

168392

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAGNETİK REZONANS SÜRECİNİN ZAMAN  
DOMENİNDE SONLU FARK YAKLAŞIMLARI İLE  
İNCELENMESİ**

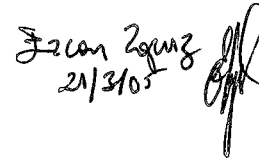
Elektronik Müh. Duygu TUNCAY

**FBE Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Anabilim Dalı Haberleşme Programında  
Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı: Prof.Dr. Taner ŞENGÖR**

  
Taner ŞENGÖR

  
İzzet Zengin  
21/3/05

  
S. Şeker

**İSTANBUL, 2005**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
KISALTMA LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ .....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ .....	1
1.1 Magnetik Rezonans Sinyalinin Elde Edilmesinin Kuantum Mekanik ile Açıklanması.....	3
1.2 Magnetik Rezonans Sinyalinin Elde Edilmesinin Klasik Fizik ile Açıklanması ....	6
1.3 Kuantum Mekanik ve Klasik Fizik Açıklamalarının Birleştirilmesi, MRI Sürecinin Bloch Denklemleri ile Açıklanması.....	7
2. BLOCH DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE MRI SÜREÇLERİNİN BU ÇÖZÜMLER İLE İNCELENMESİ.....	17
2.1 Statik Magnetik Alan Varlığında Magnetizasyonun Zamanla Değişim Durumunu Açıklayan Bloch Denklemleri.....	17
2.2 Statik Magnetik Alan ve Zamanla Değişen Magnetik Alanın Varlığında Bloch Denklemleri.....	30
2.3 Rölaksasyon Terimlerini İçeren Bloch Denklemleri.....	37
3. SONUÇLAR .....	40
KAYNAKLAR .....	41
EKLER.....	42
Ek 1 <sup>1</sup> H Atomuna B <sub>0</sub> ve B <sub>1</sub> Uygulamalarında Magnetizasyon Vektörünün Aldığı Halin Simülasyonuna İlişkin Matlab Kodu.....	43
Ek 2 Matlab Kodları.....	48
ÖZGEÇMİŞ .....	63

## SİMGE LİSTESİ

$I$	Spin kuantum numarası
$B_0$	Statik magnetik alan büyüklüğü
$B_1$	Zamanla değişen magnetik alan büyüklüğü
$h$	Planck sabiti: $6.63e-34$ Js
$f$	frekans
$f_0$	Larmor frekansı
$M$	Magnetizasyon
$M_0$	Magnetizasyonun ilk değeri
$^1H$	Hidrojen izotopu
$^{13}C$	Karbon izotopu
$^{31}P$	Fosfor izotopu
$\mu$	Tek bir spine ait magnetik moment
$s$	Spin açısai momentumu
$E_m$	Spin enerjisi, m, enerji seviyesi
$\sum_i E_i$	Spin toplam enerjisi
$\Delta E$	İki spin durumu arasındaki enerji farkı
$k$	Boltzman sabiti ( $8.62e-5$ eV/K veya $1.38e-23$ J/K)
$T$	Kelvin cinsinden ısı
$\tau$	Tek bir magnetik momentin oluşturduğu tork
$\vec{r}$	Konum vektörü
$\vec{u}$	Hız vektörü
$\vec{P}$	Lineer momentum vektörü
$G_i$	magnetik alan gradyanı
$T_1, T_2$	Rölaksasyon sabitleri

## **KISALTMA LİSTESİ**

MRI      Magnetic Resonance Imaging, Magnetik Rezonans Görüntüleme  
FID      Free Induction Decay



## ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1	Magnetik rezonans görüntüleme süreci .....	2
Şekil 1.2	Hidrojen çekirdeğindeki magnetik momentlerin gelişigüzel dizilişi .....	4
Şekil 1.3	$B_0$ varlığında $^1\text{H}$ çekirdeğindeki ( $I=1/2$ ) magnetik momentlerin dizilişi.....	4
Şekil 1.4	Dış magnetik alanın varlığında Hidrojen atomlarının çekirdeklerindeki magnetik momentlerin bu alana göre ayarlanmaları .....	8
Şekil 1.5	$B_0$ varlığında net magnetizasyon .....	9
Şekil 1.6	Dönen referans sisteminde RF uygulanmış $M_0$ 'ın durumu.....	9
Şekil 1.7	$T_2$ röleksasyon süreci, $M_0$ 'ın x'y' düzleminde bozunması .....	10
Şekil 1.8a	Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 1.durum: magnetizasyon vektörü +z yönünde .....	11
Şekil 1.8b	Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 2.durum: magnetizasyon vektörü xy düzleminde .....	11
Şekil 1.8c	Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 3.durum: magnetizasyon vektörünü oluşturan spinler xy düzleminde farklı fazlarda dönüyorlar. ....	12
Şekil 1.8d	Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 4.durum: magnetizasyon vektörü xy düzleminde bozunuyor. ....	12
Şekil 1.8e	Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 5.durum: magnetizasyon vektörü z ekseninde tekrar oluşuyor.....	13
Şekil 2.1	Statik magnetik alan varlığında magnetizasyonun x ve y bileşenleri sıfıra eşitken, z bileşeni sabittir.....	20
Şekil 2.2	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ zamanla değişim grafiği .....	21
Şekil 2.3	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği .....	21
Şekil 2.4	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken $^1\text{H}$ için $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ zamanla değişim grafiği .....	22
Şekil 2.5	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken $^1\text{H}$ için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği .....	22
Şekil 2.6	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x ve +y yönünde 0.6, +z yönünde 0.9 Tesla iken $^1\text{H}$ için $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ zamanla değişim grafiği .....	23
Şekil 2.7	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x ve +y yönünde 0.6, +z yönünde 0.9 Tesla iken $^1\text{H}$ için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği.....	23
Şekil 2.8	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken $^1\text{H}$ , $^{31}\text{P}$ , $^{13}\text{C}$ için magnetizasyon vektörlerinin hareketlerinin grafiği ve $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri.....	24
Şekil 2.9	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için, $k=250$ adım, $h=10^{-10}$ sn. değerlerinde magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği .....	26
Şekil 2.10	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için, $k=250$ adım, $h=10^{-10}$ saniye değerlerinde $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri .....	27
Şekil 2.11	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için, $k=400$ adım, $h=10^{-10}$ saniye değerlerinde magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği .....	28
Şekil 2.12	$k=400$ adım için $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri .....	28
Şekil 2.13	$^1\text{H}$ için, $k=1000$ adım iken magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği .....	29
Şekil 2.14	$B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için, $k=1000$ adım, $h=10^{-10}$ saniye değerlerinde $M_x$ , $M_y$ , $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri .....	29

Şekil 2.15 $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken $^1\text{H}$ için, $k=1000$ adım, $h=10^{-10}$ saniye değerlerinde magnetizasyon vektörünün ucunun izlediği yol .....	30
Şekil 2.16 Dönen referans sisteminin oluşturulması $B_x = \cos(\theta + \phi) = \cos\theta \cos\phi - \sin\theta \sin\phi$	31
Şekil 2.17 $90^\circ$ 'lik RF darbesinin kesilmesinden sonra magnetizasyon vektörünün MR sinyalini üretirken izlediği yol.....	36
Şekil 2.18 $90^\circ$ 'lik RF darbesinin kesilmesinden sonra magnetizasyon vektörünün MR sinyalini üretirken izlediği yolun 2 boyutlu ifadesi.....	36
Şekil 2.19 $90^\circ$ 'lik RF darbesi ile xy düzlemine getirilen magnetizasyon vektörünün RF darbesi kesildikten sonra $M_z$ 'yi tekrar oluştururken vektörel olarak izlediği yol	37
Şekil 2.20 xy düzleminde normal referans sisteminde sönmölen MR sinyali .....	38



## ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 1.1 Çeşitli çekirdeklere ait spin numaraları, jromagnetik oranlar ve doğal bulunma yüzdeleri .....	3
--	---



## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmayı gerçekleştirmemde büyük emeği geçen değerli hocam Prof. Dr. Taner Şengör'e yardımlarından ve rehberliğinden dolayı çok teşekkür ederim.



## ÖZET

Magnetik rezonans görüntüsü, dış bir magnetik alan varlığında, insan dokusundaki bazı atomik çekirdeklerden elde edilen zayıf bir magnetizasyonu ifade eder. Bu magnetizasyonun, sözkonusu çekirdeklerin yoğunluğu ile doğru orantılı olmasından dolayı MR görüntüsü seçilen atomların dağılımını gösterir. Yumuşak dokunun büyük hidrojen konsantrasyonuna sahip olması sebebiyle, proton MR görüntülenmesi tercih edilir.

MRI, anatomik bölgelerin kesit olarak görüntülerini verir. MRI, hem fonksiyonel hem de anatomik bilgi sağlar.

Statik bir magnetik alanın varlığında, belli atomların nükleer enerji seviyeleri, gelen radyo frekansındaki fotonlarla etkileşime girer. Fotonun yutulmasıyla radyo frekansının doku tarafından emilmesi görüntü üretmek için kullanılır. Bundan sorumlu olay NMR etkisidir. NMR, moleküllerin elektronik yapısını araştırmak için de kullanılır. 1980'lerin başında NMR, görüntüleme için kullanılmıştır.

Gelen dalganın frekansı, uygulanan statik magnetik alan büyüklüğü olan  $B_0$ 'daki spin vektörünün dönme frekansına göre çok büyük ya da çok küçük ise çekirdekten bir cevap almak çok zor olacaktır. RF darbesi olmak üzere uygulanan magnetik alan  $B_1$ 'in titreşim frekansı, çekirdeğin spin dönme frekansına eşit olduğu zaman, spin magnetizasyonu ve  $B_1$ 'in birbirlerine göre sabit oldukları gözlenir. Spin vektörü  $B_1$ 'den bu koşulda etkilenir ve bu koşulda anlatılan frekansa Larmor frekansı denir. Spin vektörü dönmeye başlar. Bu spin uyarılma süreci olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, bu spinin daha yüksek bir enerji seviyesine geçtiği süreçtir. RF darbesi kesildiğinde, spin magnetizasyon vektörü, enerji yayarak rölaksasyon sürecine girer.

Bu çalışmada, yukarıda anlatılan sürecin hesaplamaları yapılmıştır. Başlangıç noktası olarak, temel denklemler olan Bloch denklemleri alınmıştır. Bloch denklemlerinin analitik ve nümerik çözümleri yapılmıştır. Nümerik çözümlerin sonucu olarak, çekirdeğin magnetizasyonunun vektör gösterilimi yapılmıştır. Nümerik denklemleri yazmak için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Analitik ve nümerik denklemler çözülmüştür.

**Anahtar kelimeler:** Magnetik Rezonans, spin, Larmor frekansı, Bloch denklemleri, rölaksasyon, sonlu farklar yöntemi

## ABSTRACT

The MR image represents the weak magnetization, originated from some of the atomic nuclei in the body tissue, in the presence of an external magnetic field. The MR image shows the distribution of the selected atoms since this magnetization is proportional to the density of those nuclei. Proton MR images are preferred because of the large hydrogen concentration in soft tissue.

MRI, gives the cross sectional image of anatomical parts. MRI provides both functional and anatomical information.

In the existence of static magnetic field, nuclear energy levels of some definite atoms interfere with the incident photons at radio frequency. Absorption of the photons by the body tissue at radio frequency, is used in order to produce the image. The phenomenon responsible from this is called NMR effect. NMR is also used to investigate electronic structure of molecules. In the early 1980s, MRI was used for imaging.

If the frequency of the incident wave is too small or too big relative to the rotation frequency of the spin vector at  $B_0$ , which is the magnitude of the applied static magnetic field, then it will be hard to get response from the nuclei. When the oscillating frequency of  $B_1$ , which is the applied magnetic field as to be an RF pulse, is equal to the spinning frequency of the nuclei, it is observed that they are stable relative to themselves. The spin vector can be effected by  $B_1$  in this condition. The frequency explained in this condition is called Larmor frequency. The spin vector begins to precess. This is called the spin excitation process. In other words, it is a process that spin goes up to a higher energy state. The spin magnetization vector goes into the relaxation processes emitting energy when RF pulse is off.

In this work, the computations of the process explained above is done. The main equations; i.e., Bloch equations, are taken as the starting point. Both the analytical and the numerical solutions of Bloch equations are given. The vector representation of the magnetization of the nuclei is shown as a result of the numerical solutions. The finite differences method is used to write the numerical equations. The analytical and numerical equations are solved.

**Key Words:** Magnetic Resonance, spin, Larmor frequency, Bloch equations, relaxation processes, finite differences method

## 1. GİRİŞ

MRI ve NMRI; örneğin tıp, uzaktan algılama gibi güncel uygulama alanlarına sahiptir. MRI grafiklerinin zaman domeninde oluşturulması bu uygulama alanlarına katkıda bulunabilir. Bu amaçla sözkonusu süreçlerin FDTD yöntemi ile incelenmesini ele alan çalışmalara yakın zamanda rastlanmaktadır (Tuncay, Şengör). Ayrıca, yapay sinir ağları yaklaşımıyla MR görüntülerini incelemeye yönelik yayınlara da rastlanmaktadır (Morra).

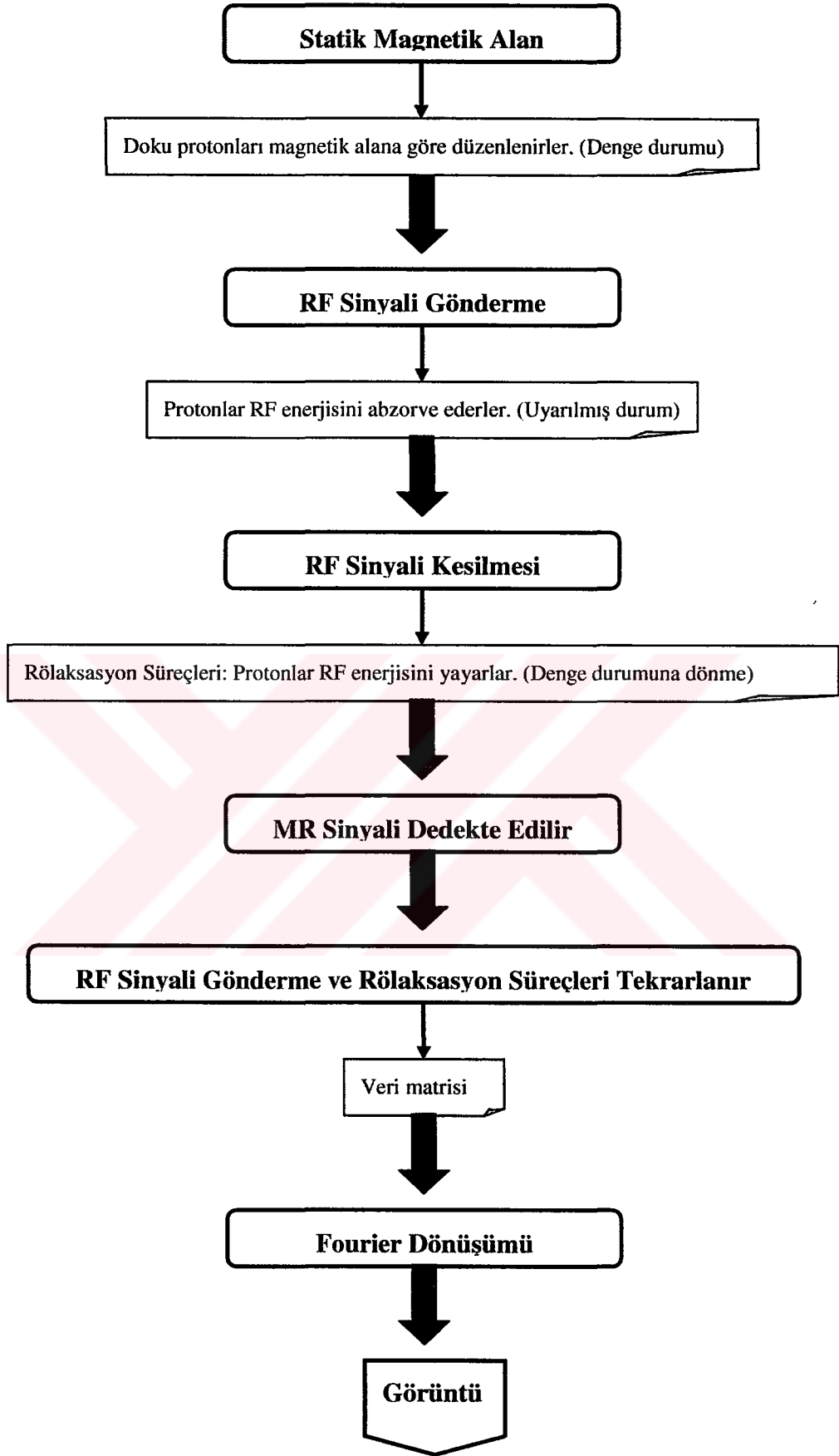
Bu çalışmada, magnetik rezonans tekniğinin, görüntülenme öncesindeki sürecini açıklayan denklemler için nümerik çözümler geliştirilmiştir. MRI'da uygulanan magnetik alanlar ile insan vücudundaki çeşitli atomların etkileşimine odaklanılmıştır.

