

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Dijital Kontrol Sistemleri

Yüksek Lisans Tezi

Nur Dönmeztürk

1991

152
105

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

25.000R

ELK/588

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Demirbaş No: 0113702

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELK.MÜH.NUR DÖNMEZTÜRK

İSTANBUL-1991

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Kot : R 152
105

Alındığı Yer : FEN. BİL. ENS.

Tarih : 15.04.1992

Fatura : - - - - -

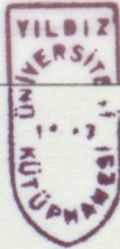
Fiyatı : 25.000. TL.

Ayniyat No : 1/2

Kayıt No : 48315

UDC : 621.3 378.242

Ek :



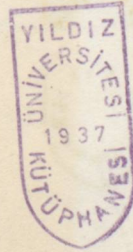


Sayfa No

DİJİTAL KONTROL SİSTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELK.MOH.NUR DÖNMEZTÖRK



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
1. Örneklenmiş bilgi sistemleri	1
2. z dönüşümü	3
- Rezidü metodu	5
- Teoremler	7
. e^{-at} ile çarpma	7
. t ile çarpma	8
. $a^{t/T}$ ile çarpma	8
. Kısımlara ayırma	9
. İlk değer teoremi	9
. Son değer teoremi	10
- Ayrık fonksiyonlar	12
. a^k ile çarpma	14
. k ile çarpma	16
3. Ters z dönüşümleri	16
- Kısmi-kesirlere ayırma	16
- Bölme metodu	17
- Rezidü metodu	17
4. Blok diyagram cebri	19
5. Geçici çözüm	25
- Routh kriteri	27
- Köklerin yeri	28
- Farklı eşitlikler	32
6. Filtreler	33
- Sıfır mertebe tutucu	34
- Birinci mertebe tutucu	39
- Üs tutucu	40

7. Örneklemeler arasındaki cevap	41
- Karma-örneklemeler yöntemi	42
8. Farklı bilgi sistemleri	47
- Farklı eşitlikler	48
- Sinyal akış diyagramı yöntemi	53
- Sürekli sistemler için farklı bilgi gösterilişi	54
- Örneklemeler arasındaki cevap	57
- Örneklemeler arasındaki cevap	59
- Örneklenmiş bilgi kontrol sistemleri	64
- Sıfır mertebeye tutucu	68
9. Sayıcı kontrollü sistemler	70
- İşlem kontrolörleri	72
- Analog kontrolörlerin farklı eşitliği	74
- Optimum cevap	75

E KSayfa No

E. Durum-uzay metotları	81
E.1.Sistem gösterimleri	81
- Direkt programlama	81
- Paralel programlama	83
- Seri programlama	85
- Genel programlama	86
E.2.Lineer Cebir	89
- Kuvvetin etkisiyle oluşan çözüm	97
- P ve P^{-1} matrislerinin değişken durumları	100
- Kısmi kesirler metodu	101
E.3.Tekrarlanmış Kökler	114
- Kısmi kesirler metodu	119
E.4.Durum-uzay eşitliklerinin çözümü	122
E.5. $\phi(t)$ 'nin hesap yöntemleri	128
- Katlı kökler	130
- Laplace dönüşümü metodu	132
- Sinyal akış diyagramı metodu	134
E.6.Kuvvetin etkisiyle oluşan çözüm	140
- Laplace dönüşümü metodu	143
- Sinyal akış diyagramı metodu	145

ÖZET

Örneklenmiş bilgi sistemleri, sayısal bilgisayarlarda kontrol elemanı olarak kullanılırlar. Sayısal bilgisayara giriş, herhangi bir anda sinyale karşılık gelen değer olup, yeni giriş gelene kadar, hesaplanan çıkış sabit kalır.

Giriş sinyalini almak için anahtar her T anında kapanır. Eğer giriş sinyali sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu ile gösterilirse, anahtarın çıkışı impulslardan meydana gelen $f^*(t)$ fonksiyonu ile gösterilebilir.

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) u_1(t-nT)$$

Örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü;

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \text{ dir.}$$

Bir örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü sonsuz bir seridir.

$z = e^{sT}$ eşitliği Laplace dönüşümünü z dönüşümüne çevirir.

$$Z[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü bilindiği zaman, z dönüşümü çarpanlara ayırma metodu ile hesaplanabilir. Rezidü metodu da z dönüşümünü hesaplamada çok kullanılır.

$F(z) = Z[f^*(t)] = \sum F(s)$ 'ın kutuplarındaki

$F(s) \frac{z}{z-e^{sT}}$ 'nin rezidüleri

Ayrık fonksiyonlarda, $f(k)$ notasyonu $f^*(t)$ 'yi temsil ediyor ise $f(k)$ 'nin z dönüşümü;

$$Z[f(k)] = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots = F(z) \text{ olur.}$$

Ters z dönüşümünü elde edebilmek için üç basit yol vardır. Bunlar;

- 1) Kısmi-kesirlere ayırma
- 2) Bölme metodu: $F(z)$ fonksiyonunun payını paydasına bölerek kullanılır.
- 3) Rezidü metodu

Örneklenmiş anahtarlar içeren geri beslemeli kontrol sistemlerinin blok diyagramlarından, transfer fonksiyonlarının yazılmasında, yıldızlanmış veya yıldızlanmamış bazı terimlere rastlanır. Bu karmaşık terimlerin çözülmesinde temel olarak izlenmesi gereken yol;

- 1) Esas sistem girişi R , tüm anahtar çıkışları giriş olarak kabul edilir.
- 2) Sistem çıkışı C , tüm anahtar girişleri çıkış olarak kabul edilir.
- 3) Her çıkış için, girişe bağlı eşitliği yazılır.
- 4) Yıldızlama işaretleri $C(Z)$ 'i hesaplamada önemlidir.

Sürekli sistemlerde, eğer karakteristik denklemin S düzleminin sağ yarısında kökü varsa sistem kararsızdır. Bu sağ yarı düzlem, z düzleminde birim dairenin dışına karşılık gelir. Böylece kararlılık için, z dönüşümü yapılmış karakteristik denklemin tüm kökleri birim dairenin içinde alınmalıdır. Kök- yer eğrilerinin çiziminde ise sürekli sistemlerde kullanılan tüm metotlar geçerlidir.

Örneklenmiş bilgi sistemleri genellikle bir filtre ile birleştirilirler. İdeal bir filtre örneklenmiş $f^*(t)$ sinyalini sürekli giriş $f(t)$ 'ye dönüştürür. Eğer, ideal bir filtre olabilse, örneklenmiş bilgi sistemi, sürekli sistem gibi davranır. En çok kullanılan filtre, en son örnekleme değerini bir sonraki örnekleme işareti gelene kadar muhafaza edenidir. Bu çeşit filtre sıfır-mertebe tutucu olarak isimlendirilir ve kullanıldığı sistemde, kararlılık aralığını genişletir.

Ters z dönüşümü örnekleme anlarında fonksiyonun değerini verir. Örnekleme anları arasındaki davranış Linvill'in karma-örnekleme metodu ile hesaplanabilir. Bu metotta örnekleme periyodu T/m 'in tam bölenlerinde karma veya hayali örnekleyicinin örnekleme periyodu T/m 'dir. T/m 'in tam bölenlerinde karma örnekleyici kapalı, esas örnekleyici açıktır. Böylece karma örnekleyici sistemin çalışmasını etkilemez. Örnekleme periyodunun tam bölenleri kT/m ile gösterilir. Tam bölen aralıklarındaki çıkış değeri, verilen eşitlikte $t = kT/m$ yazarak hesaplanır.

Laplace dönüşümü, sürekli sistemler için hal-geçiş eşitliklerinin çözümünde kullanılır. z dönüşüm metotları ise farklı bilgi sistemlerinin hal-geçiş eşitliklerinin çözümünde kolaylık sağlar.

The Laplace transform of the sampled signal is

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}$$

The Laplace transform of a sampled signal is an infinite series.

$z = e^{sT}$ converts the Laplace transform to the z transform.

$$F(z) = F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

When the Laplace transform of a function is known, the corresponding z transform may be obtained by the partial-fraction method. The Residue

method is a powerful technique for obtaining z transforms.

$$F(z) = \mathcal{Z}[f^*(t)] = \sum \text{Residues of } F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \text{ at poles of } F(s)$$

To discrete functions, the notation $f(k)$ may be used to represent $f^*(t)$.

The transform for $f(k)$ is,

SUMMARY

Sampled-data systems utilize digital computers as control elements. The information fed into a digital computer is the value of the corresponding signal at some instant of time. The computed output remains unchanged until new information is fed into the digital computer.

The switch closes every T seconds to admit the input signal. The train of impulses $f^*(t)$ represents the signal at the output of the sampler.

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) u_1(t-nT)$$

The Laplace transform of the sampled signal is

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}$$

The Laplace transform of a sampled signal is an infinite series.

$z = e^{sT}$ converts the Laplace transform to the z transform.

$$Z[f^*(t)] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

When the Laplace transform of a function is known, the corresponding z transform may be obtained by the partial-fraction method. The Residue method is a powerful technique for obtaining z transforms.

$$F(z) = Z[f^*(t)] = \sum \text{residues of } F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \text{ at poles of } F(s)$$

In discrete functions, the notation $f(k)$ may be used to represent $f^*(t)$. The transform for $f(k)$ is,

$$Z[f(k)] = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots = F(z)$$

There are some simple techniques for obtaining inverse z transforms.

- 1) Partial-Fraction Method
- 2) Division Method
- 3) Residue Method

In writing the transfer function for feedback control systems with sampling switches, one encounters some terms which are starred and some which are not. It is necessary to develop some mathematical techniques for handling such mixed terms.

- 1) In addition to the actual system input R, regard all switch outputs as inputs.
- 2) In addition to the system output C, regard all switch inputs as outputs.
- 3) Write equations for each output in terms of its inputs.
- 4) Star quantities as necessary in order to determine $c(z)$.

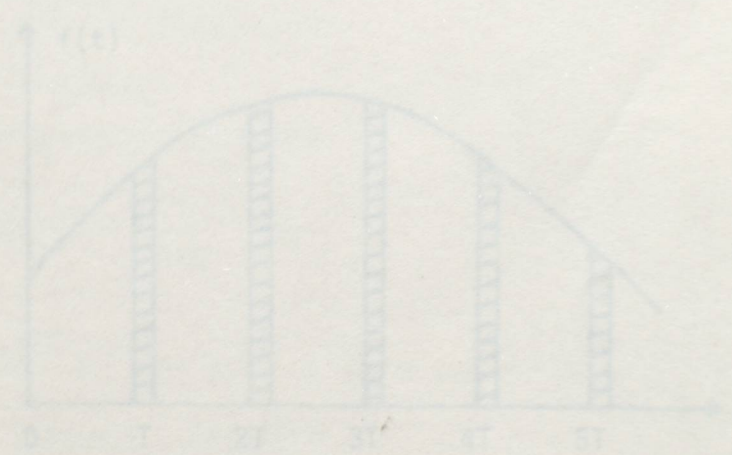
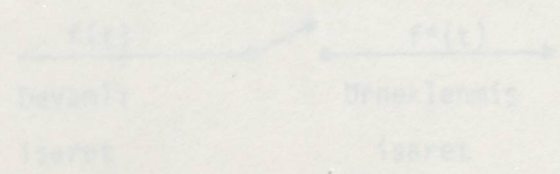
For continuous systems, it was found that a system is unstable if any root of the characteristic equation is in the right half of the s plane. The right half of the s plane corresponds to the outside of the unit circle of the z plane. Thus, for stability, all the roots of the z-transformed characteristic equation must lie within the unit circle. All the techniques for constructing root-locus plots for continuous systems apply equally well to sampled-data systems in the z plane.

Sampled-data systems usually incorporate a filter. A perfect filter would convert the sampled signal $f^*(t)$ back to the continuous input $f(t)$. If such a perfect filter were possible, the sampled-data system would behave the same as continuous system.

The most commonly used filter is that in which the value of the last sample is retained until the next sample is taken. This type of filter is called a zero-order hold.

The inverse z transform yields the value of the function at the sampling instants. The behavior between sampling instants may be determined by Linvill's synthetic-sampler method. In this method, the sampling rate of the fictitious sampler is m times that of the actual sampler. The corresponding period is T/m . At submultiples of the sampling period T/m , when the fictitious sampler is closed, the actual sampler is open. Submultiples of the sampling period are represented by the term kT/m . The value of the output at the submultiple intervals is obtained by letting $t = kT/m$.

The Laplace transform method saves considerable time and effort in solving the state-transition equation for continuous systems. Similarly, the z transform method saves much computational effort in obtaining the solution of the state transition equation for a discrete data system.

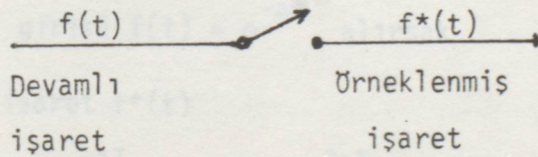


1. ÖRNEKLENMİŞ BİLGİ SİSTEMLERİ

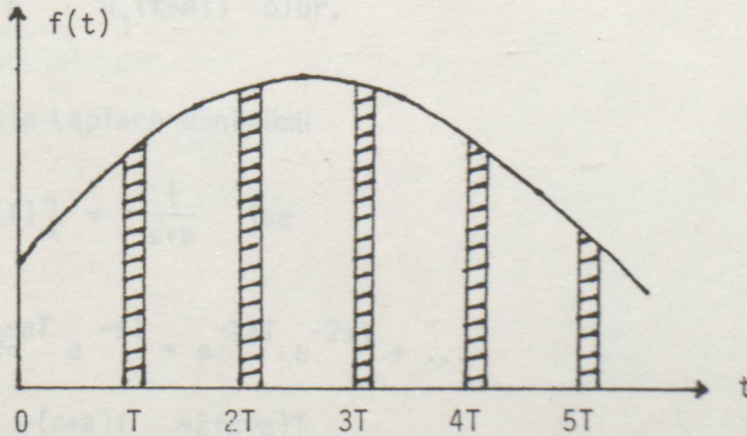
Bir örnekleyici anahtarın şematik gösterilişi Şekil 1 a'da verilmiştir. Giriş sinyalinin almak için anahtar her T anında kapanır. Tipik bir giriş sinyali Şekil 1.b'de görüldüğü gibi sürekli $f(t)$ fonksiyonu ile gösterilebilir. Bölgeleştirilmiş darbeler anahtar çıkışındaki işareti gösterir. Darbe, sistem zaman sabitinden çok daha az sürerse, anahtarın çıkışı yaklaşık olarak $f^*(t)$ impulsları ile gösterilebilir. (Şekil 1.c'de gösterildiği gibi).

Her impulsun kapladığı alan değer olarak $t = nT$ anındaki giriş sinyalinin değerine eşittir. n inci impulsun oluşturduğu alan $t = nT$ anında $f(nT)$ 'dir. Tüm impuls dizisinin eşitliği ise $f^*(t) = f(0) u_1(t) + f(T) u_1(t-T) + f(2T) u_1(t-2T) + \dots$

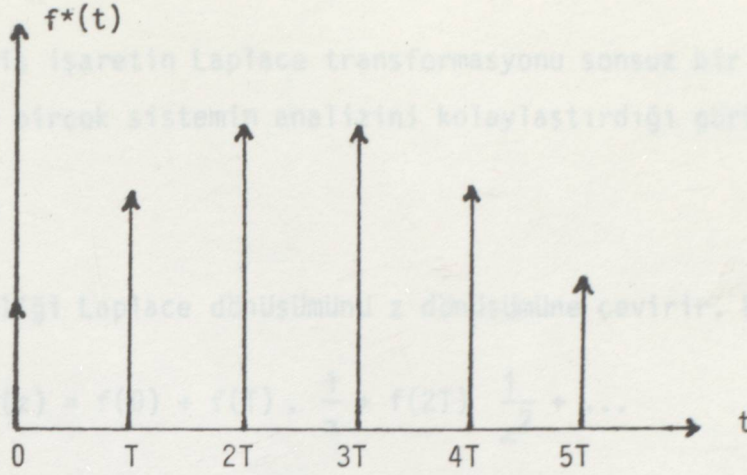
$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) u_1(t-nT) \quad (1)$$



Şekil 1.a Örneklemeye anahtarı.



Şekil 1.b Sürekli giriş $f(t)$ ve anahtardan çıkış (taralı darbeler)



Şekil 1.c Anahtar çıkışı $f^*(t)$ 'nin impulslarla gösterimi.

$u_1(t)$, $t = 0$ anında impulsu ve $u_1(t-nT)$ $t = nT$ anındaki impulsu gösterir.
Örneklenmiş işaretin Laplace dönüşümü;

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = f(0) + f(T) e^{-sT} + f(2T) e^{-2sT} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \quad (2)$$

Eğer sürekli girişi $f(t) = e^{-at}$ alırsak

Örneklenmiş işaret $f^*(t)$

$$f^*(t) = u_1(t) + e^{-aT} u_1(t-T) + e^{-2aT} u_1(t-2T) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT} u_1(t-nT) \text{ olur.}$$

$f(t)$ girişinin Laplace dönüşümü

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a} \text{ ise}$$

$$F^*(s) = 1 + e^{-aT} e^{-sT} + e^{-2aT} e^{-2sT} + \dots$$

$$= 1 + e^{-(s+a)T} + e^{-2(s+a)T} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(s+a)T}$$

Bir örneklenmiş işaretin Laplace transformasyonu sonsuz bir seridir. İlerde, Z dönüşümünün birçok sistemin analizini kolaylaştırdığı görülecektir.

2. z DÖNÜŞÜMÜ

$z = e^{sT}$ eşitliği Laplace dönüşümünü z dönüşümüne çevirir. Bu eşitlikten;

$$Z[f^*(t)] = F(z) = f(0) + f(T) \cdot \frac{1}{z} + f(2T) \cdot \frac{1}{z^2} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (3)$$

Örnek 1: Birim basamak fonksiyonunun z dönüşümünü bulunuz. Bu fonksiyon için $f(nT) = 1$ dir. ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$Z[u^*(t)] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{z}{z-1} \quad (4)$$

$|z| > 1$ için seri yakınsaktır. Problemlerin z transformasyonu ile çözümünde z terime denk operatör olarak kullanılır.

Örnek 2: e^{-at} 'nin dönüşümünü bulunuz. Bu fonksiyon için $f(nT) = e^{-anT}$ dir.

$$Z(e^{-at}) = 1 + \frac{e^{-aT}}{z} + \frac{e^{-2aT}}{z^2} + \dots = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (5)$$

Tablo 1. z dönüşümleri:

zamana bağlı fonk.	Laplace dönüşümü	z dönüşümü
$u_1(t)$	1	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT}{(z-1)^2}$

$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{z(z+1)T^2}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{z T e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$a^{t/T}$	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$\frac{z}{z-a} \quad (a > 0)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü bilindiği zaman, z dönüşümü çarpanlara ayırma metodu ile hesaplanabilir.

Örnek 3:

Aşağıda Laplace dönüşümü verilen fonksiyonun z dönüşümünü hesaplayınız.

$$F(s) = \frac{1}{s.(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Tablo 1'den

$$\frac{1}{s} \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{1}{s+1} \rightarrow \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z.(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (6)$$

Örnek 4:

$\cos \omega t$ 'nin z dönüşümünü bulunuz.

$\cos \omega t$ 'nin Laplace dönüşümü $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ dir,

Çarpanlara ayırırsak

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\frac{1}{2}}{s + j\omega} + \frac{\frac{1}{2}}{s - j\omega}$$

$$Z(\cos \omega t) = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{z - e^{-j\omega T}} + \frac{z}{z - e^{j\omega T}} \right]$$

$$= \frac{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})/2}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1}$$

$$= \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \quad (7)$$

Rezidü Metodu

Bu metod z dönüşümünü hesaplamada çok kullanılır.

$$F(z) = Z[f^*(t)] = \sum F(s) \text{'in kutuplarındaki}$$

$$F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \text{'nin rezidüleri} \quad (8)$$

Eğer $F(s)$ 'in $s = r$ de bir kutbu varsa rezidü:

$$R = \lim_{s \rightarrow r} (s - r) \left[F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \quad (9)$$

$F(s)$ q mertebede çakışık kutup içerirse rezidü:

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{s \rightarrow r} \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} \left[(s - r)^q F(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right] \quad (10)$$

Örnek 5: Birim basamak fonksiyonunun z dönüşümünü hesaplayınız. $F(s) = \frac{1}{s}$ 'te bir kutup vardır. $s = 0$

$$R = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = \frac{z}{z - 1}$$

Örnek 6:

e^{-at} nin z dönüşümünü hesaplayınız.

Bu fonksiyon için, $F(s) = \frac{1}{s+a}$ dır. $s = -a$ 'da bir kutbu vardır.

$$R = \lim_{s \rightarrow -a} (s+a) \left(\frac{1}{s+a} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Örnek 7:

$$F(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

Kutuplar $s = 0$ ve $s = -1$ 'dir.

$$R_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = \frac{z}{z - 1}$$

$$R_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \left(\frac{1}{s \cdot (s+1)} \cdot \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = - \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - e^{-T}}$$

Örnek 8:

$\cos \omega t$ 'nin z dönüşümünü hesaplayınız.

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

Kutuplar; $s = j\omega$ $s = -j\omega$

$$R_1 = \left(\frac{s}{s+j\omega} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \right)_{s=j\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{j\omega T}}$$

$$R_2 = \left(\frac{s}{s-j\omega} \cdot \frac{z}{z-e^{sT}} \right)_{s=-j\omega} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}$$

$$R = R_1 + R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \right)$$

Örnek 9:

$$f(t) = t \quad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$R = \frac{d}{ds} \left(\frac{z}{z-e^{sT}} \right)_{s=0} = \left(\frac{-z \cdot (-T e^{sT})}{(z-e^{sT})^2} \right)_{s=0}$$

$$= \frac{z T e^{sT}}{(z-e^{sT})^2} \Big|_{s=0} = \frac{zT}{(z-1)^2}$$

Teoremler :

* e^{-at} ile çarpma

e^{-at} $f(t)$ 'nin z dönüşümü

$$Z [e^{-at} f(t)] = F(ze^{aT}) \quad (11)$$

$F(Z)$ 'de z yerine ze^{aT} yazılarak $e^{-at} f(t)$ nin z dönüşümü yapılmış olur. $e^{-at} f(t)$ nin Laplace dönüşümü $F(s+a)$ ya eşittir. s yerine $(s+a)$ yazarak e^{-at} ile çarpmanın dönüşümü bulunmuş olur.

$$Z [e^{-at} f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) (ze^{aT})^{-n}$$

* t ile çarpma:

t f(t)'nin z dönüşümü

$$Z [t f(t)] = -zT \frac{d}{dz} F(z) \text{ 'dir.} \quad (12)$$

$$-zT \frac{d}{dz} F(z) = -zT \frac{d}{dz} \left[f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \dots \right]$$

$$= T \frac{f(T)}{z} + 2T \frac{f(2T)}{z^2} + 3T \frac{f(3T)}{z^3} + \dots$$

Sağ taraf t f(t)'nin z dönüşümüdür.

$$f(t) = e^{-at} \text{ ise } F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$Z [t \cdot e^{-at}] = -zT \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z - e^{-aT}} \right]$$

$$= -zT \left(\frac{z - e^{-aT} - z}{(z - e^{-aT})^2} \right) = \frac{zT e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$$

* a^{t/T} ile çarpma

a^{t/T} f(t) nin z dönüşümü

$$Z [a^{t/T} f(t)] = F \left(\frac{z}{a} \right) \quad (13)$$

$$F \left(\frac{z}{a} \right) = f(0) + a \frac{f(T)}{z} + a^2 \frac{f(2T)}{z^2} + \dots$$

Sağ taraf a^{t/T} f(t) nin z dönüşümüdür.

* Kısımlara Ayırma:

Bu teorem şunu gösterir ki:

$$Z \left[\frac{\partial}{\partial a} [f(t,a)] \right] = \frac{\partial}{\partial a} [F(z,a)] \quad (14)$$

Örnek olarak e^{at} nin z dönüşümü

$$\frac{z}{z - e^{-aT}} \text{ dir. Buradan}$$

$$Z \left[\frac{\partial}{\partial a} e^{at} \right] = Z [t e^{at}] = \frac{\partial}{\partial a} \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$= \frac{T z e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$$

$a = 0$ ise

$$Z [t] = \frac{T z}{(z-1)^2}$$

* İlk değer teoremi:

Örneklenmiş fonksiyon olan $f^*(t)$ 'nin ilk impulsu $f(0)$ 'ın kapladığı alan;

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \text{ 'dir.} \quad (15)$$

Bu teorem örnek 3'te $z \rightarrow \infty$ iken limit alınarak doğrulanabilir.

$$z = e^{Ts} \text{ ise}$$

$$Z [f^*(t)] = F(z) = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \dots$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0) + 0 + 0 + \dots = f(0) \text{ olur.}$$



* Serjef Vnşşşş :

* Son değef teoremi:

$n \rightarrow \infty$ iken $f(nT)$ impulsunun kapladığı alan;

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) \quad (16)$$

İSPAT:

$$S_n = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \dots + \frac{f[(n-1)T]}{z^{n-1}} + \frac{f(nT)}{z^n}$$

$$S_{n-1} = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \dots + \frac{f[(n-1)T]}{z^{n-1}} \quad \text{ise,}$$

İkinci seriyi z ile bölüp, ikinciyi birinciden çıkarırsak;

$$(S_n - \frac{1}{z} S_{n-1}) = (1 - \frac{1}{z}) f(0) + \dots + (1 - \frac{1}{z}) \frac{f[(n-1)T]}{z^{n-1}} + \frac{f(nT)}{z^n}$$

bulunur.

$z \rightarrow 1$ 'e yaklaşırken limit alınırsa;

$$\lim_{z \rightarrow 1} (S_n - \frac{1}{z} S_{n-1}) = f(nT) \text{ olur.}$$

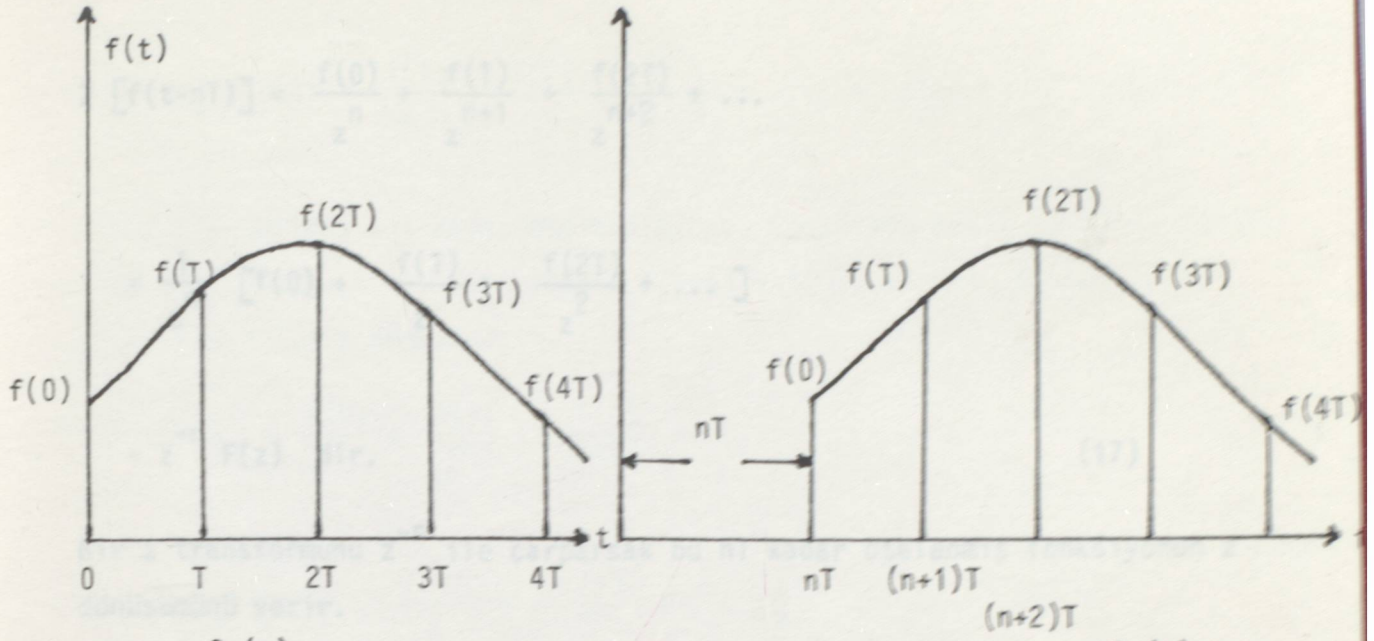
n , çok büyük ise;

$S_{n-1} \approx S_n \approx F(z)$ 'dir. Böylece son değef teoremi sağlanmış olur.

$$\lim_{z \rightarrow 1} (F(z) - \frac{1}{z} F(z)) = f(\infty T)$$

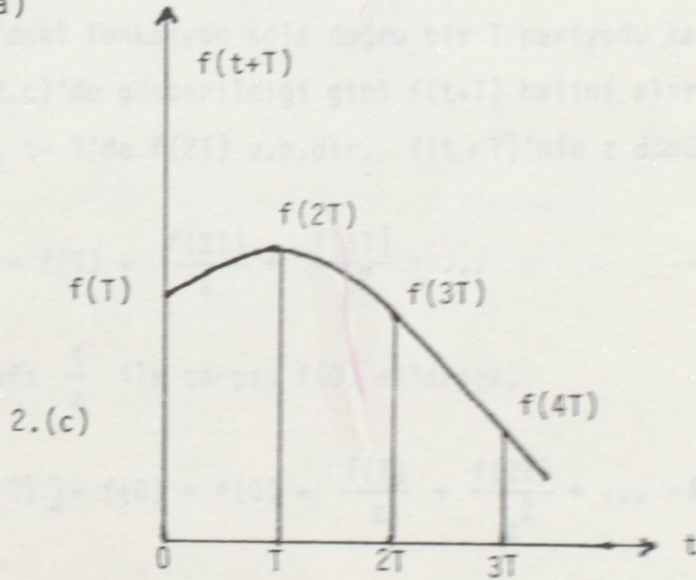
$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = f(\infty)$$

* Gerçek Dönüşüm :



2.(a)

2.(b)



2.(c)

Şekil 2. $f(t)$ sürekli fonksiyonunun dönüşümü.

Şekil (2.a)'da sürekli $f(t)$ fonksiyonunun değişimi görülmektedir. $t=0$ anında fonksiyonun değeri $f(0)$, $t=T$ anında $f(T)$ dir. Fonksiyon nT zamanı kadar ötelenirse, şekil (2.b)'de görüldüğü gibi fonksiyon $f(t-nT)$ olur. $t=nT$ anında $f(t-nT)$ fonksiyonunun değeri $f(0)$, $t=(n+1)T$ anında $f(T)$ dir. $f(t)$ 'nin z dönüşümü;

$$Z[f(t)] = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \dots$$

$f(t-nT)$ 'nin z dönüşümü

$$\begin{aligned}
 Z [f(t-nT)] &= \frac{f(0)}{z^n} + \frac{f(T)}{z^{n+1}} + \frac{f(2T)}{z^{n+2}} + \dots \\
 &= \frac{1}{z^n} \left[f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \dots \right] \\
 &= z^{-n} F(z) \text{ dir.} \tag{17}
 \end{aligned}$$

Bir z transformunu z^{-n} ile çarparsak bu nT kadar ötelenmiş fonksiyonun z dönüşümünü verir.

Şekil (2.a)'daki fonksiyon sola doğru bir T periyodu kadar ötelendiğinde fonksiyon (2.c)'de gösterildiği gibi $f(t+T)$ halini alır. $t=0$ da $f(t+T)$ 'nin değeri $f(T)$, $t=T$ 'de $f(2T)$ v.b.dir. $f(t+T)$ 'nin z dönüşümü;

$$Z [f(t+T)] = f(T) + \frac{f(2T)}{z} + \frac{f(3T)}{z^2} + \dots$$

Her iki tarafı $\frac{1}{z}$ ile çarpıp $f(0)$ eklersek,

$$z^{-1} Z [f(t+T)] + f(0) = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \dots = F(z)$$

Böylece;

$$Z [f(t+T)] = z F(z) - z f(0) \text{ olur.}$$

Benzer olarak, şunu gösterir ki

$$Z [f(t+2T)] = z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(T)$$

ve genel olarak;

$$Z [f(t+nT)] = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(T) - \dots - z f[(n-1)T] \tag{18}$$

Ayrık fonksiyonlar: $f(k)$ notasyonu $f^*(t)$ 'yi temsil ediyor olsun. $f(k)$ 'nın grafiği Şekil 3.a'da gösterilmiştir. $f(k)$ 'nin z dönüşümü;

$$Z[f(k)] = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \frac{f(3)}{z^3} + \dots = F(z) \quad (19)$$

$f(k)$, n örnekleme anı kadar ötelendiğinde, fonksiyon Şekil (3.b)'de görüldüğü gibi $f(k-n)$ olur. $k = n$ anında $f(k-n) = f(0)$, $k = n+1$ anında $f(1)$ olur. $f(k-n)$ 'in z dönüşümü;

$$\begin{aligned} Z[f(k-n)] &= \frac{f(0)}{z^n} + \frac{f(1)}{z^{n+1}} + \frac{f(2)}{z^{n+2}} + \dots \\ &= \frac{1}{z^n} \left[f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots \right] \\ &= z^{-n} F(z) \end{aligned} \quad (20)$$

Şekil (3.a)'daki $f(k)$ fonksiyonu, bir örnekleme periyodu kadar sola ötelendiğinde, fonksiyon şekil (3.c)'deki gibi $f(k+1)$ olur. $k = 0$ 'da $f(k+1) = f(1)$, $k = 1$ 'de $f(2)$ dir.

