlanılacaktır:

1. (3.45) eşitliğinin her iki yanı m. dereceden ileri yönde öngörü süzgecindeki $u(n), u(n-1), \dots, u(n-m)$ tap girişlerinin ilişki matrisi R_{m+1} ile çarpılarak

$$R_{m+1} \cdot a_m = \begin{bmatrix} P_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

elde edilir.

2. (3.45) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için R_{m+1} ilişki matrisinin aşağıdaki parçalanmış biçimi

$$R_{m+1} = \begin{bmatrix} R_m & r_m^{B*} \\ r_m^{BT} & r_m^{(0)} \end{bmatrix}$$

kullanılır. Bu parçalanmış yapı, (3.49) eşitliğinde yerine konursa

$$R_{m+1} \cdot \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_m & r_m^{B*} \\ r_m^{BT} & r_m^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} R_m \cdot a_{m-1} \\ r_m^{BT} \cdot a_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

elde edilir. Matristeki ilk satır, $(m-1)$. dereceden ileri yönde öngörü hata süzgeci için

$$R_m \cdot a_{m-1} \approx \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ 0_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

genişletilmiş denklem şeklindedir. P_{m-1} , bu süzgecin öngörü hata gücü ve 0_{m-1} , $(m-1)*1$ boyutlu sıfır vektördür. (3.50) eşitliğindeki ikinci satır

$$\begin{aligned} \Delta_{m-1} &= r_m^{BT} \cdot a_{m-1} \\ &= [r(-m), r(1-m), \dots, r(-1)] \begin{bmatrix} a_{m-1,0} \\ a_{m-1,1} \\ \vdots \\ a_{m-1,m-1} \end{bmatrix} \\ \Delta_{m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} \cdot r(k-m) \end{aligned} \quad (3.52)$$

olarak tanımlanmaktadır. (3.51) ve (3.52) eşitlikleri, (3.50) eşitliğinde yerine konursa (3.45) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için

$$R_{m+1} \cdot \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ 0_{m-1} \\ m-1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

yazılabilir.

3. (3.45) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci terim için R_{m+1} matrisinin aşağıdaki parçalanmış biçimi

$$R_{m+1} = \begin{bmatrix} r_m^{(0)} & r_m^H \\ r_m & R_m \end{bmatrix}$$

kullanılır. Bu yapı (3.53) eşitliğinde yerine konursa

$$\begin{aligned}
R_{m+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ B^* \\ a_{m-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_m(0) & r_m^H \\ r_m & R_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ B^* \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_m^H B^* \\ r_m \cdot a_{m-1} \\ R_m \cdot a_{m-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

elde edilir. Matrisin ilk satır elemanı $r_m^H B^* a_{m-1}$ açık olarak

$$\begin{aligned}
r_m^H B^* a_{m-1} &= [r(1), r(2), \dots, r(m)] \begin{bmatrix} a_{m-1, m-1}^* \\ a_{m-1, m-2} \\ \vdots \\ a_{m-1, 0}^* \end{bmatrix} \\
&= \sum_{l=1}^m r(l) \cdot a_{m-1, m-1}^* \\
&= \Delta_{m-1}^*
\end{aligned} \tag{3.55}$$

ile gösterilmektedir. (3.54) eşitliğindeki matrisin ikinci satır elemanı, $(m-1)$. dereceden geri yönde öngörü hata süzgeci için

$$R_m \cdot a_{m-1}^* = \begin{bmatrix} 0_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

genişletilmiş normal denklem şeklindedir. (3.54) ve (3.55) eşitlikleri (3.56) eşitliğinde yerine konursa eşitlik

$$R_{m+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ B^* \\ a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ 0_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.57}$$

biçimini alır.

4. ilk üç şıkta elde edilen sonuçlar yardımıyla (3.45) eşitliği

$$\begin{bmatrix} P_m \\ 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{m-1} \\ 0_{m-1} \\ \Delta_{m-1} \end{bmatrix} + \Gamma_m \cdot \begin{bmatrix} \Delta_{m-1}^* \\ 0_{m-1} \\ P_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitliğin solundaki ilk satır elemanı

$$P_m = P_{m-1} + \Gamma_m \Delta_{m-1}^* \quad (3.59)$$

ve son satır elemanı ise

$$0 = \Delta_{m-1} + \Gamma_m P_{m-1} \quad (3.60)$$

biçimindedir. Bu ikinci eşitlikten Γ_m sabitinin

$$\Gamma_m = - \frac{\Delta_{m-1}}{P_{m-1}} \quad (3.61)$$

olduğunu bulunabilir. (3.60) ve (3.61) eşitlikleri kullanılarak (3.59)

eşitliğindeki Δ_{m-1} yok edilirse

$$P_m = P_{m-1} (1 - |\Gamma_m|^2) \quad (3.62)$$

elde edilir.

Öngörü hata süzgecinin derecesi arttıkça, ilgili öngörü hata gücü değeri normalde azalır veya en azından aynı kalır. P_m , hiç bir zaman negatif bir değerde olamaz. P_m 'in sınırları

$$0 \leq P_m \leq P_{m-1}, \quad m \geq 1 \quad (3.63)$$

arasında değişmektedir. 0. dereceden bir öngörü hata süzgeci için; $P_0 = r(0)$ olduğundan (3.62) eşitliği, M. dereceden öngörü hata süzgeci için genelleştirerek P_m

$$P_M = P_0 \prod_{m=1}^M (1 - |\Gamma_m|^2) \quad (3.64)$$

biçiminde yazılabilir.

Γ_m ve Δ_{m-1} Değişkenlerinin Yorumu

Levinson-Durbin yinelemesinin M. dereceli, son öngörü hata süzgecine uygulanmasından çıkarılan sonuçla, Γ_m değişkenleri yansımaya katsayıları olarak isimlendirilir. (3.63) eşitliğinden yararlanarak yansımaya katsayıları için

$$|\Gamma_m| \leq 1 \quad (3.65)$$

koşulu yazılabilir. m. dereceden bir öngörü hata süzgeci için yansımaya

katsayısı Γ_m 'in süzgecin son tap ağırlığına eşit olduğu, yani $\Gamma_m = a_{m,m}$ olduğu görülür.

Δ_{m-1} için ise, ileri yönde öngörü hatası $f_{m-1}(n)$ ile bir geciktirilmiş geri yönde öngörü hatası $b_{m-1}(n-1)$ arasındaki çapraz ilişki şeklinde bir yorum getirilebilir. Bu da

$$\Delta_{m-1} = E[b_{m-1}(n-1) \cdot f_{m-1}^*(n)] \quad (3.66)$$

biçiminde gösterilebilir. 0. dereceden bir öngörü hata süzgeci için :

$$f_0(n) = b_0(n) = u(n)$$

olduğu $a_{m,0}=1$ özelliği kullanılarak kolaylıkla bulunabilir. 0 dereceli süzgeç için çapraz ilişki değişkeninin

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= E[b_0(n-1) \cdot f_0^*(n)] \\ &= E[u(n-1) \cdot u(n)] \\ &= r(-1) \end{aligned}$$

olduğu bulunabilir. (3.61) eşitliğini ileri ve geri yönde öngörü hataları cinsinden yeniden yazılırsa

$$\Gamma_m = - \frac{E[b_{m-1}(n-1) \cdot f_{m-1}^*(n)]}{E[|f_{m-1}(n)|^2]} \quad (3.67)$$

elde edilir.

Levinson-Durbin Yinelemesinin Uygulaması :

Öngörü hata süzgeci katsayıları $a_{m,k}$ ile öngörü hata gücü P_M 'in hesaplanması için Levinson-Durbin yinelemesinin kullanılmasının mümkün olduğu iki yol vardır:

1. Giriş değişkenlerinin özilişki fonksiyonu biliniyorsa, (3.52) ve (3.62) eşitlikleri yardımıyla, $\Delta_0=r(-1)$, $P_0=r(0)$, $a_{m,0}=1$ ve $k>m$ için $a_{m,k}=0$ alınarak hesaplama işlemi $m=M$ olana dek tekrarlanır. Bu uygulama, Yule-Walker kestirimi olarak bilinir.

2. Eğer, $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ yansımaya katsayıları ve $r(0)$ özilişki fonksiyonu biliniyorsa öngörü hata süzgecinin katsayıları ve öngörü hata

gücü

$$a_{m,k} = a_{m-1,k} + \Gamma_m \cdot a_{m-1,m-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

ve

$$P_m = P_{m-1} \cdot (1 - |\Gamma_m|^2)$$

formülleri yardımıyla hesaplanabilir.

Levinson-Durbin Yinelemesinin Ters Biçimi :

Levinson-Durbin yinelemesinin normal uygulamasında yansım katsayıları $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ verilir ve M. dereceden bir öngörü hata süzgecinin ilgili tap ağırlıkları $a_{M,1}, \dots, a_{M,M}$ 'in hesaplanması istenir. Fakat sık sık bu uygulamanın tersinin yapılması gerekir. Ters yineleme işlemini incelemek için, (3.46) ve (3.48) eşitlikleri matrisel yapıda

$$\begin{bmatrix} a_{m,k} \\ * \\ a_{m,m-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_m \\ * & 1 \\ \Gamma_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1,k} \\ * \\ a_{m-1,m-k} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

biçiminde birleştirilir. $a_{m-1,k}$, (3.68) eşitliği yardımıyla

$$a_{m-1,k} = \frac{a_{m,k} - a_{m,m} \cdot a_{m,m-k}}{1 - |a_{m,m}|^2}, \quad k=0, 1, \dots, m \quad (3.69)$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitlikte $\Gamma_m = a_{m,m}$ ilişkisi kullanılmıştır. M. dereceden bir öngörü hata süzgecinin tap ağırlıkları $\{a_{M,k}\}$ ile (3.69) eşitliği kullanılarak derece sayısı $m=M, M-1, \dots, 2$ olacak şekilde azaltılır ve m. dereceden öngörü hata süzgecinin katsayıları böylece bulunmuş olur. Bu yöntem ters Levinson-Durbin yinelemesi olarak adlandırılır.

3.6. YANSIMA KATSAYILARI İLE ÖZİLİŞKİ FONKSİYONU ARASINDAKİ İLİŞKİ

$r(0), r(1), \dots, r(M)$ özilişki değerlerini $r(0), \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ kümesinin yardımıyla bulunabileceğini göstermek için (3.52) ve (3.60) eşitliklerinde Δ_{m-1} yok edilirse

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{m-1,k} \cdot r(k-m) = -\Gamma_m \cdot P_{m-1} \quad (3.70)$$

biçiminde bir ifade bulunur. $a_{m-1,0}=1$ ve $r(m)=r^*(-m)$ özellikleri kullanılarak (3.70) eşitliği düzenlenirse

$$r(m) = -\Gamma_m \cdot P_{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1,k} \cdot r(m-k) \quad (3.71)$$

biçiminde istenen yineleme ilişkisi elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla da görülebileceği gibi verilen $r(0), \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$ kümesi ile (3.46) ve (3.62) eşitlikleri de kullanarak $r(0), r(1), \dots, r(M)$ özilişki değerleri bulunabilir.

$|\Gamma_m| \leq 1$ olduğundan herhangi bir m değerinde, giriş işaretinin özilişki fonksiyonunun değeri $r(m)$, merkezi

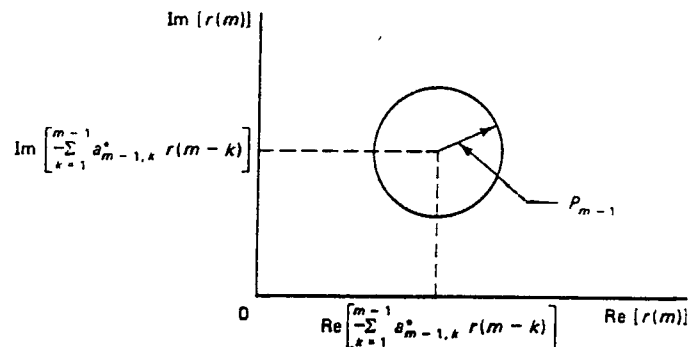
$$-\sum_{k=1}^{m-1} a_{m-1,k} \cdot r(m-k)$$

olan ve yarıçapı P_{m-1} ile sınırlanan dairenin (sınırlar dahil olmak üzere) içinde bir yerdedir. Bu durum Şekil 3.3'te gösterilmiştir.

Şimdi özilişki fonksiyonunun $r(1), r(2), \dots, r(M)$ değerlerinin bilindiği farzedilsin. (3.72) eşitliği, Γ_m için yeniden düzenlenirse yansıma katsayıları

$$\Gamma_m = -\frac{1}{P_{m-1}} \sum_{k=0}^m a_{m-1,k} \cdot r(k-m) \quad (3.72)$$

denklemleri ile hesaplanır.



Şekil 3.3 : $|\Gamma_m| \leq 1$ şartı için $r(m)$ 'in değişimi

3.7. İLERİ VE GERİ YÖNDE ÖNGÖRÜ HATA SÜZGEÇLERİNİN TRANSFER

FONKSİYONLARI İLE ARALARINDAKİ İLİŞKİ

m. dereceden ileri yönde öngörü hata süzgeci için transfer fonksiyonu $H_{f,m}(z)$ ile gösterilir. Bu süzgecin impuls yanıtları, $m=M$ için $a_{m,k}^*$, $k=0,1,\dots,m$ 'dir. İleri yönde öngörü hata süzgecin transfer fonksiyonu, impuls yanıtlarının z-dönüşümü olarak

$$H_{f,m}(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \cdot z^{-k} \quad (3.73)$$

biçiminde gösterilir. (3.46) eşitliğinde m. dereceden bu süzgecin katsayılarının (m-1). dereceden süzgecinin katsayıları yardımıyla hesaplanması gösterilmişti. (3.46) ve (3.73) eşitlikleri birleştirilirse

$$\begin{aligned} H_{f,m}(z) &= \sum_{k=0}^m a_{m,k} \cdot z^{-k} + \Gamma_m^* \sum_{k=0}^m a_{m-1,m-k} \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^m a_{m,k} \cdot z^{-k} + \Gamma_m \cdot z^{-1} \sum_{k=0}^m a_{m-1,m-k} \cdot z^{-k} \end{aligned}$$

elde ediliir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim, (m-1). dereceden ileri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu $H_{f,m-1}(z)$ 'e ve ikinci terim de, (m-1). dereceden geri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu $H_{b,m-1}(z)$ 'e eşittir. Bu açıklama altında (3.74) eşitliği

$$H_{f,m}(z) = H_{f,m-1}(z) + \Gamma_m \cdot z^{-1} \cdot H_{b,m-1}(z) \quad (3.75)$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

Bu eşitlikten de görülebileceği gibi m. dereceden bir ileri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu $H_{f,m}(z)$, (m-1). dereceden ileri yönde ve geri yönde öngörü süzgeçlerinin transfer fonksiyonları ve Γ_m yansıma katsayısı ile hesaplanabilir.

z-düzlemindeki birim daire üzerinde, $H_{f,m-1}(z)$ ve $H_{b,m-1}(z)$ trans-

$$|H_{f,m-1}(z)| = |H_{b,m-1}(z)|, \quad |z|=1$$

sonucu elde edilir. Yansıma katsayılarının tüm m değerleri için $|\Gamma_m| < 1$ koşulunu yerine getirdiği kabul edilirse, z - düzlemindeki birim daire üzerinde

$$|\Gamma_m \cdot H_{b,m-1}(z)| < |H_{f,m-1}(z)| = |H_{b,m-1}(z)|, \quad |z|=1 \quad (3.76)$$

koşulunu sağladığı bulunur.

impuls yanıtı, $a_{m,m-k}$, $k=0,1,\dots,m$ katsayıları ile gösterilen, m . dereceden bir geri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu $H_{b,m}(z)$ ile gösterilir. Geri yönde öngörü hata süzgecin transfer fonksiyonu, impuls yanıtlarının z -dönüşümü olarak

$$H_{b,m}(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,m-k} \cdot z^{-k} \quad (3.77)$$

biçiminde gösterilebilir. (3.75) ve (3.48) eşitlikleri yardımıyla

$$H_{b,m}(z) = z^{-1} \cdot H_{b,m-1}(z) + \Gamma_m \cdot H_{f,m-1}(z) \quad (3.78)$$

yazılabilir. Bu eşitlikten de görülebileceği gibi m . dereceden geri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu, $(m-1)$. dereceden ileri yönde ve geri yönde öngörü süzgeçlerinin transfer fonksiyonları ve yansıma katsayısı Γ_m ile bulunabilir.

İleri yönde Ve Geri yönde Öngörü Hata Süzgeçlerinin Transfer Fonksiyonları Arasındaki İlişki :

Eşit dereceli ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeçlerinin transfer fonksiyonları arasındaki ilişki bulunursa, bu transfer fonksiyonlarından bir tanesi verildiğinde diğer transfer fonksiyonu kolaylıkla bulunabilir. Bunun için m . dereceden ileri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonunun karmaşık eşleniği alınarak

$$H_{f,m}^*(z) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \cdot (z^*)^{-k} \quad (3.79)$$

yazılıp, bu eşitlikte z yerine $(1/z^*)$ konulursa

$$H_{f,m}^*(1/z^*) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \cdot z^k$$

elde edilir. Daha sonra da k yerine $m-k$ yazılarak

$$H_{f,m}^*(1/z^*) = z^m \sum_{k=0}^m a_{m,m-k} \cdot z^{-k} \quad (3.80)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafına dikkat edilecek olursa, $H_{b,m}(z)$ transfer fonksiyonunun z^m ile çarpılmış hali olduğu görülür. Buradan istenen ilişki

$$H_{b,m}(z) = z^{-m} \cdot H_{f,m}^*(1/z^*) \quad (3.81)$$

şeklinde yazılabilir.

İleri Ve Geri yönde Öngörü Hataları Arasındaki ilişki :

m . dereceden bir geri yönde öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonu $H_{b,m}(z)$

$$H_{b,m}(z) = \frac{B_m(z)}{U(z)} \quad (3.82)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B_m(z)$, süzgeç çıkışındaki, geri yönde öngörü hata dizisi, $\{b_m(n)\}$ 'in z -dönüşümüdür. $U(z)$ ise, süzgece uygulanan işaret $\{u(n)\}$ 'in z -dönüşümüdür. Benzer şekilde ileri yönde öngörü hata süzgecine ait transfer fonksiyonu da

$$H_{f,m}(z) = \frac{F_m(z)}{U(z)} \quad (3.83)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $F_m(z)$, süzgeç çıkışındaki ileri yönde öngörü hata dizisi $\{f_m(n)\}$ 'in z -dönüşümüdür. (3.82) ve (3.83) eşitlikleri yardımıyla

$$B_m(z) = \frac{H_{b,m}(z)}{H_{f,m}(z)} \cdot F_m(z) \quad (3.84)$$

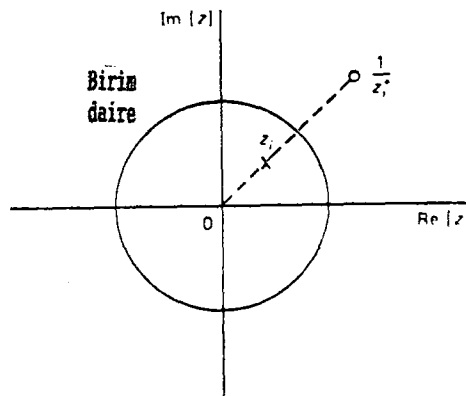
yazılabilir. $H_{f,m}(z)/H_{b,m}(z)$ oranı, ileri ve geri öngörü hata süzgecinin transfer fonksiyonlarına ait sıfırların çarpımı biçiminde

$$\frac{H_{b,m}(z)}{H_{f,m}(z)} = \prod_{i=1}^m \frac{(z^{-1} - z_i^*)}{(1 - z_i \cdot z^{-1})} \quad (3.85)$$

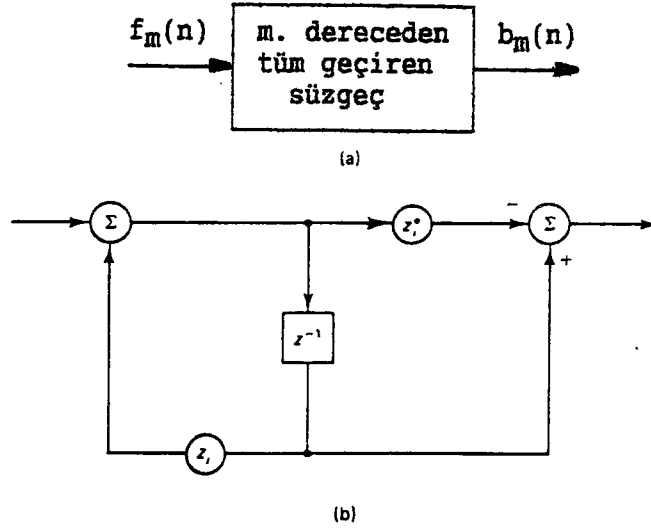
yazılabilir. Tüm i değerleri için $|z_i| < 1$ olarak kabul edilir. Transfer fonksiyonunun kutupları ve sıfırları, z -düzlemindeki birim daireye göre birbirinin tersidir. Yani kutuplar birim dairenin içinde, sıfırlar dışında yer alır. Bu durum Şekil 3.4'de gösterilmiştir. Bu tür bir transfer fonksiyonuna sahip süzgeç tüm geçiren süzgeç olarak isimlendirilir. Süzgecin genlik cevabı birim daire üzerindeki tüm z değerleri için "1" olacağından bu adı alır. Yani tüm frekansları, genlik bozulmasına uğratmadan geçirir.

İleri yönde öngörü hata dizisi, Şekil 3.5'de gösterildiği gibi, m . dereceden bir tüm geçiren süzgeçten geçirilerek geri yönde öngörü hata dizisine çevrilebilir. Bu süzgeç, tüm kutupları birim daire içinde olduğundan kararlıdır. Ancak bunun tersi uygulama açısından mümkün değildir. Çünkü kutuplar birim dairenin dışında yer alacağından süzgeç kararlı olmaz.

Şekil 3.5'te gösterilen süzgecin genlik cevabı tüm frekanslar için "1" olduğundan dolayı, ileri ve geri yönde öngörü dizileri aynı spektral güç dağılımına sahiptirler.



Şekil 3.4 : Tümü geçiren süzgecin kutup-sıfır gösterilimi



Şekil 3.5 (a) İleri yönde öngörü hata dizisinin geri yönde öngörü hata dizisine tüm geçiren süzgeç yardımıyla çevrilmesi
(b) Tüm geçiren süzgecin i. bölümü, $i=1,2,\dots,m$

3.8. ÖNGÖRÜ HATA SÜZGEÇLERİNİN ÖZVEKTÖR GÖSTERİMLERİ

Bir öngörü hata süzgecinin tap ağırlıklarının, tap girişlerine ait ilişki matrisinin özdeğerleri cinsinden gösterebilmek için, (3.17) eşitliği kapalı matris biçiminde

$$R_{M+1} \cdot a_M = P_M \cdot \delta_{M+1} \quad (3.86)$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki R_{M+1} , tap girişlerine ait $(M+1) \times (M+1)$ boyutlu ilişki matrisi, a_M , süzgecin $(M+1) \times 1$ boyutlu tap ağırlık vektörü, P_M öngörü hata gücü ve δ_{M+1}

$$\delta_{M+1} = [1, 0, \dots, 0]^T \quad (3.87)$$

biçiminde, ilk elemanı 1, diğer elemanları sıfır olan $(M+1) \times 1$ boyutlu birim vektördür.

(3.86) eşitliğinin sol tarafında a_M 'i yalnız bırakılırsa

$$a_M = P_M^{-1} \cdot R_{M+1} \cdot \delta_{M+1} \quad (3.88)$$

elde edilir. Daha önceden ilişki matrisi, özvektörler ve özdeğerler

cinsinden yazılmıştı. Bundan yararlanılarak

$$R_{M+1}^{-1} = Q \cdot \Lambda^{-1} \cdot Q^H \quad (3.89)$$

yazılabilir. Λ , özilişki matrisinin özdeğerlerinin diagonal matrisi,

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M] \quad (3.90)$$

ve Q ise

$$Q = [q_0, q_1, \dots, q_M] \quad (3.91)$$

biçiminde bu matrise ait sütunların özvektörleridir.

(3.88) eşitliği, (3.87), (3.89), (3.90) ve (3.91) eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} a_M &= P_M \cdot Q \cdot \Lambda^{-1} \cdot Q^H \cdot \delta_{M+1} \\ &= P_M \cdot [q_0, q_1, \dots, q_M] \cdot \text{diag}[\lambda_0^{-1}, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_M^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} q_0^H \\ q_1^H \\ \vdots \\ q_M^H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= P_M \sum_{k=0}^M \frac{q_{k0}}{\lambda_k} q_k \quad (3.92)$$

biçiminde düzenlenebilir. q_{k0} , ilişki matrisinin k . özvektörünün ilk elemanıdır. İleri yönde öngörü hata süzgeci vektörü a_M 'in ilk elemanı "1"e eşittir. Bu özellik kullanılarak öngörü hata gücü

$$P_M = \frac{1}{\sum_{k=0}^M |q_{k0}|^2 \cdot \lambda_k^{-1}} \quad (3.93)$$

olarak yazılabilir. (3.92) ve (3.93) eşitlikleri yardımıyla görüleceği gibi M . dereceden bir öngörü hata süzgecinin tap ağırlıkları, sadece ilişki matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri cinsinden ifade edilebilir.

(3.92) eşitliğinde bulunan ileri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıkları yardımıyla, geri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıklarını bulmak için

$$a_M^* = P_{M \sum_{k=0}^M} q_{k0} \cdot \lambda_k \cdot q_k^{-1} B^* \quad (3.94)$$

eşitliği kullanılır.

3.9. KAFES(LATTICE) ÖNGÖRÜCÜLERİ

ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeç yapılarının biraraya getirilmesi ile oluşan sisteme kafes öngörücüleri adı verilir. Kafes öngörücülerini oluşturan bloklar arka arkaya bağlanmıştır ve her bir blok kafes şeklindedir. Kafes öngörücüsündeki blok sayısı, öngörü hata süzgecinin derecesine eşittir.

Öngörü Hatalarının Derecelerinin Güncelleştirilmesi :

Kullanılan bir kafes öngörücüsü için giriş-çıkış ilişkileri Levinson-Durbin yinelemesi kullanılarak birçok şekilde gerçekleştirilebilir. İnceleme yapabilmek için (3.45) ve (3.47) eşitlikleri ile verilen ileri ve geri yönde öngörü hata süzgeçlerinin uygulamalarına ait matrisel yapıdaki eşitlikler kullanılacaktır.

Tap girişleri $u(n), u(n-1), \dots, u(n-m)$ olan m . dereceden ileri yönde öngörü hata süzgeci ele alınırsa, bu süzgecin tap giriş vektörü $u_{m+1}(n)$

$$u_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} u_m(n) \\ \vdots \\ u(n-m) \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

veya eşdeğer yapıda

$$u_{m+1}(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ \vdots \\ u_m(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

parçalanmış şekilleri ile yazılabilir. $u_{m+1}(n)$ vektörü (3.45)

eşitliğinin Hermitian eşleniği ile çarpılırsa eşitliğin sol tarafı

$$f_m(n) = a_m^H \cdot u_{m+1}(n) \quad (3.97)$$

biçimini alır. Eşitliği, $(m-1)$. dereceden süzgeç katsayılarıyla gösterebilmek için sağ taraftaki ilk terimde $u_{m+1}(n)$ 'in (3.95) eşitliğindeki biçimi, ikinci terim de ise için (3.96) eşitliğindeki biçimi kullanılacak olursa bu terimler için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \cdot u_{m+1}(n) &= \begin{bmatrix} H \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_m(n) \\ u(n-m) \end{bmatrix} \\ &= a_{m-1}^H \cdot u_m(n) \\ &= f_{m-1}(n) \end{aligned} \quad (3.98)$$

ve

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & a_{m-1}^{BT} \end{bmatrix} \cdot u_{m+1}(n) &= \begin{bmatrix} 0 & a_{m-1}^{BT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(n) \\ u_m(n-1) \end{bmatrix} \\ &= a_{m-1}^{BT} \cdot u_m(n-1) \\ &= b_{m-1}(n-1) \end{aligned} \quad (3.99)$$

ifadeleri yazılabilir. (3.97), (3.98), ve (3.99) eşitlikleri yardımıyla (3.45) eşitliğinin Hermitian eşleniğinin $u_{m+1}(n)$ vektörü ile çarpılmış şekli

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + \Gamma_m^* \cdot b_{m-1}(n-1) \quad (3.100)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikteki $f_m(n)$ ve $f_{m-1}(n)$, sırasıyla m . ve $(m-1)$. dereceden öngörü hata süzgeçleri çıkışındaki ileri yönde öngörü hatalarıdır. $b_{m-1}(n-1)$ ise $(m-1)$. dereceden geri yönde öngörü hata süzgeci çıkışındaki geciktirilmiş geri yönde öngörü hatasıdır.