Magnetik rezonans görüntüleme, insan vücudunun içine ilişkin yüksek kalitede görüntü elde etmek için tıbbi uygulamalarda temel olarak kullanılan bir görüntüleme tekniğidir. Özel bir makine ile organların, kemiklerin görüntüleri alınır. Elde edilen görüntü sadece yatay kesitlerle sınırlı değildir. Üç boyutlu görüntüleme sağlanabilir (Ailion).

Magnetik rezonans tekniğinde bir magnetik alan içerisinde incelenmek istenilen bölgeye radyo dalgaları gönderilir. Radyo dalgalarının uyardığı hücrelerdeki hidrojen atomlarının ürettiği enerji alınıp bir bilgisayarla işlendikten sonra görüntüye dönüştürülür (Holzman). MRI süreci, şekil 1.1'de şematik olarak açıklanmıştır.

MRI, nükleer spinin kuantum mekanik özelliğinin bir sonucu olan magnetik momentlerin görüntülenmesidir. Çok sayıda spinin ortalama davranışı, dokunun net gözlemlenebilir magnetizasyonunu verir (Hornak).

Spin ve magnetizasyon kavramları ile MRI sinyalinin oluşma süreci kuantum fizik ve klasik fizik ile genel kapsamlı olarak 1. bölümde açıklanmıştır. İkinci bölümde Bloch denklemlerinin nümerik çözümleri üzerinde çalışılmıştır. Hesaplamalar,  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ve  $^{31}\text{P}$  için yapılmıştır. Bu tezin amacı MRI sürecini açıklamakla birlikte, MRI sürecini matematiksel olarak ifade eden Bloch denklemlerini çözen iyi bir sayısal yaklaşımın oluşturulmasıdır.



Şekil 1.1 Magnetik rezonans görüntüleme süreci

### 1.1 Magnetik Rezonans Sinyalinin Elde Edilmesinin Kuantum Mekanik ile Açıklanması

Atomların ve atomik parçacıkların sahip olabileceği belirli enerji seviyeleri vardır. Bu enerji seviyelerinin değiştirilebilmesi için, belirli miktarda yani kuantalanmış enerjinin emilmesi gerekir. Enerji seviyeleri, klasik fizikte olduğu gibi sürekli değildir (Hornak).

Tek bir atomik parçacığın belirli enerji seviyelerinden hangisine sahip olduğunu bilemeyiz. Ancak onun, uygun olan spesifik enerji seviyelerinde olma olasılığını bilebiliriz. Çok sayıda parçacığın ise belirli enerji seviyesindeki sayılarını tespit etmek mümkündür (Serway). Dolayısı ile, bu çalışmada tek bir parçacık yerine belli bir andaki çok sayıda parçacıkla ilgilenilecektir.

NMR'ın fiziksel temeli nükleer spin, spin ile ilişkili açısal momentum ve magnetik moment kavramları ile açıklanır. MRI için kullanışlı olan çekirdeklerin magnetik rezonans olayının oluşmasında temel olan iki özelliği açısal momentumu ve magnetik momentidir. Spin, bir kuantum mekanik büyüklüktür. Bu büyüklük, çekirdeğe net bir açısal momentum kazandırır ve magnetik moment verir.

Çizelge 1.1 Çeşitli çekirdeklere ait spin numaraları, jromagnetik oranlar ve doğal bulunma yüzdeleri (Nave)

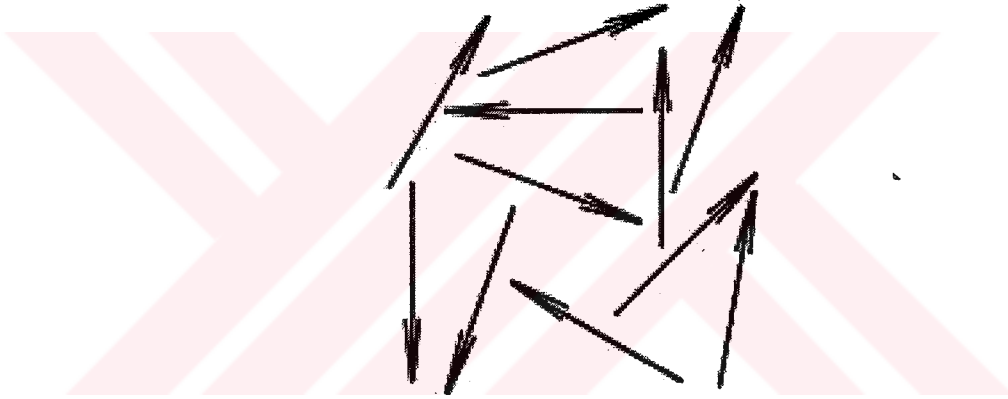
Çekirdek	Spin Numarası	Kuantum	Jiromagnetik oran ( $10^8 \text{ rad T}^{-1} \text{ s}^{-1}$ )	Doğal bulunma yüzdesi (%)
$^1\text{H}$	1 / 2		2.675	99.98
$^{13}\text{C}$	1 / 2		0.673	1.108
$^{17}\text{O}$	5 / 2		-0.363	0.037
$^9\text{F}$	1 / 2		2.517	100.00
$^{23}\text{Na}$	3 / 2		0.70813	100.00
$^{31}\text{P}$	1 / 2		1.083	100.00

Spin, spin numarası I ile karakterize edilir.  $I=0$  ise çekirdeğin magnetik alanı yoktur. I, 0 ve  $\frac{1}{2}$ 'nin katları olabilir. Daha büyük spin numaraları daha kompleks magnetik alanları ifade eder (Serway).  $^{12}\text{C}$  ve  $^{16}\text{O}$  gibi bazı çok rastlanan atomların spin numarası sıfırdır. Bu da, bu

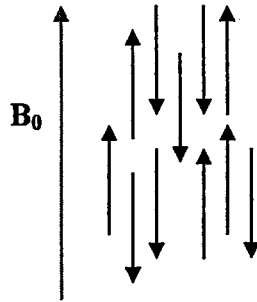
çekirdeklerin, MR spektroskopisinde görünmez olmasına sebep olur. Sürekli olan magnetik moment de, jromagnetik adı verilen çekirdeksel özelliğe bağlıdır. Çeşitli çekirdeklere ait spin numaraları, jromagnetik oranlar ve doğal bulunma yüzdeleri çizelge 1.1’de verilmiştir (Nave).

Çok sayıda elektron içeren atom ve iyonlarda, elektronlar genellikle spinleri birbirleriyle zıt olanlar, birbirleriyle olacak şekilde çiftleşirler. Bu da spin magnetik momentlerinin birbirlerini sadeleştirmesine yol açar. Ancak tek sayıda elektronlara sahip olan atomlar, en az bir eşleşmemiş elektrona ve ona karşılık gelen spin magnetik momentine sahiptir (Serway).

Hiçbir magnetik alan uygulanmadığında bütün spinler aynı enerji seviyesindedir. Magnetik momentleri rasgele dizilirler (Nave). Başka bir deyişle, dış bir magnetik alanın yokluğunda hidrojen çekirdeğinde toplanmış olan herbir magnetik moment rasgele dizilir. Bu diziliş şekil 1.2’de gösterilmiştir.



Şekil 1.2 Hidrojen çekirdeğindeki magnetik momentlerin gelişigüzel dizilişi



Şekil 1.3  $B_0$  varlığında  $^1\text{H}$  çekirdeğindeki ( $I=1/2$ ) magnetik momentlerin dizilişi

Fakat  $B_0$  gibi dış bir magnetik alan uygulandığında bu çekirdeklerin aralarındaki enerji

farkları bilinmek üzere farklı spin seviyeleri yaratılır. Bu enerji seviyeleri, I, nükleer spin durumu olmak üzere  $2I+1$  adettir ve  $E_m$ , m inci seviyenin enerjisini göstermek üzere aşağıdaki denklemlere göre hesaplanır (Nave) :

$$E_m = -\gamma\hbar B_0 m \quad (1.1)$$

Burada m,  $m = \pm I, \pm(I-1), \dots, \pm 1, 0$  olmak üzere farklı seviyeleri göstermektedir.

H atomu için  $I=1/2$ 'dir.  $B_0$  varlığındaki enerji durumları  $2I+1$  ile 3 adettir. Bu enerji seviyeleri,  $-I, 0$  ve  $I$  ile ilişkilendirilerek,  $E_{-1}, E_0$  ve  $E_1$ 'dir ve bunların herbiri (1.1) eşitliğine uygun olarak

$$E_{-1} = 2.67 \times 10^8 \hbar \cdot B_0$$

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = -2.67 \times 10^8 \hbar \cdot B_0 \quad (1.2)$$

biçimindedirler.

İki spin durumu arasındaki enerji farkı aşağıda verilmiştir.

$$\Delta E = E_{-1} - E_0 = E_0 - E_{-1} \quad (1.3)$$

$$\Delta E = \hbar\gamma B_0 = \hbar\omega_0 \quad (1.4)$$

Burada,  $\gamma$  ve  $h$  sıra ile, jromagnetik oran ve Planck sabiti ( $h=6.63 \times 10^{-34}$  Js= $4.14 \times 10^{-15}$  eVs)dir.  $\hbar$  da  $\hbar = h/2\pi$  ile tanımlanmaktadır.

Spin durumları arasındaki geçiş için gerekli olan enerjinin frekansı

$$E = hf \quad (1.5)$$

ile bulunur.

Bu durumda f frekansı, Larmor frekansı olarak adlandırılır. Bu durumu aşağıdaki denklemler açıklamaktadır:

$$f = \gamma B_0 / 2\pi \quad (1.6)$$

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (1.7)$$

Bu durum fiziksel olarak net magnetizasyonun  $B_0$  ile aynı yönde ya da  $180^\circ$  lik açı ile tam ters yönde olmasını ifade eder. Herbir protonun magnetik momenti,  $B_0$  eksenini etrafında, belirli bir açı ile açılır ve Larmor frekansında dönmeye başlar.  $+z$  ve  $-z$  eksenleri ile dar açı yapacak şekilde açılmayı ifade eden bu iki durum “spin yukarı” ve “spin aşağı” olarak bilinir. Spin yukarı durumu alçak enerji durumunu, spin aşağı durumu yüksek enerji durumunu ifade eder. Spin yukarı durumundaki çekirdek enerji alabilir ve spin aşağı durumundaki çekirdek enerji verebilir. Bu iki durum arasındaki enerji farkı uygulanan magnetik alanın gücü ile belirlenir. (1.4) eşitliği bu durumu açıklamaktadır.

Eğer bu sisteme (1.6)’da belirtilen  $f$  frekansında enerji verirse, spinlerin iki enerji durumu arasında geçiş yapmalarını sağlamış oluruz. Çekirdek ile rezonansa girilebilmesi için uyarma, bu spesifik frekansta olmalıdır. NMR’daki “rezonans” teriminin kökeni bu frekans seçimidir.

Çekirdekdeki spin aşağı ve spin yukarı durumlarının popülasyon dağılımı ısı dengede durumunda, Boltzman dağılımı ile açıklanır. Boltzman denklemi,  $N_+$  daha yüksek enerji durumunu yani spin aşağı durumunu,  $N_-$  daha düşük enerji durumunu yani spin yukarı durumunu ifade etmek üzere aşağıda verilmiştir (Hornak).

$$\frac{N_+}{N_-} = e^{-\Delta E/kT} \quad (1.8)$$

Burada  $k$ , Boltzman sabiti ( $8.62 \times 10^{-5}$  eV/K veya  $1.38 \times 10^{-23}$  J/K),  $T$ , ısı (insan vücut ısısı 310 K) ve  $\Delta E = \hbar\gamma B_0$ ’dır.

Isıl dengede, protonların magnetik moment vektörlerinin  $z$  bileşeni, magnetik alana paralel olanların sayısı,  $B_0$  ve sıcaklık  $T$ ’ye bağlı olarak, anti paralel olanlarından, hafifçe daha fazladır. Sonuçta, net magnetizasyon  $M_0$ ,  $B_0$  yönünde elde edilir.

Tüm MRI denemelerinde, bu fark, magnetizasyonun kaynağıdır. Uygulanan statik magnetik alanın büyüklüğü arttıkça daha fazla magnetizasyon üretilecektir ve farklı çekirdekler, vücuttaki yoğunluklarına ve jromagnetik değerlerine bağlı olarak farklı miktarlarda magnetizasyon üretecektir.

## 1.2 Magnetik Rezonans Sinyalinin Elde Edilmesinin Klasik Fizik ile Açıklanması

Bir proton ya da Hidrojen çekirdeği ( $^1\text{H}$ ) ele alındığında, spin bu çekirdeğe bir “spin açısal momentumu”, yani  $s$ , ve bir magnetik moment, yani  $\mu$ , verecektir. Açısal momentumun kaynağı dönme durumudur. Bu açısal momentum ve magnetik moment birbirleriyle

jiromagnetik oran sabiti ile ilişkilidir (Ailion).

$$\mu = \gamma s \quad (1.9)$$

Burada,  $s$ , spin açısal momentumu,  $\mu$ , magnetik momenttir.  $s$  ve  $\mu$  vektörel büyüklüklerdir ve sadece belirli ayırık değerleri alabilirler.

Statik magnetik alan olmadığında toplam magnetik moment sifıra eşittir.  $B_0$  varlığında toplam magnetik momentler net magnetizasyonu oluşturur. Tek bir magnetik momentin oluşturduğu tork

$$\tau = \bar{\mu} \times \bar{B}_0 = \frac{d\bar{s}}{dt} \quad (1.10)$$

eşitliği ile verilmiştir (Ailion). Tork açısal momentumun zamanla değişimidir :

$$\frac{d\bar{\mu}}{dt} = \gamma(\bar{\mu} \times \bar{B}_0) \quad (1.11)$$

$$\Sigma \bar{\mu} = \bar{M} \quad (1.12)$$

(1.11) ve (1.12)'den Bloch eşitliklerinin temel denklemi elde edilir.

### 1.3 Kuantum Mekanik ve Klasik Fizik Açıklamalarının Birleştirilmesi, MRI Sürecinin Bloch Denklemleri ile Açıklanması

Magnetik alanda atomik çekirdeklerin nasıl davrandığını açıklamak için kuantum mekaniğin tek bir proton ve spin üzerindeki inceleme ve açıklamaları baz alınsa da, toplu sayıda spinin davranışı, klasik fizik yöntemleri, açısal momentum ve magnetik moment kavramları ile açıklanmıştır. Bu iki durumu da göz önüne alarak tüm hareket ve MRI süreci Bloch denklemleri ile ifade edilmiştir. Bu kısımda Bloch denklemlerinin açıkladığı süreç anlatılmıştır.

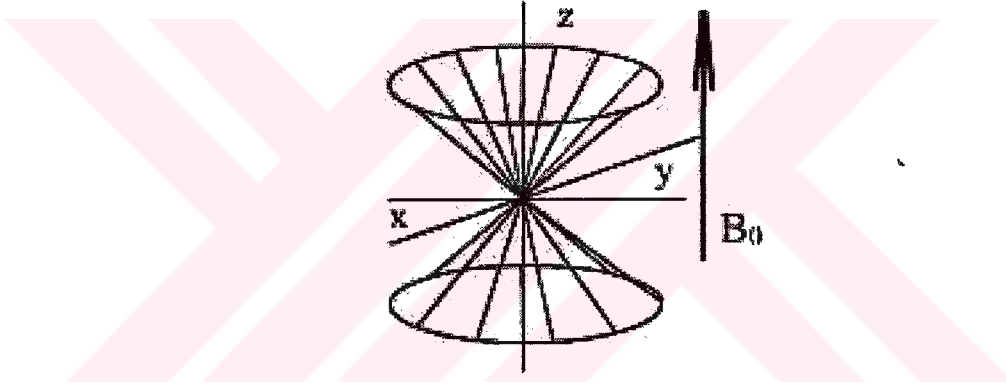
Protonların magnetik momenleri vardır ve vektörel olarak rasgele dizilirler.  $B_0$ , statik magnetik alanı uygulandığında, vektörel olarak net  $M_0$ 'ı verecek şekilde,  $B_0$ 'ın eksenini etrafında magnetik moment vektörleri dizilir (Hornak).

$B_1$ , zamanla değişen magnetik alanı bir darbe olarak uygulanır. Bu RF darbesinin genişliği  $B_1$ 'in uygulanma süresine, ve voltaj gücü de  $B_1$ 'in şiddetine bağlı olur. Bu uygulama  $M_0$ 'ı RF darbesinin uygulanma yönü ve süresine göre belli bir açıda saptırır. RF dalgası ismini bu açının miktarından alır.  $B_1$  magnetik alanı kesilirse, spin magnetizasyon vektörünün tekrar

elde edilme süreci başlar. Kararlı olmayan o uyarılmış durumdan, dengedeki  $M_0$  değerine ulaşmaya “spin rölaksasyonu” denir. Bu spin rölaksasyonu  $T_1$  ve  $T_2$  rölaksasyon zamanları ile incelenebilir. Canlı bir dokuda, su protonlarının rölaksasyon özellikleri, MRI’da merkezci rol oynar. Faraday’ın indüksiyon yasasına göre, değişen magnetizasyon vektörü  $M_0$  bir bobine voltaj indükler. Bu indüklenen voltaj, MR sinyali olarak dedekte edilir. Ya da, duyarlı bir RF anteni, bu örneğin yanına yerleştirilirse, alıcı tarafından bir voltaj saptanır. Azalan titreşimi andıran bu voltaj sinyali, “Free Induction Decay” olarak adlandırılır (Hornak).

