YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Oyun Teorisi ve Kontrol Mühendisliğine Uyg.

Yüksek Lisans Tezi

Onur Kaya

2006

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OYUN TEORİSİ VE KONTROL MÜHENDİSLİĞİNE UYGULANABİLİRLİĞİ

Elk. Müh. Sedat Onur Kaya

F.B.E Kontrol ve Otomasyon Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Şeref Naci ENGİN

İSTANBUL, 2006

Y. Doç. Dr. Şeref Naci Engin

Y. Doç. Dr. Lale Özyılmaz

Y. Doç. Dr. Haluk Gör

İÇİNDEKİLER

Bölüm 2 Oyun Teorisi

Bölüm 3 Oyun Teorisi ve Optimal Kontrol Kullanarak M.M.S. Tasarımı

SİMGE LİSTESİ

f	fonksiyon
x_0	başlangıç pozisyonu
t_0	başlangıç zamanı
max	maksimum
min	minimum
sup	supremum
inf	infimum
∇	gradyant
A^T	A matrisinin transpozu
$\sum$	toplam işemi
$\int$	integral

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

ÖNSÖZ

Çalışmalarım süresince benden yardımını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Şeref Naci ENGİN'e ve Elk. Müh. Ahmet SÖZÜBİR'e saygılarımı sunarım.

ÖZET

Adından da anlaşıldığı gibi oyun teorisinin ilgi alanına bütün oyunlar girmektedir. Bir oyundan bahsedebilmek için oyuncular, stratejiler ve maliyet fonksiyonu bilinmelidir. Bu üç temel öğe bilindiğinde bir oyun ortaya çıkar.

Oyun teorisi gerçek hayat problemlerine çözüm önermesi ile büyük önem kazanmıştır. Bu problemlere örnek olarak, ordular arası savaş durumları, ekonomiler arası çatışma durumları, işletmeler arası rekabet durumları gibi konular öne çıkar.

Bu tez Oyun Teorisinin, askeri ve iktisadi problemlerin dışında, Kontrol Mühendisliğine uygulanabilirliği üzerine hazırlanmıştır.

ABSTRACT

As it can be understood with its name all the games are concerned by Game Theory. To mention about a game the players, strategies and the cost functions should be known. If these three elements are known, a game will appear.

Game Theory, can provide solutions to the problems which can be come across in real life. As an example, the wars between armies, conflicts between economies or rivalry between firms.

In this thesis investigates the applicability of Game Theory to not only the military and financial strategic problems but also particularly to the Control Engineering area.

1. GİRİŞ

N değişkenli fonksiyonların optimizasyonunda kullanılan Oyun Teorisi en geniş anlamda bir optimizasyon problemidir. Bu tezde sırası ile optimizasyon problemlerine ve onların çözüm yöntemlerine daha sonra bir optimizasyon problemi olan Oyun Teorisine sonunda da Oyun Teorisinin Kontrol Mühendisliğine bir uygulaması olan bir örneğe yer verilmiştir.

Birinci bölüm olan Optimizasyon Yöntemleri'nde ilk olarak optimizasyonun tanımına ve kontrol problemlerinin formüle edilmesi konularına değilmiştir. Daha sonra dinamik ve statik optimizasyon konuları ele alınmıştır. Bu konulardan sonra bir değişkenli fonksiyonların optimizasyon yöntemleri olan Newton Yöntemi ve Fibonacci Yöntemi açıklanmaya çalışılmıştır. N değişkenli fonksiyonların optimizasyon yöntemleri olarak da Hooke ve Jeeves Yöntemi, Nelder ve Mead Yöntemi, Gradyant Yöntemi Düzenlenmiş Hooke ve Jeeves Yöntemi ve son olarak da Gradyant Yöntemi kısaca özetlenmiş ve ilgili işaret akış diagramları çıkarılmıştır.

İkinci bölümde, Oyun Teorisi'nin matematiksel açıklaması yapılmaya çalışılmıştır. Bu açıklama yapılırken üzerinde çokça bahsedilen teoremler ve eşitlikler ispatlarıyla verilmiştir. Ayrıca, konunun daha iyi anlaşılabilmesi için birçok örnek ve çözümleri bu bölümde bulunmaktadır. Bu bölümün ana başlıkları ise, Minimax Eşitlikleri, Matris Oyunları, Karma Stratejiler, Bir Oyunun Karma Yapısı, Minimax Teoremi, Oyun Değeri ve Optimal Stratejiler ve 2x2'lik Oyunlar'dır.

Bu çalışmada incelenen üçüncü ve son bölümde ise Oyun Teorisi ve Optimal Kontrol kullanarak Multiagent Melez Sistem tasarımı anlatılmaya çalışılmıştır. Bu tasarım anlatılırken ilk önce Multiagent Melez Kontrol kısaca özetlenmiş ve bu tasarımın Oyun Teorisel İskeleti çıkartılmıştır. Daha sonraki aşamada Plant'ın modeli verilmiştir. Plant modellendikten sonra Multiagent Melez Kontrol'ü oluşturan katmanlar olan Ayrık Tabaka, Sürekli Tabaka ve Arayüz anlatılmaya çalışılmış ve bir Multiagent Melez Kontrol şeması detaylarıyla açıklanmaya çalışılmıştır. Multiagent Melez Kontrol'ün teorik kısmı incelendikten sonra örnek bir kontrol problemi üzerinde uygulanabilirliği gösterilmiştir. Bu örnekte Oyun Teorisel hesaplamalar ve formülasyonlar kullanılmıştır.

Sonuç bölümünde ise üzerinde incelenen örneğin yorumlanması yapılmıştır. Ayrıca bir optimizasyon problemi olan Oyun Teorisi'nin artıları ve eksileri belirtilmiş, örnek uygulamadaki yeri açıklanmaya çalışılmıştır.

BÖLÜM 1

1.1 Optimizasyon Tanımı

Herhangi bir fiziksel tasarım ve yapımında mühendisler bir çok teknolojik faktörü göz önünde bulundurmak ve değişik aşamalarda tercihler yapmak durumundadırlar. Tüm faktörleri göz önüne almanın temel amacı ortaya konulacak fiziksel sistemin maliyetini ve üretim için harcanacak çabayı en aza indirmek (minimize etmek) ve aynı zamanda sistemden elde edilecek faydayı da azami kılmaktır (maksimize etmek). Üretilecek sistemin maliyeti ve sarf edilecek çaba ya da istenen bir amacı değişkenlerin fonksiyonu olarak ifade edebildiğimiz için, optimizasyon fonksiyonunu maksimize veya minimize edecek kontrol değişkenlerinin değerini bulma yöntemi olarak tanımlayabiliriz. Daha genel olarak optimizasyon; bir fiziksel sistemi gerçeklemede en uygun çözümü elde etme yöntemidir.

1.2 Kontrol Problemlerinin Formüle Edilmesi

Optimal Kontrol Teorisinin amacı bir sistemdeki kontrol işaretlerini belirleyecek kontrol organlarının tasarlanması olduğuna göre , öncelikle optimal kontrol probleminin formüle edilmesi gerekir.Bu başlıca üç aşamada gerçekleşir.

1. Kontrol edilecek sistemin matematiksel modelinin çıkarılması
2. Fiziksel sınırlandırmaların belirlenmesi
3. Davranış ölçütünün belirlenmesi

Matematiksel modelinin çıkarılmasında amaç,olabilir bütün girişlere sistemin yanıtını uygun olarak veren, sistemin en basit matematiksel modelinin elde edilmesidir.

Statik ve dinamik olarak sınıflandırdığımız optimal kontrol problemlerinde statik halde sadece bir fonksiyonu minimize etmek söz konusu olduğunda elimizde optimize edilecek (maksimum veya minimum) bir fonksiyon vardır.Bir de problemin tipine göre fonksiyonun ifade edildiği değişkenlerin fiziksel sınırlandırmaları söz konusudur.

Dinamik halde ise optimize edilecek bir davranış ölçütü ve sitemi kontrol eden kontrol değişkenleriyle durum değişkenlerini ifade edilen durum denklemleri vardır.

Bir fiziksel sistemin matematiksel modeli çıkarıldıktan sonra atılacak ikinci adım,kontrol ve durum değişkenleri üzerine kurulacak fiziksel sınırlandırmaların belirlenmesidir.

Fiziksel sistemde kontrol ve durum değişkenleri üzerinde sınırlandırmaların olması bu değişkenlerin fiziksel sınırların bulunmasından ötürüdür.Örneğin kesiti belirli bir kablodan geçen akımın maksimum bir değeri vardır.Eğer sistemde bu akım bir kontrol veya durum değişkeni ise bir üst sınırı söz konusudur.

Sistemin davranış ölçütü , kontrol ve durum değişkenlerinin bir fonksiyonudur.Ele alınan sistemin,kendisinden istenen görevi ne derecede yerine getirdiğini sayısal olarak ölçmek için , sistemi tasarlayan kişinin bu sisteme ait bir davranış ölçütü belirlemesi gerekir.İşte optimal kontrol,bu davranış ölçütünün duruma göre minimum yada maksimum yapan uygun kontroldür.

1.3 Statik Optimizasyon

Bu çalışmada n değişkenli bir $f(x_1, x_2, ...x_n)$ fonksiyonunun optimumu (maksimum vaya minimum) bulunmaya çalışılmıştır. Eğer p_i ürünlerin x_i miktarıyla üretilen faydayı ifade ediyorsa ; o zaman fonksiyon maksimumlaştırılmaya , eğer üretilen malın maliyetini ifade ediyorsa minimumlaştırılmaya çalışılacaktır.Matematiksel olarak maksimumlaştırma ile minimumlaştırma arasında işaret farkından başka bir fark yoktur .Bir $f(x)$ fonksiyonu bir takım işlemlerle maksimumlaştırılıyorsa , aynı işlemlerle $-f(x)$ fonksiyonu minimumlaştırılıyor demektir.

Fonksiyonun değişkenleri problemin tipine göre sınırlandırılmış veya sınırlandırılmamış olabilir. Örneğin değişkenler üretilmesi gereken malın miktarı ise bunların fiziksel olarak sınır değerleri olacaktır. Böylece optimisazyon problemlerinin çözümü de sınır değerleri göz önüne alınarak yapılacaktır. Bölüm 1.4 ve 1.7 de değişkenlerin sınırlı olmadığı, Bölüm 1.11 de ise sınırlı olduğu optimizasyon problemleri göz önüne alınacaktır. Her bölümde kullanılan iterasyon yöntemi anlatılmış, buna ait işaret akış diagramları çıkartılmıştır.

1.3. Dinamik Optimizasyon

Genel olarak durum uzayı denklemleriyle tanımlanmış dinamik bir non-lineer sistemi ele alalım.

$$\frac{dx}{dt} = f(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t) \tag{1.1}$$

$$\vec{x}(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

Burada $\vec{x}$, n boyutlu bir durum vektörü, $\vec{u}$, m boyutlu kontrol vektörü ve f ise sürekli bir vektör fonksiyonu olsun. $\vec{x}(t_0)$ başlangıç değeri bilinmektedir. Denklem (1.1) birçok fiziksel sistemi tanımlamada kullanılabilir. Bir an için böyle bir fiziksel sistemi gerçeklediğimizi düşünelim. Modelde öneli olan $\vec{u}(t)$ $(t_0 < t < t_f)$ kontrol yörüngesini seçmektir. Burada t_f sabit ve ya serbest olabilir. Örneğin sistemimiz, sürekli halde normal çalışma koşulları içerisindeyken bir bozucu etkisi söz konusu olduğunda, dinamik davranış, yörünge boyunca kontrol ve durumu minimize eden bir kontrol vektörüyle temsil edilebilir. Böylece $\vec{u}$ vektörünü seçmede uygun bir yol davranış ölçütünü minimize eden $\vec{u}$ vektörünü bulmak olabilir.

$$j = \partial(\vec{x}(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} (\varphi(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)dt \tag{1.3}$$

Bu davranış ölçütünde ∂ ve φ ve genellikle non-lineer fonksiyonlardır. Model denklemimiz fiziksel bir sistemi simgelediğinden, biliyoruz ki fiziksel sistemde kontrol ve durum değişkenleri sonsuz olamaz. Bu durumda durum ve kontrol değişkenlerini sınırlamak zorundayız. Kontrol değişkenleri, durum değişkenleri ile ilgili olduğundan, kontrol değişkenleri durum değişkenleri üzerinde herhangi bir sınır koşulunu bozucu etki olarak göstermemelidir. Örneğin sıcaklığın $T + \Delta T$ arasında olduğunda reaksiyon veren bir kimyasal reaktör düşünelim. Bu durumda değişkenimiz $T - \Delta T < T < T + \Delta T$ sınır koşulunu sağlamalıdır. Kontrol değişkenimiz de ,eğer yakıt akış hızı ise, boruların çapına bağlı olarak sınırlı bir değerde kalacaktır.

Şimdi tipik birkaç kontrol problemini ve bu problemlerde seçilen davranış ölçütlerini görelim.

a) Minimum zaman problemi: Bu problemde amaç, göz önüne alınan sistemi keyfi herhangi bir $\vec{x}(t_0) = x_0$ durumundan, belirli bir s hedef kümesine minimum zamanda transfer etmektir. Minimize edilecek davranış ölçütü;

$$j = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} dt \qquad (1.4)$$

şeklindedir. Buradaki t_f zamanı , $\vec{x}(t)$ durumu ile S kümesinin ilk kesiştiği andır.

b) Hedef Problemi :Bu problemde amaç, son zamandaki durumun, son zamanda arzu edilen durumdan olan sapmalarını minimize etmektir. $\vec{r}(t_f)$ final zamanında istenen durumunu göstermektedir. Bu problem için olabilecek davranış ölçütü;

$$j = \sum_{i=1}^{n} [x_i(t_f) - r_i(t_f)]^2 \qquad (1.5)$$

şeklindedir. Pozitif ve negatif sapmalar eşit olarak istenmediğinden hatanın karesi alınmıştır. Hatanın mutlak değeri yukarıdaki ifade yerine kullanılabilir fakat matematiksel işlem açısından kuadratik şeklin kullanılması daha uygun olacaktır. Matematiksel notasyonu kullanarak aynı davranış ölçütü;

$$j = [\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)]T[\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)] \qquad (1.6)$$

veya

$$j = \left\| \vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f) \right\|^2 \qquad (1.7)$$

şeklinde yazabiliriz. $\| \vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f) \|$, $[\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)]$ vektörünün normu olarak adlandırılır. Söz konusu davranış ölçütünü genelleştirmek için kuadratik şekle reel simetrik yarı kesin pozitif *(nxn)* boyutlu bir h ağırlık merkezi eklenir ve davranış ölçütü aşağıdaki gibi olur.

$$j = [\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)]^T H [\vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f)] \qquad (1.8)$$

H ağırlık matrisinin birim matris olması durumunda, başlangıçta yapılan eşitlikler, birbirine eşit olur. H ağırlık matrisinin köşegen bir matris olduğunu kabul edelim. H'ın elemanlarının değerleri ayarlanarak durum değişkenlerinin istenen durumdan olan sapmalarına verilen önem ayarlanabilir. Örneğin h_{ii} elemanı diğer elemanlara göre büyütülürse, $x_i(t_f)$ 'in istenen $r_i(t_f)$ durumunda olan sapmasına büyük önem verilmiş olur. Oysa h_{jj} sıfır yapılacak olursa $x_j(t_f)$ durum değişkeninin değerinin problem için bir önemi olmadığı anlaşılır.

c) Minimum kontrol enerjisi problemi : Burada amaç; belirli bir sistemi, herhangi bir $\vec{x}(t_0) = x_0$ başlangıç durumundan belirli bir s hedef kümesine minimum kontrol enerjisi harcayarak götürmektir.

Minimum kontrol enerjisi kavramı özel fiziksel uygulamalara dayandığı için, davranış ölçütü çeşitli şekillerde olabilir. Örneğin bir uzay aracını göz önüne alalım ve $u(t)$ aracın roketinin itme gücü olsun. İtme gücü yakıt harcama hızı ile doğru orantılı olduğundan toplam yakıt harcamasını minimize etmek için davranış ölçütü;

$$j = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| \; dt \tag{1.9}$$

biçiminde olur. Eğer birkaç tane kontrol değişkeni varsa ve i. kontrolün kontrol enerjisi harcama hızı, $c_i \mid u_i \mid$, $i = 1,2 \ldots\ldots\ldots m$ (c_i orantı sabitidir) şeklinde ise

$$j = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} \beta |u_i(t)| \, dt \tag{1.10}$$

eşitliği ile verilen davranış ölçütünün minimize edilmesi, harcanan kontrol enerjisinin minimize edilmesi anlamına gelir.

d) İzleme problemi : Bu problemde amaç, $[t_0 , t_f]$ zaman aralığında, sistem durumu $\vec{x}(t)$ 'yi mümkün olduğunca istenen $\vec{r}(t)$ durumuna yakın tutmaktır. Seçilen davranış ölçütü;

$$j = \int_{t_0}^{t_f} \| \vec{x}(t_f) - \vec{r}(t_f) \|^2_{Q(t)} \, dt \qquad (1.12)$$

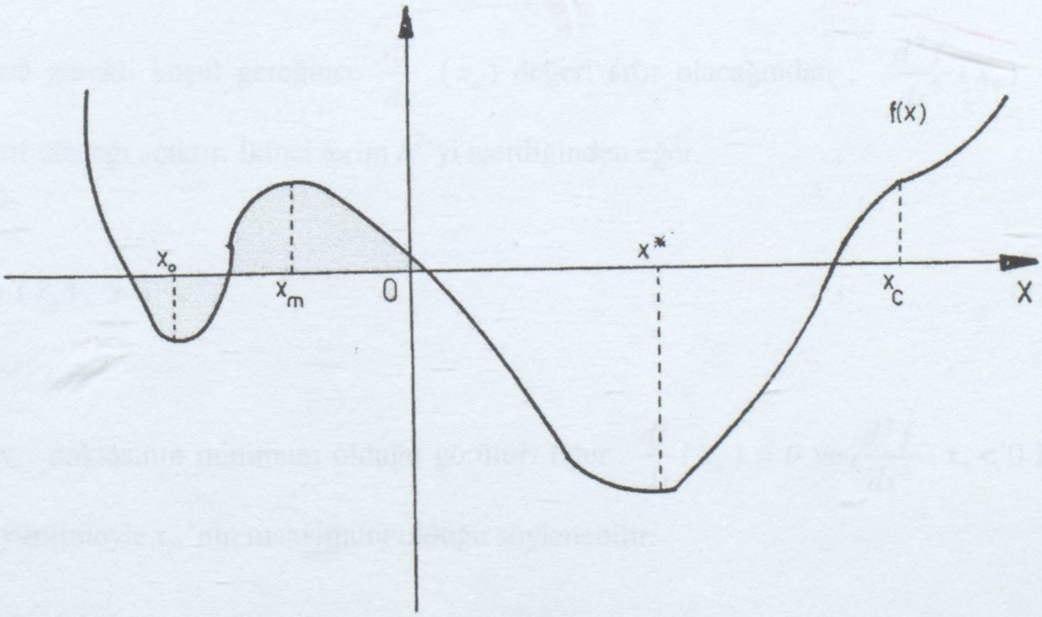
biçimindedir.bu eşitlikte $Q(t)$, $t \in | t_0, t_f |$ için reel simetrik yarı kesin pozitif bir matristir. $Q(t)$ matrisinin elemanları, durum değişkenlerinin istenen durumdan olan sapmalarına verilen öneme göre ayarlanmakta ve aynı zamanda nümerik değerlerin normalize edilmesinde kullanılmaktadır. Örneğin Q matrisi diyagonal sabit elemanlı bir matris ise q_{ii}'nin sıfır olması, $x_i(t)$ 'nin istenen $r_i(t)$ durumundan olan sapmalarının fazla önem taşımadığı anlamına gelir.

Statik Optimizasyonda Kullanılan Yöntemler

1.4 Bir değişkenli fonksiyonların optimizasyonu

Bir $f(x)$ fonksiyonunun x_o da bir bölgesel minimumu olsun. δ pozitif bir sayı ise $| x - x_o | < \delta$ ve $f(x) \geq f(x_0)$ biçiminde bir ifade yazılabilir.

Eğer tüm x değerleri için $f(x) \geq f(x^*)$ ise $f(x)$ fonksiyonunun x^* noktasında mutlak minimumu vardır.



Şekil 1.1 Mutlak ve bölgesel minimumu olan bir değişkenli bir fonksiyon [H. Bakoğlu , 1991]

Şekilden de görüldüğü gibi fonksiyon ve türevleri sürekli ve hem x_o hem de x^* daki $\frac{df}{dx}$ değeri sıfırdır. Böylelikle $\frac{df}{dx} = 0$ denklemin çözümü, hem x_o hem de x^* dır. x_m bölgesel maksimum, x_c değeri ise bir dönüm noktasıdır. x_c ve x_m değerleri ayrıca yukarıdaki denklemin bir çözümüdür. $\frac{df}{dx} = 0$ denklemi bu durumda yalnızca gerekli koşuldur. Dolayı ile bir yeterli koşul bulunması gerekir.