Şimdi de tap girişleri $u(n), u(n-1), \dots, u(n-m)$ olan m . dereceden ileri yönde öngörü hata süzgeci ele alınırsa, bu süzgecin tap giriş vektörü $u_{m+1}(n)$ için de (3.95) ve (3.96) eşitliklerindeki parçalanmış yapılar kullanılacaktır. $u_{m+1}(n)$ vektörü (3.47) eşitliğinin Hermitian eşleniği ile çarpılırsa eşitliğin sol tarafı

$$b_m(n) = a_m^{BT} \cdot u_{m+1}(n) \quad (3.101)$$

biçimini alır. Eşitliği, $(m-1)$. dereceden süzgeç katsayılarıyla göstermek için, sağ tarafındaki ilk terimde için $u_{m+1}(n)$ 'in (3.96) eşitliğindeki biçimi, ikinci terimde ise için (3.95) eşitliğindeki biçimi kullanılacak olursa bu terimler için

$$\begin{aligned} [0 \mid \overset{BT}{a_{m-1}}] \cdot u_{m+1}(n) &= [0 \mid \overset{BT}{a_{m-1}}] \cdot \begin{bmatrix} u(n) \\ \hline u_m(n-1) \end{bmatrix} \\ &= \overset{BT}{a_{m-1}} \cdot u_m(n-1) \\ &= b_{m-1}(n-1) \end{aligned} \quad (3.102)$$

ve

$$\begin{aligned} [\overset{H}{a_{m-1}} \mid 0] \cdot u_{m+1}(n) &= [\overset{H}{a_{m-1}} \mid 0] \cdot \begin{bmatrix} u_m(n) \\ \hline u(n-m) \end{bmatrix} \\ &= \overset{H}{a_{m-1}} \cdot u_m(n) \\ &= f_{m-1}(n) \end{aligned} \quad (3.103)$$

ifadeleri yazılabilir. (3.101), (3.102), ve (3.103) eşitlikleri yardımıyla (3.47) eşitliğinin Hermitian eşleniğinin $u_{m+1}(n)$ vektörleri ile çarpılmış şekli

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + \Gamma_m \cdot f_{m-1}(n) \quad (3.104)$$

biçiminde yazılır. (3.100) ve (3.104) eşitlikleri, m bloktan oluşan kafes öngörücüsünün istenilen derece güncelleştirme çiftidir. Bu iki eşitlik, bir matris altında birleştirilerek

$$\begin{bmatrix} f_m(n) \\ b_m(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \overset{*}{\Gamma_m} \\ \Gamma_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{m-1}(n) \\ b_{m-1}(n-1) \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.105)$$

elde edilir. Geciktirilmiş geri yönde öngörü hatası, $b_{m-1}(n-1)$

$$b_{m-1}(n-1) = z^{-1} \cdot b_{m-1}(n) \quad (3.106)$$

şeklinde yazılabilir. (3.105) ve (3.106) eşitliklerini kullanarak kafes öngörücüsünün m . bloğuna ait işaret akış diyagramı Şekil 3.6(a)'daki

gibi gösterilebilir. z^{-1} ile işaretli bloğa ait dal hariç bu işaret akış diyagramı bir kafese benzediğinden kafes öngörücüsü adını alır. $m=0$ için temel yapının

$$f_0(n) = b_0(n) = u(n) \quad (3.107)$$

olduğu kolaylıkla bulunur.

Şekil 3.6(b)'de gösterilen kafes eşdeğer modeli ele alınarak algoritmaya $m=0$ 'la başlanır ve süzgecin derecesi M . dereceden bir öngörü hata süzgecinin çıkışları elde edilinceye kadar düzenli olarak 1 arttırılır. Bu şekilde her bir blok için bilinmesi gereken tek şey yansıma katsayılarıdır.

3.10. KAFES SÜZGEÇLERİNİN BAĞINTILARI

Şekil 3.6(b)'deki kafes süzgeci, süzgecin değişik bloklarında oluşan ileri ve geri yönde öngörü hataları, aralarında bazı ilginç bağıntılar içerir. Temel olarak, bu bağıntılar diklik kuralının sonuçlarıdır.

Bu bağıntıların her birisi bir özellik olarak gösterilebilir:

Özellik-1: ileri yönde öngörü hatası $f_m(n)$ ile giriş işareti $u(n)$ birbirine diktir. Bu durum

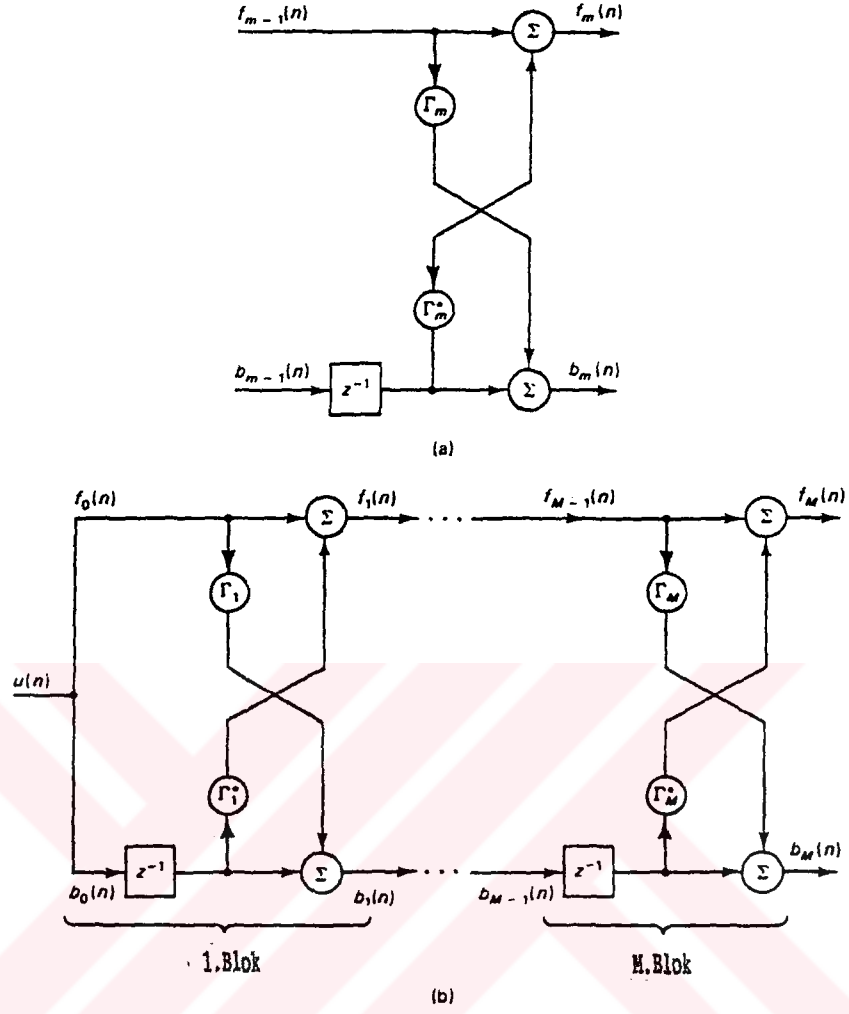
$$E[f_m(n).u^*(n-k)] = 0, \quad 1 \leq k \leq m \quad (3.108)$$

biçiminde gösterilir. Aynı şekilde geri yönde öngörü hatası $b_m(n)$ ile giriş işareti $u(n)$ de birbirine diktir. Bu durum da

$$E[b_m(n).u^*(n-k)] = 0, \quad 0 \leq k \leq m-1 \quad (3.109)$$

biçiminde gösterilir. (3.108) ve (3.109) eşitlikleri diklik kuralının yeniden yazılmış biçimleridir. Tanım gereği, ileri yönde öngörü hatası $f_m(n)$, $u(n)$ ile $u(n)$ 'nin öngörüsü arasındaki farka eşittir. Diklik kuralına göre hata $f_m(n)$ ile $u(n-k)$ $k=1,2,\dots,m$ birbirlerine diktir. Bu (3.108) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlar.

Geri yönde öngörü hatası $b_m(n)$, $u(n-m)$ ile $u(n-m)$ 'nin öngörüsü



Şekil 3.6 (a) m bloktan oluşan kafes öngörücüsü için işaret akış diyagramı, (b) M. dereceden öngörü hata süzgecinin kafes eşdeğer modeli(kafes süzgeci)

arasındaki farka eşittir. Diklik kuralına göre hata $b_m(n)$ ile $u(n-k)$, $k=0,1,\dots,m-1$ birbirine diktir. Bu, (3.109) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlar.

Özellik-2: ileri yönde öngörü hatası $f_m(n)$ ile giriş $u(n)$ arasındaki çapraz ilişki, geri yönde öngörü hatası $b_m(n)$ ile zaman ötelenmiş giriş $u(n-m)$ arasındaki çapraz ilişkiye yani hata gücüne eşittir. Bu

$$E[f_m(n).u^*(n)] = E[b_m(n).u^*(n-m)] = P_M \quad (3.110)$$

biçiminde gösterilir.

Özellik-3: Geri yönde öngörü hataları

$$E[b_m(n) \cdot b_i(n)] = \begin{cases} P_M, & m=i \\ 0, & m \neq i \end{cases} \quad (3.111)$$

biçiminde birbirlerine diktir. İleri yönde öngörü hataları ise aynı diklik özelliğini

$$E[f_m(n) \cdot f_i(n)] = P_M, \quad m \geq i \quad (3.112)$$

koşulu için sağlar. (3.111) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlamak için, geri yönde öngörü hatası $b_i(n)$, giriş elemanlarının katlama toplamı olarak

$$b_i(n) = \sum_{k=0}^i a_{i,i-k} \cdot u(n-k) \quad (3.113)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik kullanılarak

$$E[b_m(n) \cdot b_i(n)] = E[b_m(n) \sum_{k=0}^i a_{i,i-k} \cdot u(n-k)] \quad (3.114)$$

yazılabilir. (3.109) eşitliğinde gösterilen Özellik-1 kullanılarak $m > i$ ve $0 \leq k \leq i$ koşulları için (3.114) eşitliğinin sağ tarafının

$$E[b_m(n) \cdot b_i(n)] = 0, \quad m \neq i$$

şeklinde sıfıra eşit olduğu bulunur. Eğer $m=i$ olursa eşitlik

$$\begin{aligned} E[b_m(n) \cdot b_i(n)] &= E[b_m(n) \cdot b_m(n)] \\ &= P_M, \quad m = i \end{aligned}$$

şeklini alır. Bu da (3.111) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlar.

(3.112) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlamak için ise, ileri yönde öngörü hatası $f_i(n)$, giriş elemanlarının katlama toplamı olarak

$$f_i(n) = \sum_{k=0}^i a_{i,k} \cdot u(n-k) \quad (3.115)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik kullanılarak

$$E[f_m(n) \cdot f_i(n)] = E[f_m(n) \sum_{k=0}^i a_{i,k} \cdot u(n-k)] \quad (3.116)$$

$$= E[f_m(n).u^*(n)] + \sum_{k=0}^i a_{i,k} \cdot E[f_m(n).u^*(n-k)]$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $a_{i,0}=1$ özelliği kullanılmıştır. (3.108) eşitliğinde gösterilen Özellik-1 ve (3.114) eşitliğindeki Özellik-2, (3.116) eşitliğinde kullanılarak

$$E[f_m(n).f_i^*(n)] = P_m, \quad m \geq i$$

yazılır. Bu da (3.112) eşitliğinin doğruluğunu kanıtlar.

Özellik-4: İleri ve geri yönde öngörü hataları ile bunların zaman ötelemeli halleri birbirlerine diktir. İleri yönde öngörü hataları için

$$E[f_m(n).f_i^*(n-1)] = E[f_m(n+1).f_i^*(n)] = 0, \quad 1 \leq l \leq m-i \quad (3.117)$$

$$m > i$$

geri yönde öngörü hataları için

$$E[b_m(n).b_i^*(n-1)] = E[b_m(n+1).b_i^*(n)] = 0, \quad 0 \leq l \leq m-i-1 \quad (3.118)$$

$$m > i$$

yazılabilir.

Özellik-5: İleri ve geri yönde öngörü hatalarınının zaman ötelemeli halleri

$$E[f_m(n+m).f_i^*(n+i)] = \begin{cases} P_m, & m=i \\ 0, & m \neq i \end{cases} \quad (3.119)$$

$$E[b_m(n+m).b_i^*(n+i)] = P_m, \quad m \geq i \quad (3.120)$$

biçiminde birbirlerine diktir.

Özellik-6: İleri ve geri yönde öngörü hataları

$$E[f_m(n).b_i^*(n)] = \begin{cases} \Gamma_i \cdot P_m, & m \geq i \\ 0, & m < i \end{cases} \quad (3.121)$$

biçiminde bir çapraz ilişki özelliğine sahiptir. Bu özelliği kanıtlamak için (3.113) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
E[f_m(n).b_i^*(n)] &= E[f_m(n) \sum_{k=0}^i a_{i,i-k}^* u^*(n-k)] \\
&= a_{i,i}^* E[f_m(n).u^*(n)] + \sum_{k=1}^i a_{i,i-k}^* E[f_m(n).u^*(n-k)]
\end{aligned} \tag{3.122}$$

eşitliği yazılabilir. (3.122) eşitliğinin ikinci satırının ikinci terimi (3.108) eşitliğindeki Özellik-1 uyarınca sifıra eşittir. İlk terimi için de, (3.112) eşitliğindeki Özellik-2 ve $a_{i,i} = \Gamma_i$ özellikleri kullanılarak $m \geq i$ için

$$E[f_m(n).b_i^*(n)] = \Gamma_i.P_m$$

yazılır. $m < i$ için ise

$$E[f_m(n).b_i^*(n)] = 0$$

olur. Bu da Özellik-6'nın doğruluğunu kanıtlar.

3.11. GERİ YÖNDE ÖNGÖRÜ HATA DİZİSİNİN ÜRETİLMESİNİN GRAM-SCHMIDT YÖNTEMİ İLE GÖSTERİLMESİ

Geri yönde öngörü hata dizisi $\{b_m(n)\}$, m bloktan oluşan, arka arkaya bağlanmış bir yapıda, giriş örnekleri $u(n), u(n-1), \dots, u(n-m)$ 'e Gram-Schmidt yöntemi uygulanarak elde edilebilir.

Gram-Schmidt yöntemi;

" $(m+1)$ adet bağımsız rastlantı değişkeni $u_0, u_1, \dots, u_m$ yardımıyla bu değişkenlerin bir doğrusal birleşimi olan $(m+1)$ adet rastlantı değişkeni, $v_0, v_1, \dots, v_m$ 'in oluşturduğu birbirine dik bir sistem kurmak mümkündür" şeklinde tanımlanmaktadır.

$u(n)$ girişi, M bloktan oluşan bir kafes süzgecinin girişine uygulanarak geri yönde öngörü hataları $b_0(n), b_1(n), \dots, b_M(n)$ elde edilebilir. Bu uygulamada, geri yönde öngörü hatalarının birbirine dik olma özelliğinden yararlanılır.

Tap giriş vektörü $u(n)$ 'i geri yönde öngörü hata vektörü $b(n)$ 'e

çevirmek için, ana diagonalı "1" ve bu diagonalin altındaki elemanlar geri yönde öngörü hata süzgecinin tap ağırlıklarından oluşan bir L matrisi ile

$$b(n) = L.u(n) \quad (3.123)$$

biçiminde çarpılır. Bu eşitlikte $b(n)$

$$b(n) = [b_0(n), b_1(n), \dots, b_M(n)]^T \quad (3.124)$$

$u(n)$,

$$u(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M)]^T \quad (3.125)$$

ve L matrisi

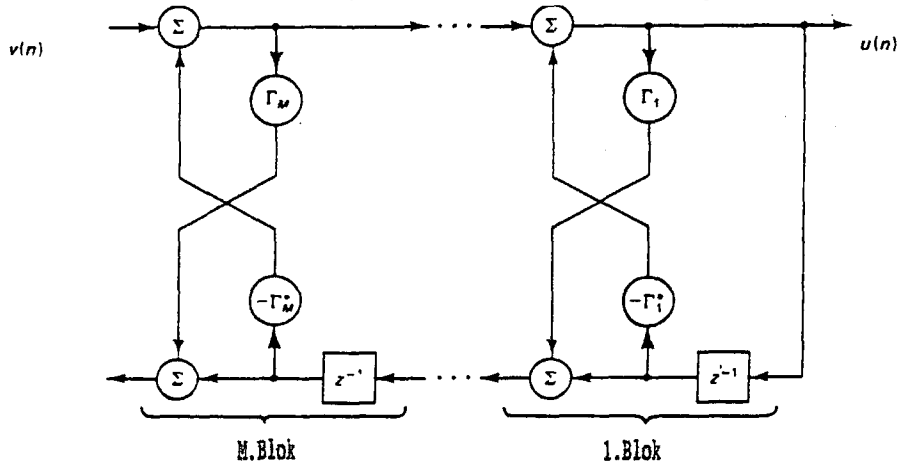
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M,M} & a_{M,M-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

biçiminde açık şekilleri ile gösterilebilir.

L matrisinin determinanı bire eşittir. Bundan dolayı L matrisi tekil olmayan bir matristir.

3.12. KAFES YAPISI KULLANILARAK TERS SÜZGEÇLEME İŞLEMİ

Şekil 3.6(a)'daki çok bloklı bir kafes öngörücüsü, bir çözümleyici olarak görülebilir. Bu çok bloklı kafes öngörücüsü Şekil 3.7'de



Şekil 3.7 : Ters kafes süzgeci

gösterildiği şekilde, özyinelemeli(AR) süreçlerde kullanılmak üzere ters biçime getirilir. Bu yeni yapı ters süzgeç ya da birleştirici olarak kullanılır. Şekil 3.7'deki yapının girişine bir beyaz gürültü işareti uygulandığında, verilen yansıma katsayıları $\{\Gamma_m\}$ yardımıyla gerçek $u(n)$ işareti elde edilir.

3.13. BİRLEŞİK SÜREÇ KESTİRİMİ

Bu bölümde, karesel beklendik değer anlamında birleşik süreç kestirim problemlerinin en uygun çözümlerini elde etmek için kafes öngörücülerinden nasıl yararlanıldığı gösterilecektir. Özellikle $\{u(n)\}$ ' in işlenmesiyle elde edilen istenen yanıt $\{d(n)\}$ 'in öngörüsünün en küçük karesel beklendik değerli kestirimi kullanılacaktır. $\{d(n)\}$ ve $\{u(n)\}$ birleşik durağan kabul edilir. Birleşik süreç öngörücüsünün yapısı Şekil 3.8'de gösterilmektedir. Bu öngörücü, iki tane kestirimi birlikte gerçekleştirir. Bu kestirimlerden ilki, yansıma katsayılarıyla girişin öngörülerini sağlayan birbirinden bağımsız M blokun arka arkaya bağlanması sonucu oluşur. ikincisi de, geri dönüş süzgecinin istenen yanıt $d(n)$ 'in bir kestirimini elde etmek için, giriş olarak geri yönde öngörü hataları $b_0(n), b_1(n), \dots, b_M(n)$ ve tap ağırlıkları olarak $K_0, K_1, \dots, K_M$ katsayılarını kullanması ile sağlanır. kullanılan. Sonuçtaki kestirim bu iki kümenin iç çarpımlarının toplamı

$$\hat{d}(n/U_n) = \sum_{i=0}^M K_i \cdot b_i(n) \quad (3.127)$$

biçiminde gösterilir.

Bu eşitlikteki K vektörü, kestirim süzgecinin $(M+1)*1$ boyutlu geri dönüş katsayılarının oluşturduğu

$$K = [K_0, K_1, \dots, K_M]^T \quad (3.128)$$

biçiminde bir vektördür. Geri yönde dönüş hatalarının $(M+1)*(M+1)$

boyutlu ilişki matrisi D

$$\begin{aligned} D &= E[b(n).b^H(n)] \\ &= \text{diag}(P_0, P_1, \dots, P_M) \end{aligned} \quad (3.129)$$

ile gösterilir. Geri yönde dönüş hataları ile istenen yanıt $d(n)$ arasındaki çapraz ilişki vektörü s de

$$s = E[b(n).d^*(n)] \quad (3.130)$$

biçiminde gösterilir. Bu bulunan eşitlikler, normal denkleme uygulanırsa

$$D.K_0 = s \quad (3.131)$$

elde edilir. K_0 ile gösterilen optimum tap ağırlık vektörü (3.131) eşitliğinin sağ tarafında yalnız bırakılırsa eşitlik

$$K_0 = D^{-1}.s \quad (3.132)$$

biçimini alır. K_0 , geri dönüş vektörünün, optimum Wiener çözümü, w_0 ile olan arasındaki ilişkiyi bulabilmek için (3.129) eşitliğinde (3.123) eşitliği yerine konursa

$$\begin{aligned} E[b(n).b^H(n)] &= E[L.u(n).u^H(n)].L^H \\ &= L.E[u(n).u^H(n)].L^H \\ D &= L.R.L^H \end{aligned} \quad (3.133)$$

elde edilir. D matrisinin tersi

$$D^{-1} = L.R^{-1}.L^H \quad (3.134)$$

olduğundan bu eşitlik, (3.131) eşitliğinde yerine konursa

$$K_0 = L.R^{-1}.L^H.s \quad (3.135)$$

bulunur. (3.123) eşitliği ile verilen ifade, (3.130) eşitliğinde yerine konursa

$$\begin{aligned} s &= L.E[u(n).d^*(n)] \\ &= L.p \end{aligned} \quad (3.136)$$

elde edilir. (3.135) eşitliğinde, s vektörü yerine (3.136)'daki eşdeğeri konursa

$$\begin{aligned} K_0 &= L.R^{-1}.L^H.L.p \\ &= L.R^{-1}.p \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$= L.w_0$$

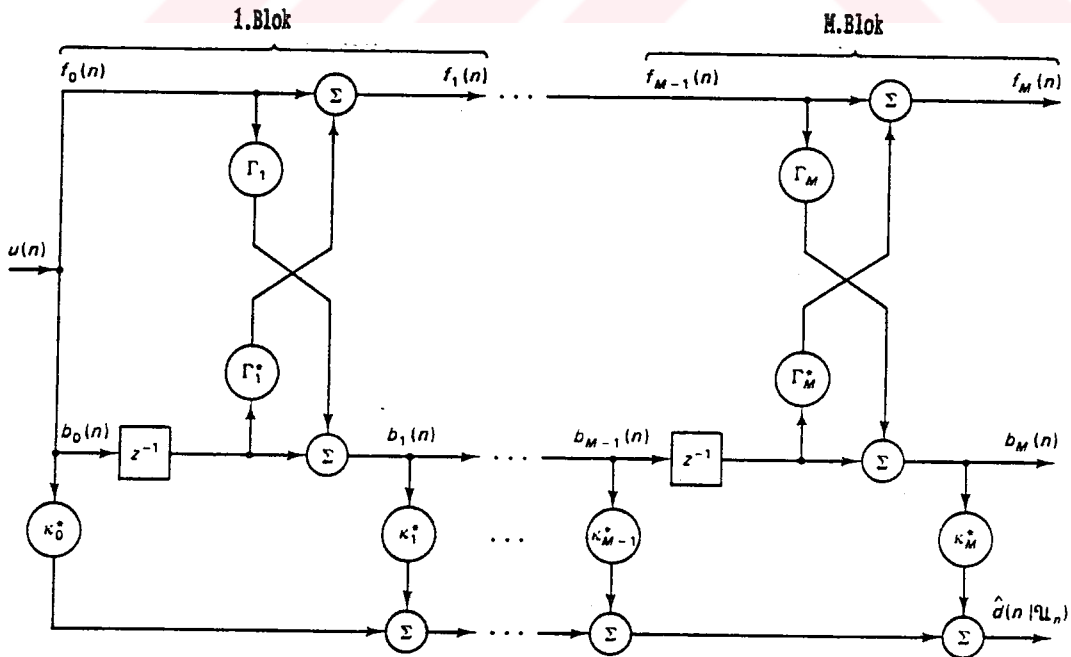
biçiminde bulunur. Bu eşitlik K_0 vektörüyle, w_0 vektörleri arasındaki ilişkiyi açık şekilde gösterir.

3.14. BLOK KESTİRİMİ

Bu bölümde, doğrusal öngörücü veya onun doğal bir uzantısı olan öngörü hata süzgecinin yapımı için iki temel yapı incelenecektir. Bu iki yapı, doğrusal süzgeç ve kafes süzgeçleridir. Doğrusal süzgeç tap ağırlıkları, kafes süzgeç ise yansıma katsayılarından meydana gelir. Her iki yapı da süzgeç katsayılarının sayısı, öngörü derecesi ile belirlenir. Doğrusal süzgecin tap ağırlıkları ile kafes öngörücüsünün yansıma katsayıları arasındaki bağlantı Levinson-Durbin algoritmasıyla sağlanır.

Seçilen yapı ne olursa olsun, süzgeç katsayılarının kestirimi için kullanılan iki yöntem vardır:

1. Blok kestirimi
2. Uyarlamalı kestirim.



Şekil 3.8 : Birleşik süreç için kafes tabanlı yapı

Blok kestirimde eldeki bilgi, herbirinin uzunluğu N olacak şekilde parçalanılır. Blok uzunluğu N, genellikle uzunluğu N'den büyük olan bir giriş süreci durağan kabul edilebileceği kadar küçük olacak şekilde seçilir. Bu koşul altında süzgeç katsayıları blok-blok hesaplanır.

Blok kestirim algoritmaları şu şekilde sınıflandırılabilir:

1. Dolaylı yöntemler: Her bir bilgi bloğu için girişin özilişki fonksiyonun kestirimleri hesaplanır. Levinson-Durbin algoritması, ilgilenilen uygulamaya bağlı olarak, doğrusal öngörücü için ilgili tap ağırlıklarını veya kafes öngörücüsü için yansıma katsayılarını hesaplamak için kullanılır.

2. Dolaysız yöntemler: Her bir süreç bloğu için kafes öngörücüsünün farklı bloklarının yansıma katsayılarının kestirimleri, dolaysız olarak giriş bilgisinden hesaplanır. Yansıma katsayıları, geniş anlamda durağan süreçler için kafes öngörücüsünün bloklarının birbirinden bağımsız olma özelliğine uygun olarak hesaplanır.

İlgilenilen uygulamada yansıma katsayılarının bulunması gerekiyorsa dolaysız yöntemler dolaylı yöntemlere göre daha etkilidir. Fakat diğer taraftan eğer doğrusal süzgecin tap ağırlıklarıyla sistem özyinelemeli model olarak tanımlanmışsa, dolaylı yöntemlerin kullanılması daha uygundur. Bu kısımda dolaysız blok kestirim yöntemi olarak sınıflandırılan Burg algoritması olarak bilinen ve çok kullanılan bir algoritma incelenecektir.

Şekil 3.6(b)'de gösterilen M bloktan oluşan kafes öngörücüsünün girişinin geniş anlamda durağan olduğu durumda, her bir blok tarafından üretilen geri yönde öngörü hatalarının birbirlerine dik olmasından dolayı yapının her bir bloğu için, yapılan incelemelerden faydalanılarak çok bloklu kafes öngörücüleri için bir genelleştirme yapılabilir. Bu durumda, yapı geliştikçe bu gelişmeden önceki yapı etkilenmediği

için, blok sayısı istenildiği kadar arttırılabilir.

