

57574

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL SİMETRİLİ PROBLEMLERİN

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE

ANALİZİ

Elek.Müh. Mustafa OKUYUCU

F.B.E. Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ferit ATTAR

İSTANBUL, 1996

57574

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
TEŞEKKÜR	V
TÜRKÇE ÖZET	VI
SUMMARY	VII
I. GİRİŞ	1
1.1. Elektrik Alanlarını İnceleme Yöntemleri.....	1
1.1.1. Analitik Yöntemler.....	1
1.1.2. Analog Yöntemler.....	2
1.1.3. Sayısal Yöntemler.....	6
II. SAYISAL YÖNTEMLERİN KULLANILMASI	7
2.1. Sonlu Farklar Yöntemi.....	7
2.1.1. Sonlu Farklar Yöntemi ile Statik Elektrik Alan Hesabı.....	9
2.2. Sınır Elemanlar Yöntemi.....	12
2.2.1. Çözüm Basamakları ve Matematiksel Formülasyon.....	14
2.3. Yük Benzetim Yöntemi.....	17
2.3.1. Tek Yalıtkanlı Sistemler İçin Yük Benzetim Yöntemi.....	19
2.3.2. Çok Yalıtkanlı Sistemler İçin Yük Benzetim Yöntemi.....	21
2.3.3. Benzetim Yüklü Tipleri.....	24
2.4. Monte Carlo Yöntemi.....	25
2.4.1. Sabit Rasgele Yürüyürlü Monte Carlo Yöntemi.....	26
2.4.2. Serbest Rasgele Yürüyürlü Monte Carlo Yöntemi	29
III. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	32
3.1. Giriş.....	32
3.2. Minimum Enerji İlkeleri.....	33
3.3. Sınır Değer Problemleri.....	34
3.3.1. Ralyleigh-Ritz Yöntemi.....	35
3.3.2. Galerkin Yöntemi.....	38
3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminde İşlem Basamakları.....	41
3.4.1. Çözüm Bölgesinin Bölmeleme.....	41

3.4.2. Şekil (Entrepolasyon) Fonksiyonları seçimi.....	43
3.4.3. Elemanların Birleştirilmesi.....	47
3.4.4. Denklem Sisteminin Çözümü.....	50
3.4.5. İstenen Değer Hesaplarının Yapılması.....	52
3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi İçin Giriş Verilerinin Hazırlanması.....	54
3.5.1 Alan Koordinatları, Şekil Fonksiyonları ve İzoparametrik Bölmeleme İle İlgili Temel Özellikler.....	55
3.5.2. Merge Algoritması.....	57
<i>IV. EKSENEL SİMETRİLİ PROBLEMLERİN ANALİZİ</i>	60
4.1. Giriş.....	60
4.2. Problemin Silindirik Koordinat Sisteminde Çalışması.....	60
4.3. Elektrostatik Enerji.....	61
4.4. Problemin Formülasyonu.....	61
4.5. İteratif Çözüm.....	67
4.6. Elektrik Alan Şiddeti Hesabı.....	68
4.7. Kapasite Hesabı.....	68
<i>V. SONUÇLAR VE ÖNERİLER</i>	69
5.1. Çözülmüş Problemlerle İlgili Bilgisayar Sonuçları.....	69
5.2. Sonuç.....	79
5.3. Öneriler.....	80
<i>KAYNAKLAR</i>	81
<i>ÖZGEÇMİŞ</i>	83

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ferit ATTAR 'a teşekkür ederim. Ayrıca Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet CEBECİ 'ye ve Yrd. Doç. Dr. Özcan KALENDERLİ 'ye her türlü yardımlarından dolayı şükranlarımı sunarım. Çalışmalarım sırasında bana destek olan mesai arkadaşlarıma ve bu tezin meydana gelmesinde emeği geçen herkese teşekkürü bir borç bilirim.



ÖZET

Elektrik sistemlerinde kullanılan cihazların elektriksel dayanım, optimum tasarım, çevre faktörlerinin sistem ve malzeme üzerindeki etkileri gibi imalat ve işletme karakteristiklerinin belirlenmesinde kullanılan birçok sayısal yöntem vardır. Bu çalışmada nümerik yöntemler ve teknikler incelenmiş ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Ayrıca, sayısal yöntemlerden Sonlu Elemanlar Yöntemi' nin özellikleri, elektrik alan problemlerinin çözümünde sağladığı üstünlükler ve çözüm bölgesini otomatik olarak bölmelemenin gerekliliği incelenmiştir. Çözüm bölgesine ilişkin verilerin otomatik olarak üretimi için eğrisel kenarlı teçhizatın kenarlarına iyi bir şekilde uyum sağlayan bir bölmeleme tekniği ve buna ilişkin otomatik veri üretim programı anlatılmıştır.

Otomatik ağ üretimi için, sivri uç-elektrod sistemi örnek olarak çözülmüştür. Bir yüksek gerilim bushing'i için kompleks potansiyel çözümü yapılmış, statik ve dinamik elektrik alan dağılımları çizilmiştir.

SUMMARY

There are many numerical methods to find out the electrical field strength, effects of the environmental factors on the materials, working characteristics and optimum design of the equipment which are used in electrical systems. In this study, numerical methods and techniques are searched and they are compared with each other.

Furthermore, the features of the Finite Element Method which is a kind of numerical methods. Superiority of the method in the solutions of the electric field problems and the necessity of the automatic mesh generation had been analyzed. For the automatic generation of the data in the solution region, a mesh generation technique well-fitting to the sides of the curved boundary equipment and a data generation program related with have been explained.

Pointed edge-Electrod system have been analyzed for automatic mesh generation. Complex potential solution have been estimated for a high voltage bushing and static and dynamic electrical field distribution.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Elektrik Alan İnceleme Yöntemleri

Yüksek gerilim (Y.G) cihazlarında ekonomik ve iyi bir tasarım gerçekleştirmek için alan hesaplarının yapılması gerekir. Bu amaçla kullanılan yöntemler genel olarak üç ana gruba ayrılır.