### Bloch Denklemleri ve MRI Süreci

Dışarıdan Hidrojen atomlarının magnetik momentlerine göre büyük bir  $B_0$  magnetik alanı uygulandığında protonların magnetik momentleri, toplam magnetizasyon, uygulanan alana paralel ya da anti paralel olacak şekilde düzenlenir. Kuantum mekanik gösterimde spin aşağı ve spin yukarı olarak dizilirler.

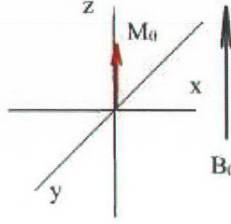


Şekil 1.4 Dış magnetik alanın varlığında Hidrojen atomlarının çekirdeklerindeki magnetik momentlerin bu alana göre ayarlanmaları

Şekil 1.4’deki dizilişte net magnetizasyon,  $B_0$  yönündedir. İki farklı enerji durumunu ifade eden bu dizilişte,  $B_0$ ’ın uygulandığı yön olan  $+z$  ile dar açı yaparak dönen magnetik momentlerin sayısı daha fazladır. Bunun sebebi Boltzman dağılımı ile açıklanmıştır.  $B_0$  büyüklüğü arttıkça, iki enerji seviyesi arasındaki fark da artar ve  $B_0$  yönünde elde edilen net magnetizasyon da daha büyük elde edilir. Bu sebepten uygulamalarda çoğunlukla  $B_0$  1.5 Tesla kadardır. Şekil 1.5’de net magnetizasyon gösterilmiştir.

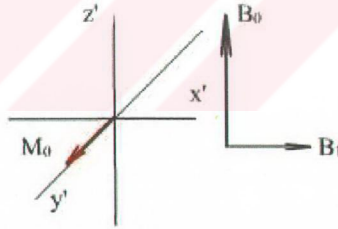
Her bir protonun magnetik momenti, belirli bir açısal frekans ile  $B_0$  eksenini etrafında döner.

Klinik MRI uygulamalarında, 0.05 Tesla ile 2 Tesla arasındaki magnetik alan güçlerinde, Hidrojen için rezonans frekansı 2.13 MHz’den 85 MHz’e kadar değişir.



Şekil 1.5  $B_0$  varlığında net magnetizasyon

$M_0$ 'ı tespit etmek için,  $B_0$ 'a dik olarak RF magnetik alanı  $B_1$ , yaklaşık olarak Larmor frekansında uygulanır. Protonlar enerji absorbe ederler. Kuantum mekanik açısından tek bir protona bakıldığında proton bir enerji seviyesinden diğerine geçer. Klasik fizik açısından bakıldığında,  $B_0$ 'a dik uygulanan  $B_1$ ,  $M_0$ 'ı  $B_0$  ekseninden  $90^\circ$  saptırır ve  $M_0$  spiral bir hareketle  $xy$  düzlemine gelir. Bu durum Larmor frekansında dönen bir referans sisteminde ele alınırsa şekil 1.6'daki gibi gözlenir. Dönen referans sisteminde,  $x$  ve  $y$  eksenleri,  $z$  etrafında Larmor frekansında dönerler. Uygulanan magnetik alan  $B_1$ 'de bu referans sisteminde statik olarak görülür.



Şekil 1.6 Dönen referans sisteminde RF uygulanmış  $M_0$ 'ın durumu

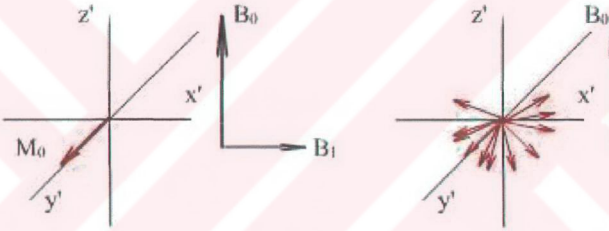
RF dalgası belirli bir süre sonra kesilir. RF dalgasının uygulanma süresi darbe genişliğini tanımlar. Bu çalışmada  $90^\circ$ lik RF darbesi kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır.

Ardından,  $90^\circ$ lik RF darbesini yaratan  $B_1$  kesilir ve aynı anda üç şey olmaya başlar:

- i. Absorbe edilmiş olan RF enerjisi rezonans frekansında geri iletilir.

- ii. Uyarılmış olan spinler, dengedeki  $M_z$ 'i oluşturan dizilişlerine dönmeye başlarlar. Bunun süresi  $T_1$  parametresini belirler.
- iii. İlk başta aynı fazda olan, uyarılmış spinler farklı fazlara sahip olur ve  $x'y'$  düzleminde birbirlerini sönmülemeye başlarlar. Bu da  $T_2$  ve  $T_2^*$  parametrelerini belirler.

Magnetizasyon vektörü denge durumuna dönerken bobine indüklenen sinyal NMR sinyalidir ve bu sırada yaşanan süreçler rölaksasyon süreçleri olarak adlandırılır. Şekil 1.7  $B_1$  magnetik alanı kesildikten sonra  $x'y'$  düzleminde  $M_0$ 'ı oluşturan magnetik moment vektörlerinin farklı fazlara sahip olmasını yani  $M_0$ 'ın bozunmasını göstermektedir. Ardından,  $M_0$   $z'$  ekseninde eski denge durumuna döner. Bu sürecin Matlab simülasyonuna ilişkin kod Ek 1'de ve bu kod ile elde edilen gösterim her bir duruma karşılık gelmek üzere şekil 1.8a, 1.8b, 1.8c, 1.8d ve 1.8e ile verilmiştir.

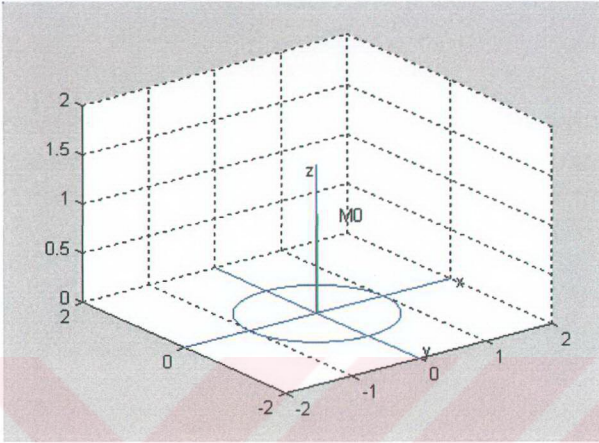


Şekil 1.7  $T_2$  rölaksasyon süreci,  $M_0$ 'ın  $x'y'$  düzleminde bozunması

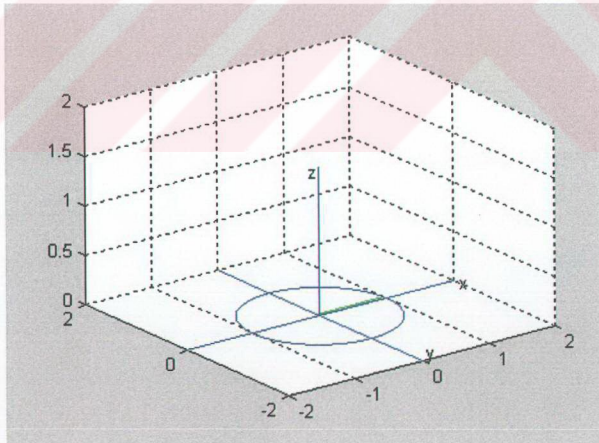
Her bir dokuya ait  $T_1$  süresi farklıdır, bu MRI'da farklı dokuları ayırtmaya yarar (Holzman). Tek izole bir spin sadece  $B_0$ 'ı deneyimler, spinler birlikte hareket ettikçe magnetik alanları birbirlerini etkiler.  $B_1$  ile yaratılan RF darbesi kaldırıldığında  $x'y'$  düzleminde spinler arası etkileşimden dolayı bazı spinler daha hızlanır bazıları yavaşlar ve aralarında faz farkı doğar. Spinler birbirlerinden uzaklaştıkça birbirleriyle etkileşimleri azalır ve doğal frekanslarında dönmeye devam ederler fakat farklı fazda olduklarından birbirlerini sönmülerler. Bu olaya  $T_2$  rölaksasyonu denir (Hornak).

Herhangi bir gradyan tarafından etkilenmemiş bu NMR sinyaline, "Free Induction Decay" denir. Sönümlemenin oranını belirleyen zaman sabiti  $T_2$ 'dir. Gerçekte NMR sinyali  $T_2$ 'nin belirlediğinden çok daha hızlı sönmülenir. Bu homojen olmayan magnetik alan ve çeşitli sabit dış etkilere kaynaklanır. Bu etkileri de içererek sönmülenmeyi belirleyen zaman

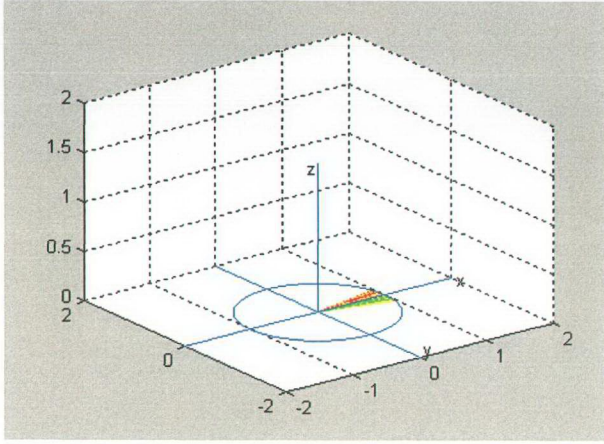
sabiti  $T_2^*$ 'dir. Bu hızlı sönümlenmeye karşın daha güçlü bir sinyal elde edilebilmesi için spin eko etkisi yapan darbeler kullanılır (Hornak).



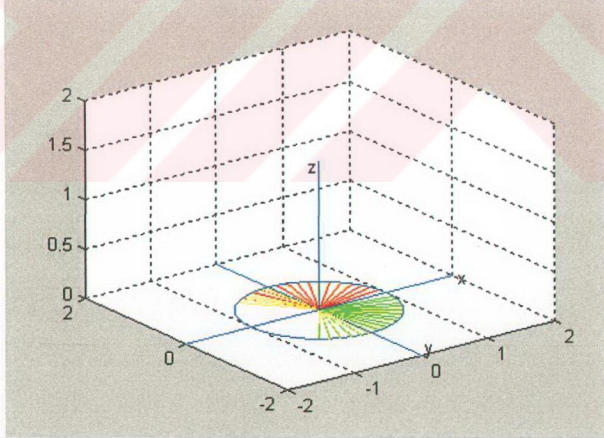
Şekil 1.8a Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 1.durum: magnetizasyon vektörü +z yönünde



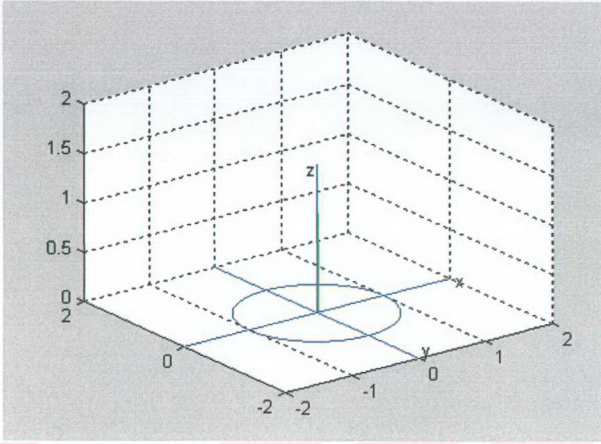
Şekil 1.8b Ek 1'de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 2.durum: magnetizasyon vektörü xy düzleminde



Şekil 1.8c Ek 1’de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 3.durum: magnetizasyon vektörünü oluşturan spinler xy düzleminde farklı fazlarda dönmüyorlar.



Şekil 1.8d Ek 1’de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 4.durum: magnetizasyon vektörü xy düzleminde bozunuyor.



Şekil 1.8e Ek 1’de verilen vektorgosterim.m kodu ile elde edilen 5.durum: magnetizasyon vektörü z ekseninde tekrar oluşuyor.

Magnetik rezonans görüntüleri, dönen protonların uzaysal çözümlenmeleri ile elde edilir.  $B_0$  her yerde statik olduğundan,  $\omega_0$  her yerde aynıdır ve konuma göre herhangi farklı bir durum olmadığından bu şekilde uzaysal çözümlenme yapılamaz. Uzaysal çözümlenmeye ulaşabilmek için, magnetik gücü lineer olarak konumla değişen, doğrusal magnetik alan gradyanları kullanılır. Bu magnetik alan gradyanları, statik magnetik alan  $B_0$  ile süperpoze olur. Dolayısı ile toplam magnetik alan,  $B_0$  ile  $B_i$  ( $i=x,y,z$ )’nin toplamıdır (Holzman).

$$B_i = G_i \cdot i \quad (1.13)$$

$$G_i = \partial B_z / \partial i \quad (1.14)$$

Burada  $G_i$  magnetik alanın gradyanıdır. Böylelikle frekans konuma göre değişmiş olur.

Magnetizasyon vektörünün zamanla değişimi Bloch denklemleri ile açıklanır. Magnetizasyon vektörünün, magnetik alan etrafında döndüğünü ifade eden Bloch denklemi aşağıda gösterilmiştir:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B} \times \vec{M} \quad (1.15)$$

(1.15) ile gösterilen denklem, vektör bileşenlerine ayrıldığında

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(B_z M_y - B_y M_z) \quad (1.16)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma(B_x M_z - B_z M_x) \quad (1.17)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(B_y M_x - B_x M_y) \quad (1.18)$$

skalar denklemler yapılır.

### Statik Magnetik Alan Varlığında Bloch Denklemleri

Statik magnetik alan demir tarafından üretilen sürekli bir mıknatıs ya da sürekli olarak bir güçle beslenen elektromıknatıs veya süperiletken mıknatıs olabilir. 0.5 Tesla'nın üzerindeki klinik MRI sistemleri çoğunlukla süperiletken mıknatıs kullanır (Holzman). z eksenini yönünde zamanla değişmeyen, statik bir magnetik alanı gözönüne alalım. Bu magnetik alan,

$$\vec{B}_{\text{statik}} = [0 \quad 0 \quad B_0] \quad (1.19)$$

ile vektörel olarak ifade edilmiştir. Sadece statik magnetik alanın varlığındaki Bloch denklemleri

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y \quad (1.20)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x \quad (1.21)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = 0 \quad (1.22)$$

ile verilmiştir.

### Statik Magnetik Alan ve Zamanla Değişen Magnetik Alan Varlığında Bloch Denklemleri

Radyofrekans sinyali, xy düzleminde dönen bir magnetik alan oluşturur. RF darbesi vektörel olarak

$$\vec{B}_{\text{RF}} = [B_1 \cos(\omega_1 t) \quad -B_1 \sin(\omega_1 t) \quad 0] \quad (1.23)$$

ile ifade edilir. RF darbesini de içeren Bloch denklemleri aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(B_0 M_y + B_1 \sin(\omega_1 t) M_z) \quad (1.24)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma(B_1 \cos(\omega_1 t) M_z - B_0 M_x) \quad (1.25)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(-B_1 \sin(\omega_1 t) M_x - B_1 \cos(\omega_1 t) M_y) \quad (1.26)$$

### Dönen Referans Sisteminde Bloch Denklemleri

(1.24), (1.25) ve (1.26) ile verilen denklemleri analitik olarak çözebilmek için bu noktada referans sistemi dönüşümü yapılır. Normal referans sistemini, RF darbesinin frekansı olan  $\omega_1$  frekansında dönen referans sistemine dönüştüren dönüşüm denklemleri

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

matris gösterilimiyle verilmiştir. Burada u ve v dönen referans sisteminin koordinat değişkenlerini göstermektedir.

Hesaplamalarda kullanılan buna ilişkin Matlab fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

```
function Rz=donref(phi)
```

```
Rz = [cos(phi) -sin(phi) 0; sin(phi) cos(phi) 0; 0 0 1]
```

$$u = M_x \cos(\omega_1 t) - M_y \sin(\omega_1 t) \quad (1.28)$$

$$v = M_x \sin(\omega_1 t) + M_y \cos(\omega_1 t) \quad (1.29)$$

$$M_x = u \cos(\omega_1 t) + v \sin(\omega_1 t) \quad (1.30)$$

$$M_y = v \cos(\omega_1 t) - u \sin(\omega_1 t) \quad (1.31)$$

yerleştirmeler yapılır.

u ve v değişkenler yerine  $M_x$  ve  $M_y$  yazılmak suretiyle

$$\frac{dM_x}{dt} = (\omega_0 - \omega_1) M_y \quad (1.32)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -(\omega_0 - \omega_1)M_x + \omega_1 M_z \quad (1.33)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\omega_1 M_y \quad (1.34)$$

şeklinde dönen referans sistemine ilişkin Bloch denklemleri elde edilir.