Şekil 3.6(b)'de gösterilen m bloklu kafes öngörücüsü için matrisel yapıdaki (3.105) eşitliği ile verilen giriş-çıkış ilişkileri, parçalanmış yapıda, ileri öngörü hatası için

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + \Gamma_m^* \cdot b_{m-1}(n-1) \quad (3.138)$$

ve geri öngörü hatası için ise

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + \Gamma_m \cdot f_{m-1}(n) \quad (3.139)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu blokların en uygun şekilde tasarlanması için bir çok ölçü kullanılabilir. Özellikle ileri ve geri yönde öngörü hatalarının karesel beklendik değerlerinin toplamını en küçük yapacak şekilde yansıma katsayısı Γ_m seçilir. m bloklu kafes öngörücüsünün çıkışındaki bu toplam

$$J_m = E[|f_m(n)|^2] + E[|b_m(n)|^2] \quad (3.140)$$

ile daha önceden gösterilmişti. (3.140) eşitliğinin sağ tarafındaki terimlerin yerine (3.138) ve (3.139) eşitliklerindeki değerleri konulup düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} J_m &= \{E[|f_{m-1}(n)|^2] + E[|b_{m-1}(n-1)|^2]\} \cdot (1 + |\Gamma_m|^2) \\ &\quad + 2 \cdot \Gamma_m^* \cdot E[f_{m-1}(n) \cdot b_{m-1}(n-1)] \\ &\quad + 2 \cdot \Gamma_m \cdot E[b_{m-1}(n-1) \cdot f_{m-1}(n)] \end{aligned} \quad (3.141)$$

bulunur. Yansıma katsayısı, Γ_m karmaşık değerli olarak

$$\Gamma_m = \alpha_m + j \cdot \beta_m \quad (3.142)$$

şeklinde yazılarak J_m fonksiyonunun karmaşık değerli gradyanı bulunup sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} \nabla(J_m) &= \frac{\partial J_m}{\partial \alpha_m} + j \frac{\partial J_m}{\partial \beta_m} = 0 \\ &= 2 \cdot \Gamma_m \cdot \{E[|f_{m-1}(n)|^2] + E[|b_{m-1}(n-1)|^2]\} \\ &\quad + 4 \cdot E[b_{m-1}(n-1) \cdot f_{m-1}(n)] \end{aligned} \quad (3.143)$$

yansıma katsayısının optimum değeri

$$\Gamma_{m,o} = - \frac{2.E[b_{m-1}(n-1).f_{m-1}^*(n)]}{E[|f_{m-1}(n)|^2 + |b_{m-1}(n-1)|^2]}, m = 1, 2, \dots, M \quad (3.144)$$

biçiminde bulunur. (3.144) eşitliği yansıma katsayıları için Burg formülü olarak bilinir. Bu formül iki önemli özelliği gerçekleştirir:

1. Yansıma katsayıları $\Gamma_{m,o}$;

$$|\Gamma_{m,o}| \leq 1, \text{ tüm } m\text{'ler için} \quad (3.145)$$

koşulunu sağlar.

2. m. bloğun çıkışındaki ileri yönde öngörü hatasının karesel ortalama değeri

$$E[|f_m(n)|^2] = (1 - |\Gamma_{m,o}|^2).E[|f_{m-1}(n)|^2] \quad (3.146)$$

ve geri yönde öngörü hatasının karesel ortalama değeri

$$E[|b_m(n)|^2] = (1 - |\Gamma_{m,o}|^2).E[|b_{m-1}(n-1)|^2] \quad (3.147)$$

eşitliği ile gösterdiği gibi bu bloğun girişleriyle ilgilidir.

(3.144) eşitliğinde tanımlanan Burg formülü genel bir ortalama içerir. $\{u(n)\}$ girişinin ergodik olduğu kabul edilerek ortalamalar için zaman ortalamaları yerine konulursa m.bloğun yansıma katsayılarının, Burg kestirimi

$$\hat{\Gamma}_m = - \frac{2 \sum_{n=m+1}^N b_{m-1}(n-1).f_{m-1}^*(n)}{\sum_{n=m+1}^N [|f_{m-1}(n)|^2 + |b_{m-1}(n-1)|^2]}, m = 1, 2, \dots, M \quad (3.148)$$

biçiminde elde edilir.

m. yansıma katsayısı için $\hat{\Gamma}_m$ kestirimi N uzunluğuna göre değişir. N uzunluğu, gürültünün çıkıştaki etkilerini hesaplamada yok etmek için yeterince büyük, girişin istatistiksel bakımdan durağanlığını sağlayacak şekilde yeterince küçük seçilmelidir.

4. EN DİK İNİŞ YÖNTEMİ(METHOD OF STEEPEST DESCENT)

Bu bölümde, gradyan tabanlı uygulamalar için eski bir teknik olan ve en dik iniş yöntemi olarak bilinen yöntemin incelenmesi yapılacaktır. Bu yöntem, uygulamada geliştirilen gradyan tabanlı uyarlama yöntemlerinin daha kolay anlaşılması için temel olma özelliği taşır. En dik iniş yöntemi, bir yinleme işlemi olup, tap ağırlık vektörü için bazı keyfi başlangıç değerlerinden başlayarak yinleme işleminin ilerlemesi ile düzenlenir. Tap ağırlık vektörü için hesaplanılan son değer, Wiener çözümüne yakınsar. Yöntemin en önemli özelliği, ortalama hata başarımlarının en küçük noktasının, yüzeyin kendisi bilinmeden bulunabildiği bir, çok değişkenli kapalı çevrim kontrol sistemi olmasıdır. Bu yüzden ilerdeki bölümlerde incelenecek En Küçük Karesel Ortalama Algoritması (least-mean square(LMS) algorithm) için yinleme yazılımlarında bu yöntemin incelenmiş olması önemli kolaylıklar sağlayacaktır.

Şimdi, tap girişleri $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ ve tap ağırlıkları $w_0(n), w_1(n), \dots, w_{M-1}(n)$ olan bir süzgeç ele alınsın. Bu tap girişleri, geniş anlamda durağan, sıfır ortalamalı kabul edilmektedir ve girişlerin ilişki matrisi R ile gösterilir. İstenen yanıt $d(n)$ 'nin eklenmesi ile oluşan süzgeç Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

Kestirimin, $\hat{d}(n|U_n)$ istenen yanıtın gerçek değeri $d(n)$ ile karşılaştırılması sonucu

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{d}(n|U_n) \\ &= d(n) - \mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{u}(n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

biçiminde bir kestirim hatası oluşur. Buradaki $\mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{u}(n)$ terimi $\mathbf{w}(n)$ vektörünün elemanları ile $\mathbf{u}(n)$ vektörünün elemanları arasındaki bir iç çarpımı göstermektedir.

Eğer tap giriş vektörü $\mathbf{u}(n)$ ile istenen yanıt $d(n)$ birleşik durağan süreçler ise, karesel ortalama hata fonksiyonu $J(n)$, daha önce

(2.52) eşitliğinde yazıldığı gibi tap ağırlık vektörünün ikinci dereceden bir fonksiyonu olarak

$$J(n) = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \cdot \mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^H(n) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{w}(n) \quad (4.2)$$

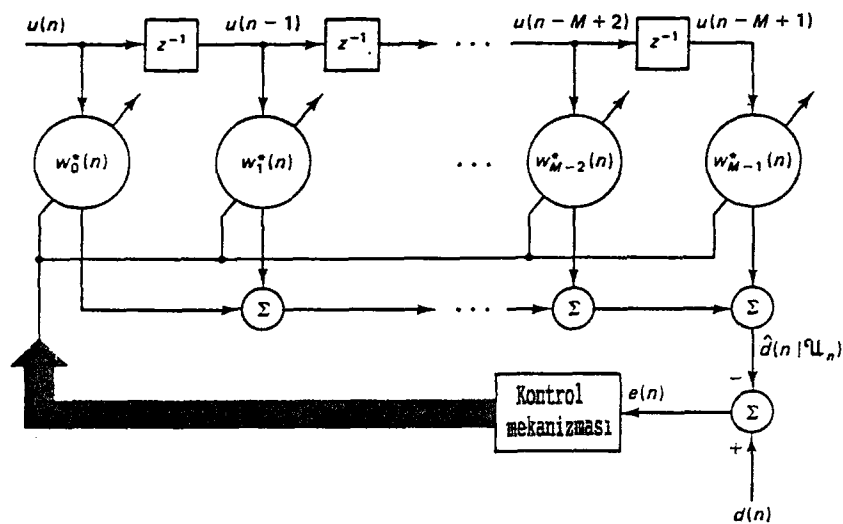
biçiminde yazılabilir. Tap ağırlık değerleri, n anıyla değiştiğinden karesel ortalama hata $J(n)$ 'de doğal olarak değişir. Karesel ortalama hatanın değişmesi kestirim hatası değişkeni $\{e(n)\}$ 'nin durağan olmaması anlamına gelir. Ortalama karesel hatanın tap ağırlık vektörünün elemanlarına göre değişimini, bir noktada en küçük değere sahip ikinci dereceden bir fonksiyonun eğrisi olarak gösterebiliriz. Bu eğriyi uyarlamalı süzgecin hata başarımlar yüzeyi olarak kabul edeceğiz. Uyarlamalı işlemede, bu yüzeyin en alttaki ya da diğer bir deyişle en küçük noktasındaki tap ağırlık değerleri, Wiener-Hopf denklemleri ile tanımlanan optimum $\mathbf{w}_0$ değerleridir. Bunu

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{w}_0 = \mathbf{p} \quad (4.3)$$

eşitliği gösterebiliriz. En küçük karesel ortalama hata da

$$J_{\min} = \sigma_d^2 - \mathbf{p}^H \cdot \mathbf{w}_0 \quad (4.4)$$

biçiminde gerçekleşir.



Şekil 4.1 : Uyarlamalı süzgecin yapısı

4.1. EN DİK İNİŞ ALGORİTMASI

Bir uyarlamalı süzgecin yerine getirmesi gereken şey, normal denklemi sağlayan tap ağırlık vektörüne sahip değerleri bulmaktır. Yani optimum değerler ile çalışmasıdır.

En eski uyarlamalı yöntemlerinden biri olan en dik iniş yöntemi ile J_{min} 'i bulmak için şu yollar izlenir:

1. Ağırlık vektörü için keyfi seçilen bir başlangıç değeri, $w(0)$ ile başlanır. Bu değer, hata başarımlar yüzeyinin en küçük noktasında yer alabilecek şekilde bir başlangıç tahminidir. Genelde $w(0)$, sıfır vektörü olarak alınır.

2. Bu başlangıç tahmini kullanılarak n anındaki tap ağırlık vektörü, $w(n)$ 'nin gerçel ve karmaşık kısımlarına bağlı olarak hesaplanan, karesel ortalama hata, $J(n)$ 'nin değişimi olarak tanımlanan gradyan vektörünün gerçel ve karmaşık kısımları hesaplanır.

3. Bu hesaplanan gradyan vektörüne ters yönde, başlangıç ya da geçerli olan tap ağırlık vektöründe bir değişiklik yaparak yeni bir hesaplama yapılır.

4. Tekrar ikinci adıma dönülür ve işlem yinelenir.

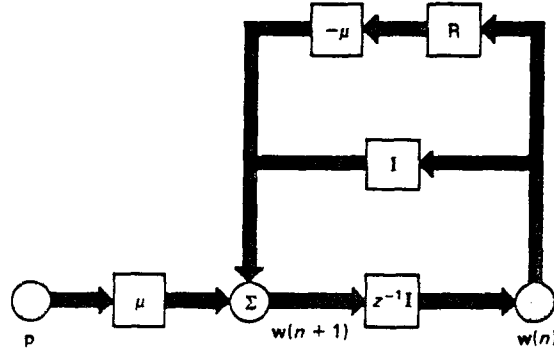
Gradyan vektörü $\nabla(J(n))$ ve tap ağırlık vektörü $w(n)$, n anındaki değerlerdir. En dik iniş yöntemine bağlı olarak $(n+1)$ anındaki tap ağırlık vektörünün güncelleştirilen değeri

$$w(n+1) = w(n) + \frac{1}{2} \mu [-\nabla(J(n))] \quad (4.5)$$

ile hesaplanır. Burada μ , pozitif ve gerçel bir sayıdır. $1/2$ katsayısı sadece yakınsama için kullanılmıştır. Daha önceki bölümlerde $\nabla(J(n))$

$$\nabla(J(n)) = -2.p + 2.R.w(n) \quad (4.6)$$

olarak bulunmuştu. En dik iniş algoritmasının uygulamalarında (4.6) eşitliğindeki ilişki matrisi R ve çapraz ilişki vektörü p biliniyor



Şekil 4.2 : En dik iniş algoritmasının işaret akış diyagramı

olarak kabul edilir ve tap ağırlık vektörünün verilen bir değeri için gradyan vektör hesaplanabilir. (4.6) eşitliği, (4.5) eşitliğinde yerine konursa

$$w(n+1) = w(n) + \mu[p - R.w(n)] , n = 0, 1, \dots \quad (4.7)$$

biçiminde $w(n+1)$ için daha sade bir eşitlik elde edilebilir. μ değişkeninin kontrolü ile tap ağırlık vektörünün artan doğrulukta hesaplandığı görülür. Bu yüzden μ , adım uzunluğu ya da ağırlık verme sabiti olarak isimlendirilir. Başka bir ilginç nokta da, (4.7) eşitliği ile verilen algoritma bir geri besleme modeli olarak görülebilir. Bu durum Şekil 4.2'de işaret akış diyagramı ile gösterilmiştir.

4.2. EN DİK İNİŞ ALGORİTMASININ KARARLILIĞI

En dik iniş algoritmasının Şekil 4.2'den de görülebileceği gibi geri beslemeler içerdiği görülür. Bu geri beslemelerden dolayı algoritmanın kararsız olma olasılığı vardır. Algoritmanın kararlılık başarımının, adım uzunluğu μ ve tap giriş vektörünün ilişki matrisi R ile incelendiğini Şekil 4.2'den görebiliriz. Bu iki etken transfer fonksiyonunun geri besleme çevrimini tamamen kontrol altında tutar.

Kararlılık koşulunu incelemek için, algoritmanın doğal modlarına bakılır. Özellikle tap ağırlık vektörünün dönüşmüş halini tanımlamak

için ilişki matrisi, R 'nin özdeğerleri ve özvektörleri ile gösterimi kullanılır. incelemeye ağırlık hata vektörünün n anındaki değeri

$$c(n) = w(n) - w_0(n) \quad (4.8)$$

ile başlanılır. (4.3) eşitliğindeki çapraz ilişki vektörü, p 'nin eşdeğeri, (4.7) eşitliğinde yerine konarak bu eşitlikteki p yok edilirse ağırlık hata vektörü $c(n)$ için

$$c(n+1) = (I - \mu R).c(n) \quad (4.9)$$

biçiminde yeni bir eşitlik elde edilir. Burada I , birim matristir. (4.9) eşitliği, geri besleme modeliyle Şekil 4.3'te gösterilmektedir. Bu şekil algoritmanın kararlılığının aslında μ ve R ile kontrol edildiğini gösterir.

İlişki matrisi R 'nin özdeğerler ve özvektörler cinsinden eşdeğeri, (4.9) eşitliğinde yerine konursa

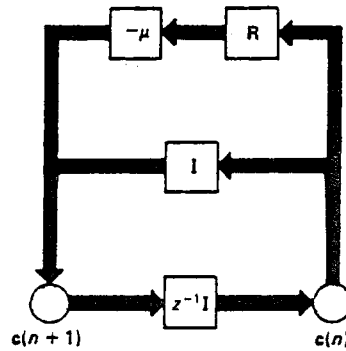
$$c(n+1) = (I - \mu Q \Lambda Q^H).c(n) \quad (4.10)$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanını Q^H ile çarpılıp, $Q^H = Q^{-1}$ özelliği kullanılırsa

$$Q^H.c(n+1) = (I - \mu \Lambda).Q^H.c(n) \quad (4.11)$$

elde edilir. Şimdi,

$$\begin{aligned} v(n) &= Q^H.c(n) \\ &= Q^H.(w(n) - w_0) \end{aligned} \quad (4.12)$$



Şekil 4.3 : En dik iniş algoritmasının ağırlık hata vektörüne göre çizilmiş işaret akış diyagramı

biçiminde yeni bir koordinat sistemi tanımlansın. (4.11) eşitliği, bu yeni koordinat sistemi kullanılarak yeniden yazılırsa

$$\mathbf{v}(n+1) = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{A})\mathbf{v}(n) \quad (4.13)$$

biçimini alır. $\mathbf{v}(n)$ 'nin başlangıç değeri

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{Q}^H [\mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_0] \quad (4.14)$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbf{w}(0)$, sifıra eşit vektör olduğundan, $\mathbf{v}(0)$

$$\mathbf{v}(0) = -\mathbf{Q}^H \mathbf{w}_0 \quad (4.15)$$

değerini alır. En dik iniş algoritmasının k. doğal modu için

$$\mathbf{v}_k(n+1) = (1 - \mu\lambda_k)\mathbf{v}_k(n), \quad k=1,2,\dots,M \quad (4.16)$$

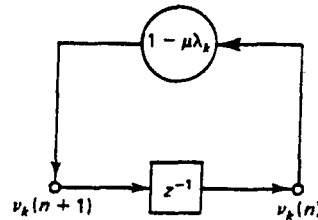
yazılır. λ_k , ilişki matrisinin k. özdeğeridir. Bu eşitlik, Şekil 4.4'te sayısal değerli geri basleme modeliyle gösterilmiştir. Bu şekildeki z^{-1} , birim geciktirme operatörüdür. Bu modelin yapısının Şekil 4.2'deki haline göre çok daha basit olduğu açıkça görülmektedir.

(4.16) eşitliği birinci dereceden diferansiyel denklemin bir homojenidir. $\mathbf{v}_k(n)$ 'nin $\mathbf{v}_k(0)$ ile gösterilen bir başlangıç değerine sahip olduğu farzedilerek çözüm için

$$\mathbf{v}_k(n) = (1 - \mu\lambda_k)^n \mathbf{v}_k(0), \quad k=1,2,\dots,M \quad (4.17)$$

elde edilir.

ilişki matrisi $\mathbf{R}$ 'nin bütün özdeğerleri pozitif ve gerçel olduğu için, cevap $\mathbf{v}_k(n)$ bozulmaya uğramayacaktır. Şekil 4.4'te gösterilen (4.17) eşitliği ile üretilen sayılar, $(1-\mu\lambda_k)$ 'ya eşit geometrik orana sahip geometrik bir seridir. Algoritmanın yakınsaması ya da kararlı



Şekil 4.4 : En dik iniş algoritmasının k. doğal moddaki işaret akış diyagramı

kalması için bu geometrik oranın tüm k değerleri için birden küçük olması gerekir. Bu koşul

$$-1 < 1 - \mu \lambda_k < 1, \text{ tüm } k\text{'lar için}$$

biçiminde gösterilebilir.

Yineleme işleminde, n sonsuza yaklaşırken algoritmanın tüm doğal modları başlangıç koşullarına bağlı olmaksızın söner. Tap ağırlık vektörü $w(n)$, n sonsuza yaklaşırken optimum çözüme yani w_0 'a yaklaştığını söylemek yanlış olmaz.

ilişki matrisi R 'nin özdeğerlerinin tümü gerçel ve pozitif olduğu için, algoritmanın kararlılığı ya da yakınsaması için adım uzunluğunun

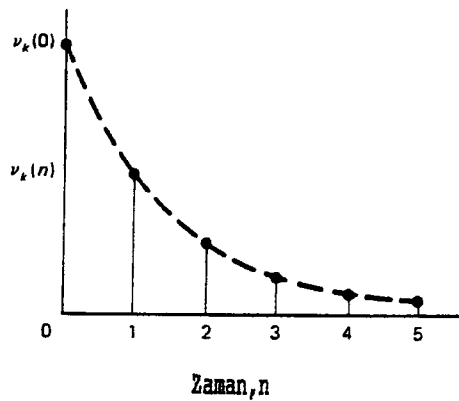
$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (4.18)$$

koşulunu yerine yetirmesi gerekir. $\lambda_{\max}$, en büyük özdeğerdir.

Şekil 4.5'te bir yinelemenin olabilmesi için gerekli birim zamanda geometrik serinin üstsel zarfı τ_k ile gösterilen bir zaman sabiti olarak kabul edilebilir. Seçilen zaman sabiti τ_k

$$1 - \mu \lambda_k = \exp(-1/\tau_k)$$

$$\tau_k = \frac{-1}{\ln(1 - \mu \lambda_k)} \quad (4.19)$$



Şekil 4.5 : $(1 - \mu \lambda_k)$ 'nin birden küçük olma koşulu altında en dik iniş algoritmasında k . doğal modun değişimi

olarak gösterilebilir. Zaman sabiti τ_k , k. doğal mod $v_k(n)$ için başlangıç değeri $v_k(0)$ 'ın genliğinin $1/e$ kadar azaldığı ana kadar geçen süre olarak tanımlanır. Yavaş uyarlamalar için adım uzunluğunun çok çok küçük olması durumunda zaman sabiti τ_k

$$\tau_k \approx \frac{1}{\mu \cdot \lambda_k}, \quad \mu \ll 1 \quad (4.20)$$

olarak kabul edilebilir.

Şimdi tap ağırlık vektörünün geçici davranışını inceleyebiliriz. Özellikle (4.12) eşitliğinin her iki yanı Q ile çarpılır ve $Q \cdot Q^H = I$ özelliği kullanılırsa $w(n)$ için istenen sonuç

$$\begin{aligned} w(n) &= w_0 + Q \cdot v(n) \\ &= w_0 + [q_1, q_2, \dots, q_M] \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ \vdots \\ v_M(n) \end{bmatrix} \\ &= w_0 + \sum_{k=1}^M q_k \cdot v_k(n) \end{aligned} \quad (4.21)$$

biçiminde elde edilir. (4.17) eşitliği (4.21) eşitliğinde yerine konursa i. tap ağırlığının geçici davranışı

$$w_i(n) = w_{0i} + \sum_{k=1}^N q_{ki} \cdot v_k(0) \cdot (1 - \mu \cdot \lambda_k)^n, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (4.22)$$

biçiminde bulunabilir. Bu eşitlik, her bir tap ağırlığının algoritmada $(1 - \mu \lambda_k)^n$ değerindeki bir ağırlıklı üstsel toplamla yakınsadığını gösterir.

Toplam zaman sabiti τ_a , (4.22) eşitliğindeki toplam terimi için başlangıç değerinin $1/e$ katına düştüğü ana kadar geçen süre olarak tanımlanır. (4.22) eşitliğinde τ_k 'nın en küçük ve en büyük değerler alması ile toplam zaman sabiti de değer değiştirir. Buna göre τ_a 'nın değiştiği sınırlar

$$\frac{-1}{\ln(1 - \mu \cdot \lambda_{\max})} \leq \tau_a \leq \frac{-1}{\ln(1 - \mu \cdot \lambda_{\min})} \quad (4.23)$$

biçiminde belirlenir.

4.3. KARESEL ORTALAMA HATANIN GEÇİCİ DAVRANIŞI

En dik iniş yönteminin uygulamasına ışık tutmak için ortalama karesel hatanın geçici davranışı incelenebilir. Herhangi bir n anında karesel ortalama hatanın değeri $J(n)$

$$J(n) = J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \cdot |v_k(n)|^2 \quad (4.24)$$

olarak verilir. k . doğal modun geçici davranışı, $v_k(n)$ (4.17) eşitliği ile tanımlanmıştır. Buna göre (4.24) eşitliğini yeniden

$$J(n) = J_{\min} + \sum_{k=1}^M \lambda_k \cdot (1 - \mu \cdot \lambda_k)^{2n} \cdot |v_k(0)|^2 \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. Adım uzunluğu μ , (4.18) eşitliğinde belirtilen sınırlar içinde seçildiği takdirde algoritmanın başlangıç koşullarına bağlı olmaksızın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(n) = J_{\min} \quad (4.26)$$

değerine yakınsadığı görülür. Karesel ortalama hatanın, yineleme sayısının değişimine göre çizilen eğri, öğrenen bir eğri olarak adlandırılır. Başlangıç değeri $J(0)$ 'dan son değer $J_{\min}$ 'e giderken, k . doğal mod için üstsel azalma bir sabite eşittir

$$\tau_{k,mse} \approx \frac{-1}{2 \cdot \ln(1 - \mu \cdot \lambda_k)} \quad (4.27)$$

Çok küçük μ değeri için bu zaman sabiti yaklaşık olarak

$$\tau_{k,mse} \approx \frac{1}{2 \cdot \mu \cdot \lambda_k} \quad (4.28)$$

kabul edilebilir.

5. EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA ALGORİTMASI

Bu bölümde, uygulamada geniş bir şekilde kullanılan ve en küçük karesel ortalama(least-mean square(LMS)) algoritması olarak bilinen yöntem incelenecektir. En küçük karesel ortalama(LMS) algoritması, gradyan tabanlı algoritmaların önemli bir üyesidir. Algoritmanın en önemli özelliği ilişki fonksiyonunun bulunmasına ya da ilişki fonksiyonunun tersinin bulunmasına gerek duymamasıdır. Bu özelliğinden dolayı LMS algoritması diğer uyarlamalı süzgeçleme algoritmalarına göre çok daha basittir.

Bu bölüm içerisinde, algoritmanın, durağan ortamlarda uygulanışı, genel yapısı, kararlılığı, tap ağırlık vektörünün davranışı, karesel ortalama hatanın davranışı ve durağan olmayan ortamlara uygulanması incelenecektir. Bu bölüm, gelecek bölümde, doğrusal bir kanal için yapılacak bilgisayar benzetiminin incelenmesine bir hazırlık niteliği taşımaktadır.

5.1. EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA ALGORİTMASININ UYGULAMASI VE YAPISININ GENEL GÖRÜŞÜ

LMS algoritması aslında, geri beslemeli bir kontrol sistemidir. Temel olarak iki temel işlemin gerçekleşmesi gerekir. Bunlar uyarlama ve süzgeçleme işlemleridir. Uyarlama işlemi, tap ağırlıklarının kendiliğinden ayarlanmasıdır. Süzgeçleme işlemi, tap girişleri ile uyarlama işlemi sonucunda elde edilen tap ağırlıklarının iç çarpımı ve istenen yanıtın gerçek değeri ile bu değerın kestiriminin karşılaştırılması sonucu bir kestirim hatasının üretilmesi biçiminde tanımlanmaktadır. Bu kestirim hatası, uyarlama işleminde geri besleme çevrim elemanı olarak kullanılır.

LMS algoritmasının yapısı, Şekil 5.1(a)'daki blok diyagramda iki

temel parça biçiminde gösterilmiştir. Birincisi, süzgeçleme işleminin gerçekleşmesi görevini yerine getiren ve LMS algoritmasının gerçekleştiği süzgeçtir. İkincisi Şekil 5.1(a)'da uyarlamalı ağırlık kontrol mekanizması adıyla gösterilen ve süzgecin tap ağırlıklarını uyarlama işinde kullanılan mekanizmadır.

Süzgeç elemanları, ayrıntılı olarak Şekil 5.1(b)'de gösterilmiştir. LMS algoritması kullanılarak hesaplanan tap ağırlık vektörü $w(n)$ 'nin elemanları, geniş anlamda durağan ortamlar için yinelemede n sonsuza yaklaşırken Wiener çözümü olan w_0 'a yaklaşır.

Süzgeçleme işlemi sırasında, istenen yanıt $d(n)$ ile tap giriş vektörü $u(n)$ birlikte işlemin gerçekleşmesini sağlarlar. Verilen bu girişle süzgecin çıkışında istenen yanıtın bir kestirimi olan $\hat{d}(n|U_n)$ üretilir. İstenen yanıt ile kestirim arasındaki fark bir kestirim hatası $e(n)$ 'i meydana getirir. Elde edilen bu kestirim hatası ve tap giriş vektörü $u(n)$ tap ağırlıklarının kontrolünde kullanılan mekanizmada kullanılır.

Durağan ortamlar için, en dik iniş yöntemiyle hesaplanan tap ağırlık vektörü $w(n)$, hata başarımlı yüzeyinin altında hesaplanan yörünge boyunca hareket ettirilerek Wiener çözümü olan w_0 'da sonlandırılır. LMS algoritması, Wiener çözümünde işlemi sonlandırmaktan ziyade hata başarımlı yüzeyinin en küçük noktası civarında rasgele bir hareket yürütürken tap ağırlık vektörü $w(n)$ hesaplanır. Bu rastgele hareket, LMS algoritması için iki yakınsama halinde kendini gösterir:

1. Ortalamada yakınsama:

$$E[w(n)] \rightarrow w_0, \quad n \rightarrow \infty$$

biçimindedir.