$f(k+1)$ 'in z dönüşümü;

$$Z[f(k+1)] = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots$$

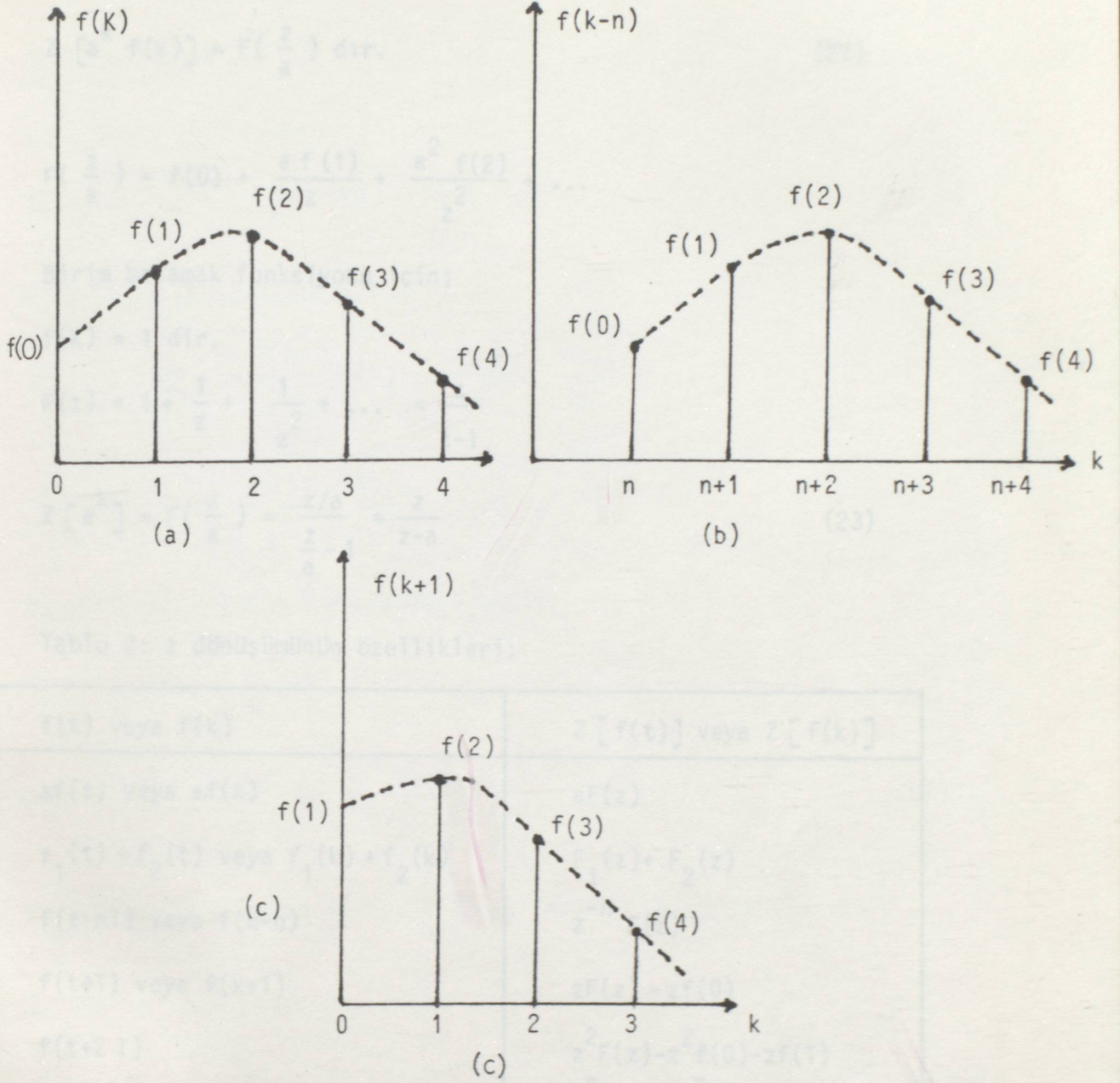
Her iki taraf $\frac{1}{z}$ ile çarpılıp $f(0)$ eklenirse;

$$z^{-1} Z[f(k+1)] + f(0) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots = F(z)$$

$$Z[f(k+1)] = z F(z) - z f(0) \quad \text{olur.}$$

Buna benzer olarak;

$$Z[f(k+2)] = z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1)$$



Şekil 3. $f(k)$ süreksiz fonksiyon dönüşümü.

Genellersek;

$$Z[f(k+n)] = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(1) - \dots - z f(n-1) \quad (21)$$

Buradan anlaşılacağı gibi, $f(k)$ için olan z dönüşüm teoremleri, $f(t)$ için olanlarla tamamen aynıdır.

* a^k ile çarpma :

$a^k f(k)$ 'nın z dönüşümü;

$$Z [a^k f(k)] = F\left(\frac{z}{a}\right) \text{ dır.} \quad (22)$$

$$F\left(\frac{z}{a}\right) = f(0) + \frac{a f(1)}{z} + \frac{a^2 f(2)}{z^2} + \dots$$

Birim basamak fonksiyonu için;

$$f(k) = 1 \text{ dir.}$$

$$F(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \frac{z}{z-1}$$

$$Z [a^k] = F\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{z/a}{z/a - 1} = \frac{z}{z-a} \quad (23)$$

Tablo 2: z dönüşümünün özellikleri:

$f(t)$ veya $f(k)$	$Z [f(t)]$ veya $Z [f(k)]$
$af(t)$ veya $af(k)$	$aF(z)$
$f_1(t) + f_2(t)$ veya $f_1(k) + f_2(k)$	$F_1(z) + F_2(z)$
$f(t-nT)$ veya $f(k-n)$	$z^{-n} F(z)$
$f(t+T)$ veya $f(k+1)$	$zF(z) - zf(0)$
$f(t+2T)$	$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(T)$
$f(k+2)$	$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$
$f(t+nT)$	$z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(T) - \dots - zf[(n-1)T]$
$f(k+n)$	$z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(1) - \dots - zf(n-1)$
$t f(t)$	$-zT \frac{d}{dz} F(z)$
$k f(k)$	$-z \frac{d}{dz} F(z)$
$e^{-at} f(t)$	$F(ze^{aT})$
$e^{-ak} f(k)$	$F(ze^a)$
$a^{t/T} f(t)$ veya $a^k f(k)$	$F(z/a)$
$\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)$	$\frac{\partial}{\partial a} F(z,a)$

* k ile çarpma:

$k f(k)$ 'nın z dönüşümü:

$$Z[k f(k)] = -z \frac{d}{dz} F(z) \quad (24)$$

Bu teoremi gerçeklemek için:

$$\begin{aligned} -z \frac{d}{dz} F(z) &= -z \frac{d}{dz} \left[f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots \right] \\ &= \frac{f(1)}{z} + \frac{2f(2)}{z^2} + \frac{3f(3)}{z^3} + \dots \end{aligned}$$

Bu sonuç $k f(k)$ 'nın z dönüşümünü verir.

Örneğin; $f(k) = a^k$ $F(z) = \frac{z}{z-a}$

$$Z[k a^k] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-a} = \frac{az}{(z-a)^2} \quad (25)$$

z dönüşümü teoremleri ve özellikleri Tablo 2'de verilmiştir.

3. TERS z DÖNÜŞÜMLERİ

Tablo (1), z dönüşümünün Laplace dönüşümüne göre daha karmaşık olduğunu gösterir. Buna rağmen, ters z dönüşümünü elde etmek için nispeten basit teknikler vardır.

* Kısmi kesirlere ayırma :

Bu metodu açıklayabilmek için şu fonksiyonu ele alalım:

$$F(z) = \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (26)$$

Kesirlere ayırırsak;

$$F(z) = \left[\frac{1 - e^{-T}}{(z-1)(z-e^{-T})} \right] \cdot z = \left[\frac{k_1}{z-1} + \frac{k_2}{z-e^{-T}} \right] z = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}$$

Tablo (1)'den uygun zamana bağlı fonksiyon seçilirse;

$$f(t) = 1 - e^{-t} \text{ olur.}$$

Böylece, ters $f^*(t)$;

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-nT}) u_1(t-nT) \text{ olur.} \quad (27)$$

* Bölme Metodu

$F(z)$ fonksiyonunun payını paydasına bölersek elde edilen seri;

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \text{ dır.} \quad (28)$$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_1(t-nT)$$

$$F(z) = \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \text{ nın bu yolla dönüşümünü elde etmek için payı paydaya}$$

bölelim.

$$F(z) = 0 + (1-e^{-T}) z^{-1} + (1-e^{-2T}) z^{-2} + \dots$$

* Rezidü Metodu:

Bu metodu açıklayabilmek için, $F(z)$ 'i aşağıdaki temel formda yazalım:

$$F(z) = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \dots + \frac{f[(n-1)T]}{z^{n-1}} + \frac{f(nT)}{z^n} + \frac{f[(n+1)T]}{z^{n+1}}$$

z^{n-1} ile çarpılırsa;

$$F(z) \cdot z^{n-1} = f(0) z^{n-1} + \dots + f[(n-1)T] + \frac{f(nT)}{z} + \frac{f[(n+1)T]}{z^2} \quad (29)$$

Karmaşık değişkenler teorisinden bilindiği gibi yukarıdaki Laurent açılımındaki $\frac{1}{z}$ teriminin $f(nT)$ katsayısı;

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz$$

$$f(nT) = \sum F(z) z^{n-1} \text{ 'in kutuplarındaki rezidüler} \quad (30)$$

C bölgesi $F(z) z^{n-1}$ in kutuplarını içeren kapalı bir bölgedir.

$z = r$ birinci mertebeden kutuptaki rezidü;

$$R = \lim_{z \rightarrow r} (z-r) [F(z) z^{n-1}] \quad (31)$$

q 'uncu mertebeden kutuptaki rezidü;

$$R = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z \rightarrow r} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} [(z-r)^q F(z) z^{n-1}] \quad (32)$$

Örnek olarak:

$$F(z) = \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$R_1 = \left[\frac{(1-e^{-T})z^n}{z-e^{-T}} \right]_{z=1} = 1$$

$$R_2 = \left[\frac{(1-e^{-T})z^n}{(z-1)} \right]_{z=e^{-T}} = -e^{-nT}$$

Bu iki rezidüyü toplarsak;

$$f(nT) = 1-e^{-nT} \text{ olur.}$$

Diğer bir örnek olarak,

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$z = 1$ 'de 2.mertebeden bir kutbu vardır.

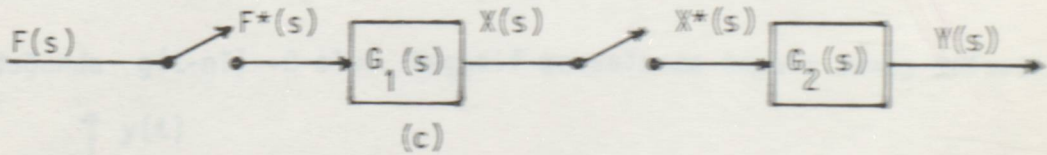
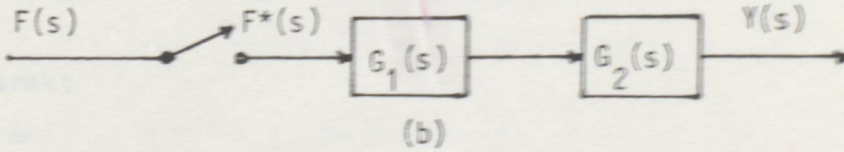
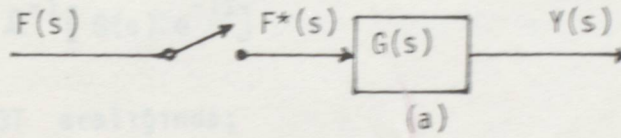
$$R = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} T z^n = (n T z^{n-1})_{z=1} = n T$$

$f(nT) = nT$ bunun zaman fonksiyonu $f(t) = t$ bulunur.

4. BLOK DİYAGRAM CEBRİ

Örneklenmiş anahtarlar içeren geri beslemeli kontrol sistemlerinin transfer fonksiyonlarının yazılmasında, yıldızlanmış veya yıldızlanmamış bazı terimlere rastlanır. Bu karmaşık terimlerin çözülmesi için bazı matematiksel tekniklerin geliştirilmesi gerekir. Şekil (4.a)'da da örnekleme anahtarını takiben, transfer fonksiyonu $G(s)$ olan bir lineer eleman gösterilmiştir.

Çıkış $Y(s)$ için dönüştürülmüş eşitlik;



Şekil 4. Örnekleme modelleri

$$Y(s) = F^*(s) \cdot G(s) \quad (333)$$

$0 < t < T$ için, cevap $y(t)$, $t = 0$ anında ilk impulsun kapladığı alan $f(0)$ 'ta bağlıdır. Böylece bu aralık için;

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [f(0) G(s)] = f(0) \mathcal{L}^{-1} [G(s)] = f(0) g(t) \quad (334)$$

$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)]$, $t = 0$ anındaki birim impulsa lineer elemanın verdiği cevaptır.

$T < t < 2T$ aralığında, $y(t)$ cevabı $t = 0$ dan $t = T$ ye kadar olan impulsa bağlıdır.

Bu aralıkta, $F^*(s) = f(0) + f(T) e^{-Ts}$

Böylece,

$$Y(s) = [f(0) + f(T) e^{-Ts}] G(s)$$

ve

$$y(t) = f(0) g(t) + f(T) g(t-T) \quad (35)$$

$t = T$ anında, birim impulsa lineer elemanın cevabı;

$$g(t-T) = \mathcal{L}^{-1} [G(s) e^{-Ts}]$$

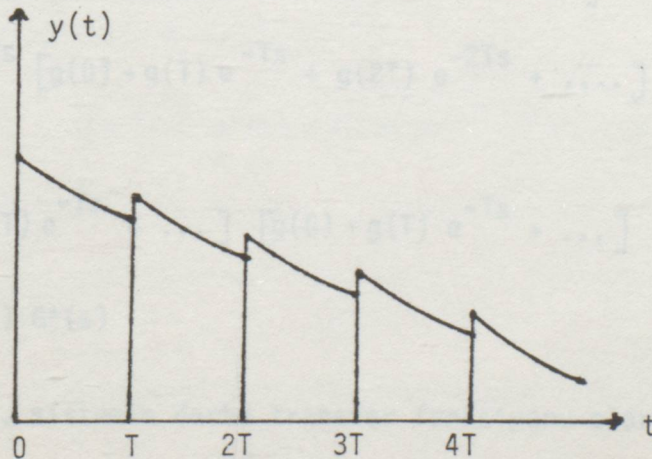
$2T < t < 3T$ aralığında;

$$y(t) = f(0) g(t) + f(T) g(t-T) + f(2T) g(t-2T)$$

Genel olarak;

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) g(t-nT) \quad (36)$$

$nT > t$ olduğunda $g(t-nT) = 0$ olur. Negatif zamanlarda impuls cevap sıfırdır.



Şekil 5. Örnekleme anında süreksiz olan cevap fonksiyonu.

$t \rightarrow 0$ 'a giderken ve $t \rightarrow T$ 'ye giderken alınan limit örnekleme anında $y(nT)$ değerini verir.

$$y(0) = f(0) g(0)$$

$$y(T) = f(0) g(T) + f(T) g(0) \quad (37)$$

$$y(2T) = f(0) g(2T) + f(T) g(T) + f(2T) g(0)$$

— — — — —

$$y(nT) = f(0) g(nT) + f(T) g[(n-1) T] + \dots$$

Şekil 5 örnekleme anında süreksiz olan $y(t)$ cevap fonksiyonunu gösterir. Bu süreksizlik $G(s)$ 'in paydasının derecesi, payının derecesinden sadece 1 fazlaysa oluşur. Aksi takdirde $y(t)$ süreklidir. Eğer fonksiyon sürekliyse (37) eşitlikleri örnekleme anı için kullanılır. Eğer süreksizse örnekleme anından sonrası için kullanılır. [Yani, $y(0+)$, $y(T+)$...]

Örnek 2'de f yerine y yazarsak;

$$Y^*(s) = y(0) + y(T)e^{-Ts} + y(2T) e^{-2Ts} + \dots$$

Bu değerleri (37) eşitliğinde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= f(0) [g(0) + g(T) e^{-Ts} + g(2T) e^{-2Ts} + \dots] \\ &+ f(T) e^{-Ts} [g(0) + g(T) e^{-Ts} + g(2T) e^{-2Ts} + \dots] \\ &+ f(2T) e^{-2Ts} [g(0) + g(T) e^{-Ts} + g(2T) e^{-2Ts} + \dots] \\ &+ \dots \\ &= [f(0) + f(T) e^{-Ts} + \dots] [g(0) + g(T) e^{-Ts} + \dots] \end{aligned}$$

$$Y^*(s) = F^*(s) G^*(s) \quad (38)$$

$G^*(s)$ terimi, sistemin darbe transfer fonksiyonu olarak isimlendirilir.

$$[Y(s)]^* = Y^*(s)$$

$$[F^*(s) G(s)]^* = F^*(s) [G(s)]^* = F^*(s) G^*(s)$$

(38) eşitliğinde $z = e^{sT}$ yazılırsa bu z dönüşüm bağıntısını verir.

$$Y(z) = F(z) G(z) \quad (39)$$

Şekil (4.b) için Laplace dönüşüm bağıntısı

$$Y(s) = F^*(s) G_1(s) G_2(s)$$

$$Y^*(s) = F^*(s) [G_1(s) G_2(s)]^* = F^*(s) G_1 G_2^*(s)$$

$$G_1 G_2^*(s) = [G_1(s) G_2(s)]^*$$

$$Y(z) = F(z) G_1 G_2(z) \quad (40)$$

Örnek 1:

Şekil (4.b)'de $G_1(s) = \frac{1}{s}$ ve $G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ ise z dönüşümünü hesaplayınız.

$G_1(s) G_2(s)$ 'i oluşturalım:

$$G_1(s) G_2(s) = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$$

$$G_1(z) G_2(z) = \frac{z \cdot (1 - e^{-T})}{(z-1)(z - e^{-T})} \quad (41)$$

Şekil (4.c)'de gösterilen örnekleme modeli için, Laplace bağıntıları;

$$X(s) = F^*(s) G_1(s)$$

$$Y(s) = X^*(s) G_2(s)$$

Birinci ifade yıldızlanıp, ikincide yerine yazılırsa;

$$Y(s) = F^*(s) G_1^*(s) G_2(s)$$

$$Y^*(s) = F^*(s) G_1^*(s) G_2^*(s)$$

$$Y(z) = F(z) G_1(z) G_2(z) \quad (42)$$

Örnek 2: Şekil (4.c)'de $G_1(s) = \frac{1}{s}$

$G_2(s) = \frac{1}{s+1}$ ise z dönüşümünü hesaplayınız.

$$G_1(z) = \frac{z}{z-1} \quad G_2(z) = \frac{z}{z-e^{-T}}$$

$$G_1(z) G_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T})} \quad (43)$$

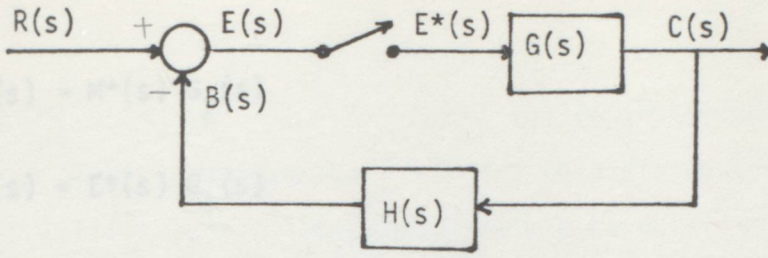
İki örnek karşılaştırılırsa şuna dikkat edilmelidir:

$$G_1 G_2(z) \neq G_1(z) G_2(z) \quad (44)$$

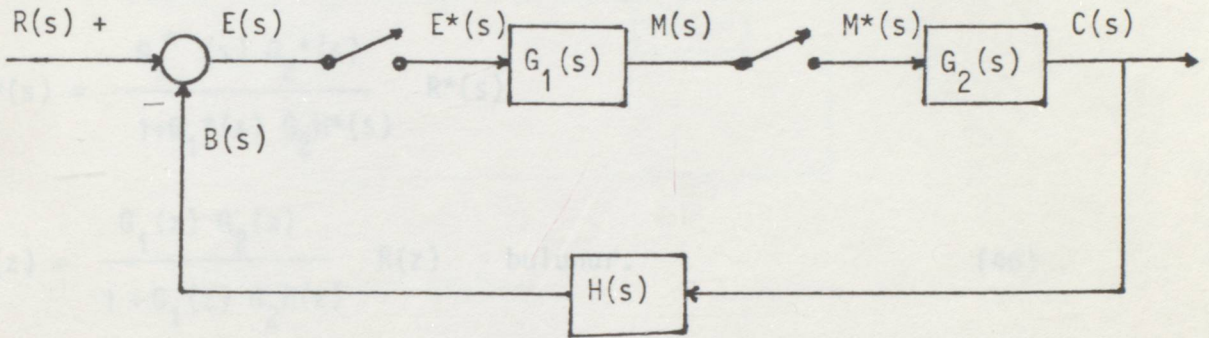
$G_1 G_2(z)$ fonksiyonu $G_1(s) \cdot G_2(s)$ ifadesinin z dönüşümüdür. $G_1(z) G_2(z)$ ise, $G_1(s)$ 'in z dönüşümü ile $G_2(s)$ 'in z dönüşümünün çarpımına eşittir.

İki örnekleme anahtarlı geri-beslemeli kontrol sistemi Şekil (6)'da gösterilmiştir. Transfer fonksiyonunu hesaplamadaki temel yol şudur:

1. Esas sistem girişi R , tüm anahtar çıkışları giriş olarak kabul edilir.
2. Sistem çıkışı C , tüm anahtar girişleri çıkış olarak kabul edilir.
3. Her çıkış için, girişe bağlı eşitliği yazılır.
4. Yıldızlama işaretleri $C(z)$ 'i hesaplamada önemlidir.



(a)



(b)

Şekil 6. Örneklenmiş bilgi sistemleri.

Bu metodun uygulanması için Şekil (6.a)'yı göz önüne alalım.

$$c(s) = E^*(s) G(s)$$

$$E(s) = R(s) - E^*(s) G(s) H(s)$$

Yıldızlama yapılırsa;

$$C^*(s) = E^*(s) G^*(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - E^*(s) GH^*(s)$$

$$C^*(s) = \frac{G^*(s)}{1 + GH^*(s)} R^*(s)$$

$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} R(z)$$

(45)

Şekil (6.b) için eşitlikler yazılırsa;

$$C(s) = M^*(s) G_2(s)$$

$$M(s) = E^*(s) G_1(s)$$

$$E(s) = R(s) - M^*(s) G_2(s) H(s)$$

Tüm ifadeler yıldızlanıp, $C^*(s)$ çekilirse;

$$C^*(s) = \frac{G_1^*(s) G_2^*(s)}{1 + G_1^*(s) G_2^*(s) H^*(s)} R^*(s)$$

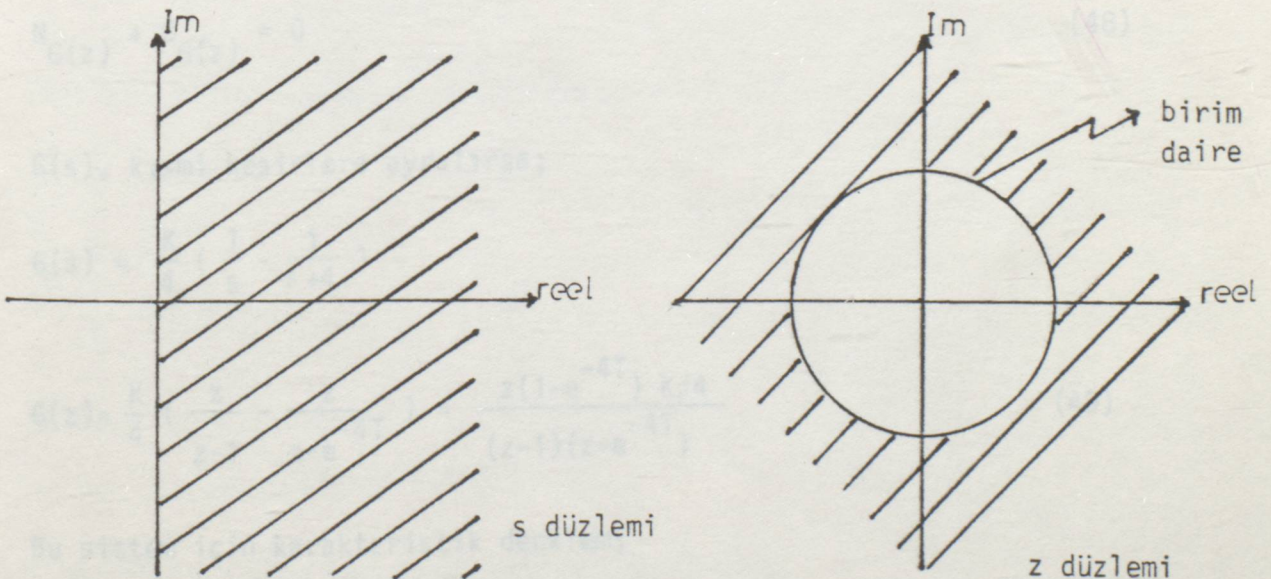
$$C(z) = \frac{G_1(z) G_2(z)}{1 + G_1(z) G_2(z) H(z)} R(z) \quad \text{bulunur.} \quad (46)$$

5. GEÇİCİ ÇÖZÜM

Sürekli sistemlerde, eğer karakteristik denklemin s düzleminin sağ yarısının kökü varsa sistem kararsızdır. Bu sağ yarıdüzlem $\sigma + j\omega$ ile ifade edilebilir. $\sigma > 0$ büyüktür. z düzleminde karşılık gelen kısım:

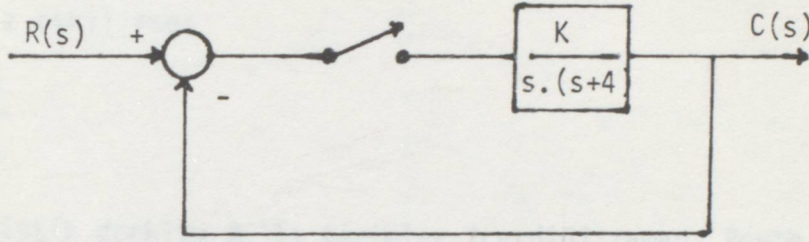
$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

Modül ise; $|z| = e^{\sigma T}$ dir.



Şekil 7. s ve z düzlemleri için kararlılık aralıkları.

$\sigma > 0$ için $|z| > 1$ dir. Şekil (7)'de gösterildiği gibi, s düzleminin sağ tarafı z düzleminde birim dairenin dışına karşılık gelir. Böylece, kararlılık için, z dönüşümü yapılmış karakteristik denklemin tüm kökleri birim dairenin içinde olmalıdır.



Şekil 8. Örneklenmiş bilgi sistemi

Şekil (8)'de gösterilen örneklenmiş bilgi sistemini alalım. $c(z)$ çıkışı için z dönüşümü;

$$c(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z) = -\frac{N_{G(z)}}{D_{G(z)} + N_{G(z)}} \cdot R(z) \quad (47)$$

$G(z) = N_{G(z)} / D_{G(z)}$ için $N_{G(z)}$, $G(z)$ 'nin payını $D_{G(z)}$, $G(z)$ 'nin paydasını gösterir. z dönüşümü yapılmış karakteristik denklem

$$N_{G(z)} + D_{G(z)} = 0 \quad (48)$$

$G(s)$, kısmi kesirlere ayrılırsa;

$$G(s) = \frac{K}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} \right)$$

$$G(z) = \frac{K}{4} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-4T}} \right) = \frac{z(1-e^{-4T}) K/4}{(z-1)(z-e^{-4T})} \quad (49)$$

Bu sistem için karakteristik denklem;

$$(z-1)(z-e^{-4T}) + z(1-e^{-4T}) K/4 = 0 \text{ dır.} \quad (50)$$

Routh Kriteri:

Bu kriteri uygulayabilmek için, z düzleminin birim daire dönüşümünü, λ düzleminde dikey imajiner eksene dönüştürmek önemlidir. Bu $\lambda = \frac{z+1}{z-1}$ dönüşümü ile sağlanır.

Buradan z çekilirse;

$$z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \quad (51)$$

Karakteristik denklem λ 'lı terimler içerdiği zaman, Routh kriteri sürekli sistemlerde kullanıldığı gibi kullanılabilir.

Örnek 1:

$T = \frac{1}{4}$ s. örnekleme periyodu için, Şekil (8)'de gösterilen sistemin kararlılığını inceleyiniz.

$$(z-1)(z-0,368) + 0,158 K z = 0 \quad (52)$$

$$z = \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \text{ dönüşümü yapılırsa;}$$

$$\frac{0,158 K \lambda^2 + 1,264 \lambda + (2,736 - 0,158 K)}{(\lambda - 1)^2} = 0 \quad (53)$$

Pay için Routh tablosu hazırlanırsa;

λ^2	0,158 K	2,736 - 0,158 K	0
λ	1,264	0	
λ^0	2,736-0,158 K	0	

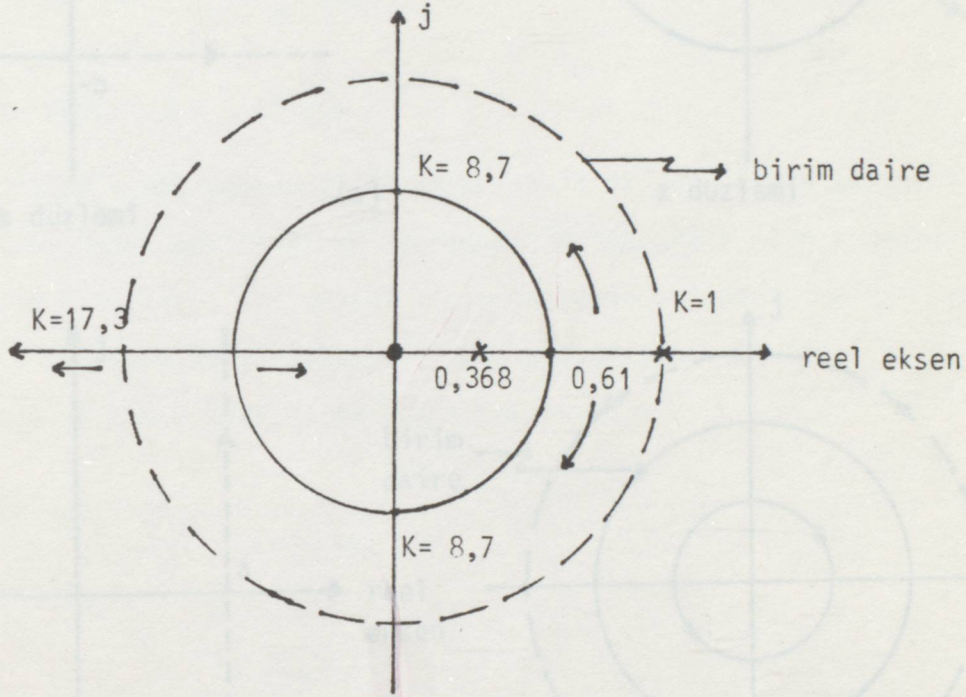
$$K \geq 0 \quad 2,736 - 0,158 K = 0$$

$$2,736 = 0,158 K$$

$$K \geq \frac{2,736}{0,158} = 17,3 \text{ olduğunda sistem kararsızdır.}$$

Sürekli sistemler ise K 'nın her değeri için kararlıdırlar.

Yukarıda gösterilen örnekte örnekleme periyodu $T = \frac{1}{10}$ s olsaydı $K \geq 42$ aralığında sistem kararsız olacaktı. Örnekleme periyodu küçüldükçe kararlılık artar.