Döner referans sisteminde, rölaksasyon terimlerini de içeren Bloch denklemleri aşağıdaki gibidir :

$$\frac{dM_x}{dt} = (\omega_0 - \omega_1)M_y - \frac{M_x}{T_2} \quad (1.35)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -(\omega_0 - \omega_1)M_x + \omega_1 M_z - \frac{M_y}{T_2} \quad (1.36)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\omega_1 M_y - \frac{M_z - M_0}{T_1} \quad (1.37)$$

## 2. BLOCH DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ VE MRI SÜREÇLERİNİN BU ÇÖZÜMLER İLE İNCELENMESİ

Bu bölümün içeriğini, Bloch denklemlerinin analitik çözümlerinin yapılması, sonuçların farklı durum ve parametreler için incelenmesi ve bu sonuçlara en uygun çözümleri verecek nümerik yöntemlerin geliştirilmesi oluşturmaktadır. İncelemeler spin kuantum numarası  $\frac{1}{2}$  olan  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ve  $^{31}\text{P}$  için yapılmıştır. Çeşitli parametre değerlerinin değişimi Matlab grafikleri oluşturularak gösterilecektir. Bu grafiklere ve yazılan fonksiyonlara ait matlab kodları Ek 2'de verilmiştir.

Jiromagnetik oranlar,  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ve  $^{31}\text{P}$  için çizelge (1.1)'de verilmiştir. 1 Tesla statik magnetik alan uygulandığında her biri için Larmor frekansı  $f_0 = \gamma B_0 / 2\pi$  eşitliği ile sırasıyla, 42.57 MHz, 10.71 MHz, 17.24 MHz olarak hesaplanmıştır.

Hesaplamalarda kolaylık olması açısından radyan cinsinden,  $B_0=1$  T'da, Larmor değerleri herbir izotop için hesaplanmıştır :

$$^1\text{H için, } \omega_0 = 2.675 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$^{13}\text{C için, } \omega_0 = 0.673 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$^{31}\text{P için, } \omega_0 = 1.083 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

### 2.1 Statik Magnetik Alan Varlığında Magnetizasyonun Zamanla Değişim Durumunu Açıklayan Bloch Denklemleri

Magnetik Rezonans Görüntüleme tekniğinde, MR sinyalinin elde etme aşamalarının ilk süreci MR cihazında, hastanın vücudu ile aynı doğrultuda, statik magnetik alan uygulanmasıdır. Bu doğrultu kullanılan denklemlerde, Kartezyen koordinat sistemine göre +z eksenidir. Bloch denkleminin en genel hali

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B} \times \vec{M} \quad (2.1)$$

ile verilmiştir (Hargreaves).

(2.1) ile gösterilen denklem, vektör bileşenlerine ayrılarak

$$\left( \frac{dM_x}{dt} \quad \frac{dM_y}{dt} \quad \frac{dM_z}{dt} \right) = -\gamma \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ B_x & B_y & B_z \\ M_x & M_y & M_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

elde edilir.

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(B_z M_y - B_y M_z) \quad (2.3)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma(B_x M_z - B_z M_x) \quad (2.4)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(B_y M_x - B_x M_y) \quad (2.5)$$

İlk durum olarak, sadece z eksenine yönünde uygulanan statik bir  $B_0$  magnetik alanı mevcuttur. Dolayısıyla uygulanan statik magnetik alanı simgeleyen  $B_0$  vektörel olarak

$$\vec{B}_0 = [0 \ 0 \ B_0] \quad (2.6)$$

ile ifade edilmek suretiyle (2.3) – (2.5) denklemleri

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y \quad (2.7)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x \quad (2.8)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = 0 \quad (2.9)$$

haline getirilir.

Yukarıdaki üç denklemden,

$$\omega_0 = \gamma B_0 \quad (2.10)$$

eşitliğinde gösterilen Larmor frekansının ifadesi yerine koyularak yapılan analitik çözüm aşağıda verilmiştir:

$$M'_x = \omega_0 M_y \quad (2.11)$$

$$M'_y = -\omega_0 M_x \quad (2.12)$$

$$M'_z = 0 \quad (2.13)$$

$$M''_y = -\omega_0 M'_x = -\omega_0^2 M_y \quad (2.14)$$

$$M''_y + \omega_0^2 M_y = 0 \quad (2.15)$$

Son denklem 2. dereceden, sabit katsayılı, lineer homojen bir diferansiyel denklemdir. Bunun karakteristik denklemi

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad (2.16)$$

ve karakteristik kökleri

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 \quad (2.17)$$

olduğundan

$$M_y = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_2 e^{-j\omega_0 t} \quad (2.18)$$

bilinen çözümleri yazılır.

$$M_y = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (2.19)$$

$$M_x = C_1 \sin(\omega_0 t) - C_2 \cos(\omega_0 t) \quad (2.20)$$

$$M_z = C_3 \quad (2.21)$$

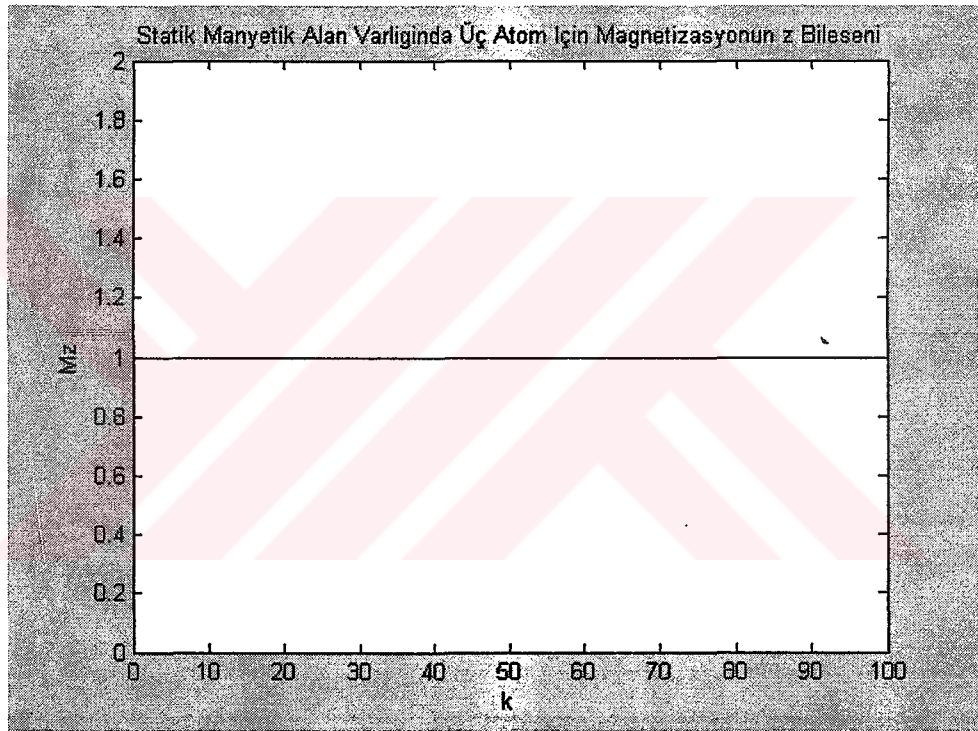
çözümleri elde edilir.  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  başlangıç koşullarıyla belirlenecek olan sabitlerdir.

$\vec{M}_0 = [0 \ 0 \ 1]$  ilk koşulu ile  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  katsayıları belirlendiğinde  $C_1=0$ ,  $C_2=0$ ,  $C_3=1$  elde edilir. Böylelikle sadece statik magnetik alan varlığında magnetizasyon zamanla değişmeyen ve statik magnetik alan ile aynı yönde (2.22)'de ifade edildiği gibi z eksenine paralel olur. Magnetizasyon insan vücudundaki belli atomlara özgü spinlerin net vektörel toplamı olduğundan, Boltzman dağılımına göre bölüm 1.1'de de açıklandığı üzere  $B_0$  etrafında dönen spinlerin  $B_0$  ile dar açı yapanları, yani net toplam olarak magnetizasyonun +z bileşenini oluşturanları, geniş açı yaparak etrafında dönenlerden yani magnetizasyonun net toplam olarak -z bileşenini oluşturanlardan daha fazla olduğu için ilk koşul olarak  $[0 \ 0 \ 1]$  değeri alınmıştır. Burada, yeterince büyüklükte uygulanan statik magnetik alan, spin vektörlerini  $B_0$

etrafında döndürmüş ve dolayısı ile +z yönünde sürekli net bir magnetizasyon oluşturmuştur. Dolayısı ile bu sürecin, magnetik momentleri doğrultucu bir etkisi vardır.

$$\begin{aligned} M_x &= 0 \\ M_y &= 0 \\ M_z &= 1 \\ \vec{M} &= [0 \ 0 \ 1] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$\vec{M}_0 = [0 \ 0 \ 1]$  ilk koşulunda,  $^1\text{H}$  atomu için  $B_0 = 1$  Tesla'da +z yönünde yapılan çözüme ilişkin net magnetizasyonu veren grafik, şekil 2.1'de gösterilmiştir. Bu grafik, 1. bölümde anlatılan magnetik alan süreçlerinden şekil 1.5'i açıklar.

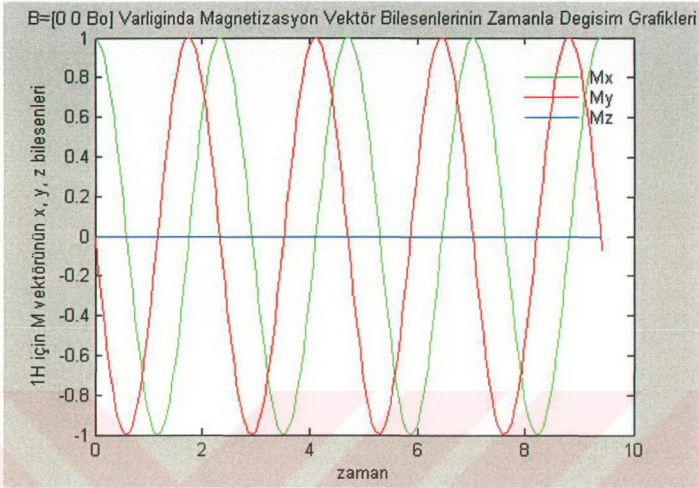


Şekil 2.1 Statik magnetik alan varlığında magnetizasyonun x ve y bileşenleri sıfıra eşitken, z bileşeni sabittir.

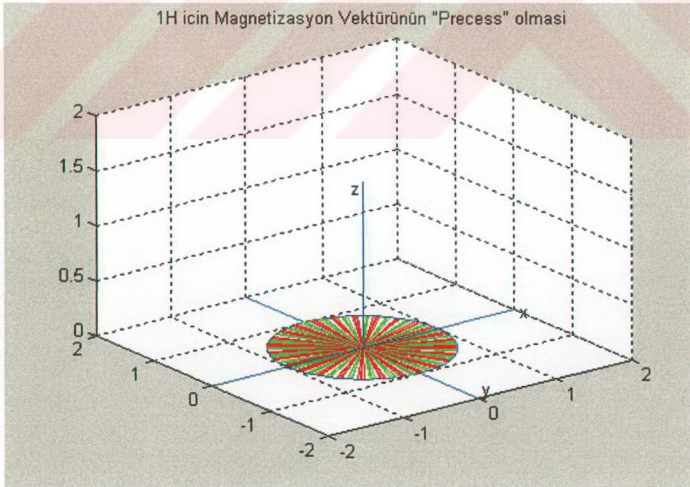
Şekil 2.1, (2.1) genel denkleminde,  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  ve  $M(0) = M_0 \hat{z} = \hat{z}$  kullanılarak yapılan çözümün  $M_z$  magnetizasyon bileşenini gösteren sonucudur.  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$  koşulunda, farklı  $M(0)$  değerleri için ve farklı atomlar için b2k1.m (bkz Ek 2) ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki grafikler ile gösterilmiştir.

$\vec{B} = B_0 \hat{z}$ ,  $M(0) = M_0 \hat{x}$ , koşulu altında magnetizasyon vektörünün  $B_0$  etrafında dönmesi

(precession) şekil 2.2'de, vektörel gösterilimi ise şekil 2.3'de verilmiştir.

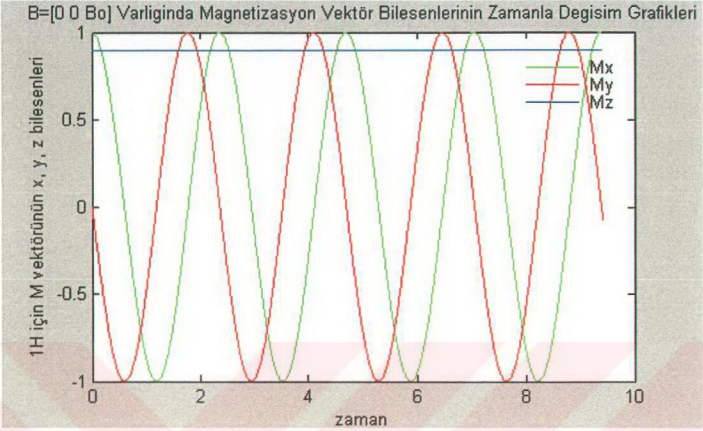


Şekil 2.2 B<sub>0</sub>, +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1 Tesla iken <sup>1</sup>H için M<sub>x</sub>, M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub> zamanla değişim grafiği

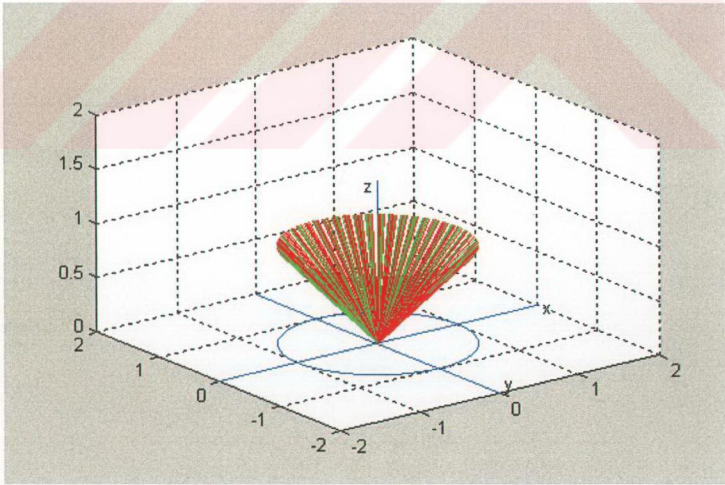


Şekil 2.3 B<sub>0</sub>, +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1 Tesla iken <sup>1</sup>H için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği

$\vec{B} = B_0 \hat{z}$ ,  $M(0) = M_{0x} \hat{x} + M_{0z} \hat{z}$ , koşulunda magnetizasyon vektörünün  $B_0$  etrafında dönmesi (precession) şekil 2.4'de, vektörel gösterimi şekil 2.5'de verilmiştir.

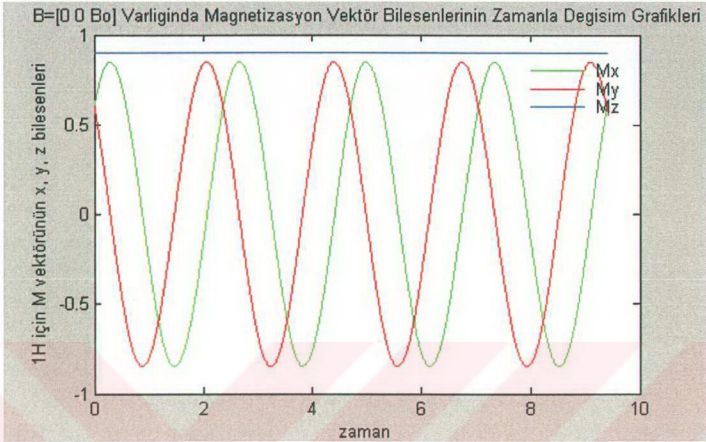


Şekil 2.4  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken  $^1\text{H}$  için  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  zamanla değişim grafiği

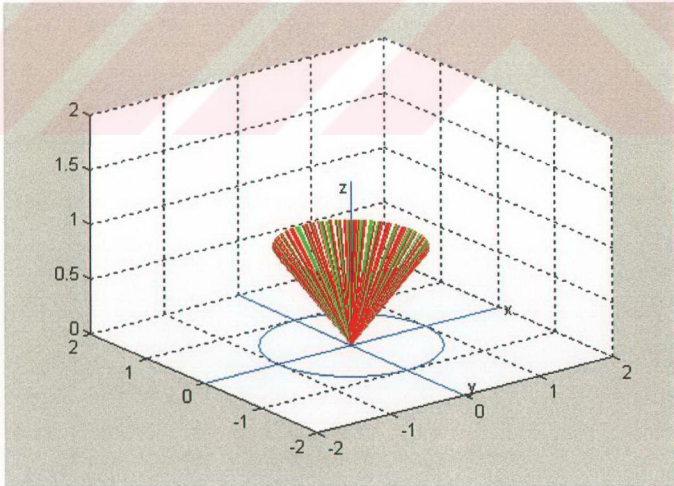


Şekil 2.5  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken  $^1\text{H}$  için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği

$\vec{B} = B_0 \hat{z}$ ,  $M(0) = M_{0x} \hat{x} + M_{0y} \hat{y} + M_{0z} \hat{z}$ , koşulunda magnetizasyon vektörünün  $B_0$  etrafında dönmesi (precession) şekil 2.6'de, vektörel gösterimi şekil 2.7'de verilmiştir.