2. Karesel ortalama yakınsama:

$$J(n) \rightarrow J(\infty), \quad n \rightarrow \infty$$

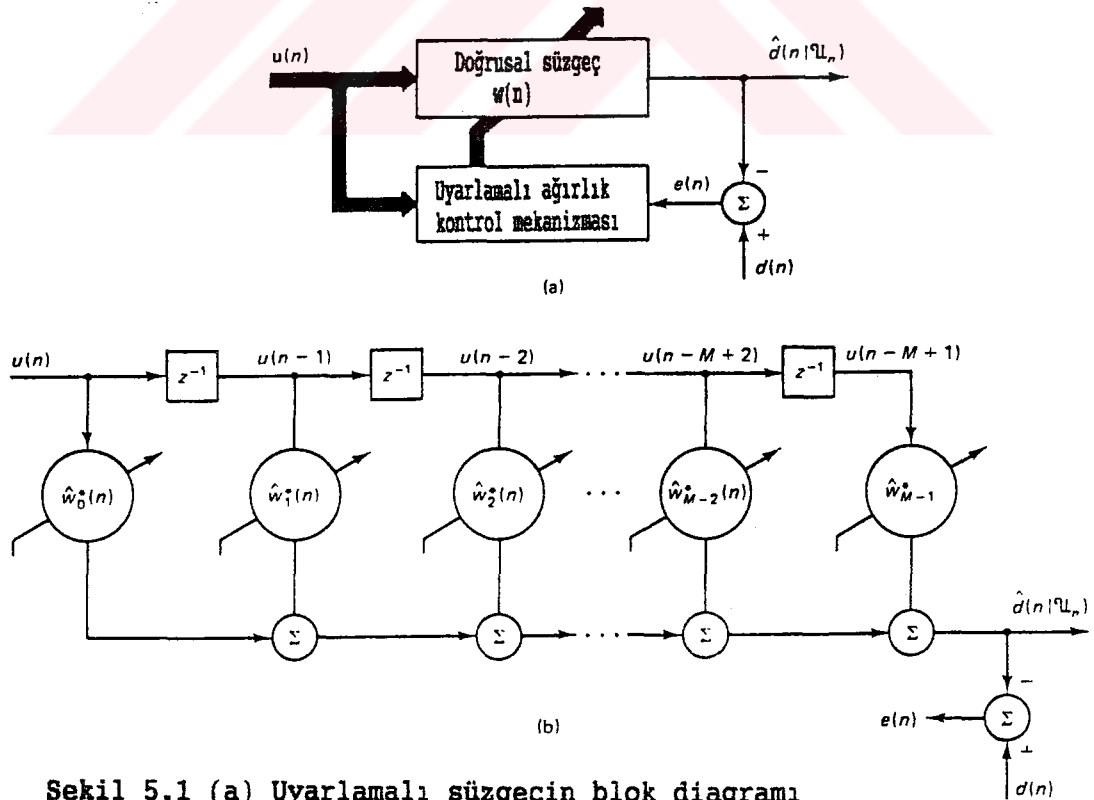
biçiminde kendini gösterir.

$J(\infty)$, her zaman en küçük karesel ortalama hata, $J_{\min}$ 'den büyüktür. Adım uzunluğu μ , ilişki matrisinin özdeğerlerinin farklı değerler alması halinde dahi bu iki yakınsamayı sağlamalıdır.

$J(\infty)$ ile $J_{\min}$ arasındaki fark, artık karesel ortalama hata olarak isimlendirilir ve $J_{\text{ex}}(\infty)/J_{\min}$ oranı da uyumsuzluk olarak isimlendirilir. Bu oran LMS algoritması ile hesaplanan çözümün Wiener çözümünden ne kadar uzak olduğunun bir ölçüsüdür.

5.2. EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA ALGORİTMASI İNCELENMESİ

Eğer her yinelemede gradyan vektörün tam olarak ölçülmesi mümkün olsaydı ve eğer adım uzunluğu μ uygun seçilebilseydi tap ağırlık vektörü, en dik iniş yöntemiyle optimum çözüme yakın olacak şekilde hesaplanabilirdi. Fakat gradyan vektörünün gerçek değerinin ölçümü mümkün



Şekil 5.1 (a) Uyarlamalı süzgecin blok diagramı

(b) Süzgeç elemanlarının ayrıntılı yapısı

değildir. Bu yüzden, eldeki mevcut bilgilerden bir kestirimin yapılması gereklidir. Diğer bir deyişle tap ağırlık vektörünün, gelen bilgiler ışığında, bir algoritmayla değiştirilerek güncelleştirilmesi gerekir. Bu tür algoritmalarından birisi de LMS algoritmasıdır. Bu algoritmanın ilişki matrisine veya bu matrisin tersinin bulunmasına gerek duymaması algoritmayı basit hale getirir.

Kestirimin basitliği için, tap giriş vektörünün ve istenen yanıtın örnek değerlerini kullanarak R ve p için bir anlık kestirimleri kullanılır. Bu da

$$\hat{R}(n) = u(n) \cdot u^H(n) \quad (5.1)$$

ve

$$\hat{p} = u(n) \cdot d^*(n) \quad (5.2)$$

biçiminde gösterilir. Gradyan vektörün bir anlık kestirimi de

$$\hat{\nabla}(J(n)) = -2 \cdot u(n) \cdot d^*(n) + 2 \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \hat{w}(n) \quad (5.3)$$

biçiminde olmaktadır. Bu tap ağırlım kestirim vektörü $w(n)$ tap giriş vektörü $u(n)$ 'e bağlı olarak değişir.

(5.3) eşitliği, en dik iniş yönteminde gradyan vektör için yazılmış olan (4.5) eşitliğinde yerine konursa

$$\hat{w}(n+1) = \hat{w}(n) + u(n) \cdot [d^*(n) - u^H(n) \cdot \hat{w}(n)] \quad (5.4)$$

biçimini alır. Bu eşitlikte tap ağırlık vektöründe "-" işareti kullanılmasının nedeni en dik iniş algoritmasıyla bu algoritmayı ayırtetmek içindir. Sonuç üç temel ilişki halinde yazılırsa

1. Süzgeç çıkışı için

$$y(n) = \hat{w}^H(n) \cdot u(n) \quad (5.5)$$

2. Kestirim hatası için

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (5.6)$$

3. Tap ağırlıkları için uyarlama işlemi için

$$\hat{w}(n+1) = \hat{w}(n) + \mu \cdot u(n) \cdot e^*(n) \quad (5.7)$$

elde edilir.

(5.5) ve (5.6) eşitlikleri ile tanımlanan $e(n)$ 'nin hesaplanması, tap ağırlık vektörünün o an geçerli kestirimine etki eder. (5.7) eşitliğinin sağ yanındaki $p.u(n).e^*(n)$ terimi bunu kanıtlar. Yineleme işlemi $\hat{w}(0)$ başlangıç değeri ile başlar. Bu başlangıç değeri için uygun seçim sıfır vektörüdür ($\hat{w}(0)=0$).

Şekil 5.2, LMS algoritmasının geri besleme modeli bir işaret akış diyagramıdır. Bu model daha önce Şekil 4.3'te en dik iniş yöntemi için çizilmiş model ile yakın benzerlik gösterir. Şekil 5.2 incelendiğinde LMS algoritmasının basitliği kolayca görülür. Algoritma için her yinelemede, M tane tap sayısına sahip süzgeç kullanıldığında, $2M$ tane karmaşık yapıda toplama ve $2M+1$ tane karmaşık yapıda çarpma işlemi gereklidir.

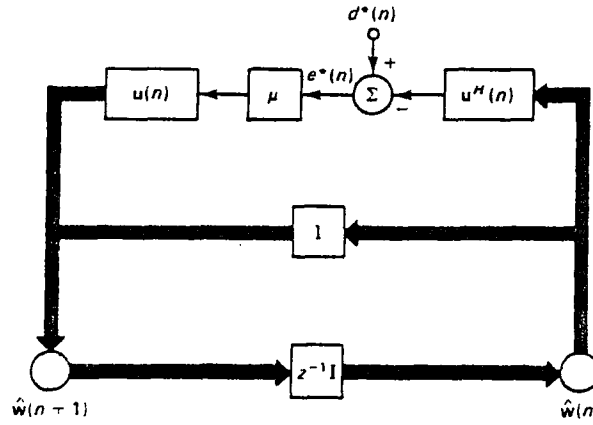
İlk bakışta LMS algoritması için, R ve p 'nin bir anlık kestirimlerini kullandığından dolayı, iyi başarımlar veremeyeceği sanılabilir. Buna rağmen LMS algoritmasının, uyarılmanın devamı esnasında kestirimlerin ortalamalarını alarak sonuç çıkaran doğal yapıda bir yineleme işlemi olduğunu unutmamak gerekir.

5.3. LMS ALGORİTMASININ KARARLILIĞININ İNCELENMESİ

LMS algoritmasının çok değişkenli doğrusal olmayan geri besleme sistemi olduğu, Şekil 5.2'deki işaret akış diyagramından da görülmektedir.

Algoritma, çok değişkenli bir yapıya sahiptir. Çünkü tap ağırlık vektörü $\hat{w}(n)$ genelde birden büyük bir M boyutuna sahiptir.

Doğrusal değildir. Çünkü giriş vektörüne göre geri besleme çevrimi ayarlanır. Tap ağırlık vektörünün başlangıç değeri biliniyor olmasına rağmen, LMS algoritmasında tap ağırlık vektörünün sonraki değerleri girişin rastgele olmasından dolayı rastgele bir yayılımında bulunur.



Şekil 5.2 : LMS algoritmasının işaret akış diyagramı

Doğrusal olmama ve rastgelelik LMS algoritmasının kararlılığının incelenmesini zor bir matematiksel yapıya dönüştürür. Adım uzunluğu μ , geri besleme çevriminin bir parçası olduğunda, bu incelemede önemli rol oynar. Özellikle LMS algoritmasının kararlı olması için bölüm 5.1.'in sonundaki iki yansımayı sağlayacak şekilde seçilmek zorundadır.

LMS algoritmasının yakınsamasını matematiksel olarak inceleyebilmek için, yakınsama için gerek ve yeter koşulların belirtilmesi gerekir. Bu koşullar dört tanedir ve temel kabuller olarak isimlendirilir:

1. Tap giriş vektörleri $u(n), u(n-1), \dots, u(1)$, istatistiksel bağımsız vektörlerdir. Bağımsızlık

$$E[u(n) \cdot u^H(k)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.8)$$

ile gösterilir.

2. n anında, tap giriş vektörü $u(n)$, istenen yanıtın önceki bütün değerlerinden

$$E[u(n) \cdot d^*(k)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.9)$$

biçiminde bağımsızdır.

3. n anındaki istenen yanıt $d(n)$, önceki bütün değerlerinden istatistiksel bağımsızdır. Bu bağımsızlık

$$E[d(n) \cdot d^*(k)] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.10)$$

ile gösterilir.

4. Tap giriş vektörü $u(n)$ ve istenen yanıt $d(n)$, n 'nin bütün değerleri için Gauss dağılımlı raslantı değişkenleridir.

LMS algoritmasının incelenmesine dayalı bu temel kabuller, ilişkisizlik kuramı olarak isimlendirilir.

(5.4) eşitliğinden de görüleceği gibi $n+1$ anındaki tap ağırlık vektörü $\hat{w}(n+1)$, $u(n+1)$ ve $d(n+1)$ 'in her ikisinden de bağımsızdır.

Göze çarpan bir başka nokta da, temel kabullerde örneklerin ilişkisizliğinden çok istatistiksel bağımsızlığının vurgulanmasıdır. Örnekler Gauss dağılımlı olduğundan bağımsız örnekler ilişkisiz örneklerle eşdeğerdir.

Gelecek iki bölümde, tap ağırlık vektörünün iki momentini çıkarmak için temel kabuller kullanılacaktır. Bu momentler ortalama değer ve ilişki matrisidir. Tap ağırlık vektörünün kendisinden çok, ağırlık hata vektörüyle çalışmak onun bulunması için daha uygundur. LMS algoritmasıyla, en dik iniş yöntemi arasında bir karışıklığa olanak vermemek için ağırlık hata vektörü

$$\varepsilon(n) = \hat{w}(n) - w_0 \quad (5.11)$$

biçiminde gösterilmektedir.

5.4. ORTALAMA TAP AĞIRLIK VEKTÖRÜNÜN DAVRANIŞI

(5.4) eşitliğinin her iki yanından optimum tap ağırlık vektörü w_0 'ı çıkartıp (5.11) eşitliğinde kullanılan tanımlama yardımıyla, (5.4) eşitliğinin sağ tarafındaki $\hat{w}(n)$ terimi yok edilirse, LMS algoritması tap ağırlık hata vektörü $\varepsilon(n)$ kullanılarak

$$\varepsilon(n+1) = [I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \cdot \varepsilon(n) + \mu \cdot u(n) \cdot e_0^*(n) \quad (5.12)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. $e_0(n)$ optimum Wiener çözümünde elde edilen kestirim hatasıdır.

Temel kabuler uyarınca tap ağırlık vektörünün giriş vektöründen

bağımsız olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla ağırlık hata vektörü de giriş vektöründen bağımsızdır. (5.12) eşitliğinin her iki yanının beklendik değerleri alınır

$$E[\varepsilon(n+1)] = E[(I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)) \cdot \varepsilon(n)] + \mu \cdot E[u(n) \cdot e_o^*(n)] \quad (5.13)$$

bulunur. $\varepsilon(n)$ 'in $u(n)$ 'den bağımsızlığı kullanılarak sağ taraftaki ilk terim için

$$\begin{aligned} E[(I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)) \cdot \varepsilon(n)] &= (I - \mu \cdot E[u(n) \cdot u^H(n)]) \cdot E[\varepsilon(n)] \\ &= (I - \mu \cdot R) \cdot E[\varepsilon(n)] \end{aligned} \quad (5.14)$$

yazılır. (5.13) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci terim için diklik kuralı

$$E[u(n) \cdot e_o^*(n)] = 0 \quad (5.15)$$

geçerlidir. (5.14) ve (5.15) eşitlikleri yardımıyla (5.13) eşitliği

$$E[\varepsilon(n+1)] = (I - \mu \cdot R) \cdot E[\varepsilon(n)] \quad (5.16)$$

biçiminde daha sade bir şekilde yazılabilir. (4.9) ve (5.16) eşitlikleri karşılaştırıldığında, bu iki eşitliğin tam olarak aynı matematiksel yapıya sahip oldukları görülür. Her iki algoritmada kullanılan $c(n)$ ve $E[\varepsilon(n)]$ aynı görevdedirler. Daha önceden $c(n)$ için yakınsama şartı (4.18) eşitliğinde verilmişti. $c(n)$ ve $E[\varepsilon(n)]$ aynı yapıda olduklarından n sonsuza yaklaşırken $E[\varepsilon(n)]$ 'nin de sıfıra yakınsayacağı ve aynı koşulu sağlayacağı görülür. Bu koşul,

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (5.17)$$

biçimindedir.

LMS algoritması kullanılarak hesaplanan tap ağırlık vektörünün ortalaması, n sonsuza yaklaşırken optimum Wiener çözümüne yaklaşır.

5.5. AĞIRLIK HATASININ İLİŞKİ MATRİSİ

Ağırlık hata vektörü $\varepsilon(n)$ 'nin ilişki matrisinin zaman değişimi için bir yinleme denklemi geliştirelim. Bu ilişki matrisinin n anındaki

değeri $K(n)$

$$K(n) = E[\varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)] \quad (5.18)$$

ile gösterilmektedir. Yineleme denklemini elde etmek için (5.18) eşitliğinde $\varepsilon(n)$ yerine $\varepsilon(n+1)$ konularak $K(n+1)$ hesaplanır. Bunun için ilk önce, (5.12) eşitliğinin her iki yanının Hermitian tranzpozunu alınırsa

$$\varepsilon^H(n+1) = \varepsilon^H(n) \cdot [I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)] + \mu \cdot e_0(n) \cdot u^H(n) \quad (5.19)$$

bulunur.

$K(n+1)$ ilişki matrisini bulabilmek için $\varepsilon(n+1) \cdot \varepsilon^H(n+1)$ çarpımından elde edilecek terimlerin sırasıyla beklendik değerleri alınır. Bu hesaplama işlemi, çarpım sonunda oluşacak dört genel terim için adım adım gösterilebilir:

1.Adım: ilk terim

$$\begin{aligned} E[(I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot (I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n))] &= \\ &= E[\varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)] - \mu \cdot E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)] \\ &\quad - \mu \cdot E[\varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \\ &\quad + \mu^2 \cdot E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \\ &= K(n) - \mu \cdot E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)] \\ &\quad - \mu \cdot E[\varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \\ &\quad + \mu^2 \cdot E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \\ &= K(n) - \mu \cdot R \cdot K(n) - \mu \cdot K(n) \cdot R \\ &\quad + \mu^2 \cdot E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \end{aligned} \quad (5.20)$$

biçiminde bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki son terim, girişin örnek vektörlerinin dördüncü dereceden bir momentini içerir. Bu yüksek dereceleri momentleri, Gauss momentleri çarpanlarına ayırma kuramını kullanarak bulabiliriz.

x_1, x_2, x_3 , ve x_4 ; sıfır ortalamalı karmaşık değerli Gauss değişkenleri olsunlar. Gauss momentleri çarpanlarına ayırma kuramı uyarınca

$$E[x_1^* \cdot x_2^* \cdot x_3^* \cdot x_4^*] = E[x_1^* \cdot x_2^*] \cdot E[x_3^* \cdot x_4^*] + E[x_1^* \cdot x_4^*] \cdot E[x_2^* \cdot x_3^*] \quad (5.21)$$

yazılır. $u(n).u^H(n).\varepsilon(n).\varepsilon^H(n).u(n).u^H(n)$ ifadesinin beklendik değerini alabilmek için vektörler parçalanmış vektörlerin bir toplamı olarak $M \times M$ boyutlu matris halinde yazılırlar. $\{x_{ij}(n)\}$ bu matrisi, $x_{ij}(n)$ 'de, $i, j=0, 1, \dots, M-1$ olmak üzere matrisin elemanlarını gösterirler. $x_{ij}(n)$

$$\begin{aligned} \{x_{ij}(n)\} &= u(n).u^H(n).\varepsilon(n).\varepsilon^H(n).u(n).u^H(n) \\ &= \left\{ \sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^M (u(n).u^H(n))_{il} . (\varepsilon(n).\varepsilon^H(n))_{lp} . (u(n).u^H(n))_{pj} \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

şeklindedir. Buradaki elemanlar

$$\begin{aligned} (u(n).u^H(n))_{il} &= u(n).u^H(n)' \text{in } i. \text{ satır ve } l. \text{ sütun elemanı} \\ &= u(n-i).u^*(n-l) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon(n).\varepsilon^H(n))_{lp} &= \varepsilon(n).\varepsilon^H(n)' \text{in } l. \text{ satır ve } p. \text{ sütun elemanı} \\ &= \varepsilon_l(n).\varepsilon_p^*(n) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} (u(n).u^H(n))_{pj} &= u(n).u^H(n)' \text{in } p. \text{ satır ve } j. \text{ sütun elemanı} \\ &= u(n-p).u^*(n-j) \end{aligned} \quad (5.25)$$

olarak tanımlanmaktadır. (5.22) eşitliğinde çift toplam içeren ifade beklendik değer alındığında temel kabuller uyarınca iki parça biçiminde yazılabilirler. Birinci kısım sadece tap girişlerini

$$u(n-i).u^*(n-l).u(n-p).u^*(n-j)$$

içerir. İkinci kısım ise tap ağırlık hatalarını

$$= \varepsilon_l(n).\varepsilon_p^*(n)$$

içerir. Temel kabullerin bir sonucu olarak bu iki parça birbirlerinden bağımsız olarak incelenebilmektedir. Birinci kısmın beklendik değerini bulmak için, (5.21) eşitliği için

$$\begin{aligned} E[u(n-i).u^*(n-l).u(n-p).u^*(n-j)] &= \\ &= E[u(n-i).u^*(n-l)].E[u(n-p).u^*(n-j)] \\ &\quad + E[u(n-i).u^*(n-j)].E[u^*(n-l).u(n-p)] \\ &= r(l-j).r(j-p) + r(j-i).r(l-p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

kullanılır. İkinci kısmın beklendik değeri, ağırlık hatasının ilişkili matrisi $K(n)$ 'nin 1. elemanına

$$k_{lp} = E[\varepsilon_l(n) \cdot \varepsilon_p(n)] \quad (5.27)$$

eşittir. Yeniden

$$E[\{x_{ij}(n)\}] = \{E[x_{ij}(n)]\} \quad (5.28)$$

biçiminde bir tanımlama yapılsın. Buradan da görüleceği gibi beklendiği değer alma işlemi ile çift toplamın yer değiştirmesi sonucu etkilemez.

Buna göre

$$\begin{aligned} E[\{x_{ij}(n)\}] &= \{r(j-i) \sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^M r(l-p) \cdot k_{lp}(n)\} \\ &+ \{ \sum_{l=1}^M \sum_{p=1}^M r(l-i) \cdot r(j-p) \cdot k_{lp}(n) \} \end{aligned} \quad (5.29)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim $R \cdot \text{tr}[R \cdot K(n)]$ olarak ifade edilir. Buradaki $\text{tr}[\cdot]$, matris iz operatörüdür. İkinci terim ise $R \cdot K(n) \cdot R$ olarak tanımlanır. Bu açıklamalar altında 1. Adım için genel ifade

$$E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] = R \cdot \text{tr}[R \cdot K(n)] + R \cdot K(n) \cdot R \quad (5.30)$$

biçiminde tanımlanır.

2. Adım: ikinci terim için

$$\mu \cdot E[(u(n) \cdot e_0^*(n)) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot (I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n))]$$

yazılır. Bu ifade, μ ve μ^2 ile başlayan iki kısımdan meydana gelir. μ ile başlayan kısım

$$\mu \cdot E[(u(n) \cdot e_0^*(n)) \cdot \varepsilon^H(n)] = \mu \cdot E[u(n) \cdot e_0^*(n)] \cdot E[\varepsilon^H(n)] \quad (5.31)$$

eşitliği ile gösterilir. Bu eşitlikte $\varepsilon(n)$ 'nin, $u(n)$, $d(n)$ ve dolayısı ile optimum kestirim hatasından bağımsız olmasından yararlanılmaktadır. Diklik kuralı uyarınca $E[u(n) \cdot e_0^*(n)] = 0$ olduğunda μ 'lü kısım sıfıra eşittir.

μ^2 ile başlayan kısım için, eksi işareti göz önüne alınmadan 1. Adım' daki yol izlenir. Bunun için

$$\begin{aligned} \mu^2 \cdot E[u(n) \cdot e_0^*(n) \cdot \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n)] \\ = \mu^2 \cdot E[\{u(n-i) \cdot e_0^*(n) \cdot \varepsilon_1(n) \cdot u(n-1) \cdot u^*(n-j)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu^2 \cdot \{E[u(n-i) \cdot e_0(n) \cdot \varepsilon_1(n) \cdot u(n-1) \cdot u^*(n-j)]\} \quad (5.32) \\
&= \mu^2 \cdot \{E[u(n-i) \cdot e_0(n) \cdot u(n-1) \cdot u^*(n-j)] \cdot E[\varepsilon_1(n)]\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin son satırında ilişkisizlik kuramından faydalanılmaktadır. Şimdi Gauss momentleri çarpanlarına ayırma kuramı

$$\begin{aligned}
&E[u(n-i) \cdot e_0(n) \cdot u(n-1) \cdot u^*(n-j)] \\
&= E[u(n-i) \cdot e_0(n)] \cdot E[u(n-1) \cdot u^*(n-j)] \quad (5.33) \\
&+ E[u(n-i) \cdot u^*(n-j)] \cdot E[e_0(n) \cdot u(n-1)]
\end{aligned}$$

biçiminde yeniden uygulansın. Diklik kuralı uyarınca

$$E[u(n-i) \cdot e_0(n)] = 0, \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (5.34)$$

olduğundan dolayı (5.33) eşitlinin sağ tarafındaki ilk terim tüm i değerleri için sıfırdır. Benzer şekilde ikinci terimde tüm 1 değerleri için sıfırdır. Böylece μ^2 ile başlayan kısım da sıfıra eşit olur.

3.Adım: Üçüncü terim için

$$\mu \cdot E[(I - \mu \cdot u(n) \cdot u^H(n)) \cdot \varepsilon(n) \cdot (e_0(n) \cdot u^H(n))]$$

yazılır. Bu ifade 2.Adım'daki ifadeye benzerdir. Bu ifade de diklik kuralı uygulandığında sıfıra eşit olduğu görülür.

4.Adım Dördüncü terim için

$$\mu^2 \cdot E[u(n) \cdot e_0(n) \cdot e_0(n) \cdot u^H(n)]$$

yazılır. 1.Adım'daki yol izlenerek yukarıdaki ifade

$$\mu^2 \cdot E[u(n) \cdot e_0(n) \cdot e_0(n) \cdot u^H(n)] = \mu^2 \cdot \{E[u(n-i) \cdot e_0(n) \cdot e_0(n) \cdot u^*(n-j)]\} \quad (5.35)$$

biçimine getirilir. Gauss momentleri çarpanlarına ayırma kuramını kullanarak eşitlik için

$$\begin{aligned}
E[u(n-i) \cdot e_0(n) \cdot e_0(n) \cdot u^*(n-j)] &= E[u(n-i) \cdot e_0(n)] \cdot E[e_0(n) \cdot u^*(n-j)] \\
&+ E[u(n-i) \cdot u^*(n-j)] \cdot E[e_0(n) \cdot e_0(n)] \quad (5.36)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (5.34) eşitliği ile verilen diklik kuralı, (5.36) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim için uygulanırsa, bu terimin tüm i ve j değerleri için sıfır olduğu bulunur. İkinci terim ise

$$E[u(n-i).u^*(n-j)] = r(j-i) \quad (5.37)$$

$$E[e_0(n)e_0^*(n)] = E[|e_0(n)|^2] = J_{\min}$$

terimlerinden oluşur. (5.35) eşitliği yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \mu^2.E[u(n).e_0^*(n).e_0(n).u^H(n)] &= \mu^2.J_{\min}.r(j-i) \\ &= \mu^2.J_{\min}.R \end{aligned} \quad (5.38)$$

elde edilir. Şimdi dört adımda bulunan sonuçlar birleştirilerek ağırlık hatasının ilişki matrisinin yineleme eşitliği

$$\begin{aligned} K(n+1) &= K(n) - \mu.[R.K(n) - K(n).R] + \mu^2.R.tr[R.K(n)] \\ &\quad + \mu^2.R.K(n).R + \mu^2.J_{\min}.R \end{aligned} \quad (5.39)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitliğin son terimi, $\mu^2.J_{\min}.R$, bu eşitliğin çözümünün başlangıçta $K(n)=0$ 'dan başlamasını önler. Bu terim yardımıyla ilişki matrisi $K(n)$ 'nin sifıra gitmesi önlenmiş olur. $\varepsilon(n)$ sifıra yaklaşırken sıfır civarında küçük dalgalanmalar gösterir.

Şimdi, (5.39) eşitliğindeki ilişki matrisinin pozitif tanımlılığı gösterilsin. Bunun için (5.39) eşitliğinin sağ tarafı

$$(I - \mu.R).K(n).(I - \mu.R) + \mu^2.R.tr[R.K(n)] + \mu^2.J_{\min}.R \quad (5.40)$$

olacak biçimde yeniden yazılır.

R , pozitif tanımlı olduğundan, $K(n)$ pozitif tanımlı olduğunda eşitliğin ilk terimi sıfır olur. İkinci terimi μ^2 olmadan yeniden yazılırsa

$$R^{1/2}.tr[R^{1/2}.K(n).R^{1/2}].R^{1/2} \quad (5.41)$$

bulunur. $R^{1/2}$; R 'nin kareköküdür. Burada

$$tr[R.K(n)] = tr[R^{1/2}.R^{1/2}.K(n)] = tr[R^{1/2}.K(n).R^{1/2}]$$

özelliliği kullanılmıştır.