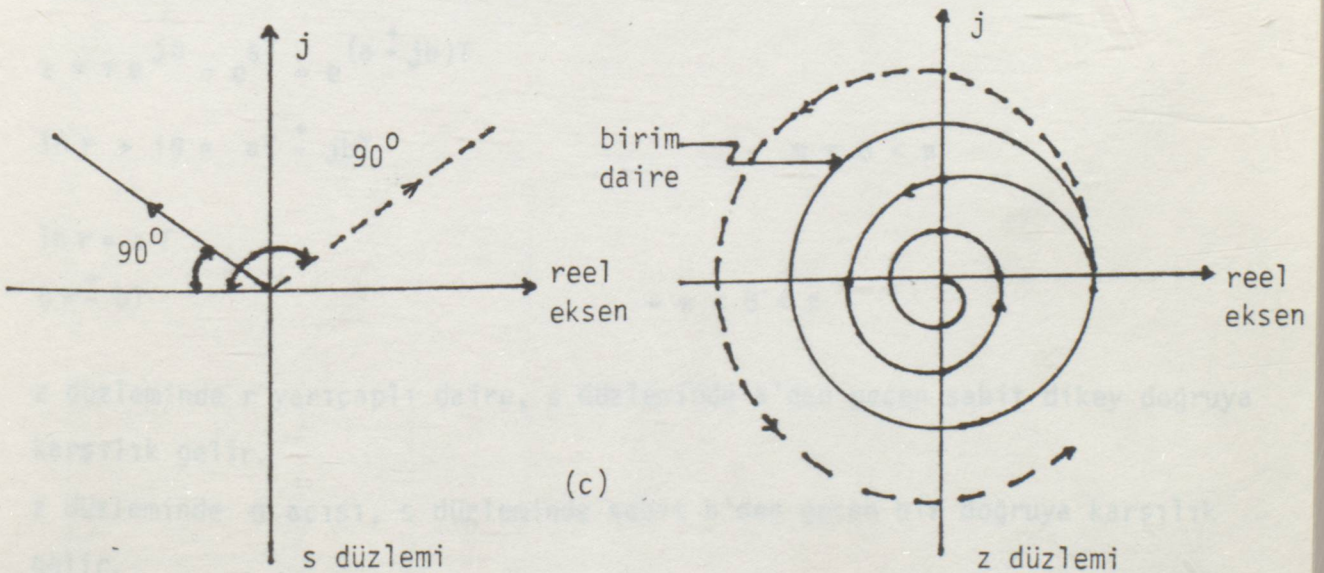
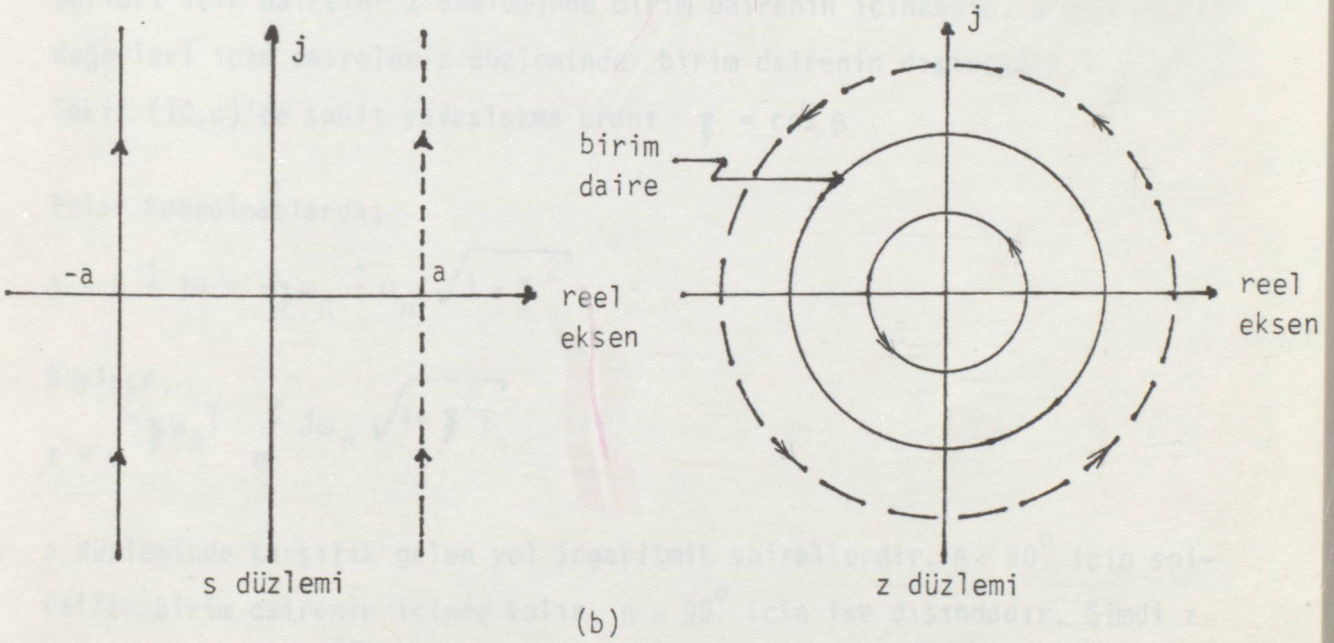
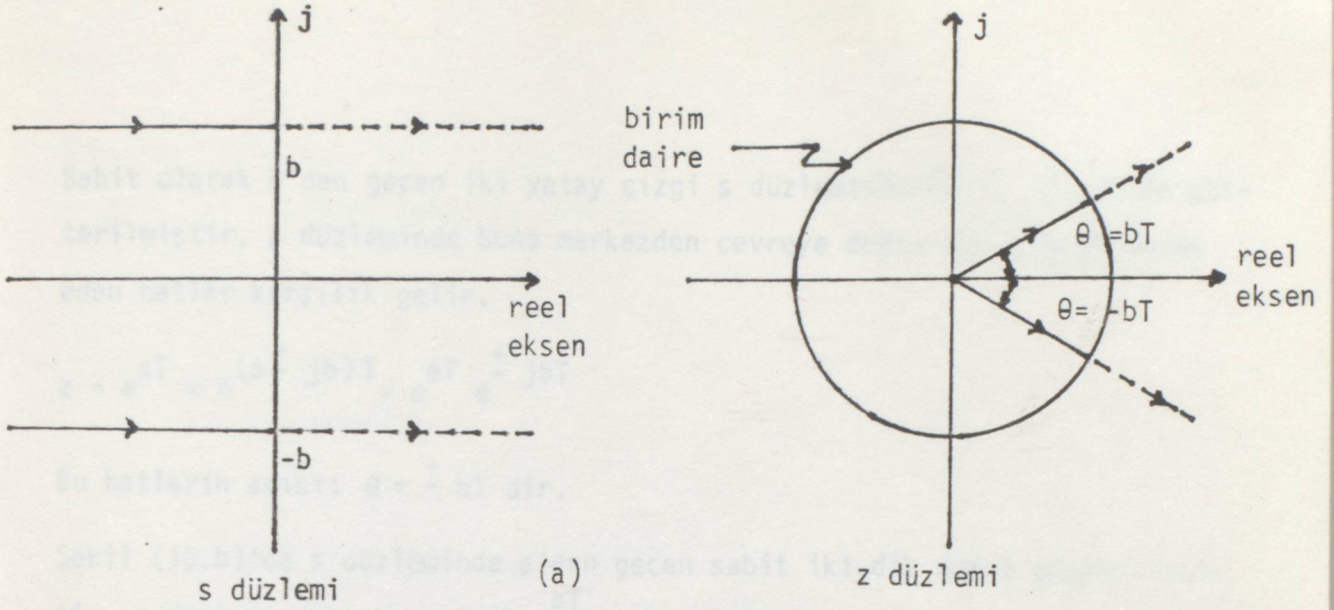
Şekil 9. $(z-1)(z-0,368) + 0,158 Kz = 0$ için Routh kararlılık aralığı

Köklerin Yeri:

Kök-yer eğrilerinin çizimi için sürekli sistemlerde kullanılan tüm metodlar, örneklenmiş bilgi sistemleri için de geçerlidir. $T = \frac{1}{4}$ s için (50) eşitliği (52) eşitliğine dönüşür. Bu karakteristik denklemin $z = 1$ ve $z = 0,368$ de iki kutbu vardır. $z = 0$ 'da bir sıfırı vardır. Kök yer eğrisi Şekil (9)'da gösterildiği gibi çizilir. Bu kök-yer eğrisi $z = -1$ 'de bir birim daire ile çevrelenir. Kök-yer eğrisi üzerinde herhangi bir noktadaki kazancın $(0,158 K)$ değeri bu noktadan her kutba olan uzaklığın yine bu noktadan her sıfıra olan uzaklığa bölünmesiyle bulunur. Sistemin kararsız olduğu zamanda $0,158 K = (1,368)(2)/(1)$

$$K = \frac{2,736}{0,158} = 17,3$$

Routh kriteri ile de aynı sonuç elde edilir.



Şekil 10. s ve z düzlemlerinde birbirlerine karşılık gelen alanlar.

Sabit olarak b'den geçen iki yatay çizgi s düzleminde Şekil (10.a)'da gösterilmiştir. z düzleminde buna merkezden çevreye doğru düz olarak devam eden hatlar karşılık gelir.

$$z = e^{sT} = e^{(a + jb)T} = e^{aT} e^{+jbT} \quad (54)$$

Bu hatların açısı; $\theta = + bT$ dir.

Şekil (10.b)'de s düzleminde a'dan geçen sabit iki dik doğru gösterilmiştir. z düzlemindeki karşılığı e^{aT} yarıçaplı dairelerdir. a'nın negatif değerleri için daireler z düzleminde birim dairenin içindedir. a'nın pozitif değerleri için daireler z düzleminde birim dairenin dışındadır.

Şekil (10.c)'de sabit yavaşlatma oranı $\zeta = \cos \beta$

Polar koordinatlarda;

$$s = a + jb = -\zeta \omega_n + j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Böylece;

$$z = e^{-\zeta \omega_n T} e^{+j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} T}$$

z düzleminde karşılık gelen yol logaritmik spirallerdir. $\beta < 90^\circ$ için spiraller birim dairenin içinde kalır. $\beta > 90^\circ$ için ise dışındadır. Şimdi z düzleminde $z = r e^{j\theta}$ noktası, s düzlemine nasıl taşınır ?

$$z = r e^{j\theta} = e^{sT} = e^{(a + jb)T}$$

$$\ln r + j\theta = aT + jbT \quad - \pi < \theta < \pi$$

$$\ln r = aT$$

$$\theta = + bT \quad - \pi < \theta < \pi$$

z düzleminde r yarıçaplı daire, s düzleminde a'dan geçen sabit dikey doğruya karşılık gelir.

z düzleminde θ açısı, s düzleminde sabit b'den geçen bir doğruya karşılık gelir.

Örnek 2: Şekil (8)'deki sistemde giriş birim basamak fonksiyonu $T = \frac{1}{4} \cdot s$ ve $K = 1$ ise sistemin cevabını bulunuz.

Eşitlik (49)'dan,

$$G(z) = \frac{0,158 z}{(z-1)(z-0,368)} \quad (54)$$

$$c(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} \quad R(z) = \frac{0,158 z}{[(z-1)(z-0,368)+0,158 z]} \quad (55)$$

$K = 1$ için kök-yer eğrisi Şekil (9)'da gösterilmiştir. Karakteristik denklem $z = 0.61$ 'de katlı kutup içermektedir.

$$c(z) = \frac{0,158 z}{(z-0,61)^2} \quad R(z) = \frac{0,158 z^2}{(z-0,61)^2(z-1)}$$

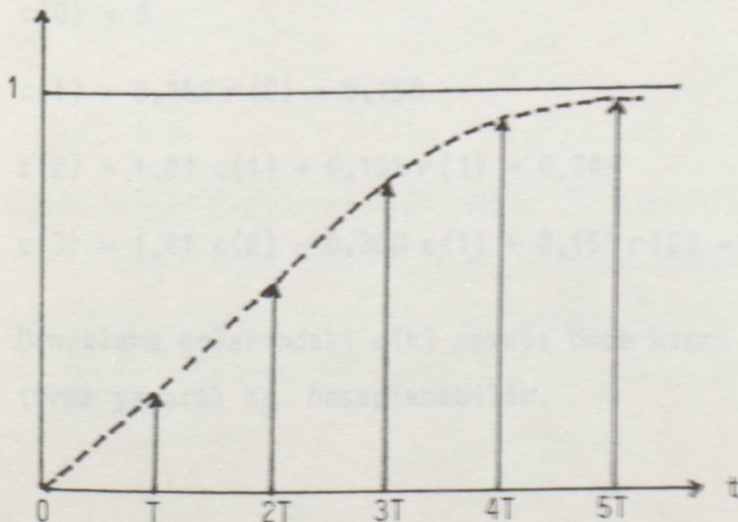
$$R(z) = \frac{z}{z-1} \text{ dir.}$$

Bölme metodu kullanılırsa;

$$z^3 - 2,21 z^2 + 1,58 z - 0,368 \quad \overline{) \quad 0,158 z^{-1} + 0,349 z^{-2} + 0,522 z^{-3} + \dots}$$

$$c(z) = c(0) + c(T) z^{-1} + c(2T) z^{-2} + \dots$$

$$c(nT)$$



Şekil 11. Örneklemeye anındaki cevap.

Buradan;

$$c(0) = 0$$

$$c(T) = 0,158$$

$$c(2T) = 0,349$$

$$c(3T) = 0,522 \quad (56)$$

$c(nT)$ 'nin hesabında n 'nin büyük değerleri için bölme metodu karışıktır. Eşitliği çözmede daha kolay bir metod farklı eşitliklerdir.

Farklı Eşitlikler :

Ters z dönüşümünü bu yolla hesaplamak için (55) eşitliğindeki $c(z)$ 'i alalım.

$$c(z) = \frac{0,158 z}{[(z-1)(z-0,368)+0,158z]} \quad R(z) = \frac{0,158 z}{z^2 - 1,21 z + 0,368} R(z)$$

$$c(z) - 1,21 z^{-1} c(z) + 0,368 z^{-2} c(z) = 0,158 z^{-1} R(z)$$

(20) eşitliği kullanılırsa;

$$c(k) = 1,21 c(k-1) - 0,368 c(k-2) + 0,158 r(k-1) \quad (57)$$

Bu sonucu örnekleme anındaki değerleri elde etmede kullanırsak;

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 0,158 r(0) = 0,158$$

$$c(2) = 1,21 c(1) + 0,158 r(1) = 0,349$$

$$c(3) = 1,21 c(2) - 0,368 c(1) + 0,158 r(2) = 0,522$$

Örnekleme anlarındaki $c(k)$ cevabı önce kısmi kesirlere ayırıp, sonra dönüştürme yaparak t_a hesaplanabilir.

$$c(z) = z \cdot \left[\frac{0,158 z}{(z-1)(z-0,61)^2} \right] = z \cdot \left[\frac{K_1}{z-1} + \frac{c_1}{(z-0,61)^2} + \frac{c_2}{z-0,61} \right]$$

$$K_1 = 1.0 \quad c_1 = -0.24 \quad c_2 = -1.0 \text{ bulunur.}$$

$$c(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0,61} - 0,39 \cdot \frac{0,61 z}{(z-0,61)^2}$$

$$z^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = 1 \quad z^{-1} \left[\frac{z}{z-a} \right] = a^k$$

$$z^{-1} \left[\frac{az}{(z-a)^2} \right] = k a^k$$

Bunlardan;

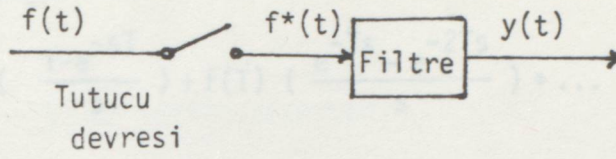
$$c(k) = 1 - (1.0 + 0.39 k) (0.61)^k$$

Bu yolla, herhangi bir k örnekleme anındaki $c(k)$ değeri, bir önceki anlardaki değerler hesaplanmadan, direk olarak hesaplanabilir.

Özet olarak, (20) eşitliği kullanılarak bir z transformasyon ifadesi, $c(k)$ değerlerine farklı eşitlikler yolu ile direk olarak dönüştürülebilir. Buna alternatif olarak, önce kısmi kesirlere ayırıp, sonra dönüştürme yapılabilir. Bu yolda, $c(k)$ için yazılmış bir eşitlik, daha önceki değerlere bağlı olmadan hesaplanabilir.

6: FİLTRELER

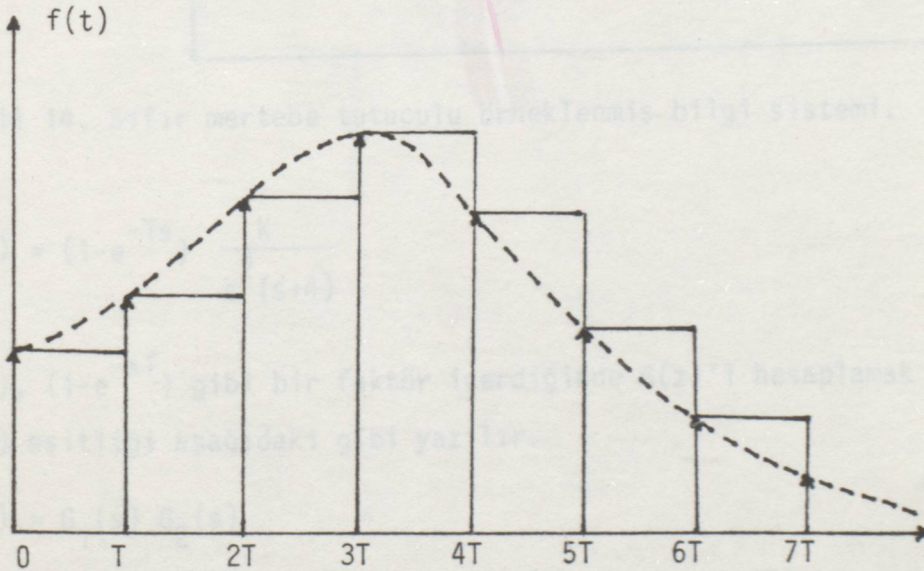
Örneklenmiş bilgi sistemleri genellikle şekil (12)'de gösterildiği gibi bir filtre ile birleştirilirler. İdeal bir filtre örneklenmiş $f^*(t)$ sinyalini sürekli giriş $f(t)$ 'ye dönüştürür. Filtrenin $y(t)$ çıkışı $f(t)$ 'ye eşittir. Eğer ideal bir filtre olabilse örneklenmiş bilgi sistemi, sürekli sistem gibi davranır.



Şekil 12. Örnekleme ve filtrenin şematik gösterilişi.

Sıfır-Mertebe Tutucu:

En çok kullanılan filtre, en son örnekleme değerini bir sonraki örnekleme işareti gelene kadar muhafaza edenidir. Bu çeşit filtre sıfır-mertebe tutucu veya furgon generatör olarak isimlendirilir. Şekil (13)'teki kesikli çizgi sürekli $f(t)$ fonksiyonunu göstermektedir. Örnekleme anlarındaki dik çizgiler impulslardır ve örneklenmiş $f^*(t)$ sinyalini ifade ederler. Çünkü sıfır mertebe tutucu $f(t)$ değerini her hangi bir örnekleme anında muhafaza eder. Şekil (13)'te $y(t)$, basamakların oluşturduğu seriyi ifade eder.



Şekil 13. Sıfır mertebe tutucunun karakteristikleri.

Bu basamaklardan oluşan serinin (darbe fonksiyonları) eşitliği;

$$y(t) = f(0) [u(t) - u(t-T)] + f(T) [u(t-T) - u(t-2T)] + f(2T) [u(t-2T) - u(t-3T)] + \dots$$

Laplace dönüşümü:

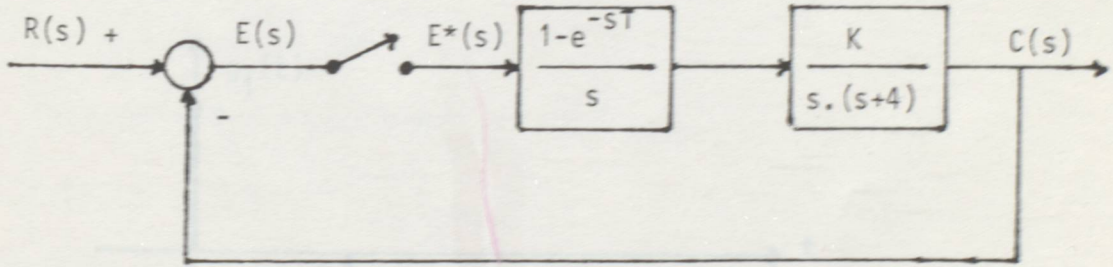
$$Y(s) = f(0) \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) + f(T) \left(\frac{e^{-Ts} - e^{-2Ts}}{s} \right) + \dots$$

$$= \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) [f(0) + f(T) e^{-sT} + f(2T) e^{-2sT} + \dots]$$

$$= \left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) \cdot F^*(s)$$

Bu sonuç sıfır mertebe tutucunun Laplace dönüşümünün $\frac{1-e^{-sT}}{s}$ olduğunu gösterir. (58)

Şekil (8)'deki sisteme bir sıfır-mertebe tutucunun ilave edildiğini düşünelim. Yeni blok diyagram şekil (14)'teki gibidir. Buradan;



Şekil 14. Sıfır mertebe tutuculu örneklenmiş bilgi sistemi.

$$G(s) = (1-e^{-Ts}) \frac{K}{s^2(s+4)} \quad (59)$$

$G(s)$, $(1-e^{-sT})$ gibi bir faktör içerdiğinde $G(z)$ 'i hesaplamak için önce (59) eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \quad (60)$$

$G_1(s) = (1-e^{-sT})$ ve $G_2(s)$, $G(s)$ 'in kalon kısmı olsun. $G_1(s)$, orijindeki birim impulsu, $t = T$ anında negatif birim impulsun Laplace dönüşümüdür.

$g_1(t)$ zaman fonksiyonu Şekil (15)'te gösterilmiştir. $g_1(t)$ zaman fonksiyonu sadece örnekleme anında olduğundan, örneklenmiş $g_1^*(t)$, $g_1(t)$ ile aynı olacaktır. Böylece

$$G_1(s) = G_1^*(s)$$

Bunu (60) eşitliğinde yerine yazarsak;

$$G(s) = G_1^*(s) G_2(s)$$

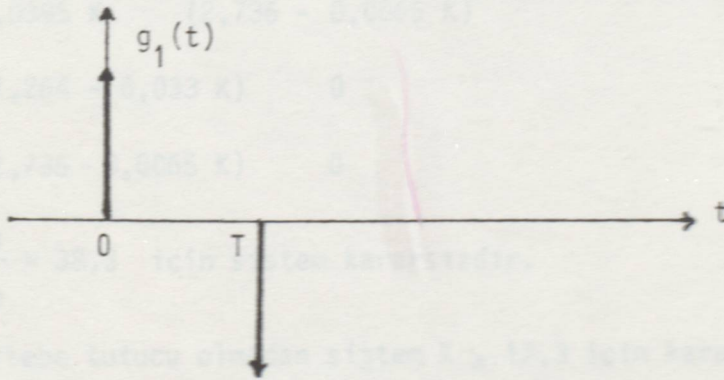
Yıldızlanırsa;

$$G^*(s) = G_1^*(s) G_2^*(s)$$

Buna karşılık gelen z dönüşümü;

$$G(z) = G_1(z) G_2(z) = (1-z^{-1}) G_2(z)$$

$$= \frac{z-1}{z} G_2(z) \quad (61)$$



Şekil 15. Zaman fonksiyonu $g_1(t) = \mathcal{L}^{-1} [G_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}(1-e^{-Ts})$

$$G_2(s) = \frac{K}{s^2(s+4)} = \frac{K}{16} \left(\frac{4}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+4} \right)$$

$$G_2(z) = \frac{K}{16} \left(\frac{4Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-4T}} \right)$$

(61) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$G(z) = \frac{K}{16} \left(\frac{4T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-4T}} \right) = \frac{K}{16} \left(\frac{4T}{z-1} + \frac{e^{-4T}-1}{z-e^{-4T}} \right)$$

$$T = \frac{1}{4} \text{ için ;}$$

$$G(z) = \frac{0,368 K (z + 0,717)}{16(z-1)(z-0,368)} \quad (62)$$

Bu örneklenmiş bilgi sistemi için karakteristik denklem:

$$D_{G(z)} + N_{G(z)} = (z-1)(z-0,368) + 0,023 K (z+0,717) = 0 \quad (63)$$

$$z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \text{ yazılıp Routh kriteri uygulanırsa:}$$

$$0,0395 K \lambda^2 + (1,264 - 0,033 K) \lambda + (2,736 - 0,0065 K) = 0$$

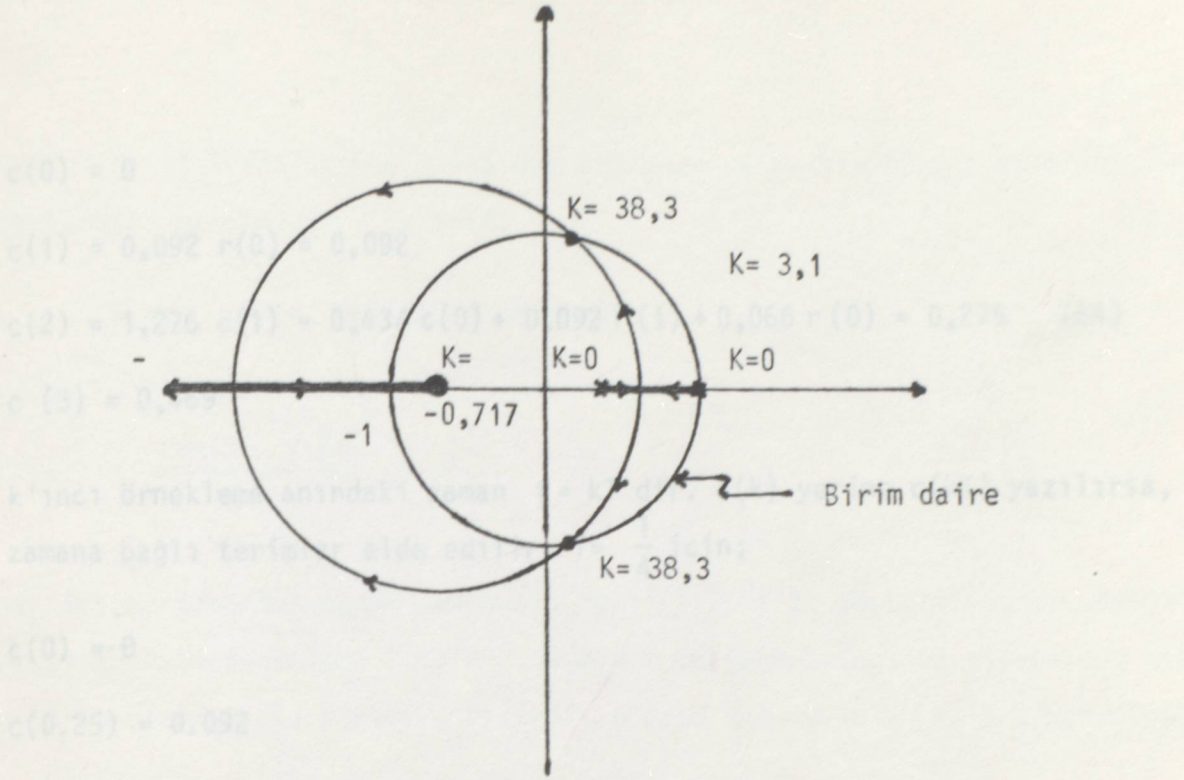
$$\begin{array}{c|cc} \lambda^2 & 0,0395 K & (2,736 - 0,0065 K) \\ \lambda & (1,264 - 0,033 K) & 0 \\ \lambda & (2,736 - 0,0065 K) & 0 \end{array}$$

$$K \geq \frac{1,264}{0,033} = 38,3 \text{ için sistem kararsızdır.}$$

Sıfır mertebe tutucu olmadan sistem $K \geq 17,3$ için kararsızdır.

(63)'teki karakteristik denklemden, kök-yer eğrisi Şekil (16)'daki gibi çizilebilir. Kök-yer eğrisi birim daireyi $K=38,3$ 'te keser. $z=0,65$ 'te $K=3,1$ 'dir.

Şimdi $K=4$ ve giriş birim basamak fonksiyonu ise sistemin cevabını yazalım.



Şekil 16. $(z-1)(z-0,368) + 0,023 K (z-0,717)$ için kök-yer eğrisi.

Çıkışın z dönüşümü;

$$c(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} R(z)$$

$$= \frac{N_{G(z)}}{D_{G(z)} + N_{G(z)}} R(z) = \frac{0,092 (z + 0,717) R(z)}{(z^2 - 1,368 z + 0,368) + 0,092 (z + 0,717)}$$

$$c(z) - 1,276 z^{-1} c(z) + 0,434 z^{-2} c(z) = 0,092 z^{-1} R(z) + 0,066 z^{-2} R(z)$$

(20) eşitliğine uygulanırsa;

$$c(k) = 1,276 c(k-1) - 0,434 c(k-2) + 0,092 r(k-1) + 0,066 r(k-2)$$

$$k < 0 \text{ için } c(k) = r(k) = 0$$

$$k \geq 0 \text{ için } r(k) = 1 \text{ ise}$$

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 0,092 \quad r(0) = 0,092$$

$$c(2) = 1,276 c(1) - 0,434 c(0) + 0,092 r(1) + 0,066 r(0) = 0,275 \quad (64)$$

$$c(3) = 0,469$$

k 'ıncı örnekleme anındaki zaman $t = kT$ dir. $c(k)$ yerine $c(kT)$ yazılırsa, zamana bağlı terimler elde edilir. $T = \frac{1}{4}$ için;

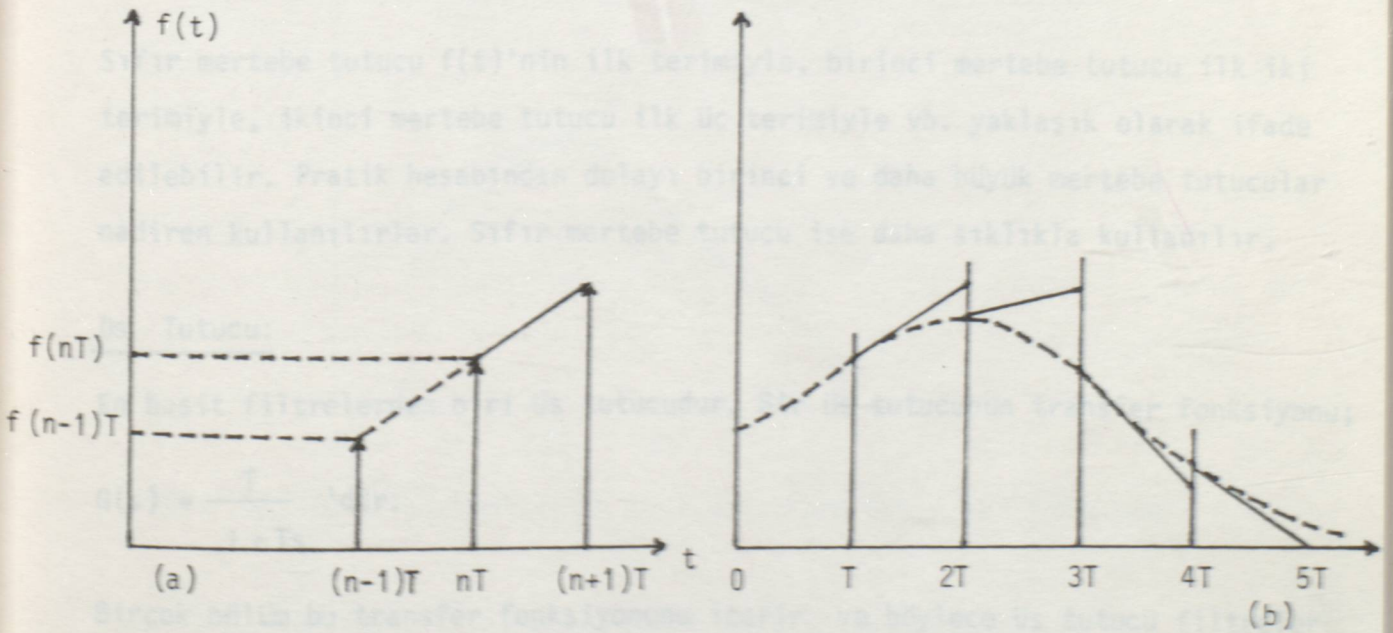
$$c(0) = 0$$

$$c(0,25) = 0,092$$

$$c(0,5) = 0,275 \quad \text{vb.}$$

Birinci-mertebe tutucu

Bir birinci mertebeli tutucunun karakteristikleri Şekil (17.a)'da gösterilmiştir.



Şekil 17. Birinci mertebeli tutucunun karakteristikleri ve davranışı.

$nT < t < (n+1)T$ aralığında çıkış düz doğrudur ve bu bir önceki örnekleme değerlerinde maksimumdur. Buradan;

$$f(t) = f(nT) + f'(nT) (t-nT) \quad nT < t < (n+1)T$$

Eğim:

$$f'(nT) = \frac{f(nT) - f[(n-1)T]}{T}$$

Birinci mertebe tutucunun davranışı Şekil (17.b)'de gösterilmiştir. Kesikli çizgi sürekli fonksiyon $f(t)$ 'dir. Birinci mertebe tutucunun çıkışı düz çizgilerin oluşturduğu seridir. Birinci-mertebe tutucu için Laplace dönüşümü;

$$\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{Ts} \right) (1 - e^{-Ts}) \text{ dir.}$$

Daha yüksek mertebe tutucular için $nT < t < (n+1)T$ aralığında $f(t)$ için yaklaşık kuvvet-serileri yazılırsa;

$$f(t) = f(nT) + f'(nT) (t-nT) + \frac{f''(nT)}{2!} (t-nT)^2 + \dots$$

Sıfır mertebe tutucu $f(t)$ 'nin ilk terimiyle, birinci mertebe tutucu ilk iki terimiyle, ikinci mertebe tutucu ilk üç terimiyle vb. yaklaşık olarak ifade edilebilir. Pratik hesabından dolayı birinci ve daha büyük mertebe tutucular nadiren kullanılırlar. Sıfır mertebe tutucu ise daha sıklıkla kullanılır.