$\frac{df}{dx}$ ifadesi x_o ve x^*' da negatiften pozitife işaret değiştirmektedir. x_m' de ise işaret pozitiften negatife işaret değiştirmektedir. x_c 'de ise bir işaret değişimi söz konusu değildir. Buradan, türev fonksiyonu minimumda azalan maksimumda artan bir fonksiyon olduğu söylenebilir. $\frac{df}{dx}$ fonksiyonunun azalan mı artan mı olduğu bir kez daha türev alınarak bulunabilir. *f(x)* fonksiyonu x_o civarında Taylor Serisine açılırsa;

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\frac{df}{dx}(x_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2} + ... \qquad (1.13)$$

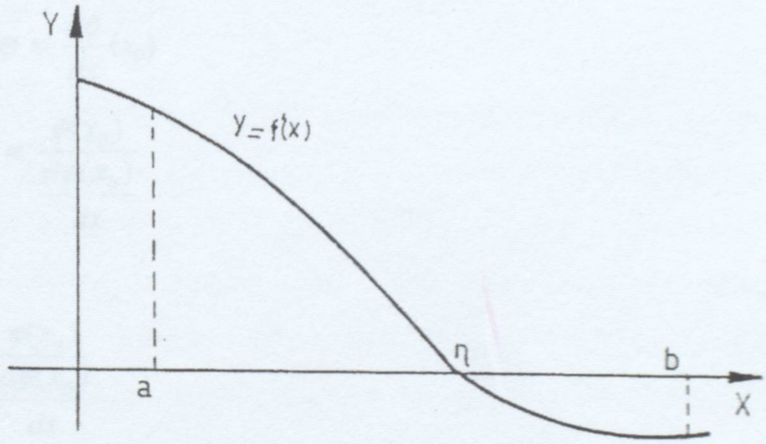
Eğer x_o bir minimum noktasıysa bütün küçük *h* değerleri için denklem pozitif olacaktır. Ayrıca gerekli koşul gereğince $\frac{df}{dx}(x_o)$ değeri sıfır olacağından , $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_o)$ değerinin pozitif olacağı açıktır. İkinci terim h^2'yi içerdiğinden eğer,

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_o) > 0 \qquad (1.14)$$

ise x_o noktasının minimum olduğu görülür. Eğer $\frac{df}{dx}(x_m) = 0$ ve $\frac{d^2 f}{dx^2}$ $x_m < 0$ ise benzer akıl yürütmeyle x_m'nin maksimum olduğu söylenebilir.

1.5 Newton Yöntemi

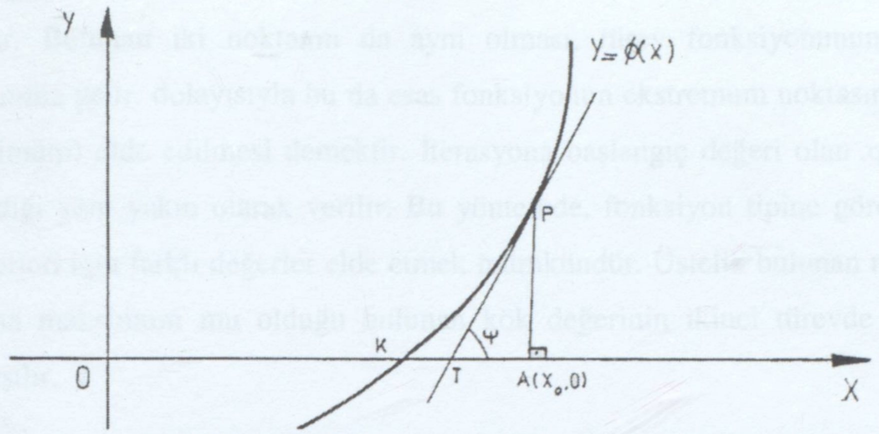
Bir değişkenli fonksiyonlar için fonksiyonun dönüm noktalarını bulmakta klasik yol $\frac{df}{dx}(x) = 0$ denklemini çözmektir. Bu denklemi çözmek her zaman kolay olmayabilir. Bu yüzden bunun çözümü için nümerik bir algoritma bulmamız gerekir. Eğer $y = \frac{df}{dx}(x)$ fonksiyonu için $\frac{df}{dx}(a)$ ve $\frac{df}{dx}(b)$ değerlerinin birbirine göre ters işaretli olduğu a ve b gibi iki değer bulunursa, a ve b değerleri arasında bir kök olduğu sonucuna ulaşılabilir.



Şekil 1.2 Newton Yönteminin kullanıldığı tipik bir türev fonksiyonu [H. Bakoğlu., 1991]

Newton Yöntem şu şekilde açıklanabilir;

Şekil 1.2'den görüldüğü gibi K, $\phi(x) = 0$ fonksiyonunun köküdür. PT ise eğrinin P noktasındaki teğeti olsun. T ise bu teğetin x ekseni ile kesiştiği nokta olsun. OT'nin K kök değerine daha da yaklaştığı şekilden görülmektedir. Şekilde $\phi(x) = 0$ eğrisi , $\frac{df}{dx}(x) \equiv \phi(x)$ olarak alınmıştır.



Şekil 1.3

Türev fonksiyonunun kökünün bulunmasında kullanılan yöntemi açıklayıcı bir türev fonksiyonu [H. Bakoğlu., 1991]

$$OT = OA - TA = x_0 - TA \tag{1.15}$$

$$\frac{PA}{TA} = \tan\varphi = \frac{d\phi}{dx}(x_o) \tag{1.16}$$

$$TA = \frac{PA}{\dfrac{d\phi}{dx}} = \frac{\phi(x_0)}{\dfrac{d\phi(x_0)}{dx}} \tag{1.17}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{\phi(x_0)}{\dfrac{d\phi(x_0)}{dx}} \tag{1.18}$$

Benzer şekilde bir akıl yürütme ile x_2 noktası ;

$$x_2 = x_1 - \frac{\phi(x_1)}{\dfrac{d\phi(x_1)}{dx}} \tag{1.19}$$

biçiminde elde edilir. İfadeyi genelleştirecek olursak;

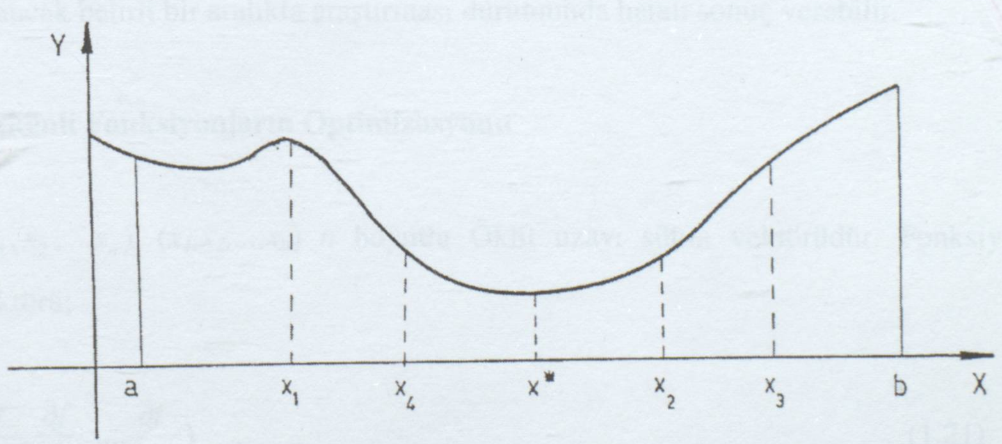
$$x_{r+1} = x_r - \frac{\phi(x_r)}{\dfrac{d\phi(x_r)}{dx}} \tag{1.20}$$

eşitliği elde edilir. Bir önceki nokta ile bir sonraki nokta eşit oluncaya kadar itersyona devam edilir. Bulunan iki noktanın da aynı olması, türev fonksiyonunun kökünün bulunması anlamına gelir. dolayısıyla bu da esas fonksiyonun ekstremum noktasının (maksimum ya da minimum) elde edilmesi demektir. İterasyona başlangıç değeri olan x_0, minimumun tahmin edildiği yere yakın olarak verilir. Bu yöntemde, fonksiyon tipine göre değişik x_0 başlangıç değerleri için farklı değerler elde etmek mümkündür. Üstelik bulunan noktanın minimum mu yoksa maksimum mu olduğu bulunan kök değerinin ikinci türevde yerine konulması ile anlaşılır.

Ayrıca minimum noktasının mutlak minimum mu yoksa bölgesel minimum mu olduğu, ancak değişik başlangıç değerleri ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması ile anlaşılır.

1.6 Fibonacci Yöntemi

Fonksiyonun minimumunu n tane iterasyon sonunda, mümkün olan en küçük aralıkta bulma yöntemine dayanmaktadır. Burada n'nin değerine karar verilmesi sorun teşkil etmektedir. Bunun için başlangıçta fonksiyonun aldığı değerler konusunda bir ön araştırmaya gerek vardır. Bu değerler alındıktan sonra fonksiyon ve onun minimumu hakkında bilgiye sahip olunabilir. Şekil 1,4'degörüldüğü gibi (x_1, x_3) başlangıç aralığında bir $f(x_2)$ değerini bildiğimizi varsayalım. Daha sonra bir $f(x_4)$ değeri tayin edebilirsek, yeni aralığımız, (x_2,x_4) olacaktır. Böylelikle aralık genişliği küçültülmüş olacaktır.



Şekil 1.4 Belirli bir başlangıç aralığında fonksiyonun minimumunu bulmada kullanılan Fibonacci Yöntemini açıklayıcı tek değişkenli bir fonksiyon örneği [H. Bakoğlu., 1991]

x_2-$x_1 = L$, $x_3 - x_2 = R$, $L > R$ olduğunu varsayılsın ve bu aralıkta bir $f(x_4)$ değeri tayin edildiği düşülsün.

i) Eğer $f(x_4) < f(x_2)$ ise yeni aralık (x_1, x_2) , aralık uzunluğu ise L olacaktır.

ii) Eğer $f(x_4) > f(x_2)$ ise yeni aralık (x_4, x_3) olacak ve aralık uzunluğu x_3-x_4 olacaktır.

Yukarıdaki sonuçlardan hangisinin gerçekleşeceği kesin olarak bilinmediği için x_4'ü , x_2-x_1 ve x_3-x_4 aralığını minimize etmek için seçilir. Bunu da x_3-x_4 ve x_2-x_1 ifadelerini birbirine eşit seçerek gerçeklenebilir. Yani x_4'ü x_2'e göre simetrik seçmek gerekir. x_4'ün bunun dışındaki herhangi bir durumu L aralığından daha büyük olacaktır.

Aynı işlem (x_1, x_2) aralığında yapılırsa, bu aralıkta yer alan x_4'ün fonksiyon değeri bilindiğinden x_4'e simetrik bir nokta bulunur. Eğer aralık olarak (x_3, x_4) söz konusu ise bu sefer x_2'ye göre simetrik olan diğer bir nokta bulunur.

N. iterasyonda (*n*-*1*). noktaya göre simetrik bir nokta bulunur. Bu adımda en büyük aralık uzunluğu azalmasını sağlamak için sondan bir önceki aralığı ikiye bölmek yeterlidir.

Fibonacci Yönteminde amaç *n* tane iterasyon sonunda, başlangıç aralığını daha da küçülterek ε değerine getirmektir. ε değeri bize *n*. iterasyon sonundaki aralık uzunluğunu vermektedir. Böylelikle ε aralığının ortasındaki değer , $\varepsilon/2$ hatayla minimum değerdir. Bu yöntem, minimumu ancak belirli bir aralıkta araştırması durumunda hatalı sonuç verebilir.

1.7 N Değişkenli Fonksiyonların Optimizasyonu

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ $(x_1, x_2, \ldots. x_n)$ *n* boyutlu Öklit uzayı sütun vektörüdür. Fonksiyonun gradyant vektörü;

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots. \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \tag{1.21}$$

olarak gösterilebilir. $f(x)$ fonksiyonun Hessian matrisi ise $G(x)$ ile gösterilecektir.

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{1.22}$$

f(x) fonksiyonunun x_0' da bir bölgesel minimumu olsun. δ pozitif bir sayı olmak üzere;

$|x-x_0| < \delta$, $f(x) \geq f(x_0)$ dır.

Mutlak minimum için ise $f(x) \geq f(x^*)$ ifadesi bütün *x* ler için geçerli ise söz konusudur.

$$f(x_0 + h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ... x_h) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, ... x_n) + ...$$

$$h^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2} h^T G(x_o) h + ... \tag{1.23}$$

Eğer x_0 bir minimumsa , birinci dereceden kısmi türevlerin her biri $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,....,n)$ etkisiz olmalıdır. Eğer değilse yaklaşık olarak h_i değeri seçerek $f(x_0 + h) - f(x)$ ifadesi negatif yapılabilir. Böylece x_0 noktasının bir minimum olması için gerekli koşul;

$$\nabla f(x_0) = 0 \tag{1.24}$$

yani;

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i=1,....,n) \tag{1.25}$$

$f(x_0 + h) - f(x)$ ifadesinin işareti ise

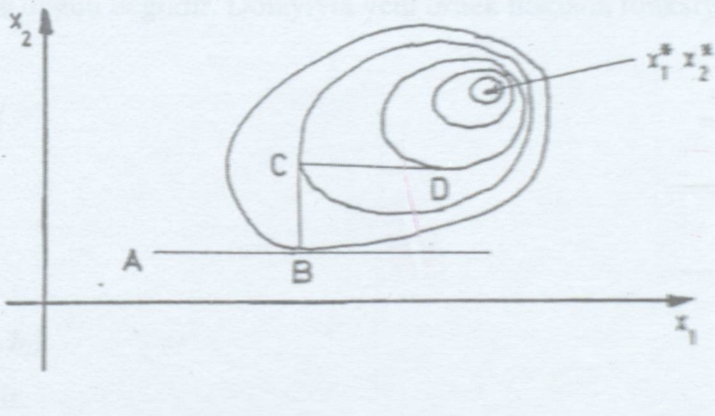
$$\frac{1}{2} h^T G(x_o) h \tag{1.26}$$

ifadesinden irdelenebilir. Eğer $G(x_0)$ kesin pozitifse, bu bütün *h* değerleri için de pozitiftir. Böylelikle gerek ve yeter koşullar aşağıdaki gibi verilmiştir.

$\nabla f(x_o) = 0$ ve $G(x_0)$ kesin pozitif olmalıdır.

N değişkenli fonksiyonların minimumunu bulmada direk araştırma yöntemleri de geliştirilmiştir. Direk araştırma yöntemi sadece fonksiyon değerlerini kullanan yöntem demektir. Bu tez içerisinde oldukça sık kullanılan iki yöntem ele alınacaktır.

İki değişkenli bir fonksiyon düşünelim. Şekil 1.5'de olduğu gibi fonksiyonun minimum noktasının (x_1^*, x_2^*) da olduğunu kabul edelim. Rasgele bir A noktası seçelim ve yönümüz de x eksenine paralel olsun. Böylelikle ilerlettiğimiz paralel doğrunun fonksiyona kestiği noktayı bulabiliriz. Bu nokta da B noktası olsun. B noktasından x_2 eksenine paralel çizelim. Böylelikle C noktasını ve sonrada D noktasını elde etmiş oluruz. Bu işlemlere devam ederek minimum noktalar olan (x_1^*, x_2^*) noktasını elde edebiliriz. Bu yöntem ancak fonksiyonun bir tane minimum noktası olduğunda geçerlidir. Uygulamada ise yavaş işleyen bir yöntemdir. Bu yüzden daha kullanışlı ve uygulanabilir yöntemler bulmak gerekir.



Şekil 1.5 Minimumu (x_1^*, x_2^*) olan iki değişkenli bir fonksiyon [H. Bakoğlu., 1991]

1.8 Hooke ve Jeeves Yöntemi

Yöntem aşağıda anlatılan örnek adımların başarıya ulaşması ile elde edilen bir temel nokta civarında araştırma adımlarından oluşmuştur. İzlenen yol ise şöyledir;

i) Her bir x_j ($j = 1,2,...n$) değişkeni için bir b_1 temel noktası ve h_j adım genişliği seçilir.

ii) b_1 civarında bir araştırma yapılır. Bundan amaç, fonksiyonun bölgesel davranışı hakkında bilgi sahibi olmaktır. b_1 civarındaki araştırma aşağıdaki biçimde olur;

a) $f(b_1)$ değeri bulunur.

b) Her bir değişken adım genişliği ilave edilerek sıra ile değiştirilir. Böylece $f(b_1 + h_1e_1)$ değeri bulunur. Burada e_1 , x_1 ekseni yönündeki birim vektördür. Eğer bu değerle fonksiyonun değeri azalıyorsa , b_1 yerine $b_1 + h_1e_1$ değeri atanır. Eğer azalmıyorsa bu kez $f(b_1 - h_1e_1)$ değeri atanır. Eğer söz konusu işlemlerin hiçbirinde bir azalma söz konusu olmuyor ise x_2 değeri değiştirilir yani $f(b_1 + h_1e_1)$ yapılır.

c) Eğer tüm bu işlemlere rağmen $b_2 = b_1$ ise yani fonksiyonda bir azalma bulunmamışsa b_1 temel noktası civarındaki araştırma bu kez adım genişliği küçülterek tekrar edilir.

d) Eğer $b_2 \neq b_1$ ise bu kez örnek adım gerçekleştirilir.

iii) Örnek adımda, yukarıdaki araştırma ile elde edilen bilgilerden faydalanılır ve tayin edilen yön doğrultusunda hareket edilerek fonksiyonun minimizasyonu gerçekleştirilir. Bunun için aşağıdaki yöntem izlenir.

a) $b_2 - b_1$ doğrultusunda b_2 temel noktasından uzağa gitmek fonksiyonda zaten bir azalma yapacağından akla uygun değildir. Dolayıyla yeni örnek noktada fonksiyon değeri hesaplanır.

$$P_1 = b_1 + 2(b_2 - b_1) \tag{1.27}$$

genel olarak;

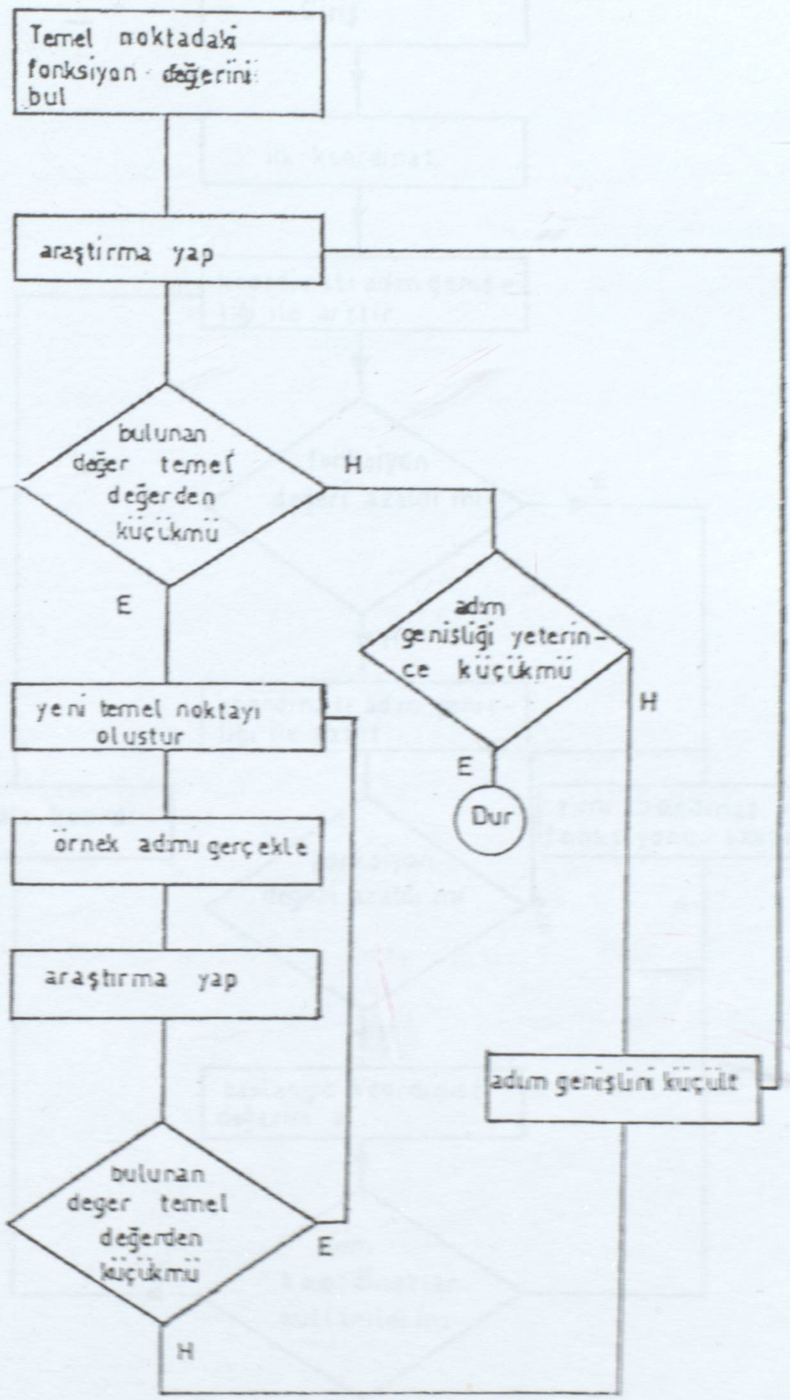
$$P_i = b_i + 2\,(b_{i+1} - b_i) \tag{1.28}$$

şeklinde yazılabilir.