$K(n)$ pozitif tanımlı olduğunda $R^{1/2}.K(n).R^{1/2}$ 'de pozitif tanımlıdır. Şimdi, "eğer bir X matrisi pozitif tanımlı ise, o zaman $tr[X].I - X$ matriside pozitif tanımlıdır" özelliğini kullanarak (5.40) eşitliğinin ikinci terimi için, $K(n)$ matrisi pozitif tanımlıysa, pozitif tanımlı bir matris olduğu söylenebilir. $K(0)$ 'ın pozitif tanımlı olduğunu

$$\begin{aligned}
K(0) &= \varepsilon(0) \cdot \varepsilon^H(0) \\
&= [\hat{w}(0) - w_0] \cdot [\hat{w}^H(0) - w_0^H]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

ile kanıtlandığından (5.39) yineleme eşitliği ile bulunan $K(n)$ değerleri de pozitif tanımlıdır.

5.6. KARESEL ORTALAMA HATANIN DAVRANIŞI

(5.40) eşitliği, LMS algoritmasının karesel ortalama hatasının geçici davranışını incelemek için yararlı bir denklemdir. (5.5) ve (5.6) eşitlikleri, LMS algoritmasında üretilen kestirim hatası $e(n)$ 'i göstermek için kullanılır. (5.5) eşitliği, (5.6) eşitliğindeki yerine konursa

$$\begin{aligned}
e(n) &= d(n) - \hat{w}^H(n) \cdot u(n) \\
&= d(n) - w_0^H \cdot u(n) - \varepsilon^H(n) \cdot u(n) \\
&= e_0(n) - \varepsilon^H(n) \cdot u(n)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

bulunur. LMS algoritmasının n anındaki karesel ortalama hatası $J(n)$ ile gösterilsin. $J(n)$, (5.43) eşitliği yardımıyla, ilişkisizlik kuramından da yararlanarak

$$\begin{aligned}
J(n) &= E[|e(n)|^2] \\
&= E[(e_0(n) - \varepsilon^H(n) \cdot u(n)) \cdot (e_0^*(n) - u^H(n) \cdot \varepsilon(n))] \\
&= J_{\min} + E[\varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n)]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

biçiminde bulunabilir. (5.44) eşitliğinin son satırındaki beklendiği değerli ifadeyi geliştirmek için, rastlantı değişkenlerinin beklendiği değerleri, üç katlı vektör çarpımı olarak

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n)] &= E[\text{tr}\{\varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n)\}] \\
&= E[\text{tr}\{u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)\}] \\
&= \text{tr}\{E[u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)]\}
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilir. $\varepsilon(n)$ 'nin $u(n)$ 'den bağımsız olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
E[\varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n)] &= \text{tr}\{E[u(n) \cdot u^H(n)] \cdot E[\varepsilon(n) \cdot \varepsilon^H(n)]\} \\
&= \text{tr}[R \cdot K(n)]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

yazılabilir. (5.44) eşitliği, (5.45) eşitliğindeki yerine konursa

$$J(n) = J_{\min} + \text{tr}[R.K(n)] \quad (5.46)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten de görüleceği gibi karesel ortalama kestirim hatası iki kısımdan oluşur. Birincisi, en küçük karesel ortalama hata ve ikicisi de, ağırlık hatasının ilişki matrisi $K(n)$ 'nin geçici davranışına göre değişen kısımdır. Sözü edilen bu kısımlar, n 'nin tüm değerleri için pozitif tanımlı olduğundan, LMS algoritması en küçük karesel ortalama hata $J_{\min}$ değerinden büyük bir karesel ortalama hata $J(n)$ üretir. Karesel ortalama hata $J(n)$ ile en küçük karesel ortalama hata $J_{\min}$ arasındaki fark artık karesel ortalama hata olarak isimlendirilir ve $J_{\text{ex}}(n)$

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= J(n) - J_{\min} \\ &= \text{tr}[R.K(n)] \end{aligned} \quad (5.47)$$

biçiminde gösterilir.

Yakınsamada kullanmak üzere, ilişki matrisi R 'nin özdeğer ve özvektörler cinsinden gösterilmesinin

$$Q^H R Q = \Lambda \quad (5.48)$$

biçiminde olduğu hatırlanırsa buradan

$$Q^H K(n) Q = X(n) \quad (5.49)$$

tanımı yapılabilir. $X(n)$, diagonal olmayan bir matristir. (5.48) ve (5.49) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \text{tr}[R.K(n)] &= \text{tr}[Q \Lambda Q^H Q X(n) Q^H] \\ &= \text{tr}[Q \Lambda X(n) Q^H] \end{aligned} \quad (5.50)$$

bulunur. Matris izindeki çarpımların yer değiştirebilme özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \text{tr}[R.K(n)] &= \text{tr}[Q^H Q \Lambda X(n)] \\ &= \text{tr}[\Lambda X(n)] \end{aligned} \quad (5.51)$$

yazılır. Λ , diagonal bir matris olduğundan eşitlik

$$J_{ex} = \sum_{i=1}^M \lambda_i \cdot x_i(n) \quad (5.52)$$

olarak yazılabilir. Yine (5.48) ve (5.49) eşitlikleri yardımıyla (5.39)

yineleme eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X(n+1) = X(n) - \mu [\Lambda \cdot X(n) + X(n) \cdot \Lambda] + \mu^2 \cdot \Lambda \cdot \text{tr}[\Lambda \cdot X(n)] + \mu^2 \cdot \Lambda \cdot X(n) \cdot \Lambda + \mu^2 \cdot J_{\min} \cdot \Lambda \quad (5.53)$$

elde edilir. (5.52) eşitliğinden görülebileceği gibi, $J_{ex}(n)$ yalnızca $x_i(n)$ 'nin değişimine bağlıdır. Bu yüzden, (5.53) eşitliğinin diagonal elemanlarına bakılmalıdır. Diagonal elemanlar

$$x_i(n+1) = x_i(n) - 2 \cdot \mu \cdot \lambda_i \cdot x_i(n) + \mu^2 \lambda_i \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot x_j(n) + \mu^2 \lambda_i^2 \cdot x_i(n) + \mu^2 J_{\min} \cdot \lambda_i \quad (5.54)$$

biçimindedir. Sadece bu eşitliğin diagonal elemanları kullanılacağından eşitlik matris yapısında

$$x(n+1) = B \cdot x(n) + \mu^2 J_{\min} \cdot \lambda \quad (5.55)$$

biçiminde yazılabilir. Burada B, M*M boyutlu, elemanları

$$b_{ij} = \begin{cases} (1 - \mu \cdot \lambda_i)^2 + \mu^2 \lambda_i^2, & i = j \\ \mu^2 \lambda_i \lambda_j, & i \neq j \end{cases}$$

olan, gerçel, pozitif ve simetrik bir matristir.

(5.55) eşitliği, matris yapısında birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Başlangıç değeri, $x(0)$ kabul edilerek bu eşitlik için

$$x(n) = B^n x(0) + \mu^2 J_{\min} \sum_{i=0}^{n-1} B^i \lambda \quad (5.57)$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitlikteki $\sum_{i=0}^{n-1} B^i$ sonlu toplamı

$$\sum_{i=0}^{n-1} B^i = (I - B^n) \cdot (I - B)^{-1} \quad (5.58)$$

olarak gösterilebilir. (5.58) eşitliği, (5.57) eşitliğindeki yerine konursa eşitlik

$$x(n) = B^n \left[x(0) + \mu^2 J_{\min} (I - B)^{-1} \lambda \right] + \mu^2 J_{\min} (I - B)^{-1} \lambda \quad (5.59)$$

biçimini alır. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim, $x(n)$ vektörünün geçici kısmıdır. İkinci terim ise değişmeyen kısmıdır. B matrisi

simetrik olduğundan

$$G^T \cdot B \cdot G = C \quad (5.60)$$

yazılabilir. C matrisi, elemanları c_i , $i=1,2,\dots,M$ olan B'nin özdeğerlerini içeren diagonal bir matristir. G matrisi, i. sütununda özvektörleri g_i 'yi içeren ortanormal bir matristir. Özellik uyarınca

$$G \cdot G^T = I \quad (5.61)$$

olduğundan

$$B^n = G \cdot C^n \cdot G^T \quad (5.62)$$

yazılabilir. Bu eşitlik yardımıyla (5.59) eşitliği

$$x(n) = G \cdot C^n \cdot G^T \left[x(0) + \mu^2 J_{\min} (I - B)^{-1} \lambda \right] + \mu^2 J_{\min} (I - B)^{-1} \lambda \quad (5.63)$$

olarak yeniden yazılabilir. (5.63) eşitliği yalnız ve yalnız B matrisinin özdeğerlerinin tümünün birden küçük olması ile kararlı olur. Özdeğerler, B matrisi pozitif tanımlı olduğundan pozitiflerdir. Kararlılık için gerekli koşul

$$0 < c_i < 1, \text{ tüm } i\text{'ler için} \quad (5.64)$$

olarak yazılır. Bu koşul gerçekleştiğinde, (5.63) eşitliğinin geçici kısmı, yinelemenin ilerlemesiyle sıfıra doğru düşer, n sonsuza yaklaşırken yalnızca durağan hal kısmı kalır. Bu durum için

$$x(\infty) = \mu^2 J_{\min} (I - B)^{-1} \lambda \quad (5.65)$$

yazılabilir. (5.65) eşitliğini (5.63) eşitliğinde yerine koyarak

$$x(n) = G \cdot C^n \cdot G^T \cdot [x(0) - x(\infty)] + x(\infty) \quad (5.66)$$

biçiminde daha sade olarak yazılabilir. C^n matrisi diagonal görünümlü ve G matrisinin sütunlarında B matrisinin özvektörleri yer aldığından $G \cdot C^n \cdot G^T$ matris çarpımı

$$G \cdot C^n \cdot G^T = \sum_{i=1}^M c_i^n \cdot g_i \cdot g_i^T \quad (5.67)$$

olarak gösterilebilir. Bu eşitlik yardımıyla, (5.66) eşitliği

$$x(n) = \sum_{i=1}^M c_i^n \cdot g_i \cdot g_i^T \cdot [x(0) - x(\infty)] + x(\infty) \quad (5.68)$$

biçiminde bir kez daha düzenlenebilir. Artık karesel ortalama hatanın

$$\begin{aligned} J_{\text{ex}}(n) &= \lambda^T \mathbf{x}(n) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^n \cdot \lambda^T \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i^T [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] + \lambda^T \mathbf{x}(\infty) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^n \cdot \lambda^T \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i^T [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] + J_{\text{ex}}(\infty) \end{aligned} \quad (5.69)$$

olduğu bulunabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim artık karesel ortalama hatanın geçici davranışını gösterir. İkinci terim ise uyarılmanın sona erdiği andaki değeridir.

Şimdi, değişmeyen kısım $J_{\text{ex}}(n)$ 'i incelemek için, ilişki matrisi $\mathbf{R}'$ nin özdeğerleri kullanılarak bir ifade yazılmaya çalışılsın. Bunun için (5.65) eşitliği λ^T ile çarpılırsa

$$J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\min} \frac{\sum_{i=1}^M \mu \cdot \lambda_i / (2 - \mu \cdot \lambda_i)}{1 - \sum_{i=1}^M \mu \cdot \lambda_i / (2 - \mu \cdot \lambda_i)} \quad (5.70)$$

elde edilir. En son olarak (5.70) eşitliği, (5.69) eşitliğinde yerine konarak LMS algoritması için karesel ortalama hatanın zamanla değişimi

$$J(n) = \sum_{i=1}^M \gamma_i \cdot c_i^n + \frac{J_{\min}}{1 - \sum_{i=1}^M \mu \cdot \lambda_i / (2 - \mu \cdot \lambda_i)} \quad (5.71)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Burada için

$$\gamma_i = \lambda^T \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i^T [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(\infty)] , \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.72)$$

kullanılır. $\mathbf{x}(0)$ başlangıç değerinin i . elemanı ile ağırlık hata vektörünün başlangıç değeri $\varepsilon(0) = \mathbf{w}(0) - \mathbf{w}_0$ 'dan yararlanılarak

$$\mathbf{x}_i(0) = E[\mathbf{q}_i^H \cdot \varepsilon(0) \cdot \varepsilon^H(0) \cdot \mathbf{q}_i] , \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.73)$$

olarak yazılır.

5.7. KARESEL ORTALAMA HATANIN GEÇİCİ DAVRANIŞI

Bu bölümde, karesel ortalama hata $J(n)$ 'nin geçici davranışının

özelliklerini özetleyebiliriz. Bu özellikler, LMS algoritmasının geniş anlamda durağan ortamlardaki uygulamasının daha iyi bir şekilde anlaşılmasını sağlayacaktır. Bütün bu özellikler, (5.71) eşitliğine göre yazılmıştır.

Karesel ortalama hatanın geçici kısmı, değişim göstermez. $J(n)$ 'nin geçici kısmı, $\sum_{k=1}^M \gamma_i \cdot c_i^n$ 'e eşittir. γ_i 'ler sabit katsayılardır ve c_i , $i=1,2,\dots,M$, B matrisinin özdeğerlerleridir. Bütün özdeğerler, B gerçel, simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olduğundan gerçel pozitif sayılardır. n 'nin değişimiyle birlikte genel ortalama alınmadan çizilen eğri, gürültüyü de içerir. Gürültünün genliği, adım uzunluğu μ 'nün azaltılması ile küçülür.

Karesel ortalama hata $J(n)$, yalnız ve yalnız adım uzunluğunun iki koşulu yerine getirmesi sonucu durağan hal değeri $J(\infty)$ 'a yakınsar. Bu koşullar,

$$(i) \quad 0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (5.74)$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^M \frac{\mu \cdot \lambda_i}{(2 - \mu \cdot \lambda_i)} < 1 \quad (5.75)$$

ile gösterilir. Bu iki koşul sağlandığında LMS algoritmasının karesel ortalama da yakınsadığını söyleyebiliriz.

Özdeğeri c olan B matrisinin özvektörü g olsun. Tanım gereği

$$B \cdot g = c \cdot g \quad (5.76)$$

ya da eşdeğer olarak

$$\sum_{j=1}^M b_{ij} \cdot g_j = c \cdot g_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.77)$$

olarak yazılabilir. B matrisinin elemanları için (5.56) eşitliği kullanılarak (5.77) eşitliği

$$(1 - \mu \cdot \lambda_i)^2 g_i + \mu^2 \lambda_i \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot g_j = c \cdot g_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.78)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitliği g_i için çözersek

$$g_i = \frac{\mu^2 \lambda_i}{c - (1 - \mu \lambda_i)^2} \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot g_j, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.79)$$

olarak bulunabilir. Kararlılık koşulunun sınır değeri olarak c özdeğerine "1" değeri verilsin ve bu andaki adım uzunluğunun kritik değeri μ_{crit} ile gösterilsin. Bu koşullarda (5.79) eşitliği

$$g_i = \frac{\mu_{crit}}{2 - \mu_{crit} \lambda_i} \sum_{j=1}^M \lambda_j \cdot g_j, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (5.80)$$

biçimini alacaktır. g_i 'nin tüm i değerleri için yalnız ve yalnız

$$\mu < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (5.81)$$

için pozitif olacağı açıkça görülür. (5.80) eşitliğinin her iki yanı λ_j ile çarpılıp, $i=1, 2, \dots, M$ olacak şekilde toplam biçiminde yazılıp sadeleştirilirse

$$\sum_{i=1}^M \frac{\mu_{crit} \lambda_i}{(2 - \mu_{crit} \lambda_i)} = 1 \quad (5.82)$$

sonucu elde edilir. μ 'nın değeri, pozitif ve kritik değer μ_{crit} 'ten küçük olmalıdır. LMS algoritmasının karesel ortalama yakınsaması için gerek ve yeter koşulların ancak (5.81) ve (5.82) eşitlikleri ile sağlandığını görülür.

Eğer adım uzunluğu μ yeterince küçük seçilirse, $(2 - \mu \lambda_i)$ ikiye eşit kabul edilerek

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad (5.83)$$

koşulu yazılabilir. $r(0)$ uyarlamalı süzgecin M tane tapının her birisindeki girişin karesel ortalama hatasına eşit olacağından

$$\begin{aligned} &= M \cdot r(0) \\ &= \sum E[|u(n-k)|^2] \end{aligned}$$

yazılabilir. Şekil 5.1(b)'deki tap girişlerinin karesel ortalama değer toplamları için, toplam giriş gücü ifadesi kullanılarak, (5.83) eşitliği LMS algoritmasının karesel ortalama yakınsaması için

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{toplam giriş gücü}} \quad (5.84)$$

biçiminde yeniden tanımlama yapılsın.

LMS algoritması ile üretilen karesel ortalama hatanın son değeri

$$J(\infty) = \frac{J_{\min}}{1 - \sum_{i=1}^M \mu \lambda_i / (2 - \mu \lambda_i)} \quad (5.85)$$

olacaktır.

Uyumsuzluk, artık karesel hata $J_{\text{ex}}(\infty)$ 'nın en küçük karesel ortalama hatası $J_{\min}$ 'e oranı olarak tanımlanır. Uyumsuzluk, uyarılmanın ne ölçüde sağlandığının bir ölçüsüdür. Uyumsuzluk için

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{J_{\min}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^M \mu \lambda_i / (2 - \mu \lambda_i)}{1 - \sum_{i=1}^M \mu \lambda_i / (2 - \mu \lambda_i)} \end{aligned} \quad (5.86)$$

tanımı yapılmaktadır. Eğer adım uzunluğu μ , $(2 - \mu \lambda_i)$ a göre küçükse, uyumsuzluk

$$M_i = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (5.87)$$

biçiminde yazılabilir.

M_i , yüzde olarak gösterilir. Örneğin uyumsuzluk %10 deniyorsa, bu LMS algoritmasının, uyarılma tamamlandıktan sonra en küçük karesel ortalama hatadan, %10 fazla bir karesel ortalama hata ürettiği anlamına gelir.

5.8. LMS ALGORİTMASININ DURAĞAN OLMAYAN ORTAMLARDAKİ UYGULAMASI

LMS algoritmasının durağan ortamlardaki sınırlamaları daha önceki bölümlerde belirtilmişti. Şimdi LMS algoritmasının durağan olmayan ortamlara uygulanma yeteneklerinden kısaca bahsedilecektir.

Uyarlamalı süzgeç, durağan olmayan bir ortamda kullanıldığında optimum tap ağırlık vektörünün değerleri her tekrarda değişiyor olarak kabul edilir. LMS algoritması, yalnızca hata başarımlı yüzeyinin en küçük noktasının aranması değil, aynı zamanda sürekli değişen en küçük noktanın ayarlanması görevini de yerine getirir.

$w_0(n)$, durağan olmayan ortamda kullanılan süzgecin, zamanla değişen optimum tap ağırlık vektörü olarak gösterilmektedir. LMS algoritması, kestirilen tap ağırlık vektörü $\hat{w}(n)$ 'i bilinmeyen optimum tap ağırlık vektörü $w_0(n)$ 'e en iyi şekilde uydurulmasını sağlar. n .anda tap ağırlık hata vektörü

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= \hat{w}(n) - w_0(n) \\ &= \{\hat{w}(n) - E[\hat{w}(n)]\} + \{E[\hat{w}(n)] - w_0(n)\} \end{aligned} \quad (5.88)$$

olur. Eşitliğin ikinci satırının ilk terim, tap ağırlık vektörünün elemanları ile genel ortalamaları $E[\hat{w}(n)]$ arasındaki fark $\{\hat{w}(n) - E[\hat{w}(n)]\}$, kestirimdeki hatalarına göre gradyan vektörleri için kullanılır. Bu fark, ağırlık vektör gürültüsü olarak isimlendirilir ve

$$\varepsilon_1(n) = \hat{w}(n) - E[\hat{w}(n)] \quad (5.89)$$

ile gösterilir.

ikinci terim olan $E[\hat{w}(n)]$ ile hedef değer $w_0(n)$ arasındaki fark

$$\varepsilon_2(n) = E[\hat{w}(n)] - w_0(n) \quad (5.90)$$

biçiminde bir hata oluşturur.

LMS algoritması durağan bir ortamda kullanıldığında, $w_0(n)$, $E[\hat{w}(n)]$ a eşit sabit bir değer olarak kabul edilir. Sonuçta $\varepsilon_2(n)$ sıfır olur. $\varepsilon_2(n)$ 'nin sıfır ya da sıfırdan farklı olup olmadığının kontrol edilmesi

ile LMS algoritmasının hangi ortamda çalıştığı belirlenir.

Bilinmeyen sistem ile LMS uyarlamalı süzgeci Şekil 5.3'te gösterilmiştir. Bu şekil için;

(i) Bilinmeyen sistem, birbirinden bağımsız, durağan birinci dereceden Markov süreçlerine* maruz kalmış M tane tap ağırlığından oluşmuş süzgeçtir. Bu süzgecin tap ağırlık vektörü $w_0(n)$ 'in elemanlarının her biri, transfer fonksiyonu $1/(1-az^{-1})$ 'e eşit, tek kutuplu alçak geçiren sayısal süzgece, bir beyaz gürültü uygulanması ile elde edilmiştir. Bu beyaz gürültü, sıfır ortalamalı ve σ^2 değişintilidir.

(ii) Durağan, sıfır ortalamalı ve ilişki matrisi R olan tap giriş vektörü $u(n)$, bilinmeyen sistem ile LMS uyarlamalı süzgecinin her ikisine birden uygulanır.

(iii) Bilinmeyen sistemin çıkışı, sıfır ortalamalı ve değişintisi σ_v^2 olan beyaz gürültünün eklenmesi ile bozulur. Bu gürültü bilinmeyen sistem ile LMS uyarlamalı süzgecinin mükemmel bir şekilde uydurmasını engeller.

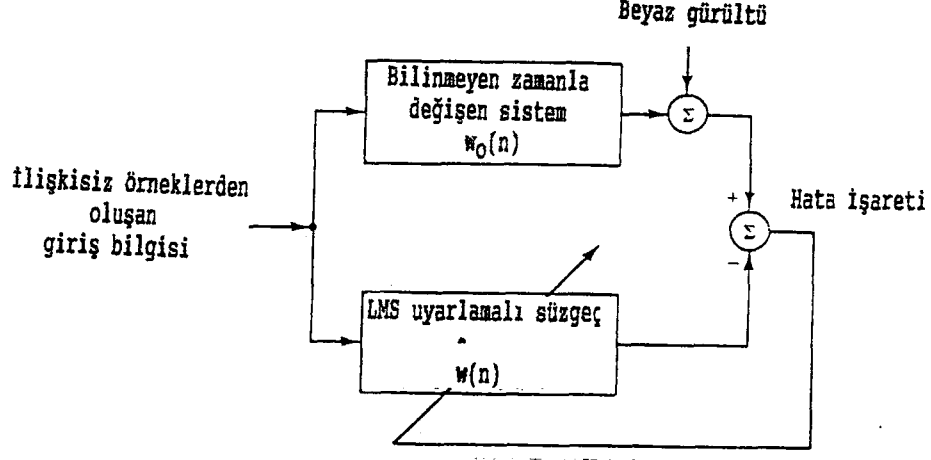
koşulları kabul edilmektedir.

Bilinmeyen sistemin zamanla değişen tap ağırlık vektörü $w_0(n)$ ile gösterilen hedef değere LMS uyarlamalı süzgeciyle ayarlanır. Her zaman LMS uyarlamalı süzgecinin tap ağırlığı $\hat{w}(n)$ $w_0(n)$ 'e en küçük karesel ortalama hata $J_{\min} = \sigma_v^2$ iken eşittir. Bilinmeyen sistemin zamanla değişen tap ağırlık vektörü $w(n)$, hedef değer $w_0(n)$ 'e LMS uyarlamalı süzgeci yardımıyla ayarlanır.

* Eğer bir rastgele vektör $w_0(n)$; koşullu birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonunu

$$f_w(w_0(n)|w_0(n-1), \dots, w_0(1)) = f_w(w_0(n)|w_0(n-1))$$

olacak şekilde her n değeri için sağlıyorsa, $w_0(n)$ 'e; birinci dereceden Markov süreci ya da sadece Markov süreci denir.



Şekil 5.3 : LMS uyarlamalı süzgeci ile bilinmeyen bir sistemin modellenmesi

Uyarlamalı süzgece uygulanan $d(n)$, bilinmeyen sistemin çıkışında, sistem girişindeki değerine eşittir. Sistem zamanla değiştiğinden, istenen yanıt da doğal olarak durağan değildir. Tap girişleri, zamanla değişen ikinci dereceden bir hata başarımlı yüzeyinin en küçük noktasında bulunduğu andaki, özdeğer ve özvektör değerlerine sahip bir ilişki matrisi R' 'ye şartlanmıştır.

n anında, artık karesel ortalama hata

$$\begin{aligned} J_{ex}(n) &= J(n) - J_{min} \\ &= E[\varepsilon^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon(n)] \end{aligned} \quad (5.91)$$

biçimindeydi. $\varepsilon(n) = \varepsilon_1(n) + \varepsilon_2(n)$, (5.91) eşitliğinde yerine konursa $J_{ex}(n)$ için

$$\begin{aligned} J_{ex}(n) &= E[\varepsilon_1^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon_1(n)] + E[\varepsilon_2^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon_2(n)] \\ &\quad + E[\varepsilon_1^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon_2(n)] + E[\varepsilon_2^H(n) \cdot u(n) \cdot u^H(n) \cdot \varepsilon_1(n)] \end{aligned} \quad (5.92)$$

elde edilir.

(4.45) eşitliği yardımıyla eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki terim için

$$E[\varepsilon_1^H(n).u(n).u^H(n).\varepsilon_1(n)] = \text{tr}[R.K_1(n)]$$

$$E[\varepsilon_2^H(n).u(n).u^H(n).\varepsilon_2(n)] = \text{tr}[R.K_2(n)]$$

ve son iki terim için de

$$E[\varepsilon_1^H(n).u(n).u^H(n).\varepsilon_2(n)] = E[\varepsilon_2^H(n).u(n).u^H(n).\varepsilon_1(n)] = 0$$

yazılırsa (5.92) eşitliği

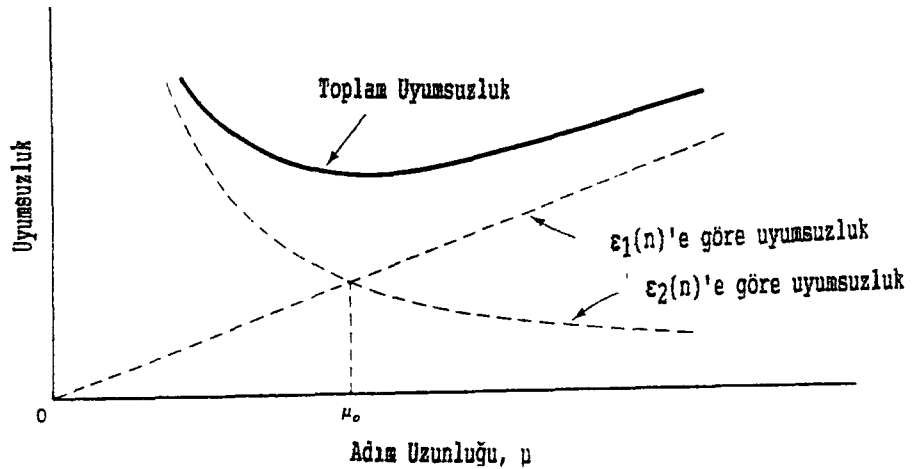
$$J_{\text{ex}}(n) = \text{tr}[R.K_1(n)] + \text{tr}[R.K_2(n)] \quad (5.93)$$

biçiminde sadeleştirilir.

Herhangi bir anda, $\varepsilon_1(n)$ ve $\varepsilon_2(n)$ 'nin artık karesel ortalama hatadaki etkileri incelenebilir.

(5.93) eşitliğinde yer alan $\varepsilon_1(n)$ 'nin etkisini incelemek için; $\varepsilon_2(n)=0$ yapılır. Bu durumda, $E[w(n)]=w_0(n)$ olmaktadır. Bu anda, (5.93) eşitliğindeki artık karesel ortalama hata $J_{\text{ex}}(n)$, $\text{tr}[R.K_1(n)]$ 'e eşittir. Burada belirtilmesi gereken en önemli nokta; yavaş uyarlamalar için adım uzunluğu μ 'ye göre bu etkinin doğru orantılı değişeceği.