0s Tutucu:

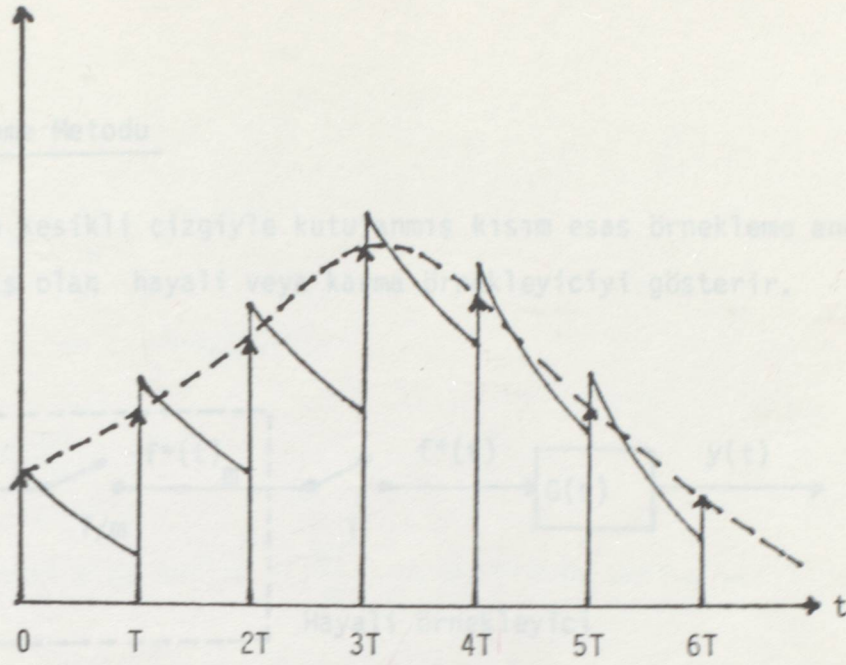
En basit filtrelerden biri 0s tutucudur. Bir 0s tutucunun transfer fonksiyonu;

$$G(s) = \frac{T}{1 + Ts} \text{ 'dir.}$$

Birçok bölüm bu transfer fonksiyonunu içerir ve böylece 0s tutucu filtreler kullanılabilir. Exponansiyel tutucunun çıkışında Şekil (18)'de gösterildiği gibi örnekleme periyodlarında exponansiyel bozulma görülür. Her örnekleme anında, bir basamak değişimi veya sıralı exponansiyel bozulmaların arasında süreksizlik vardır. Her örnekleme anındaki basamak değişiminin miktarı örnekleme anında impulsun kanladığı alana esittir.

Karşı-Örnekleme Metodu

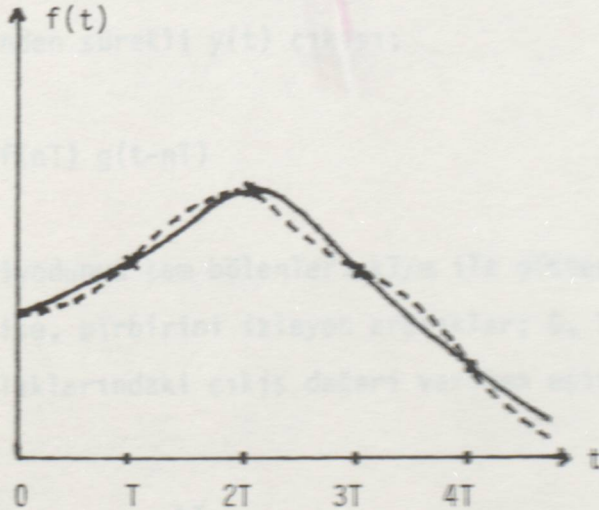
Şekil (20)'de kesikli çizgiyle kutulanmış kısım esas örnekleme anahtarıyla seri laglanmış olan hayali verinin örnekleme anahtarıyla gösterilir.



Şekil 18. Bir üs tutucunun karakteristikleri.

7. ÖRNEKLEME ANLARI ARASINDAKİ CEVAP

Aynı örnekleme değerlerine sahip iki farklı zaman fonksiyonu Şekil (19)'da gösterilmiştir.



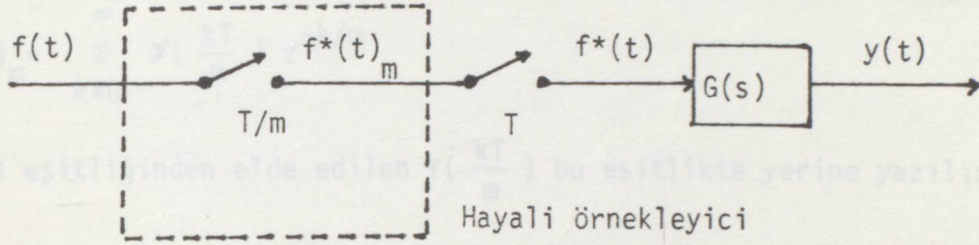
Şekil 19. Örneklemelerde aynı değerlere sahip iki fonksiyon.

Ters z dönüşümü örnekleme anlarında fonksiyonun değerini verir.

$Z^{-1}[F(z)] = f^*(t)$. Örneklemeler arasındaki davranış Lîmîvîllîm Karmîa örnekleme metodu ile hesaplanabilir.

Karma-Örnekleme Metodu

Şekil (20)'de kesikli çizgiyle kutulanmış kısım esas örnekleme anahtarıyla seri bağlanmış olan hayali veya karma örnekleme yöntemi gösterir.



Şekil 20. Hayali örnekleme yöntemi.

Örnekleme periyodu T/m dir. Örnekleme periyodu T/m 'in tam bölenlerinde karma örnekleme yöntemi kapalı, esas örnekleme yöntemi açıktır. Böylece, karma örnekleme yöntemi sistemin çalışmasını etkilemez. Karma örnekleme yöntemi hakikatta varolmaz, fakat sadece takip edilen konunun anlaşılmasındaki yardımcı için kullanılır.

(36) eşitliğinden sürekli $y(t)$ çıkışı;

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) g(t-nT)$$

Örnekleme periyodunun tam bölenleri kT/m ile gösterilir ($k= 0,1,2,...$)

Örneğin $m= 3$ ise, birbirini izleyen aralıklar; $0, T/3, 2T/3, T, 4T/3...$ dır.

Tam bölen aralıklarındaki çıkış değeri verilen eşitlikte $t= kT/m$ yazarak hesaplanır.

$$y\left(\frac{kT}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) g\left(\frac{kT}{m} - nT\right) \quad (65)$$

Tam bölen örnekleme anlarında çıkış $Y(kT/m) = y^*(t)_m$ bir impuls sırası halinde ifade edilebilir.

$$y^*(t)_m = \sum_{k=0}^{\infty} y\left(\frac{kT}{m}\right) u_1\left(t - \frac{kT}{m}\right)$$

Laplace dönüşümü;

$$Y^*(s)_m = \sum_{k=0}^{\infty} Y\left(\frac{kT}{m}\right) e^{-kTs/m}$$

Buna karşılık gelen z dönüşümü;

$$Y(z)_m = \sum_{k=0}^{\infty} Y\left(\frac{kT}{m}\right) z^{-k/m}$$

(65) eşitliğinden elde edilen $Y\left(\frac{kT}{m}\right)$ bu eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} Y(z)_m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) g\left[\left(\frac{k}{m} - n\right)T\right] z^{-k/m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} g\left[\left(\frac{k}{m} - n\right)T\right] z^{-k/m-n} \end{aligned} \quad (66)$$

$m=2$ $n=3$ alınır;

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(3T) z^{-3} g\left[\left(\frac{k}{2} - 3\right)T\right] z^{-(k/2-3)}$$

$$= f(3T) z^{-3} \left[g(0) z^0 + g\left(\frac{T}{2}\right) z^{-1/2} + g(T) z^{-1} + g\left(\frac{3T}{2}\right) z^{-3/2} + \dots \right]$$

$$= f(3T) z^{-3} \sum_{L=0}^{\infty} g\left(\frac{LT}{m}\right) z^{-L/m}$$

Gerçek bir fiziki sistemde $g(t)$ cevap impulsu negatif zamanlarda sıfırdır.

Böylece ilk terim $k=6$ 'da $g\left[\left(k/2-3\right)T\right] = g(0)$ olur. Bir önceki sonuçtan

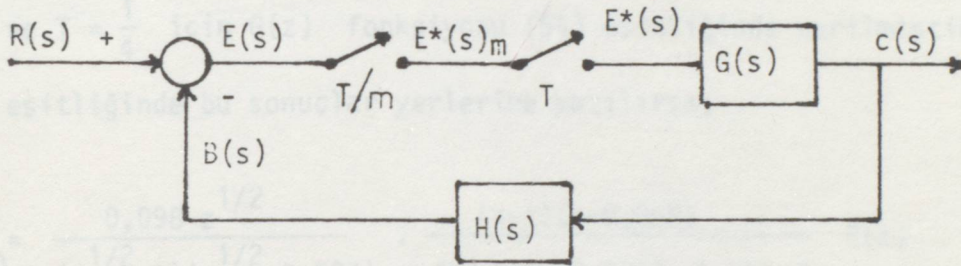
(66) eşitliği genelleştirilirse;

$$Y(z)_m = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \sum_{L=0}^{\infty} g\left(\frac{LT}{m}\right) z^{-L/m} \quad (67)$$

$$= F(z) G(z)_m$$

$$G(z)_m = [G(z)]_{z = z^{1/m}} \\ T = T/m$$

$G(z)_m$ $G(z)$ 'de z yerine $z^{1/m}$ ve T yerine T/m koyularak hesaplanabilir (67) eşitliğinde elde edilen sonuç $k/m - n = L/m$ $L = 0, 1, 2, \dots$ yazılarak (66) eşitliğinden elde edilebilir. Şekil (21) için $c(z)_m$ eşitliği yazılmak istenirse;



Şekil 21. Hayali örnekleyici ile birlikte bir örneklenmiş bilgi sistemi.

$$c(z)_m = E(z) G(z)_m$$

$$E(s) = R(s) - E^*(s) G(s) H(s)$$

Yıldızlanırsa;

$$E^*(s) = R^*(s) - E^*(s) GH^*(s)$$

$$E(z) = R(z) - E(z) GH(z)$$

$E(z)$ 'i bu eşitlikten çekip, ilk eşitlikte yerine yazarsak;

$$c(z)_m = \frac{G(z)_m}{1+HG(z)} R(z) \quad (68)$$

Bir önceki kavramları tanımlamak için, Şekil (8)'deki sistemde giriş birim basamak fonksiyonu ise örnekleme anları arasındaki cevabı hesaplayalım.

$K=1$ ve $T = \frac{1}{u}$ için örnekleme anlarındaki cevap Şekil (11)'de gösterilmiştir.

Bu sistem için $HG(z) = G(z)$ olduğu (49) eşitliğinde verilmiştir. T yerine

$T/m = T/2$ ve z yerine $z^{1/m} = z^{1/2}$ yazılırsa;

$$G(z)_m = \frac{z^{1/2} (1-e^{-2T}) K/4}{(z^{1/2}-1)(z^{1/2}-z^{-2T})}$$

$K = 1$ ve $T = \frac{1}{4}$ için;

$$G(z)_m = \frac{0,098 z^{1/2}}{(z^{1/2}-1)(z^{1/2}-0,607)}$$

$K = 1$ ve $T = \frac{1}{4}$ için $G(z)$ fonksiyonu (54) eşitliğinde verilmiştir.

(68) eşitliğinde bu sonuçlar yerlerine yazılırsa;

$$c(z)_m = \frac{0,098 z^{1/2}}{(z^{1/2}-1)(z^{1/2}-0,607)} \cdot \frac{(z-1)(z-0,368)}{[(z-1)(z-0,368)+0,158 z]} R(z)$$

$\omega = z^{1/2}$ dönüşümü yapılırsa;

$$c(\omega)_m = \frac{0,098 \omega (\omega^4 - 1,368 \omega^2 + 0,368)}{(\omega-1)(\omega-0,607)(\omega^4 - 1,21 \omega^2 + 0,368)} R(\omega)$$

içler-dışlar çarpımı yapılırsa;

$$\begin{aligned} & (\omega^6 - 1,61 \omega^5 - 0,6 \omega^4 + 1,95 \omega^3 - 0,37 \omega^2 - 0,59 \omega + 0,22) c(\omega)_m \\ &= (0,098 \omega^5 - 0,134 \omega^3 + 0,036 \omega) R(\omega) \end{aligned} \quad (69)$$

$z^{1/2} = \omega$ dönüşümünde şuna dikkat edilmelidir.

$$c(z)_m = c(0) + c\left(\frac{T}{2}\right) z^{-1/2} + c(T) z^{-1} + c\left(\frac{3T}{2}\right) z^{-3/2} + \dots$$

$$c(\omega)_m = c(0) + c\left(\frac{T}{2}\right) \omega^{-1} + c(T) \omega^{-2} + c\left(\frac{3T}{2}\right) \omega^{-3} + \dots$$

Farklılaştırılmış eşitlik (69) eşitliği ile birleştirilirse;

$$\begin{aligned} c(k) &= 1,61 c(k-1) + 0,6 c(k-2) - 1,95 c(k-3) + 0,37 \\ &c(k-4) + 0,59 c(k-5) - 0,22 c(k-6) + 0,098 r(k-1) \\ &- 0,134 r(k-3) + 0,036 r(k-5) \end{aligned} \quad (70)$$

Çünkü

$$R(z) = r(0) + r(T) z^{-1} + r(2T) z^{-2} + \dots$$

z^{-1} yerine ω^{-2} yazılırsa;

$$R(\omega) = r(0) + 0.\omega^{-1} + r(T) \omega^{-2} + 0.\omega^{-3} + r(2T) \omega^{-4} + \dots$$

ω' nın 1,3,5, ... gibi örnekleme anlarında $r = 0$ dır.

(70) eşitliği tam bölen örnekleme anlarındaki değerlerin bulunmasında kullanılırsa;

$$c(0) = 0$$

$$c(1) = 0,098 r(0) = 0,098$$

$$c(2) = 1,61 c(1) = 0,158$$

$$\begin{aligned} c(3) &= 1,61 c(2) + 0,60 c(1) + 0,098 r(2) - 0,134 r(0) \\ &= 0,277 \end{aligned}$$

$$c(4) = 0,350$$

$$c(5) = 0,458 \quad (71)$$

k yerine $\frac{kT}{2}$ yazılırsa; örnekleme anlarında

$c(0), c(1), c(2), c(3), \dots$ cevapları, $c(0), c(0.5 T), c(T), c(1,5 T), \dots$ zamanlarındaki cevaplara karşılık gelir.

Ters dönüşüm aynı zamanda uzun bölme metodu ile de yapılabilir.

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \quad R(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^2-1} \text{ dir.}$$

$R(\)$ 'nın bu değerini (69) eşitliğinde yerine yazıp $c(\omega)_m$ 'in payını paydasına bölersek; cevabın katsayı değerleri bulunmuş olur.

8. FARKLI BİLGİ SİSTEMLERİ

Bir sistem farklı bilgi sistemi gibi davranırsa, aşağıdaki farklı hal eşitlikleri ile tanımlanabilir.

$$x[(k+1)T] = Ax(kT) + bf(kT) \quad (72)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$ için sistem eşitlikleri;

$$x(T) = Ax(0) + bf(0)$$

$$x(2T) = Ax(T) + bf(T)$$

$$x(3T) = Ax(2T) + bf(2T)$$

.....

$$x(kT) = Ax[(k-1)T] + bf[(k-1)T]$$

$x(T)$ 'yi ikinci eşitlikte;

$x(2T)$ 'yi üçüncü eşitlikte

gibi yerlerine yazılırsa;

$$x(kT) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} bf(iT) \quad (73)$$

Laplace dönüşümü, sürekli sistemler için halgeçiş eşitliklerinin çözümünde kullanılır. Benzer olarak, z dönüşüm metodları farklı bilgi sistemlerinin hal-geçiş eşitliklerinin çözümünde daha kolaylık sağlar.

(72) eşitliğinin z dönüşümü;

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + bF(z)$$

veya ;

$$[zI - A] X(z) = zx(0) + bF(z)$$

Her iki taraf $[zI - A]^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$X(z) = [zI - A]^{-1} zx(0) + [zI - A]^{-1} bF(z) \quad (74)$$

Dönüşüm yapılırsa;

$$x(kT) = Z^{-1} \{ [zI - A]^{-1} z \} x(0) + Z^{-1} \{ [zI - A]^{-1} bF(z) \} \quad (75)$$

(10.73) eşitliği ile karşılaştırma şunu gösterir ki;

$$A^k = Z^{-1} \{ [zI - A]^{-1} z \}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} bf(iT) = Z^{-1} \{ [zI - A]^{-1} bF(z) \}$$

Genel olarak 10.75 eşitliği aşağıdaki formda kullanılır.

$$x(kT) = Z^{-1} \{ [zI - A]^{-1} [zx(0) + bF(z)] \} \quad (76)$$

Farklı Eşitlikler:

Bu amaçla kullanılan genel programlama metodu aşağıda gösterilmiştir.

Genel programlamada farklı eşitlik;

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) c(t) = (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n) f(t) \quad (E.16) \text{ ile verilir.}$$

Buna karşılık gelen Durum-uzay gösterilişi şöyledir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} f(t) \quad (E.17)$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0$$

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1 \quad (E.18)$$

$$h_3 = b_3 - a_3 b_0 - a_2 h_1 - a_1 h_2$$

$$h_n = b_n - a_n b_0 - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_2 - \dots - a_1 h_{n-1}$$

$c(t)$ yerine $c(kT)$, $Dc(t)$ yerine $c[(k+1)T]$

$D^2 c(t)$ yerine $c[(k+2)T]$ konulursa;

$$c[(k+n)T] + a_1 c[(k+n-1)T] + \dots + a_{n-1} c[(k+1)T] +$$

$$a_n c(kT) = b_0 f[(k+n)T] + b_1 f[(k+n-1)T] + \dots$$

$$+ b_{n-1} f[(k+1)T] + b_n f(kT) \quad (77)$$

Buna karşılık gelen uzay-durum gösterilişi:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ \vdots \\ x_n[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ \vdots \\ x_n(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} f(kT) \quad (78)$$

$$x_1(kT) = c(kT) - b_0 f(kT)$$

$$x_2(kT) = x_1[(k+1)T] - h_1 f(kT)$$

$$x_n(kT) = x_{n-1}[(k+1)T] - h_{n-1} f(kT)$$

ve;

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0$$

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1$$

$$h_n = b_n - a_n b_0 - a_{n-1} h_1 - \dots - a_2 h_{n-2} - a_1 h_{n-1}$$

kT yerine k, (k+1)T yerine (k+1), (k+n)T yerine (k+n) yazılırsa k'ıncı örnekleme anındaki eşitlik elde edilir.

Örnek 1:

Farklı eşitliği;

$c(k+2) + 0,7 c(k+1) + 0,1 c(k) = 2f(k+1) + f(k)$ olan sistemin durum-uzay gösterilişini hesaplayınız.

$$k \leq 0 \text{ için } c(k) = 0$$

$$k < 0 \text{ için } f(k) = 0$$

$$k \geq 0 \text{ için } f(k) = 1 \text{ alınacaktır.}$$

Çözüm :

Bu farklı eşitlik (77) eşitliğine uymaktadır. $a_1 = 0.7$, $a_2 = 0.1$, $b_0 = 0$, $b_1 = 2$ ve $b_2 = 1$ 'dir.

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 2 - 0,7 \cdot 0 = 2$$

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1 = 1 - 0 - 0,7 \cdot 2 = -0,4$$

Matris şekli (78) eşitliğine göre;

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -0.1 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.4 \end{bmatrix} f(k)$$

$$x_1(k) = c(k)$$

Bu matrisi açarsak;

$$x_1(k+1) = x_2(k) + 2f(k)$$

$$x_2(k+1) = -0.1 x_1(k) - 0.7 x_2(k) - 0.4 f(k) \quad (79)$$

Birinci eşitlikten $x_2(k)$ çekilirse;

$$x_2(k) = x_1(k+1) - 2f(k) \text{ olur.}$$

k yerine (k+1) yazılırsa;

$$x_2(k+1) = x_1(k+2) - 2f(k+1)$$

Bulunan $x_2(k)$ ve $x_2(k+1)$ değerleri 2. eşitlikte yerlerine yazılırsa;

$$x_1(k+2) - 2f(k+1) = -0.1 x_1(k) - 0.7 [x_1(k+1) - 2f(k)] - 0.4f(k)$$

$x_1(k) = c(k)$ ile yeniden düzenlenirse orjinal farklı eşitlik elde edilir.

$k = -1$ için esas farklı eşitlik:

$$c(1) + 0.7 c(0) + 0.1 c(-1) = 2f(0) + f(-1)$$

Eğer; $c(0) = c(-1) = f(-1) = 0$ ve

$$f(0) = 1 \text{ ise; } c(1) = 2 \text{ 'dir.}$$

Başlangıç koşulları; $x_1(0) = c_1(0) = 0$ ve

$$x_2(0) = x_1(1) - 2f(0) = 2 - 2 = 0$$

$$x_1(1) = c(1) = 2$$

$$F(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{ için;}$$

$$[z \times (0) + bF(z)] = \frac{z}{z-1} \begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.4 \end{bmatrix}$$

$$[zI - A]^{-1} \quad \text{matrisi;}$$

$$[zI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1.0 \\ 0.1 & z+0.7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z+0.7 & 1.0 \\ -0.1 & z \end{bmatrix}}{(z+0.2)(z+0.5)}$$

(75) eşitliğinden;

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = z \frac{\begin{bmatrix} z+0.7 & 1.0 \\ -0.1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.4 \end{bmatrix}}{(z-1)(z+0.2)(z+0.5)} = z \frac{\begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.4 \end{bmatrix}}{(z-1)(z+0.2)}$$

Kısmi-kesirlere ayrılırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+0.2} \right) \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+0.2} \right) \end{bmatrix}$$

Dönüşüm yapılırsa;

$$x_1(k) = \frac{5}{3} [1 - (-0.2)^k]$$

$$x_2(k) = -\frac{1}{3} [1 - (-0.2)^k]$$

$$c(k) = x_1(k)$$

Bu örnekte gösterildiği gibi, z dönüşüm metodunda $[zI - A]^{-1}$ ters matrisini hesaplamak önemlidir. Yüksek mertebeli sistemler için bu hayli zaman alıcı olabilir. Bu yüzden sürekli sistemlerde sinyal akış diyagramı metodu daha kullanışlıdır.

Sinyal-Akış Diyagramı Metodu:

Farklı bilgi sistemi eşitliğinin z dönüşümü (72) eşitliğindeki gibi;

$$zX(z) - zx(0) = AX(z) + bF(z)$$

Sinyal akış diyagramını çizebilmek için yukarıdaki eşitliği aşağıdaki şekilde yazalım.

$$X(z) = x(0) + z^{-1} [AX(z) + bF(z)]$$

Bu sinyal akış diyagramı için girişler, başlangıç şartları $x(0)$ ve kuvvet fonksiyonu $F(z)$ 'nin transformasyonudur. Çıkış noktaları hal değişkenlerinin $X(z)$ transformudur. Aşağıdaki matris şekli sinyal akış diyagramında direk olarak kullanılabilir.

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) & \dots & A_{1n}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) & \dots & A_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(z) & A_{n2}(z) & \dots & A_{nn}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1(z) \\ \psi_2(z) \\ \vdots \\ \psi_n(z) \end{bmatrix} F(z)$$

(74) eşitliğiyle birleştirilirse sağ taraftaki ilk matris $[zI-A]^{-1} z$ ve son matris $[zI-A]^{-1} b$ dir.

Örnek 2: Örnek 1' sinyal akış diyagramı metodunu kullanarak çözünüz.

(10.79) eşitliğindeki z dönüşümü;

$$z X_1(z) - zx_1(0) = X_2(z) + 2F(z)$$

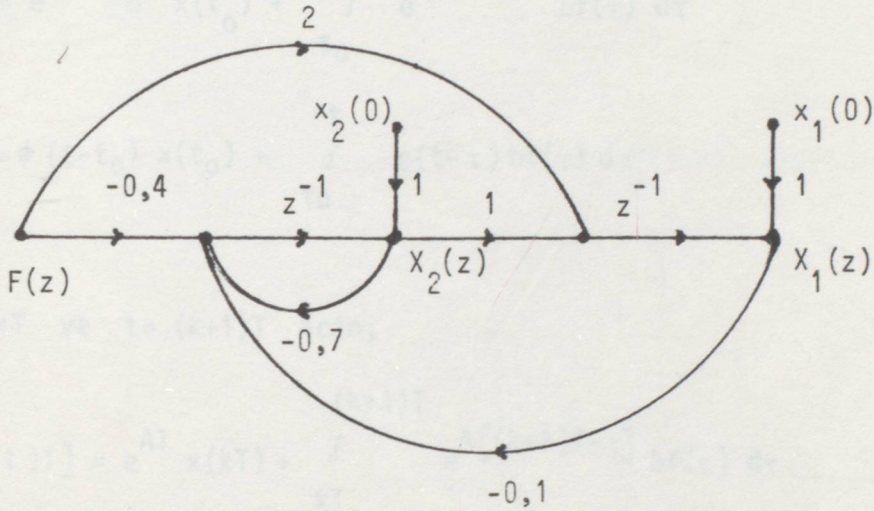
$$z X_2(z) - zx_2(0) = -0.1 X_1(z) - 0.7 X_2(z) - 0.4 F(z)$$

Sinyal akış diyagramını çizmek için bu eşitlikleri aşağıdaki formda yazalım.

$$X_1(z) = x_1(0) + z^{-1} [X_2(z) + 2F(z)]$$

$$X_2(z) = x_2(0) + z^{-1} [-0,1 X_1(z) - 0,7 X_2(z) - 0,4 F(z)]$$

Sonuç sinyal akış diyagramı Şekil (22) 'de gösterilmiştir.



Şekil 22. Sinyal akış diyagramı.

Mason kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \cdot (z+0,7) & z \\ -0,1 z & z^2 \\ (z+0,2) & (z+0,5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{z+0,2} \\ \frac{-0,4}{z+0,2} \end{bmatrix} F(z)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad \text{ve} \quad F(z) = \frac{z}{z-1} \quad \text{ise}$$

Örnek 1'deki sonucun aynısı yukarıdaki eşitlikten elde edilir.

Sürekli Sistemler için Farklı Bilgi Gösterilişi:

Sürekli sistemler için durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x} = Ax + bf(t)$$

$t = 0$ zamanındaki çözüm;

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} b f(\tau) d\tau \quad (E.80)$$

Bu, sürekli sistem için hal-geçiş eşitliğidir.

t_0 anındaki çözüm:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} b f(\tau) d\tau \quad (E.82)$$

$$= \phi(t-t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) b f(\tau) d\tau$$

$t_0 = kT$ ve $t = (k+1)T$ için;

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} b f(\tau) d\tau$$

$f(\tau)$ 'nin $kT < t < (k+1)T$ aralığında sürekli sabit kaldığını kabul edelim, $f(\tau)$ yerine $f(kT)$ yazalım. $\lambda = (k+1)T - \tau$ ise

$$d\tau = -d\lambda \quad \text{dır.}$$

$$x[(k+1)T] = e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda b f(kT)$$

Bu sonucu aşağıdaki formda ifade edersek;

$$x[(k+1)T] = \phi(T) x(kT) + G(T) f(kT) \quad (80)$$

$$\phi(T) = e^{AT} \quad \text{ve} \quad G(T) = \left[\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right] b$$

Bu, sürekli sistemler için farklı-bilgi gösterilişidir. $\dot{x} = Ax + bf(t)$

$\phi(T)$; A 'ya, $G(T)$; b 'ye karşılık gelir.

Örnek 3:

Aşağıdaki diferansiyel eşitlik için farklı zaman durum-uzay gösterilişini hesaplayınız.

$$\ddot{c} + 3\dot{c} + 2c = f(t)$$

$T = 0,2$ s dir.

Çözüm :

$c = x_1$ ve $\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$ bunlar durum-uzay gösterilişleridir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$\phi(t) = e^{AT}$ matrisi;

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t}) & (e^{-t} - e^{-2t}) \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t}) & (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

$s^2 + 3s + 2$

t yerine T yazılırsa; $\phi(T)$ matrisi elde edilir. $G(T)$ matrisi ise;

$$G(T) = \begin{bmatrix} \int_0^T (2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}) d\lambda & \int_0^T (e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}) d\lambda \\ \int_0^T (-2e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda}) d\lambda & \int_0^T (-e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda}) d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 2e^{-T} + e^{-2T}) \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bu sonuçlar (80) eşitliğinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} x_1 [(k+1)T] \\ x_2 [(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-T} - e^{-2T}) & (e^{-T} - e^{-2T}) \\ (-2e^{-T} + 2e^{-2T}) & (-e^{-T} + 2e^{-2T}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{(1-2e^{-T} + e^{-2T})}{2} \\ (e^{-T} - e^{-2T}) \end{bmatrix} f(kT) \quad (81)$$

$T = 0,2$ değeri verildiğine göre;

$$\begin{bmatrix} x_1 [(k+1)T] \\ x_2 [(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,968 & 0,149 \\ -0,298 & 0,521 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,016 \\ 0,149 \end{bmatrix} f(kT)$$

Bu form (72) eşitliğine uymaktadır. Sağ taraftaki ilk matris A'ya, son matris b'ye karşılık gelir.

Örnekleme anları arasındaki cevap:

$0 \leq \Delta < 1$ aralığında $t_0 = kT$ ve $t = (k + \Delta)T$

konularak (E.73) eşitliği;

$$x[(k + \Delta)T] = e^{A\Delta T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k + \Delta)T - \tau]} b f(\tau) d\tau$$

$(k + \Delta)T - \tau$ yerine λ konulursa,

$$d\tau = -d\lambda$$

$$x[(k+\Delta)T] = e^{A\Delta T} x(kT) + \int_0^{\Delta T} e^{A\lambda} d\lambda b f(kT) \quad (81)$$

$$= \phi(\Delta T) x(kT) + G(\Delta T) f(kT) \quad (82)$$

$$\phi(\Delta T) = e^{A\Delta T} \quad \text{ve} \quad G(\Delta T) = \begin{bmatrix} \Delta T & e^{A\lambda} d\lambda \\ 0 & \end{bmatrix} b$$

$\phi(\Delta T)$ fonksiyonu $\phi(T)$ fonksiyonunda T yerine ΔT konularak bulunmuştur.

$G(\Delta T)$ ise $G(T)$ fonksiyonunda T yerine ΔT konularak bulunmuştur.

Örnek 4:

Örnek 3'teki sistem için örnekleme anları aralığının tam yarısındaki cevap için farklı bilgi gösterilişini hesaplayınız.

Çözüm :

(10.81) eşitliğinin $\phi(T)$ ve $G(T)$ matrislerinde T yerine ΔT yazarak; $\phi(\Delta T)$ ve $G(\Delta T)$ matrisleri elde edilir. (10.82) eşitliği uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+\Delta)T] \\ x_2[(k+\Delta)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-\Delta T} - e^{-2\Delta T}) & (e^{-\Delta T} - e^{-2\Delta T}) \\ (-2e^{-\Delta T} + 2e^{-2\Delta T}) & (-e^{-\Delta T} + 2e^{-2\Delta T}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1-2e^{-\Delta T} + e^{-2\Delta T}}{2} \\ (e^{-\Delta T} - e^{-2\Delta T}) \end{bmatrix} f(kT)$$

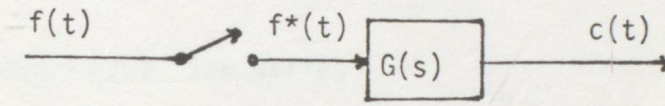
$\Delta = 0,5$ ve $T = 0,2$ için $\Delta T = 0,1$ 'dir.

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+0,5)T] \\ x_2[(k+0,5)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,991 & 0,086 \\ -0,172 & 0,733 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,009 \\ 0,086 \end{bmatrix} f(kT)$$

Şurası önemlidir ki örnekleme anları arasındaki cevabın hesabında bir önceki örnekte kullanılan $x(kT)$ değerlerinin hesabı için (81) eşitliğinin kullanılması önemlidir.

Örnekleme Anlarındaki Cevap:

Şekil (23)'te gösterildiği gibi sürekli $f(t)$ sinyali her T anında örneklenmektedir. $f^*(t)$ işareti, sistemi impulslar serisi halinde ifade eder.



Şekil 23. $f^*(t)$ girişli sistem.

Örnek 5:

Şekil (23)'te gösterilen sistem için, transfer fonksiyonu $G(s) = \frac{1}{s+1}$, giriş $f(t)$ ise, birim basamak fonksiyonudur. Örnekleme periyodu $T = 1$ s dir. Örnekleme anlarındaki cevabı hesaplamak için z dönüşüm metodunu kullanın ve sonra örnekleme anları arasındaki cevap için $x[(k + \Delta)T]$ eşitliğini durum-uzay metodunu kullanarak hesaplayınız. İlk iki örnekleme anından hemen önce ve hemen sonraki cevap değerlerini bulunuz.

Çözüm :

Şekil (23)'ten;

$$c(s) = G(s) F^*(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \text{ olsun.}$$

Sonuç z dönüşümü;

$$c(z) = G(z) F(z) = \frac{z}{z-e^{-T}} \cdot \frac{z}{z-1} = z \cdot \left[\frac{z}{(z-1)(z-0,368)} \right]$$

$$= 1,58 \left(\frac{z}{z-1} - \frac{0,368 z}{z-0,368} \right)$$

Dönüşümle örnekleme anlarındaki cevap hesaplanırsa;

$$c(k) = 1,58 [1 - 0,368 (0,368)^k] = 1,58 [(1 - (0,368)^{k+1})]$$

$$c(0) = 1.0$$

$$c(1) = 1.368$$

$$c(2) = 1.503$$

Bu problemi uzay-durum metodu ile çözersek, k'ıncı örnekleme periyodunda;

$kT \leq t < (k+1)T$ ise giriş;

$$f^*(t) = f(kT) u_1(t-kT)$$

$u_1(t-kT)$; $t_0 = kT$ zamanı kadar gecikmiş birim impuls fonksiyonudur.