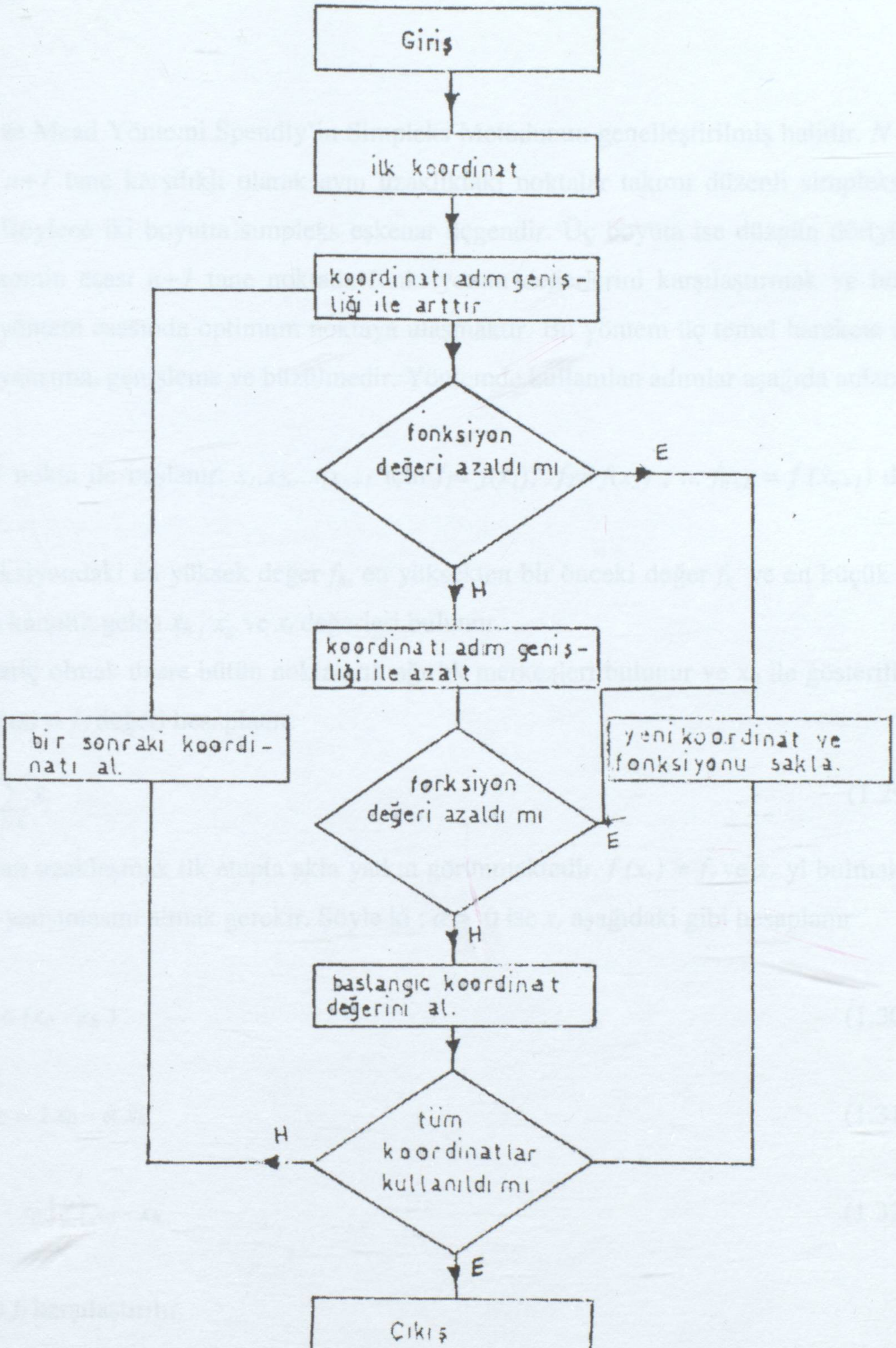
b) Böylece P_1 (P_i) civarında araştırmaya devam edilir.

c) Eğer *iii.* adımdaki en küçük değer b_2 (b_{i+1}) temel noktasında elde edilen değerden daha küçükse yeni temel nokta b_3 (b_{i+2}) olarak atanır. Bu durumda *iii-a* durumu tekrarlanır.

iv) Adım genişlikleri önceden saptanan küçük bir değere geldiğinde işlem durdurulur.



Şekil 1.6 Hooke ve Jeeves Yöntemine ilişkin işaret akış diyagramı [M. Karamürsel ,1997]



Şekil 1.7. Hooke ve Jeeves Yönteminde araştırma aşamasına ilişkin işaret akış diyagramı [M. Karamürsel.,1997]

1.9 Nelder ve Mead Yöntemi

Nelder ve Mead Yöntemi Spendly'in Simpleks Metodunun genelleştirilmiş halidir. N boyutlu uzayda $n+1$ tane karşılıklı olarak aynı uzaklıktaki noktalar takımı düzenli simpleks olarak bilinir. Böylece iki boyutta simpleks eşkenar üçgendir. Üç boyuta ise düzgün dörtyüzlüdür. Bu yöntemin esası $n+1$ tane noktada fonksiyonun değerlerini karşılaştırmak ve böylelikle iteratif yöntem esasında optimum noktaya ulaşmaktır. Bu yöntem üç temel harekete dayanır. Bunlar yansıma, genişleme ve büzülmedir. Yöntemde kullanılan adımlar aşağıda anlatılmıştır.

a) $n+1$ nokta ile başlanır. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ için $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, ... $f_{n+1} = f(x_{n+1})$ değerleri bulunur.

b) Fonksiyondaki en yüksek değer f_h, en yüksekten bir önceki değer f_k ve en küçük değer f_l ve buna karşılık gelen x_h , x_g ve x_l değerleri bulunur.

c) x_h hariç olmak üzere bütün noktaların ağırlık merkezleri bulunur ve x_0 ile gösterilir. Daha sonra $f(x_0) = f_0$ değeri hesaplanır.

$$x_o = \frac{1}{n} \sum_{i \neq h} x_i \qquad (1.29)$$

d) x_h dan uzaklaşmak ilk etapta akla yatkın görünmektedir. $f(x_r) = f_r$ ve x_r yi bulmak için x_0 da x_h ın yansımasını almak gerekir. Şöyle ki ; $\alpha >$ 0 ise x_r aşağıdaki gibi hesaplanır

$$x_r - x_0 = \alpha (x_0 - x_h) \qquad (1.30)$$

$$x_r = (1 + \alpha) x_0 - \alpha x_h \qquad (1.31)$$

$$\alpha = | x_r - x_0 | / | x_0 - x_h \qquad (1.32)$$

e) f_r ile f_l karşılaştırılır.

i) Eğer $f_r < f_l$ ise en düşük fonksiyon değeri elde dilmiş olunabilir. x_0 dan x_r ye doğru olan yönde ilerlemek bunun için iyi bir çözüm olabilir. Bu yüzden x_e yi bulmak için bu yönde bir genişleme yapmak gerekir.

$$x_e - x_0 = \upsilon (x_r - x_0) , \ \upsilon = x_e - x_0 / x_r - x_0 \qquad (1.33)$$

$$x_e = \upsilon\, x_r + (1 - \upsilon)\, x_0 \tag{1.34}$$

υ : Genişleme faktörü

a) Eğer $f_e < f_l$ ise x_h yerine x_e konulur ve $n+1$ tane noktanın simpleksi test edilir.

b) Eğer $f_e > f_l$ ise x_e değeri işimize yaramaz. Bu demektir ki gidilen yön doğru değildir. x_r yerine x_h konulur yaklaşım için test edilir, eğer $f_e < f_l$ değilse (b) adımına geri dönülür

ii) Eğer $f_r > f_l$ fakat $f_r < f_g$ ise x_r yerine x_h konulur, yaklaşım için test edilir. Eğer yukarıdaki önermelerin tersi geçerli ise (d) adımına geri dönülür.

iii) Eğer $f_r > f_l$ ve $f_r > f_g$ ise (f) adımına geçilir.

f) f_r ile f_h ın kıyası

i) Eğer $f_r > f_h$ ise direk olarak büzülme adımına geçilir. Eğe $f_r < f_h$ ise x_r yerine x_h ve f_r yerine f_h konulur ve f-ii adımına geçilir.

ii) Bu durumda $f_r > f_h$ dır. Şu açıktır ki $x_h - x_0$ doğrultusundan epeyce uzağa hareket edilmiştir. Bu durumda x_c yi bulmakla bunu düzeltmeye çalışılmalıdır. Eğer $f_r > f_h$ ise aşağıdaki biçimde bir x_c noktası bulunur.

$$x_c - x_0 = \beta\,(x_h - x_o) \tag{1.35}$$

β : büzülme katsayısıdır ($0 < \beta < 1$)

$$x_0 = \beta\, x_h + (1 - \beta)\, x_c \tag{1.36}$$

Eğer $f_r < f_h$ ise öncelikle x_r yerine x_h konur. Bu durumda;

$$x_c - x_0 = \beta\,(x_r - x_0) \tag{1.37}$$

$x_c = \beta\, x_r + (1-\beta)\, x_0$ (1.38)

biçiminde olur.

g) bu adımda da f_c ile f_h karşılaştırılacaktır.

i) Eğer $f_c < f_h$ ise, x_c yerine x_h konur. Eğer tersi ise (b) adımına geri dönülür.

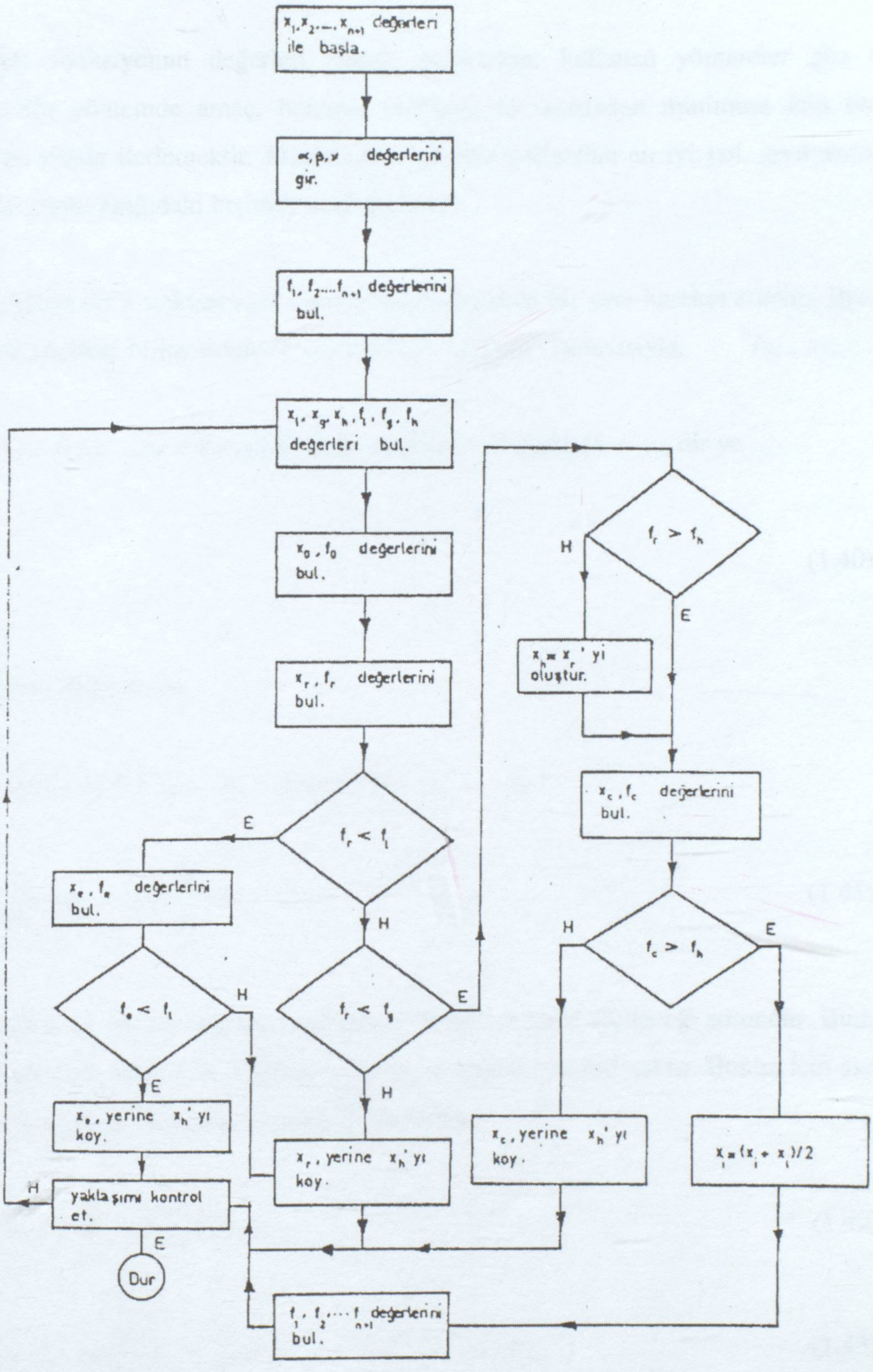
ii)Eğer $f_c > f_h$ ise, f_h dan daha küçük değerler bulma çabası başarısızlığa uğramıştır. Bu durumda (h) adımına geçilir.

h) Bu adımda en düşük fonksiyon değerinin elde edildiği noktadan (x_l) simpleksin her bir noktasındaki uzaklığı bilmekle bulunan simpleksin büyüklüğü azaltılır. Bu durumda; x_i yerine $x_l + 0{,}5\ (x_i - x_l)$ konur. Böylelikle $i = 1, 2, \ldots, n+1$ için f_i ler hesaplanır, yaklaşım için kontrol edilir.

i) Yaklaşım kontolü sağlanan küçük bir ε değerinden daha küçük fonksiyon değerlerinin standart sapması üzerine kurulmuştur.

$$\partial^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f^2{}_i - f}{n+1} \qquad (1.39)$$

Burada $f = \sum \frac{f_i}{n+1}$ dir. Eğer $\sigma < \varepsilon$ ise bütün fonksiyon değerleri birbirine çok yakındır. Uygulamalar açısından $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$, $\upsilon = 2$ sabitleri alınabilir. Yönteme ait işaret akış diagramı aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.8 Nelder ve Nead Yöntemine ilişkin işaret akış diyagramı [M. Karamürse.,1997]

1.10 Gradyant Yöntemi

Bu bölümde fonksiyonun değerleri yerine gradyantını kullanan yöntemler göz önüne alınacaktır. Bu yöntemde amaç, bulunan herhangi bir noktadan minimum için önceden kestirilen bir yönde ilerlemektir. Minimumu bulmada kullanılan en iyi yol, gradyantın tersi olan yöndür. Bunu aşağıdaki biçimde açıklayabiliriz.

Verilen herhangi bir x noktasından x+hd komşuluğundaki bir yere hareket edelim. Burara da herhangi bir yöndeki birim vektör, h ise adım genişliğidir. Dolayısıyla, $(x_1 , x_2, \dots , x_n)$ den

$(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots x_n + \delta x_n)$ gidildiği varsayılsın. Burada $\delta x_i = h_{di}$ dir ve

$$\sum_{i=1}^{n} d^2{}_i = 1 \tag{1.40}$$

Fonksiyondaki değişim ise

$$df = f(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots x_n + \delta x_n) - f(x_1 , x_2, \dots , x_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial x_n \tag{1.41}$$

Biçiminde olur. (1.40) ile belirtilen eşitlikte d_i değerinin nasıl seçileceği sorundur. Bunun için kıstas df ifadesinde en büyük değişimi yapacak d_i değerlerini bulmaktır. Bunun için aşağıdaki tanımlanan Lagrange çarpanları metodu kullanılırsa;

$$\phi(d_1, d_2, \dots d_n) = df + \lambda(\sum d_i{}^2 - 1) \tag{1.42}$$

$$\phi(d_1, d_2, \dots d_n) = h(\frac{\partial f}{\partial x_1} d_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d_2 + \dots + \lambda(d_1{}^2, d_2{}^2, \dots, d_{n-1}{}^2) \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_j} = h\frac{\partial f}{\partial x_j} + 2\lambda d_j \qquad (j = 1,2,\dots,n) \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial d_j} = 0\,, \quad d_j = -\frac{h}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{1.45}$$

Yukarıdaki eşitlikler yorumlanmak istenirse;verilen küçük bir h adımı için fonksiyonda en büyük bölgesel artım *d*'nin yönünün $\nabla f(x)$ ve ya $g(x)$in yönü ile aynı olması ile sağlanmaktadır. Dolayısı ile steepest descent'in yönü $-\nabla f(x)$ veya $-g(x)$ yönünde olmalıdır. (1.41)'deki denklemi daha değişik biçimde yazarsak;

$$df = |\nabla f(x)|\ |dx|\ cos\ \phi \tag{1.46}$$

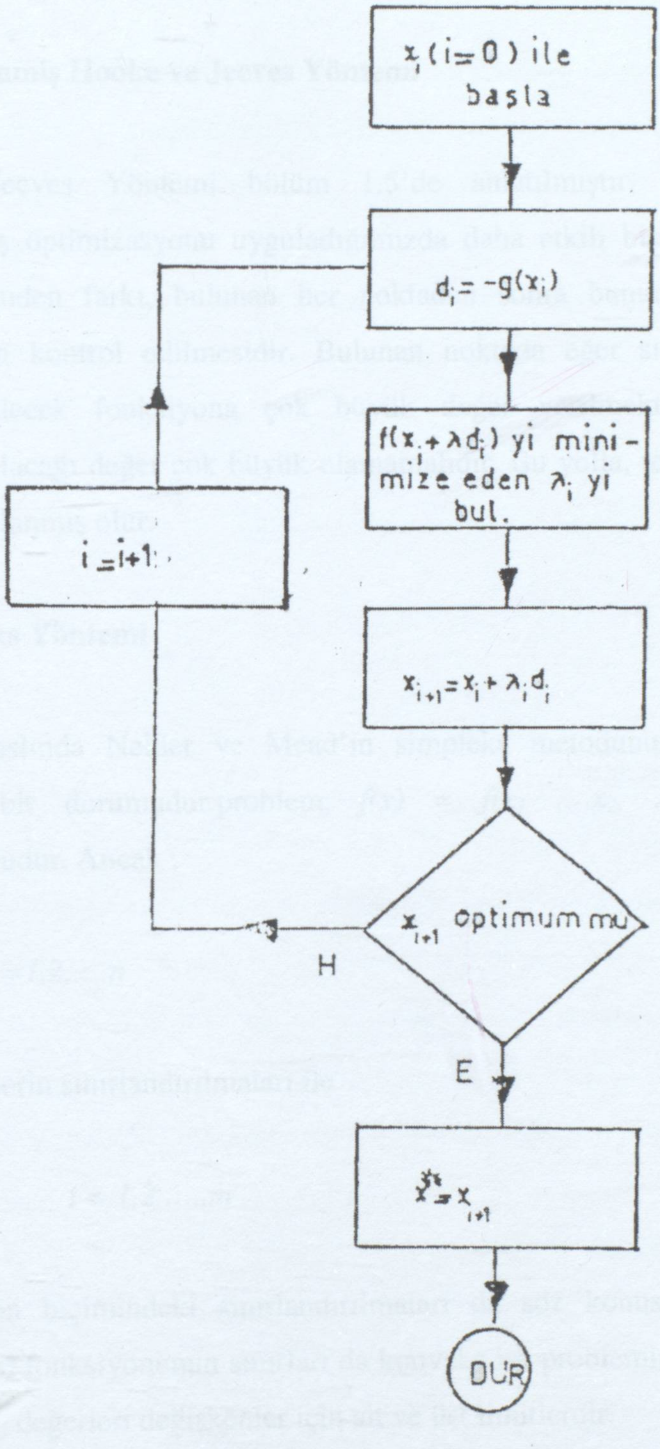
olur. Burada ϕ açısı , dx ile $\nabla f(x)$ arasındaki açıdır. Verilen bir dx büyüklüğü için *df*'yi minimum yapmak ϕ açısını 180^0 seçmekle mümkündür. Dolayısı ile *dx*'in yönü - $\nabla f(x)$ yönünde olmalıdır.

$$f(x_1 + d_1\,,\ x_2 + d_2, \ldots\ldots x_n + d_n\ ) = f\ (x_1\,,\ x_2, \ \ldots.\ ,\ x_n\ ) \tag{1.47}$$

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} d_j \tag{1.48}$$

Steepest descent yöntemi gradyant yönünün bu özelliğinden yararlanır. Böylece herhangi bir x_i noktasında iken fonksiyonun minimumunu bulmak için - $\nabla f(x_i)$ yönünde hareket edilir. *i.* adımda iken minimum nokta için bir x_i yaklaşımını biliyoruz. Bundan sonraki yaklaşımımız;

$x_{i+1} = x_i - \lambda_i\ \nabla f(x_i)$ olanıdır.Burada λ_i, $\phi\ (\lambda) = f\ |\ x_i - \lambda\ \nabla f(x_i\ )|$ ifadesini minimum yapan λ değeridir. Yöntemle ilgili işaret akış diagramı aşağıda verilmiştir.