$\varepsilon_2(n)$ 'nin etkisini incelemek için, $\varepsilon_1(n)=0$ yapılır. Bu durumda, $E[w(n)]=w(n)$ olmaktadır. Bu anda, adım uzunluğu μ küçük ve zaman sabiti büyüktür. Bu koşullar altında, $\text{tr}[R.K_2(n)]$, adım uzunluğu μ ile ters orantılı değişir.



Şekil 5.4 : Toplam uyumsuzluğun adım uzunluğu μ ile değişimi

(5.93) eşitliğinden görülen artık karesel ortalama hata $J_{\min}$ 'in, $\varepsilon_1(n)$ ve $\varepsilon_2(n)$ 'in bir toplamı biçiminde olduğudur. Buradan, LMS uyarlamalı süzgecinin toplam uyumsuzluğunu oluşturan ifadelerden birisiyle adım uzunluğu μ doğru diğeriyle ters orantılı olarak değişmektedir. Uyumsuzluğun en küçük değerinde adım uzunluğu μ , optimum değeri μ_0 'ya eşittir. Bu durumda her iki orantılı kısmın uyumsuzlukları birbirine eşittir. Bu durum, Şekil 5.4'te gösterilmektedir.

6. DOĞRUSAL BİR KANALIN DENKLEŞTİRİLMESİ

Şimdiye kadar, LMS algoritması için gerekli ön bilgiler ile LMS algoritmasının kendisi ayrıntılı olarak incelendi. LMS algoritması kısaca $\hat{w}(0)=0$ olmak üzere $n=0,1,2,\dots$ için

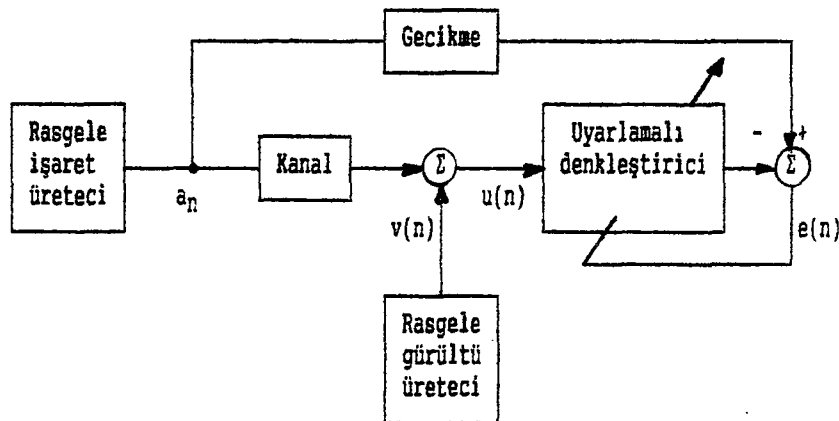
$$e(n) = d(n) - \hat{w}^H(n) \cdot u(n)$$

$$\hat{w}(n+1) = \hat{w}(n) + \mu \cdot u(n) \cdot e^*(n)$$

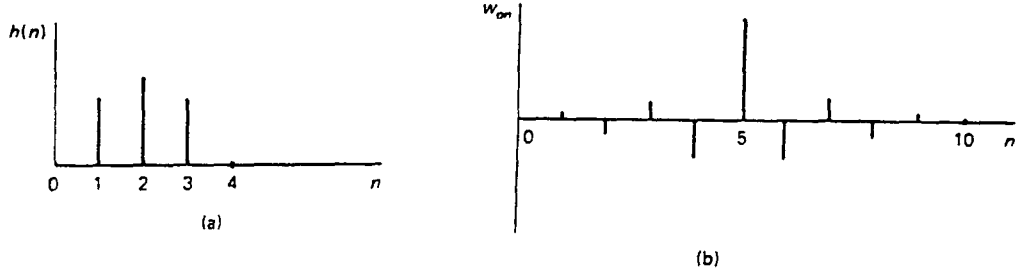
eşitlikleri ile özetlenebilmektedir.

Şimdi doğrusal bir kanaldan geçen ve daha sonra üzerine, değişintisi bilinen bir beyaz gürültü işareti eklenen işareti, LMS algoritmasının uygulandığı bir uyarlamalı denkleştiriciden geçirerek, yeniden elde eden bilgisayar benzetimi yapılacaktır. Şekil 6.1, bu işlemin yapıldığı sistemin bir gösterimidir. Burada kullanılan tüm işaretler gerçel değerli olarak alınmıştır. Rastgele işaret üretici, kanalın girişine uygulanacak işaret $a(n)$ 'i üretmektedir. Rastgele gürültü üretici, değişintisi, istenilen değerde seçilen ve σ_v^2 olan bir beyaz gürültü işareti $v(n)$ üretmektedir. Bu iki işaret üretici birbirinden istatistiksel bağımsızdır.

Rastgele işaret dizisi $\{a(n)\}$, kanal girişine uygulanmaktadır. İşaret, sıfır ortalımalı ve değeri, $a(n)=\pm 1$ 'dir. Kanalın impuls yanıtı



Şekil 6.1 :Uyarlamalı denkleştirmenin blok diyagramı



Şekil 6.2 (a) Kanalin impuls yanıtı (b) Optimum süzgecin impuls yanıtı

$$h_n = \begin{cases} 0.5[1 + \cos(\frac{2\pi}{W} (n-2))] , & n=1,2,3 \\ 0 , & \text{diğer değerler için} \end{cases} \quad (6.1)$$

biçimindedir. W , kanaldaki genlik bozulmasını kontrol eder. Aynı zamanda süzgecin tap girişlerinin ilişki matrisine ait özdeğer dağılımını da kontrol eder. W 'nın azalması ile özdeğer dağılımı da azalır. Gürültü işaretinin değişintisi bu uygulama için genel olarak $\sigma_v^2=0.001$ olarak seçilecektir.

Denkleştiricinin tap sayısı M , ayarlanabilmekle beraber, bu uygulamada genel olarak $M=11$ seçilecektir. Şekil 6.2'de kanalın impuls yanıt ve süzgecin optimum tap ağırlıkları genel olarak değer verilmeden gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi, kanalın impuls yanıtı $n=2$ 'ye göre simetrik olduğundan denkleştiricinin optimum tap ağırlıkları da $n=5$ 'e göre simetriktir. Bu simetrik yapıdan dolayı istenen yanıt $d(n)$, kanalın giriş işareti $a(n)$ 'e göre

$$d(n) = a(n-7) \quad (6.2)$$

biçiminde geciktirilmiş bir yapıdadır.

Benzetim yapılırken, özdeğer dağılımı, gürültünün değişintisi ve adım uzunluğu μ değiştirilerek, LMS algoritması kullanılan denkleştiricinin çıkışındaki karesel ortalama hata değiştirilebilir.

6.1. DENKLEŞTİRİCİ GİRİŞİNİN İLİŞKİ MATRİSİ

n anındaki denkleştirici girişi

$$u(n) = \sum_{k=1}^3 h_k \cdot a(n-k) + v(n) \quad (6.3)$$

biçimindedir ve bütün değişkenler gerçel değerlidir. Dengeleştiricinin 11 tap girişi $u(n), u(n-1), \dots, u(n-10)$ 'nun ilişki matrisi R , 11×11 boyutlu simetrik bir matristir. $\{h_n\}$ impuls yanıtları, sadece $n=1,2,3$ için sıfırdan farklı olduğundan üç tane ilişki değerine sahiptir. Kanala ait, değişik W değerleri için impuls yanıtları h_1, h_2, h_3 'ün aldığı değerler, tablo 6.1'de gösterilmektedir.

ilişki değerleri $u(n)$ gerçel değerli olduğundan

$$r(j) = E[u(n) \cdot u(n-j)] , j=0,1,\dots,M-1 \quad (6.4)$$

ile hesaplanır. (6.4) eşitliğinde (6.3) eşitliği konursa

$$\begin{aligned} r(j) &= E[(\sum_{k=1}^3 h_k \cdot a(n-k) + v(n)) \cdot (\sum_{l=1}^3 h_l \cdot a(n-j-l) + v(n-j))] \\ &= E[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 h_k \cdot h_l \cdot a(n-k) \cdot a(n-j-l)] + E[v(n) \cdot v(n-j)] \\ &\quad + E[\sum_{k=1}^3 h_k \cdot a(n-k) \cdot v(n-j)] + E[\sum_{l=1}^3 h_l \cdot a(n-j-l) \cdot v(n)] \end{aligned} \quad (6.5)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim, beyaz gürültünün ilişkisizlik özelliğinden dolayı sadece $j=0$ iken σ_v^2 değerine sahiptir. Üçüncü ve dördüncü terimler, gürültü ile işaret birbirlerinden istatistiksel bağımsız olduklarından sıfıra eşittir. Bu durumda (6.5) eşitliği sadeleştirilerek

$$r(j) = E[\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 h_k \cdot h_l \cdot a(n-k) \cdot a(n-j-l)] + E[v(n) \cdot v(n-j)] \quad (6.6)$$

biçiminde yazılabilir. Üreteçteki istenen yanıt dizisi $\{a(n)\}$, birbirlerinden bağımsız olduklarından

TABLO 6.1 : W 'ya göre h_k 'nın aldığı değerler

W	2.9	3.1	3.3	3.5
h_1	0.2194	0.2798	0.3365	0.3887
h_2	1	1	1	1
h_3	0.2194	0.2798	0.3365	0.3887

$$E[a(n).a(n-k)] = \begin{cases} 1 & , \quad k=0 \\ 0 & , \quad \text{diğer } k\text{'lar için} \end{cases} \quad (6.7)$$

biçiminde tanımlanabilir. Beyaz gürültü için de benzer biçimde

$$E[v(n).v(n-j)] = \begin{cases} \sigma_v^2 & , \quad j=0 \\ 0 & , \quad \text{diğer } j\text{'ler için} \end{cases} \quad (6.8)$$

yazılabilir. (6.7) ve (6.8) eşitlikleri yardımıyla ilişki değerleri

$$\begin{aligned} r(0) &= h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \sigma_v^2 \\ r(1) &= h_1.h_2 + h_2.h_3 \\ r(2) &= h_1.h_3 \\ r(3) &= r(4) = \dots = r(10) = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

olarak bulunur. Özilişki değerleri gerçel olduğundan $r(j)=r(-j)$ 'dir.

Buna göre ilişki matrisi R

$$R = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & 0 & . & . & . & 0 \\ r(1) & r(0) & r(1) & r(2) & . & . & . & 0 \\ r(2) & r(1) & r(0) & r(1) & . & . & . & 0 \\ 0 & r(2) & r(1) & r(0) & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & r(0) \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

biçiminde bir matristir. Bu ilişki matrisi R'ye ait, (6.9) eşitliğinden hesaplanılan özilişki değerleri, en küçük ve en büyük özdeğerler ile özdeğer dağılımı tablo 6.2'de gösterilmektedir.

TABLO 6.2 : $\sigma_v^2=0$ iken, W'ya göre özilişki değerleri

W	2.9	3.1	3.3	3.5
r(0)	1.0963	1.1558	1.2264	1.3022
r(1)	0.4388	0.5596	0.6729	0.7774
r(2)	0.0481	0.0783	0.1132	0.1511
En küçük özdeğer	0.3339	0.2136	0.1256	0.0656
En büyük özdeğer	2.0295	2.3761	2.7263	3.0707
Özdeğer dağılımı	6.0782	11.1238	21.7132	46.8216

6.2. OPTIMUM DENKLEŞTİRİCİ KATSAYILARI VE EN KÜÇÜK KARESEL ORTALAMA HATANIN KURAMSAL OLARAK İNCELENMESİ

Bilgisayar benzetimine başlanmadan önce, elde edilmesi gereken optimum denkleştiricinin tap ağırlıkları w_0 ile en küçük karesel ortalama hata $J_{\min}$ 'nin, kuramsal olarak hesaplanması yapılacak olan benzetimin sonuçlarının değerlendirilmesi açısından önemli kolaylıklar sağlayacaktır. Optimum denkleştiricinin tap ağırlık vektörü w_0 'ı bulmak için (2.38) eşitliği ile verilen

$$w_0 = R^{-1} \cdot p \quad (6.11)$$

Wiener-Hopf denkleminde yararlanılacaktır. Çapraz ilişki vektörü p , Şekil 6.1'deki denkleştirici için (6.2) eşitliğinden de yararlanılarak

$$p = E[u(n) \cdot d(n)] = \begin{bmatrix} E[u(n) \cdot a(n-7)] \\ E[u(n-1) \cdot a(n-7)] \\ \vdots \\ E[u(n-10) \cdot a(n-7)] \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

olarak gösterilebilir. Kullanılan değerler gerçel olduğundan eşlenik kullanılmamıştır. (6.12) eşitliğinde $u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)$ yerine (6.3) eşitliğindeki eşdeğeri konursa

TABLO 6.3 : $\sigma_v^2=0.001$ ve $M=11$ için optimum tap ağırlıkları ve en küçük karesel ortalama değer $J_{\min}$ 'nin kuramsal değerleri

W	2.9	3.1	3.3	3.5
w_{00}	-0.0006	-0.0026	-0.0081	-0.0222
w_{01}	0.0031	0.0101	0.0275	0.0683
w_{02}	-0.0135	-0.0339	-0.0755	-0.1602
w_{03}	0.0590	0.1117	0.1988	0.3493
w_{04}	-0.2560	-0.3671	-0.5182	-0.7446
w_{05}	1.1110	1.2037	1.3462	1.5748
w_{06}	-0.2560	-0.3671	-0.5182	-0.7446
w_{07}	0.0590	0.1117	0.1988	0.3493
w_{08}	-0.0135	-0.0339	-0.0755	-0.1602
w_{09}	0.0031	0.0101	0.0275	0.0683
w_{010}	-0.0006	-0.0026	-0.0081	-0.0222
$J_{\min}$	0.001375	0.001753	0.002374	0.004156

$$= \begin{bmatrix} h_1.E[a(n-1).a(n-7)] + h_2.E[a(n-2).a(n-7)] + h_3.E[a(n-3).a(n-7)] \\ h_1.E[a(n-2).a(n-7)] + h_2.E[a(n-3).a(n-7)] + h_3.E[a(n-4).a(n-7)] \\ \vdots \\ h_1.E[a(n-11).a(n-7)] + h_2.E[a(n-12).a(n-7)] + h_3.E[a(n-13).a(n-7)] \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. (6.7) eşitliğinden yararlanarak çapraz ilişki vektörü p

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ p(-1) \\ p(-2) \\ p(-3) \\ p(-4) \\ p(-5) \\ p(-6) \\ p(-7) \\ p(-8) \\ p(-9) \\ p(-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_3 \\ h_2 \\ h_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

olarak bulunur. (6.13) eşitliğinden de görüleceği gibi çapraz ilişki vektörü, kanalın katsayılarından ve sıfırlardan oluşmuştur.

Bulunan çapraz ilişki vektörü p ve EK-2'de verilen bilgisayar programı ile hesaplanan ilişki matrisi R 'nin tersi R^{-1} , (6.11) eşitliğindeki yerlerine konulunca, optimum denkleştiricinin tap ağırlıkları w_0 bulunur. $M=11$ ve $\sigma_v^2=0.001$ için W değişkeni ile w_0 'ın elemanlarının ve en küçük karesel ortalama hata $J_{\min}$ 'nin aldığı kuramsal değerler tablo 6.3'te verilmiştir.

6.3. BİLGİSAYAR BENZETİM SONUÇLARI

EK-1'de, BASIC programlama dilinde yazılmış, doğrusal bir kanalın LMS algoritması kullanılarak denkleştirilmesinin yapıldığı bilgisayar programı verilmektedir. Bu bilgisayar benzetiminde, kanalın katsayıları değiştirilerek denkleştiricinin girişindeki işaretlere ait ilişki matrisi R 'nin özdeğer dağılımı, gürültünün değişintisi σ_v^2 ve algoritmanın adım uzunluğu μ değiştirilerek karesel hatanın yinleme sayısı

değişimi ve denkleştiricinin tap ağırlık değerleri incelenmektedir. Benzetim sonuçları değiştirilen bu üç etken çerçevesinde değerlendirilecektir.

Özdeğer Dağılımının Etkisi :

Özdeğer dağılımının, algoritmaya etkisini inceleyebilmek için adım uzunluğu μ ve gürültünün değışintisi σ_v^2 değerlerinde hiç bir değışiklik yapılmadan sadece W değeri değıştirildi. Böylece sadece dengeleyici girişinin özdeğerleri değıştirilmiş oldu. Her bir özdeğer dağılımı için bir anlık karesel hata " $e^2(n)$ " değeri, birbirinden bağımsız 100 farklı değeri olarak hesaplandı ve her n anı için genel ortalaması alındı. Aynı işlem tap ağırlık değeri w_k 'lar için de gerçekleştirildi. Buna göre tap sayısı $M=11$ ve gürültünün değışintisi $\sigma_v^2=0.001$ alınıp, W 'ya; 2.9, 3.1, 3.3 ve 3.5 değeri verilerek çizilmiş, ortalama karesel hata $J(n)$ 'nin yinleme sayısı n 'ye göre değışimini gösteren eğri Şekil 6.3'te gösterilmiştir. Şekil 6.4'te de her W değeriindeki süzgecin tap ağırlıkları gösterilmektedir.

Adım Uzunluğunun Etkisi :

Adım uzunluğu μ 'nın LMS algoritmasına etkisini inceleyebilmek için bu sefer tap sayısı $M=11$, $\sigma_v^2=0.001$ alındı ve W ; 2.9 ve $W=3.3$ değerlerinden biri olarak alınıp adım uzunluğuna sırası ile; 0.075, 0.04 ve 0.025 değeri verildi. Yine her bir μ değeri için bir anlık karesel hata " $e^2(n)$ " değeri birbirinden bağımsız 100 farklı değeri olarak hesaplandı ve her n anı için bu değeriğin ortalaması alındı. Bu durum için elde edilen, ortalama karesel hata $J(n)$ 'nin yinleme sayısı n ile değışimleri Şekil 6.5 ve Şekil 6.6'da gösterilmektedir.

Gürültünün Etkisi :

Gürültünün değışintisi σ_v^2 değıştirerek algoritmaya etkisinin incelenmesi için tap sayısı $M=11$, $W=2.9$ ve $W=3.1$ alındı. Değışinti değeri

ri σ_v^2 'ye sırası ile 0, 0.01 ve 0.001 değerleri verilerek eğri çizdirildi. Elde edilen değişimler Şekil 6.7 ve Şekil 6.8'de gösterilmektedir.

6.4. BİLGİSAYAR BENZETİM SONUÇLARININ DEĞERLENDİRİLMESİ

Kanal parametresi olan W değeri, direk olarak özdeğer dağılımını etkilemektedir. Dolayısıyla özdeğer dağılımı W değeri ile değiştirilebilmektedir. Özdeğerler, özdeğer dağılımı küçüldükçe artık karesel ortalama hata küçülmektedir. Bu da, karesel hatanın durağan haldeki değerinin, en küçük karesel hata $J_{\min}$ 'e yaklaşmasını sağlamaktadır.

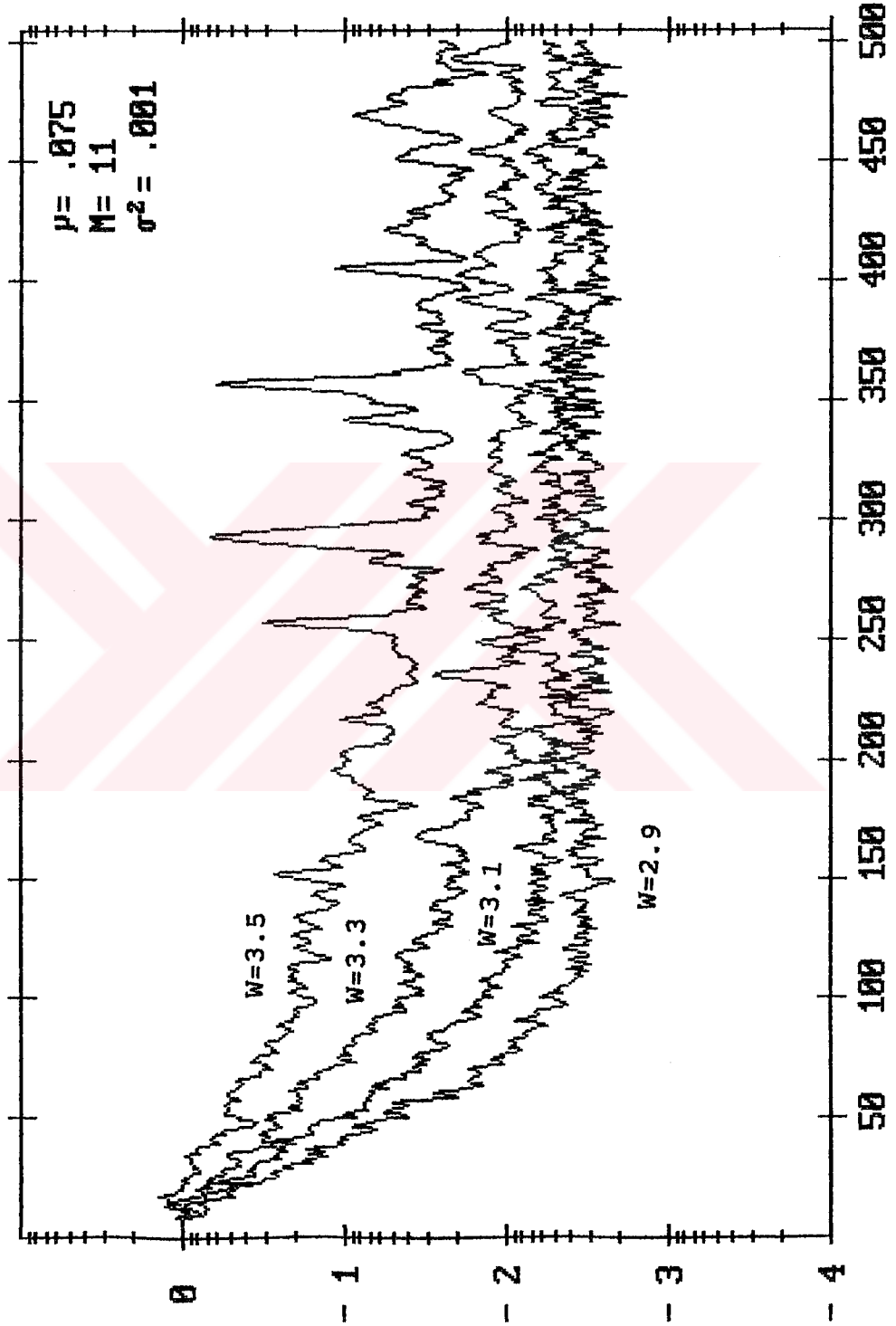
Benzetimde, denkleştirici girişlerinin özdeğer dağılımının en küçük değeri $W=2.9$ için 6.0782 olarak gerçekleşmiştir. Bu anda hatanın karesel ortalama değeri 0.002 civarında gerçekleşmiştir. Karesel hatanın bu değeri alabilmesi için yaklaşık 100 yineleme geçmiştir. En büyük özdeğer dağılımı, $W=3.5$ değeri için 46.8216 olarak gerçekleşmiştir. W'nın bu değerinde karesel hatanın ortalamasının 0.03 civarında gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Karesel hatanın bu değeri alabilmesi için ise yaklaşık 250 yineleme geçmiştir. Eğrilerden de görüldüğü gibi, özdeğer dağılımı arttıkça artık karesel ortalama hata ve eğrilerdeki dalgalanmalar artmaktadır. Ayrıca yakınsama için daha çok yineleme geçmektedir.

Adım uzunluğu, algoritmanın en küçük karesel değere yakınsama hızını değiştirmektedir. Adım uzunluğu, üst sınıra yaklaştıkça algoritmanın karesel ortalama hatası da durağan hal değerine daha çabuk yakınsamaktadır. Ancak bu hızlı yakınsama hızı, elde edilen artık karesel hata değerinin artmasına neden olmaktadır. Adım uzunluğunun küçük seçilmesi, belki hatanın yakınsamasını yavaşlatmaktadır, ama artık karesel ortalama hata küçüldüğünden, en küçük değere daha yakın olarak gerçekleşmektedir.

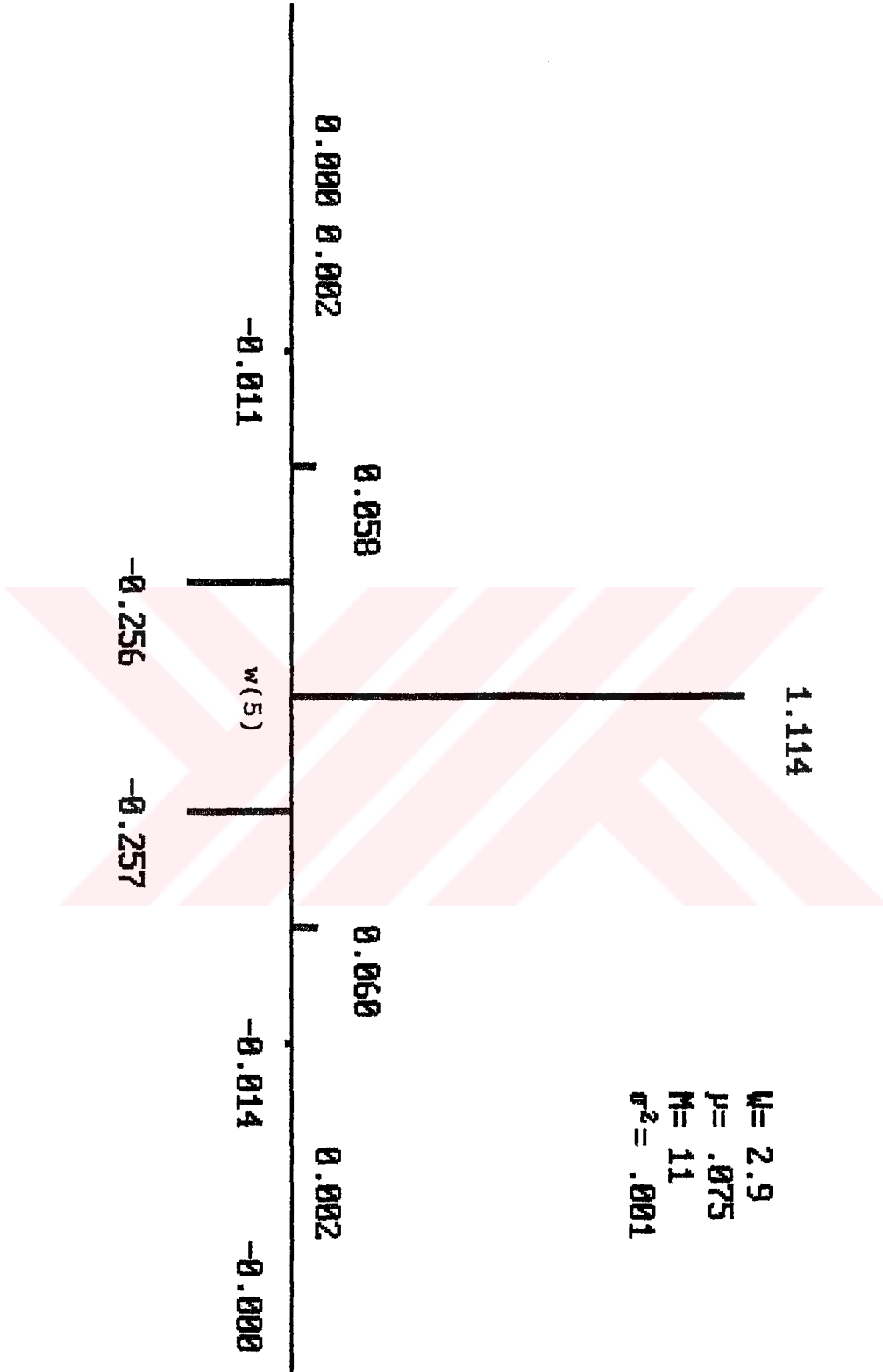
Benzetimde adım uzunluğuna 0.025, 0.04 ve 0.075 değerleri verildi. Elde edilen sonuçlara göre, 0.04 değeri için elde edilen karesel hata 0.002'ler civarına yaklaşık 300 yineleme, 0.075 değeri için 0.007'ler civarına yaklaşık 100 yineleme geçtikten sonra düşmüştür. 0.025 değeri için ise 500 yineleme geçmesine rağmen bir yakınsama görülememiştir.