Sistemin çalışması için yazılacak diferansiyel eşitlik;

$$c(t) = \frac{1}{D+1} f^*(t)$$

$$\dot{c} + c = f^*(t)$$

$c = x$ ve $\dot{c} = \dot{x}$ yazılırsa; durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x} = -x + f^*(t)$$

Laplace dönüşümü:

$$sX(s) - x(kT) = -X(s) + F^*(s)$$

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = f(kT)$$

Zamandaki gecikmeden dolayı, dönüşümdeki her terim e^{-t_0s} ile çarpılır

$t_0 = kT$ dir. Bu problemin daha kolay çözümü için zamanda gecikme olmadığı kabul edilir, sonra sonuç ters dönüşümde t yerine $t - kT$ yazılır.

$$X(s) = \frac{1}{s+1} x(kT) + \frac{1}{s+1} F^*(s)$$

$$= \frac{1}{s+1} x(kT) + \frac{1}{s+1} f(kT)$$

Dönüşüm yapıp t yerine $t - kT$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-(t-kT)} x(kT) + e^{-(t-kT)} f(kT) \\ &= e^{-t^*} x(kT) + e^{-t^*} f(kT) \end{aligned}$$

$$kT \leq t < (k+1)T \quad t^* = t - kT$$

$$t = (k+\Delta)T \text{ için } t^* = \Delta T \text{ dir.}$$

$$x[(k+\Delta)T] = e^{-\Delta T} x(kT) + e^{-\Delta T} f(kT)$$

Birim basamak fonksiyonu için $k < 0$ 'da $f(kT) = 0$, $k \geq 0$ 'da $f(kT) = 1$ dir.

Sıfır başlangıç koşulları için $c(0) = x(0) = 0$ 'dır. Her örnekleme anından hemen önceki cevap $\Delta \rightarrow 1$ 'e yaklaşırken Δ yerine 1 yazarak hesaplanır.

$T=1$ ve $\Delta = 1$ için

$$e^{-\Delta T} = e^{-1} = 0,368 \text{ dir.}$$

$$x[(k+1)T] = 0,368 x(kT) + 0,368 f(kT)$$

$k = 0, 1, 2$ için değerleri hesaplanırsa;

$$x(1) = 0 + 0,368 (1) = 0,368$$

$$x(2) = 0,368 (0,368) + 0,368 (1) = 0,503$$

$$x(3) = 0,368 (0,503) + 0,368 (1) = 0,533$$

$x(1)$, $x(2)$ ve $x(3)$ değerleri, birinci, ikinci ve üçüncü örnekleme anlarından hemen önceki değerlerdir.

Her örnekleme anından hemen sonraki cevabı bulmak için Δ sıfıra yaklaştırılır. Dolayısıyla

$$e^{-\Delta T} \approx 1 \text{ olur.}$$

$$x[(k+0)T] = x(kT) + f(kT)$$

$k = 0, 1$ ve 2 için değerler bulunursa;

$$x(0+) = 0 + 1.0 = 1.0$$

$$x(1+) = 0.368 + 1.0 = 1.368$$

$$x(2+) = 0.503 + 1.0 = 1.503 \text{ olur.}$$

Bu değerler $c(z)$ ters dönüşümü ile bulunmuştur. 4.kısımda belirtildiği gibi z dönüşüm metodu her örnekleme anından sonraki değerleri verir. Bu örnek $f(kT)$ değerlerinin örnekleme anlarında örneklenmiş işaret olduğunu, $[x(k+1)T]$ değerlerinin $k+1$ 'inci örnekleme anından hemen önceki değerler olduğunu ve $x(kT)$ değerlerinin k 'ıncı örnekleme anından hemen önceki değerler olduğunu göstermektedir. Bu örnekte bahsedildiği gibi, giriş bir impuls ve paydanın mertebesi payın mertebesinden 1 büyükse ($G(s) = 1/s+1$) örnekleme anlarında cevap fonksiyonunda bir süreksizlik vardır. Paydanın derecesi payın derecesinden 2 veya daha fazlaysa cevap fonksiyonu süreklidir.

Bu analiz örnekleme anlarındaki cevabı daha açık bir şekilde incelemektedir. $f^*(t)$ fonksiyonu her $T = 1$ saniyelerinde bir birim impuls dizisidir.

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \text{ için; birim impuls cevap;}$$

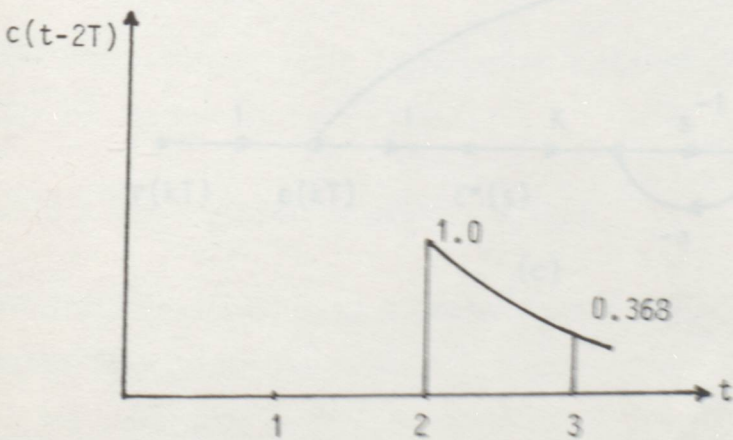
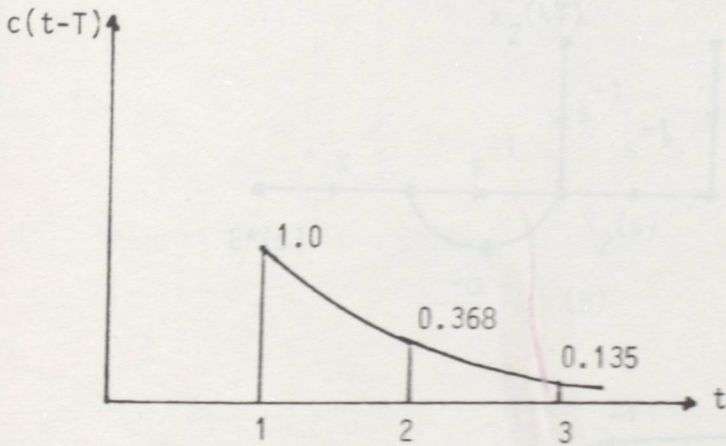
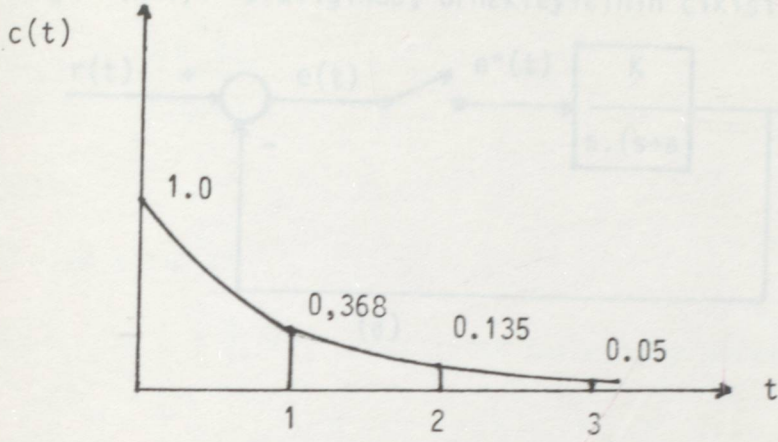
$$c(t) = e^{-t} \text{ dir.}$$

Şekil (24)'teki topolojik graf $t = 0$ anında oluşan impuls cevabını gösterir. $t = 0+$ anında $c(0+) = 1$ dir ve bir sonraki örnekleme anından hemen önceki cevap $c(1-) = 0,368$ dir. $t = T = 1$ anında oluşan impulsun neden olduğu cevap (24) şekilde ortadaki grafikte gösterilmiştir.

$1 \leq t < 2$ için, $c(t)$ cevabı, $t = 0$ anında meydana gelen impulstan dolayı oluşan cevapla, $t = 1$ anındaki impulstan dolayı oluşan cevabın toplamına eşittir. $t, 1$ 'den biraz daha büyükse $c(1+) = 1.0 + 0,368 = 1.368$ dir.

$t; 2$ 'den biraz küçükse $c(2-) = 0,368 + 0,135 = 0,503$ 'tür. $t = 2T = 2$ anında meydana gelen impulstan dolayı oluşan cevap şekil (24)'te dipteki grafikte gösterilmiştir. $2 \leq t < 3$ için, $c(t)$ cevabı, $t = 0, t = 1$ ve $t = 2$ anında-

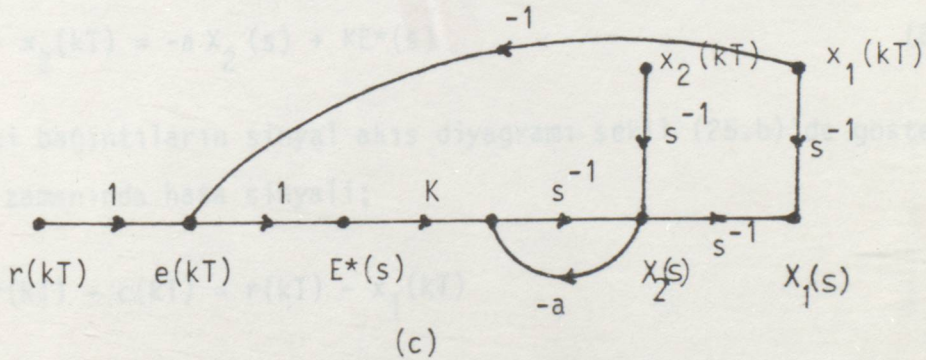
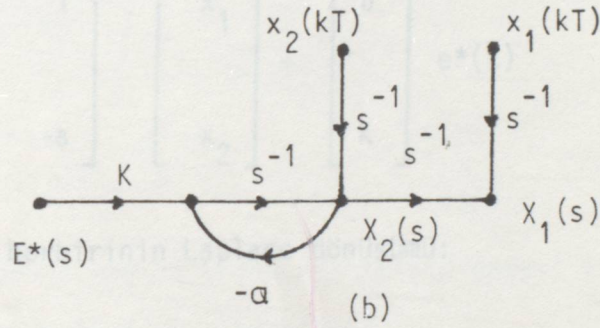
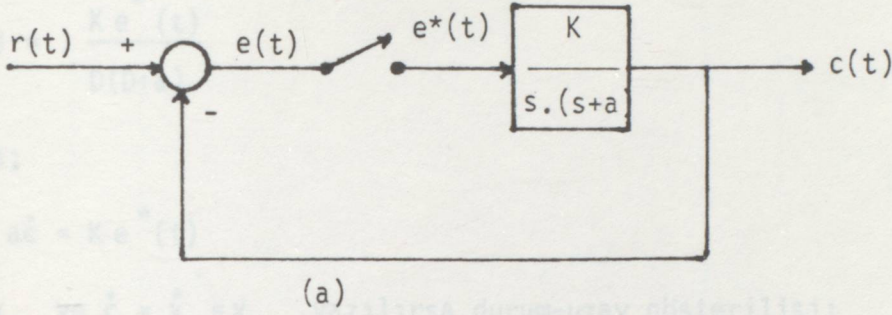
ki impulsların meydana getirdiği cevapların toplamına eşittir. t 'nin 2 den biraz büyük olduğu anlarda $c(2+) = 0.135 + 0.368 + 1.0 = 1.503$ t 'nin 3'ten biraz küçük olduğu anlarda $c(3-) = 0.050 + 0.135 + 0.368 = 0.533$ 'tür.



Sekil 24. (a) $t=0$ (b) $t=T=1$ ve (c) $t=2T=2$ impulslarında sistemin cevabı

Örneklenmiş Bilgi Kontrol Sistemleri:

Şekil (25.a)'da gösterilen sistem için, örnekleyicinin çıkışı $e^*(t)$ 'dir. $kT \leq t < (k+1)T$ aralığında, örnekleyicinin çıkışı birim impuls $e(kT)$ 'dir.



Şekil 25. Örneklenmiş bilgi sistemi ve durum uzay gösterimi.

$$e^*(t) = e(kT) u_1(t-kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Laplace dönüşümü;

$$E^*(s) = e(kT) \text{ dir.}$$

Zamandaki gecikme $t_0 = kT$ ilerideki analizde ters Laplace dönüşümünde t yerine $t-kT$ yazılarak gözönüne alınacaktır.

Sistemin sürekli kısmının diferansiyel eşitliği yazılırsa;

$$c(t) = \frac{K e^*(t)}{D(D+a)}$$

veya;

$$\ddot{c} + a\dot{c} = K e^*(t)$$

$c = x_1$ ve $\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$ yazılırsa durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} e^*(t) \quad (83)$$

Bu bağıntıların herbirinin Laplace dönüşümü:

$$s X_1(s) - x_1(kT) = X_2(s)$$

$$s X_2(s) - x_2(kT) = -a X_2(s) + K E^*(s) \quad (84)$$

Yukarıdaki bağıntıların sinyal akış diyagramı şekil (25.b)'de gösterilmiştir. kT zamanında hata sinyali;

$$e(kT) = r(kT) - c(kT) = r(kT) - x_1(kT)$$

Tüm sistemin sinyal akış diyagramı şekil (25.c)'de gösterilmiştir. Mason'un kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{K}{s \cdot (s+a)} & \frac{1}{s \cdot (s+a)} \\ \frac{-K}{s+a} & \frac{1}{s+a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K}{s \cdot (s+a)} \\ \frac{K}{s+a} \end{bmatrix} r(kT) \quad (85)$$

Zamandaki gecikmeden dolayı $t_0 = kT$, ters Laplace dönüşümü yapıldıktan sonra t yerine $t-kT$ yazılır. Böylece;

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{K}{a} (1 - e^{-at^*}) & \frac{1}{a} (1 - e^{-at^*}) \\ -K e^{-at^*} & e^{-at^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K}{a} (1 - e^{-at^*}) \\ K e^{-at^*} \end{bmatrix} r(kT) \quad (86)$$

$t^* = t - kT$ dir. Örnekleme anlarındaki çıkışın değeri $t = (k+1)T$ yazılarak ki $t^* = t - kT = (k+1)T - kT$ hesaplanır.

$K = 1$ ve $a = 4$ için;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4} (1 - e^{-4T}) & \frac{1}{4} (1 - e^{-4T}) \\ -e^{-4T} & e^{-4T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (1 - e^{-4T}) \\ e^{-4T} \end{bmatrix} r(kT) \quad (87)$$

$T = \frac{1}{4}$ için, bu eşitlik;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,842 & 0,158 \\ -0,368 & 0,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,158 \\ 0,368 \end{bmatrix} r(kT)$$

$x_1(0) = c(0) = 0$ için $x_2(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{c}(0) = 0$ dır.

$k < 0$ için $r(kT) = 0$ dır.

$k \geq 0$ için $r(kT) = 1$ dir.

Bu problem kısım 5'deki 2.örnekle aynıdır. Bu örnekte de $x_1(0) = 0$, $x_1(T) = 0,158$ $x_1(2T) = 0,348$ ve $x_1(3T) = 0,522$ bulunmuştu.

Bu değerler $c(0)$, $c(T)$, $c(2T)$ ve $c(3T)$ değerlerine karşılık gelmektedir. ((56) eşitliğinde gösterildiği gibi). Örnekleme anları arasındaki cevabı bulmak için, $t^* = t - kT = \Delta T$ olmak üzere $k = (k + \Delta)T$ yazalım.

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+\Delta)T] \\ x_2[(k+\Delta)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4}(1 - e^{-4\Delta T}) & \frac{1}{4}(1 - e^{-4\Delta T}) \\ -e^{-4\Delta T} & e^{-4\Delta T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - e^{-4\Delta T}) \\ e^{-4\Delta T} \end{bmatrix} r(kT)$$

Ortadaki cevap $\Delta = 0,5$ yazılarak bulunur. Böylece;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+0,5)T] \\ x_2[(k+0,5)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,902 & 0,098 \\ -0,606 & 0,606 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,606 \end{bmatrix} r(kT)$$

Örnekleme anlarının tam arasındaki değerler:

$$x_1(0,5T) = 0,098 \quad x_1(1,5T) = 0,277 \quad x_1(2,5T) = 0,458$$

Bu karma örnekleme metoduyla çalışılan problemle aynıdır. $x_1(0,5T)$, $x_1(1,5T)$ ve $x_1(2,5T)$ değerleri (71) eşitliğindeki $c(1)$, $c(3)$ ve $c(5)$ değerlerine karşılık gelmektedir.

şekil (26.b)'de gösterilmiştir. Mason'un kazanç formülü bu sinyal akış diyagramına uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{K}{s^2(s+a)} & \frac{1}{s.(s+a)} \\ \frac{-K}{s.(s+a)} & \frac{1}{(s+a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K}{s^2(s+a)} \\ \frac{K}{s.(s+a)} \end{bmatrix} r(kT) \quad (90)$$

Zamandaki $t_0 = kT$ gecikmesinden dolayı, ters Laplace dönüşümü yapıldıktan sonra, t yerine $(t-kT)$ yazılır. Bir önceki matriste kullanılan temel bazı terimlerin ters dönüşümleri;

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \right] = e^{-at^*}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s.(s+a)} \right] = \frac{1}{a} (1 - e^{-at^*})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+a)} \right] = \frac{1}{a^2} [at^* - (1 - e^{-at^*})]$$

$t^* = t - kT$ dir. Örnekleme anlarındaki çıkışın değeri $t = (k+1)T$ yazılarak $t^* = t - kT = (k+1)T - kT = T$ olmak üzere hesaplanır. $K = 1$, $a = 4$ ve $T = \frac{1}{4}$ için örnekleme anlarındaki cevap;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,977 & 0,158 \\ -0,158 & 0,368 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,023 \\ 0,158 \end{bmatrix} r(kT) \quad (91)$$

Örnekleme anları arasındaki cevap t yerine $(k+\Delta)T$ yazılarak hesaplanır.

Bu farklı eşitlik (77) eşitliği ile aynı formdadır. $m(kT)$, $c(kT)$ 'ye ve $e(kT)$, $f(kT)$ 'ye karşılık gelir. (78) eşitliğinde verilen genel form, bir önceki eşitliğe karşılık gelecek formda uygulanırsa;

$$x_3 [(k+1)T] = -a_1 x_3(kT) + h_1 e(kT) \quad (92)$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0$$

$$x_3(kT) = m(kT) - b_0 e(kT) \quad \text{veya}$$

$$m(kT) = x_3(kT) + b_0 e(kT) \quad (93)$$

x_1 ve x_2 , hal değişkenleri olduğundan, yukarıda x_3 sembolü kullanılmıştır. Kontrolörden çıkış örnekleme anları arasında sabittir. Böylece;

$$m(t) = m(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

Laplace dönüşümü ise;

$$M(s) = \frac{m(kT)}{s} \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (94)$$

Düzen için sinyal akış diyagramı Şekil (25.b)'de de gösterilenle aynıdır. (92), (93) ve (94) eşitliklerinin düzen ile birleştirilmiş sinyal akış diyagramı Şekil (27.b)'de gösterilmiştir. Bu sistem için çıkış düğüm noktaları $x_1(s)$, $x_2(s)$ ve $x_3[(k+1)T]$ dir. Giriş düğüm noktaları $x_1(kT)$, $x_2(kT)$, $x_3(kT)$ ve $r(kT)$ 'dir. Tek bir çevre vardır.

$$L = -a/s$$

Mason'un kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{b_0 K}{s^2(s+a)} & \frac{1}{s(s+a)} \\ \frac{-b_0 K}{s(s+a)} & \frac{1}{s+a} \\ -h_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K}{s^2(s+a)} \\ \frac{K}{s(s+a)} \\ -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_0 K}{s^2(s+a)} \\ \frac{b_0 K}{s(s+a)} \\ h_1 \end{bmatrix} r(kT)$$

$X_1(s)$ ve $X_2(s)$ ters dönüşümlerinden sonra, zamandaki $t_0 = kT$ gecikmesi $t-kT$ yazılarak etki ettirilir. Yukarıdaki matriste bazı temel terimlerin sonuç ters dönüşümleri;

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s.(s+a)} \right] = (1-e^{-at^*})/a$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s+a)} \right] = [at^* - (1-e^{-at^*})]/a^2$$

$$t^* = t-kT \text{ dir.}$$

Örnekleme anlarında $t^* = T$ 'dir.

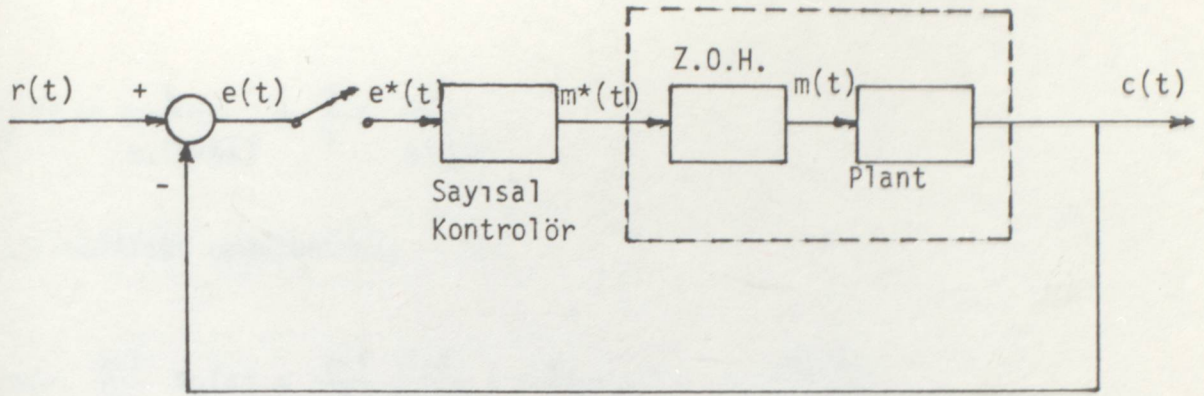
$K=1$, $a=4$ ve $T=\frac{1}{4}$ için örnekleme anlarında değerlendirilen yukarıdaki matrisin dönüşümü;

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0,023 b_0 & 0,158 & 0,023 \\ 0,158 b_0 & 0,368 & 0,158 \\ -h_1 & 0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,023 b_0 \\ 0,158 b_0 \\ h_1 \end{bmatrix} r(kT)$$

x_1 ve x_2 'nin örnekleme anları arasındaki $x_1[(k+\Delta)T]$ ve $x_2[(k+\Delta)T]$ değerleri t^* yerine T 'den çok ΔT yazılarak hesaplanır. x_3 sinyali her örnekleme aralığında tamamıyla aynı kalır.

İşlem Kontrolörleri:

Tipik bir sayısal işlem kontrol devresi Şekil (28)'de gösterilmiştir.



Şekil 28. Tipik sayısal işlem kontrolörü

Sayısal kontrolörün karakteristikleri $D(z)$ ile gösterilir. Çıkış için z dönüşümü;

$$c(z) = \frac{G(z) D(z) R(z)}{1 + G(z) D(z)} \quad \text{dir.}$$

Kontrolörün z dönüşümü için çözüm yapılırsa;

$$D(z) = \frac{c(z)}{G(z)[R(z)-c(z)]} = \frac{1}{G(z)} \frac{c(z)/R(z)}{1 - c(z)/R(z)} \quad (95)$$

Bu sonuç şunu göstermektedir ki; $D(z)$, düzenin ve verilen bir $R(z)$ girişine karşılık $G(z)$ ve cevap $c(z)$ 'nin bilinmesiyle hesaplanabilir.

Örnek 1:

Birim basamak girişe cevap $c(t) = 1 - e^{-0,5t}$ olan sistem için $D(z)$ sayısal kontrolörünün karakteristiklerini hesaplayınız. Transfer fonksiyonu $1/(1+5s)$ tir ve örnekleme periyodu $T = 1s$ 'dir.

Çözüm:

Düzen ve sıfır-mertebe tutucu için;

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{1}{s(1+5s)}$$

$$G_1(s) = (1 - e^{-Ts})$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s \cdot (1+5s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,2}$$

(61) eşitliği uygulanırsa,

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \quad G_2(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-0,2}} \right] = \frac{0,18}{z-0,82}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \text{ve} \quad c(s) = \frac{1}{s \cdot (1+2s)} \quad \text{için;}$$

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \quad c(z) = \frac{0,39 z}{(z-1)(z-0,61)}$$

$$\text{ve} \quad \frac{c(z)}{R(z)} = \frac{0,39}{(z-0,61)}$$

Bu sonuçlar (95) eşitliğinde kullanılırsa;

$$D(z) = \frac{z-0,82}{0,18} \quad \frac{0,39}{z-1} = \frac{2,2 (z-0,82)}{z-1}$$

veya

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{2,2 - 1,8 z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Bu z dönüşümünün farklı şekli istenen kontrolör karakteristiğini verir.

$$m(k) = 2,2 e(k) - 1,8e(k-1) + m(k-1) \quad (96)$$

Analog Kontrolörlerin Farklı Eşitliği:

Sürekli sistemler için çok yönlü ve en geniş olarak kullanılan kontrolörler orantılı toplama integrali işlemini sağlayanlardır. Bu kontrolörün çalışma eşitliği;

$$m(t) = (K_1 + K_2 \frac{1}{D}) e(t) \text{ dir,}$$

Bu kontrolörün farklı eşitliği, genellikle işlemsel kontrol sistemleri için sayısal kontrolör olarak kullanılır. Trapez metodu kullanılarak yukarıdaki formun yaklaşık integrasyonu yapılırsa;

$$m(k) = K_1 e(k) + K_2 T \sum_{n=1}^k e(n) + m(0)$$

Genellikle bir örnekleme periyodundan bir sonrakine kadar m'in değişimi ile çalışmak daha doğru ve uygundur. Yukarıdaki eşitlikte k yerine k=1 yazılıp çıkarma yapılırsa;

$$\Delta m(k) = m(k) - m(k-1) = K_1 [e(k) - e(k-1)] + K_2 T e(k)$$

Yukarıdaki eşitlikte dikkat edilmesi gereken nokta ilk değerin m(0) bilinmesine gerek kalmayıdır. Bu eşitlik için z dönüşümü;

$$M(z) - z^{-1} M(z) = K_1 [E(z) - z^{-1} E(z)] + K_2 T E(z)$$

veya;

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = K_1 + \frac{K_2 T}{1 - z^{-1}}$$

Sürekli kontrolör için Laplace dönüşümü;

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = K_1 + \frac{K_2 T}{s}$$

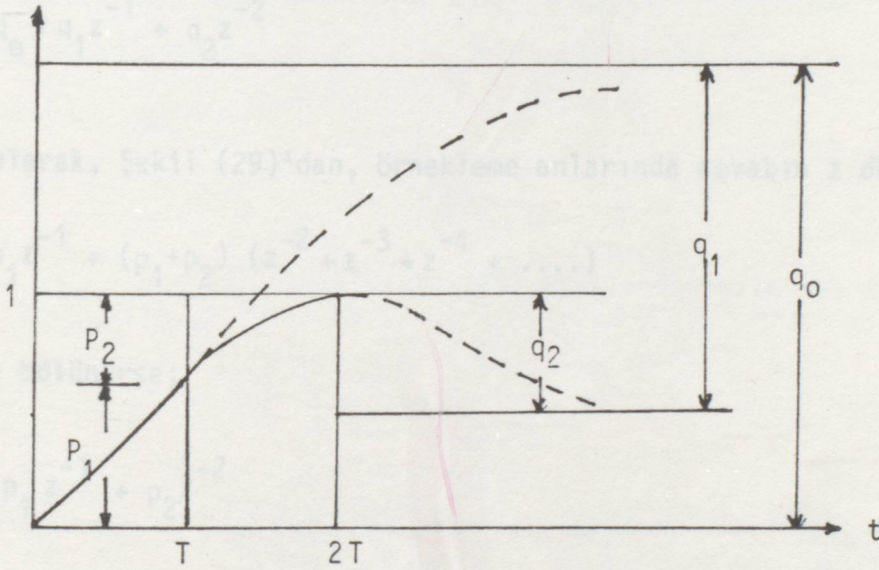
Paydadaki $1 - z^{-1}$ terimi farklı kontrolör için sürekli kontrolördeki integrasyona karşılık gelir.

Optimum Cevap:

Optimum cevabı elde edebilmek için bir kontrolörün karakteristiklerinin nasıl seçileceği gösterilmektedir. Herhangi bir optimum-performans kriteri kullanılabilir. Aşağıda, geçici rejim davranışında kontrolör karakteristiklerinin

tesbitinde kullanılan Kalman metodu tanımlanmaktadır. Şekil 10.28'de tüm sistemin bir şematik diyagramı gösterilmektedir. Yukarıdaki amaç için düzeneğin transfer fonksiyonu $ab/(s+a)(s+b)$ kabul edilsin. Sistem cevabı minimum zamanda ötelemesiz bir basamak fonksiyonuna karşılık ise geçici rejim davranışı optimum kabul edilir. İlaveten, kararlı hal hatası olmamalıdır.

Şekil (29)'da, $c(t)$ optimum cevabı kalın çizgi ile gösterilmiştir. Birim basamak girişi $r(t) = 1$ dir. İlk aralıkta ($0 \leq t < T$), düzene giriş $m(t) = q_0$ büyüktür, bu sistemi sonuç değerine doğru hızlandırır.



Şekil 29. En iyi frekans cevabı.

Şekil (29)'da birinci noktalı çizgi eğer ilk örnekleme periyodundan sonra sistem girişi değişmemişse, sonraki cevabı göstermektedir. $t = T$ anında, istenilen sonuç değeri $c(t) = r(t) = 1$ 'i elde edebilmek için cevap düşürülmeye başlanır. İkinci aralıkta $T \leq t < 2T$, sistem girişi q_1 kadar değiştirilir, böylece $m(t) = q_0 + q_1$ olur. Şekil (29)'da gösterildiği gibi q_1 terimi negatif bir sabittir. İkinci aralığın sonunda $t = 2T$, $c(t)$ cevabı, sonuç değere ulaşır. İkinci kesikli çizgi, eğer sistem girişi ikinci aralıktan sonra değişmiyorsa cevabın değişimini gösterir. Böylece, üçüncü ve sonraki aralıklar için, sistem girişi;

$$q_0 + q_1 + q_2 = c(t) = r(t) = 1 \text{ dir.}$$

Bu performans kriterinin istenilir bir özelliği, hatanın iki periyod sonra

sıfıra yaklaştırılmasıdır. Sonra hata, sadece örnekleme noktalarında değil, aralarında da sıfırda tutulur.

$m(t)$, sıfır-mertebe tutucunun çıkışı olduğundan, örneklenmiş $m^*(t)$ girişinin z dönüşümü;

$$M(z) = q_0 + (q_0 + q_1) z^{-1} + (q_0 + q_1 + q_2) (z^{-2} + z^{-3} + \dots)$$

$M(z)$, birim basamak girişin z dönüşümüne bölünürse, ($R(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$)

$$\frac{M(z)}{R(z)} = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}$$

Benzer olarak, Şekil (29)'dan, örnekleme anlarında cevabın z dönüşümü;

$$c(z) = p_1 z^{-1} + (p_1 + p_2) (z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots)$$

$R(z)$ ile bölünürse;

$$\frac{c(z)}{R(z)} = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$$

Tutucu ve düzen için darbe dönüşümü;

$$G(z) = \frac{c(z)/R(z)}{M(z)/R(z)} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}} \quad (97)$$

Digital kontrolör için darbe dönüşümü;

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{M(z)/R(z)}{E(z)/R(z)} = \frac{M(z)/R(z)}{1 - c(z)/R(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2}} \quad (98)$$

Dönüşüm sonucu :

$$m(k+2) - p_1 m(k+1) - p_2 m(k) = q_0 e(k+2) + q_1 e(k+1) + q_2 e(k)$$

Bu, sistem için optimum cevapta sonuç veren sayısal kontrolör için istenilen bağıntıdır. Yukarıdaki analizlerden, sayısal kontrol sistemi için kontrolör istenilen çalışmayı elde etmeye programlanır. Programlamanın uygunluğundan dolayı, bir sürekli sistem için sayısal kontrolör, kontrolöre nazaran daha çok yönlüdür.

Örnek 2:

Şekil (28)'de gösterilen sayıcı kontrollü sistem için, transfer fonksiyonu $2/(s+1)(s+2)$ dir. Optimum cevabı verecek sayısal kontrolör için farklı eşitliği hesaplayınız, sonra $T=1s$ de sonuç sistem için sinyal akış diyagramını çiziniz.