Şekil 1.9. Gradyant Yöntemine ilişkin işaret akış diyagramı [M. Karamürsel.,1997]

Değişkenleri sınırlandırılmış fonksiyonların Optimizasyonu

1.11 Düzenlenmiş Hooke ve Jeeves Yöntemi

Hooke ve Jeeves Yöntemi bölüm 1.5'de anlatılmıştır. Bu yönteme değişkenleri sınırlandırılmış optimizasyonu uyguladığımızda daha etkili bir yöntem olmaktadır. Ancak önceki yöntemden farkı, bulunan her noktadan sonra bunun sınır koşullarını sağlayıp sağlamadığının kontrol edilmesidir. Bulunan noktada eğer sınır koşulları sağlanmıyorsa minimize edilecek fonksiyona çok büyük değer verilmektedir. Buradan anlaşılır ki fonksiyonun alacağı değer çok büyük olamamalıdır. Bu yolla, tekrar sınır koşulları içersinde dönülmesi sağlanmış olur.

1.12 Kompleks Yöntemi

Bu yöntem aslında Nelder ve Mead'ın simpleks metodunun sınırları da dikkate alan geliştirilmiş bir durumudur.problem, $f(x) = f(x_1 , x_2, \ldots , x_n)$ fonksiyonunun minimizasyonudur. Ancak ;

$$l_j < x_j < u_j \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{1.49}$$

gibi değişkenlerin sınırlandırılmaları ile

$$g_i(x) < b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{1.50}$$

gibi fonksiyon biçimindeki sınırlandırılmaları da söz konusudur. Eğer $f(x)$ fonksiyonu konveks, $g_i(x)$ fonksiyonunun sınırları da konveks ise problemin yalnızca bir çözümü vardır. Burada l_j ve u_j değerleri değişkenler için alt ve üst limitlerdir.

Problemde n,m,l_j ve u_j ile başlangıç noktası x_1'in bilindiği varsayılırsa, önce sınır koşullarını gerçekleyen k tane değer bulunması gerekir. Daha sonra fonksiyonda bu değerler yerine konur. Bu nokta takımları kompleks olarak adlandırılır. Başlangıçta verilen x_1 değerinin tüm sınır koşullarını gerçeklediğini düşünülsün. (1.49) denklemini sağlayan başka noktalar da bulunabilir.

$$x_{ij} = l_j + r(u_j - l_j) \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad i = 1,2,\ldots.k \tag{1.51}$$

Burada r değeri 0-1 aralığında makine tarafından üretilen rasgele sayılardır. (1.51) denklemi ile yukarıda bahsedilen noktalar bulunmaktadır. Bulunan bu noktalar (1.49) denklemini zaten sağlamaktadır. Eğer bu noktalar aynı zamanda (1.50) denklemini de sağlıyorlarsa bunlar başlangıç kompleks değerleri olarak kabul edilirler. Eğer yukarıda bahsedilen koşulu sağlamıyorlarsa bu kez bu noktaların ağırlık merkezine aşağıda verilen eşitlik yardımı ile biraz kayılır. Yani

$$x_i^* = \frac{x_i + x_c}{2} \tag{1.52}$$

Buradaki x_e değeri

$$x_c = \frac{1}{i-1}\sum_{e=1}^{i-1} x_e \tag{1.53}$$

dir. (1.52) eşitliği hala uygun değilse uygun hale gelinceye kadar bu yöntem tekrarlanır. Eğer $g_i\,(x)$ sınır eşitsizlikleri konveks ise sınır değerleri eninde sonunda bulunacaktır. Kuşkusuz x_1 her zaman sınırlandırılmış bölgede olduğundan, alınan noktaların ağırlık merkezi de burada bulunacaktır. Bu noktaların fonksiyonda yerine konulmaları ile elde edilen değerleri büyüklüklerine göre sıralamak daha sonraki işlemler bakımından uygun olacaktır.

Bu yöntemle kabul edilen noktaların başlangıç kompleks değeri elde edilebilir. Bu noktaları fonksiyon değerlerinin büyüklüğüne göre sıralamak uygun olacaktır. Buraya kadar anlatılanlar şekil (1.10) da akış diyagramı biçiminde gösterilmiştir.

Böylece Kompleks Yöntemin iteratif aşamasına gelinmiştir. Bundan sonra aşağıdaki işlemlere geçilir

1) En büyük fonksiyon değerini veren x_h değeri bulunur. Diğer $k\text{-}1$ noktanın x_0 ağırlık merkezi bulunur

2) x_h 'dan uzaklaşmak için ; α yansıma katsayısını kullanarak x_r değeri bulunur.

$$x_r = (1+\alpha)\, x_0 - \alpha x_h \tag{1.54}$$

3) x_r değerinin sınır koşullarını sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

i) eğer uygun değilse, ayrıca l_c bu koşulu bozuyorsa, $x_{rj} = l_j + 10^{-6}$, eğer u_j bozuyorsa $x_{rj} = u_j - 10^{-6}$ alınır.

ii) Eğer x_r değeri fonksiyon sınırına uygun değilse yeni bir x_r değeri bulunur. Bu da

$$x_r = (x_r + x_0)/2 \tag{1.55}$$

biçimindedir.Bu adımda uygun bir nokta bulunana kadar devam edilir.

4) eğer x_r uygunsa $f(x_r)$ değeri bulunur. Bu değer $f(x_k)$ değeri ile karşılaştırılır. $f(x_r) > f(x_k)$ ise en kötü fonksiyon değerinden daha kötü bir kötü bir nokta elde edilmiş demektir. Bu kez yeni bir x_r değeri bulunmaya çalışılır. $x_r = (x_r + x_0)/2$ yapılır ve üçüncü adıma geri dönülür.

5) $f(x_r) < f(x_k)$ ise x_k yerine x_r konulur fonksiyon değerleri ve noktaları yeniden büyükten küçüğe sıralanır.

6) Bu adımda yöntemin yakınsayıp yakınsamadığını kontrol etmek amacı ile iki değer karşılaştırılır. Bu değerler, k tane fonksiyon değerinin standart sapması ile, kompleksin iki noktası arasındaki (d_m) maksimum değeridir.

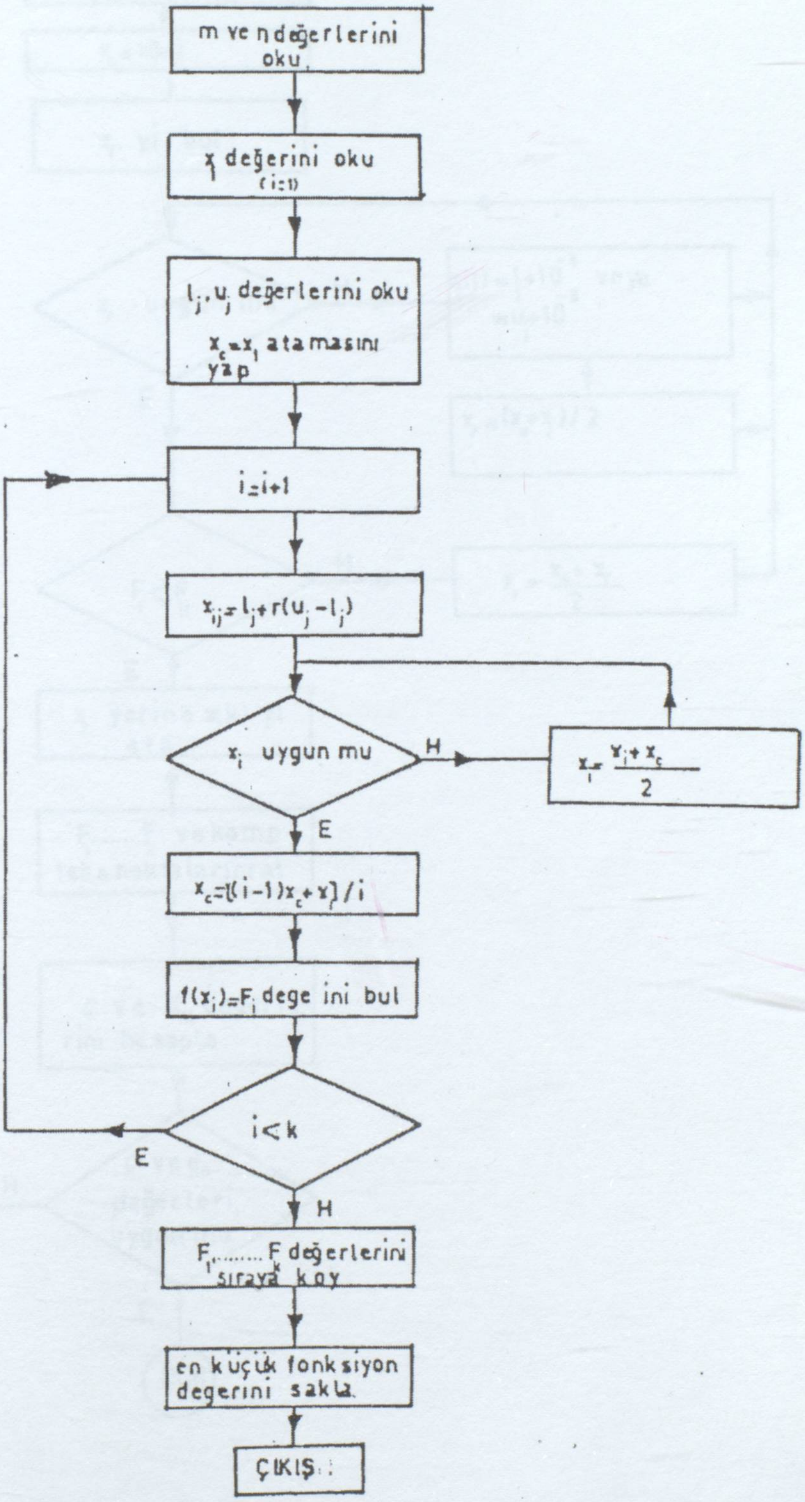
$$\sigma = \left(\sum_{e=1}^{k} \left| f(x_e) - f \right|^2 / k\right)^{1/2} \tag{1.56}$$

Burada, $$f = \frac{1}{k}\sum_{e=1}^{k} f(x_e) \tag{1.57}$$

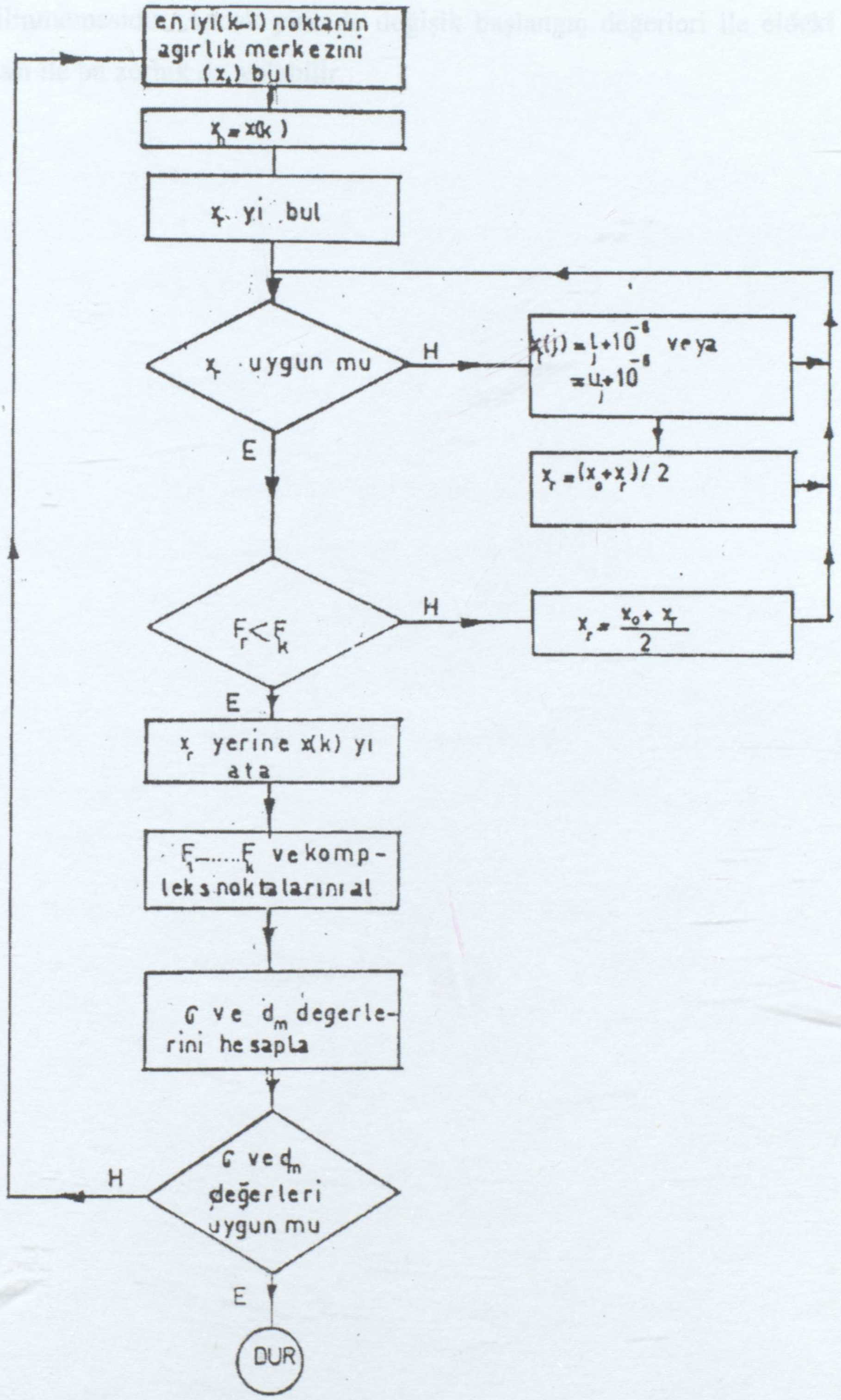
yazılabilir. (1.56) eşitliğindeki standart sapma yerine onun karesi de kullanabilir.

7) σ^2 ve d_m değerleri, kabul edilebilecek düzeyde küçükse iterasyonu tamamlandı demektir. Değilse birinci adıma tekrar geri dönülür.

İşaret akış diagramları aşağıdaki gibidir.



Şekil (1.11) Kompleks Yöntemine başlamadan önceki aşamada sınır değerlerine uyan k tane noktanın bulunması için işaret akış diyagramı [M. Karamürsel.,1997]



Şekil (1.12) Kompleks Yöntemine ilişkin işaret akış diyagramı [M. Karamürsel ,1997]

Bu yöntemin diğer bir dezavantajı ise bulunan minimum bölgesel ya da mutlak minimumu olduğunun bilinmemesidir. Ancak yine de değişik başlangıç değerleri ile eldeki sonuçların karşılaştırılması ile bu zorluk da aşılabilir.

BÖLÜM 2

OYUN TEORİSİ

Oyun Teorisi, genel anlamda N değişkenli fonksiyonların optimizasyonunda kullanılan bir yöntemdir. Bu tezde iki değişkenli yani iki oyuncu olan durumlar incelecektir. Gerekli bazı teoremler, ispatlar ve yardımcı kavramlar aşağıda belirtilmiştir.

2.1 Yardımcı Kavramlar ve Minimax Eşitsizlikleri

Tanım : f, A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) \leq S$ eşitsizliğini sağlayan S sayılarının en küçüğüne f fonksiyonun A kümesi üzerindeki 'supremumu' denir ve $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ ile gösterilir. Üzerinde çalışılan küme biliniyor ise sadece $\sup f(x)$ ile göstermenin bir sakıncası yoktur. Benzer şekilde,

$\forall x \in A$ için $f(x) \geq S$ eşitsizliğini sağlayan S sayılarının en büyüğüne f fonksiyonunun A kümesi üzerindeki 'infimumu ' denir ve $\inf f(x)$ ile gösterilir.

Eğer fonksiyon supremumuna tanım kümesinde ulaşırsa, yani $x^* \in A$ için $f(x^*) = \sup f(x)$ ise bu değer aynı zamanda fonksiyonun maksimumudur ve aynı zamanda ve bu durumda $\sup f(x) = \max f(x)$ olur. Benzer şekilde, fonksiyon infimumuna tanım kümesinde ulaşırsa, $\inf f(x) = \min f(x)$ olur.

2.2 Minimax Eşitlikleri ve Eyer Noktaları

Teorem

NxT üzerinde tanımlı herhangi bir $f(x, y)$ fonksiyonunun bir eyer noktasına sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul;

$\max\limits_{x} \inf\limits_{y} f(x, y)$, $\min\limits_{y} \sup\limits_{x} f(x, y)$ minimaxlarının varlığı ve

$\max_x \inf_y f(x,y) = \min_y \sup_x f(x,y)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat

Gereklilik

(x^*, y^*) f fonksiyonunun bir eyer noktası olsun o halde;

$$f(x,y^*) \leq f(x^*,y^*) \leq f(x^*,y) \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır. $f(x^*,y^*)$ sabit bir nokta olduğundan eşitsizliğin sol tarafına supremum uygulanarak;

$$\sup_x f(x,y^*) \leq f(x^*,y^*) \tag{2.2}$$

elde edilir. Buradan da;

$$\inf_y \sup_x f(x,y) \leq \sup_x f(x,y^*) \leq f(x^*,y^*) \tag{2.3}$$

eşitsizliğinin varlığı görülür. Benzer şekilde (2.1) ifadesinden;

$$f(x^*,y^*) \leq \inf_y f(x^*,y) \leq \sup_x \inf_y f(x,y) \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.4) no'lu eşitsizliklerden ;

$$\inf_y \sup_x f(x,y) \leq \sup_x \inf_y f(x,y) \tag{2.5}$$

olduğu görülür. Teorem de göz önüne alınacak olursa ;

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \min_y \sup_x f(x,y) \tag{2.6}$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak (2.3) ve (2.4) no'lu eşitsizlikteki ifadelerin birbirine eşit olduğu görülür. O halde;

$$\inf_y \sup_x f(x,y) = \sup_x f(x,y^*) \tag{2.7}$$

yazılabilir.

Böylece, $\inf_y \sup_x f(x,y)$ ifadesi, infimumuna $y = y^*$ noktasında ulaşmıştır. Buna göre,

$\inf_y \sup_x f(x,y)$ yerine $\min_y \sup_x f(x,y)$ yazılabilir. Aynı mantıkla;

$\inf_y f(x^*,y) = \sup_x \inf_y f(x,y)$ ifadesinde $\sup_x \inf_y f(x,y)$ yerine $\max_x \inf_y f(x,y)$ yazılabilir. Sonuç olarak (2.6.) no'lu ifadeden

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \min_y \sup_x f(x,y) \tag{2.8}$$

elde edilir.

Yeterlilik

$\max_x \inf_y f(x,y)$ ve $\min_y \sup_x f(x,y)$ mevcut ve birbirine eşit olduğunu düşünelim. Ayrıca ifadeler dış ekstremumlarına x^* ve y^* noktalarında ulaşsınlar. Bu durum;

$$\max_x \inf_y f(x,y) = \inf_y f(x^*,y) \tag{2.9}$$

demektir. Üstelik $\inf_y f(x^*, y) \le f(x^*, y^*)$ olduğundan ;

$$\max_x \inf_y f(x, y) = \inf_y f(x^*, y) \le f(x^*, y^*) \qquad (2.10)$$

ve benzer şekilde

$$f(x^*, y^*) \le \sup_x f(x^*, y) = \min_y \sup_x f(x, y) \qquad (2.11)$$

elde edilir.

$\max_x \inf_y f(x, y)$ ve $\min_y \sup_x f(x, y)$ minimaxlarının eşitliğinden, (2.10) ve (2.11) ifadelerindeki bütün terimlerin birbirine eşit olduğu gösterilmiş olur.