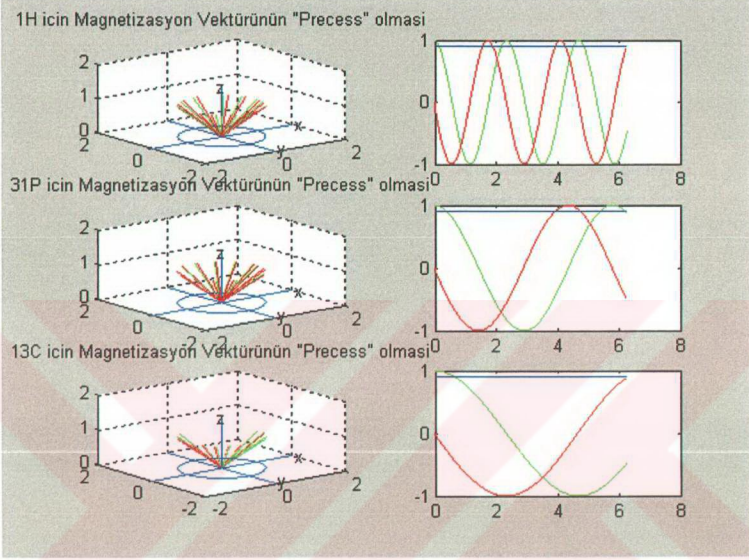


Şekil 2.6  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x ve +y yönünde 0.6, +z yönünde 0.9 Tesla iken  $^1\text{H}$  için Mx, My, Mz zamanla değişim grafiği



Şekil 2.7  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x ve +y yönünde 0.6, +z yönünde 0.9 Tesla iken  $^1\text{H}$  için magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği

Farklı frekanslarda karşılaştırma yapmak için, jromagnetik oranları farklı olan  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ve  $^{31}\text{P}$  atomlarının ilk değeri  $M(0) = M_{0x}\hat{x} + M_{0z}\hat{z}$  olan magnetizasyon vektörlerinin,  $\vec{B} = B_0\hat{z}$  varlığındaki hareketleri şekil 2.8'de gösterilmektedir.



Şekil 2.8  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 1, +z yönünde 0.9 Tesla iken  $^1\text{H}$ ,  $^{31}\text{P}$ ,  $^{13}\text{C}$  için magnetizasyon vektörlerinin hareketlerinin grafiği ve  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri

Şekil 2.8'den de görüldüğü üzere jromagnetik oran değeri büyüdükçe net magnetizasyon daha büyük olur,  $^1\text{H}$ ,  $^{13}\text{C}$  ve  $^{31}\text{P}$  atomlarından, aynı bölge içinde eşit yoğunlukta oldukları varsayılırsa en güçlü sinyal  $^1\text{H}$  izotopundan elde edilir.

Bu koşullar altındaki ileri fark yöntemi ile yapılan nümerik çözüm aşağıda verilmiştir :

$$\frac{M_x(t+h) - M_x(t)}{h} = \gamma B_0 M_y(t) \quad (2.23)$$

$$\frac{M_y(t+h) - M_y(t)}{h} = -\gamma B_0 M_x(t) \quad (2.24)$$

$$\frac{M_y(t+2h) - M_y(t+h)}{h^2} - \frac{M_y(t+h) - M_y(t)}{h^2} = -\omega_0^2 M_y(t) \quad (2.25)$$

$$M_y(t+2h) - 2M_y(t+h) + (1+h^2\omega_0^2)M_y(t) = 0 \quad (2.26)$$

$$M_{y_{k+2}} - 2M_{y_{k+1}} + (1+h^2\omega_0^2)M_{y_k} = 0 \quad (2.27)$$

Kaydırma operatörünü kullanırsak (2.25) eşitliği,

$$(E^2 - 2E + 1 + h^2\omega_0^2)M_{y_k} = 0 \quad (2.28)$$

ile ifade edilen hali alır.

r, uygun seçilmiş sabit olmak üzere  $\beta = e^r$ ,  $M_{y_k} = \beta^k$  yazarak çözüm aranmıştır.

$$\beta^2 - 2\beta + (1+h^2\omega_0^2) = 0 \quad (2.29)$$

$$\beta = 1 \pm jh\omega_0 \quad (2.30)$$

(2.29) eşitliğinin, (2.30) ile belirtilen kompleks eşlenik bir çift kökü vardır. Bu duruma göre  $M_{y_k}$ 'nin çözümüne aşağıda erişilmiştir :

$$M_{y_k} = A(1 + jh\omega_0)^k + B(1 - jh\omega_0)^k \quad (2.31)$$

$$M_{y_k} = A(\rho e^{j\varphi})^k + B(\rho e^{-j\varphi})^k \quad (2.32)$$

Burada  $(\rho, \varphi)$ ,  $(1, h\omega_0)$  noktasının polar koordinatlarıdır. h artırım miktarıdır.

$$M_{y_k} = \rho^k (Ae^{jk\varphi} + Be^{-jk\varphi}) = \rho^k [(A+B)\cos(k\varphi) + (A-B)\sin(k\varphi)] \quad (2.33)$$

$$M_{y_k} = \rho^k [D_1 \cos(k\varphi) + D_2 \sin(k\varphi)]$$

$$\rho = \sqrt{1 + (h\omega_0)^2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1/\rho)$$

$$M_{y_{(k+1)}} - M_{y_k} = -\gamma h B_0 M_{xk} \quad (2.34)$$

$$M_{xk} = -\frac{\rho^k}{\omega_0 h} (\rho D_1 \cos \varphi + \rho D_2 \sin \varphi - D_1) \cos(k\varphi) + (\rho D_2 \cos \varphi - \rho D_1 \sin \varphi - D_2) \sin(k\varphi) \quad (2.35)$$

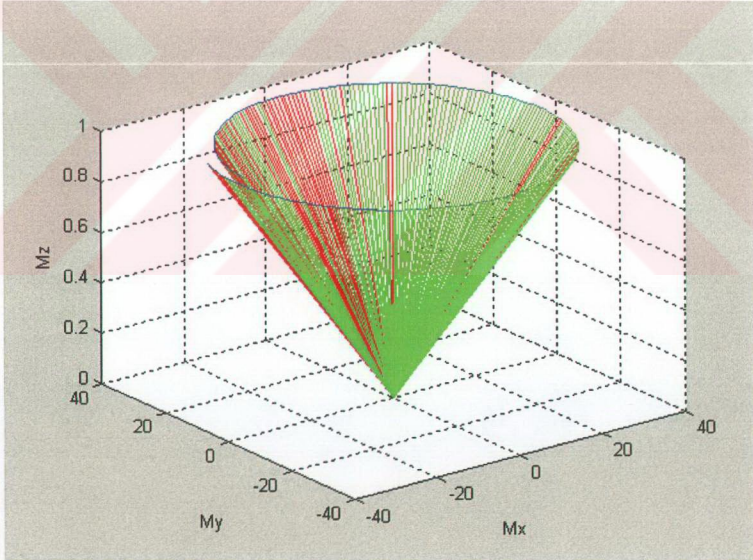
$$M_{z(k+1)} = M_{zk} = K \quad (2.36)$$

$$D1 = M_{y0} \quad (2.37)$$

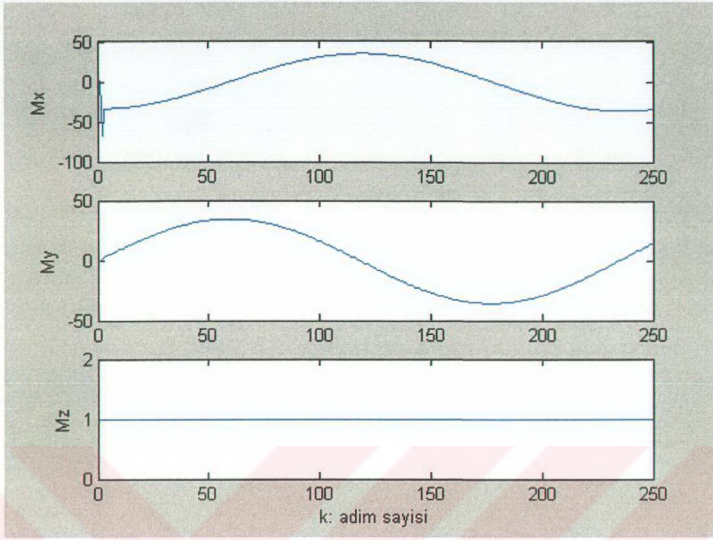
$$D2 = \frac{M_{x0} + D1}{\rho^2 \sin \varphi} - D1 \cot \varphi \quad (2.38)$$

Bu sonuçlar kullanılarak elde edilen matlab grafikleri aşağıda verilmiştir. Grafikler oluşturulurken  $h: \Delta t$ ,  $k$ : adım sayısı olmak üzere (2.23 – 2.38) çözümünün verebileceği en iyi kriter saptanmıştır.

$\vec{B} = B_0 \vec{z}$ ,  $M(0) = M_{0x} \hat{x} + M_{0z} \hat{z}$ ,  $M_{0x}=0.9$  T,  $M_{0z}=1$  T olmak üzere  $^1\text{H}$  atomu için çizimler şekil 2.9 – 2.15 ile verilmiştir. Çizimlerin elde edildiği matlab kodu b2k2.m olarak Ek 2'de verilmiştir.

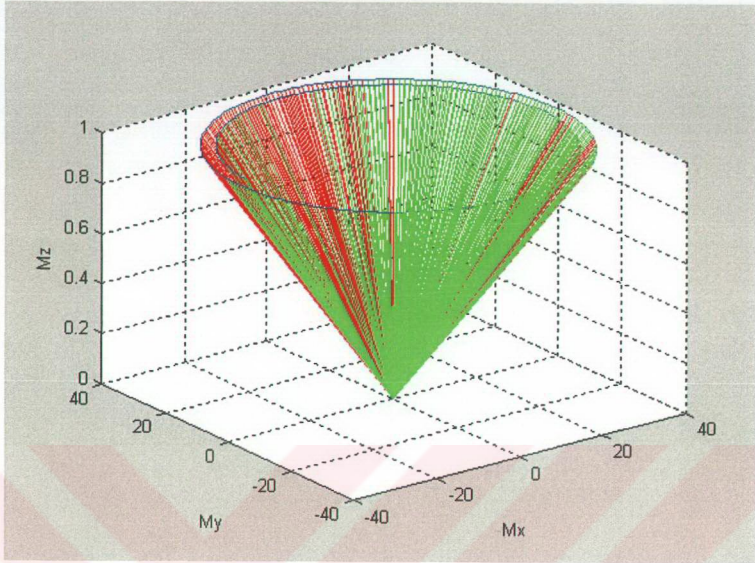


Şekil 2.9  $B_0$ ,  $+z$  yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri  $+x$  yönünde 0.9,  $+z$  yönünde 1 Tesla iken  $^1\text{H}$  için,  $k=250$  adım,  $h=10^{-10}$  sn. değerlerinde magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği

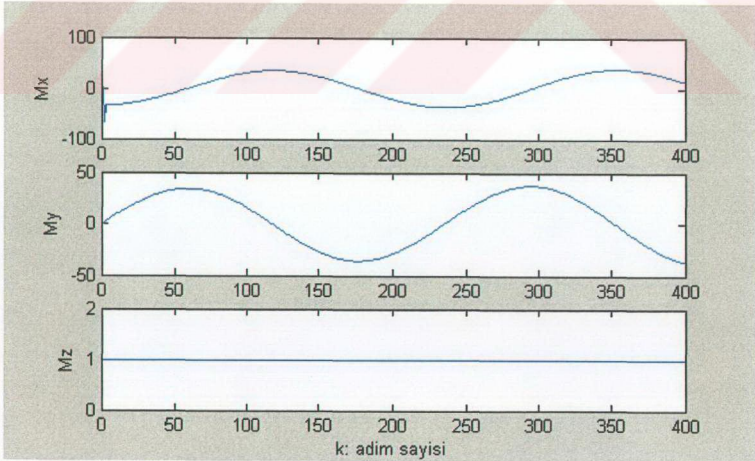


Şekil 2.10  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken  $^1\text{H}$  için,  $k=250$  adım,  $h=10^{-10}$  saniye değerlerinde  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri

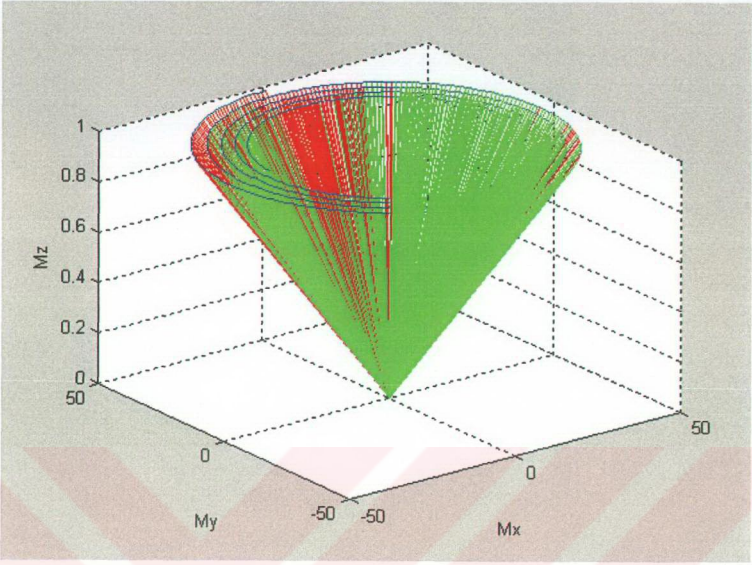
$h=10^{-10}$  iken adım sayısı artırıldığında grafiklerin istenilen sonucu vermediği görülür. Şekil 2.11'den vektörel harekette bir açılma gözlenmektedir. Bu açılma şekil 2.12'de  $M_x$  ve  $M_y$ 'nin genliğinde artış olarak da görülmektedir. Şekil 2.13, ve şekil 2.14  $k=1000$  adım için elde edilmiştir ve magnetizasyon vektörünün sadece izlediği yolu gösteren şekil 2.15'de bu açılma daha rahat görülmektedir. Bu durumda,  $h=10^{-10}$  iken 2.23 - 2.38 nümerik çözümü için en iyi grafik 250 adım ile elde edilmektedir.