Çözüm :

$$G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \text{ olmak üzere (61) eşitliğinden tutucu ve düzen için } z$$

dönüşümü;

$$G(z) = \frac{z-1}{z} G_2(z) = \frac{0,4 z^{-1} + 0,15 z^{-2}}{1-0,5z^{-1} + 0,05z^{-2}} = \frac{0,73z^{-1} + 0,27 z^{-2}}{1,82-0,91z^{-1} + 0,09 z^{-2}}$$

$p_1+p_2=1$ ve $q_0+q_1+q_2=1$ olmak üzere pay ve payda 1,82 ile çarpılsın. (97) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,73 & q_0 &= 1,82 \\ p_2 &= 0,27 & q_1 &= -0,91 \\ & & q_2 &= 0,09 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sayısal kontrolör için farklı eşitlik;

$$m(k+2)-0,73 m(k+1)-0,27 m(k) = 1,82e(k+2)-0,91 e(k+1) + 0,09 e(k)$$

Sinyal akış diyagramını çizmek amacıyla, düzen için eşitliği aşağıdaki formda yazalım:

$$c(t) = \frac{2}{(D+1)(D+2)} m(t)$$

$$\ddot{c} + 3\dot{c} + 2c = 2m(t) \quad \text{veya}$$

$c(t) = x_1$ ve $\dot{c}(t) = \dot{x}_1 = x_2$ yazılarak durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} m(t)$$

Laplace dönüşümü;

$$X_1(s) = s^{-1} x_1(kT) + s^{-1} X_2(s)$$

$$X_2(s) = s^{-1} x_2(kT) + s^{-1} [-2X_1(s) - 3X_2(s) + 2M(s)]$$

kT zamanında hata işareti;

$$e(kT) = r(kT) - c(kT) = r(kT) - x_1(kT)$$

(77) ve (78) eşitliklerinin genel formu farklı eşitlikte kontrolör için kullanılırsa durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} x_3[(k+1)T] \\ x_4[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,27 & 0,73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(kT) \\ x_4(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,42 \\ 0,89 \end{bmatrix} e(kT)$$

$$x_3(kT) = m(kT) - 1,82 e(kT)$$

$$m(kT) = x_3(kT) + 1,82 e(kT)$$

Sabitler;

$$a_1 = -0,73$$

$$b_0 = 1,82$$

$$a_2 = -0,27$$

$$b_1 = -0,91$$

$$b_2 = 0,09$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 0,42$$

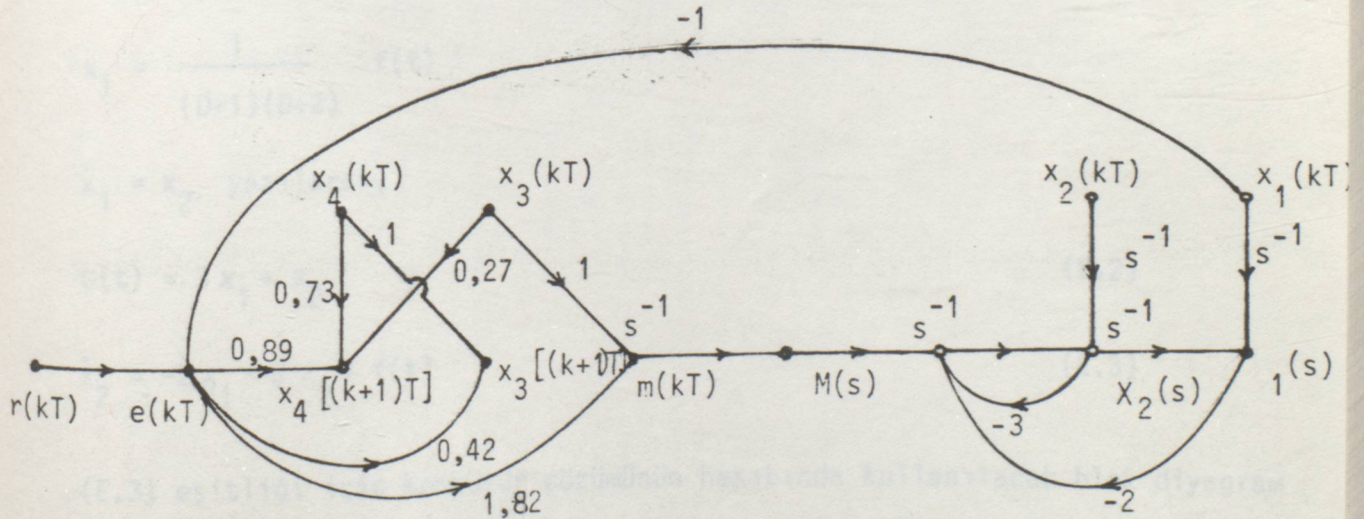
$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1 = 0,89 \text{ dur.}$$

Sistem için sonuç sinyal akış diyagramı şekil (30)'da gösterilmiştir.

Giriş noktaları $x_1(kT)$, $x_2(kT)$, $x_3(kT)$, $x_4(kT)$ ve $r(kT)$ dir. Çıkış noktaları: $X_1(s)$, $X_2(s)$, $x_3[(k+1)T]$ ve $x_4[(k+1)T]$ dir. Mason'un kazanç formülü uygulanıp, dönüştürme yapıp $T=1$ sn. kullanılırsa, örnekleme anlarındaki cevap için;

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,128 & 0,233 & 0,4 & 0 \\ -1,314 & -0,098 & 0,466 & 0 \\ -0,42 & 0 & 0 & 1 \\ -0,89 & 0 & 0,27 & 0,73 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,728 \\ 0,848 \\ 0,42 \\ 0,89 \end{bmatrix} r(k)$$

yazılabilir.



Şekil 30. Sinyal akış diyagramı.

E K

E. Durum-Uzay Metotları:

Durum-uzay metotları, kontrol sistemlerinin incelenmesinde genel teknikler geliştirir. Bu yaklaşım, özellikle daha karmaşık ve nonlinear kontrol sistemlerine uygundur. Durum-uzay metotlarının bir özelliği, dijital ve analog kompütürlerde kullanılabilmesidir.

E.1 SİSTEM GÖSTERİMLERİ

Bir kontrol sistemi için durum-uzay gösterimlerinin tesbitinde bilinen teknikler, direkt, paralel, seri ve genel programlamadır. Durum uzay gösteriminin seçimi, çözülecek problemin tarzına bağlıdır.

Direkt Programlama:

Bu metodu açıklayabilmek için aşağıdaki diferansiyel denklemi alalım:

$$c(t) = \frac{D+3}{(D+1)(D+2)} f(t) \quad (E.1)$$

Bu aşağıdaki formda yazılabilir.

$$c(t) = (D+3) x_1$$

$$x_1 = \frac{1}{(D+1)(D+2)} f(t)$$

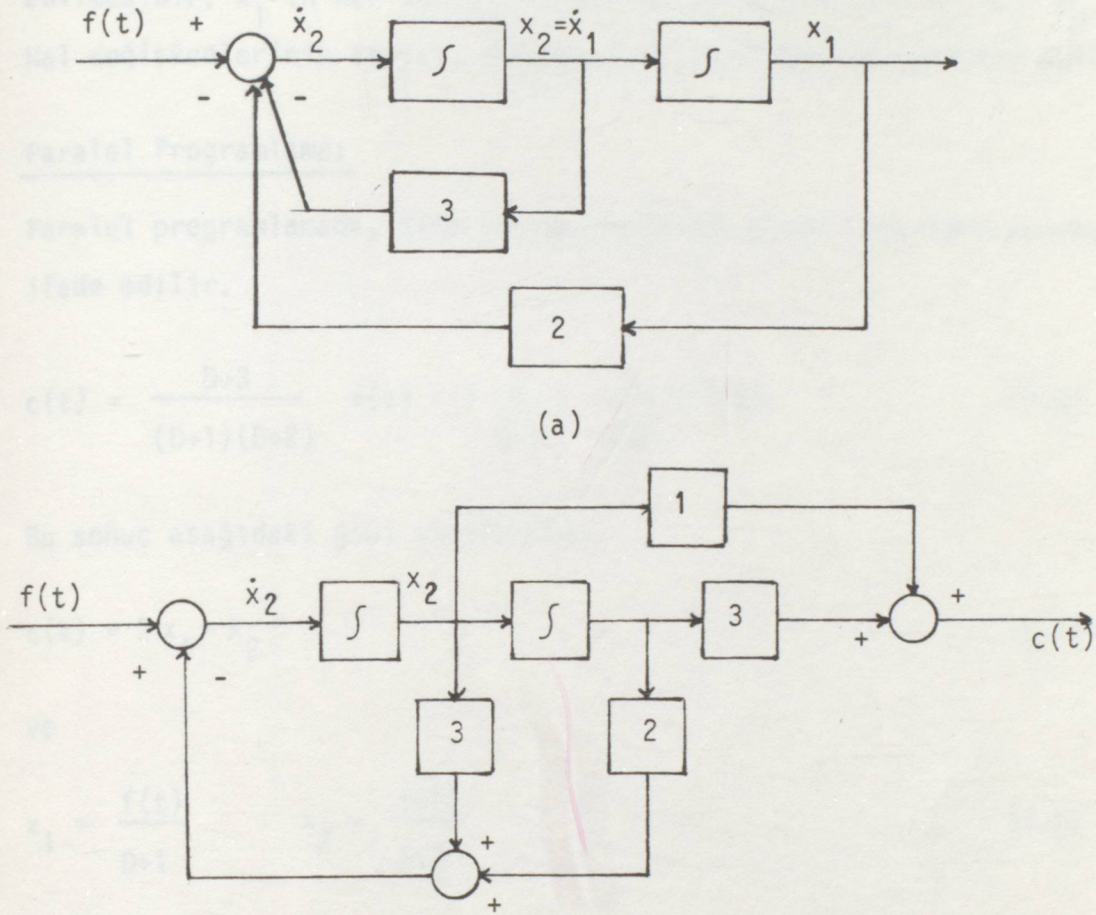
$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ yazılarak,}$$

$$c(t) = 3x_1 + x_2 \quad (E.2)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + f(t) \quad (E.3)$$

(E.3) eşitliği için kompütür çözümünün hesabında kullanılacak blok diyagram şekil (E.1.a)'da gösterilmiştir. Toplamanın çıkışı $\dot{x}_2$ dir. $\dot{x}_2$ 'nin integrali alınırsa $x_2 = \dot{x}_1$ ve sonra x_1 elde edilir. Eşitlik (E.2)'den x_1 ve x_2 'yi içeren

$c(t)$ 'nin tesbitinde kullanılan sonuç kompütür diyagramı Şekil (E.1 b)'de gösterilmiştir.



Şekil E.1. Direkt programlama ile kompütür diyagramı.

Bu diferansiyel eşitlik (E.1) için durum-uzay gösterimi (E.2) ve (E.3) eşitliklerinde verilmiştir. Bu sistem eşitlikleri matris formunda ifade edilirse;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.4)$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

x 'ler durum değişkenleridir. Şekil E.1'de gösterilen herbir integratörün çıkışı durum değişkenidir.

Direkt programlama ile durum-uzay gösterimini tesbit etmenin genel düzeni, payı 1 kabul edilerek oluşturulan orjinal diferansiyel eşitliğin x_1 kabul edilmesidir. x_1 'in her türevi bir hal değişkenidir ($\dot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$, ...) Hal değişkenlerinin sayısı, diferansiyel eşitliğin mertebesine eşittir.

Paralel Programlama:

Paralel programlamada, diferansiyel eşitlik, kısmi kesirlere ayrılarak ifade edilir.

$$c(t) = \frac{D+3}{(D+1)(D+2)} f(t) = \left(\frac{2}{D+1} - \frac{1}{D+2} \right) f(t) \quad (E.5)$$

Bu sonuç aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$c(t) = 2x_1 - x_2 \quad (E.6)$$

ve

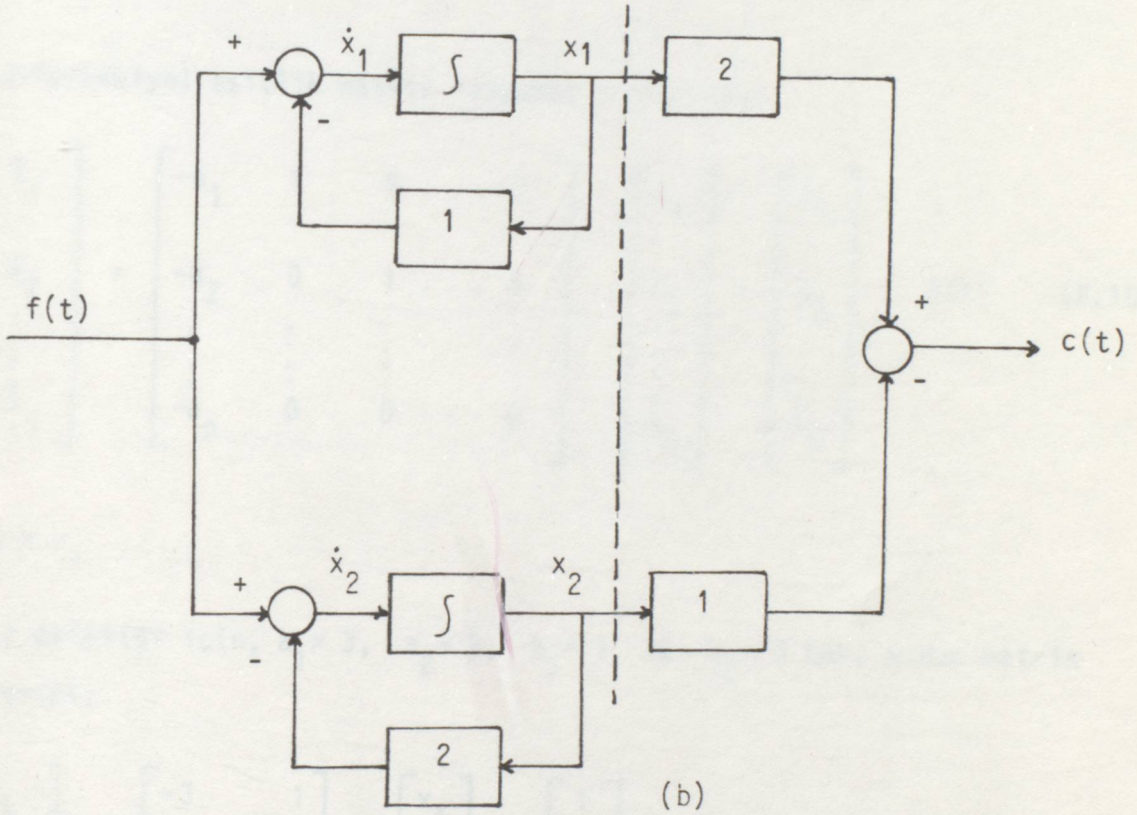
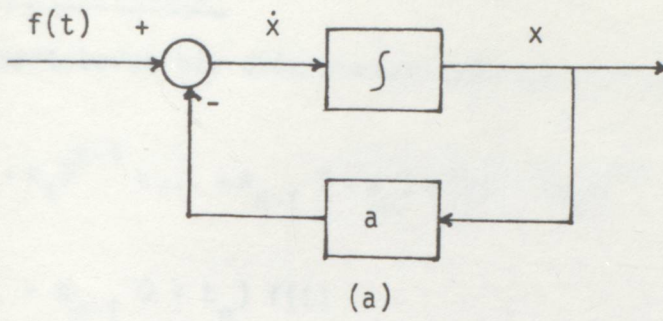
$$x_1 = \frac{f(t)}{D+1} \quad x_2 = \frac{f(t)}{D+2} \quad (E.7)$$

Şekil (E.2.a)'da temel terimlerin oluşturulması için çizilen kompüter diyagramı görülmektedir.

$$x = \frac{f(t)}{D+a}$$

veya

$$\dot{x} = f(t) - ax$$



Şekil E.2. Paralel programlama için kompütür diyagramı.

(E.7) eşitliğinde verilen durum değişkenlerinin oluşturulması için çizilen kompütür diyagramı şekil (E.2.b)'de sol taraftır. Sağ taraf ise durum değişkenlerinin (E.6)'daki eşitlikteki gibi $c(t)$ 'yi bulmak için birleştirilmiş halidir. (E.6) ve (E.7) eşitlikleri (E.1) eşitliğinin durum-uzay gösterimidir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

(E.8)

Seri Programlama:

n. mertebeden bir diferansiyel eşitlik alalım:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) c(t) = (b_1 D^{n-1} + b_2 D^{n-2} + \dots + b_{n-1} D + b_n) f(t) \quad (E.9)$$

Bu diferansiyel eşitlik matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} f(t) \quad (E.10)$$

$$c(t) = x_1$$

(E.1) eşitliği için, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $b_1 = 1$ ve $b_2 = 3$ tür. Sonuç matris gösterimi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.11)$$

$$c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (E.11)$$

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + f(t)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3f(t)$$

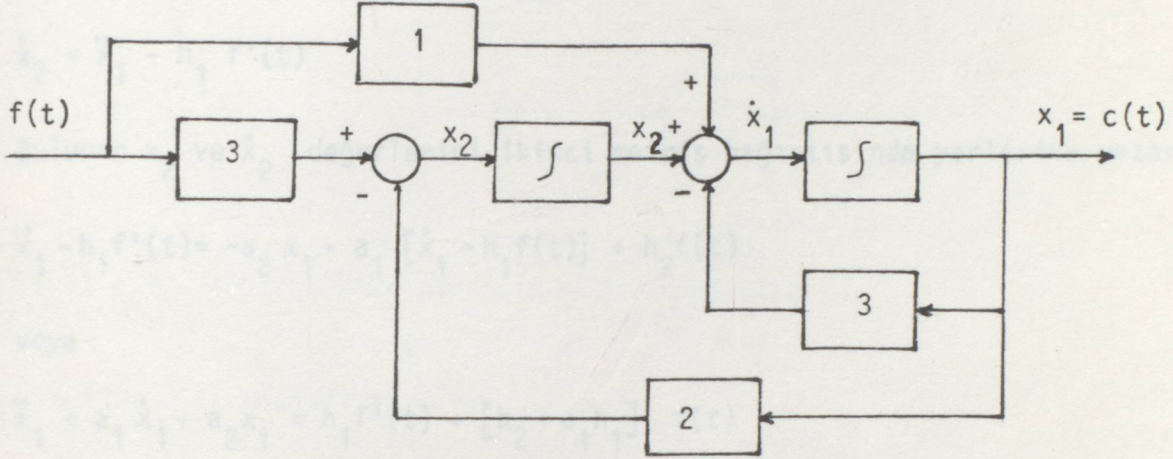
Birinci eşitliğin türevi alınır, $\dot{x}_2$ çekilirse;

$$\ddot{x}_1 = \dot{\dot{x}}_1 + 3\dot{x}_1 - f'(t) = -2x_1 + 3f(t)$$

veya

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = f'(t) + 3f(t)$$

Matris eşitlikleri için, blok diyagram gösterimi şekil (E.3)'tedir.



Şekil E.3. Seri programlama için blok diyagramı.

Genel Programlama:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliği alalım:

$$(D^2 + a_1 D + a_2) c(t) = (b_0 D^2 + b_1 D + b_2) f(t) \quad (E.12)$$

$b_0 D^2 f(t)$ terimi, $c(t) = x_1 + b_0 f(t)$ yazılarak ayrılabilir. Böylece,

$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + a_2 x_1 = (b_1 - a_1 b_0) f'(t) + (b_2 - a_2 b_0) f(t) \quad (E.13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.14)$$

formunda ifade edilirse, buna karşılık matris gösterimi;

$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 f(t)$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + h_2 f(t)$$

Birinci matris bağıntısını x_2 için çözersek;

$$x_2 = \dot{x}_1 - h_1 f(t)$$

Türev alınırsa;

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 - h_1 f'(t)$$

Bulunan x_2 ve $\dot{x}_2$ değerlerini ikinci matris bağıntısında yerlerine yazarsak;

$$\ddot{x}_1 - h_1 f'(t) = -a_2 x_1 - a_1 [\dot{x}_1 - h_1 f(t)] + h_2 f(t)$$

veya

$$\ddot{x}_1 + a_1 \dot{x}_1 + a_2 x_1 = h_1 f'(t) + [h_2 + a_1 h_1] f(t)$$

Bu (E.13) eşitliğiyle aynı formdadır. $f(t)$ ve $f'(t)$ terimlerinin katsayıları hesaplanırsa;

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0$$

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1$$

(E.1) eşitliğinde verilen diferansiyel denklem için;

$$a_1 = 3, a_2 = 2, b_0 = 0, b_1 = 1 \text{ ve } b_2 = 3 \text{ 'tür.}$$

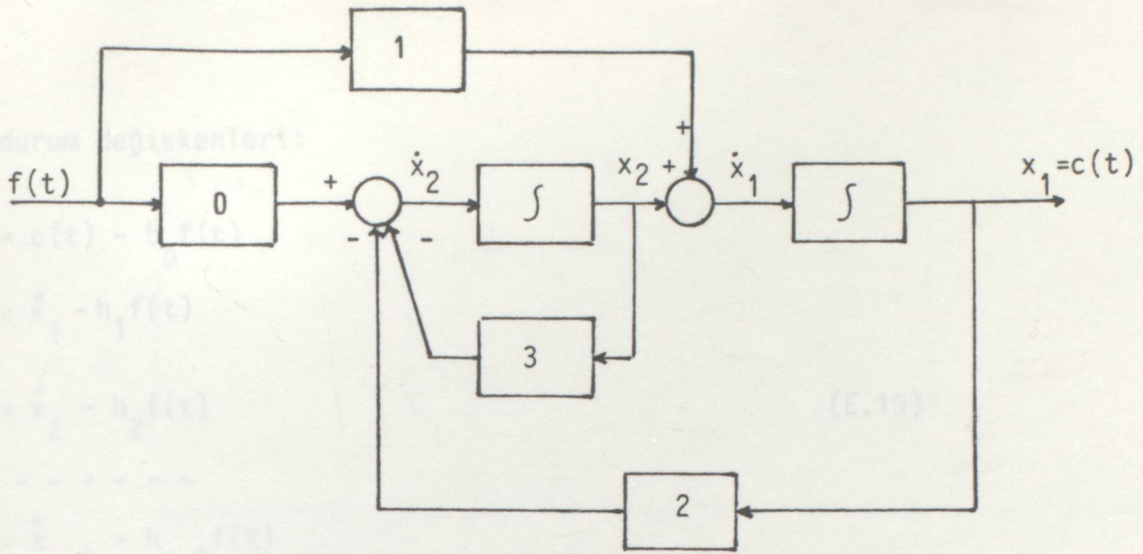
Buradan;

$h_1 = 1$ ve $h_2 = 0$ bulunur. Sonuç durum-uzay gösterimi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.15)$$

$$c(t) = x_1 - b_0 f(t) = x_1$$

Blok diyagram gösterimi şekil (E.4)'te verilmiştir.



Şekil E.4. Genel programlama için blok diyagramı.

Genelde, diferansiyel eşitlik;

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) c(t)$$

$$= (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \dots + b_{n-1} D + b_n) f(t) \quad (E.16)$$

Matris formu;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} f(t) \quad (E.17)$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0$$

$$h_2 = b_2 - a_2 b_0 - a_1 h_1$$

$$h_3 = b_3 - a_3 b_0 - a_2 h_1 - a_1 h_2 \quad (E.18)$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$h_n = b_n - a_n b_0 - a_{n-1} h_1 - a_{n-2} h_2 \dots a_1 h_{n-1}$$

ve durum değişkenleri:

$$x_1 = c(t) - b_0 f(t)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - h_1 f(t)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - h_2 f(t)$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} - h_{n-1} f(t)$$

(E.19)

Bu metotta, durum uzay gösterimi, diferansiyel eşitliğin katsayıları hesaplanarak bulunur.

Bir sistem için, tek durum-uzay gösterimi yoktur. Lineer diferansiyel denklemlerle ifade edilen herhangi bir sistem aşağıdaki matris formunda ifade edilebilir.

$$\dot{x} = Ax + bf(t) \quad (E.20)$$

$$c = d^T x \quad (E.21)$$

E.2. LINEER CEBİR

Diferansiyel eşitlikleri matrislerle çözebilmek için bir takım analitik teknikler ve metotlar vardır. Örneğin n'tane birinci mertebeden diferansiyel eşitlikten oluşan sistemi dikkate alalım:

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$$

(E.22)

$$\dot{x}_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n$$

Bunun matris gösterilişi ise;

$$\dot{x} = Ax \quad \text{ise} \quad (E.23)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eğer bir P matrisi hesaplanabiliyorsa bu sistemin çözümü oldukça kolaylaşır.

$$X = Py$$

Yukarıdaki sistem:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + 0 + \dots + 0$$

$$\dot{y}_2 = 0 + \lambda_2 y_2 + \dots + 0$$

$$- - - - -$$

$$\dot{y}_n = 0 + 0 + \dots + \lambda_n y_n$$

Bu kononik veya normal form olarak adlandırılır. Matris gösterimi ise;

$$\dot{y} = Ay \quad (E.24)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

A, λ matrisi olarak adlandırılır. P'yi hesaplamak için önce (E.22) eşitliğinden;

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$- - - - -$$

$$x_n = c_n e^{\lambda_n t}$$

x_1, x_2, x_n yerine (E.22) deki eşitlikleri konulursa;

$$c_1 \lambda e^{\lambda t} = a_{11} c_1 e^{\lambda t} + a_{12} c_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{1n} c_n e^{\lambda t}$$

$$c_2 \lambda e^{\lambda t} = a_{21} c_1 e^{\lambda t} + a_{22} c_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{2n} c_n e^{\lambda t}$$

$$- - - - -$$

$$c_n \lambda e^{\lambda t} = a_{n1} c_1 e^{\lambda t} + a_{n2} c_2 e^{\lambda t} + \dots + a_{nn} c_n e^{\lambda t}$$

$e^{\lambda t}$ kaldırılıp, düzenleme yapılırsa;

$$(a_{11} - \lambda) c_1 + a_{12} c_2 + \dots + a_{1n} c_n = 0$$

$$a_{21} c_1 + (a_{22} - \lambda) c_2 + \dots + a_{2n} c_n = 0$$

$$- - - - -$$

$$a_{n1} c_1 + a_{n2} c_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) c_n = 0$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ 'nin hesabında Cramer metodunu kullanabilmek için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (E.25)$$

Yukarıdaki determinantın matris gösterilişi;

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (E.26)$$

Bu determinantın değeri, λ sonuçlarında n'inci mertebeden bir polinomdur.

Bu polinom sistem için karakteristik eşitliktir. Karakteristik denklemin kökleri, λ 'nın n tane değeridir. Bu n değer, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ gibi, sistem için kök değerleridir. (E.25) eşitliği;

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda_i) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_i) & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda_i) \end{vmatrix} = 0$$

Birinci dizinin kofaktörleri $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{ni}$ gibi ayrılırsa, yukarıdaki determinant;

$$(a_{11} - \lambda_i) A_{1i} + a_{12} A_{2i} + \dots + a_{1n} A_{ni} = 0$$

veya

$$a_{11} A_{1i} + a_{12} A_{2i} + \dots + a_{1n} A_{ni} = \lambda_i A_{1i}$$

Bir dizi m'inci dizide yerine yazılırsa, determinantın değeri sıfırdır. Yeni birinci dizi eşitliği;

$$a_{m1} A_{1i} + a_{m2} A_{2i} + \dots + (a_{mm} - \lambda_i) A_{mi} + \dots + a_{mn} A_{ni} = 0$$

veya

$$a_{m1} A_{1i} + a_{m2} A_{2i} + \dots + a_{mm} A_{mi} + \dots + a_{mn} A_{ni} = \lambda_i A_{mi} \quad (E.27)$$

$X = Py$ dönüşümü yapıлып (E.23) eşitliği uygulanırsa;

$$\dot{X} = A X = A P y$$

Eğer P matris şeklinde ifade edilirse;

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ - & - & - & - \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad (E.28)$$

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2i} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{ni} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin m'inci satırı ve P matrisinin i'inci sütunu (E.27) eşitliğinin sol tarafıdır ve $\lambda_i A_{mi}$ 'ye eşittir. AP matrisi bundan dolayı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_i A_{1i} & \dots & \lambda_n A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 A_{m1} & \dots & \lambda_i A_{mi} & \dots & \lambda_n A_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 A_{n1} & \dots & \lambda_i A_{ni} & \dots & \lambda_n A_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \lambda_2 A_{12} & \dots & \lambda_n A_{1n} \\ \lambda_1 A_{21} & \lambda_2 A_{22} & \dots & \lambda_n A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 A_{n1} & \lambda_2 A_{n2} & \dots & \lambda_n A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = P\Lambda$$

P^{-1} ile çarpılırsa;

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

(E.23) eşitliğinden $X = P y$ ve $\dot{X} = P \dot{y}$

$$P \dot{y} = A P y$$

$$\dot{y} = P^{-1} A P y = \Lambda y \quad (E.30)$$

(E.28) eşitliğinde verilen P matrisi, (E.22) eşitliğini kanonik forma dönüştüren matristir.

Örnek 1:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliği $f(t) = 0$ ve başlangıç koşulları $c_0 = 1$ ve $\dot{c}_0 = 0$ için direkt programlamayı kullanarak çözünüz.

$$\ddot{c} + 5 \dot{c} + 6 c = f(t) \quad (E.31)$$

Sağ taraf sıfır olduğunda çözüm ($f(t) = 0$) serbest zorlamalı cevap olarak adlandırılır. İkinci aşamada, serbest zorlamalı cevabı hesaplamada kullanılan metot, $f(t) \neq 0$ durumdaki cevabı hesaplamada da kullanılır.

Çözüm:

Direkt programlamada;

$$c = x_1$$

$$\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$$

Diferansiyel eşitliğin sonuçta durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2$$

Matris gösterilişi ise;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sistem için karakteristik denklem;

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-5-\lambda) - (-6) = 5\lambda + \lambda^2 + 6 = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = -3$$

$\lambda_1 = -2$ için determinant;

$$|A - \lambda_1 I| = \begin{vmatrix} 0+2 & 1 \\ -6 & -5+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}$$

Birinci satır için kofaktörler;

$$A_{11} = -3 \quad \text{ve} \quad A_{21} = 6 \text{ 'dır.}$$

$$|A - \lambda_2 I| = \begin{vmatrix} 0+3 & 1 \\ -6 & -5+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = -2 \quad \text{ve} \quad A_{22} = 6$$

(E.28) eşitliğinden P matrisi;

$$P = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{E.32})$$

P^{-1} ise;

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.33})$$

$$\Lambda = P^{-1} A P$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Diferansiyel eşitliğin kanonik formu:

$$\dot{y} = \Lambda y$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık gelen diferansiyel eşitlikler;

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = 0$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = 0$$

Bu kanonik diferansiyel eşitliklerin genel çözümü;

$$y_1 = c_1 e^{-2t} \quad \text{ve} \quad y_2 = c_2 e^{-3t}$$

c_1 ve c_2 'yi bulmak için, y_1 ve y_2 terimlerinin başlangıç koşullarını bilmek önemlidir.

$x = P y$ olduğundan;

$y = P^{-1} x$ tir. Böylece;

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$t = 0$ anında;

$$y_1(0) = -x_1(0) - \frac{1}{3} x_2(0) = -1$$

$$y_2(0) = x_1(0) + \frac{1}{2} x_2(0) = 1$$

$$x_1(0) = c_0 = 1$$

$$x_2(0) = \dot{c}_0 = 0$$

y_1 ve y_2 , $t=0$ anında değerlendirilirse

$$C_1 = -1 \quad \text{ve} \quad C_2 = 1 \quad \text{dir.}$$

$$y_1 = -e^{-2t} \quad \text{ve} \quad y_2 = e^{-3t}$$

$x = Py$ bağıntısı kullanılarak çözüm kanonik formdan orjinal forma dönüştürülebilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$c = x_1 = -3y_1 - 2y_2 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$\dot{c} = x_2 = 6y_1 + 6y_2 = -6e^{-2t} + 6e^{-3t} \quad (E.34)$$

Kuvvetin etkisiyle oluşan çözüm :

(E.22) eşitliğinde verilen genel formda, zorlanmış $f(t)$ fonksiyonu yoktu .

Kuvvet fonksiyonu $f(t)$ ile tahrik edilen bir sistemin durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + b_1 f(t)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + b_2 f(t)$$

$$- - - - -$$

$$\dot{x}_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n + b_n f(t)$$

Matris gösterilişi ise;

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} f(t) \quad (E.20)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ dönüşümü yapılırsa;

$$\mathbf{P} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{b} f(t)$$

Her iki taraf $\mathbf{P}^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} f(t) = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{b} f(t) \quad (E.35)$$

Bu da istenilen kanonik formdur.

Örnek 2:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliği direkt programlama ile çözünüz.

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 6c = f(t) \quad (E.31)$$

Kuvvet fonksiyonu $f(t)$ yüksekliği $h=6$ olan basamak fonksiyonudur. Tüm başlangıç koşulları sıfırdır.

Çözüm :

Direkt programlama için;

$$c = x_1 \quad \text{ve} \quad \dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$$

Diferansiyel eşitlik için sonuç durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

A matrisi örnek 1'dekiyle aynıdır. P ve P^{-1} matrisleri de burada kullanılabilir. P^{-1} b matrisi ise;

$$\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Bu sistem için kanonik form:

$$\dot{y} = Ay + P^{-1}bf(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} f(t)$$

Diferansiyel eşitlikler ise;

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = -\frac{1}{3} f(t)$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = \frac{1}{2} f(t)$$

Başlangıç koşulları:

$$x_1(0) = c_0 = 0 \text{ ve}$$

$$x_2(0) = \dot{c}_0 = 0 \text{ dır.}$$

X'lı terimlerde başlangıç koşulları sıfır olduğundan $y(y = P^{-1}x)$ 'lı terimlerde de başlangıç koşulları sıfırdır. $f(t) = 6$ için kanonik diferansiyel eşitliklerin genel çözümü;

$$y_1 = c_1 e^{-2t} - 1$$

$$y_2 = c_2 e^{-3t} + 1$$



$t = 0$ anında $y_1(0) = y_2(0) = 0$ olduğundan,

$c_1 = 1$ ve $c_2 = -1$ dir. Böylece

$$y_1 = -(1 - e^{-2t})$$

$$y_2 = 1 - e^{-3t}$$

İstenilen çözüm $x = Py$ dönüşümü yapılarak istenilen orjinal halde elde edilebilir.

$$c = x_1 = -3y_1 - 2y_2 = 3(1 - e^{-2t}) - 2(1 - e^{-3t}) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

$$\dot{c} = x_2 = 6y_1 + 6y_2 = -6(1 - e^{-2t}) + 6(1 - e^{-3t}) = 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \quad (E.36)$$

P ve P^{-1} matrislerinin değişken durumları:

P matrisinin i 'inci sütunundaki her eleman bir sabit ile çarpılır ve P^{-1} matrisinin i 'inci satırındaki her eleman aynı sabite bölünürse, yeni P ve P^{-1} matrisleri $P^{-1}AP = \Lambda$ ile aynı özelliği taşır. P ve P^{-1} matrislerinin uygun durumları matris metodu ile diferansiyel eşitliklerin çözümlerinde kullanılır. Bu matrisler için gerekli özellik: $P^{-1}AP = \Lambda$ 'dır.