$\sup_x f(x, y^*) = f(x^*, y^*)$ ifadesinin anlamı ise $\forall x$ için ;

$f(x, y^*) \le f(x^*, y^*)$ 'dır. Benzer şekilde, $\inf_y f(x^*, y) = f(x^*, y^*)$ eşitliğinden

$$f(x^*, y^*) \le f(x^*, y) \qquad (2.12)$$

elde edilir. Bu son iki eşitsizlik birleştirilirse;

$$f(x^*, y) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y) \qquad (2.13)$$

Bulunur ki bu da (x^*, y^*) noktasının f fonksiyonunun bir eyer noktası olduğunu gösterir. Teoremin ispatından, eyer noktasının bileşenleri olarak $\max_x \inf_y f(x, y)$ ve $\min_y \sup_x f(x, y)$ minimaxlarının f dış ekstremumlarından elde edilen x ve y 'nin bağımsız seçilebileceği görülmektedir. Böylece (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) f fonksiyonunun birer eyer noktaları ise, (x_1, y_2) ve (x_2, y_1) noktaları da f fonksiyonunun eyer noktalarıdır.

Bir fonksiyonun bütün eyer noktalarının kümesinin bu özelliğine genellikle 2 eyer noktalarının dikdörtgensel özelliği denir. Genel olarak , NxT üzerinde tanımlı $f(x,y)$ fonksiyonunun eyer noktalarının apsisler kümesi N^* , ordinatlar kümesi T^* olmak üzere tüm eyer noktaları kümesi $N^* x\ T^* \subset N^* x\ T^*$ olur. $N^* x\ T^*$ kartezyen çarpımı eyer noktaların dikdörtgensel özelliğini göstermektedir.

(2.3) , (2.4) ve (2.6) no'lu ifadelerden bir eyer noktasında fonksiyonun değerinin

$\max\limits_{x}\ \inf\limits_{y}\ f(x,y)$ ve $\min\limits_{y}\ \sup\limits_{x}\ f(x,y)$ minimaxlarının ortak değerine eşit olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak fonksiyon bütün eyer noktalarında aynı değeri alır.

2.3 Matris Oyunları

Her bir oyuncunun sonlu sayıda stratejiye sahip olduğu iki kişili sıfır toplamlı oyunlara matris oyunları denir. Oyun, bir matris ile ifade edilebildiği için böyle oyunlara bu isim verilmiştir. Gerçekten de bir numaralı oyuncunun stratejilerine karşılık matris satırları iki numaralı oyuncunun stratejilerine karşılık matris sütunları, satır ve sütunların kesişimindeki hücrelere de sonuçlar yerleştirilmiştir. Bu sonuçlar, oyuncuların ilgili stratejilerini oynamaları ile ortaya çıkan durumlara ait ödemelerdir. Genelde 1 oyuncusunun ödemelerine ait matrisler kullanılır. 2 oyuncusunun ödemeler matrisi de bunun ters işaretlisidir. Bu matrise kısaca oyun matrisi ya da ödemeler matrisi de denir.

Bir matris oyununu oynama süreci şöyle temsil edilebilir : 1 oyuncusu i. satırı seçer (i. stratejisini oynar.) 2 oyuncusu j. sütunu seçer (j. stratejisini oynar) bu seçimler birbirinden bağımsız olarak yapılır. Ortaya çıkan (i,j) durumunda 1 oyuncusu a_{ij} miktar ödeme (kazanç) elde eder. Bu sayı negatif ise 1 oyuncusunun söz konusu miktar kadar kaybettiği açıktır. Böylece , 1 oyuncusunun m 2 oyuncusunun n tane stratejisi olması halinde $A=(a_{ij})_{mxn}$ matrisi bir oyun belirler. Ödeme matrisi A olan bir oyun, kısaca A oyunu olarak adlandırılır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

A matrisinin i. satırı A_i ile j. sütunu A_j ile gösterilir. i satır numarası, sütun olmak üzere (i, j) ikilisi matris oyununda bir durum belirler.

$\forall i \ (i = 1,2,....m)$ ve $\forall j \ (j = 1,2,...n)$ için

$$a_{ij} \leq a_{ij} \leq a_{ij} \qquad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlayan (i^*, j^*)durumu bir denge durumudur. Bu nokta aynı zamanda A oyunu iki kişili sıfır toplamlı bir oyun olduğundan bir eyer noktasıdır.

Bir matris oyununun bir eyer noktasına sahip olması için gerek ve yeter koşulun;

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (2.15)$$

olduğu bilinmektedir. Her iki oyuncunun da stratejiler kümesi sonlu olduğundan minimaxların varlığı açıktır.

A matrisinin eyer noktalarının belirlenmesi, aşağıdaki şematik prosedür kullanılarak elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \min\limits_j a_{1j} \\ \to \min\limits_j a_{2j} \\ \vdots \\ \to \min\limits_j a_{mj} \end{matrix} \to \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \max\limits_i a_{i1} & \max\limits_i a_{i2} & \cdots & \max\limits_i a_{in} \end{matrix}$$

[M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Burada $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ 1 oyuncusunun kazançlarının alt sınırını, $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ de 2 oyuncusunun kayıplarının üst sınırını göstermektedir. Ancak bunların birbirine eşit olduğu durumda oyun dengeye ulaşacaktır.

1 oyuncusu i. stratejisini oynadığında A matrisinin i. satırındaki elemanlara talip olmuş demektir. Buna karşılık 2 oyuncusu bunlardan en küçük değere sahip olan ödemeyi rakibine verecek şekilde stratejisini oynayacaktır. Buna göre, 1 oyuncusu i. stratejisinden $\min\limits_j a_{ij}$ miktar ödemeyi garanti eder. O halde en büyük ödemeyi veren strateji $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ kadar ödemeyi 1 oyuncusuna sağlayacaktır. O halde 1 oyuncusunun oyundan beklediği kazanç, $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ den küçük olamaz.

Benzer şekilde 2 oyuncusu j stratejisini seçtiğinde matrisin j sütunundaki elemanlardan birisini rakibine sunuyor demektir. 1 oyuncusu bunlardan en büyüğünü veren stratejiyi oynayacaktır. Dolayısı ile 2 oyuncusunun j stratejisinden beklediği kayıp $\max\limits_i a_{ij}$ kadardır. 2 oyuncusu en az kaybettiren stratejiyi seçmek isteyecektir ki bu strateji 2 oyuncusunun kayıplarının $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$'den büyük olmayacağını garanti eder.

Örnek -1

Tablo 2.1 Bir oyuncusunun stratejiler kümesi $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, 2 oyuncusunun stratejiler kümesi (B_1, B_2, B_3, B_4) olmak üzere 1 oyuncusunun kazançlarına göre verilmiş kazançlar matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	2	-1	3	4
A_2	3	1	1	2	-2
A_3	3	4	2	2	5
A_4	5	-3	1	4	-2

Oyuncuların optimal stratejileri bulunmak istensin. Çözüm iki ayrı yoldan yapılabilir.

1. yol : Baskın ve iteratif baskın stratejileri kullanarak çözümün bulunması

Birinci oyuncu için $A_3 \geq A_2$ [A_2 elenir.

İkinci oyuncu için $B_1 \geq B_3$ [B_1 elenir, $B_4 \geq B_3$ [B_4 elenir.

Bu işlemlerden sonra;

Tablo 2.2 Elemelerden yapıldıktan sonraki kazanç matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki 1998]

	B_2	B_3	B_5
A_1	2	-1	4
A_3	4	2	5
A_4	-3	1	-2

Bu durumda ise benzer elemeler yapılırsa;

Birinci oyuncu için $A_3 \geq A_1$ ve $A_3 \geq A_4$ olduğundan A_1 ve A_4 elenir.

İkinci oyuncu için bu aşamada bir eleme mümkün değildir.

Tablo 2.3 Son aşamadaki oyun matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

	B_2	B_3	B_5
A_3	4	2	5

Bu durumda 1 oyuncusunun tek stratejisi kaldığından oyun bitmiştir. 2 oyuncusu satırdaki elemanlardan en küçüğüne karşılık gelen B_3'ü oynar. Bir başka deyiş ile B_3 stratejisi B_2 ve B_5'den baskındır.

Sonuç olarak, 1 oyuncusunun optimal stratejisi A_3, 2 oyuncusunun optimal stratejisi B_3 ve oyun değeri v^B =2'dir. Oyuncular bu denge durumunu bozmazlar.

2. yol : Minimaxlar kullanarak denge durumunun bulunması

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & -1 \\ \rightarrow & -2 \\ \rightarrow & 2 \\ \rightarrow & -3 \end{matrix} \qquad \max_i \min_j a_{ij} = 2$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$$\min_j \max_x a_{ij=2}$$

[M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Bu durumda $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = 2$ olduğundan oyun değeri $n^{B} = 2$'dir. Bu oyun değerini veren A_3 ve B_3 stratejileri oyuncuların optimal stratejileridir. [AHLATCIOGLU M., TIRYAKI F., 1998]

Örnek-2

Aynı pazarda rekabet eden iki firmadan A firması pazarın %60'ını, B firması ise %40'ını kontrol etmektedir. Pazar paylarını arttırmak yada mevcut pazar payından rakibine kaptırmamak için firmalar reklam kampanyasına girmeyi düşünmektedirler. Firmaların kullanabileceği dört alternatif reklam aracı vardır. Bunlar ;

R_1 : Özel olarak müşteri ile görüşme, eşantiyon dağıtma, fuar, sergi vb

R_2 : TV reklâmı

R_3 : Gazete reklâmı

R_4 : Radyo reklâmı

Müşterilerin kullandığı ürün hakkında yapılan reklâmın kararını değiştirmede moral etkisi haricinde bir etkisi yoktur. Ancak kullanmadığı ürün rakip firmanın ürünü) ile ilgili yapılan reklâmın etkisinde kalmaktadır. Yapılan araştırmalar, $R_1, R_2,$ R_3 R_4 reklâmlarının rakip firma müşterilerinin sıra ile %40, %25, %20, %10 üzerinde etkili olduğu ve bu müşterilerin, reklâmını gördüğü ürünü almaya başlayacağını göstermektedir. Pazarın oyun matrisini kurarak;

a) Firmaların bütün reklam araçlarını kullanabilme gücünde oldukları kabulünde, optimal seçeneklerini oluşturacak yani pazar paylarını belirlemek,

b) Daha küçük olan B firmasının R_1 seçeneğini kullanacak gücünün olmadığı altında oluşacak yeni pazar paylarını belirlemek

c) Sonuçların yorumu

Çözüm

Tablo 2.4 Firmaların reklamlar sonucu beklediği müşteri yüzdeleri [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Reklâm	A firmasının kazancı	B firmasının kazancı
R_1	0,4 x 0,4 = 0,16	0,4 x 0,6 = 0,24
R_2	0,25 x 0,4 =0,10	0,25 x 0,6 = 0,15
R_3	0,20 x 0,4 = 0,08	0,20 x 0,6 = 0,12
R_4	0,10 x 0,4 = 0,04	0,1 x 0,6 = 0,06

Firmaların karşılıklı stratejilerini oynama durumunda a firmasının net kazancı, rakibinden aldığı müşteri yüzdeleri ile kendisinin rakibine kaptırdığı müşteri yüzdeleri arasındaki fark kadar olacaktır. Bu durumda,

Tablo 2.5 A firmasının net yüzde kazançları cinsinden oyun matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki, 1998]

	R_1	R_2	R_3	R_4	
R_1	-0,08	0,01	0,04	0,10	-0,08 $\Leftarrow$
R_2	-0,14	-0,05	-0,02	0,04	-0,14
R_3	-0,16	-0,07	-0,04	0,02	-0,16
R_4	-0,20	-0,11	-0,08	-0,02	-0,20
	-0,08 $\Leftarrow$	-0,01	0,04	0,10	

a) her iki firmanın da aynı reklâm araçlarını kullanabilmesi halinde oyunun denge noktasının (R_1, R_1) durumunda oluştuğu açıktır. Her iki oyuncunun da optimal stratejileri R_1 reklam aracını kullanmaktır. Bu durumda oyun değeri v^B = -0,08 olmaktadır yani A oyuncusu %8 müşteri kaybederken B oyuncusu % 8 müşteri kazanacaktır. Böylece firmaların yeni Pazar payları sırası ile %52 , %48 olur.

b) B firmasının R_1 reklâm aracını kullanamadığı durum

Tablo 2.6 B firmasının R_1 reklam aracını kullanamadığı hal için oyun matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

	R_2	R_3	R_4	
R_1	0,01	0,04	0,10	0,01 $\Leftarrow$
R_2	-0,05	-0,02	0,04	-0,05
R_3	-0,07	-0,04	0,02	-0,07
R_4	-0,11	-0,08	-0,02	-0,11
	0,01 $\Leftarrow$	0,04	0,10	

Yeni halde oyunun denge durumu (R_1 , R_2) ve oyunun değeri $v^B = 0{,}01$ olacaktır. Bu durumda A firması R_1 , B firması R_2 reklam seçeneklerini kullanmalıdır. Oyun sonucu olarak A firması %1 oranında müşteri kazanırken b firması %1 oranında müşteri kaybedecektir. Yeni haldeki müşteri dağılımı sırası ile %61 ,%39 olacaktır.

c) (a) ve (b) şıklarından elde edilen sonuçlardan başlıca şu yorumlar yapılabilir;

1) Rakibi ile aynı şartlarda mücadele edebilen küçük firma pazar payını arttırmıştır.

Büyük firmanın elindeki imkanlara sahip olmayan küçük firma daha da küçülmüştür. [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Örnek–3

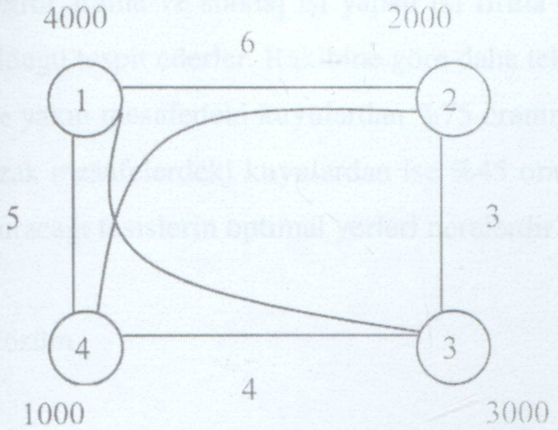
Aşağıda verilen şebekedeki düğümler bir yerleşim birimindeki mahalleleri çizgiler de mahalleler arasındaki yolları göstermektedir. Düğümlerin yanındaki sayılar mahallelerdeki potansiyel öğrenci sayıları, çizgilerin yanındaki sayılar da yol uzunluklarıdır. A ve B dershaneleri bu yerleşim birimlerine birer şube açmayı düşünmektedirler. Rakibine nazaran daha çok tanınan A dershanesinin kurduğu şube, rakip şubeye göre;

Yakın mesafelerdeki öğrencilerin % 80'ini

Eşit mesafedeki öğrencilerin %60'ını

Uzaktaki öğrencilerin %40'ını

almakta ve geri kalan öğrenci potansiyeli rakip firmaya kalmaktadır.



Şekil 2.1 Örnek-3'e ait mahallelerdeki öğrenci sayılarını ve mesafeleri gösteren şekil [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Dershaneler şubelerini hangi mahallelere açmalıdırlar?

Çözüm

Tablo 2.7 A dershanesinin kazanacağı öğrenci sayısı cinsinden oyun matrisi [AHLATCIOGLU M., TIRYAKI F., 1998]

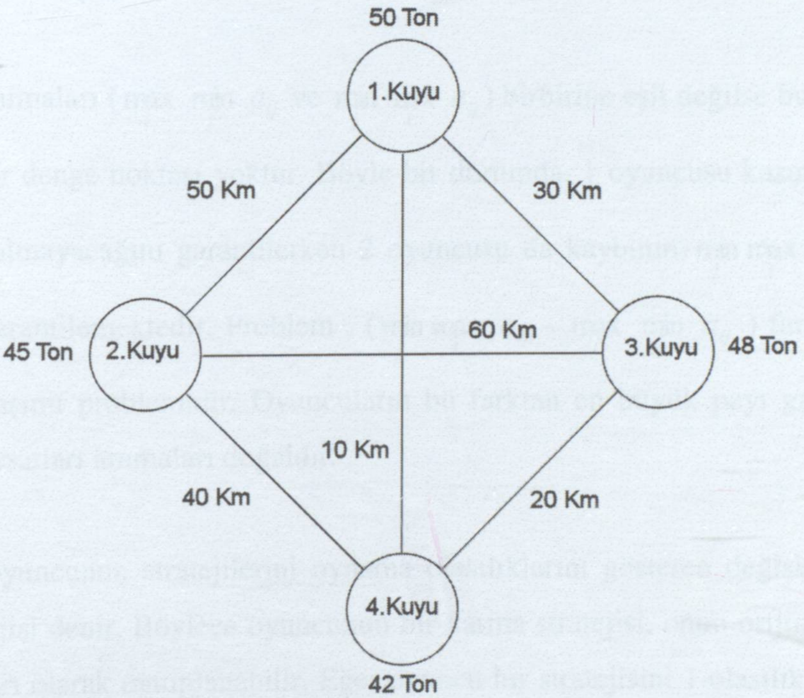
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6000	5600	5600	6200	5600
A_2	6400	6000	5200	6000	5200
A_3	5800	6800	6000	6800	6000 ⇐
A_4	6400	6000	5200	6000	5200
	6400	6800 ⇐	6000	6800	

Görüldüğü gibi her iki dershane de şubelerini 3 mahallesine kurmalıdır. A dershanesi 6000 öğrenci kazanırken B dershanesine de 4000 öğrenci kalacaktır.

Örnek-4

Petrol arama ve sondaj işi yapan iki firma olan A ve B bir bölgede çeşitli noktalarda petrol olduğu tespit ederler. Rakibine göre daha teknolojik imkanlara sahip olan A firması, B firması ile yakın mesafedeki kuyulardan %75 oranında, eşit mesafelerdeki kuyulardan %60 oranında , uzak mesafelerdeki kuyulardan ise %45 oranında petrol elde edecektir. Buna göre firmaların kuracağı tesislerin optimal yerleri nerelerdir?

Çözüm



Tek tek bütün hesaplamaları yapıp oyun matrisine yerleştirirsek;

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	111	125,25	124,35	98,25
A_2	96,75	111	96,75	96,75
A_3	97,65	125,25	111	97,65
A_4	123,75	125,25	124,35	111

Satırlar arasında en küçük değerlerin en büyüğü (A_4, B_4) noktasındaki111, sütunlar arasında en büyük değerlerin en küçüğü de yine (A_4, B_4) noktasındaki111 olduğundan optimal nokta her iki firmanın da (A_4, B_4) kuyusunda tesis kurmalıdır.

Örnek hesaplama (A_1 , B_2) için;

(42 * 0,75) + (48 * 0,75) + (50 * 0,75) + (45 * 0,45) = 125,25

2.4 Karma Stratejiler

Bir matrisin minimaları ($\max_i \min_j a_{ij}$ ve $\min_j \max_i a_{ij}$) birbirine eşit değilse bu matrisin temsil ettiği oyunun bir denge noktası yoktur. Böyle bir durumda, 1 oyuncusu kazancının $\max_i \min_j a_{ij}$'den küçük olmayacağını garantilerken 2 oyuncusu da kaybının $\min_j \max_i a_{ij}$ 'den büyük olmayacağını garantilemektedir. Problem , ($\min_j \max_i a_{ij}$ - $\max_i \min_j a_{ij}$) farkının oyuncular arasındaki paylaşımı problemidir. Oyuncuların bu farktan en büyük payı garantilemek için ilave stratejik fırsatları aramaları doğaldır.

Değerleri, bir oyuncunun stratejilerini oynama olasılıklarını gösteren değişkene oyuncunun bir karma stratejisi denir. Böylece oyuncunun bir karma stratejisi, onun orijinal seçeneklerini seçme olasılıkları olarak tanımlanabilir. Eğer oyuncu bir stratejisini 1 olasılıkla diğerlerini de 0 olasılıkla seçerse, gerçekte sadece bir strateji seçmiş demektir. Karma stratejiler sınıfında tek olarak oynanabilen bu tip stratejilere pür stratejiler denir. Bir oyuncunun karma stratejisi, mevcut pür stratejilerini seçme olasılıkları ile belirlendiğinden,

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m) \qquad (2.16)$$

vektörü ile gösterilebilir. Burada;

$$\vec{x}_i \geq 0 \ (i = 1,2,...,m) \qquad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}_i = 1 \tag{2.18}$$

olur. Bütün bileşenleri 1 olan $\vec{J}_m = (1,1,\ldots.1)$ m boyutlu vektörü ile (2.18) eşitliği;

$$\vec{x}.J^T{}_m = 1 \tag{2.19}$$

şeklinde ifade edilir. Bilindiği gibi (2.16) tipindeki bütün vektörler m-boyutlu bir uzay teşkil ederler. (2.17) ve (2.18) şartları altında bu vektörler kümesi;

$$E^1 = (1,0,\ldots,0)$$

$$E^2 = (0,1,\ldots,0)$$

$$\vdots$$

$$E^m = (0,0,\ldots 1) \tag{2.20}$$

ile gösterilir ve *(m-1)* boyutlu bir simpleks oluştururlar. Bu simplekse temel simpleks denir ve S_m ile gösterilir. *m=2* için simpleks bir doğru parçası, *m=3* için üçgensel bölge, *m=4* için düzgün dörtyüzlü olacaktır.