- 1) Analitik yöntemler
- 2) Analog yöntemler
- 3) Sayısal yöntemler

1.1.1. Analitik Yöntemler

Analitik yöntemler, çözüm bölgesi homojen, geometri basit ve kısmi diferansiyel denklemler lineer ise, kolayca kullanılabilirler. Ancak pratikte karşılaşılan problemler için genellikle analitik çözümler elde edilemez. Diferansiyel denklemin lineer olduğu durumlarda bile çözüm bölgesi homojen değildir, geometri düzgün olmaz ve sınır şartlarının basit matematiksel fonksiyonlarla ifadesi zordur. Dolayısıyla bu yöntemler, sadece basit sistemler için geçerlidir.

Bu yöntemler arasında değişkenlere ayırma yöntemi gibi kesin sonuç veren yöntemler ile Rayleigh-Ritz ve Galerkin yöntemleri gibi yaklaşık çözüm veren çözümsel yöntemler sayılabilir. Bu yöntemlerden başka şu yöntemlerden yararlanılabilir.

Kısmi Türevli (Diferansiyel) Denklemlerin Çözümü: Bir probleme ilişkin temel diferansiyel denklem bilinen diferansiyel denklem çözüm yöntemleri ile çözülerek çözümlene yapılabilir.

Koordinat Dönüşümü: Alan incelemelerde, incelemeyi karmaşıklıktan kurtarmak için incelenen düzene uygun bir koordinat sistemi ile çalışılmalıdır. Bunun için koordinat yüzeylerinden biri incelenecek düzenin sınır yüzeyine uyacak bir koordinat sistemi seçilmelidir. İncelemelerde Laplace

denkleminin söz konusu koordinat sisteminde yazılması ve çözülmesi gerekmektedir. Bu işlemin yapılmasında genel koordinatlardan yararlanılabilir.

Konform Dönüşüm: Bir kompleks düzlemde göz önüne alınan bir karmaşık alan problemi bilinen bir dönüşüm bağıntısı yardımıyla başka bir kompleks düzlemde basit bir probleme dönüştürülerek incelenebilir. Bu düzlem üzerindeki hesaplardan yararlanarak da gerçek alana ilişkin bilgiler elde edilebilir. Bu yöntemde dönüşüm bağıntısının bilinmesi veya verilmesi gerekir.

Schwarz - Christoffel Dönüşümü: İnceleme, dönüşüm bağıntısı bulunarak yapılır. Bir çokgen tarafından sınırlanmış bir bölge dönüşüm bağıntısı yardımıyla incelenmesi kolay bir bölgeye dönüştürülür.

1.1.2. Analog Yöntemler

Elektrolitik tank, iletken kağıt ve direnç devreleri gibi analog yöntemler daha geniş olarak kullanılmalarına rağmen, bunların da kullanım alanları kısıtlıdır ve açık sınırlı alan problemlerinin çözümüne iyi cevap veremezler. Hassas sonuçların elde edilebilmesi için çok fazla teçhizat ile dikkatli ölçmeler gerekir ve böylece hatalar % 2 sınırı içerisinde tutulabilir.

Grafik Yöntem: Bir örnek üzerinde grafik yönteminin özü kısaca açıklanacaktır. Şekil 1.1. deki gibi bir elektrot sistemi ele alırsak; önce elektrot şekli de gözönüne alınarak eşpotansiyel çizgiler daha sonra bunlara her noktada dik alan çizgileri çizilir. Elektrotların şekil düzlemine dik doğrultudaki yüksekliği d , alan çizgileri sayısı n ve eşpotansiyel çizgi sayısı m ise;

$$Q = \oint \vec{D} d\vec{S} = n\epsilon Ebd \quad (1.1)$$

$$E = \frac{\Delta V}{A} \quad (1.2)$$

ve

$$\Delta V = \frac{U}{m+1} \quad (1.3)$$

yerine konursa

$$Q = U \frac{b}{a} \varepsilon d \frac{n}{m+1} \quad (1.4)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \frac{b}{a} d \frac{n}{m+1} \quad (1.5)$$

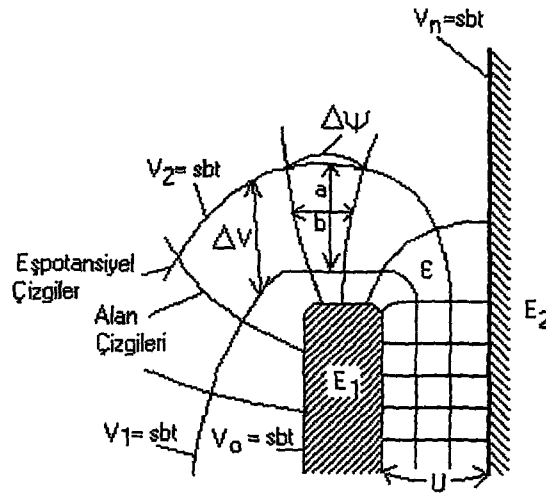
bulunur. Gerek çizim kolaylığı ve gerekirse bağıntıların basitleşmesi açısından $\frac{b}{a} = 1$ olacak şekilde gözler oluşturulursa;

$$Q = U \varepsilon d \frac{n}{m+1} \quad (1.6)$$

$$C = \varepsilon d \frac{n}{m+1} \quad (1.7)$$

$$\bar{C} = \frac{C}{d} = \varepsilon \frac{n}{m+1} \quad (1.8)$$

$$E_{\max} = \frac{\Delta V}{a_{\min}} \quad (1.9)$$



Şekil 1.1 Eşpotansiyel ve alan çizgilerinin çizilmesi.