(E.32) ve (E.33) eşitliklerinde verilen P ve P^{-1} matrisleri;

$$P = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

P matrisinin birinci sütunu $-\frac{1}{3}$ ile çarpılır ve ikinci sütun $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa, sonra P^{-1} matrisinin birinci satırı $-\frac{1}{3}$ ile, ikinci satırı $\frac{1}{2}$ ile bölünürse uygun matris şekilleri elde edilir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

Kısmi Kesirler Metodu:

Bu P ve P^{-1} matrislerini uygun duruma getirmek için direkt olarak kullanılan basit bir matematiksel prosedürdür. Bu tekniği açıklayabilmek için, Örnek 1 ve 2'deki diferansiyel eşitliği alalım.

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 6c = (D^2 + 5D + 6) c = f(t) \quad (E.31)$$

Genel kanonik form; $y = Ay + P^{-1}bf(t)$

Aynı kökler için, A matrisi çapraz köşegende kök değerlerini gösterir. P^{-1} matrisinin her satırı keyfi bir sabitle çarpıldığından $P^{-1}b$ matrisinin her elemanı tek olarak seçilir. Sonuçta kanonik form;

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.37)$$

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = f(t)$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = f(t)$$

Buradan;

$$y_1 = \frac{f(t)}{D+2} \quad \text{ve} \quad y_2 = \frac{f(t)}{D+3}$$

Örnek 1 ve 2'de $c(t) = x_1$ ve $\dot{c}(t) = \dot{x}_1 = x_2$ için direkt programlama kullanılmıştır.

$x = Py$ bağıntısını sağlamak için, ilk olarak x_1 'i kısmi kesirlere ayıralım.

$$x_1 = \frac{f(t)}{(D+2)(D+3)} = \left[\frac{1}{D+2} - \frac{1}{D+3} \right] f(t) = y_1 - y_2 \quad (E.38)$$

$x_2 = \dot{x}_1$ bağıntısı kullanılırsa;

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = [f(t) - 2y_1] - [f(t) - 3y_2] = -2y_1 + 3y_2$$

Bu bağıntılar için $x = Py$ matris formu;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Sağdaki ilk matris P matrisidir. P^{-1} matrisini bulmak için (E.38) eşitliğinde $f(t)/(D+2)$ yerine y_1 yazılır.

$$x_1 = \frac{y_1}{D+3} \quad \text{veya}$$

$$y_1 = (D+3) x_1 = \dot{x}_1 + 3x_1 = 3x_1 + x_2$$

Benzer olarak, $f(t)/(D+3)$ yerine y_2 yazılırsa;

$$x_1 = \frac{y_2}{D+2}$$

veya

$$y_2 = (D+2) x_1 = \dot{x}_1 + 2x_1 = 2x_1 + x_2$$

Yukarıdaki bağıntıların $y = P^{-1} X$ matris formu;

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sağdaki ilk matris ters P^{-1} matrisidir. P^{-1} b matrisi $[1, 1]$ (E.37) eşitliğinde kanonik formdan hesaplanır. Bu örnek 2'de bulunan $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ den farklıdır. Örnek 2'deki P^{-1} matrisinin birinci satırı $-\frac{1}{3}$ ile bölünürse ve ikinci satır $\frac{1}{2}$ ile bölünürse, P^{-1} matrisi kısmi-kesirler metoduyla elde edilir.

Örnek 1'den, $x_1(0) = c_0 = 1$ ve $x_2(0) = \dot{c}_0 = 0$ 'dır. $y(0) = P^{-1} x(0)$ 'ın uygulanmasıyla $y_1(0) = 3$ ve $y_2(0) = 2$ dir. $f(t) = 0$ için kanonik diferansiyel eşitlikler:

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = 0 \text{ ve}$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = 0 \text{ dır. Çözümler ;}$$

$$y_1 = C_1 e^{-2t} \text{ ve } y_2 = C_2 e^{-3t}$$

$t = 0$ anından; $C_1 = 3$ ve $C_2 = 2$ bulunur.

$x = Py$ dönüşümü yapıлып, orjinal hale dönüştürülürse;

$$c = x_1 = y_1 - y_2 = 3e^{-2t} - 2e^{-3t}$$

$$\dot{c} = x_2 = -2y_1 + 3y_2 = -6e^{-2t} + 6e^{-3t}$$

Örnek 2'deki durum için, tüm başlangıç koşulları sıfır ve $f(t) = 6$ 'dır.

Kanonik diferansiyel eşitlikler ;

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = 6 \text{ ve}$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = 6$$

Genel çözümler ;

$$y_1 = C_1 e^{-2t} + 3 \text{ ve}$$

$$y_2 = C_2 e^{-3t} + 2 \text{ dir.}$$

$y_1(0) = y_2(0) = 0$ için, $t = 0$ anında

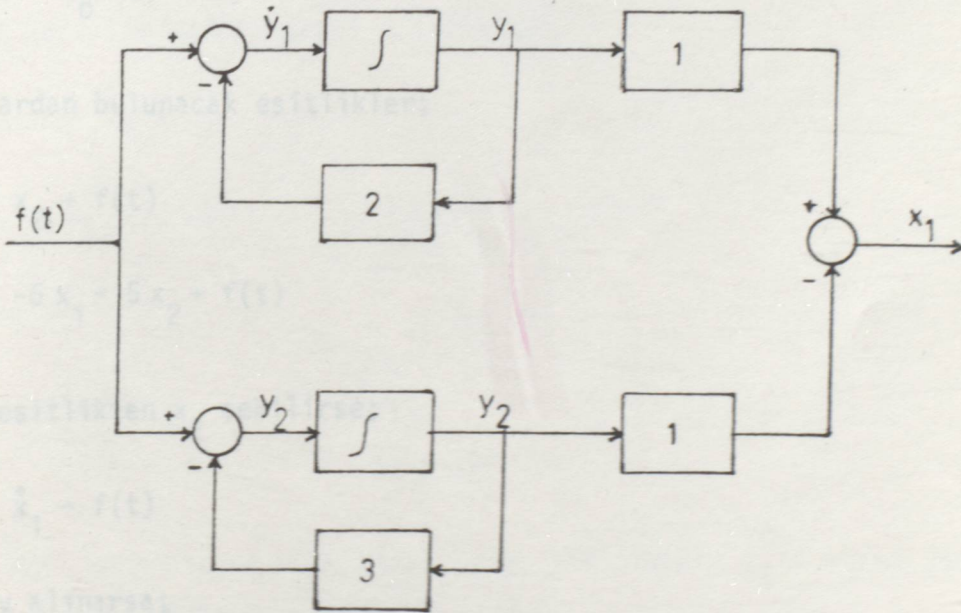
$C_1 = -3$ ve $C_2 = -2$ bulunur.

Orjinal hale dönüşüm sonucu;

$$c = x_1 = y_1 - y_2 = 3(1 - e^{-2t}) - 2(1 - e^{-3t}) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

$$\dot{c} = x_2 = -2y_1 + 3y_2 = -2(3)(1 - e^{-2t}) + 3(2)(1 - e^{-3t}) = 6e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Kanonik değişkenler y_1 ve y_2 'yi içeren kompütür diyagramı Şekil (E.5)'te gösterilmiştir.



Şekil E.5. Kompütür akış diyagramı.

Örnek 3:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliğin çözümünü bulunuz.

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 6c = f'(t) + 6f(t) \quad (E.39)$$

Kuvvet fonksiyonu $f(t)$, birim basamak fonksiyonudur ve tüm başlangıç koşulları sıfırdır.

Çözüm :

$$\dot{x} = A x + b f(t)$$

$$a_1 = 5 \quad a_2 = 6 \quad b_0 = 0 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 6$$

$$h_1 = b_1 - a_1 b_0 = 1 \quad \text{ve} \quad h_2 = b_2 - a_2 h_0 - a_1 h_1 = 6 - 0 - 5 = 1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.37)$$

$$x_1 = c - b_0 f(t) = c$$

Bunlardan bulunacak eşitlikler;

$$\dot{x}_1 = x_2 + f(t)$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + f(t)$$

İlk eşitlikten x_2 çekilirse;

$$x_2 = \dot{x}_1 - f(t)$$

Türev alınırsa;

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 - f'(t)$$

Bu değerler ikinci eşitlikte yerlerine yazılırsa;

$$\ddot{x}_1 - f'(t) = -6x_1 - 5[\dot{x}_1 - f(t)] + f(t)$$

$$\ddot{x}_1 + 5\dot{x}_1 + 6x_1 = f'(t) + 6f(t)$$

veya

$$x_1 = \frac{D+6}{(D+2)(D+3)} f(t)$$

$$x_1 = c$$

Karakteristik denklemin kökleri (-2 ve -3) değerleri olduğundan, kanonik form direkt olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \quad (E.37)$$

Buna karşılık diferansiyel eşitlikler;

$$\dot{y}_1 = -2 y_1 + f(t)$$

$$\dot{y}_2 = -3 y_2 + f(t)$$

Buradan;

$$y_1 = \frac{f(t)}{D+2} \quad \text{ve} \quad y_2 = \frac{f(t)}{D+3}$$

$x = Py$ bağıntısını elde etmek için, ilk olarak x_1 'i kısmi kesirlere ayrılmış olarak ifade edelim:

$$x_1 = \frac{D+6}{(D+2)(D+3)} f(t) = \left(\frac{4}{D+2} - \frac{3}{D+3} \right) f(t) = 4 y_1 - 3 y_2$$

Matris bağıntısı $x_2 = \dot{x}_1 - f(t)$ uygulanırsa;

$$x_2 = 4 \dot{y}_1 - 3 \dot{y}_2 - f(t)$$

$$= 4 [-2 y_1 + f(t)] - 3 [-3 y_2 + f(t)] + f(t)$$

$$= -8 y_1 + 9 y_2$$

$x = P y$ matris gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

x_1 eşitliğinde $y_1 = f(t)/(D+2)$ yazılırsa;

$$x_1 = \frac{(D+6) f(t)}{(D+2)(D+3)} = \frac{(D+6) y_1}{D+3}$$

veya

$$\dot{x}_1 + 3x_1 = \dot{y}_1 + 6y_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + f(t) \quad \text{ve} \quad \dot{y}_1 = -2y_1 + f(t) \quad \text{den;}$$

$$y_1 = \frac{3x_1 + x_2}{4} \quad \text{bulunur.}$$

x_1 eşitliğinde $y_2 = f(t)/(D+3)$ yazılırsa;

$$x_1 = \frac{(D+6) f(t)}{(D+2)(D+3)} = \frac{(D+6) y_2}{D+2}$$

veya

$$\dot{x}_1 + 2x_1 = \dot{y}_2 + 6y_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + f(t) \quad \text{ve} \quad \dot{y}_2 = -3y_2 + f(t) \quad \text{'din}^e \leftarrow$$

$$y_2 = \frac{2x_1 + x_2}{3} \quad \text{bulunur.}$$

Buradan, ters matris bağıntısı ($y = P^{-1} X$)

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kanonik diferansiyel eşitliğin $f(t) = 1$ için genel çözümü;

$$y_1 = \frac{1}{2} + C_1 e^{-2t}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} + C_2 e^{-3t}$$

$t = 0$ anında, $y_1(0) = y_2(0) = 0$ olduğundan,

$$C_1 = -\frac{1}{2} \text{ ve } C_2 = -\frac{1}{3} \text{ bulunur. Böylece;}$$

$$y_1 = \frac{1 - e^{-2t}}{2} \quad y_2 = \frac{1 - e^{-3t}}{3}$$

$X = P y$ dönüşümü uygulanır ve $c = x_1$ yazılırsa çözüm;

$$c = x_1 = 4 y_1 - 3 y_2 = 2(1 - e^{-2t}) - (1 - e^{-3t}) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

$$\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2 + f(t) = -8 y_1 + 9 y_2 + 1 = 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \quad (E.40)$$

Diferansiyel eşitliği $\dot{x} = Ax + bf(t)$ haline çevirebilmek için herhangi bir metot uygulanır. Genellikle, farklı metotlarla A , P , P^{-1} ve b matrisleri farklı bulunur. Fakat sonuç cevap hepsi için aynıdır. Örnek 3 direkt programlama ile çözülürse;

$$c(t) = (D+6) x_1 \text{ bağıntısı}$$

$$x_1 = \frac{f(t)}{D^2 + 5D + 6}$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \text{ yazılırsa;}$$

$$\dot{x}_2 = -5\dot{x}_1 - 6x_1 + f(t) = -6x_1 - 5x_2 + f(t)$$

$$c(t) = \dot{x}_1 + 6x_1 = 6x_1 + x_2$$

Durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$c = 6x_1 + x_2$$

Karakteristik denklemin kökleri -2 ve -3 olduğundan kanonik form (E.37) eşitliğindeki gibi elde edilir.

$x = Py$ bağıntısını elde etmek için, ilk olarak x_1 kısmi kesirlere ayrılır.

$$x_1 = \frac{f(t)}{(D+2)(D+3)} = \left[\frac{1}{D+2} - \frac{1}{D+3} \right] f(t) = y_1 - y_2$$

$$x_2 = \dot{x}_1 \text{ bağıntısı uygulanırsa;}$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = [f(t) - 2y_1] - [f(t) - 3y_2] = -2y_1 + 3y_2$$

Sonuç $x = P y$ bağıntısı;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Ters dönüşüm bağıntısını elde etmek için, ilk olarak x_1 'de $y_1 = f(t)/(D+2)$ yazalım.

$$x_1 = \frac{f(t)}{(D+2)(D+3)} = \frac{y_1}{D+3}$$

Buradan;

$$y_1 = \dot{x}_1 + 3x_1 = 3x_1 + x_2$$

Sonra $f(t)/(D+3)$ yerine y_2 yazılırsa;

$$y_2 = \dot{x}_1 + 2x_1 = 2x_1 + x_2$$

Ters dönüşüm bağıntısı ($y = P^{-1} x$),

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Kanonik eşitlikler;

$$\dot{y}_1 + 2y_1 = f(t)$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = f(t) \quad \text{dir.}$$

$f(t) = 1$ ve tüm başlangıç koşulları sıfır iken bu eşitliklerin çözümü;

$$y_1 = (1 - e^{-2t})/2$$

$$y_2 = (1 - e^{-3t})/3 \text{ olur.}$$

Bu sonuçları $x = Py$ bağıntısında yerine yazarsak;

$$x_1 = \frac{1 - e^{-2t}}{2} - \frac{1 - e^{-3t}}{3} = \frac{1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}}{6}$$

$$x_2 = -(1 - e^{-2t}) + (1 - e^{-3t}) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

İstenilen çözüm, buradan;

$$\begin{aligned} c &= 6x_1 + x_2 = (1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}) + (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ &= 1 - 2e^{-2t} + e^{-3t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{c} &= 6\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 6x_2 - 6x_1 - 5x_2 + f(t) = -6x_1 + x_2 + 1 \\ &= 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \end{aligned}$$

Bu sonuç (E.40) eşitliğinde elde edilenle aynıdır.

Örnek 3'ü paralel programlama ile çözmek için, önce $c(t)$ 'yi kısmi kesirlere ayıralım.

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{D+6}{(D+2)(D+3)} \quad f(t) = \left(\frac{4}{D+2} - \frac{3}{D+3} \right) f(t) \\ &= 4x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{f(t)}{D+2} = y_1 \quad \text{ve}$$

$$x_2 = \frac{f(t)}{D+3} = y_2 \quad \text{'dir.}$$

Bu, $\dot{x} = Ax + b, f'(t) = b, f(t)$ formundadır.
 $x_1 = y_1$ ve $x_2 = y_2$ olduğundan $P = P^{-1} = I$ ve $A = \Lambda$ 'dır. Paralel programlamada, durum-uzay gösteriliş kanonik formdur. Kanonik diferansiyel eşitliğin çözümü;

$$x_1 = (1 - e^{-2t})/2 \quad \text{ve}$$

$$x_2 = (1 - e^{-3t})/3 \quad \text{tür.}$$

Buradan;

$$c(t) = 4x_1 - 3x_2 = 2(1 - e^{-2t}) - (1 - e^{-3t}) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

$$\dot{c}(t) = 4\dot{x}_1 - 3\dot{x}_2 = 4[f(t) - 2x_1] - 3[f(t) - 3x_2]$$

$$= -8x_1 + 9x_2 + f(t)$$

$$= -4(1 - e^{-2t}) + 3(1 - e^{-3t}) + 1 = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

Bu da (E.40)'da verilen sonuçla aynıdır.

Örnek 3'ü $\dot{x} = Ax + bf(t)$ formunda olmayan durum-uzay gösterilişi ile de çözmek mümkündür. Örneğin;

$$c = x_1$$

$$\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$$

(E.39) eşitliğinde yazılırsa, durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f'(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

Bu, $\dot{x} = Ax + b_1 f'(t) + b_2 f(t)$ formundadır.

$x = Py + b_1 f(t)$ yazarak durum-uzay gösterilişinden kanonik forma geçilirse;

$$\dot{y} = Ay + bf(t)$$

$$b = Ab_1 + b_2$$

Örnek 3 için kanonik form (E.37) eşitliğinde verilmiştir.

$x = Py + b_1 f(t)$ bağıntısını elde etmek için, ilk önce x_1 'i kısmi kesirlere ayrılır ve sonra $x_2 = \dot{x}_1$ bağıntısı uygulanır. Sonuç $x = Py + b_1 f(t)$ bağıntısı;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

Ters dönüşüm bağıntısı $y = P^{-1}x - P^{-1}b_f f(t)$ 'yi elde etmek için, önce $f(t)/(D+2)$ yerine y_1 sonra $f(t)/(D+3)$ yerine y_2 yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} f(t)$$

Tüm başlangıç koşulları sıfır ve $f(t) = 1$ ise kanonik diferansiyel eşitliklerin çözümü;

$$y_1 = (1 - e^{-2t})/2$$

$$y_2 = (1 - e^{-3t})/3$$

$x = Py + b_1 f(t)$ dönüşümü yapılırsa,

$$c = x_1 = 4y_1 - 3y_2 = 2(1 - e^{-2t}) - (1 - e^{-3t}) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-3t}$$

$$\begin{aligned} \dot{c} = \dot{x}_1 = x_2 &= -8y_1 + 9y_2 + f(t) = -4(1 - e^{-2t}) + 3(1 - e^{-3t}) + 1 \\ &= 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \end{aligned}$$

Yine (E.40) eşitliği ile aynı sonuç elde edilmiştir. Dolayısıyla değişik durum-uzay formları kullanılabilir.

E.3. TEKRARLANMIŞ KÖKLER

iki veya daha fazla λ kökleri eşitse, P matrisi singülerdir.

(tekil) Bir singüler matrisin tersi yoktur, dolayısıyla P^{-1} matrisi hesaplanamaz. Bu durumda, ikinci mertebe sistem göz önünde tutulur.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (E.41)$$

İlk olarak λ ve $\lambda + \Delta\lambda$ değerleri birbirinden farklı kabul edilir. P matrisini hesaplamak için önce $A - \lambda I$ ve $A - (\lambda + \Delta\lambda)I$ determinantları oluşturulur.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a - (\lambda + \Delta\lambda) & b \\ c & d - (\lambda + \Delta\lambda) \end{vmatrix}$$

Soldaki determinant $A_{11} = d - \lambda$ ve $A_{21} = -c$ olduğunu gösterir. Sağ taraftaki determinant ise $A_{12} = d - (\lambda + \Delta\lambda)$ ve $A_{22} = -c$ olduğunu gösterir.

Buradan P matrisi;

$$P = \begin{bmatrix} d - \lambda & d - (\lambda + \Delta\lambda) \\ -c & -c \end{bmatrix}$$

$P^{-1} A P$ ise

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + \Delta\lambda \end{bmatrix}$$

Tekrarlanmış kökler için istenilen Λ matris formunu elde etmek için ikinci bir dönüşüm yapmak gereklidir. $y = Qz$. $x = Py$ dönüşümü sistemi $\dot{x} = Ax + bf(t)$ formundan $\dot{y} = P^{-1} A P y + P^{-1} bf(t)$ formuna dönüştürür.

$y = Qz$ dönüşümü ise yukarıdaki eşitliği aşağıdaki forma dönüştürür.

$$\dot{z} = Q^{-1} P^{-1} A P Q z + Q^{-1} P^{-1} bf(t) = R^{-1} A R z + R^{-1} bf(t)$$

$$= \Lambda z + R^{-1} bf(t) \quad (E.41)$$

$$R = P Q \text{ ve } R^{-1} = (PQ)^{-1} = Q^{-1} P^{-1} \text{ dir.}$$

$\Lambda = R^{-1} A R$ matrisi tekrarlanmış kökler için istenilen kanonik formdur.

$$Q = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 0 & -1/\Delta\lambda \\ 1 & 1/\Delta\lambda \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$Q^{-1} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\Delta\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Sonuç Λ matrisi;

$$\Lambda = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

R matrisi hesaplanırsa;

$$R = PQ = \begin{bmatrix} A_{11} & A'_{11} \\ A_{21} & A'_{21} \end{bmatrix}$$

$$A'_{11} = \frac{d}{d\lambda} A_{11} \quad \text{ve} \quad A'_{21} = \frac{d}{d\lambda} A_{21} \quad \text{dir.}$$

Üç katlı kök için ise, buna benzer olarak;

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} A_{11} & A'_{11}/1! & A''_{11}/2! \\ A_{21} & A'_{21}/1! & A''_{21}/2! \\ A_{31} & A'_{31}/1! & A''_{31}/2! \end{bmatrix}$$

Özet olarak, katlı kökler için $x = Rz$ dönüşümü $\dot{x} = Ax + bf(t)$ durum-uzay gösterilişi kanonik form olan $\dot{z} = \Lambda z + R^{-1}bf(t)$ 'ye dönüşür.

Örnek 1:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliği $f(t) = 0$ ve başlangıç koşulları $c_0 = 1$ ve $\dot{c}_0 = 0$ için direkt programlama ile çözünüz.

$$\ddot{c} + 10 \dot{c} + 25 c = f(t) \quad (E.42)$$

Çözüm :

Direkt programlama için $c = x_1$ ve $\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$ 'dir. Diferansiyel eşitlik için, sonuç durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -25 x_1 - 10 x_2$$

Buna karşılık gelen matris gösterimi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sistem için karakteristik denklem;

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -25 & -\lambda - 10 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda + 5)^2 = 0$$

Tekrarlanan kök $\lambda = -5$ 'tir. Birinci satırın kofaktörleri;

$$A_{11} = -(\lambda + 10) \text{ ve } A_{21} = 25 \text{ 'tir.}$$

R matrisi :

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11}' \\ A_{21} & A_{21}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda + 10) & -1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.43)$$

Tersi ise;

$$R^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -5 \end{bmatrix} \quad (E.44)$$

Kanonik form;

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Buna karşılık diferansiyel eşitlikler;

$$\dot{z}_1 + 5 z_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 + 5 z_2 = 0$$

Yazılan eşitlik için genel çözüm;

$$z_2 = c_2 e^{-5t}$$

Birinci diferansiyel eşitlik şimdi aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\dot{z}_1 + 5 z_1 = c_2 e^{-5t}$$

Bu diferansiyel eşitlik için genel çözüm;

$$z_1 = (c_1 + c_2 t) e^{-5t}$$

$t = 0$ anında $c_1 = z_1(0)$ ve $c_2 = z_2(0)$ 'dir.

$$z_1 = [z_1(0) + z_2(0) t] e^{-5t}$$

(E.45)

$$z_2 = z_2(0) e^{-5t}$$

$x = Py = PQz = Rz$ ve $z = R^{-1}x$ matris eşitlikleri;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.46})$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$c_0 = x_1(0) = 1$ ve $\dot{c}_0 = x_2(0) = 0$ için, $t=0$ da $z = R^{-1}x$ matrisi için $t=0$ anında $z_1(0) = 0$ ve $z_2(0) = -1$ dir. Böylece

$$z_1 = -te^{-5t}$$

$$z_2 = -e^{-5t}$$

$x = Rz$ matrisinden, istenilen sonuç bulunur.

$$c = x_1 = -5z_1 - z_2 = (1+5t)e^{-5t}$$

$$\dot{c} = x_2 = 25z_1 = -25te^{-5t} \quad (\text{E.47})$$

Kısmi Kesirler Metodu:

İki katlı kökler için kanonik form:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

Buna karşılık diferansiyel eşitlikler;

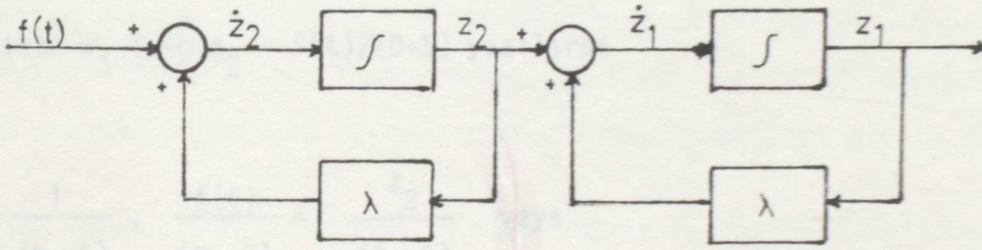
$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2$$

$$\dot{z}_2 = \lambda z_2 + f(t)$$

Buradan;

$$z_2 = \frac{f(t)}{D - \lambda} \quad z_1 = \frac{f(t)}{(D - \lambda)^2}$$

Kanonik değişkenleri içeren kompütür diyagramı Şekil E.6'da gösterilmiştir.



Şekil E.6. Kompütür akış diyagramı.

Bu bölümdeki örnekte $\lambda = -5$ için kanonik z_1 ve z_2 değişkenleri;

$$z_2 = \frac{f(t)}{D + 5} \quad z_1 = \frac{f(t)}{(D + 5)^2}$$

$x = Rz$ bağıntısını elde etmek için, ilk olarak x_1 'i kısmi kesirlere ayıralım.

$$x_1 = \frac{f(t)}{(D + 5)^2} = z_1$$

$x_2 = \dot{x}_1$ bağıntısı uygulanırsa;

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = \lambda z_1 + z_2 = -5z_1 + z_2$$

Bu iki eşitliğin $x = Rz$ matris formu;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Sağdaki ilk matris R matrisidir. R^{-1} matrisini hesaplayabilmek için, ilk olarak eşitlikte x_1 için $z_1 = f(t)/(D+5)^2$ yazılır.

$$x_1 = \frac{f(t)}{(D+5)^2} = z_1 \quad \text{veya}$$

$$z_1 = x_1$$

Eşitlikte x_1 için $z_2 = f(t)/(D+5)$ yazılırsa

$$x_1 = \frac{1}{(D+5)} \cdot \frac{f(t)}{(D+5)} = \frac{z_2}{(D+5)} \quad \text{veya}$$

$$z_2 = (D+5) x_1 = \dot{x}_1 + 5x_1 = 5x_1 + x_2$$

Bu bağıntıların $z = R^{-1} x$ matris formu;

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sağdaki ilk matris R^{-1} matrisidir.

$$x_1(0) = c_0 = 1 \quad \text{ve} \quad x_2(0) = \dot{c}_0 = 0 \quad \text{için}$$

$z = R^{-1} x$ dönüşümünün uygulanması sonucu $z_1(0) = 1$ ve $z_2(0) = 5$ 'tir.

Kanonik diferansiyel eşitliğin $f(t) = 0$ için genel çözümü;

$$z_1 = (c_1 + c_2 t) e^{-5t}$$

$$z_2 = c_2 e^{-5t}$$

$t = 0$ anından $c_1 = 1$ ve $c_2 = 5$ bulunur. Böylece;

$$z_1 = (1 + 5t) e^{-5t}$$

$$z_2 = 5 e^{-5t}$$

Bu çözümü orjinal hal değişkenlerine dönüştüren $x = Rz$ bağıntısının uygulanmasıyla;

$$c = x_1 = z_1 = (1 + 5t) e^{-5t}$$

$$\dot{c} = x_2 = -5z_1 + z_2 = -25te^{-5t}$$

Yukarıda, matris diferansiyel eşitlikler kanonik formlarına dönüştürülerek çözülmüşlerdir. Kanonik formu çözebilmek için, başlangıç koşullarını orjinal sistemden kanonik sisteme çevirebilmek önemlidir. $y(0) = P^{-1}x(0)$

Orjinal çözüm, sonra, kanonik çözümün tekrar orjinal hal değişkenlerine dönüştürülmesi ile bulunur. $x = Py$. P ve P^{-1} matrisleri klasik metotlarla veya kısmi-kesirlere ayrılarak bulunabilir. Aşağıda, kanonik diferansiyel eşitliklerin çözümlerinde kullanılmayan, matris diferansiyel eşitliklerin çözümünde kullanılan bir direkt metot anlatılmaktadır.

E.4. DURUM-UZAY EŞİTLİKLERİNİN ÇÖZÜMÜ

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (E.48)$$

diferansiyel eşitliğini gözönüne alalım.

Integral alınırsa;

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ax(\tau) d\tau \quad (E.49)$$

t yerine τ yazılırsa;

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} a x(\tau) d\tau$$

Bu (E.49) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a \left[x_0 + \int_0^{\tau} a x(\tau) d\tau \right] d\tau \quad (E.50)$$

Diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü de benzerdir. Örneğin, kabul edilen sistem;

$$= x_0 + x_0 \int_0^t a d\tau + \int_0^t a \int_0^{\tau} a x(\tau) d\tau d\tau \quad (E.51)$$

Bu amaç devam ettirilir, t yerine τ yazılırsa, (E.49) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$x(t) = x_0 \left(1 + \int_0^t a d\tau + \int_0^t a \int_0^{\tau} a d\tau d\tau + \int_0^t a \int_0^{\tau} a \int_0^{\tau} a d\tau d\tau d\tau + \dots \right)$$

Yukarıdaki integrasyonun sonucu;

$$\int_0^t a d\tau = at$$

$$\int_0^t a \int_0^{\tau} a d\tau d\tau = \int_0^t a(a\tau) d\tau = \frac{a^2 t^2}{2!}$$

$$\int_0^t a \int_0^{\tau} a \int_0^{\tau} a d\tau d\tau d\tau = \int_0^t a \frac{a^2 \tau^2}{2!} d\tau = \frac{a^3 t^3}{3!}$$

(E.48)'deki eşitlikte verilen diferansiyel denklemin çözümü;

$$x(t) = (1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^2 t^3}{3!} + \dots) x_0$$

$$= e^{at} x_0 \quad (E.50)$$

Diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü de benzerdir. Örneğin, kabul edilen sistem;

$$\dot{x}(t) = A x(t) \quad x(0) = x_0 \text{ olsun.} \quad (E.51)$$

Buna karşılık gelen diferansiyel eşitlikler;

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$$

$$- - - - -$$

$$\dot{x}_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n$$

Herbir eşitliğin integrali alınırrsa;

$$x_1 - x_1(0) = \int_0^t (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) d\tau$$

$$x_2 - x_2(0) = \int_0^t (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n) d\tau$$

$$- - - - -$$

$$x_n - x_n(0) = \int_0^t (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) d\tau$$

Buna karşılık matris gösterilişi;

$$x(t) = x(0) + \int_0^t A x(\tau) d\tau$$

t yerine τ yazılıp, bu sonuç yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$x(t) = x(0) + \int_0^t A \left[x(0) + \int_0^{\tau} A x(\tau) d\tau \right] d\tau$$

$$= x(0) + x(0) \int_0^t A d\tau + \int_0^t A \int_0^{\tau} A x(\tau) d\tau d\tau$$

$$x(t) = x(0) \left[I + \int_0^t A d\tau + \int_0^t A \int_0^{\tau} A d\tau + \int_0^t A \int_0^{\tau} A \int_0^{\tau} A d\tau d\tau + \dots \right]$$

Herbir integralin sonucu;

$$\int_0^t A d\tau = A t$$

$$\int_0^t A \int_0^{\tau} A d\tau = \int_0^t A(A\tau) d\tau = \frac{A^2 t^2}{2!}$$

$$\int_0^t A \int_0^{\tau} A \int_0^{\tau} A d\tau d\tau d\tau = \int_0^t A \left(\frac{A^2 \tau^2}{2!} \right) d\tau = \frac{A^3 t^3}{3!}$$

(E.51) eşitliğinde verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü;

$$x(t) = \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right] x(0) = e^{At} x(0)$$

$$= \phi(t) x(0)$$

(E.52)

$$\phi(t) = e^{At} = \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right] \quad (E.53)$$

$\phi(t) = e^{At}$ fonksiyonu, hal-geçiş matrisi olarak adlandırılır. Hal-geçiş matrisi, sistemin herhangi t anındaki halinin başlangıç halini $x(0)$ kullanarak bulunmasında kullanılır.

Hal-geçiş matrisinin üstel gösterimi ($e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$), onun matematiksel hali ile benzer özellikler taşır. ($e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \dots$) Önemli bir özellik, yukarıdaki eşitliğin türevi alınarak bulunabilir.