2.5 Bir Oyunun Karma Yapısı

1 ve 2 oyuncuları, ödeme matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

olan bir oyunda $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ve $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ karma stratejilerini birbirinden bağımsız olarak seçmiş olsunlar.

Tanım: Bir matris oyununda oyuncuların *(X,Y)* karma stratejiler çiftine bir durum denir. *(X,Y)* durumunda her bir *(i,j)* pür stratejiler durumu x_i, y_j olasılıkla meydana gelecektir. *(i,j)* durumunda 1 oyuncusu a_{ij} aldığından (*X,Y)* durumunda bu oyuncuya ait ödemenin beklenen değeri;

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{2.21}$$

ifadesine eşit olur. Bu karma stratejilerde bir *(X,Y)* durumunda 1 oyuncusuna ait ödemedir ve bu ödeme *H(X,Y)* ile gösterilir.

Tanım : 1 ve 2 oyuncusunun karma stratejiler simpleksleri sırası ile S_m ve S_n , 1 oyuncusuna ait ödeme fonksiyonu *H(X,Y)* olmak üzere bir matris oyununun (S_m , S_n , *H*) karma yapısına bir muhalif oyun denir.

Skaler çarpım kullanılarak;

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j = x_i A_i Y^T = XAY^T \tag{2.22}$$

bulunur. Bir muhalif oyunda eyer noktası tanımı hatırlanarak, benzer şekilde bir matris oyunun karma yapısında (X^*, Y^*)durumu bir eyer noktası ise $\forall X \in S_m$ ve $\forall Y \in S_n$ için

$$XAY^{\mathrm{B}^T} \le X^{\mathrm{B}} A Y^{\mathrm{B}^T} \le X^{\mathrm{B}} A Y^{\mathrm{B}^T} \tag{2.23}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yardımcı Teorem: Karma Stratejilere Geçiş Teoremi

Y, 2 oyuncusunun keyfi bir karma stratejisi ve a,

$$A_i Y^T \le a,\ i = 1,2, \ldots m \tag{2.24}$$

eşitsizliğini sağlayan bir sayı ise, 1 oyuncusunun herhangi bir X karma stratejisi için,

$$XAY^T \le a \tag{2.25}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

x_i $(i = 1,2,\ldots m)$ ile (2.11) eşitsizliği taraf tarafa çarparak

$$x_i A_i Y^T \le x_i a\ ,\ (i = 1,2,\ldots m) \tag{2.26}$$

elde edilir. $x_i \ge 0$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirmez. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;

$$\sum_{i=1}^{m} x_i A_i Y^T = XAY^T \le a \sum_{i=1}^{m} x_i \tag{2.27}$$

olduğu görülür. Buradan ,

$$A_i Y^T \ge a\ ,\ (i = 1,2,\ldots m) \tag{2.28}$$

$$XA_i \le a\ ,\ (i = 1,2,\ldots n) \tag{2.29}$$

$$XA_j \le a\ ,\ (i = 1,2,\ldots n) \tag{2.30}$$

formundaki eşitsizlikler için de karma stratejilere benzer geçişler yapılabilir.

Teorem

(X^*, Y^*) durumunun bir denge durumu olabilmesi için gerek ve yeter şart ;

$\forall i\ (i = 1,2,\dots m)$ ve $\forall j\ (i = 1,2,\dots n)$ için

$$A_i\, Y^{\mathrm{B}^T} \le X^{\mathrm{B}} A\, Y^{\mathrm{B}^T} \le X^{\mathrm{B}} A_j \tag{2.31}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat

Gereklilik açıktır, çünkü (2.31) eşitsizliği (2.23) eşitsizliğinin özel bir urumudur. Yeterliliği ispatlamak için (2.31) eşitsizliğinin her iki tarafına yardımcı teorem uygulanır ve (2.23) ifadesi elde edilir.

Teorem

(i^*, j^*) durumu A matris oyununda bir denge durumu ise yine bu oyunun karma yapısı için de bir denge durumudur.

İspat : A matris oyununda (i^*, j^*) durumu bir denge durumu ve $\forall i$ ve $\forall j$ için

$$a_{ij}^{\;*} \le a_{i\,j}^{\;*\,*} \le a_{i\,j}^{\;*} \tag{2.32}$$

olur. (2.31) ifadesinde X^* ve Y^* yerine karşılık gelen i^*, j^* pür stratejilerini alarak (2.32) elde edilir. Görüldüğü gibi (2.32), (2.31) 'nin özel halidir.

Herhangi bir matris oyununun karma yapısı için bir denge durumu vardır. Bu iddiayı ispatlamak için $\max_x \inf_y XAY^T$ ve $\min_y \sup_x XAY^T$ minimaxlarının varlığı ve eşitliği gösterilmelidir.

Yardımcı Teorem

Herhangi bir $Y_0 \in S_n$ ve herhangi bir $X_0 \in S_m$ için sırası ile

$\max_x XAY_0^T$ ve $\min_y X_0 AY^T$ ifadeleri mevcuttur.

İspat

$XAY_o^T = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i Y_o^T$ ifadesi XAY_0^T 'nin $x_1, x_2, \ldots, x_m$ değişkenlerinin bir lineer fonksiyonu olduğunu gösterir. Dolayısı ile bu değişkenlerin sürekli bir fonksiyonudur. Böylece kapalı ve sınırlı S_m kümesi üzerinde maksimumuna ulaşır. Yardımcı teoremin ikinci kısmı da benzer şekilde ispatlanabilir. Herhangi bir $X_0 \in S_m$ için ;

$\min_y x_0 A Y^T = X_o A_{jo}$ olacak şekilde bir j_0 mevcuttur. Herhangi bir $Y_0 \in S_n$ için

$\max_x XAY_0^T = A_{io} Y_o$ olacak şekilde bir i_o mevcuttur.

İspat

$X_0 A_{jo}$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ sayıları dikkate alınsın. Bu sayıların en küçüğü $X_0 A_{jo}$ olsun. O halde ;

$$X_0 A_{jo} \leq X_0 A_j \ , \ (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (2.33)$$

olur. Karma Stratejilere Giriş Teoremi kullanarak

$$X_0 A_{jo} \leq X_0 A Y^T \qquad (2.34)$$

elde edilir. Son eşitsizlik herhangi bir Y 2 S_n için geçerlidir. Böylece ;

$$X_0 A_{jo} \leq \min_y X_0 A Y^T \tag{2.35}$$

bulunur. Diğer taraftan $X_0 A_{jo}$, $X_0 A Y^T$ formunda bir sayıdır. (yani Y karma stratejisi j_0 pür stratejisi olarak da adlandırılabilir.) Böylece;

$$X_0 A_{jo} \geq \min_y X_0 A Y^T \tag{2.36}$$

Bulunur. Bu iki eşitsizlik birleştirilirse,

$$X_0 A_{jo} = \min_y X_0 A Y^T \tag{2.37}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem

$\max_x X A Y^T$ ifadesi, Y'nin sürekli bir fonksiyonudur. Benzer şekilde $\min_y X A Y^T$ ifadesi de X'in sürekli bir fonksiyonudur.

Teorem

$\max_x \min_y X A Y^T$ ve $\min_y \max_x X A Y^T$ minimaxları mevcuttur.

İspat

Yukarıda bahsedildiği gibi $\max_x X A Y^T$ ifadesi, Y'nin sürekli bir fonksiyonudur. Sonlu boyutta, kapalı, sınırlı S_n'de tanımlı bu fonksiyon tanım kümesi üzerinde minimumuna ulaşır. Yani $\min_y \max_x X A Y^T$ minimaxı vardır. Benzer şekilde $\max_x \min_y X A Y^T$ mevcuttur.

İki alternatif üzerine yardımcı teorem

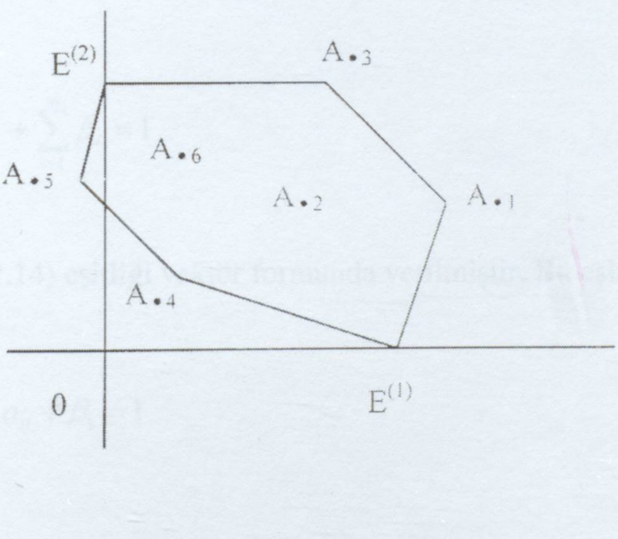
Keyfi bir a matrisi için aşağıdaki iki alternatiften biri geçerlidir.

1) $\forall j\ (j = 1,2,\ldots,n)$ için $X A_j \geq 0$ olacak şekilde bir $X \in S_m$ mevcuttur.

2) $\forall i\ (i = 1,2,\ldots,m)$ için $A_i Y^T \leq 0$ olacak şekilde bir $Y \in S_n$ mevcuttur.

İspat

S_m temel simpleksinin ve A_j'nin konveks kabuğu dikkate alınsın. Bu kabuk C ile gösterilsin. Bu durumda iki olasılık mevcuttur.



Şekil 2.1 Herhangi bir konveks düzlem [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

a) $0 \notin C$'dir. Bu durumda 0 noktası C düzleminden belli bir hiperdüzlemle ayrılabilir. Bu hiperdüzlemin 0 noktasından geçtiğini ve bütün C kümesinin bu hiperdüzlemin bir tarafında olduğu kabul edilebilir. Hiperdüzlemin denklemi $V_z = 0$ olsun. Genelliği bozmadan herhangi bir $z \in S$ için $V_z > 0$ olsun, özel olarak, $\forall i\ (i = 1,2,\ldots,m)$ için $V_E^1 > 0$ olur. $V_E^1 = v_i \ (i = 1,2,\ldots,m)$ sayıları tanımlansın. Bütün bu sayılat pozitif olduğundan toplamları da pozitiftir. Yani $v = \sum_{i=1}^{m} v_i > 0$ olur. Daha sonra

$\vec{X} = (\frac{v_1}{v},....,\frac{v_m}{v})$ vektörü tanımlansın. $X \in S_m$ olduğu açıktır. $v > 0$ olduğundan

herhangi bir $z \in S$ noktası için $X_z = \frac{1}{v} v_z > 0$ olduğu görülür.

b) Bu durumda $0 \in C$ 'dir. Bu durumda 0 noktası C çokyüzlüsünün tepelerinin kompleks kombinezonu olarak ;

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i E^1 = 0 \tag{2.38}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\alpha_j > 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ ve $\beta_i > 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ ve

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \tag{2.39}$$

dir. (2.14) eşitliği vektör formunda verilmiştir. Bu eşitlik koordinatlar şeklinde;

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} + \beta_i = 1 \tag{2.40}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\beta_i \geq 0$ olduğundan ;

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} \leq 0 \tag{2.41}$$

yazılabilir. Ayrıca ,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \geq 0 \tag{2.42}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 0$ ise, $\forall \alpha_j = 0$ bu sonuç, (2.16) ifadesinden

$\forall \beta_i = 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ olduğunu gösterir. Fakat $\forall\ \alpha_j = 0$ ve $\forall \beta_i = 0$ ifadeleri (2.39) eşitliği ile çelişir. O halde (2.42) ifadesi tam eşitsizlik, ifadesi ile geçerlidir. Yani

$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \geq 0$ olur. $\frac{\alpha_j}{\alpha} = \vec{y}_j$ olacak şekilde $\vec{Y} = \vec{y}_1,\ldots,\vec{y}_n$ vektörü kurulursa $Y \in S_n$ olduğu görülür.

$\alpha > 0$ olduğundan (2.41) ifadesi α ile bölünerek $\sum_{j=1}^{n} y_j\, a_{ij} = A_{i.}\, Y^T \leq 0$ elde edilir. Böylece aranan bir $\vec{Y}$ bulunduğundan yardımcı teorem ispatlanmış olur.

2.6 Minimax Teoremi

Herhangi bir A matrisi için $\max_x \min_y X A\, Y^T = \min_y \max_x X A\, Y^T$ eşitliği vardır.

İspat

A matrisine iki alternatif yardımcı teoremi uygulansın birinci alternatifin geçerli olduğunu kabul edilsin. Yani $X_0\, A_{.j0} \geq 0$, $(j = 1,2,\ldots,n)$ olacak şekilde bir X_0 vardır. Karma stratejilere göre $X_0 A Y^T \geq 0$ elde edilir. Bu eşitsizlik $\forall\ Y \in S_n$ için geçerli olduğundan $\min_y X_0 A Y^T \geq 0$ elde edilir. Bu da göz önüne alınarak ;

$$\max_x \min_y X A\, Y^T \tag{2.43}$$

olduğu görülür. Şimdi de ikinci alternatifin geçerli olduğu kabul edilsin. $A_{i.} Y^T \leq 0$ olacak şekilde bir Y_0 vardır. Karma stratejilere geçerek $\forall\ X \in S_m$ için $X_0 A Y^T \leq 0$ elde edilir. Böylece $\max_x X_0 A Y^T \leq 0$ bulunur. Buradan da ;

$$\min_y \max_x X A\, Y^T \leq 0 \tag{2.44}$$

ifadesine ulaşılır. O halde birinci ve ya ikinci alternatif geçerli olacağından ya (2.43) ya da (2.44) eşitsizliği sağlanır. Böylece her iki eşitsizlik de aynı anda sağlanamaz. Bir başka deyişle;

$$\max_x \min_y X\,A\,Y^T < 0 < \min_y \max_x X\,A\,Y^T \qquad (2.45)$$

eşitsizliği hiçbir zaman sağlanmaz. Keyfi bir t sayısını ve

$$A\,(t) = \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12}-t & & a_{1n}-t \\ a_{21}-t & a_{22}-t & \cdots & a_{2n}-t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-t & a_{m2}-t & \cdots & a_{mn}-t \end{bmatrix}$$

[M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

$A(t)$ matrisini göz önüne alalım. $A(t)$ matrisi için (2.45) eşitsizliği;

$\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T < 0 < \min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T$ olarak yeniden yazılabilir. Bununla beraber;

$$X\,A(t)\,Y^T = \sum_{j=1}^{n} x_i\,(a_{ij}\text{-}t)\,y_j = \sum_{j=1}^{n} x_i\,a_{ij}\,y_j - t\sum_{j=1}^{n} x_i\,y_j - t \qquad (2.46)$$

olduğundan yukarıdaki eşitsizlik;

$$\max_x \min_y (X\,A(t)\,Y^T\text{-}t) < 0 < \min_y \max_x (X\,A(t)\,Y^T\text{-}t) \qquad (2.47)$$

ya da

$$\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T - t < 0 < \min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T\text{-}t \qquad (2.48)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun sonucu olarak

$$\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T < t < \min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T \tag{2.49}$$

yazılabilir. Son eşitsizliğin her iki tarafı , t sayısı ne olursa olsun aynı anda geçerli olamaz. Bu da demektir ki $\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T$ ve $\min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T$ arasında kesin eşitsizlik sağlayan bir sayı yoktur.bu da ikinci minimaxın birinciden daha küçük olamayacağını gösterir yani; $\min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T \le \max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T$dir. Bir yandan da
$\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T > \min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T$ olduğu bilinmektedir. Bu iki eşitsizlikten,
$\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T = \min_y \max_x X\,A(t)\,Y^T$ elde edilir ki bu da teorimin ispatıdır.

2.7 Oyun Değeri ve Optimal Stratejiler

A matrisli bir oyuna katılan 1 oyuncusunun düşünme tarzı, i. stratejisini seçtiğinde ödemesinin en kötü durumda $\min_j a_{ij}$ olması, böylece bu minimumu maksimize edecek bir şekilde bir i seçmesi gerektiği, rakibinin niyetini bilmediğinden en az tercih ettiği durumda bile $\max_i \min_j a_{ij}$ ödemesini kesinlikle garantileyeceği şeklindedir. Benzer şekilde 2 oyuncusu da j. stratejisini seçtiğinde en kötü durumda $\max_i a_{ij}$ miktar kaybedeceğinden bu maksimum kayıpları minimize edecek bir j stratejisi seçmelidir. Bu tarz oynayarak rakibinin kendi niyeti ile ilgili her şeyi bildiği en az tercih edilebilir durumda bile $\min_j \max_i a_{ij}$ miktarından daha fazlasını kazanmasına izin vermemelidir. Bu tartışmalardan mantıksal bir yorum ile;

$$\max_i \min_j a_{ij} < \min_j \max_i a_{ij} \tag{2.50}$$

eşitsizliğine ulaşılabilir. Üstelik eyer noktası mevcutsa bu eşitsizliğin eşitlik durumuna geçtiği bilinmektedir.

Bir oyunun karma yapısına geçildiğinde, oyuncuların yürüttüğü mantık biraz değişmektedir. 1 oyuncusu X stratejisini seçtiğinde en kötü durum $\min_y X\,A\,Y^T$ ödemesini veren durumdur. O halde 1 oyuncusu $\max_x \min_y X\,A(t)\,Y^T$ ödemesini elde edecek şekilde strateji seçmeye dikkat etmelidir. Benzer şekilde 2 oyuncusu, 1 oyuncusuna $\min_y \max_x X\,A\,Y^T$ den daha büyük bir ödeme yapmayacaktır.

Karma stratejilerde minimaxların eşitliği bilinmektedir. Sonuç olarak oyunculardan her biri mantıklı oynarsa 2 oyuncusunun 1 oyuncusuna yapacağı ödeme bu minimaxlara eşit miktarda olacaktır.

Bu şekilde karma stratejilerin kullanılmasına izin verildiğinde oyunun sonucu önceden belirlidir. Bu sonuç, oyuncuların becerisine ya da yürüttükleri hamlelerin başarısına bağlı değildir. Sadece A matrisi ile belirlenmiş olan oyunun şartlarına bağlıdır. Bu, matris oyunlarının tamamen belirli oyunlar olarak adlandırılmasının nedenidir.

Tanım : (2.45) ve (2.47) minimaxlarının ortak değerine A ödeme matrisli oyunun oyun değeri denir ve bu değer $v(A)$ ile gösterilir. dıştaki maksimumun (2.45)'de elde edildiği X stratejisi seçimi, 1 oyuncusu için en iyi hamleyi temsil eder. Benzer şekilde dıştaki minimumun (2.47)'de elde edildiği Y stratejisi seçimi 2 oyuncusu için en iyi hamleyi temsil eder. Buna göre 1 ve 2 oyuncuları bir eyer noktası oluşturacak şekilde stratejilerini seçmelidirler.

Tanım : Bir muhalif oyunda oyuncuların denge stratejilerine, oyuncuların optimal stratejileri denir. Bir matris oyunun çözümü, oyun değerini ve oyuncuların optimal stratejilerini belirleme sürecidir. Diğer taraftan muhalif oyunun eyer noktalarına da oyunun çözümleri denir. Çözüm teriminin bu ikili kullanımı yanlış anlamalara yol açmamalıdır. X^*, Y^* eyer noktasını karakterize eden eşitsizliği $\forall\ X \in S_m$ ve $\forall\ Y \in S_n$ için $XAY^{*T} \le v \le X^*AY^T$ formunda yazılabilir.

2 oyuncusunun hangi hamleyi yapacağını, 1 oyuncusu kendi optimal hamlesini seçerse oyun değerinden daha küçük olmayan bir ödeme elde edeceğini bilinmektedir. Benzer şekilde 2 oyuncusu da kendi optimal hamlesini seçerek kaybının oyunun değerinden daha fazla olmayacağını garantilemektedir. Sonuç olarak oyunculardan birinin kendi optimal hamlesini rakibinden gizlemesine gerek yoktur. 1 oyuncusuna ait ödemenin tek şekilde belirli olması oyunun belirli oyun olması anlamına gelir.