Elektrolitik Banyo Yöntemi: Elektrolitik banyo yöntemiyle elektrostatik alanın incelenmesinde, statik alan ile stasyoner akım alanı arasındaki benzeşimden (analogiden) yararlanılır. Benzeşim bağlantıları :

Statik Elektrik Alanı Stasyoner Akım Alanı

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}_s \qquad \vec{J} = \chi \vec{E}_j \qquad (1.10)$$

$$Q = \oint \vec{D} d\vec{S} \qquad I = \oint \vec{J} d\vec{S} \qquad (1.11)$$

$$C = \frac{Q}{U} \qquad G = \frac{1}{R} = \frac{1}{U} \qquad (1.12)$$

$$\vec{E} = -gradV \qquad (1.13)$$

$$divgradV = 0 \qquad (1.14)$$

dir. Görüldüğü gibi stasyoner akım alanındaki \vec{J} akım yoğunluğu ile statik elektrik alanındaki \vec{D} deplasman vektörleri benzer matematiksel bağlantıları sağlamaktadır. χ öz iletkenlikli bir ortam için elde edilecek akım yoğunluğu çizgileri; dolayısıyla aynı elektrot sisteminin ϵ_r bağıl dielektrik sabitli yalıtkan ortamdaki deplasman çizgileriyle (izotrop bir ortam için statik alan çizgileriyle) çakışır. Bu özellikten yararlanarak, alan dağılımı bulunacak elektrot sisteminin mükemmel iletken yapılmış ölçekli bir modeli elektrolitik bir sıvı içerisine yerleştirip akım çizgileri çizilirse, aynı zamanda söz konusu elektrot sisteminin elektrostatik alan dağılımı da elde edilmiş olur. Akım çizgilerinin çizilmesinde daha önce bahsedilen çizim yönteminden yararlanılır.

Yukarıda açıklanan benzeşimden yararlanılarak stasyoner akım alanı için;

$$I = \oint \vec{j} d\vec{S} = U \chi \frac{b}{a} d \frac{n}{m+1} \qquad (1.15)$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{U} = \chi \frac{b}{a} d \frac{n}{m+1} \qquad (1.16)$$

Yine $\frac{b}{a} = 1$ alınıp gerekli işlemler yapılırsa ;

$$G = \frac{1}{R} = \chi \frac{n}{m+1} d \quad (1.17)$$

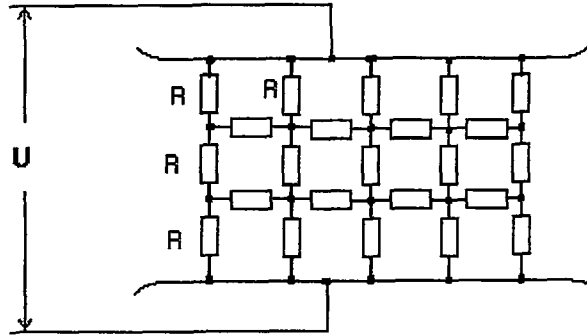
$$\text{ve } RC = \frac{\varepsilon}{\chi} \quad (1.18)$$

bulunur. Bu arada benzeşimin yapılabilmesi için her iki olanın sınır koşullarının eşdeğer olması gerekir.

Yarı İletken Kağıt Yöntemi: Elektrolitik banyo yöntemi ile aynı ilkeye dayanır. Aralarındaki fark, ortamın elektrolit yerine yarıiletken kağıt (kuru ortam) olmasıdır.

Membran (Zar) Yöntemi: Yöntem lastik bir zarın elektrot sisteminin üç boyutlu modeli üzerinde gerilip çıkıntı ve gerilen noktalara bakılarak çok ve az zorlanan bölgelerinin tesbit edilmesine dayanmaktadır.

Direnç Benzetim Yöntemi: Dirençlerden oluşmuş bir ağ ile problem incelenir. Dirençlerin bağlantı noktalarındaki (düğüm noktalarındaki) potansiyeller ölçülerek veya hesaplanarak potansiyeller ölçülerek veya hesaplanarak potansiyel dağılımı bulunur. Şekil 1.2' de bir direnç benzetim devresi örneği gösterilmiştir. Bu yöntem sonlu farklar yöntemine benzer.



Şekil 1.2 Direnç benzetim devresi örneği.

Saman Çöpü Yöntemi: Bir deney cismi, örneğin bir izolatör çevresindeki alanın incelenmesi için yaklaşık 2 cm uzunluğunda bir saman çöpünden yararlanılabilir. Bunun için gerilmiş yalıtkan bir tele takılmış olan bir saman çöpü deney cismine yaklaştırılır. Saman çöpü, elektrotlar arasındaki

elektrostatik alanın etkisiyle kutuplanarak alan doğrultusunu alır. Bu durum bir yana bir ışık kaynağı, bir yana da bir perde yerleştirilip saman çöpünün perde üzerindeki gölgesi işaretlenerek tesbit edilir. Alan dağılımının tam olarak belirlenmesi için saman çöpünün yüzlerce yerdeki doğrultusunun tesbit edilmesi gerekir (Kalenderli, 1994).

1.1.3. Sayısal Yöntemler

Sayısal yöntemler, yüksek hızlı sayısal bilgisayarların gelişmesi ve yardımcı cihazlarının kullanımının artmasıyla çok cazip bir hale gelmiş, böylece alan problemlerinin incelenmesinde önemli adımlar atılmıştır. Ancak Laplace ve Poisson türü kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde birçok zorluklar bulunmaktadır. Özellikle iki veya üç boyutlu kompleks alanların farklı dielektrik sabitli ve iletkenlikli yalıtkan malzemelerin matematiksel modellerini oluşturan denklemlerin çözümü daha da karmaşık olmaktadır. Bu zorlukların aşılmasını sağlamak amacıyla araştırmacılar tarafından sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin en çok kullanılanları aşağıda verilmiştir.

- (a) Sonlu Farklar Yöntemi (SFY)
Finite Difference Method (FDM)
- (b) Sınır Elemanlar Yöntemi (BEM)
Boundary Element Method (BEM)
- (c) Yük Benzetim Yöntemi (YBY)
Charge Simulation Method (CSM)
- (d) Monte Carlo Yöntemi (MCY)
Monte Carlo Method (MCM)
- (e) Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY)
Finite Element Method (FEM)

BÖLÜM 2

SAYISAL YÖNTEMLERİN KULLANILMASI

2.1. Sonlu Farklar Yöntemi (SFY) (Finite Difference Method) (FDM)

SFY, kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılan bir sayısal yöntemdir. SFY yönteminin, basit aritmetik ve trigonometrik bilgi ile uygulanabilmesi, dirençle benzetim yöntemi ile benzerliği ve oldukça basit bilgisayar programları ile çalışabilmesi, bu sayısal yöntemin daha kolay anlaşılmasını ve yaygınlaşmasını sağlamıştır.