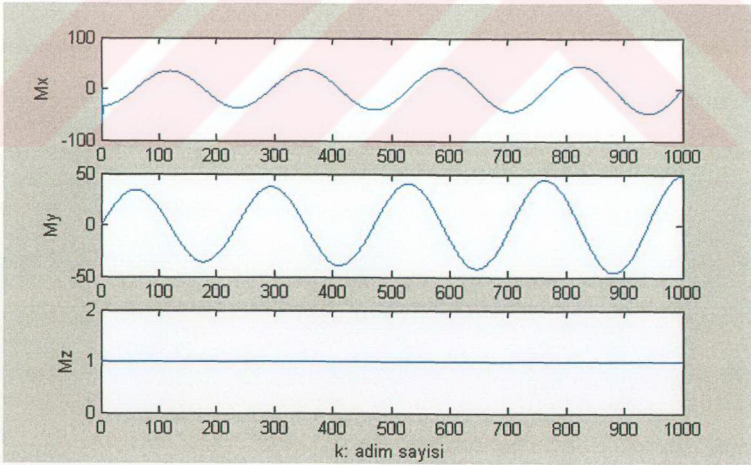
Şekil 2.11  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken  $^1\text{H}$  için,  $k=400$  adım,  $h=10^{-10}$  saniye değerlerinde magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği



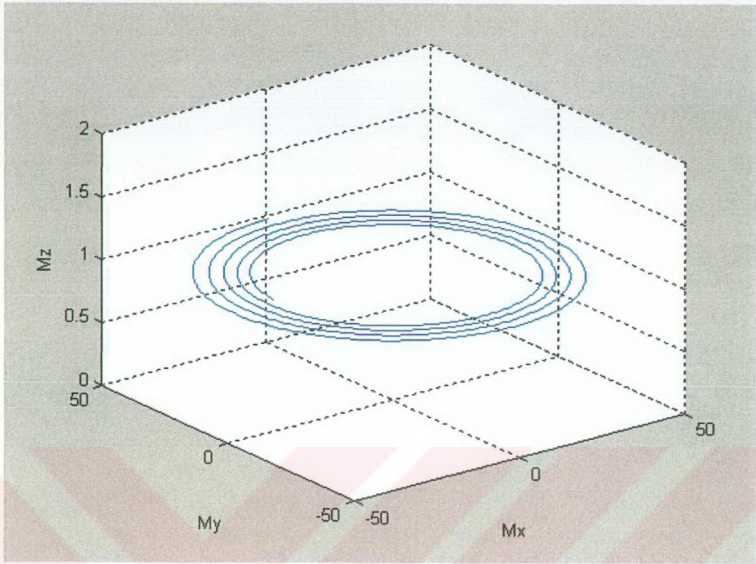
Şekil 2.12  $k=400$  adım için  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri



Şekil 2.13  $^1\text{H}$  için,  $k=1000$  adım iken magnetizasyon vektörünün hareketinin grafiği



Şekil 2.14  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken  $^1\text{H}$  için,  $k=1000$  adım,  $h=10^{-10}$  saniye değerlerinde  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ 'nin zamanla değişim grafikleri



Şekil 2.15  $B_0$ , +z yönünde 1 Tesla, magnetizasyonun ilk değeri +x yönünde 0.9, +z yönünde 1 Tesla iken  $^1\text{H}$  için,  $k=1000$  adım,  $h=10^{-10}$  saniye değerlerinde magnetizasyon vektörünün ucunun izlediği yol

## 2.2 Statik Magnetik Alan ve Zamanla Değişen Magnetik Alanın Varlığında Bloch Denklemleri

Zamanla değişen magnetik alan  $B_1$  uygulanır. RF darbe etkisi yaratan  $B_1$  magnetik alanı

$$B_{RF} = \hat{x}B_1 \cos(\omega_1 t) - \hat{y}B_1 \sin(\omega_1 t) \quad (2.39)$$

ile ifade edilir. Statik magnetik alan etkisi de eklendiğinde Bloch denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır :

$$B = B_0 + B_{RF} \quad (2.40)$$

$$B = \hat{x}B_1 \cos(\omega_1 t) - \hat{y}B_1 \sin(\omega_1 t) + \hat{z}B_0 \quad (2.41)$$

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ B_1 \cos(\omega_1 t) & -B_1 \sin(\omega_1 t) & B_0 \\ M_x & M_y & M_z \end{vmatrix} \quad (2.42)$$

$$\frac{dM_x}{dt} = -\gamma(-B_1 \sin(\omega_1 t)M_z - B_0 M_y) \quad (2.43)$$

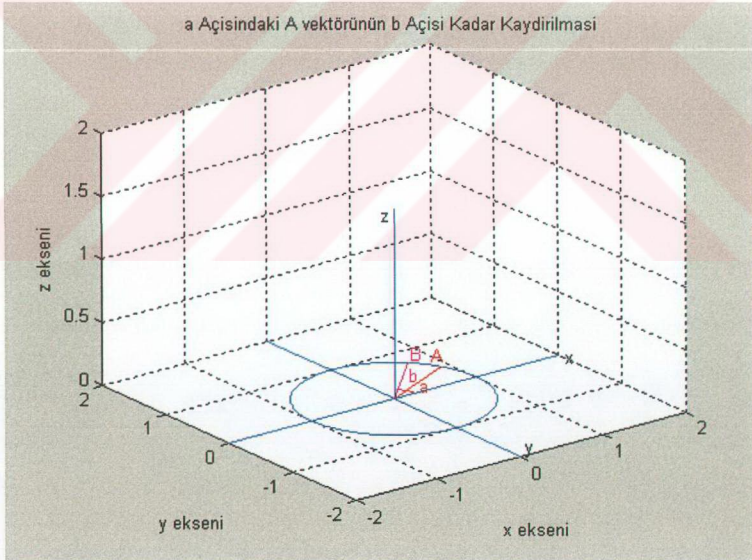
$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma(-B_1 \cos(\omega_1 t)M_z + B_0 M_x) \quad (2.44)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma(B_1 \cos(\omega_1 t)M_y + B_1 \sin(\omega_1 t)M_x) \quad (2.45)$$

Şu ana kadar denklemlerin ifade edildiği referans sistemi  $\omega_1$  frekansında dönen bir referans sistemine dönüştürülerek denklemler bu sistemde tekrar yazılacaktır.

### Dönen referans sisteminin oluşturulması:

Şekil 2.16'de  $\theta = a$ ,  $\phi = b$ ,  $r = 1$  olmak üzere A ve B noktalarının koordinatları  $A(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 0)$ ,  $B(r\cos(\theta + \phi), r\sin(\theta + \phi), 0)$ 'dir. Yani B vektörü, A vektörünün, x ekseninden  $\phi$  kadar döndürülmüş halidir.



Şekil 2.16 Dönen referans sisteminin oluşturulması  $B_x = \cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$

Buna göre  $B=[B_x \ B_y \ B_z]$  olmak üzere

$$B_y = \sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

yazılır ve dönen referans sisteminin katsayı matrisi oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) & 0 \\ \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ M_z \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$u = M_x \cos(\omega_1 t) - M_y \sin(\omega_1 t) \quad (2.48)$$

$$v = M_x \sin(\omega_1 t) + M_y \cos(\omega_1 t)$$

u, v dönen referans sistemindeki magnetizasyon bileşenlerini,  $M_x$  ve  $M_y$  cinsinden ifade etmektedir.  $B_{RF}$ 'i de içeren Bloch denklemlerini dönen referans sisteminde yazabilmek için  $M_x$  ve  $M_y$  magnetizasyon bileşenleri u ve v cinsinden yazılmıştır.

$$M_x = u \cos(\omega_1 t) + v \sin(\omega_1 t) \quad (2.49)$$

$$M_y = v \cos(\omega_1 t) - u \sin(\omega_1 t) \quad (2.50)$$

$$M_z = M'_z \quad (2.51)$$

yukardaki ifadeler kullanılarak, dönen referans sisteminde magnetizasyon ifadeleri tekrardan yazılır.

$$\frac{dM'_z}{dt} = -\gamma B_1 \cos(\omega_1 t)(v \cos(\omega_1 t) - u \sin(\omega_1 t)) - \gamma B_1 \sin(\omega_1 t)(u \cos(\omega_1 t) + v \sin(\omega_1 t)) \quad (2.52)$$

Dönen referans sisteminde magnetizasyonun z bileşeni,

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma B_1 v \quad (2.53)$$

olarak hesaplanır.  $du/dt$ ,  $dv/dt$  hesaplanıp  $M'_z$  yerine  $M_z$ , u ve v tekrar  $M_x$  ve  $M_y$  olarak yazılırsa, eşitlikler

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(B_0 - B_1)M_y \quad (2.54a)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma(B_0 - B_1)M_x + \gamma B_1 M_z \quad (2.54b)$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma B_1 M_y \quad (2.54c)$$

halini alır. (2.54b)'yi t'ye göre türeterek

$$\frac{d^2 M_y}{dt^2} = (\omega_1 - \omega_0) \frac{dM_x}{dt} + \omega_1 \frac{dM_z}{dt} = -(\omega_1 - \omega_0)^2 M_y - \omega_1^2 M_y \quad (2.55)$$

ve (2.54a) ve (2.54c)'yi (2.55)'te yerleştirerek

$$\frac{d^2 M_y}{dt^2} + (\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 + 2\omega_1^2)M_y = 0 \quad (2.56)$$

elde edilir.

Nümerik çözüm elde edebilmek için ileri doğru fark operatörü kullanılarak (2.56) denklemi

$$M_{y_{k+2}} - 2M_{y_{k+1}} + (1 + \omega_0^2 h^2 - 2\omega_0\omega_1 h^2 + 2\omega_1^2 h^2)M_{y_k} = 0 \quad (2.57)$$

$$(E^2 - 2E + (1 + \omega_0^2 h^2 - 2\omega_0\omega_1 h^2 + 2\omega_1^2 h^2))M_{y_k} = 0 \quad (2.58)$$

şeklindeki fark denklemi haline getirilir.

Elde edilen fark denklemi statik halde elde edilen fark denklemi ile aynı yapıdadır ve aynı çözüm kodu grafikleri elde etmek için kullanılır.

r, uygun seçilmiş sabit olmak üzere  $\beta = e^r$ ,  $M_{y_k} = \beta^k$  yazarak çözüm aranmıştır.

$$\beta^2 - 2\beta + (1 + h^2\omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1 h^2 + 2\omega_1^2 h^2) = 0 \quad (2.59)$$

$$\beta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-\omega_0^2 h^2 + 2\omega_0\omega_1 h^2 - 2\omega_1^2 h^2} = 1 \pm jh\sqrt{2\omega_1^2 + \omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1} \quad (2.60)$$

(2.59) eşitliğinin, (2.60) ile belirtilen kompleks eşlenik bir çift kökü vardır. Bu duruma göre  $M_{y_k}$ 'nin çözümü

$$W = \sqrt{2\omega_1^2 + \omega_0^2 - 2\omega_0\omega_1} \quad (2.61)$$

olmak üzere

$$M_{y_k} = A(1 + jhW)^k + B(1 - jhW)^k \quad (2.62)$$

$$M_{y_k} = A(\rho e^{j\varphi})^k + B(\rho e^{-j\varphi})^k \quad (2.63)$$

$$M_{y_k} = \rho^k (Ae^{jk\varphi} + Be^{-jk\varphi}) = \rho^k [(A + B) \cos(k\varphi) + (A - B) \sin(k\varphi)] \quad (2.64)$$

$$M_{y_k} = \rho^k [D1 \cos(k\varphi) + D2 \sin(k\varphi)]$$

olarak elde edilir. Burada  $(\rho, \varphi)$ ,  $(1, hW)$  noktasının polar koordinatlarıdır,  $h$  artım miktarıdır.

$$\rho = \sqrt{1 + (hW)^2} \quad (2.65)$$

$$\varphi = \cos^{-1}(1/\rho)$$

(2.54c)'ye karşı düşen fark denklemi ise

$$M_{z(k+1)} - M_{z_k} = -h\gamma B_1 M_{y_k} \quad (2.66)$$

dir.

(2.66)  $M_{z_k}$ 'yi bulmak için yazılmış 1.dereceden homojen olmayan lineer sabit katsayılı fark denklemdir.  $M_{z_k}$ , bu denklemin homojen çözüm ve özel çözümünün toplamı olarak aşağıda elde edilmiştir :

$$M_{z(k+1)} - M_{z_k} = 0 \quad (2.67)$$

Homojen denklemin çözümü :

$$y_{(k+1)} - y_k = 0$$

$$(E - 1)y_k = 0$$

$$y_k = C1\beta^k \quad (2.68)$$

$$\beta = 1$$

$$M_{z_k} = C1$$

den ibarettir. Özel çözüm  $\rho^k [A \cos(k\varphi) + B \sin(k\varphi)]$  olarak alınır ve (2.66) yerleştirerek

$$M_{z(k+1)} - M_{z_k} = -h\gamma B_1 \rho^k [D1 \cos(k\varphi) + D2 \sin(k\varphi)] \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \rho^k [(\rho A \cos \varphi + \rho B \sin \varphi - A) \cos \varphi k + (\rho B \cos \varphi - \rho A \sin \varphi - B) \sin \varphi k] = \\ = -h\gamma B_1 \rho^k [D1 \cos(k\varphi) + D2 \sin(k\varphi)] \end{aligned} \quad (2.70)$$

yazılır. (2.70)'in  $\varphi$  'ye göre bir özdeşlik olması sebebiyle

$$\rho A \cos \varphi + \rho B \sin \varphi - A = -h\gamma B_1 D1 \quad (2.71)$$

$$\rho B \cos \varphi - \rho A \sin \varphi - B = -h\gamma B_1 D2 \quad (2.72)$$

denklemleri yazılarak

$$A = \frac{\rho B \sin \varphi + h\gamma B_1 D1}{1 - \rho \cos \varphi} \quad (2.73)$$

$$B = \frac{h\gamma B_1 (\rho D1 \sin \varphi - D2 + \rho D2 \cos \varphi)}{2\rho \cos \varphi - \rho^2 - 1} \quad (2.74)$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$M_{zk} = C1 + \rho^k [A \cos(k\varphi) + B \sin(k\varphi)] \quad (2.75)$$

çözümü elde edilir. (2.54a)'dan da önce

$$M_{xk} = \frac{M_{y(k+1)} - M_{yk} - \gamma h B_1 M_{zk}}{-h\gamma(B_0 - B_1)} \quad (2.76)$$

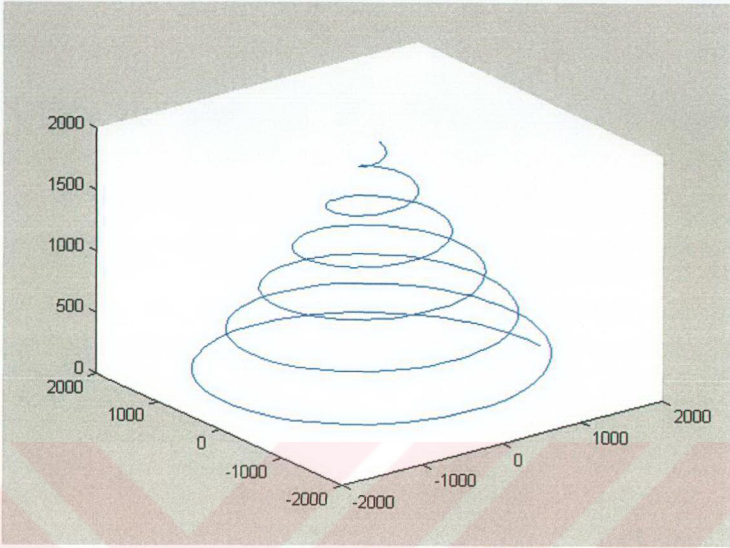
fark denklemi ve sonra bundan da

$$M_{xk} = \frac{B_1 C1}{B_0 - B_1} + \frac{\rho^k (\rho D1 \cos \varphi + \rho D2 \sin \varphi - D1 - \gamma h B_1 A) \cos(\varphi k)}{-h\gamma(B_0 - B_1)} + \frac{\rho^k (\rho D2 \cos \varphi - \rho D1 \sin \varphi - D2 - \gamma h B_1 B) \sin(\varphi k)}{-h\gamma(B_0 - B_1)} \quad (2.77)$$

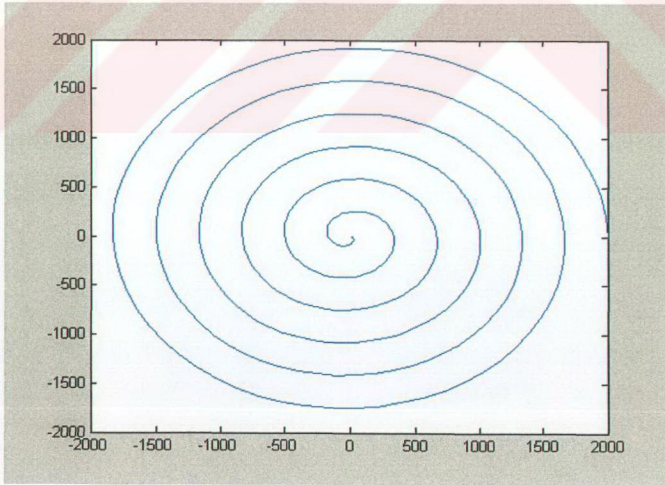
çözümüne erişilir.

(2.64), (2.75), (2.77) ile gösterilen  $M_{yk}$ ,  $M_{zk}$  ve  $M_{xk}$  değerleri dönen referans sisteminde elde edilmiş sonuçlardır. Bu sonuçlar, (2.49), (2.50) ve (2.51)'de yerine koyularak aşağıdaki grafikler elde edilmiştir.

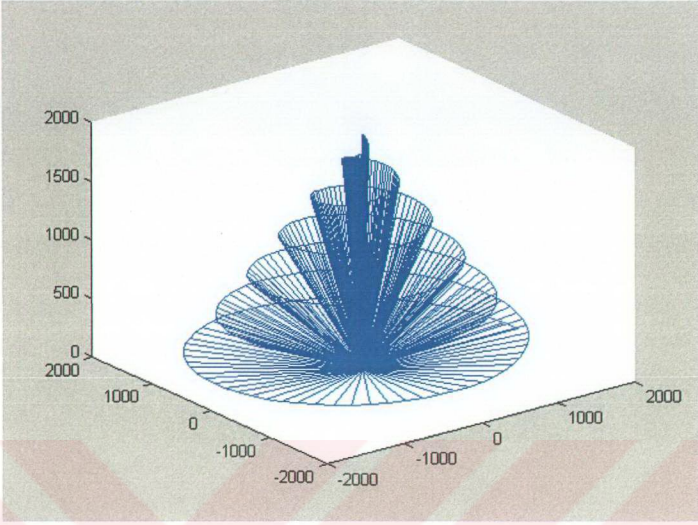
Magnetizasyonun  $M_{xy}$  bileşeni,  $xy$  düzleminde bozunup  $M_z$ 'nin  $z$  eksenini boyunca tekrar oluşmasını 2 boyutlu ve 3 boyutlu olarak gösteren grafikler Şekil 2.17 –Şekil 2-19 ile verilmiştir.