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = A e^{At} = A \left[I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right] \quad (E.54)$$

Sistemin başlangıç hali t_0 anında $t = 0$ anından daha iyi biliniyorsa, yukarıdaki analizde integrasyonun alt sınırı t_0 alınır.

$$x(t) = \left(I + \int_{t_0}^t A d\tau + \int_{t_0}^t A \int_{t_0}^{\tau} A d\tau d\tau + \dots \right) x(t_0)$$

$$\int_{t_0}^t A d\tau = A(t - t_0)$$

$$\int_{t_0}^t A \int_{t_0}^{\tau} A d\tau d\tau = \int_{t_0}^t A [A(\tau - t_0)] d\tau = A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!}$$

Böylece;

$$x(t) = \left[I + A(t - t_0) + A^2 \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \right] x(t_0)$$

$$= e^{A(t - t_0)} x(t_0) = \phi(t - t_0) x(t_0) \quad (E.55)$$

Hal geiş matrisinin özellikleri genellikle stel gsterimler kullanılarak tesbit edilir. rneęin aşağıdaki gibi;

$$\phi(0) = e^{A0} = I$$

$$\phi^{-1}(t) = (e^{At})^{-1} = e^{-At} = \phi(-t) \quad (E.56)$$

$$\phi^k(t) = (e^{At})^k = e^{A(kt)} = \phi(kt)$$

$$\begin{aligned} \phi(t_1+t_2) &= e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \phi(t_1) \phi(t_2) \\ &= \phi(t_2) \phi(t_1) \end{aligned} \quad (E.57)$$

$$\phi(t_2-t_1) \phi(t_1-t_0) = e^{A(t_2-t_1) + A(t_1-t_0)} = \phi(t_2-t_0)$$

rnek:

(E.31) eşitliğindeki sistem için hal-geiş matrisini hesaplayınız.

zm :

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 6c = (D^2 + 5D + 6)c = f(t)$$

Bölüm (E.2)'deki örnek 1'den, kanonik eşitliklerin zm;

$$y_1 = c_1 e^{-2t} = y_1(0) e^{-2t} = - \left[x_1(0) + \frac{x_2(0)}{3} \right] e^{-2t}$$

$$y_2 = c_2 e^{-3t} = y_2(0) e^{-3t} = \left[x_1(0) + \frac{x_2(0)}{2} \right] e^{-3t}$$

$x = Py$ matrisinden;

$$x_1 = -3y_1 - 2y_2 = [3x_1(0) + x_2(0)] e^{-2t} - [2x_1(0) + x_2(0)] e^{-3t}$$

$$x_2 = 6y_1 + 6y_2 = [-6x_1(0) - 2x_2(0)]e^{-2t} + [6x_1(0) + 3x_2(0)]e^{-3t}$$

Bu sonuç aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

(E.52) eşitliği ile karşılaştırılırsa;

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix} \quad (E.57)$$

$\phi(t)$ 'yi bulmak için (E.53) eşitliği uygulanırsa;

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 30 & 19 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 30 & 19 \\ -114 & -65 \end{bmatrix} \frac{t^3}{2!} + \dots \quad (E.58)$$

(E.57) eşitliği $\phi(t)$ 'nin üstel formudur. (E.58) eşitliği ise bunun seriye açılımıdır. İlk terim için;

$$\begin{aligned} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} &= 3(1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots) - 2(1 - 3t + \frac{(3t)^2}{2!} - \frac{(3t)^3}{3!} + \dots) = \\ &= 1 - 0t - \frac{6t^2}{2!} + \frac{30t^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

E.5. $\phi(t)$ 'NİN HESAP YÖNTEMLERİ

Diferansiyel eşitliklerin durum-uzay metodu ile çözümünde hal-geçiş matrisinin hesabı önemli bir problemdir. $\phi(t)$ 'nin sonsuz serilerle gösterimi karma-

şık işlemleri gerektirir ve sonuç oldukça karmaşık bir formdadır.

Ayrı Kökler :

Aşağıdaki diferansiyel eşitliği kabul edelim:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ dönüşümü bunu kanonik hale çevirir.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{y}$$

(E.51) ve (E.52) eşitliklerinin incelenmesi ile bu sonuç kanonik eşitliğin çözümü;

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{y}(0) \quad (\text{E.59})$$

(E.53) eşitliğinden;

$$e^{\mathbf{\Lambda} t} = \mathbf{I} + \mathbf{\Lambda} t + \frac{\mathbf{\Lambda}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{\Lambda}^3 t^3}{3!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$y = P^{-1} x$ dönüşümü (E.59) eşitliğine uygulanırsa;

$$P^{-1} x(t) = e^{\Lambda t} P^{-1} x(0)$$

$$x(t) = P e^{\Lambda t} P^{-1} x(0)$$

Bu sonuç (E.52) eşitliği ile birlikte uygulanırsa;

$$\phi(t) = e^{\Lambda t} = P e^{\Lambda t} P^{-1} \quad (E.61)$$

Kısım (E.2)'deki örnek 1 için, P , (E.32) eşitliğinde ve P^{-1} , (E.33) eşitliğinde verilmiştir. (E.61) eşitliğinin uygulanmasıyla hal-geçiş matrisi:

$$\phi(t) = P e^{\Lambda t} P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

Katlı Kökler:

$e^{\Lambda t}$ matrisinin seriye açılımı:

$$e^{\Lambda t} = I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \dots \quad (E.62)$$

İki kez tekrarlanmış λ kökü için;

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

n kere tekrarlanan λ kökünün genel formu

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (E.63)$$

Örnek 1:

Bölüm (E.3)'teki örnekte verilen (E.42) eşitliğindeki sistem için hal-geçiş matrisini hesaplayınız.

Çözüm :

$x = R z$ ve $z = R^{-1} x$ matris bağıntıları (E.46) eşitliğinde verilmiştir. Kanonik eşitliğin çözümü (E.45) eşitliğinde verilmiştir.

$x_1(0)$ ve $x_2(0)$ terimlerinde başlangıç şartları $z_1(0)$ ve $z_2(0)$ 'ın bulunması için $z = R^{-1} x$ matrisinin uygulanmasıyla;

$$z_1 = [z_1(0) + z_2(0) t] e^{-5t} = -t e^{-5t} x_1(0) + \frac{(1-5t) e^{-5t}}{25} x_2(0)$$

$$z_2 = z_2(0) e^{-5t} = -e^{-5t} x_1(0) - \frac{e^{-5t}}{5} x_2(0) \quad (E.45)$$

$x = R z$ matrisinin uygulanmasıyla;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+5t) e^{-5t} & t e^{-5t} \\ -25 t e^{-5t} & (1-5t) e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad (E.64)$$

Sağdaki ilk matris, $\phi(t)$ durum-geçiş matrisidir.

Bu sonuç, (E.61) eşitliğinin direkt olarak uygulanmasıyla da elde edilebilir.

$$\phi(t) = R e^{At} R^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-5t} & te^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1+5t)e^{-5t} & te^{-5t} \\ -25te^{-5t} & (1-5t)e^{-5t} \end{bmatrix} \quad (E.65)$$

R ve R^{-1} matrisleri (E.43) ve (E.44) eşitliklerinde verilmiştir.

Laplace Dönüşümü Metodu:

Aşağıdaki denklem sisteminini gözönüne alalım.

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

Laplace Dönüşümü :

$$sX_1(s) - x_1(0) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots + a_{1n}X_n(s)$$

$$sX_2(s) - x_2(0) = a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \dots + a_{2n}X_n(s)$$

$$sX_n(s) - x_n(0) = a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \dots + a_{nn}X_n(s)$$

Her bir denklem sistemi için matris gösterimi;

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

ve

$$s X(s) - x(0) = A X(s)$$

Başka bir formda yazılırsa;

$$[s I - A] X(s) = x(0)$$

Her iki taraf $[s I - A]^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$X(s) = [s I - A]^{-1} x(0)$$

$$X(s) = [s I - A]^{-1} x(0)$$

İstenilen sonuç için ters dönüşüm yapılırsa;

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [s I - A]^{-1} x(0)$$

(E.52) eşitliği ile karşılaştırılırsa;

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [s I - A]^{-1} \quad (E.66)$$

Bu hal-geçiş matrisinin hesabında en kolay yoldur. Kısım (E.2), örnek 1'den

$[s I - A]$ matrisi:

$$[s I - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}$$

Böylece;

$$\phi(s) = [s I - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

Her bir eleman kısmi-kesirlere ayrılarak yazılırsa;

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

Dönüşümden sonra (E.57) eşitliğinde verilen sonucun aynısı elde edilir.

Kısım (E.3)'teki örnekte olduğu gibi $[sI - A]$ matrisi;

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 25 & s+10 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2 + 10s + 25} \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix}$$

Yine herbir eleman kısmi-kesirlere ayrılarak yazılırsa;

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+5} + \frac{5}{(s+5)^2} & \frac{1}{(s+5)^2} \\ \frac{-25}{(s+5)^2} & \frac{1}{s+5} - \frac{5}{(s+5)^2} \end{bmatrix}$$

Dönüşüm sonucu (E.65) eşitliğiyle aynı sonuç bulunur.

Sinyal Akış Diyagramı Metodu:

Bu metot $\phi(t)$ durum-geçiş matrisinin determinantının hesabında kolaylık taşır. Genel çözüm:

$$x(t) = \phi(t) x(0)$$

Laplace dönüşümü

$$X(s) = \phi(s) x(0)$$

ikinci mertebeli sistem için;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(s) & \psi_{12}(s) \\ \psi_{21}(s) & \psi_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

n.mertebeli bir sistem için ;

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(s) & \psi_{12}(s) & \dots & \psi_{1n}(s) \\ \psi_{21}(s) & \psi_{22}(s) & \dots & \psi_{2n}(s) \\ - & - & - & - \\ \psi_{n1}(s) & \psi_{n2}(s) & \dots & \psi_{nn}(s) \end{bmatrix} \quad (E.67)$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) & \dots & \psi_{1n}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) & \dots & \psi_{2n}(t) \\ - & - & - & - \\ \psi_{n1}(t) & \psi_{n2}(t) & \dots & \psi_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (E.68)$$

Herbir element $\psi_{ij}(s)$ sistemin sinyal akış diyagramından direkt olarak hesaplanabilir.

Örnek 2:

Bölüm (E.2) Örnek 1'deki çözümü sinyal-akış diyagramı metodunu kullanarak hesaplayınız.

Çözüm :

Matris bağıntıları:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2$$

Sinyal akış diyagramını oluşturabilmek için ilk olarak matris bağıntılarının Laplace dönüşümlerini bulalım.

$$s X_1(s) - x_1(0) = X_2(s)$$

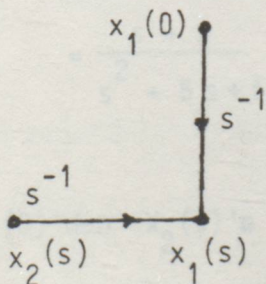
$$s X_2(s) - x_2(0) = -6 X_1(s) - 5 X_2(s)$$

Başlangıç koşulları sağ tarafa atılıp, her iki taraf s'e bölünürse;

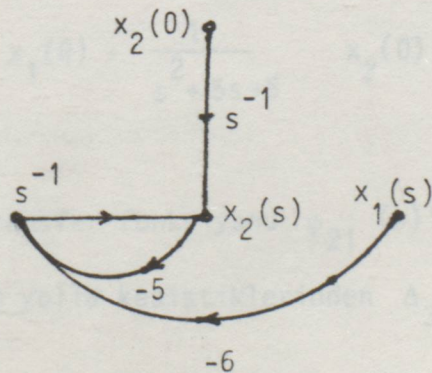
$$X_1(s) = s^{-1} X_2(s) + s^{-1} x_1(0)$$

$$X_2(s) = s^{-1} [-6 X_1(s) - 5 X_2(s)] + s^{-1} x_2(0)$$

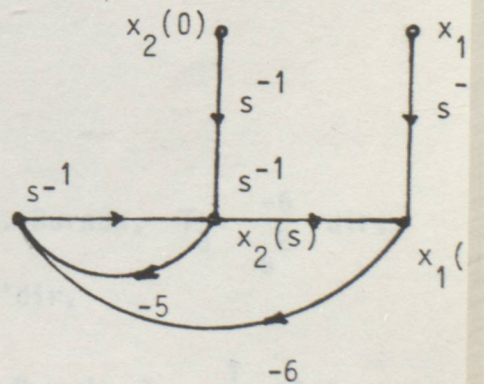
İlk bağıntı için sinyal akış diyagramı Şekil (E.7.a)'da ve ikinci bağıntı için sinyal akış diyagramı Şekil (E.7.b)'de gösterilmiştir. Sistemin sinyal akış diyagramını elde etmek için iki diyagram birleştirilirse Şekil (E.7.c) bulunur.



(a)



(b)



(c)

Şekil E.7. Sinyal Akış Diyagramı.

Diyagram iki çevre içerir:

$$L_1 = \frac{-5}{s} \quad \text{ve} \quad L_2 = \frac{-6}{s^2}$$

Birbiriyle bağlantısız çevre olmadığından, sistem determinanı;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = 1 + \left(\frac{5}{s} + \frac{6}{s^2} \right) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2}$$

$x_1(0)$ girişinden $X_1(s)$ çıkışına transfer fonksiyonu $\psi_{11}(s)$ 'tir. $x_1(0)$ 'dan $X_1(s)$ 'e iletim $T_1 = 1/s$ tir.

$$L_2, T_1 \text{'e değdiğinden } \Delta_1 = 1 - L_1 = 1 + \frac{5}{s} = \frac{s+5}{s} \text{ tir.}$$

$x_2(0)$ girişinden $X_1(s)$ çıkışına transfer fonksiyonu $\psi_{12}(s)$ 'tir. $x_2(0)$ 'dan $X_1(s)$ 'e iletim:

$$T_2 = 1/s^2 \text{ dir. } L_1 \text{ ve } L_2, T_2 \text{ ile kesiştiklerinden}$$

$$\Delta_2 = 1 \text{ dir. Buradan;}$$

$$X_1(s) = \psi_{11}(s) x_1(0) + \psi_{12}(s) x_2(0) = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} x_1(0) + \frac{T_2 \Delta_2}{\Delta} x_2(0)$$

$$= \frac{s+5}{s^2 + 5s + 6} x_1(0) + \frac{1}{s^2 + 5s + 6} x_2(0)$$

$x_1(0)$ 'dan $X_2(s)$ 'e transfer fonksiyonu $\psi_{21}(s)$ 'tir. Burada, $T_3 = \frac{-6}{s}$ dir.

L_1 ve L_2 çevreleri bu yolla kesiştiklerinden $\Delta_3 = 1$ dir.

$x_2(0)$ 'dan $X_2(s)$ 'e transfer fonksiyonu $\psi_{22}(s)$ 'tir. Burada; $T_4 = \frac{1}{s}$ tir.

L_1 ve L_2 çevreleri bu yolla kesiştiklerinden $\Delta_4 = 1$ dir. $X_2(s)$ için sonuç

$$x_2(s) = \psi_{21}(s) x_1(0) + \psi_{22}(s) x_2(0) = \frac{T_3 \Delta_3}{\Delta} x_1(0) + \frac{T_4 \Delta_4}{\Delta} x_2(0)$$

$$= \frac{-6}{s^2 + 5s + 6} x_1(0) + \frac{5}{s^2 + 5s + 6} x_2(0)$$

Bu bağıntıların matris şekli;

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

Sağdaki ilk terim $\phi(s) = [sI - A]^{-1}$ matrisidir. Laplace dönüşümü ile de aynı sonuç bulunmuştur. Sinyal-akış diyagramı metodu matrisin tersinin bulunmasını gerektirmez.

Örnek 3:

Kısım (E.3)'teki örnek için hal-geçiş matrisini sinyal-akış diyagramı metodu kullanarak hesaplayınız.

Çözüm :

Bu örnek için matris bağıntıları:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -25 x_1 - 10 x_2$$

Bu bağıntıların Laplace dönüşümleri;

$$s x_1(s) - x_1(0) = x_2(s)$$

$$s x_2(s) - x_2(0) = -25 x_1(s) - 10 x_2(s)$$

Başlangıç koşulları sağ tarafa geçirilip, her iki taraf s'e bölünürse;

$$x_1(s) = s^{-1} x_2(s) + s^{-1} x_1(0)$$

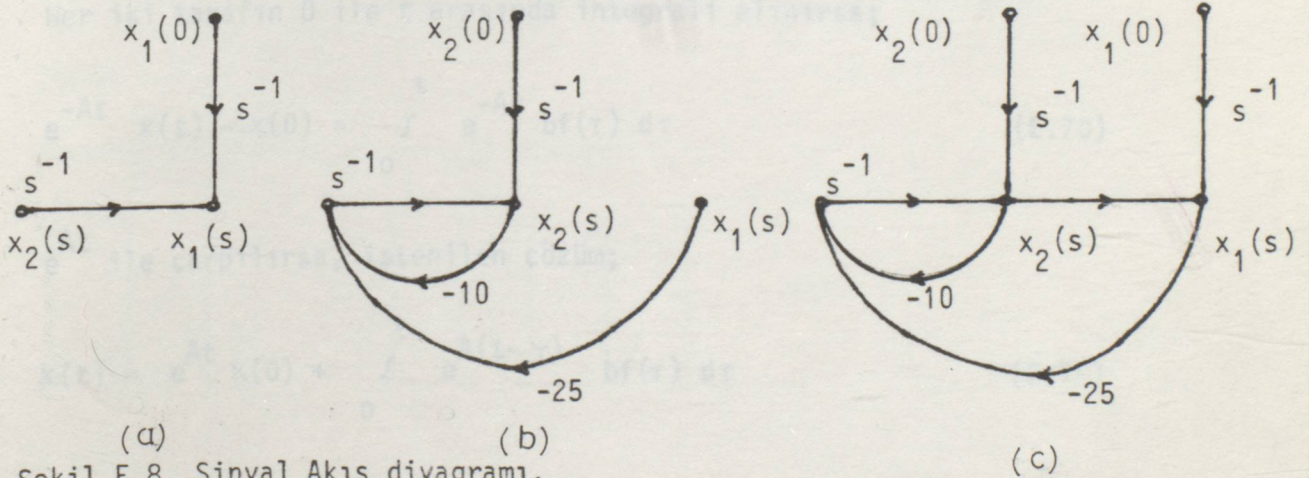
$$x_2(s) = s^{-1} [-25 x_1(s) - 10 x_2(s)] + s^{-1} x_2(0)$$

İlk bağıntının sinyal akış diyagramı Şekil (E.8.a)'da, ikinci bağıntının sinyal akış diyagramı Şekil (E.8.b)'de gösterilmiştir. İkisinin birleştirilmesiyle oluşan sistem için sinyal akış diyagramı Şekil (E.8.c)'de gösterilmiştir. Bu sistemde iki çevre vardır;

$$L_1 = \frac{-10}{s} \quad \text{ve} \quad L_2 = \frac{-25}{s^2}$$

Sistem için determinant;

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) = \frac{s^2 + 10s + 25}{s^2}$$



Şekil E.8. Sinyal Akış diyagramı.

Mason'un kazanç formülünün uygulanmasıyla;

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+10 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

(s+5)²

Sağdaki ilk matris $\phi(s) = [sI - A]^{-1}$ matrisidir. Bu Laplace transformasyonu metoduyla bulunan sonucun aynısıdır.

E.6. KUVVETİN ETKİSİYLE OLUŞAN ÇÖZÜM :

Diferansiyel denklem sistemlerinin kuvvet fonksiyonu ile genel gösterilişi;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bf(t) \quad x(0) = x_0 \quad (E.69)$$

Sistemi çözmek için, önce aşağıdaki formda yazalım.

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = bf(t)$$

Her iki taraf e^{-At} ile çarpılırsa;

$$e^{-At} [x(t) - Ax(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-At} x(t)] = e^{-At} bf(t)$$

Her iki tarafın 0 ile t arasında integrali alınır;

$$e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} bf(\tau) d\tau \quad (E.70)$$

e^{At} ile çarpılırsa, istenilen çözüm;

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bf(\tau) d\tau \quad (E.71)$$

e^{At} yerine $\phi(t)$ yazılır ve $e^{A(t-\tau)}$ yerine $\phi(t-\tau) = \phi(t) \phi(-\tau)$ yazılırsa;

$$x(t) = \phi(t) x(0) + \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau) bf(\tau) d\tau \quad (E.72)$$

t_0 zamanındaki başlangıç koşulu, $t=0$ anındakinden daha iyi biliniyorsa, (E.70) eşitliği;

$$e^{-At} x(t) - e^{-At_0} x(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} b f(\tau) d\tau$$

e^{At} ile çarpılırsa;

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} b f(\tau) d\tau$$

$$= \phi(t-t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t-\tau) b f(\tau) d\tau \quad (E.73)$$

Örnek 1:

Bölüm (E.2) Örnek 3'teki çözümü direkt klasik metodu kullanarak bulunuz.

$$\ddot{c} + 5\dot{c} + 6c = f'(t) + 6f(t)$$

$f(t)$, birim basamak fonksiyonu ve başlangıç koşulları sıfırdır.

Çözüm :

Örnekte kullanılan durum-uzay gösterilişi;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$c = x_1$$

Λ , P ve P^{-1} matrisleri hesaplanırsa;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$e^{\Lambda t}$ matrisi;

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$e^{\lambda t}$ terimlerinin düzenlenmesi, Λ matrisinde λ terimlerinin düzenlenmesiyle aynıdır. -2 veya -3 değerlerinden herhangi biri ilk alınabilir. P, $e^{\Lambda t}$ ve P^{-1} yukarıdaki değerlerinden, hal-geçiş matrisi $\phi(t)$ bulunabilir.

$$\phi(t) = P e^{\Lambda t} P^{-1} = \begin{bmatrix} (3e^{-2t} - 2e^{-3t}) & (e^{-2t} - e^{-3t}) \\ (-6e^{-2t} + 6e^{-3t}) & (-2e^{-2t} + 3e^{-3t}) \end{bmatrix} \quad (E.74)$$

t yerine $-\tau$ yazılıp, b ile çarpılırsa,

$$\phi(-\tau)b = \begin{bmatrix} 4e^{2\tau} - 3e^{3\tau} \\ -8e^{2\tau} + 9e^{3\tau} \end{bmatrix}$$

t

$\int_0^t \phi(-\tau)b f(\tau) d\tau$ nun $f(\tau) = 1$ iken hesabı;

$$\begin{bmatrix} \int_0^t (4e^{2\tau} - 3e^{3\tau}) d\tau \\ \int_0^t (-8e^{2\tau} + 9e^{3\tau}) d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} - 1 \\ -4e^{2t} + 3e^{3t} + 1 \end{bmatrix}$$

Tüm başlangıç koşulları sıfır olduğundan, (E.72) eşitliğinde bulunan çözüm;

$$x(t) = \phi(t) \int_0^t \phi(-\tau)b f(\tau) d\tau \quad \text{olur.}$$

Bunun sonucu;

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2e^{-2t} + e^{-3t} \\ -2+4e^{-2t} - 3e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (E.75)$$

Örnek 3'ten, $c = x_1$ ve $\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2 + f(t) = x_2 + 1$

Böylece;

$$c = 1-2e^{-2t} + e^{-3t} \quad (E.40)$$

$$\dot{c} = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

Laplace Dönüşümü Metodu:

(E.69) eşitliğindeki Laplace dönüşümü:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + bF(s)$$

Bu aşağıdaki formda yazılabilir.

$$[sI - A] X(s) = x(0) + bF(s)$$

Her iki taraf $[sI - A]^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$X(s) = [sI - A]^{-1} x(0) + [sI - A]^{-1} bF(s)$$

Çözüm için dönüşüm yapılırsa;

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} x(0) + \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} bF(s)$$

(E.72) eşitliği ile karşılaştırılırsa;

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} \quad (E.66)$$

ve

$$\phi(t) = \int_0^t \phi(-\tau) b f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1} [sI - A]^{-1} b F(s) \quad (E.76)$$

Örnek 2:

Bölüm (E.2), Örnek 3'teki çözümü Laplace dönüşümü metoduyla bulunuz.

Çözüm :

Bölüm (E.2), Örnek 3'ten A ve b matrisleri;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[sI - A]$ matrisi;

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}$$

Tersi ise;

$$[sI - A]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}}{s^2 + 5s + 6} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \quad (E.77)$$

$[sI - A]^{-1}$ matrisi, $bF(s)$ ile çarpılırsa ve $F(s) = 1/s$ ise;

$$[sI - A]^{-1} bF(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s} + \frac{4}{s+2} - \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \quad (E.78)$$

Ters Laplace dönüşümü, (E.75) eşitliğinde sağ taraftaki $\phi(t) = \int_0^t \phi(-\tau) b f(\tau) d\tau$ için aynı sonucu verir.

Sinyal Akış Diyagramı Metodu:

Bu metodu uygulayabilmek için, önce durum-uzay eşitliğinin Laplace dönüşümü alınır.

$$\dot{X} = A X + b f(t)$$

$$s X(s) - X(0) = A X(s) + b f(s)$$

Sinyal akış diyagramı, bu eşitliği aşağıdaki formda yazarak çizilebilir.

$$X(s) = s^{-1} X(0) + s^{-1} A X(s) + s^{-1} b f(s)$$

Giriş noktaları başlangıç şartlarıdır $X(0)$ ve girişin dönüşümü $F(s)$ 'tir. Çıkış noktaları $X(s)$ hal değişkenlerinin dönüşümleridir. Mason'un kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{11}(s) & \psi_{12}(s) & \dots & \psi_{1n}(s) \\ \psi_{21}(s) & \psi_{22}(s) & \dots & \psi_{2n}(s) \\ - & - & - & - \\ \psi_{n1}(s) & \psi_{n2}(s) & & \psi_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \\ \vdots \\ \psi_n(s) \end{bmatrix} F(s)$$

(E.79)

Dönüşüm istenilen sonucu verir. Her bir $\psi_{ij}(s)$ ve $\psi_i(s)$ değerleri sinyal akış diyagramından bulunur.

Örnek 3:

Bölüm (E.2), Örnek 3'teki çözümü sinyal akış diyagramı metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm :

Durum-uzay eşitliklerinin Laplace dönüşümü;

$$s X_1(s) - x_1(0) = X_2(s) + F(s)$$

$$s X_2(s) - x_2(0) = -6 X_1(s) - 5 X_2(s) + F(s)$$

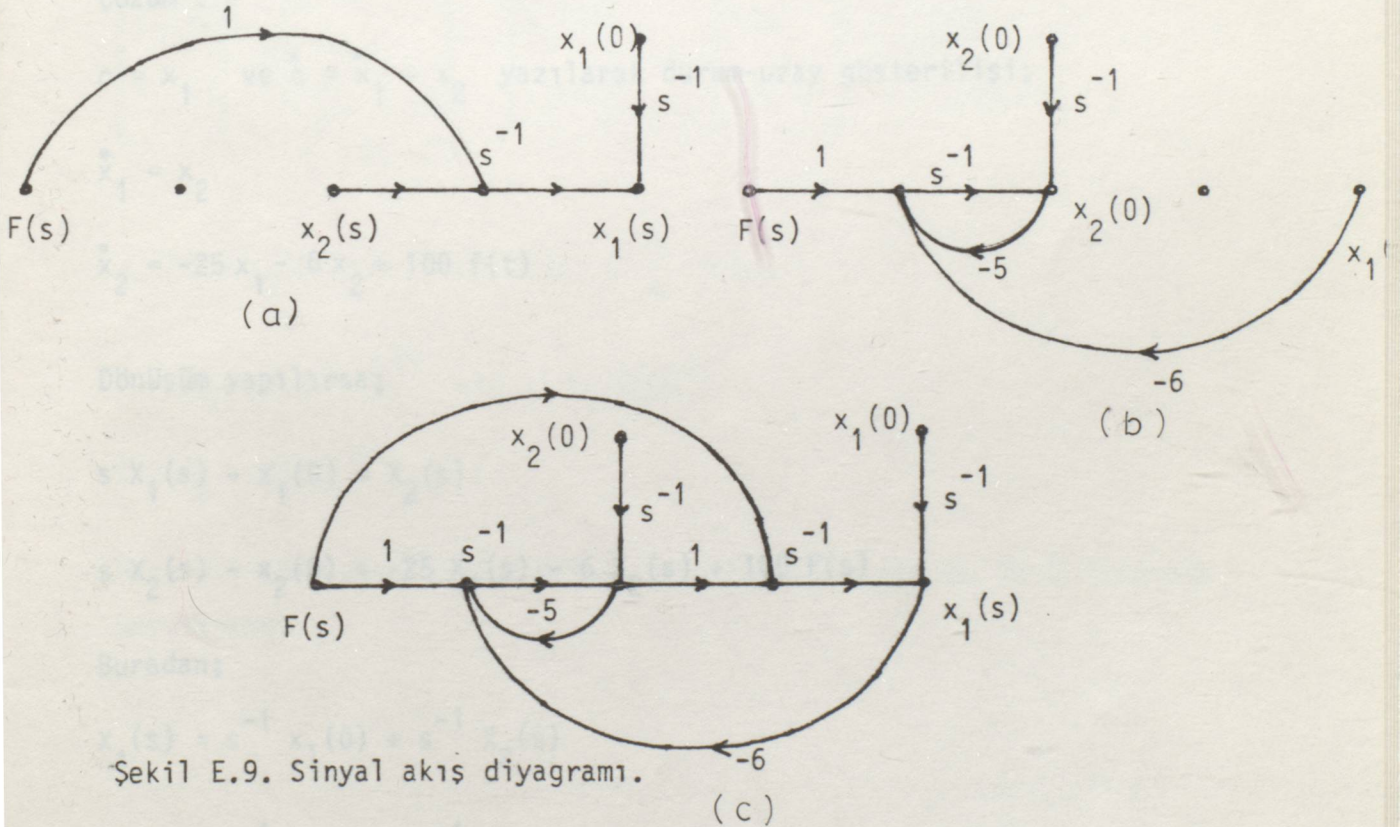
Başlangıç koşulları sağ tarafa geçirilip, her iki taraf s'e bölünürse;

$$X_1(s) = s^{-1} x_1(0) + s^{-1} [X_2(s) + F(s)]$$

$$X_2(s) = s^{-1} x_2(0) + s^{-1} [-6X_1(s) - 5X_2(s) + F(s)]$$

İlk eşitlik için sinyal akış diyagramı Şekil (E.9 a)'da gösterilmiştir.

İkinci eşitlik için olan ise Şekil (E.9.b)'dedir. İki diyagram sistem diyagramını oluşturmak için birleştirilirse Şekil (E.9.c) elde edilir.



Şekil E.9. Sinyal akış diyagramı.

Mason'un kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s^2+5s+6} & \frac{1}{s^2+5s+6} \\ \frac{-6}{s^2+5s+6} & \frac{s}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s+6}{s^2+5s+6} \\ \frac{s+6}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} F(s)$$

Sağdaki ilk matris $[sI - A]^{-1}$ matrisidir ve son matris $[sI - A]^{-1} b$ matrisidir. Bu sonuç Laplace dönüşümüyle bulunanla aynıdır. Sinyal akış diyagramının en önemli özelliği, matrisin tersini hesaplamaya gerek göstermeyişidir.

Örnek 4:

Aşağıdaki diferansiyel eşitliğin çözümünü hesaplamak için sinyal-akış diyagramı metodunu bulunuz.

$$\ddot{c} + 6\dot{c} + 25c = 100 f(t)$$

Kuvvet fonksiyonu $f(t)$, birim basamak fonksiyonudur. Tüm başlangıç koşulları sıfırdır.

Çözüm :

$c = x_1$ ve $\dot{c} = \dot{x}_1 = x_2$ yazılarak durum-uzay gösterilişi;

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -25x_1 - 6x_2 + 100 f(t)$$

Dönüşüm yapılırsa;

$$s X_1(s) - x_1(0) = X_2(s)$$

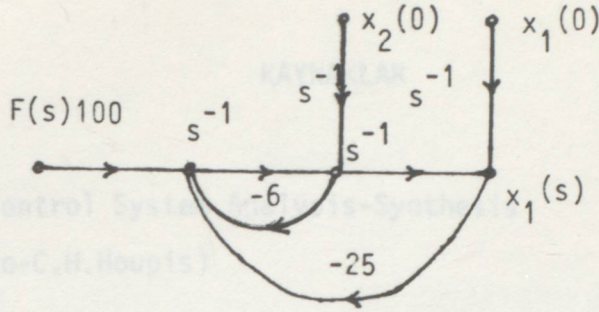
$$s X_2(s) - x_2(0) = -25 X_1(s) - 6 X_2(s) + 100 F(s)$$

Buradan;

$$X_1(s) = s^{-1} x_1(0) + s^{-1} X_2(s)$$

$$X_2(s) = s^{-1} x_2(0) + s^{-1} [-25 X_1(s) - 6 X_2(s) + 100 F(s)]$$

Sonuç sinyal akış diyagramı Şekil (E.10)'da gösterilmiştir.



Şekil E.10. Sinyal akış diyagramı.

Mason'un kazanç formülü uygulanırsa;

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -25 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 \\ 100s \end{bmatrix} \frac{F(s)}{s^2 + 6s + 25}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \quad \text{ve} \quad F(s) = \frac{1}{s} \quad \text{için,}$$

$$c = x_1 = 4 + 5 e^{-3t} \sin(4t - 126,9^\circ)$$

$$\dot{c} = \dot{x}_2 = 25 e^{-3t} \sin 4t$$

Bu metot kompleks konjuge kökler için kullanıldığında, özel inceleme gerektirmez.

KAYNAKLAR

1. Feedback Control System Analysis-Synthesis
(J.J.D'Azzo-C.H.Houpis)
2. Automotic Control Engineering
(Francis H.Raven)
3. Modern Contron Engineering
(Katsuhiko OGATA)
4. Lineer Control System Analysis and Design
(J.J.D'Azzo - C.H.Houpis)
5. Modern Control Systems
(Richard C.Dort)
6. Modern Control System Theory and Application
(Stanley M.Shinners)
7. Feedback Control Systems
(John Van De Vegte)
8. Prof.Basri Çetin'in ders notları

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında İstanbul'da doğdum. İlk öğrenimimi Moda ilkokulu'nda, orta ve lise öğrenimimi Beşiktaş Atatürk Lisesi'nde tamamladıktan sonra, 1984 yılında Yıldız Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü'ne girerek 1988 yılında aynı bölümden mezun oldum. 1989 yılında yine Elektrik Mühendisliği Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimime başladım. 1988 yılından bu yana aynı okulun Elektrik Makinaları Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevliliği yapmaktayım.