Kolaylıkla anlaşılması bakımından burada öncelikle Laplace ve Poisson denklemlerini sağlayan iki boyutlu problemler incelenecektir. SFY ile alan problemi, sınır koşulları verilen, yani sınırları üzerinde bazı alan büyüklükleri bilinen, sınırlı bir bölge içinde incelenir. Gözönüne alınan bölgede potansiyel dağılımının sürekli olduğu kabul edilir. Elektrik alan dağılımının bulunacağı bölgede belirli noktalar için yazılan sonlu fark eşitliklerinin oluşturduğu doğrusal denklem sisteminin çözülmesiyle bu noktalardaki potansiyel değerleri elde edilir. Bu değerlerden yararlanarak eşpotansiyel çizgiler çizilebilir, alan şiddetinin maksimum olduğu nokta bulunabilir. Ancak her sayısal işlemle sınırlı bilgi sağlanır. Bölgedeki veya küçük bir bölümündeki alan bilgilerini elde edebilmek için, bölgede öncelikle düğüm noktaları adı verilen belirli noktaların gösterilmesi gerekir. Bu noktalar, bölge üzerine çizilen ağ veya ızgaranın düğüm noktalarıdır.

SFY' de genel olarak düzgün gözlerden oluşan ağlar kullanılır. Düzgün olmayan bir ağ ile türevsel denkleme karşılık fark denklemlerinin yazımı ve çözümü zorluk gösterir. Bu nedenle sayısal hesaplarda düzgün olmayan ağ, kare, üçgen, altıgen veya çokgen (poligon) gözlerden oluşabilir. Fakat genelde düzgün bir ağın gözleri, kare veya eşkenar üçgendir. Bu kare veya üçgen gözlerden oluşan ağlar her zaman problemin sınırları içine tam olarak uymayabilir. Bu yüzden, öncelikle düğümleri sınırlara yerleştirilebilen ve bölgeye uyan dikdörtgen gözlerden oluşmuş bir ağ için fark denklemleri çıkarılacaktır. Kare, dikdörtgenin özel bir durumu olduğundan, elde edilen sonuçlar istenirse kare gözlü

ağlara uygulanabilir. Bu şekilde, düzensiz ağ kullanmanın getireceği zorluklar da daha iyi anlaşılmuş olacaktır.

SFY ile çözümde, ayrık noktalar kümesinde çözüm elde etmek için sayısal çözümlemede geniş kullanım alanına sahip olan sonlu fark işlemlerinden yararlanılır. Bu yöntemde sonlu fark işlemlerinin ileri, geri ve merkezi sonlu farklar gibi farklı türleri kullanılarak çözümün doğruluğu artırılabilir. Sonlu fark işlemleri, kısaca, yapılan fark işleminin türünü gösteren operatörler ile gösterilebilir.

İleri fark Δ operatörü ile, geri fark ∇ operatörü ile ve merkezi fark δ operatörü ile gösterilirse, sırasıyla, $f(x)$ fonksiyonunun genel olarak birinci mertebeden ileri farkı,

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \quad (2.1)$$

ikinci mertebeden ileri farkı,

$$\Delta^2 f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i \quad (2.2)$$

n. mertebeden ileri farkı,

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i) = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i \quad (2.3)$$

birinci mertebeden geri farkı,

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad (2.4)$$

ikinci mertebeden geri farkı,

$$\nabla^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} \quad (2.5)$$

n. mertebeden geri farkı,

$$\nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1} \quad (2.6)$$

birinci mertebeden merkezi farkı,

$$\delta f_i = \delta f_{i+1/2} - \delta f_{i-1/2} \quad (2.7)$$

n. mertebeden merkezi farkı,

$$\delta^n f_i = \delta^{n-1} f_{i+1/2} - \delta^{n-1} f_{i-1/2} \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. İndisli notasyonla yapılan bu tanımlarda, h fark aralığını veya adım büyüklüğünü göstermek üzere

$$f_i = f(x)$$

$$f_{i+1} = f(x+h)$$

$$f_{i-1} = f(x-h) \quad (2.9)$$

$$f_{i+1/2} = f\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

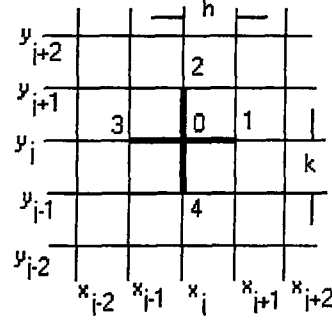
$$f_{i-1/2} = f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

dir.

2.1.1. Sonlu Farklar Yöntemi İle Statik Elektrik Alan Hesabı

SFY, tüm sınır koşullarının verilmesi ve incelenecek bölgenin kapalı bir bölge olması gerekmektedir. Bu yöntemle göre incelenecek bölge, öncelikle, dikdörtgen, kare, üçgen gibi şekillere sahip gözlerden oluşan bir ağ ile bölünür. Şekil 2.1' de, x-y düzleminde, kenarları x ve y eksenlerine paralel dikdörtgen gözlerden oluşmuş düzgün olmayan bir ağ gösterilmiştir. Yatay ve düşey çizgilerin kesişim noktaları düğüm noktalarını oluşturur. Ağ, problemin tipine göre bölgenin bazı yerlerinde daha küçük ya da daha büyük gözlerden oluşabilir. Daha sonra ağ üzerindeki her bir düğümün potansiyeli, komşu düğümün potansiyellerine bağlı olarak yazılır. Böylece bu işlem her düğüm için yapıldığında düğüm potansiyelleri için çözülmesi gereken bir lineer denklem takımı elde edilir.

Kartezyen koordinatlarda bir düğüme ilişkin potansiyel bağıntısını yazmak için; öncelikle Laplace denkleminin Taylor serisi yardımıyla fark denklemlerine dönüştürülmesi gerekir.



Şekil 2.1. Dikdörtgen gözlü sonlu farklar yöntemi ağı.