Gürültünün değişintisinin artması, kuramsal olarak ilk tap girişinin özilişki değerinin artmasına, dolayısıyla toplam giriş gücünün artmasına neden olur. Toplam giriş gücünün artması ise kullanılan adım uzunluğu değerini, üst sınıra yakınlaştırdığından, algoritmanın hızlı yakınsamasına neden olmakta ve elde edilen karesel ortalama hatanın büyümesine neden olmaktadır.

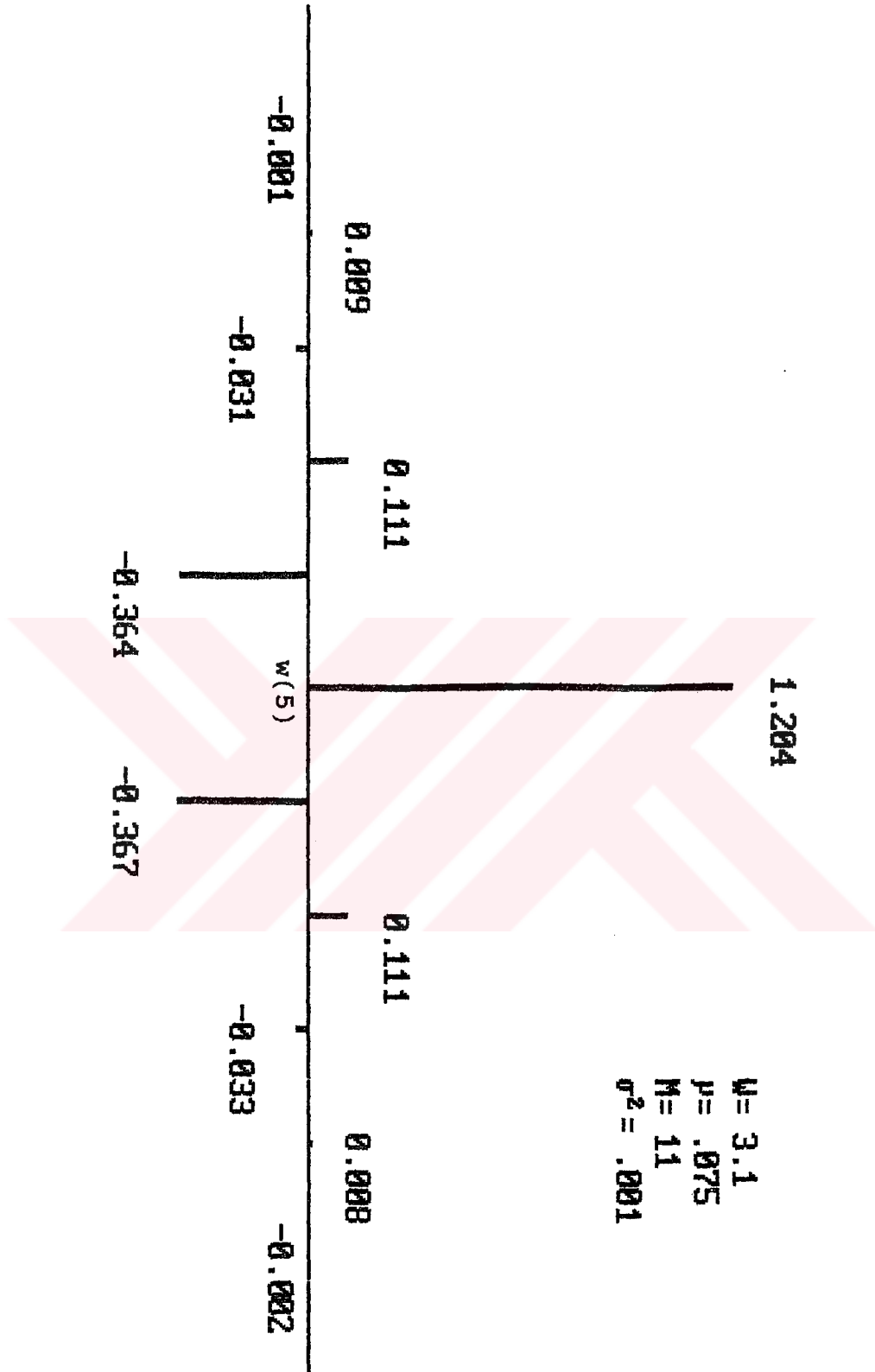
Benzetim yapılırken σ_v^2 için 0, 0.01 ve 0.001 değerleri verildi. Gürültü yokken, yani $\sigma_v^2=0$ iken elde edilen karesel hata 10^{-8} 'ler civarında elde edilmiştir. σ_v^2 arttıkça karesel hata değeri 10^{-3} 'ler, hatta 10^{-2} 'ler seviyesine ulaşmıştır. Gürültünün değişintisi arttıkça, denkleştirmede oluşan karesel ortalama hata artmıştır.



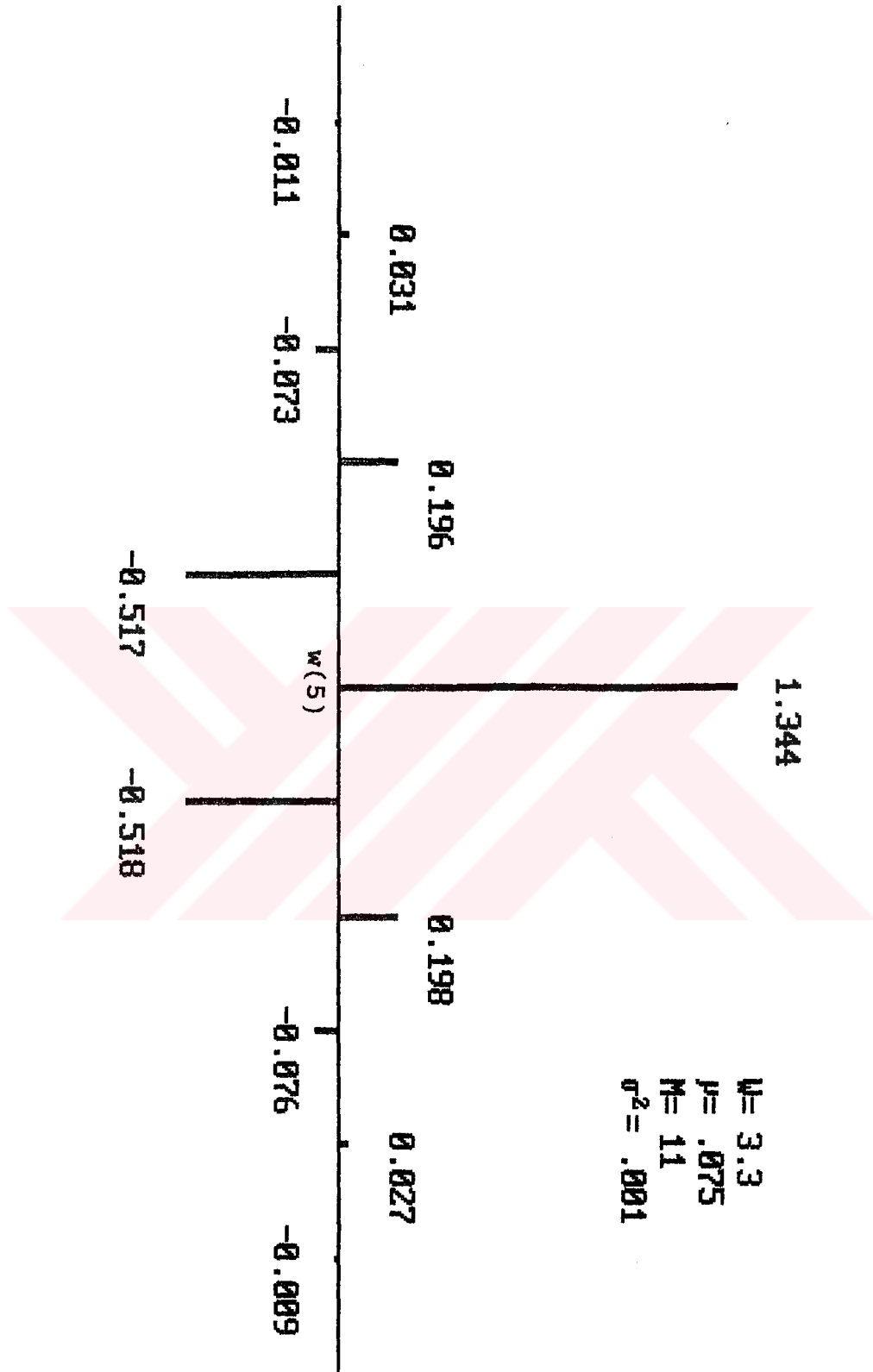
Şekil 6.3 : $\mu=0.075$, $M=11$ ve $\sigma_v^2=.001$ için karesel ortalama hatanın W 'ya göre değişimi



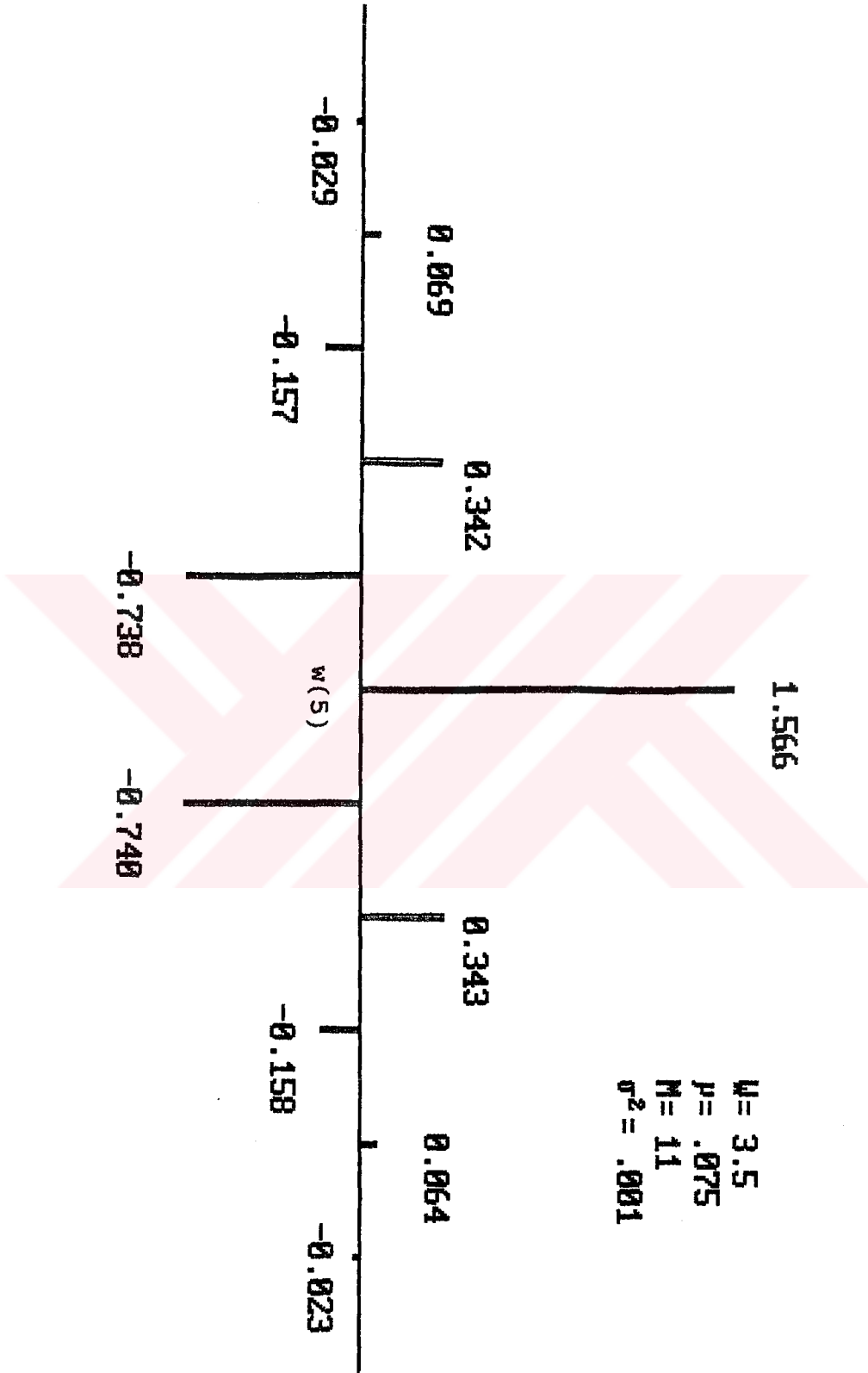
Şekil 6.4(a) : $\mu=0.075$, $M=11$, $\sigma_v^2=.001$ ve $W=2.9$ için elde edilen tap ağırlık değerleri



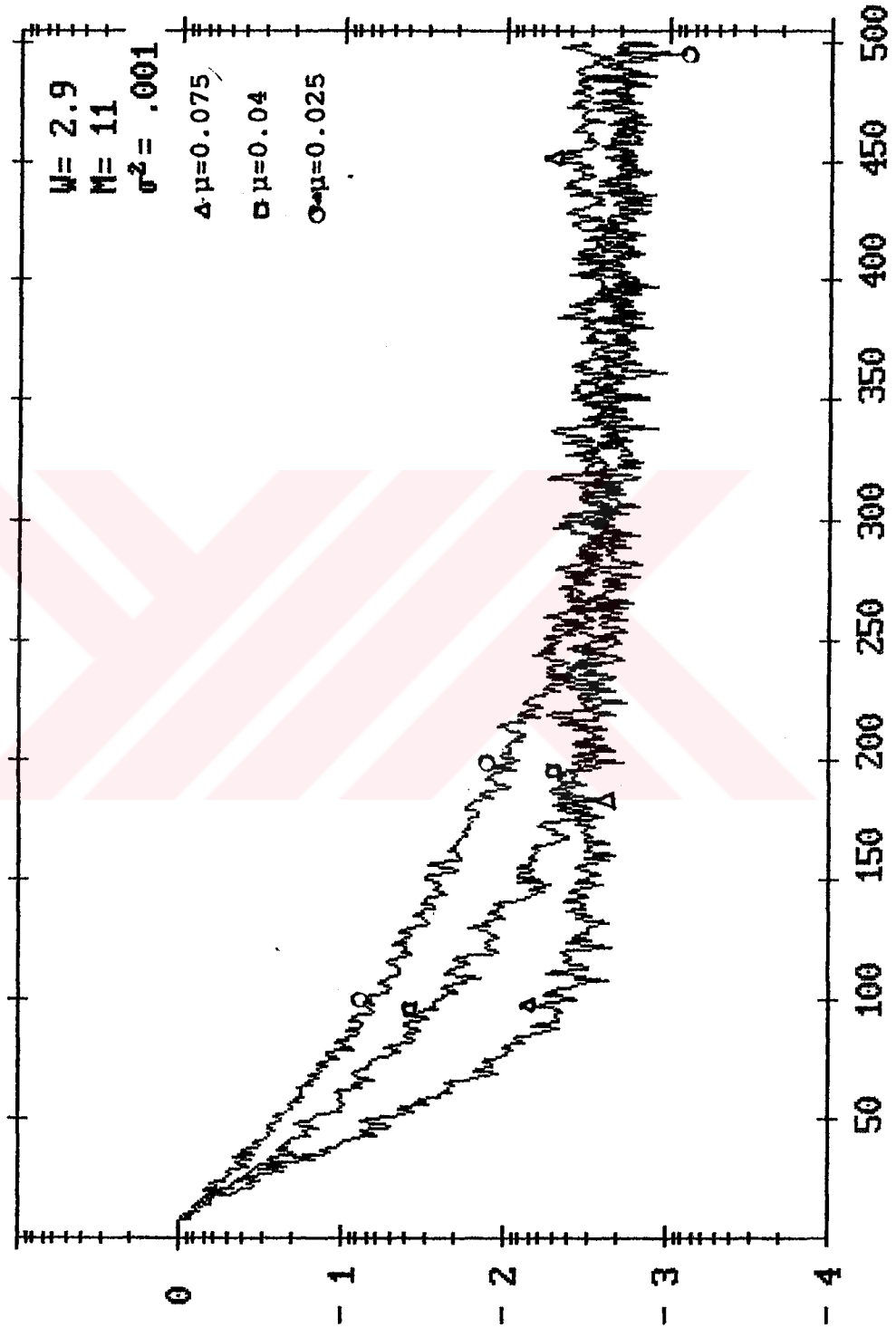
Şekil 6.4(b) : $\mu=0.075$, $M=11$, $\sigma_v^2=.001$ ve $W=3.1$ için elde edilen tap ağırlık değerleri



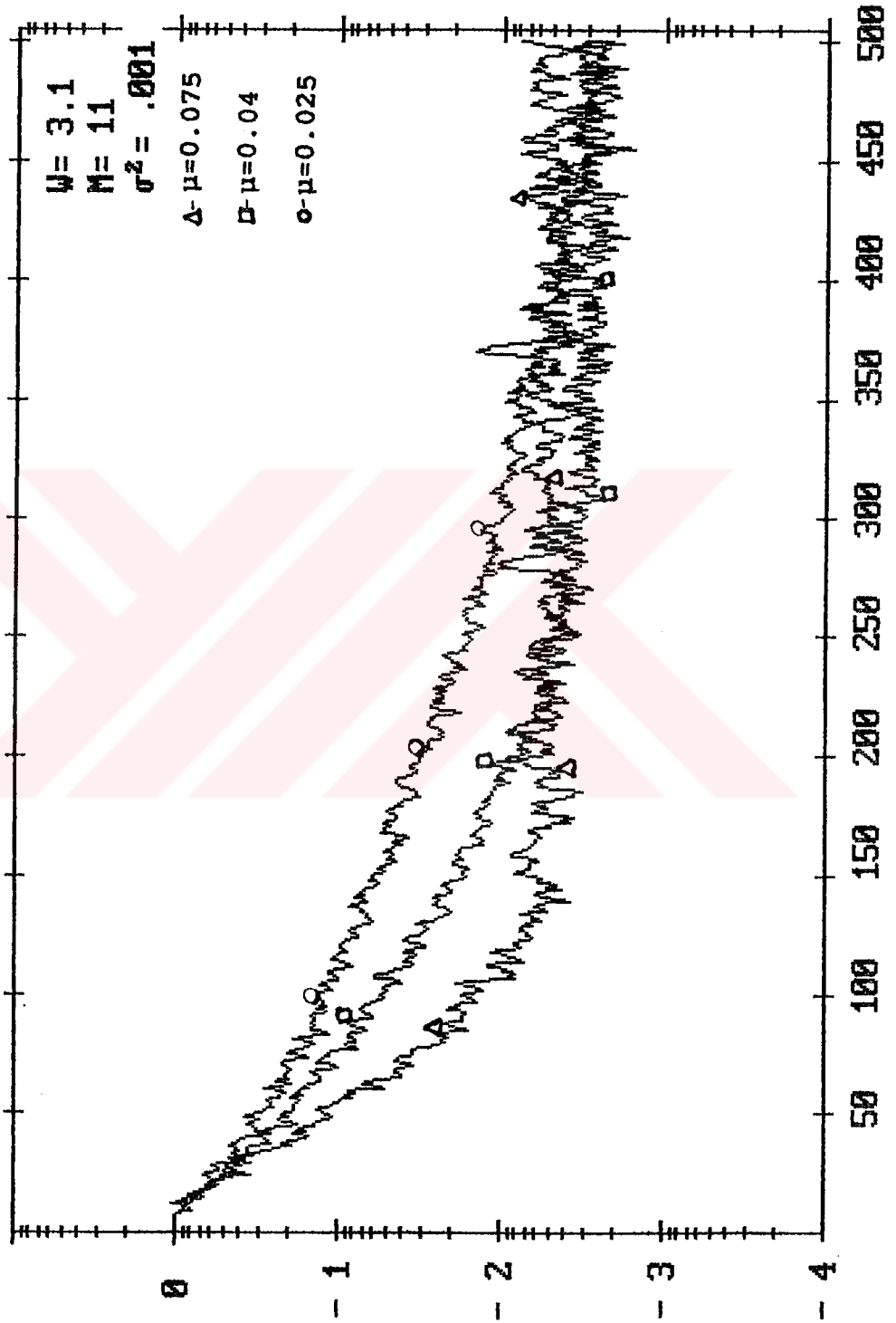
Şekil 6.4(c) : $\mu=0.075$, $M=11$, $\sigma_v^2=.001$ ve $W=3.3$ için elde edilen tap ağırlık değerleri



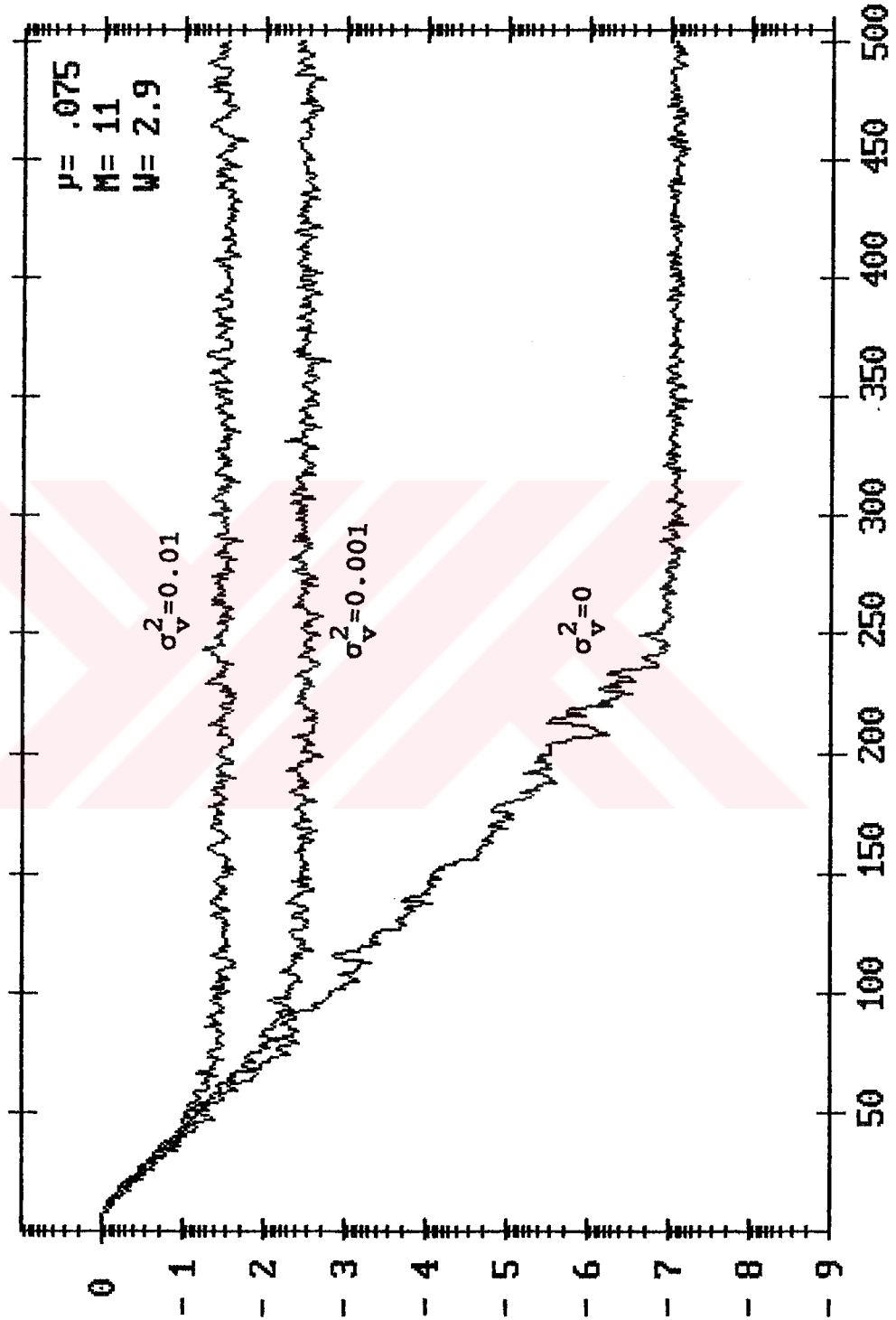
Şekil 6.4(d) : $\mu=0.075$, $M=11$, $\sigma_v^2=.001$ ve $W=3.5$ için elde edilen tap ağırlık değerleri



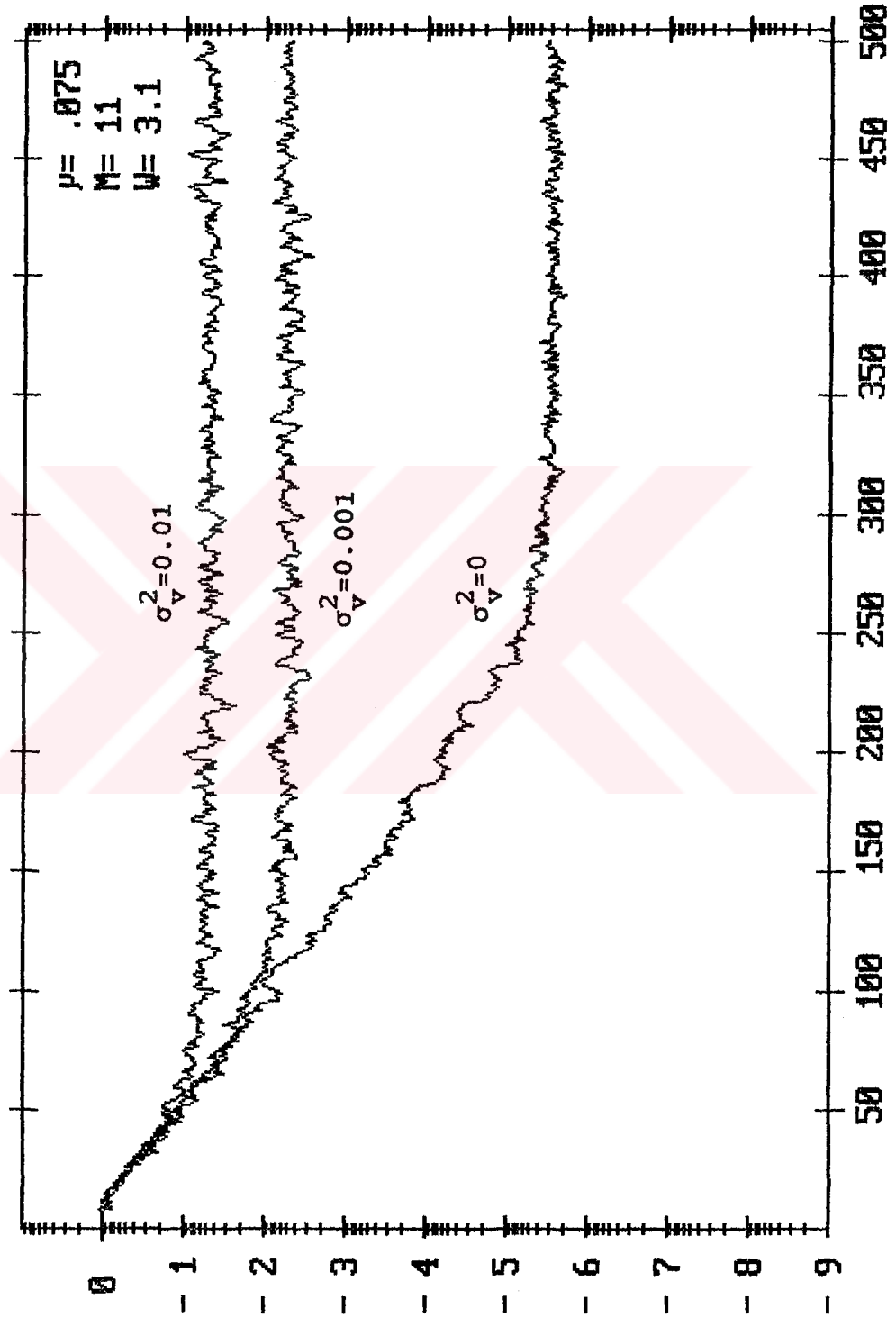
Şekil 6.5 : $W=2.9$, $M=11$ ve $\sigma_v^2=0.001$ için karesel ortalama hatanın adım uzunluğu μ 'a göre değişimi



Şekil 6.6 : $W=3.1$, $M=11$ ve $\sigma_v^2=0.001$ için karesel ortalama hatanın adım uzunluğu μ 'a göre değişimi



Şekil 6.7 : $W=2.9$, $M=11$ ve $\mu=0.075$ için karesel ortalama hatanın gürültünün değışintisi σ_v^2 'ye göre değışimi



Şekil 6.8 : $W=3.1$, $M=11$ ve $p=0.075$ için karesel ortalama hatanın gürültünün değışintisi σ_v^2 'ye göre değışimi

SONUÇ

Bu çalışmada, doğrusal bir kanalın En Küçük Karesel Ortalama (LMS) algoritması yardımıyla denkleştirilmesi yapılmıştır.