2.8 2x2'lik Oyunlar

1 ve 2 oyuncularının ikişer tane pür stratejiye sahip olduğu ve 1 oyuncusunun kazançlarına göre;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

ödeme matrisi ile verilen oyunu göz önüne alınsın. 1 ve 2 oyuncularının karma stratejileri sırası ile $X = (x,1-x)$ ve $Y = (y\ ,\ 1\text{-}y)$ olsun. Burada oyuncuların ilk stratejilerini oynama olasılıkları x,y ve ikinci stratejilerini oynama olasılıkları da
$1\text{-}x$, $1\text{-}y$ 'dir. Dolayısı ile $x,y \in [0,1]$ olur.oyuncuların kendi stratejileri arasında olabilecek mümkün ilişkiler açısından oyunun çözümü üç durumda incelenebilir.

a) Stratejiler arasında baskınlık olma hali : Herhangi bir oyuncunun stratejileri arasında baskınlık varsa, basılan strateji optimal karma stratejisinde yer almayacaktır ve oynanma olasılığı sıfırdır.
b) Stratejiler arasında denklik olma hali : Oyunculardan birinin stratejileri arasında denklik varsa bu oyuncu her iki stratejisini keyfi olarak karabilir. Her durum için oyundan beklediği değerle aynıdır.
c) Denk ve baskın strateji olmaması hali : Her iki oyuncunun da optimal stratejileri pür değildir. Şu halde her iki oyuncunun da karma optimal stratejileri vardır.

1 oyunçusuna ait bu strateji $X^* = (x^*,1-x^*)$ iken 2 oyuncusuna ait strateji $Y^* = (y^*,1-y^*)$ olacaktır. Bu stratejiler pür olmayacağından

$$0 < x^*, y^* < 1 \tag{2.52}$$

olur. x^*, y^* denge durumu için,

$$H(x,y) = XAY^T = [x \quad 1-x]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

ödeme fonksiyonu,

$$H(x, y^*) \leq H(x^*, y^*) \leq H(x^*, y) \tag{2.54}$$

Bu da,

$$\max_x H(x, y^*) = H(x^*, y^*) = H(x^*, y) \tag{2.55}$$

demektir. (2.52) ifadesinden son formüldeki maksimum ve minimuma $[0,1]$ aralığının iç noktasında ulaşır yani ekstremumlar analitiktir. Böylece x^*, y^* noktalarında bunlara karşılık gelen kısmi türevler sıfır olur. Buradan da

$$y^* = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{12} - a_{22} = 0$$

$$x^* = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}) + a_{21} - a_{22} = 0 \tag{2.56}$$

yazılabilir. Bu eşitliklerin her birinin $[0,1]$ aralığında x^*, y^* çözümüne sahiptir. Söz konusu şartlar altında, $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} = 0$ eşitliğinin mümkün olmadığı gösterilmek istensin. Gerçekte böyle bir eşitlik olsaydı,

$$a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21} \tag{2.57}$$

eşitliği yazılabilirdi. (2.57) ifadesinde,

$$a_{11} \geq a_{21} \tag{2.58}$$

olduğu kabul edilsin. (2.57) ve (2.58)'den

$$a_{12} \geq a_{22} \tag{2.59}$$

olur. (2.58) ve (2.59),1 oyuncusuna ait birinci pür stratejinin ikinci pür stratejiyi bastığı ya da eşitlik durumları için iki stratejinin denkliği sonucunu verir. Bu da oyuncuların basılan ya da denk stratejilerinin olmadığı hipotezi ile çelişir. Bu çelişkiye neden olan
$a_{12} \geq a_{22}$ eşitsizliğidir. Benzer şekilde;

$$a_{11} < a_{21} \tag{2.60}$$

olduğu kabul edilirse, (2.57) ifadesi de göz önüne alınıp,

$$a_{12} < a_{22} \tag{2.61}$$

bu durumda da (2.60) ve (2.61) ifadelerinden 1 oyuncusunun ikinci pür stratejisinin birincisini bastığı anlaşılır ki bu durum da hipotezle çelişir. Her iki ifade de birlikte ele alınırsa; a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} = 0 eşitliği gerçekleşmeyecektir. O halde $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \neq 0$ dır.
Dolayısıyla (2.56) denklemlerinden,

$$x^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}, \qquad y^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \tag{2.62}$$

optimal çözümü elde edilir. Oyun değeri ise;

$$v(A) = H(x^*, y^*) = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \tag{2.63}$$

Böylece 2x2'lik oyunların çözümü için ilk olarak pür stratejilerde bir denge durumunun olup olmadığı kontrol edilir. Bu amaçla $\max_i \min_j a_{ij}$ ve $\min_j \max_i a_{ij}$ minimaxları hesaplanıp karşılaştırılır. Eşitlik varsa pür stratejilerde denge durumu vardır. Minimaxlar eşit değil ise oyunun karma stratejilerinde tek denge durumu vardır ve oyuncuların optimal stratejileri ile oyunun optimal değeri sırasıyla (2.62) ve (2.63) ifadelerinden hesaplanır.

Örnek-4

Biri as diğeri ikili olduğu bilinen iki karttan birisini *A* oyuncusu seçiyor ve *B* oyuncusuna göstermeden bakıyor. *A* oyuncusu çektiği kartın as olduğunu söyleyip *B* oyuncusu da inanırsa, *B* oyuncusu *A* oyuncusuna bir birim ödeme yapıyor. İnanmayıp elini göstermesini istediğinde eğer çekilen kart gerçekten as ise *A* oyuncusuna iki birim ödeme yapıyor. *A* oyuncusunun as dediği kart ikili çıkarsa *A* oyuncusu b oyuncusuna üç birim ödeme yapıyor. *A* oyuncusu çektiği kartın ikili olduğunu söylerse, *B* oyuncusuna bir birim ödeme yapıyor. Oyun değeri ve oyuncuların optimal stratejileri bulunmak istensin.

Çözüm

Önce oyuncuların pür stratejileri tespit edilmelidir.

A'nın stratejileri

A_1 : Blöf yapmak

A_2 : Doğruyu söylemek

B'nin stratejileri

B_1 : İnanmak

B_2 : İnanmamak

Görüldüğü gibi oyun 2x2lik bir oyun yapısındadır. A'nın kazançlarına göre kurulacak ödeme matrisi aşağıdaki gibidir.

(A_1,B_1) durumunda; A oyuncusu as da çekse ikili de çekse blöf yaptığından as çektiğini söyleyecek ve *B* oyuncusu da inandığından bir birim ödeme yapacaktır. Yani $a_{11} = 1$ dir.

(A_1,B_2) durumunda; *B* oyuncusu inanmama stratejisini kullanacağından, as çekimi A oyuncusuna iki birim, ikili çekimi *B* oyuncusuna üç birim kazandıracaktır. As ya da ikili çekme olasılıkları $\frac{1}{2}$ olduğundan bu durumda A oyuncusunun kazancı,

$\frac{1}{2}.2+\frac{1}{2}.(-3) = -\frac{1}{2}$ olur.

(A_2,B_1) durumunda; A oyuncusu doğru söylerken B oyuncusu inanma stratejisini kullanmaktadır. Bu durumda as çekimi A oyuncusuna bir birim, ikili çekimi de B oyuncusuna bir birim kazandıracaktır.

(A_2,B_2) durumunda; A oyuncusu doğru söylerken B oyuncusu inanmıyor olacaktır. As çekimi A oyuncusuna iki birim kazandırırken ikili çekimi B oyuncusuna bir birim kazandıracaktır o halde $a_{22} = \frac{1}{2}$ olur. Oyun matrisi ise,

Tablo (2.8) Örnek-4'e ait oyun matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

	B_1	B_2
A_1	1	$-\frac{1}{2}$
A_2	0	$\frac{1}{2}$

yapısındadır. Burada $X = (x_1, x_2)$ A oyuncusunun, $Y = (y_1, y_2)$ B oyuncusunun karma stratejileridir. Matristeki elemanlar pür stratejiler olmadığından optimal stratejiler için $X A_{.j} = v(A)$ ve $A_{i.} Y^T = v(A)$ eşitlikleri sağlanır. Burada v oyunun optimal değeridir. A oyuncusunun optimal stratejileri,

$$1\,x_1 + 0\,x_2 = v$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = v$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

Denklem sisteminin çözümünden $x_1^* = \frac{1}{4}$, $x_2^* = \frac{3}{4}$ ve $v = \frac{1}{4}$ olarak bulunur. Buna göre

A oyuncusunun optimal karma stratejisi $X^* = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ olur. Yani oyuncu $\frac{1}{4}$ olasılıkla blöf

yapmalı, $\frac{3}{4}$ olasılıkla doğruyu söylemelidir. Oyun değeri ise $\frac{1}{4}$'dür. Böylece oyun, A

oyuncusuna oyun başına $\frac{1}{4}$ birim kazandıracak şekilde kurulmuştur. *B* oyuncusu $\frac{1}{4}$ birimden

fazla kaybetmemek için kendi optimal karma stratejisini belirlemelidir.

B oyuncusunun optimal stratejileri, $A_i\, Y^T = v(A)$ eşitliğinden elde edilen,

$$1y_1 - \frac{1}{2} y_2 = v$$

$$0y_1 + \frac{1}{2} y_2 = v$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

sistemini çözerek $Y^* = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ şeklinde bulunabilir. Böylece *B* oyuncusu $\frac{1}{2}$ olasılıkla

rakibine inanmalı, $\frac{1}{2}$ olasılıkla da rakibine inanmamalıdır. [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

Örnek-5

A tarafı *B*'nin elinde bulunan bir hedefi tahrip etmek istemektedir. Bunu gerçekleştirebilmek için iki adet uçağı vardır. Uçaklardan biri bomba taşıyacak diğeri de ona koruma ve rakibi aldatma görevi yapacaktır. Bu amaçla uçaklar arka arkaya uçacaktır. Ancak *B*'nin hava sahasına girildiğinde *B* tarafından uçaklara bir uçaksavar füzesi gönderilecektir. Eğer füze öndeki uçağa yönlendirilirse, iki uçağın da ateşi altına girecek ve %60 olasılıkla düşürülecektir. Füze arkadaki uçağa yönlendirilirse sadece arkadaki uçağın ateşine maruz kalacak ve %40 ihtimal ile düşürülecektir fakat saldırıya uğramayan öndeki uçak yoluna devam edecektir. Düşürülmeyen füzeni yöneldiği uçağı düşürme olasılığı %90'dır. Tarafların optimal stratejileri ve oyun değeri isntenmektedir.

Çözüm

A'nın stratejileri

A_1 *:* Bomba taşıyan uçağı önden göndermek

A_2 *:* Bomba taşıyan uçağı arkadan göndermek

B'nin stratejileri

B_1 *:* Füzeyi öndeki uçağa yöneltmek

B_2 *:* Füzeyi arkadaki uçağa yöneltmek

Görüldüğü gibi oyun 2x2lik bir oyun yapısındadır. A'nın kazançlarına göre kurulacak ödeme matrisi aşağıdaki gibidir.

(A_1,B_1) durumunda; A bombayı öndeki uçakta taşımakta *B* de füzeyi bu uçağa yönlendirmektedir. A'nın hedefi tahrip etmesi, ya füzeyi düşürerek yada füzenin uçağı düşürememesi halinde mümkündür. Bu durumda A'nın hedefi tahrip edebilme olasılığı a_{11} = *0,6 + 0,4x0,1 = 0,64'dür*

(A_1,B_2) durumunda; A bombayı öndeki uçakta taşımakta *B* ise füzeyi arkadaki uçağa yöneltmektedir. Bu durumda hedef *%100* tahrip edileceğinden $a_{12} = 1$ olur.

(A_2,B_1) durumunda; A bombayı arkadaki uçakta taşırken *B* ise füzeyi öndeki uçağa yöneltmektedir. Bu durumda hedef *%100* tahrip edileceğinden $a_{21} = 1$ olur

(A_2,B_2) durumunda; A bombayı arkadaki uçakta taşımakta B de füzeyi bu uçağa yönlendirmektedir. A'nın hedefi tahrip etmesi, ya füzeyi düşürerek yada füzenin uçağı düşürememesi halinde mümkündür. Bu durumda $a_{22} = 0{,}4+0{,}6x0{,}1= 0{,}46$ olur. Böylece oyun matrisi,

Tablo (2.9.) Örnek-5'e ait ödeme matrisi [M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 1998]

	B_1	B_2
A_1	0,64	1
A_2	1	0,46

yapısındadır. Oyuncuların baskın pür stratejileri yoktur. A ve B'nin optimal stratejileri sırasıyla $X = (x_1,x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ olsun. Oyun değeri v olmak üzere A ve B'nin optimal stratejileri ve oyun değeri;

$0{,}64\, x_1 + x_2 = v$ $\qquad$ $0{,}64\, y_1+y_2 = v$

$1\, x_1 + 0{,}46\, x_2 = v$ $\qquad$ ve $\qquad$ $y_1+0{,}46\, y_2 = v$

$X_1 + x_2 = 1$ $\qquad$ $y_1 + y_2 =1$

Sistemlerinin çözümünden $X^* = (\frac{3}{5},\frac{2}{5})$, $Y^* = (\frac{3}{5},\frac{2}{5})$ ve $v = 0{,}782$ olarak bulunur. Bu sonuca göre A tarafı bombayı %60 olasılık ile öndeki uçağa, %40 olasılık ile de arkadaki uçağa yüklemelidir. B tarafı da füzeyi %60 olasılık ile öndeki uçağa, %40 olasılık ile de arkadaki uçağa yöneltmelidir. A'nın hedefi tahrip edebilme şansı %78,2'dir.

BÖLÜM 3

Oyun Teorisi ve Optimal Kontrol Kullanılarak Multiagent Melez Sistem Tasarımı

Bu bölümde multiagent sistemler için melez kontrol tasarımı ele alınacaktır. Yaklaşımımızda Oyun teorisi başta olmak üzere optimal kontrolden de yaralanılmıştır. Bu yaklaşımda, melez tasarım, iki oyuncunun arasındaki oyun olarak görülmektedir. Bunlardan ilki tasarımcı tarafından belirlenen kontrol diğeri ise çevresel veya diğer etmenler tarafından meydana gelen disturbance'dır.

Bu iki oyuncu melez sistemin tatmini için (güvenlik gibi) maliyet fonksiyonu üzerinde çeşitli hesaplamalar yaparlar. Sistem kabul edilen disturbance'lar altında güvenli olarak çalışıyorsa kontrol kazanmış demektir. Oyun teorisi probleminin çözümü, tasarımcıya sürekli kontrolörlerle güvenli durumlar yaratarak kontrolün kazanmasını sağlayacaktır.

3.1. Giriş

Artan otomasyon talebi ve sistem gereksinimleri kontrol mühendislerini daha karışık sistemler üzerinde çalışmaya zorlamıştır. Üstelik yeni teknolojik gelişimler örneğin; daha hızlı bilgisayarlar, ucuz ve güvenilir sensörler ve kontrol öğelerinin imalat süreci ve ürün dizaynına girmesi geçmişe oranla kontrol uygulamalarının gelişmesine neden olmuştur. Daha karışık sistemlerin çözümünde, tasarımcılar hem ayrık hem de sürekli kontrolörler kullanmak zorunda kalmışlardır. Sürekli kontrolörler, özellikle fiziksel tesislerde kullanılır. Ayrık işlemler ise karışık sistemlerin çözümünde faydalı sonuçlar vermektedir. Hem sürekli hem ayrık dinamikler içeren sitemlere melez sistemler denir.yapısı gereği melez kontrole uygun sistemlerden biri multiagent sistemlerdir. Multiagent sistemlerin yapıları gereği; birçok etmen ortak ve tıkanmış problemleri optimize etmeye çalışır. Reel bir örnek olarak otobanlar gösterilebilir. Burada araçlar çoklu etmenlerdir. Bu tip sistemlerde optimum politika her zaman ortak faydada örtüşmez. Bu yüzden uzlaşma sağlanmalıdır.ortak optimuma ulaşmak için, global optimuma erişmede, etmenleri yönetecek merkezi kontrol tasarımları yapılmalıdır. Bir merkezi kontrolör, tasarım uygulaması ne kadar karışık, yoğun hesaplamalar gerektiren az güvenilir olursa olsun bu zorlukların üzerinden gelebilmelidir. Eğer tamamen merkezi olmayan çözüm çok etkisiz ve merkezi çözüm de veya pahalı ise arada uzlaşmacı bir çözüm aranmalıdır. Böyle bir uzlaşma yarı-özerk bir etmen çalışması sağlayacaktır. Bu durumda her etmeni kaynağın kullandığı bölümünü optimize etmeye çalışacak ve yanındaki etmenle işbirliği yapacaktır.

Yarı-özerk etmen kontrol yapısı gereği melez tasarımlara uyar çünkü her etmen kendi optimal stratejisini sürekli zamanda seçer ve ayrık eşgüdümler olası çatışmaları engellemede kullanılır. Bu durumda sisteme iki etkiden söz edilebilir. Bunlardan ilki kontrol ki bunu biz belirliyoruz, ikincisi ise kontrolümüzün olmadığı disturbance. Disturbance üç şekilde karşımıza çıkabilir;

1) harici sinyaller
2) modellenmiş dinamikler
3) diğer etmenlerin etkisi

Birinci ve ikinci maddeleri klasik kontrolden de tanıyoruz. Üçüncü madde ise melez yapıdan meydana geliyor. Anımsatmak gerekirse bu aşamada sadece plantı modelliyoruz , etmenler arasında bir ilişki olmadığını kabul ediyoruz. Böylece her etmen komşusunun faaliyetini kontrol edilmeyen disturbance olarak görür. Sürekli zamanda kapalı çevrim sistemlerine ait özellikler değer fonksiyonun terimleri olarak düşünülebilir. Bizim amacımız, disturbance'a rağmen iyi bir performans üreten kontrol girişleri için sürekli bir tasarım üretmektir. Bazen disturbance'ı limitlemek de tek çözüm olabilir. Buna örnek de üçüncü sıradaki distrubance olan etmenlerin kendi aralarındaki durumudur. O zaman amacımız, öyle bir disturbance limitleyen ayrık tasarım yapmak ki sürekli tasarım mümkün olsun. Bunlar göz önüne alınırsa Oyun Teorisi bu sistemler için gayet uygundur çünkü Oyun Teorisinin yapısı gereği kontrol ve disturbance birbirine düşmandır (kontrol sistem performansını arttırmaya çalışırken disturbance tam tersi etkiyi yapmaya çalışıyor). O zaman maliyet fonksiyonu üzerinde bir eşik değeri belirleyelim. Kontrolün oyunu kazanabilmesi için istenen değerin eşiğin altında kalması gerekir, aksi halde disturbance kazanacaktır. Tasarımcının görevi, en iyi kontrolü ve en kötü distrubance'ı bulmaktır.

3.2 Oyun Teorisi İskeleti

Melez kontrolör tasarımında ortaya çıkan en büyük zorluk; hem ayrık hem sürekli büyüklüklerin bir arada kullanılmasıdır. Yetersiz kontrolörler kullanıldığında sonuç istenilenin çok dışında olabilir. Bu zorluğu aşmak için oyun Teorisi kullanarak sürekli kontrolörler ve düzgün kapalı çevrim sonuçları için istikrarlı ayrık soyutlamalar üretilebilir

3.3 Plantın Modeli

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), d(t), t) \qquad (3.1)$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad (3.2)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), d(t), t) \qquad (3.3)$$

$x(t) \in R^n$ durumları gösterir

$u(t) \in R^m$ girişleri gösterir

$d(t) \in R^p$ disturbance'ı gösterir

(3.1) nolu eşitliğin tek çözümü olduğunu ve tüm durumların geri beslemeye uygun olarak seçildiğini kabul ediyoruz.

Fiziksel etkenler sistem gelişim evrimini sınırlar. Bu sınırlamalar durumda zorlanmalar olarak ortaya çıkar (girişler ve disturbancelar).

Bu sistemin çözümünde her t için $x(t) \in X \in R^n$, $u(t) \in U \subset R^m$ ve $d(t) \in D \subset R^p$ yazılabilir.ayrıca PC adında R'nin parçalı sürekli bir fonksiyon kümesi olduğunu düşünelim ve $U = \{ u \in PC \; / \; u(t) \in U \}$, $D = \{ d \in PC \; / \; d(t) \in D \}$ olmak üzere iki fonksiyon tanımlayalım.

Düzenli kontrol için iskelet yapımızda istenen performans ayrık tabakalar tarafından belirlenir.sürekli tabakalar regulasyon ve giriş seçiminden sorumludur. Bir arayüz bu iki katman arasında iletişimi sağlar. Bu aşamada sürekli tabakanın tasarımından ve arayüzden bahsedilecektir.

3.4 Ayrık Tabaka

Sürekli tabakanın terimleriyle ayrık tasarım istenen ardışık noktalarının (y_j^d) çıkışını izlemesi olarak açıklanabilir. $i = 1........N$, $J_i = R^n \times U \times D \rightarrow R$ maliyet fonksiyonları ve $C_i \in R$ de eşiklerdir. Her $i = 1........N$ için eğer $J_i\ (x_0 ,u, d) < C_i$ ise eğri kabul edilebilir demektir. Biz maliyet fonksiyonlarını azalan olarak kabul ediyoruz. Nitel olarak önemli maliyet fonksiyonları güvenlik gibi önemli hususları gösterirken daha az önemli maliyet fonksiyonları ise kaynak değerlendirilmesi gibi konuları belirtir. Tasarım aşamasında bu konulara dikkat edilmelidir.