Kartezyen koordinat sisteminde Laplace denklemi,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dır.} \quad (2.10)$$

Buna göre Laplace denkleminin indisli notasyonla sonlu fark yaklaşımı,

$$\nabla^2 V_{i,j} = \frac{(V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j})}{h^2} + \frac{(V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1})}{k^2} = 0 \quad (2.11)$$

olur. Bağıntılarda; h, x yönündeki aralık ve k, y yönündeki aralıktır. Genelde problemin çözümünde kolaylık sağlaması bakımından $k = h$ seçilir (düzgün ağ). Bu durumda kartezyen koordinatlarda Laplace denkleminin sonlu fark yazılımı

$$\nabla^2 V_{i,j} = \frac{1}{h^2} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 4V_{i,j}) = 0 \quad \text{olur.} \quad (2.12)$$

Buradan

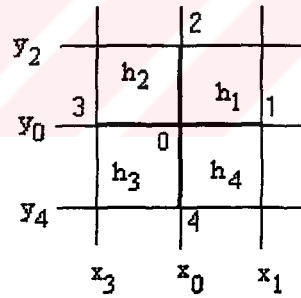
$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) \quad (2.13)$$

yazılabilir. Bu eşitlikten de görüldüğü gibi bizi özellikle birbirine komşu beş nokta ilgilendirir. Bu noktalar, örneğin 1,2,3 ve 4 ile gösterilen ve bir 0 noktasına komşu dört nokta olabilir. Bu noktaların $V(1)$, $V(2)$, $V(3)$ ve $V(4)$ potansiyellerinin verilen sınır koşullarından veya diğer hesap sonuçlarından

bilindiğini kabul edelim. Bölge içinde potansiyel sürekli olduğundan, herhangi bir (x,y) noktasındaki potansiyeli Taylor serisine açmak mümkündür. Bu nokta 0 noktası ile aynı nokta ise, x ve y değişkenleri cinsinden seri:

$$\begin{aligned}
V(x,y) &= V(x_0,y_0) + \frac{1}{1!} \left[(x-x_0)V_x(x_0,y_0) + (y-y_0)V_y(x_0,y_0) \right] \\
&+ \frac{1}{2!} \left[(x-x_0)^2 V_{xx}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)V_{xy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^2 V_{yy}(x_0,y_0) \right] \\
&+ \frac{1}{3!} \left[(x-x_0)^3 V_{xxx}(x_0,y_0) + 3(x-x_0)^2(y-y_0)V_{xxy}(x_0,y_0) \right. \\
&\left. + 3(x-x_0)(y-y_0)^2 V_{xyy}(x_0,y_0) + (y-y_0)^3 V_{yyy}(x_0,y_0) \right] + R_{xy}(x_0,y_0) \quad (2.14)
\end{aligned}$$

olacaktır. (x_0,y_0) düğümü civarında Taylor serisi şeklinde yazılan $V(x,y)$ potansiyel eşitliğinde, 3. dereceden türevleri içeren terimler küçük bir h uzunluğunun üç veya daha büyük kuvvetleri ile çarpılacağına ihmal edilirse, denklem (2.14) yeterli doğrulukla yeniden yazılabilir. Böylece 1,2,3 ve 4 düğümlerinin potansiyelleri $(x-x_0)$ ve $(y-y_0)$ küçük uzunlukları yerine h_1, h_2, h_3 ve h_4 değerleri yazılarak aşağıdaki denklemlerle verilebilir. Şekil 2.2'de düzgün olmayan ağ gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Düzgün olmayan ağ.

$$\begin{aligned}
V(1) &= V(x_0,y_0) + h_1 V_x(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h_1^2 V_{xx}(x_0,y_0) \\
V(2) &= V(x_0,y_0) + h_2 V_y(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h_2^2 V_{yy}(x_0,y_0) \\
V(3) &= V(x_0,y_0) + h_3 V_x(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h_3^2 V_{xx}(x_0,y_0) \\
V(4) &= V(x_0,y_0) + h_4 V_y(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h_4^2 V_{yy}(x_0,y_0)
\end{aligned} \quad (2.15)$$

Son olarak dielektrik sabitleri (ϵ) farklı ortamlardan oluşmuş sabitleri alanın yönüne bağlı olmayan (izotrop) ortamlarda hesap yapmada esas olarak bir zorluk yoktur. Şimdi dielektrik sabitleri ϵ_1 ve ϵ_2 olan iki farklı yalıtkan ortamın arakesitinde 1, (x_0, y_0) ve 3 düğüm noktaları ve ϵ_1 'li ortamda 2 düğümü, ϵ_2 'li ortamda da 4 düğümünün olduğunu varsayalım. Sınır yüzeyde (arakesitte) potansiyelin sürekli olduğu düşünülürse, deplasman vektörünün yalnızca normal bileşeni söz konusudur. Bileşke alan, iki laplace alanın birleşiminden oluşturulabilir.

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{4} \left[V(1) + V(3) + \frac{2\epsilon_1}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} V(2) + \frac{2\epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} V(4) \right] \quad (2.16)$$

Farklı ϵ 'lu bölgelerin arakesitlerinin yeni sınırlar olduğu, eğer bir kere ağı düğümleri bu arakesitelere uymuyorsa, arakesit yakınında düzgün olmayan dikdörtgenlerin ortaya çıkacağı söylenebilir (Kalenderli, 1994)

2.2. Sınır Elemanları Yöntemi (BEM)

Boundary Element Method (BEM)

Sınır Elemanları yöntemi (BEM), Sonlu Elemanlarda kullanılan tipte enterpolasyon fonksiyonu ve sınır denklemleri üzerine kurulan bir redüksiyon tekniğidir. SEY ve SFY gibi domen tipi tekniklere göre birçok üstünlüklere sahiptir. Yöntemin ana karakteristiği, problem boyutunun daha küçük olması sebebi ile, küçük denklemleriyle işlem yapması ve problemin çözümü için daha az dataya ihtiyaç göstermesidir. Yöntemin doğruluğu, kullanılan etki fonksiyonlarının özel tipinden dolayı Sonlu Elemanlardan daha büyüktür; çünkü bu yöntem bütün bilinmeyenler için aynı dereceden doğruluğa sahip karışık bir formülasyona dayanır. Bir sınır çözümü, Green temel denklemlerinin uygulanmasıyla elde edilen etkin fonksiyonlarla formülize edilir. En basit formda Sınır elemanları terimi, bölgenin dış yüzeyinin elemanlara bölündüğü bir yöntemdir. Bu elemanlar, Sonlu elemanlar gibi farklı tiplerde olabilir (Brebbia, 1980).