Şekil 2.17  $90^{\circ}$ lik RF darbesinin kesilmesinden sonra magnetizasyon vektörünün MR sinyalinin üretirken izlediği yol



Şekil 2.18  $90^{\circ}$ lik RF darbesinin kesilmesinden sonra magnetizasyon vektörünün MR sinyalinin üretirken izlediği yolun 2 boyutlu ifadesi



Şekil 2.19  $90^\circ$ 'lik RF darbesi ile xy düzlemine getirilen magnetizasyon vektörünün RF darbesi kesildikten sonra  $M_z$ 'yi tekrar oluştururken vektörel olarak izlediği yol

### 2.3 Rölaksasyon Terimlerini İçeren Bloch Denklemleri

Rölaksasyon terimlerini de eklersek Bloch denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}\frac{dM_x}{dt} &= \gamma(B_0 - B_1)M_y - \frac{M_x}{T_2} \\ \frac{dM_y}{dt} &= -\gamma(B_0 - B_1)M_x + \gamma B_1 M_z - \frac{M_y}{T_2} \\ \frac{dM_z}{dt} &= -\gamma B_1 M_y - \frac{M_z - M_0}{T_1}\end{aligned}\quad (2.78)$$

Bu denklemler aracılığı ile RF darbesi Larmor frekansından farklı bir frekansta uygulandığında, rölaksasyon etkileri de hesaba katılarak magnetizasyonun nasıl değiştiği incelenir.

$$M_y = \frac{1}{\omega_0 - \omega_1} \left( M_x' + \frac{M_x}{T_2} \right) \quad (2.79)$$

$$M_y' = \frac{1}{\omega_0 - \omega_1} \left( M_x'' + \frac{M_x'}{T_2} \right) = -(\omega_0 - \omega_1)M_x + \omega_1 M_z - \left( \frac{1}{(\omega_0 - \omega_1)T_2} \left( M_x' + \frac{M_x}{T_2} \right) \right) \quad (2.80)$$

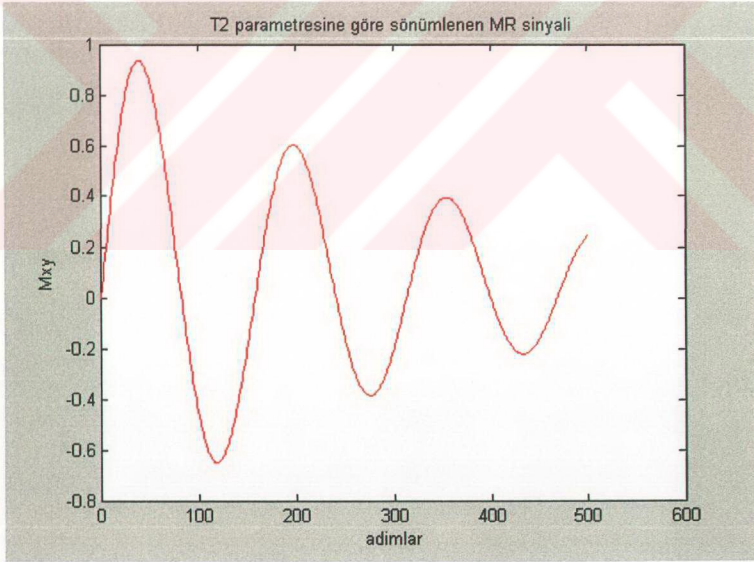
$$M_x'' + \frac{2}{T_2} M_x' + \left( (\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) M_x = (\omega_0 - \omega_1)\omega_1 M_z \quad (2.81)$$

(2.78) eşitliklerinden  $M_{xy}$ 'ye ilişkin denklemler elde edilir.

$$\frac{dM_{xy}(t)}{dt} = -M_{xy} / T_2 \quad (2.82)$$

$$\frac{dM_z(t)}{dt} = (M_0 - M_z) / T_1 \quad (2.83)$$

Bu şekilde elde edilen MR sinyalinin analitik çözümünün sonucuna aşağıdaki (2.85) ile ve magnetizasyonun z eksenine yönünde tekrar oluşmasına ilişkin analitik çözümün sonucuna da (2.84) ile erişilmiştir.



Şekil 2.20 xy düzleminde normal referans sisteminde sönümlenen MR sinyali

$$M_z(t) = M_0(1 - e^{-t/T_1}) \quad (2.84)$$

$$M_{xy}(t) = M_0 e^{-t/T_2} \quad (2.85)$$

Yukarıdaki iki eşitlik MR sinyalini tanımlar. (2.84) ve (2.85) eşitlikleri, dönen referans sisteminde  $T_1$  ve  $T_2$  parametrelerine göre üstel fonksiyon olarak azalan ve artan birer grafik oluştururlar. (2.85) ile ifade edilen magnetizasyonun xy bileşeni  $M_{xy}$  sönümlenirken ortaya çıkardığı enerji dedekte edilerek MR sinyali elde edilir. “Free Induction Decay” olarak adlandırılan bu sönümlenme şekil 2.20 ile gösterilmiştir.



### 3. SONUÇLAR

Bu çalışmada, magnetik rezonans tekniğinin fiziksel temelini oluşturan kavramlar incelenmiş, magnetik rezonans süreci kuantum fizik ve klasik fizik ile açıklanmıştır. Bu süreci açıklayan Bloch denklemlerinin her aşama için analitik ve nümerik çözümleri yapılmış ve çeşitli parametre değişimlerinde nasıl sonuç verdiği incelenmiştir. İncelemeler grafiklerle gösterilmiştir.

Açıklamalarda  $^1\text{H}$  atomu için, 90 derecelik RF darbesi uygulanması temel hal olarak alınmıştır. Bununla birlikte nükleer magnetik rezonansta önemli olan farklı atomlara da grafiksel incelemelerde yer verilmiştir.

Bu tezde, magnetik rezonans görüntülenmesinden önce gerçekleşen aşamalar matematiksel ve vektörel gösterim olarak analiz edilmiş, geliştirilen nümerik çözümler için en uygun değer aralıkları belirlenmiştir.

Başlangıç noktası olarak, temel denklemler olan Bloch denklemleri alınmıştır. Bloch denklemlerinin analitik ve nümerik çözümleri yapılmıştır. Nümerik çözümlerin sonucu olarak, çekirdeğin magnetizasyonunun vektör gösterilimi yapılmıştır. Nümerik denklemleri yazmak için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Analitik ve nümerik denklemler çözülmüştür. Nümerik denklemlerin çözümlerinde en iyi sonucu verecek kriterler elde edilmeye çalışılmıştır.

**KAYNAKLAR**

Hargreaves Brian, "Bloch Equation Simulation", <http://www.mrsrl.stanford.edu/~brian/bloch>, 2002

Nave Carl Rod, "Nuclear Magnetic Resonance" [Online], <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/nuclear/nmr.html#c1>, Department of Physics and Astronomy, Georgia State University, 2001

Ailion David C., Krishnamurty Ganesan, Otmar Kanert, Gernot Laicher, Antonio G. Cutillo (1996) "Application of Magnetic Resonance to the Study of Lung", Futura Publishing Company, New York.

Holzman D., "How MRI Works" [Online], [http://www.faseb.org/opar/mri/how\\_mri.html](http://www.faseb.org/opar/mri/how_mri.html), 2002.

Shellock Frank G., (2000), "Radiofrequency Energy-Induced Heating During MR Procedures", Journal of Magnetic Resonance Imaging

J. Hornak, "Basics of MRI" [Online]. <http://www.cis.rit.edu/htbooks/mri>, Rochester Institute of Technology, 2003.

Morra I., Lamberti F., Demartini C., "A Neural Network Approach to Unsupervised Segmentation, of Single Channel MR Images", Proceedings of the 1<sup>st</sup> International IEEE EMBS Conference on Neural Engineering pp. 515-518, Capri Island, Italy, March 20-22, 2003

Spiegel Murray R., "Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations", McGraw-Hill, 1991

Serway, Raymond A., Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, 3rd Ed., Saunders College, 1990.

Sunder S. Rajan, (1998) "MRI : A Conceptual Overview", Springer-Verlag New York.

Tuncay D., Şengör T., "Magnetik Rezonans Görüntülemeye FDTD yaklaşımı", URSI-Türkiye 2004 İkinci Ulusal Kongresi, Bilkent Üniversitesi, 8-10 Eylül 2004

**EKLER**

- Ek 1  $^1\text{H}$  Atomuna  $B_0$  ve  $B_1$  Uygulanmalarında Magnetizasyon Vektörünün Aldığı Halin Simülasyonuna İlişkin Matlab Kodu
- Ek 2 2. Bölüme ait Matlab Kodları



## Ek 1 <sup>1</sup>H Atomuna B<sub>0</sub> ve B<sub>1</sub> Uygulamalarında Magnetizasyon Vektörünün Aldığı Halin Simülasyonuna İlişkin Matlab Kodu

**vektorgosterim.m**

```
% ilk durum: B0, statik manyetik alan varliginda,

% spinler B0 etrafında döner, bu spinlerin vektörel

% toplami +z yönünde Magnetizasyon vektörünü olusturur.

disp('1. durum')

% koordinat ekseni olusturuluyor :

t=0:pi/720:2*pi;

tx=cos(t); ty=sin(t); z=zeros(size(t));

plot3(tx,ty,z,'b')

grid

axis([-2 2 -2 2 0 2])

line([-2 2],[0 0],[0 0])

line([0 0],[-2 2],[0 0])

line([0 0],[0 0],[0 1.5])

text(2,-0.1,0,'x');

text(0.2,-1.8,0,'y');

text(0,0.2,1.4,'z')

% koordinat ekseni olusturuldu.

% M0=1 Tesla, magnetizasyon vektörü çiziliyor:

line([0.03 0.03],[0 0],[0 1],'color','g')

line([0.02 0.02],[0 0],[0 1],'color','g')

text(0.2,-0.2,1,'M0')
```

```
% M0 çizildi.
```

```
disp('2. durum için bir tusa basın')
```

```
pause
```

```
% ikinci durum: 90 derecelik B1 RF pulse uygulanır.
```

```
% W0 Larmor frekansında (H için 63.8 MHz) dönen referans sistemi üzerinde
```

```
% M0'in, RF pulse etkisi ile xy düzlemine gelmesi gösterilir.
```

```
t=0:pi/720:2*pi;
```

```
tx=cos(t); ty=sin(t); z=zeros(size(t));
```

```
plot3(tx,ty,z,'b')
```

```
grid
```

```
axis([-2 2 -2 2 0 2])
```

```
line([-2 2],[0 0],[0 0])
```

```
line([0 0],[-2 2],[0 0])
```

```
line([0 0],[0 0],[0 1.5])
```

```
text(2,-0.1,0,'x');
```

```
text(0.2,-1.8,0,'y');
```

```
text(0,0.2,1.4,'z')
```

```
line([0 1],[0.03 0.03],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 1],[0.02 0.02],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 1],[0.01 0.01],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 1],[0.04 0.04],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 1],[0.05 0.05],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 1],[0.06 0.06],[0 0],'color','g')
```

```
disp('3. durum için bir tusa basın')
```

```

pause

% M0'in xy düzlemine düsmüs hali çizildi.

% BRF pulse kesiliyor ve

% M0 xy düzleminde, dephase olmaya basliyor.

% Bu durumun dönen referans sistemindeki gösterilimi:

t=0:pi/360:2*pi;

plot3(tx,ty,z,'b')

grid

axis([-2 2 -2 2 0 2])

line([-2 2],[0 0],[0 0])

line([0 0],[-2 2],[0 0])

line([0 0],[0 0],[0 1.5])

text(2,-0.1,0,'x');

text(0.2,-1.8,0,'y');

text(0,0.2,1.4,'z')

for i=10:10:50

line([0 tx(i)],[0 ty(i)],[0 0],'color','r')

line([0 tx(i)],[0 -ty(i)],[0 0],'color','g')

line([0 tx(i+5)],[0 -ty(i+5)],[0 0],'color','y')

line([0 tx(i+5)],[0 ty(i+5)],[0 0],'color','y')

end

disp('4. durum için bir tusa basin')

pause

% Bu bozunma sirasinda elde edilen sinyal MR sinyalidir.

```

% Fakat bozunma çok çabuk olduğundan, daha güçlü ve net bir

% sinyal elde etmek için spin echo metodu kullanılır yani

% belli bir süre sonra 180 derecelik bir pulse verilir.

% Burada bu durum gösterilmeyecektir, Magnetizasyon vektörünün

% z ekseninde tekrar oluşması gösterilecektir.

% x'y' düzleminde M'in %63'ü bozunana kadar geçen süre T2,

% z ekseninde M'in %63'ü oluşana kadar geçen süre T1'dir.

% Sağlıklı dokularda bu T1 ve T2 süreleri bellidir. Dokunun

% sağlıklı mi sağlıklı değil mi olduğu bu sürelerle değerlendirilir.

```
t=0:pi/360:2*pi;
```

```
plot3(tx,ty,z,'b')
```

```
grid
```

```
axis([-2 2 -2 2 0 2])
```

```
line([-2 2],[0 0],[0 0])
```

```
line([0 0],[-2 2],[0 0])
```

```
line([0 0],[0 0],[0 1.5])
```

```
text(2,-0.1,0,'x');
```

```
text(0.2,-1.8,0,'y');
```

```
text(0,0.2,1.4,'z')
```

```
for i=30:30:510
```

```
line([0 tx(i)],[0 ty(i)],[0 0],'color','r')
```

```
line([0 tx(i)],[0 -ty(i)],[0 0],'color','g')
```

```
line([0 tx(i+5)],[0 -ty(i+5)],[0 0],'color','y')
```

```
line([0 tx(i+5)],[0 ty(i+5)],[0 0],'color','y')
```

```
end

line([0 0],[0 0],[0 0.67],'color','g')

disp('Son durum için bir tusa basın')

pause

t=0:pi/720:2*pi;

tx=cos(t); ty=sin(t); z=zeros(size(t));

plot3(tx,ty,z,'b')

grid

axis([-2 2 -2 2 0 2])

line([-2 2],[0 0],[0 0])

line([0 0],[ -2 2],[0 0])

line([0 0],[0 0],[0 1.5])

text(2,-0.1,0,'x');

text(0.2,-1.8,0,'y');

text(0,0.2,1.4,'z');

line([0.02 0.02], [0 0],[0 1],'color','g')

line([0.03 0.03], [0 0],[0 1],'color','g')
```

## Ek 2 Matlab Kodları

Statik magnetik alan varlığında, analitik çözüm sonuçlarının grafiklerini veren Matlab kodu bolum2kod1.m dosya adı ile aşağıda verilmiştir.

### **bolum2kod1.m**

% Durum: Sadece statik manyetik alan var.

% Analitik çözüm sonucu direk kullanildi.

t=[0:10^-10:10^-7];sz=size(t);dt=t(2)-t(1);

gyroH=(2.675\*10^8); gyroC=(0.673\*10^8); gyroP=(1.083\*10^8);

B=input('Magnetik alan büyüklüğünü giriniz.')

w0=B\*[gyroH,gyroC,gyroP];

Sabitler=input('C1,C2, C3 sabitlerini giriniz.')