3.5 Sürekli Tabaka

Aşağıdaki algoritma melez düşük seviyeli kontrolör tasarımında kullanılabilir.

0. adım : $V_o = X,\ U_0(x_o) = U\ ,\ i=1$

1. adım : İki oyuncunun sıfır toplamlı dinamik bir oyun oynadığını ve J_i'nin bir eyer noktası çözümü olduğunu düşünelim. $(u_i^*,\ d_i^*)$

$$J_i^0 = \max_{(d \in D)} \min_{u \in U_i(x_0)} J_i(x_0, u, d) \tag{3.4}$$

$$= \min_{u \in U_i(x_0)} \max_{d \in D} J_i(x_0, u, d)$$

$$= J_i(x_0, u_i^*, d_i^*)$$

Tanım

$V_i = \{x \in R^n \,/\, J_i^x(x) \le C_i\}$ ve

$$\mathrm{U}_i(x_o) = \{u \in U_i\,(x_o) \,/\, J_i\,(x_o ,u, d\,) \le C_i\,\} \tag{3.5}$$

algoritma hesaplanırken eğer $i < N$ ise $i = i+1$ alınır ve i. basamak tekrar edilir.

Her adımda $0 < i$, $U_i\ (x_o)$ ve V_i'yi belirtir ki bütün $x_o \in V_i$ için öyle bir $u_j^m \in U_i\ (x_o)$ vardır ki $d \in D$ $J_j\ (x_o,u_i^*,d\ ) \leq C_j$ $(\ j = 1........i)$ sağlar. Algoritmanın sonucu olarak ; $d \in D$, $x_o \in V_n$ ve $j = 1........i$) için başlangıç koşulları $V = V_n$'in $J_j\ (x_o,u_i^*,d\ ) \leq C_j$ ifadesini sağladığı yorumu yapılabilir.

Kontrolör durum cinsinden şöyle yazılabilir;

$$u^*(t) = \begin{cases} u_N^*(x) & x \in V \\ u_{N-1}^*(x) & x \in V_{N-1} / V \\ .... & .... \\ u_1^*(x) & x \in R^n / V_2 \end{cases} \qquad (3.6)$$

(3.5) ifadesi melez bir otomasyon tarafından kolaylıkla tamamlanabilir. Bu prosedür, bütün katmanlar tarafından, istenen noktaya erişinceye kadar tekrar edilmelidir. Bu metodun tek aksayan yönü ise; çözümünde Oyun Teorisi'nin eyer noktası metodundan faydalanıldığı için dinamik oyunların her zaman bir eyer noktasının bulunmamasıdır.

3.6.Arayüz

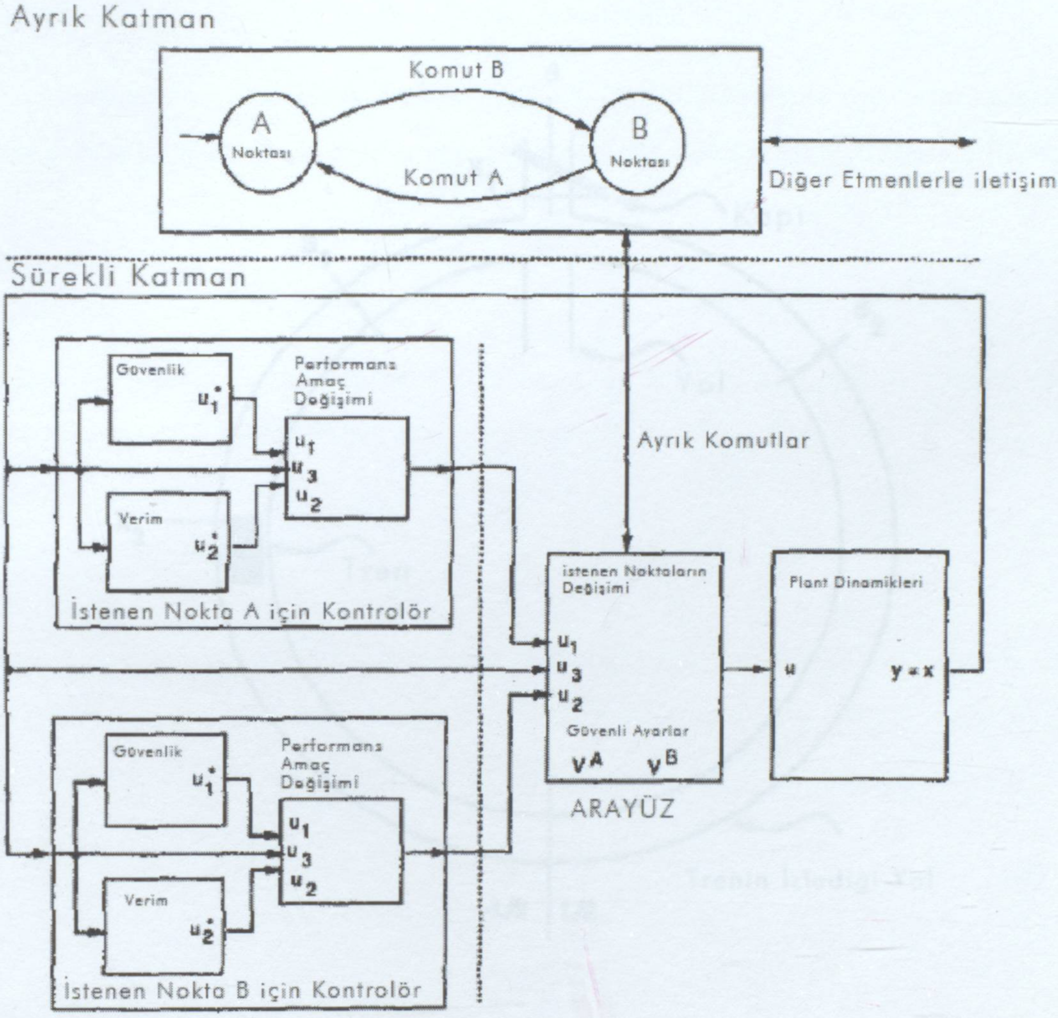
V kümeleri sistem performansına etki eden bütün gereksinimleri barındırır. Bu kümeler ayrık değişim temalarını tatmin eden durumları betimlerler. Eğer mevcut durum V kümesinin içinde yer almıyorsa, ayrık katman yeni komutlar üretemez. Aslında bu kümeler sürekli katman performansını belirlemede de kullanılır.

Mimaride V_i kümeleri yuvalanmış bir haldedir. Bu yüzden V_i 'deki başlangıç koşullarının V'de görülmeme olasılığı vardır. Bu durum dolaylı olarak gösterir ki; bazı sistem performansı gereksinimleri sağlanırken (güvenlik gibi) bazıları sağlanamaz (efektif kaynak kullanımı).

Aslında bu durum ayrık tasarıma daha çok özgürlük tanır. Örneğin, yeni bir komut verimliliği bozacak şekilde de olsa güvenlik tarafından oluşturulabilir. Bu yapı, düşük öncelikli gereksinimlerin yüksek öncelikli gereksinimlere göre ihmal edilebildiği durumlarda aşamalı performans bozulmalarının uygun olarak modellenmelerinde kullanılır. Bütün sürekli tasarım (arayüz de dahil) şekilde gösterilmiştir.

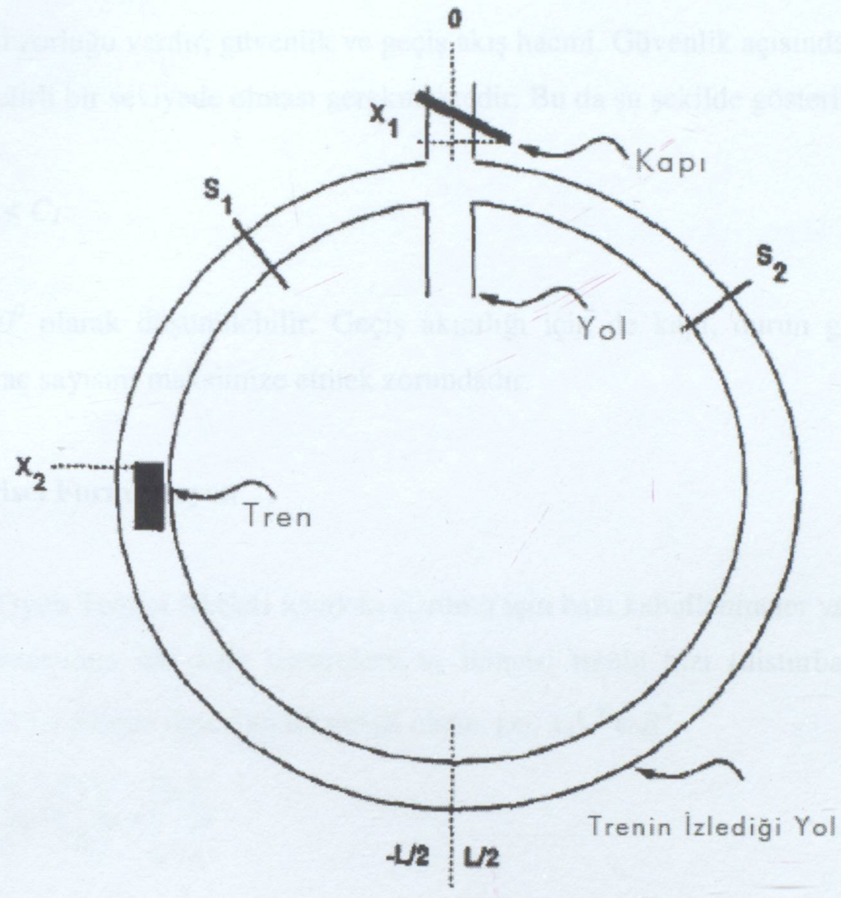
Sürekli kontrolörlerin değişimi iki aşamada olur. Ayrık sistemin iki nokta belirttiğini bunların da A ve B olduğunu bu noktaların da güvenlik ve verim olduğunu düşünelim. Her bir nokta için Oyun Teorisel iskelet optimal kontrolörler oluşturacaktır. Bunlar, güvenlik için u_1^* ve verim için u_2^*, başlangıç koşulları da V^A ve V^B 'dir. Yukarıdaki şemadaki gibi, iki kontolör arasındaki değiş tokuş, durumun o anki değişimine bağlı olarak sağlanır (şemada v_3 girişi olarak) . Ayrık tabakadan yeni bir set point alındıktan sonra arayüz eğer sistem uygun bir güvenlik noktasına ulaşmışsa yeni bir kontrolör atar. Eğer bu gereksinim sağlanamamış ve ayrık kontrolör yeni bir nokta üzerinde ısrar ediyorsa, ayrık katmanın diğer elementleri koordine etmesi gerekir.

Bu tip koordinasyonlar, etmen faaliyetlerini bu yüzden yarı-özerk yaparlar. Daha soyut bir görüş ise oyun yapısının sıfır toplamlı kooperatif olmayan yapıdan kısmi kooperatif yapıya taşımaktır. Ancak olağandışı şartlarda (örneğin hataların varlığı) kooperatif oyun yapısı çözüm olarak düşünülebilir.



Şekil 3.1 Multiagent melez kontrol şeması [J. Lygeros., D. Godbole., S. Sastry., 1995]

Örnek



Şekil 3.2 Tren yolu geçişi [J. Lygeros., D. Godbole., S. Sastry.., 1995]

Tren yolu şekilde gösterilmiştir. Kolaylık açısından trenin boyu L olan dairesel bir yol içersinde hareket ettiğini, L'nin de yeteri kadar büyük ve geniş olduğunu düşünelim. Ayrıca trenin bir nokta olarak gösterildiğini düşünelim. Bu analizi trenin gerçek boyutuna taşımak oldukça kolaydır. Tren saat yönünde hareket etsin. $x_2 \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ trenin yeni pozisyonu olsun.

Trenin hızı sınırlı olacaktır mesela $\frac{dx_2}{dt} \in [v_1, v_2]$, $0 < v_1 \leq v_2 < \infty$ yazılabilir. Bir yol geçişi $x_2 = 0$ noktasında mevcut olsun. Bu geçişte bir kapı olduğunu ve kapı aşağı indiğinde araçların geçiş yapamadıklarını düşünelim. $x_1 \in [0^0, 90^0]$ bu kapının açı cinsinden boyutu olsun bu kapının birinci mertebeden diferansiyel denklemi; $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2} x_1 + u$ şeklinde tanımlanır, u burada tasarımcı tarafında belirlenen ilk kapı durumudur. S_1 ve S_2 noktalarında iki adet sensör bulunsun. S_1 trenin yaklaştığını, S_2 de uzaklaştığını algılasın. Bu durumda kontrol problemi $-\frac{L}{2} < S_1 < 0 < S_2 < \frac{L}{2}$ şeklinde düşünülebilir.

Bu tasarımın iki zorluğu vardır; güvenlik ve geçiş akış hacmi. Güvenlik açısından kapının tren geçene kadar belirli bir seviyede olması gerekmektedir. Bu da şu şekilde gösterilebilir;

$$x_2\,(t) = 0 \Rightarrow x_1 < C_1 \tag{3.7}$$

C_1'in değeri 10^0 olarak düşünülebilir. Geçiş akıcılığı için de kapı, durun güvenli olduğu zaman geçen araç sayısını maksimize etmek zorundadır.

3.7.Oyun Teorisel Formülasyon

Bu problemin Oyun Teorisi iskeleti içindeki çözümü için bazı kabullenmeler yapalım. Oyunu oynayan iki oyuncunun ilki kapı kontrolörü u, ikincisi trenin hızı (disturbance) d olsun. Dinamikler oyun içerisinde lineer ve iki girişli olsun. $[x_1, x_2]^T \in R^2$,

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} o \\ 1 \end{bmatrix} d \tag{3.8}$$

yazılabilir. x ise;

$x \in X\ :\ \{(\ x_1,\ x_2) \in\ R^2\ /\ x_1 \in\ [0^0, 90^0],\ x_2 \in\ [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]\}$ şeklinde yazılabilir. Trenin hızı (disturbance) ise $d \in D = [v_1, v_2]$, $u \in U = [0,45]$ olarak gösterilebilir. O zaman ;

Yardımcı Teorem

Eğer $x_0 \in X$ ve giriş koşulları sağlandığında bütün $t \geq 0$ için $x(t) \in X$ 'dır.

Bu iki oyuncu iki değişik maliyet fonksiyonu üzerinden hesaplarını yapsınlar. Bunlar da J_1 ve J_2 olsun. Verilen başlangıç koşulu $x_0 \in X$, $T(x_0) = min\ \{t \geq 0\ /\ x_2\,(t) = 0\}$ yani trenin ilk defa kesişme noktasına geldiği durum olsun. O zaman güvenlik için gerekli olan ifadeler maliyet fonksiyonu cinsinden;

$$J_1\,(x_o, u_i^*, d) = x\,(\,T(x_o)\,) \leq C_1 \tag{3.9}$$

olacaktır.geçiş hacminin değer fonksiyonu olarak gösterimi ise ,

$$J_2\,(x_o,u_i^*,d\,) = \int_0^{\infty} (90\text{-}x_1\,(t))^2 \tag{3.10}$$

olarak gösterilebilir. J_2'yi minimilize etmek, kapının olabildiğince açık olması anlamına gelir. o zaman son durumda

$$u^*(t) \equiv 0,\; d^*(t) \equiv 0 \tag{3.11}$$

yazılabilir.

Yardımcı Teorem 2

(u^*, d^*) global bir eyer noktasıdır.

Herhangi akla yatkın (u,d) ,

$$J_1\,(x_o,u_i^*,d\,) \leq J_1^*\,(\,x_o) \leq J_1\,(x_o,u,\,d^*) \tag{3.12}$$

sağladığından (u^*, d^*) global bir eyer noktasıdır.

Yardımcı Teorem 3

Güvenli başlangıç durumları ;

$$\mathrm{V} = \{\, x_o \,\} \in X \,/\, x_2^{\,0} > 0 \text{ ya da } x_2^{\,0} \leq 2v_2 \ln\,(C_1\,/\,x_1^{\,0}) \tag{3.13}$$

Akış hacminin tasarımında, birinci yardımcı teoremden $x_1\,(t) \leq 90^0$ olarak elde edilir. Yani akış hacmini maksimize etmek $x_1\,(t)$ 'yi maksimize etmektir bu da $u(t) \equiv 45$ sonucunu doğurur. Optimal kontrolör güvenliğin ve verimin bir kombinasyonu olarak elde edilir. Sonuç olarak kontrolör;

$$u = \begin{array}{ll} 0 & x \in S^c \\ 45 & x \in \mathrm{S} \end{array} \tag{3.14}$$

burada *S, V'nin* iç yüzüdür. (interior) bu tasarımla (3.14)'e ait kontrolör güvenli olacaktır.

Teorem 1

Eğer $\check{S} \subset S$ ve $x_o \in V$ iken, $x \in \check{S}$ olan bir kontrolör $u = 0$ yapıyorsa güvenliği sağlar. Zaten bu ifadeyi sağlayan kontrolörler en verimli-güvenli kontrolörlerdir.

Teorem 2

Eğer $S_1 \leq 2v_2 \, ln \, (C_1 / x_1^0)$ ve $S_2 > 0$ ise ayrık kontrol sistemi güvenlidir.

Kanıt

Arayüz sürekli zamanda giriş-çıkış olarak görülürken ayrık kontrolör için

$u = 0 \qquad S_1 \leq x_2 < S_2$

$u = 45$ herhangi bir başka durum

yazılabilir.

burada bütün ayrık geçişlerin anlık olduğunu kabul edelim. $\check{S} = \{x \in X / S_1 \leq x_2 < S_2\}$ olsun.
1. teoremden bütün $x_1^0 \in [0^0, 90^0]$ için $S_2 > 0$ ve $S_2 \leq 2v_2 \, ln \, (C_1 / x_1^0)$ sonucuna ulaşılabilir.

Bazı eklemelerle çoklu trenlerin olduğu hallerde ve ya gecikme olması durumunda güvenli kontroller tasarlanabilir.

4.8.Koordinasyonun Muhtemel Rolü

Eğer sensörler yanlış yerleştirilseydi (örneğin $S_1 > 2v_2 \, ln \, (C_1 / x_1^0)$) yukarda yaptığımız analizin güvenliği sağlayacağı garanti edilemezdi. Aynı durumu trenin hızı için de düşünebiliriz. $x_2 \in [S_1, S_2]$, $\frac{dx}{dt} \in [v_1, v_2^*]$ ve $v_2^* < v_2$ olduğunu düşünelim.

Eğer $v_2^* \leq 2v_2 \, ln \, (C_1 / x_1^0)$ ifadesini sağlıyorsa sistem güvenli olacaktır.

4.9.Sonuç

Multiagent melez kontrol ile karmaşık sistemlere uygun dizayn açıklanmaya çalışılmıştır. Oyun Teorisi sonuçları optimal sürekli kontrolörler ve ayrık değişim davranışlarını açıklamada kullanılmıştır. Melez kontrolör, eğer ayrık bölüm bu gereksinimleri karşılıyorsa istenen performansı garantileyecektir. Bizim yaklaşımımız tren yolu geçişi üzerindeki kontrol problemi olarak mizansenleştirilmiştir. Yine de hatırlanmalıdır ki bu problemin, eyer noktalarının bulunmadığı hallerdeki çözümüne bu yaklaşımla ulaşılamaz.

KAYNAKLAR

M. Ahlatçıoğlu, F. Tiryaki., 'Oyunlar Teorisi' , Yıldız Teknik Üniversitesi Basım – Yayın Merkezi Matbaası, İstanbul, 1998

H. Bakoğlu., ' Oyun Teorisi' Ege ün. Fen Fak. Yayınları, No : 135 Basımevi, İzmir , 1991

J. Eichberger., 'Game Theory for Economists' , Academic Pres, Inc, San Diego 1993

D. Gilles, 'Locations of Solutions' Princeton Mathematics , Princeton NJ 1953

S.P.H Heap., Y. Varoufakis., ' Game Theory : A Critical Introduction' Rotledge, London 1995

F.S. Hillier., G.J. Lieberman., ' Introduction to Operations Research' Mc-Graw-Hill New York, 1990

M. Karamürsel., ' Oyun Teorisine Giriş ' , 9 Eylül Ün. Fen Fak. Yayınları, No : 2178 , DEÜ Basımevi , İzmir 1997

S. Lipschutz., ' Theory and Problems of finite Mathematics' Schaum Publishing. Co. New York 1966

J. Lygeros., D. Godbole., S. Sastry., 'Multiagent Hybris System Design Using Game Therory and Optimal Control' University of California, Berkeley, 1995