Bilim ve mühendislikte çok önemli pratik problemler, sınır değer problemlerine ilişkin matematiksel modellerle çözülebilirler. Bu problemler, bir C sınırıyla kuşatılan R bölgesi ile temsil edilirler. R' deki problemin fizikini kısmi diferansiyel bir denklemler ve bu denklemler C sınırındaki sınır şartlarına veya kesin sınırlamalara bağımlı çözümlere sahiptir. Örnek olarak, statik elektrik alanında bu kısmi diferansiyel denklemler, $\nabla\phi = 0$ Laplace denklemleri şeklinde olabilir. Burada ϕ , potansiyel olup, C üzerindeki her noktada belirli bir değere sahiptir. Eğer R üç boyutlu bir bölge ise C, bir sınır yüzeydir; iki boyutlarda R, düzlemsel bir bölgedir ve C, bu bölgeyi sınırlayan bir sınır çizgisidir.

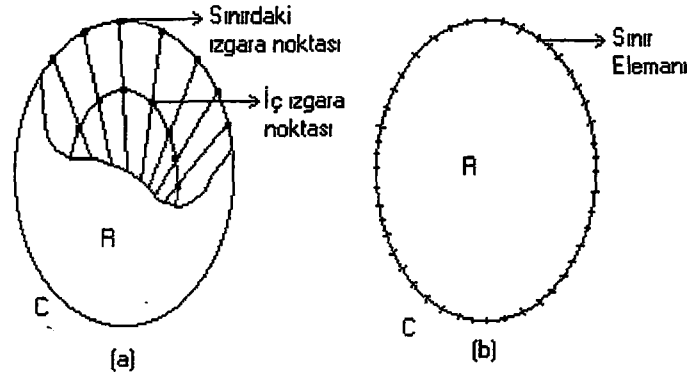
Herhangi bir sınır değer probleminde sınırlamalar, sadece sınırda ilgili parametrelerin bazısında bulunur, diğerleri problemin çözüm kısmı olarak ortaya çıkar. Eğer C sınırında yeterli sınırlama var ise, o zaman problemin çözümü bu sınırlamalarla sağlanır.

Bir sınır değer probleminin analitik çözümü; R bölgesinin homojen (yani malzeme özellikleri koordinatlardan bağımsız), geometrinin basit, C' deki sınır şartlarının relatif olarak doğru ve kısmi diferansiyel denklemlerin lineer olması durumunda kolayca elde edilebilir. Ancak pratikte karşılaşılan problemler için analitik çözümler bulunamaz. Diferansiyel denklemin lineer olduğu durumlarda bile R bölgesi homojen değildir, geometri düzgün olmaz ve sınır şartlarını basit matematiksel fonksiyonlarla ifade etmek zordur. Böyle durumda sayısal bir yöntem kullanarak yaklaşık çözüm bulunması gerekir.

Sınır değer problemlerinin çözümü için, sayısal yöntemler iki ayrı sınıfa ayrılabilir; R bölgesinin tamamını elde etmek isteyen yaklaşımlar ve sadece C sınırını elde etmek isteyen yaklaşımlar. SFY ve SEY ilk gruba, BEM ikinci gruba aittir. Sayısal yöntemlerin bu iki tipi arasındaki farkın anlaşılması için, SEY ile BEM 'in karşılaştırılması gerekir. Bu amaçla C çizgisi ile sınırlanan iki boyutlu R bölgesinin iki ayrı durumu şekil 2.3' de gösterilmiştir. SEY, bütün R bölgesinin şekil 2.3.a' daki gibi elemanlara ayrıştırılmasını ister. Bunun sebebi, elemanların birleşme noktaları olan düğümlerde, problemin çözümünü belirlemektir. Düğümler arası çözüm, değerlerdeki değerlerle basit olarak yaklaşık bir formda elde edilir. Parametrelerin bilinmediği cebirsel lineer denklem sistemini esas alan kısmi diferansiyel denklemin bu yaklaşık çözümüne ilişkin olarak R' deki düğümlere ait değerler C sınırı üzerindeki veya iç bölgedeki düğüm noktalarında bilinen değerlerle ifade edilir. Denklem sistemi büyük, fakat seyrek; yani çok sayıda bilinmeyen parametre vardır ve bundan dolayı çok sayıda lineer denklem vardır. Her bir denklem kesin olarak bilinmeyen parametrelerin sadece birkaçına sahiptir.

BEM ' de sadece sınırı elemanlara ayrılır (Şekil 2.3.b). Sayısal çözüm C' deki herbir elemanda belli sınır şartlarının yeterli olması durumunda, basit tekil problemler için elde edilmiş olan analitik çözümler üzerine kurulur.

Tekil çözümlerin herbiri R ' deki kısmi diferansiyel denklemleri sağladığından dolayı, R ' yi bölmelemeye gerek yoktur. Aynı sınır problemini çözmek için elde edilecek denklem sayısı SEY' e göre daha azdır, fakat denklemler daha seyrek değildir. BEM özellikle dış problemler için daha caziptir.



Şekil 2.3. Problem bölgesinin elemanlara ayrılması. a) SEY b) BEM

Problemin çözümünde karşılaşılan önemli bir sorun da ayrıştırma işleminde eleman sayısı ve bölmeleme sıklığının yeterli olup olmadığıdır. Sınır elemanları yaklaşımında, sınır boyunca eleman aralıklarına bağlı olarak hesaplanan sonuçların irdelenmesi amacıyla araştırma işlemlerini gerçekleştirmek çok kolaydır. SEY için benzer çalışmalar yapmak daha sıkıcı ve zordur. Çünkü bu durumda tüm R bölgesine ilişkin ayrıştırma, tekrar çizilmelidir.