Kanal denkleştirmede amaç, kanal girişindeki işareti yeniden elde edebilmektir. Bu işlem için bir kanal ve bu kanalı denkleştiren bir model kullanılmıştır. Model, kanalın çıkışına yerleştirilmiş ve böylece kanal çıkışı modelin girişi olarak kullanılmıştır. Bu modelin çıkışı ile kanalın girişi arasındaki fark, uyarlamalı bir algorithmada kullanılarak kanalın denkleştirilmesi yapılmıştır. Kanal girişi ile model çıkışı arasındaki farkın karesel değeri, LMS algoritması kullanılarak en küçük yapılmaya çalışılmıştır. Böylece modelin transfer fonksiyonu, kanalın transfer fonksiyonunun tersi olacak şekilde elde edilerek kanalın denkleştirilmesi sağlanmıştır.

LMS algoritması kullanılarak bilgisayar benzetimi kanal denkleştirme yapılırken özdeğer dağılımı, gürültü değişintisi ve algoritmanın adım uzunluğu parametreleri değiştirilerek ortalama karesel hatanın yinelemeyle değişim eğrileri elde edilmiştir.

Özdeğer dağılımı, direk olarak kanal impuls yanıtıyla ilişkilidir. Bu yüzden, impuls yanıtı değiştirilerek özdeğer dağılımı değiştirilmiştir. Özdeğer dağılımı küçüldükçe oluşan artık karesel ortalama hatanın değeri küçülmüştür. Böylece elde edilen karesel ortalama hata en küçük değere yaklaşmıştır. Ayrıca özdeğer dağılımına bağlı olarak eğrilerdeki dalgalanmalarda değişmiştir. Özdeğer dağılımı büyüdükçe, dalgalanma ve elde edilen karesel ortalama hatanın yakınsamasındaki yineleme sayısı artmıştır.

Adım uzunluğu, algoritmanın artık karesel hatanın en küçük değerine yakınsama hızını değiştirmiştir. Adım uzunluğu arttıkça, yakınsama hızı da artmış, fakat durağan halde ulaşılan karesel ortalama büyümüş,

yani artık karesel ortalama hatanın artmış olduğu gözlenmiştir. Adım uzunluğu çok küçük seçildiği zaman, eğrilerden de görüleceği gibi, yakınsama için yapılan yineleme sayısı yetmemiştir.

Gürültünün değışintisinin artması, kuramsal olarak ilk tap girişinin özilişki değerin artmasına, dolayısıyla toplam giriş gücünün artmasına neden olur. Toplam giriş gücünün artması ise kullanılan adım uzunluğu değeri, üst sınıra yakınlaştırdığından, algoritmanın hızlı yakınsamasına neden olmuştur. Gürültü değışintisinin artması, elde edilen karesel ortalama hatanın büyümesine neden olmuştur.

Bilgisayar benzetimleriyle elde edilen sonuçların, tezde ele alınan kuramsal sonuçlara uyduğu gözlenmiştir.

KAYNAKLAR:

- BERSHAD, N. J. (1986). "Analysis of normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," IEEE Trans. Acoust. Speec Signal Process., vol. ASSP-34, pp. 793-806.
- BERSHAD, N. and O. MACCHI (1989). "Comparision of RLS and LMS algorithms for tracking a chirped signal," Proc. ICASSP, Glasgow, Scotland, pp. 896-899.
- BERSHAD, N. J. and O. MACCHI (1991). "Adaptive Recovery of Chirped Sinusoid in Noise, Part 2: Performance of the LMS Algorithm", IEEE Trans. Acoust. Speec Signal Procces., vol. ASSP-39.
- BOX, G. E. P. and G. M. JENKINS (1976). Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden-Day, San Fransisco.
- BURG, J. P. (1968). "A new analysis technique for time series data," NATO Advanced Study Institute on Signal Processing, Enschede, The Netherlands.
- BURG, J. P. (1975). "Maximum entropy spectral analysis," Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, Calif.
- CHILDERS, D. G., ed (1978). Modern Spectrum Analysis, IEEE Press, New York
- DORNY, C. N. (1975). A Vector Space Approach to Models and Optimization, Wielely-Interscience, New York.
- DURBIN, J., (1960). "The fitting of time series models," Rev. Int. Stat. Inst., vol. 28, pp. 233-244

- FISHER, B. and N. J. BERSHAD (1983). "The Complex LMS Adaptive Algorithm-transient weight mean and covariance with applications to the ALE," IEEE Trans. Acoust. Speec Signal Procces., vol. ASSP-31, pp. 34-44.
- GARDNER, W. A. (1984). "Learning characteristics of stochastic-gradient-algorithms: a general study, analysis and critique," Signal Process., vol 6, pp. 113-133
- GARDNER, W. A. (1987). "Nonstationary learning characteristics of the LMS algorithm," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-34, pp. 1199-1207
- GRENANDER, U. and G. SZEGÖ (1958). Toeplitz Forms and Their Applications, University of California Press, Berkeley, Calif.
- GRIFFITHS L. J. (1977). "A continiously adaptive filter implemented as a lattice structure," Proc. ICASSP, Hartford, Conn., pp. 683-686.
- HAYKIN, S. (1989a). Digital Communications, Wielely, New York
- HAYKIN, S. (1989b). "Adaptive filters: past, present, and future," Proc. IMA Conf. Math. Signal Process., Warwick, England.
- HAYKIN, S. (1991). Adaptive Filter Theory, 2/E, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- KAILATH, T. (1968). "An innovations approach to least squares estimation: Part 1. Linear filtering in additive white noise," IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-13, pp. 646-655.

- KAILATH, T. and P. A. FROST (1968). "An innovations approach to least-squares estimation: Part 2. Linear smooting in additive white noise," IEEE Trans.Autom.Control, vol.AC-13, pp.655-660.
- KAILATH, T. (1970). "The innovations approach to detection and estimation theory," Proc. IEEE, vol. 58, pp. 680-695.
- KAILATH, T. and R. A. GEESEY (1973). "In innovations approach to least-squares estimation: Part 2. Linear smooting in additive white noise," IEEE Trans.Autom.Control, vol.AC-18, pp. 435-453
- KAILATH, T. ed. (1977). Linear Least-Squares Estimation, Benchmark Papers in Electrical Engineering and Computer Science, Doeden, Hutchinson & Ross, Stroudsburg, Pa.
- KOLMOGOROV, A. N. (1939). "Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationairs," C. R. Acad. Sci., Paris, vol. 208, pp. 2043-2045 [English translation reprinted in book edited by Kailath (1977)].
- KREIN, M. G. (1945). " On a problem of extrapolation of A. N. KOLMOGOROV," C. R. (Dokl.) Akad. Nauk SSSR, vol. 46, pp. 306-309.
- LEV-ARI. H., T. KAILATH and J. CIOFFI(1984). "Least-squares adaptive lattice and transversal filters: A unified geometric theory," IEEE Trans. Inf. Theory, vol.IT-30, pp. 222-236.
- LEVINSON, N. (1947). "The Wiener RMS(root-mean-square) error criterion in filter design and prediction," J. Math. Phys., vol. 25,pp. 261-278.

- LUENBERGER, D. G. (1969). Optimization by Vector Space Methods, Wiley, New York.
- MACCHI, O. (1986). "Optimization of Adaptive Identification for Time-varying Filters," IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-31, pp. 283-287.
- MAKHOUL, J. (1975). "Linear Prediction: a tutorial review," Proc. IEEE, vol. 63, pp. 561-580
- MARPLE, S. L., JR. (1987), Digital Spectral Analysis with Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- MAZO, J. E. (1979). "On the independence theory of equalizer converge," Bell Syst. Tech. J., vol. 58, pp. 963-993.
- MONZIGO, R. A. and T. W. MILLER (1980). Introduction to Adaptive Arrays, Wiley-Interscience, New York.
- OPPENHEIM, A. V. and R. W. SCHAFER (1975). Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- ROBBINS, H. and S. MONRO (1951). "A stochastic approximation method," Ann. Math. Stat., vol. 22, pp. 400-407.
- ROBBINSON, E. A. (1967). Multichannel Time-Series Analysis with Digital Computer Programs, Holden-Day, San Francisco.
- SOLO, V. (1989). "The limiting behavior of LMS," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 37, pp. 1909-1922.

- UNGERBOECK, G. (1972). "Theory on the speed of convergence in adaptive equalizers for digital communication," IBM J. Res. Dev., vol. 16, pp. 546-555.
- WIDROW, B. and M. E. HOFF, JR. (1960). "Adaptive switching circuits," IRE WESCON Conv. Rec. pt. 4, pp. 96-104.
- WIDROW, B. (1966). "Adaptive Filters," in Aspects of Network and System Theory, ed. R. E. Kalman and N. DeClaris, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- WIDROW, B., J. MCCOOL, and M. BALL (1975a). "The complex LMS algorithm," Proc IEEE vol. 63, pp. 719-720.
- WIDROW, B., et. al. (1976). "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter," Proc. IEEE, vol. 64, pp. 1151-1162.
- WIDROW, B. and S. D. STEARNS (1985). Adaptive Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- WIENER, N. and E. HOPF (1931). "On a class of singular integral equations," Proc. Prussian Acad. Math-Phys. Ser., p. 636.
- WIENER, N. (1949). Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Time Series, with Engineering Applications, MIT Press, Cambridge, Mass.
- WOLD, H. (1938). A Study in the Analysis of Stationary Time Series, Almqvist and Wiksell, Uppsala, Sweden.

EK-1

```

5 REM ***** LMS ALGORITMASI *****
10 REM ***** SERDAR CANKURTARAN *****
15 REM ***** 9316008*****
20 REM   DURAGAN BIR KANALIN LMS ALGORITMASI
25 REM   YARDIMIYLA OZDESLENMESI
30 REM   ISTANBUL-1996

35 CLS

40 PI = 3.141592654#: TRI = 100
45 KUCUK = 1: BUYUK = 0: KUC = 0
50 REM ***** KANALIN IMPULS YANITI *****
60 PRINT "h(n)=.5(1+cos(2*PI*(n-2)/W)), n=1,2,3"
70 PRINT "0, disinda "
90 INPUT "W KRITIK SAYISINI GIRINIZ"; W
100 IF W <= 0 THEN BEEP: PRINT "SAYI SIFIRDAN BUYUK OLMALI": GOTO 90
110 INPUT "TAP SAYISINI GIRIN"; M
120 IF INT(M) <> M THEN BEEP: PRINT "SAYI TAM SAYI OLMALI": GOTO 110
130 IF M <= 0 THEN BEEP: PRINT "SAYI SIFIRDAN BUYUK OLMALI": GOTO 110
140 M1 = INT((M - 1) / 2)
150 IF M1 <> ((M - 1) / 2) THEN BEEP: PRINT "TEK SAYI OLMALI": GOTO 110
160 INPUT "GAUSS GURULTUSUNUN VARYANSINI GIRIN"; VAR
170 IF VAR < 0 THEN BEEP: PRINT "SAYI SIFIRDAN BUYUK OLMALI": GOTO 160
180 ORTA = (M - 1) / 2 + 2

185 REM ***** KANALIN KATSAYILARI BELIRLENIYOR *****
190 FOR A = 1 TO 3
200 H(A) = .5 * (1 + COS(2 * PI * (A - 2) / W))

```

```

210 NEXT
211 REM ***** DENGLEYICI GIRISININ OZDEGERLERI *****
215 DIM RW(M, M)
220 FOR A = 1 TO 3
230 FOR B = 1 TO 3
240 FOR C = 1 TO 3
250 IF B = (C - A + 1) THEN D = 1 ELSE D = 0
260 R(A - 1) = R(A - 1) + H(B) * H(C) * D
270 NEXT: NEXT
280 IF A = 1 THEN R(0) = R(0) + VAR
290 PRINT "h("; A; ")="; H(A); TAB(40); "r("; A - 1; ")="; R(A - 1)
300 NEXT
305 GOSUB 4000
310 MU = 2 / (R(0) * M): MU1 = INT(1000 * MU) / 1000
320 PRINT "fcirit="; MU1
330 INPUT "LUTFEN f DEGERINI GIRINIZ"; MUY
340 IF MUY >= MU1 OR MUY <= 0 THEN BEEP ELSE GOTO 350
345 PRINT "SAYI SIFIR ILE fcirit ARASINDA OLMALI": GOTO 330
350 INPUT "LUTFEN ALGORITMANIN KAC KEZ TEKRARLANACAGINI GIRIN"; N
360 IF N < 1 THEN BEEP: PRINT "SAYINIZ BIRDEN KUCUK OLAMAZ": GOTO 350
370 IF INT(N) <> N THEN BEEP: PRINT "SAYI TAM SAYI OLAMALI": GOTO 350

375 REM ***** ALGORITMA BASLIYOR *****
380 DIM P(M): DIM D(N): DIM U(N + 1)
385 DIM F(N, M): DIM ER(N): DIM J(N, M)
390 DIM E(N): DIM Q(N + 1, M): DIM QX(N + 1, M)
395 DIM K(N): DIM V(N): DIM Es(N)
400 FOR TR = 1 TO TRI

```

```

420 G = 0: Z = 0: E(0) = 0
430 FOR A = 0 TO N
440 RANDOMIZE TIMER
450 D(A) = RND
460 IF D(A) < .5 THEN D(A) = -1 ELSE D(A) = 1
470 FOR B = 1 TO 3
480 IF A - B < 0 THEN GOTO 500
490 G = H(B) * D(A - B) + G
500 NEXT
510 GOSUB 2500
520 U(A) = G + V(A): G = 0
530 FOR B = 1 TO M
540 IF (A - B + 1) < 0 THEN F(A, B) = 0 ELSE F(A, B) = U(A - B + 1)
550 Z = Z + Q(A, B) * F(A, B)
560 NEXT
570 IF (A - ORTA) < 0 THEN K(A) = 0 ELSE K(A) = D(A - ORTA)
580 E(A) = K(A) - Z: Z = 0: ER(A) = ER(A) + E(A) ^ 2
610 FOR B = 1 TO M
620 IF (A - B + 1) < 0 THEN J(A, B) = 0 ELSE J(A, B) = U(A - B + 1)
630 Q(A + 1, B) = Q(A, B) + MU Y * J(A, B) * E(A)
640 QX(A + 1, B) = QX(A + 1, B) + Q(A + 1, B)
650 NEXT
660 NEXT
662 NEXT

664 REM ***** KARESEL HATALARIN VE TAP AGIRLIKLARININ *****
665 REM ***** ORTALAMALARI ALINIYOR *****
666 FOR A = 1 TO N

```

```

667 IF A < ORTA GOTO 669
668 Es(A) = ER(A) / TRI: IF Es(A) < KUCUK THEN KUCUK = Es(A)
669 FOR B = 1 TO M
670 Q(A + 1, B) = QX(A + 1, B) / TRI
671 IF A = N THEN PRINT "w("; B - 1; ")="; Q(A + 1, B)
672 NEXT
673 NEXT
675 BUYUK = Q(N + 1, 1): KUC = Q(N + 1, 1)
680 FOR B = 2 TO M
690 IF Q(N + 1, B) > BUYUK THEN BUYUK = Q(N + 1, B) ELSE BUYUK = BUYUK
700 IF Q(N + 1, B) < KUC THEN KUC = Q(N + 1, B) ELSE KUC = KUC
710 NEXT
720 GOSUB 5000

740 REM ***** Wk DEGERLERI EKRANA CIZDIRILIYOR *****
750 SCREEN 9
760 EK = INT(550 / M)
765 CAR = BUYUK - KUC: CARPAN = INT(200 / CAR)
766 CIZ = 40 + INT(BUYUK * CARPAN)
770 FOR S = 1 TO M
780 P(S) = CARPAN * Q(N + 1, S)
790 LINE (0, CIZ)-(600, CIZ)
800 FOR A = 0 TO 2
810 LINE (EK * S + A - 1, CIZ)-(EK * S + A - 1, CIZ - P(S))
820 NEXT: IF M > 13 THEN GOTO 860
830 IF (CIZ - P(S)) < CIZ THEN A = -1 ELSE A = 1
840 X = INT((S * EK) / 8): Y = CINT((CIZ - P(S)) / 13.5) + A
850 LOCATE Y, X: PRINT USING "##.###"; Q(N + 1, S)

```

860 NEXT

870 GOSUB 1500

871 LOCATE 23, 1: PRINT SPC(75);

872 LOCATE 23, 1

873 INPUT "w(4) VE w(6)'NIN DEGİSİMİNİ GORMEK İSTERMİSİNİZ?(E/H)"; YAN\$

874 IF YAN\$ = "E" OR YAN\$ = "e" THEN GOSUB 3000

875 LOCATE 23, 1

876 PRINT SPC(75);

877 GOSUB 5000

880 REM ***** KARESEL ORTALAMA HATA CİZDİRİLİYOR *****

885 CLS : DIM S(N)

890 LINE (35, 20)-(35, 300)

900 LINE (30, 20)-(600, 20)

910 LINE (600, 20)-(600, 300)

920 LINE (30, 300)-(600, 300)

1000 JMI = LOG(JMIN) * .4342944811#

1005 IF VAR = 0 THEN BOL = 10 ELSE BOL = 5

1010 BOLUM = INT(280 / BOL)

1020 FOR A = BOLUM + 20 TO 20 + (BOL * BOLUM) STEP BOLUM

1030 LINE (30, A)-(40, A)

1031 LINE (595, A)-(605, A)

1033 FOR B = 9 TO 2 STEP -1

1034 PL = LOG(B) * .434294481#

1035 LINE (33, A - PL * BOLUM)-(37, A - PL * BOLUM)

1036 LINE (598, A - PL * BOLUM)-(602, A - PL * BOLUM)

1037 NEXT


```

1038 Y = INT(A / 14) + 1: LOCATE Y, 1: US = ((A - 20) / BOLUM) - 1
1039 IF US = 0 THEN PRINT US ELSE PRINT "-"; US
1040 NEXT
1046 LINE (35, 20 + BOLUM - JMI * BOLUM)-(600, 20 + BOLUM - JMI * BOLUM)
1050 FOR A = ORTA TO N
1060 S(A) = LOG(ES(A)) * .434294481#
1065 X1 = 35 + A
1066 Y1 = BOLUM - S(A - 1) * BOLUM
1067 Y2 = 20 + BOLUM - S(A) * BOLUM
1070 LINE (X1 - 1, Y1)-(X1, Y2)
1075 CO = A MOD 50
1080 IF A > 49 AND CO = 0 THEN LINE (X1, 16)-(X1, 25) ELSE GOTO 1085
1081 X = INT((X1) / 8): LOCATE 1, X: PRINT A
1085 IF A > 49 AND CO = 0 THEN LINE (X1, 296)-(X1, 305)
1090 NEXT
1100 GOSUB 1500
1110 END
1500 LOCATE 23, 1
1505 INPUT "GORUNTUYU PRINTER'DAN CIKARMAK ISTERMISINIZ (E/H)"; YANIT$
1510 IF YANIT$ = "E" OR YANIT$ = "e" THEN GOSUB 2000
1520 RETURN

2000 REM **** PRINTER'DAN CIKTI ALMA ****
2010 LOCATE 23, 1: PRINT SPC(75);
2011 FOR A = 1 TO 8
2012 LPRINT
2013 NEXT
2020 LOCATE 3, 60: PRINT "W="; W

```

```

2030 LOCATE 4, 60: PRINT "μ="; MU
2040 LOCATE 5, 60: PRINT "M="; M
2045 LOCATE 6, 60: PRINT "σ="; VAR
2050 DIM A%(2)
2060 DEF SEG = VARSEG(A%(0))
2070 FOR I = 0 TO 2
2080 READ D
2090 POKE VARPTR(A%(0)) + I, D
2100 NEXT
2110 DATA 205,5,203
2120 CALL ABSOLUTE(VARPTR(A%(0)))
2130 DEF SEG
2140 RESTORE
2150 RETURN

2500 REM ***** GAUSS GURULTUSU URETIMI *****
2510 RANDOMIZE TIMER
2520 V1 = RND(1)
2530 RANDOMIZE TIMER
2540 V2 = RND(1)
2550 V(A) = SQR(VAR) * (-1 * LOG(V1)) * COS(2 * PI * V2)
2560 RETURN

3000 REM ***** w(4) ve w(6) *****
3005 CLS
3010 LINE (10, 10)-(10, 335)
3020 LINE (10, 80)-(630, 80)
3030 LINE (10, 240)-(630, 240)

```

```

3040 FOR A = 0 TO N
3042 WX = A + 10
3044 WY1 = 80 - 100 * Q(A, ORTA - 3)
3046 WY2 = 80 - 100 * Q(A + 1, ORTA - 3)
3050 LINE (WX, WY1)-(WX, WY2)
3053 WY3 = 240 - 100 * Q(A, ORTA - 1)
3056 WY4 = 240 - 100 * Q(A + 1, ORTA - 1)
3060 LINE (WX, WY3)-(WX, WY4)
3065 CO = A MOD 50
3070 IF A > 49 AND INT(A / 50) - CO = 0 THEN LINE (WX, 75)-(WX, 85)
3080 IF A > 49 AND INT(A / 50) - CO = 0 THEN LINE (WX, 235)-(WX, 245)
3090 NEXT
3100 GOSUB 1500
3110 RETURN

4000 REM ***** Jmin DEGERININ HESAPLANMASI *****
4010 FOR B = 1 TO M
4020 IF B < 4 THEN RW(1, B) = R(B - 1) ELSE RW(1, B) = 0
4030 NEXT
4040 FOR A = 2 TO M
4050 FOR B = 1 TO M
4060 RW(A, B) = RW(1, ABS(A - B) + 1)
4070 NEXT
4080 NEXT
4090 DIM Pr(M): DIM ID(M): DIM Y(M, M): DIM B(M, M, M)
4095 DIM EW(M, M, M): DIM N(M, M)
4100 FOR N = 1 TO M
4110 FOR A = 1 TO M

```

```
4120 IF N = 1 THEN Y(N, A) = RW(A, N): GOTO 4170
4130 FOR B = 1 TO M
4140 SA = B(N - 1, A, B) * RW(B, N) + SA
4150 NEXT
4160 Y(N, A) = SA: SA = 0
4170 NEXT
4180 FOR A = 1 TO M
4190 IF A <> N THEN N(N, A) = -Y(N, A) / Y(N, N) ELSE N(N, A) = 1 / Y(N, N)
4200 NEXT
4210 FOR A = 1 TO M
4220 FOR B = 1 TO M
4230 IF B = N THEN EW(N, A, B) = N(N, A): GOTO 4250
4240 IF B = A THEN EW(N, A, B) = 1 ELSE EW(N, A, B) = 0
4250 IF N = 1 THEN B(N, A, B) = EW(N, A, B)
4260 NEXT
4270 NEXT
4280 IF N = 1 GOTO 4370
4290 FOR A = 1 TO M
4300 FOR B = 1 TO M
4310 FOR C = 1 TO M
4320 TOPL = TOPL + EW(N, A, C) * B(N - 1, C, B)
4330 NEXT
4340 B(N, A, B) = TOPL: TOPL = 0
4350 NEXT
4360 NEXT
4370 NEXT
4380 FOR A = 1 TO M
4390 IF A < ORTA - 2 OR A > ORTA THEN Pr(A) = 0 ELSE Pr(A) = H(A + 3 - ORTA)
```

```
4400 NEXT
4405 PRINT "OPTIMUM FİLTRENİN TAP GİRİŞ AĞIRLIKLARI"
4410 FOR B = 1 TO M
4420 FOR C = 1 TO M
4430 ARATOP = B(M, C, B) * Pr(C) + ARATOP
4440 NEXT
4450 ID(B) = ARATOP: ARATOP = 0: PRINT "w("; B; ")="; ID(B)
4460 NEXT
4470 FOR A = 1 TO M
4480 FARK# = Pr(A) * ID(A) + FARK#
4490 NEXT
4500 JMIN = 1 - FARK#: FARK# = 0
4510 RETURN

5000 LOCATE 23, 1: PRINT "DEVAM ETMEK İÇİN BİR TUSA BASINIZ"
5010 DO WHILE INKEY$ = ""
5020 LOOP
5030 RETURN
```

EK-2

```

5 CLS
10 INPUT "TAP SAYISINI GIRIN"; M
20 DIM R(M, M)
30 FOR B = 1 TO M
40 PRINT "R(1,"; B; ")": INPUT R(1, B)
50 NEXT
60 FOR A = 2 TO M
70 FOR B = 1 TO M
80 R(A, B) = R(1, ABS(A - B) + 1)
90 NEXT
100 NEXT
110 DIM p(M, 1): DIM ID(M): DIM Y(M, M)
115 DIM B(M, M, M): DIM E(M, M, M): DIM N(M, M)
120 FOR N = 1 TO M
130 FOR A = 1 TO M
140 IF N = 1 THEN Y(N, A) = R(A, N): GOTO 180
150 FOR B = 1 TO M
160 SA = B(N - 1, A, B) * R(B, N) + SA
170 NEXT
175 Y(N, A) = SA: SA = 0
180 NEXT
190 FOR A = 1 TO M
200 IF A <> N THEN N(N, A) = -Y(N, A) / Y(N, N) ELSE N(N, A) = 1 / Y(N, N)
210 NEXT
220 FOR A = 1 TO M
230 FOR B = 1 TO M
240 IF B = N THEN E(N, A, B) = N(N, A): GOTO 260

```

```
250 IF B = A THEN E(N, A, B) = 1 ELSE E(N, A, B) = 0
260 IF N = 1 THEN B(N, A, B) = E(N, A, B)
270 NEXT
280 NEXT
290 IF N = 1 THEN GOTO 390
300 FOR A = 1 TO M
310 FOR B = 1 TO M
320 FOR C = 1 TO M
340 TOPLAM = TOPLAM + E(N, A, C) * B(N - 1, C, B)
350 NEXT
360 B(N, A, B) = TOPLAM: TOPLAM = 0
370 NEXT
380 NEXT
390 NEXT
410 FOR A = 1 TO M
420 FOR B = 1 TO M
430 PRINT R(A, B), B(M, A, B)
440 NEXT : GOSUB 1000
450 NEXT : GOSUB 1000
460 FOR A = 1 TO M
465 PRINT "p("; A; ",1)": INPUT p(A, 1)
466 NEXT
470 FOR B = 1 TO M
480 FOR C = 1 TO M
490 TOP = B(M, C, B) * p(C, 1) + TOP
500 NEXT
510 ID(B) = TOP: TOP = 0
515 PRINT "w("; B; ")="; ID(B)
```

```
520 LPRINT "w("; B; ")="; ID(B)
```

```
530 NEXT
```

```
550 END
```

```
1000 PRINT "BIR TUSA BASIN"
```

```
1010 DO WHILE INKEY$=""
```

```
1020 LOOP
```

```
1030 RETURN
```



ÖZGEÇMİŞ

13.3.1970 yılında İstanbul'da dünyaya geldi. İlkokulu Yıldıztabya İlkokulu'nda, ortaokulu Rami Ortaokulu'nda bitirdi. Liseyi Maçka Teknik Lisesi, elektronik bölümünde okudu. 1988 yılında, Yıldız Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'ne girdi. 1993 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi'ndeki lisans eğitimini tamamlayarak aynı üniversitede haberleşme dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen bu bölümde eğitimine devam etmektedir.