C1=Sabitler(1); C2=Sabitler(2); C3=Sabitler(3);

Mx=ones(sz(2),3); My=Mx; Mz=C3\*Mx;

dy=(C1+C2)/20+C3/70;

for k=1:3

    for n=1:sz(2)

        Mx(n,k)=C1\*sin(w0(k)\*t(n))-C2\*cos(w0(k)\*t(n));

        My(n,k)=C1\*cos(w0(k)\*t(n))+C2\*sin(w0(k)\*t(n));

    end

end

figure

% +z Yönünde Uygulanmis Statik Manyetik Alan Varliginda Magnetizasyon

% Vektör Bilesenlerinin Zamanla Degisim Grafikleri

plot(t,Mx(:,1),'green',t,My(:,1),'red',t,Mz(:,1),'blue')

```
title('B=[0 0 B0] Varliginda Magnetizasyon Vektör Bilesenlerinin Zamanla Degisim Grafikleri')
```

```
axis([0 t(sz(2)) -(C1+C2+C3) (C1+C2+C3)])
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-2*dy (C1+C2+C3)-2*dy],'color','g')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-2*dy,'Mx');
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-6*dy (C1+C2+C3)-6*dy],'color','r')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-6*dy,'My');
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-10*dy (C1+C2+C3)-10*dy],'color','b')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-10*dy,'Mz');
```

```
xlabel('zaman')
```

```
ylabel('1H için M vektörünün x, y, z bileşenleri')
```

```
% 13C için B0 varliginda magnetizasyon vektörünün hareketi
```

```
figure
```

```
plot(t,Mx(:,2),'green',t,My(:,2),'red',t,Mz(:,2),'blue')
```

```
title('B=[0 0 B0] Varliginda Magnetizasyon Vektör Bilesenlerinin Zamanla Degisim Grafikleri')
```

```
axis([0 t(sz(2)) -(C1+C2+C3) (C1+C2+C3)])
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-2*dy (C1+C2+C3)-2*dy],'color','g')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-2*dy,'Mx');
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-6*dy (C1+C2+C3)-6*dy],'color','r')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-6*dy,'My');
```

```
line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-10*dy (C1+C2+C3)-10*dy],'color','b')
```

```
text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-10*dy,'Mz');
```

```
xlabel('zaman')
```

```

ylabel('13C için M vektörünün x, y, z bileşenleri')

% 31P için B0 varlığında magnetizasyon vektörünün hareketi

figure

plot(t,Mx(:,3),'green',t,My(:,3),'red',t,Mz(:,3),'blue')

axis([0 t(sz(2)) -(C1+C2+C3) (C1+C2+C3)])

title('B=[0 0 Bo] Varlığında Magnetizasyon Vektör Bileşenlerinin Zamanla Değişim Grafikleri')

line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-2*dy (C1+C2+C3)-2*dy],'color','g')

text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-2*dy,'Mx');

line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-6*dy (C1+C2+C3)-6*dy],'color','r')

text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-6*dy,'My');

line([t(sz(2))-100*dt t(sz(2))-40*dt],[ (C1+C2+C3)-10*dy (C1+C2+C3)-10*dy],'color','b')

text(t(sz(2))-38*dt, (C1+C2+C3)-10*dy,'Mz');

ylabel('31P için M vektörünün x, y, z bileşenleri')

xlabel('zaman')

```

2. Dereceden, sabit katsayılı, homojen diferansiyel denklemi fark denklemi haline getiren fonksiyon kodu fdkh2.m, bu fark denklemini çözen fonksiyon kodu fdkh2coz.m, ve statik halde nümerik yöntemle çözümlenerek elde edilen grafiklerin kodunu veren dosya statikhal.m olmak üzere aşağıda verilmiştir.

### **Statikhal.m**

```

fdinput1=input('artım miktarını giriniz');

B=1; % 1 Tesla için, giriş değeri olarak da girdirilebilir.

gyro=input('atomun jromagnetik oranını giriniz')

% My için katsayı matrisi:

KMy=[1 0 (B*gyro)^2];fdinput2=KMy;

```

```
fdinput3=input('adm sayisini giriniz');
```

```
fdskh2coz(fdinput1,fdinput2,fdinput3)
```

### **Fdskh2.m:**

```
function fdkatsayi=fdskh2(artim,katsayimatrisi)
```

```
derece=size(katsayimatrisi); fdkatsayi=ones(1,derece(2));
```

```
fdkatsayi(1)=1;
```

```
fdkatsayi(2)=(-2+katsayimatrisi(2)*artim)/katsayimatrisi(1);
```

```
fdkatsayi(3)=(1-katsayimatrisi(2)*artim+katsayimatrisi(3)*(artim^2))/katsayimatrisi(1);
```

```
fdkatsayi
```

```
% 2. dereceden diferansiyel denklem için
```

```
% katsayimatrisi, kısmi türevin en yüksek
```

```
% mertebelisinden düşüğe doğru yazilir. Dif denklem homojen olmalı
```

```
% bu durumda ikinci dereceden karakteristik denklem çıkar
```

### **fdskh2coz.m**

```
function cozum=fdskh2coz(artim, katsayimatrisi,adim)
```

```
% katsayimatrisi: 2. dereceden diferansiyel denklemin katsayilari
```

```
adim=linspace(1,adim,adim); adet=size(adim);
```

```
cozum=ones(1,adet(2));kokler=ones(1,2);
```

```
ks=fdskh2(artim,katsayimatrisi);
```

```
kokler=roots(ks);
```

```
% koklerin durumu inceleniyor
```

```
sabit1=1; sabit2=1;tf=isreal(kokler(1));
```

```
if tf==0
```

```
    % polar koordinatlar bulunur
```

```

ro=abs(kokler(1));

imaci=angle(kokler(1))*180/pi;

for k=1:adet(2)

    cozum(k)=(ro^k)*(sabit1*cos(k*imaci)+sabit2*sin(k*imaci));

end

end

plot([1:adet(2)],cozum)

title("")

xlabel('Zaman artimlari, adimlar')

ylabel('My')

% Burada sadece imajiner köklere ilişkin çözüm verilmistir.

Statik ve zamanla değişen magnetik alan varlığında oluşturulan fark denklemine ilişkin kod
aşağıda verilmiştir.

zdegisenhal.m

fdinput1=input('artim miktarin giriniz');

B1=input('B1 magnetik alan siddetini giriniz');

B0=input('B0 magnetik alan siddetini giriniz');

gyro=input('atomun jiromagnetik oranini giriniz')

wm0=B0*gyro;wm1=B1*gyro;

% Donen referans sisteminde My için dif. denklemin katsayi matrisi:

KMy=[1 0 wm0^2-2*wm0*wm1+2*wm1^2];fdinput2=KMy;

fdinput3=input('adim sayisin giriniz');

fdskh2coz(fdinput1,fdinput2,fdinput3)

```

**fdskh3.m**

```
function fdkatsayi=fdskh3(artim,KM) % KM: diferansiyel bdenklemin katsayi matrisi

derece=size(KM)

fdkatsayi=ones(1,derece(2));

fdkatsayi(1)=1;

fdkatsayi(2)=(KM(2)/KM(1))*artim-3;

fdkatsayi(3)=(KM(3)/KM(1))*artim^2-2*artim*(KM(2)/KM(1))+3;

fdkatsayi(4)=(KM(4)/KM(1))*artim^4-(KM(3)/KM(1))*artim^2+(KM(2)/KM(1))*artim-1;

fdkatsayi
```

**fdskh3coz.m**

```
function cozum=fdskh3coz(artim, katsayimatrisi,adim)

% katsayimatrisi: Ek 1. dereceden diferansiyel denklemin katsayilari

adim=linspace(1,adim,adim); adet=size(adim);

cozum=ones(1,adet(2));kokler=ones(1,3);

ks=fdskh3(artim,katsayimatrisi);

kokler=roots(ks);

% koklerin durumu inceleniyor

kon1=isreal(kokler(1));

kon2=isreal(kokler(2));

kon3=isreal(kokler(3));

kon4=isequal(kokler(1),kokler(2));

kon5=isequal(kokler(1),kokler(3));

kon6=isequal(kokler(2),kokler(3));

Kontrol=[kon1 kon2 kon3 kon4 kon5 kon6]
```

```

% koklere gore homojen denklemin cozumu uretiliyor

S1=1;S2=1;S3=1; % sabitler

if Kontrol==[1 1 1 0 0 0]

    for k=1:adet(2)

        cozum(k)=S1*kokler(1)^k+S2*kokler(2)^k+S3*kokler(3)^k

    end

end

if Kontrol==[1 0 0 0 0 0]

    % polar koordinatlar bulunur

    ro=abs(kokler(2));

    imaci=angle(kokler(2))*180/pi;

    for k=1:adet(2)

        cozum(k)=(ro^k)*(S2*cos(k*imaci)+S3*sin(k*imaci))+S1*kokler(1)^k;

    end

end

if Kontrol==[0 1 0 0 0 0]

    % polar koordinatlar bulunur

    ro=abs(kokler(1));

    imaci=angle(kokler(1))*180/pi;

    for k=1:adet(2)

        cozum(k)=(ro^k)*(S1*cos(k*imaci)+S3*sin(k*imaci))+S2*kokler(2)^k;

    end

end

if Kontrol==[0 0 1 0 0 0]

```

```

% polar koordinatlar bulunur

ro=abs(kokler(1));

imaci=angle(kokler(1))*180/pi;

for k=1:adet(2)

    cozum(k)=(ro^k)*(S1*cos(k*imaci)+S3*sin(k*imaci))+S3*kokler(3)^k;

end

end

plot([1:adet(2)],cozum)

%title('Statik Magnetik Alan Varliginda Spin Magnetik Momentlerinin Zamanla Degisim
Grafigi')

xlabel('Zaman artimlari, adimlar')

%ylabel('Tek bir spin magnetik momentine ait My')

% Burada sadece imajiner köklere iliskin çözüm verilmistir.

zdegisenrelax.m

fdinput1=input('artim miktarin giriniz');

B1=input('B1 magnetik alan siddetini giriniz');

T=ones(1,2);

T=input('T1 ve T2 rölaksasyon degerlerini giriniz')

T1=T(1);T2=T(2);

B0=1; % 1 Tesla için, giris degeri olarak da girdirilebilir.

gyro=input('atomun jiromagnetik oranini giriniz')

wm0=B0*gyro;wm1=B1*gyro;

% Donen referans sisteminde Mx için dif. denklemin katsayi matrisi:

KMx=ones(1,4);

```

KMx(1)=1;

KMx(2)=(2\*wm1\*(wm0-wm1)/T2+1/T1);

KMx(3)=((wm0-wm1)^2+1/(T2^2)+wm1^2+2/(T1\*T2));

KMx(4)=((wm1^2)/T2+((wm0-wm1)^2)/T1+1/(T1\*(T2^2)));

fdinput2=KMx;

fdinput3=input('adim sayisin giriniz');

fdskh3coz(fdinput1,fdinput2,fdinput3)

### **cozdurum2MxMy.m**

function cozum=cozdurum2MxMy(artim,adim,katsayimatrasi,B0B1gyro)

%B0B1gyro=h\*jiromagnetikoran\*(B0-B1)

% katsayimatrasi: fark denklemleri katsayilari

adim=linspace(1,adim,adim); adet=size(adim);cozum=ones(1,adet(2));

cozumMx=ones(1,adet(2)+1);

ksize=size(katsayimatrasi);

if ksize(2)==2

    % 1.dereceden homojen fark denklemleri

elseif ksize(2)==3

    % 2. dereceden homojen fark denklemleri

kokler=ones(1,2);

kokler=roots(katsayimatrasi);

% koklerin durumu inceleniyor

sabit1=1; sabit2=1;tf=isreal(kokler(1));

    if tf==0

        % polar koordinatlar bulunur

```

ro=abs(kokler(1));

imaci=angle(kokler(1))*180/pi;

cozumMx(1)=0; %Mx0

for k=1:adet(2)

cozum(k)=(ro^k)*(sabit1*cos(k*imaci)+sabit2*sin(k*imaci));

cozumMx(k+1)=B0B1gyro*cozum(k)+cozumMx(k)

end

end

size(cozumMx)

size(cozum)

adet(2)

plot([1:adet(2)],cozum,'r',[1:adet(2)],cozumMx(1:adet(2)),'g')

title("")

xlabel('Zaman artimlari, adimlar')

ylabel('cozum')

%elseif ksize(2)==4

    % 3. dereceden homojen fark denklemi

end

b2k1.m

% hata payi hesaplamasi eklenmemis kod

% Durum: B=[0 0 Bz] iken Bloch denk. nümerik çözümü

% giris degerleri: Milk, Bz, h artimi, k adim sayisi, jiromagnetik oran

% cikis degerleri: cizimler (t,Mx), (t,My), (t,Mz), (Mx,My,Mz)

gyroH=(2.675)*10^8; % Hidrojen icin jiromagnetik oran

```

```

h=10^-10;

k=250;

B=[0 0 1];

M0=[0.9 0 1];

M=ones(k,3);

% Nümerik çözüm sonucu Myk=r^k(D1 cos(k*phi)+D2*sin(k*phi))

r=sqrt(1+(h*gyroH*B(3))^2);

phi=acos(1/r);

D1=M0(2);

D2=((M0(1)+D1)/((r^2)*sin(phi))-D1*cot(phi));

M(1,2)=M0(2);M(1,1)=M0(1);M(1,3)=M0(3);

% Mx, My, Mz elde ediliyor

for t=2:k

    M(t,2)=(r^t)*(D1*cos(t*phi)+D2*sin(t*phi));

    M(t,1)=-1/(h*gyroH*B(3))*(M(t,2)-M(t-1,2));

    M(t,3)=M0(3);

end

plot3(M(4:k-1,1),M(4:k-1,2),M(4:k-1,3))

grid

xlabel('Mx')

ylabel('My')

zlabel('Mz')

pause

for m=4:k-2

```

```

line([0 M(m,1)],[0 M(m,2)],[0 M(m,3)],'color','g')
line([0 M(m+1,1)],[0 M(m+1,2)],[0 M(m+1,3)],'color','r')

end

pause

figure

% title('Statik Magnetik Alan Varliginda Mx,My,Mz Nümerik Çözüm Sonuçlari')

subplot(3,1,1)

plot(1:k,M(:,1))

ylabel('Mx')

subplot(3,1,2)

plot(1:k,M(:,2))

ylabel('My')

subplot(3,1,3)

plot(1:k,M(:,3))

xlabel('k: adim sayisi')

ylabel('Mz')

b2k2.m

% hata payi hesaplamasi eklenmemis kod

% Durum:  $B=[B_1\cos(w_1t) -B_1\sin(w_1t) B_0]$  iken Bloch denk. nümerik çözümü

% giris degerleri: Milk, Bz, h artimi, k adim sayisi, jromagnetik oran

% cikis degerleri: cizimler (t,Mx), (t,My), (t,Mz), (Mx,My,Mz)

gyroH=(2.675)*10^8; % Hidrojen icin jromagnetik oran

h=10^-10;

k=2500;

```

```

B0=1;B1=0.5;

M0=[0 0 1]; %asagidaki çözüm sadece bu kosula uygundur

M=ones(k,3);

w0=gyroH*B0;w1=gyroH*B1;

W=2*(w1^2)+(w0^2)-2*w0*w1; % W^2yi ifade eder.

r=sqrt(1+(h^2)*W);

phi=acos(1/r);

D1=M0(2);

D2=gyroH*h*B1/(r*sin(phi));

B=h*gyroH*B1*(-D2+r*D2*cos(phi))/(2*r*cos(phi)-(r^2)-1);

A=(r*B*sin(phi))/(1-r*cos(phi));

C1=M0(3)-A;

M(1,2)=M0(2);M(1,1)=M0(1);M(1,3)=M0(3);

% Mx, My, Mz elde ediliyor

for t=2:k

    M(t,2)=(r^t)*(D1*cos(t*phi)+D2*sin(t*phi));

    M(t,3)=C1+(r^t)*(A*cos(t*phi)+B*sin(t*phi));

    M(t,1)=(M(t,2)-M(t-1,2)-gyroH*h*B1*M(t,3))/(-h*gyroH*(B0-B1));

end

plot3(M(4:k-1,1),M(4:k-1,2),M(4:k-1,3))

grid

xlabel('Mx*')

ylabel('My*')

zlabel('Mz*')

```

```

pause

for m=4:k-2

line([0 M(m,1)],[0 M(m,2)],[0 M(m,3)],'color','g')

line([0 M(m+1,1)],[0 M(m+1,2)],[0 M(m+1,3)],'color','r')

end

pause

figure

% title('Dönen referans sisteminde Mx^,My^,Mz^ Nümerik Çözüm Sonuçları')

subplot(3,1,1)

plot(1:k,M(:,1))

ylabel('Mx')

subplot(3,1,2)

plot(1:k,M(:,2))

ylabel('My')

subplot(3,1,3)

plot(1:k,M(:,3))

xlabel('k: adım sayısı')

ylabel('Mz')

% Gerçek Mx,My,Mzler

for t=2:k

    MR(t,1)=M(t,1).*cos(w1*t)-M(t,2).*sin(w1*t);

    MR(t,2)=M(t,1).*sin(w1*t)+M(t,2).*cos(w1*t);

    MR(t,3)=M(t,3);

end

```

```

plot3(MR(4:k-1,1),MR(4:k-1,2),MR(4:k-1,3))

grid

xlabel('Mx')

ylabel('My')

zlabel('Mz')

pause

for m=4:k-2

line([0 MR(m,1)],[0 MR(m,2)],[0 MR(m,3)],'color','g')

line([0 MR(m+1,1)],[0 MR(m+1,2)],[0 MR(m+1,3)],'color','r')

end

pause

figure

% title('Dönen referans sisteminde Mx^,My^,Mz^ Nümerik Çözüm Sonuçları')

subplot(3,1,1)

plot(1:k,MR(:,1))

ylabel('Mx')

subplot(3,1,2)

plot(1:k,MR(:,2))

ylabel('My')

subplot(3,1,3)

plot(1:k,MR(:,3))

xlabel('k: adım sayısı')

ylabel('Mz')

```

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	19.03.1977	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1992-1995	Üsküdar Fen Lisesi
Lisans	1995-2001	İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü, İngilizce (ilk yıl İngilizce hazırlık sınıfı içindir)
Yüksek Lisans	2001-2005	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Müh. Anabilim Dalı, Haberleşme Programı

**Çalıştığı kurumlar**

2000-2001	Probil Bilgi işlem bölümü, sistem mühendisi
2002-2004	PAD, Planlama Araştırma Danışmanlık Bilgi işlem bölümü, sistem mühendisi
2004-	TAI, TUSAŞ Havacılık Uzay ve Sanayi A.Ş. Bilgi işlem bölümü, bilgisayar sistem destek uzmanı