2.2.1. Çözüm Basamakları ve Matematiksel Formülasyon

Tarihsel olarak BEM iki ayrı ve paralel yolda gelişmiştir. Bunlardan biri fiziksel yaklaşım ve diğeri klasik potansiyel teori kavramına dayanan matematiksel incelemedir. Bu iki yaklaşım arasındaki fark şu şekilde açıklanabilir:

Fiziksel yaklaşımında taslak olarak ilk önce özel sınır şartları yeterli olan tekil özellikler çözülür ve bu tekil çözümlerle sınır parametrelerinin kalan kısmı toplanır, çünkü belirlenemeyen sınır parametreleri indirek olarak elde edilir. Bu prosedür, İndirek BEM olarak adlandırılır. Matematiksel yaklaşımında belli temel integral teoremleri herbir çizgi elemanında belirlenmiş parametrelerle doğrudan bilinmeyen sınır parametreleri ilişkisi kurularak elde edilen cebrik denklem sistemiyle başlangıç adımını elimine etmek için kullanılır. Bu prosedür ise, direk BEM olarak adlandırılır (Crouch and Starfield, 1983).

BEM ' in matematiksel olarak ifade edilmesinde, önce bir R bölgesi için $\phi(x_i)$ fonksiyonu tanımlanır (iki boyutlu problem için $i = 2$, üç boyutlu problem için $i = 3$). $\phi(x_i)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlayacak şekilde seçilmelidir.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.17)$$

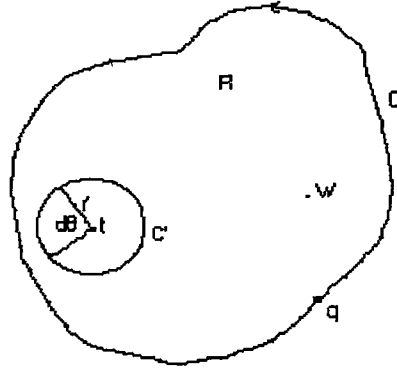
R bölgesi, C sınıрыyla çevrili olsun. Sınır şartları, sınırın bir kısmı veya tamamı boyunca $\phi(x) = f(x)$ olarak Dirichlet tipi; $\partial\phi(x)/\partial n = g(x)$ olarak Neumann tipi veya sınırın iki sınırın iki ayrı kısmında (c_1 ve c_2), $\phi(x) = f(x)$ ve $\partial\phi(x)/\partial n = g(x)$ olarak karışık tip şeklinde verilmiş olabilir. Burada $\partial/\partial n$ sınıra dik, dışa doğru normal türev operatörüdür.

R bölgesi içinde, düzgün ve non-singular skalar ϕ ve ψ gibi iki fonksiyon için Green teoreminden

$$\int_R (\phi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \phi) = \int_C \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dC \quad (2.18)$$

ifadesi yazılabilir. İki boyutlu durum için, belirlenmek istenen harmonik fonksiyon $\phi = \phi(t)$ olarak ve $r(t, w)$, bölgenin herhangi iki noktası arasındaki mesafe olmak üzere, Laplace denkleminin tekil çözümü $\psi = \log r(t, w)$ seçilirse, denklem (2.18) geçersiz olacaktır. Çünkü t, w ile çakıştığında ψ tekil olur. Bundan dolayı Şekil 2.4' de gösterildiği gibi t etrafında r' yarıçaplı küçük bir C' dairesi kurulur.

Bu durumda denklem (2.18), yeni bölge için geçerli olur. Ayrıca $\nabla^2 \phi$ ve $\nabla^2 \psi$ daima sıfır olduğundan denklem (2.18) şöyle yazılabilir.



Şekil 2.4. C' Sınırının Oluşturulması

$$\int_{C+C'} \left[\phi(q) \frac{\partial \log r(t, q)}{\partial n} - \log r(t, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \right] ds(q) = 0 \quad (2.19)$$

Burada ds , C sınırının diferansiyel parçasıdır. C' üzerindeki integrallerin $r' \rightarrow 0$ 'a giderken limitleri alınırsa

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{C'} \phi(q) \frac{\partial \log r'(t, q)}{\partial r} \cdot r'(t, q) d\theta(q) = 2\pi\phi(t) \quad (2.20)$$

$$\lim_{r' \rightarrow 0} \int_{C'} \log r'(t, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \cdot r'(t, q) d\theta(q) = 0 \quad (2.21)$$

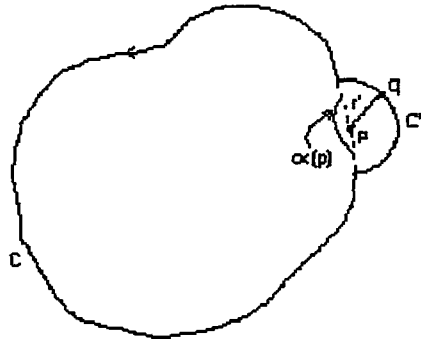
olur. Denklem (2.17), (2.18) ve (2.19) birleştirilerek

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\phi(q) \frac{\partial \log r(t, q)}{\partial n} - \log r(t, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \right] ds \quad (2.22)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem, kendi sınır değerleri ve normal türevinin sınır değerleri vasıtasıyla keyfi bir harmonik fonksiyonu ifade eder. İyi konumlu bir sınır değer probleminde denklem (2.22) için gerekli dataların yarısı verilir, diğer yarısı ise BEM ile bulunur. Aksi takdirde bu denklem çözümü vermez.

P , sınırda bir nokta olsun, P etrafında küçük bir yarı çember çizilerek küçük bir d daire çizilerek yeni bir C'' sınırı elde edilir (Şekil 2.5). Denklem (2.22)' den

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{C+C''} \left[\phi(q) \frac{\partial \log r(p, q)}{\partial n} - \log r(p, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \right] ds(q) \quad (2.23)$$



Şekil 2.5 C'' Sınırının Oluşturulması

$r' \rightarrow 0$ 'a giderken C'' üzerindeki integrallerin limitleri alınarak

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C'} \phi(q) \frac{\partial \log r'(p, q)}{\partial n} \cdot r'(p, q) d\theta(q) = (2\pi - \alpha(p))\phi(p) \quad (2.24)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C'} \log r'(p, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \cdot r'(p, q) d\theta(q) = 0 \quad (2.25)$$

bulunur. Burada $\alpha(p)$, P 'nin iç açısıdır. Belirlenen bölgede düzgün bir ϕ dağılımı gözönüne alınırsa

$$\alpha(p) = \int_C \frac{\partial \log r(p, q)}{\partial n} ds(q) \quad (2.26)$$

olur. Denklem (2.23), (2.24) ve (2.25) birleştirilerek, BEM ' in temel denklemi elde edilir.

$$\phi(p) = \frac{1}{\alpha(p)} \int_C \left[\phi(q) \frac{\partial \log r(p, q)}{\partial n} - \log r(p, q) \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} \right] ds(q) \quad (2.27)$$

Denklem (2.27), $\phi(p)$ harmonik fonksiyonu ve $\partial \phi(p)/\partial n$ fonksiyonunun normal türevinin sınır değerleri arasında lineer bir bağıntı verir. Bu nedenle BEM ' in temel yaklaşımı, denklem (2.27) deki bilinmeyen sınır datasını belirtmektir. Tüm sınır datası bilindikten sonra R içinde herhangi bir t noktasında $\phi(t)$, denklem (2.22) ile elde edilebilir (Wu, 1976).

2.3. Yük Benzetim Yöntemi (YBY)

(Charge Simulation Method)(CSM)

Yük Benzetim Yöntemi (YBY), çözümü sayısal olmakla beraber elektriksel alanın çözümsel olarak hesaplandığı bir yöntemdir. Yöntemin çözümü doğrudan olup iteratif değildir. Bu durum, uygulamada oldukça kolaylık sağlar ve yöntemin elektriksel alan hesaplarında kullanılması için bir üstünlük sağlar.

Elektriksel alanların hesabında çok etkin ve doğru bir sayısal yöntem olarak ortaya çıkan yük benzetim yöntemi, son yıllarda önemli gelişmeler kaydederek elektrik mühendisliğinde üç boyutlu ve çok

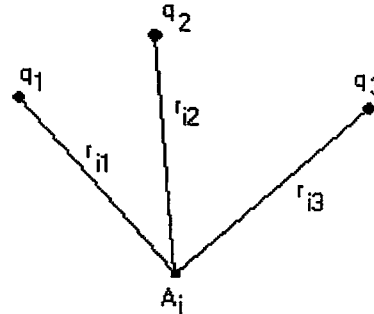
yalıtkanlı düzenlerin, aksenal simetrisi olmayan problemlerin ve sınır optimizasyonu problemlerinin çözümünde ve gazlarda boşanma olaylarının incelenmesinde başarıyla kullanılmaktadır.

YBY ile sayısal alan çözümleri için ilk çalışmalar Loeb ve arkadaşları Abou Seada ve Nasser tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda çubuk-düzlem ve silindirel iletken-düzlem elektrot sistemlerinin alan çözümleri bulunmuştur. Son olarak Singer, Steinbigler ve Weiss kapsamlı bir makalede YBY ' yi ve bu yöntemin aksenal (dönöl) simetriye sahip iki ve üç boyutlu alanlara uygulamasının ayrıntılarını vermiştir. O zamandan beri bu yöntem birçok yönden geliştirilerek çeşitli alan problemlerinin çözümünde kullanılmıştır.

YBY' nin temel ilkesi çok basittir ve elektroteknikteki toplama ilkesine dayanır. Elektrotlar üzerinde fiziksel olarak dağılmış elektrik yükleri yerine ayrı yükler konur. Bu yükler alan çözümü istenen yalıtkan bölgenin dışına, elektrotların içine veya elektrot gibi bir eşpotansiyel yüzey arkasına yerleştirilir ve " benzetim yükü " adını alır. Yüklerin değerleri sınır koşullarından belirlenir. Sınır koşulu olarak elektrot sınırı üzerinde alınan m adet sınır noktasının potansiyeli kullanılır. Buna göre eğer bir iletken bölge içerisinde herhangi bir tipten birçok ayrı yük (örneğin noktasal, çizgisel veya halkasal yük) varsa, alan çözümü istenen yalıtkan bölge içerisindeki veya elektrot sınırındaki herhangi bir A noktasındaki elektostatik potansiyel (A noktası herhangi bir yükün bulunduğu nokta olmadığı sürece), herbir yükün ayrı ayrı A noktasında oluşturduğu potansiyellerin toplamına eşittir. q_j , n adet ayrı yük ve V_i de bu bölge içerisinde herhangi bir A noktasındaki potansiyel olsun. Toplama ilkesine göre

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} q_j \quad (2.28)$$

dir. Burada p_{ij} " potansiyel katsayısı " adını alır ve değeri her yük tipi için Laplace veya Poisson denkleminin çözümünden belirlenir.



Şekil 2.6. Üç adet noktasal yük ve potansiyeli hesaplanacak olan A_i noktası.

Örneğin şekil 2.6.' da gösterilen serbest uzaydaki üç adet noktasal yükün (q_1, q_2 ve q_3) A_i noktasında oluşturdukları V_i potansiyeli,

$$V_i = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_{i1}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon r_{i2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon r_{i3}} = p_{i1}q_1 + p_{i2}q_2 + p_{i3}q_3 \quad (2.29)$$

bağıntısıyla verilebilir. Burada r_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$) j. yük ile A_i noktası arasındaki uzaklıktır ve değeri yüklerin ve A_i noktasının koordinatlarından yararlanılarak hesaplanır. ϵ ise yalıtkan ortamın dielektrik sabitidir. Eğer A_i noktası elektrot yüzeyi üzerinde alınmış bir nokta ise bu noktaya "sınır noktası" adı verilir ve bu noktanın potansiyeli, elektrot potansiyeli olan V_e ' ye eşittir. Böylece, elektrot potansiyeli bilindiğine göre m adet sınır noktası için potansiyel bağıntıları yazılarak n adet bilinmeyen benzetim için m adet denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{m1} & P_{11} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

YBY' nin temel bağıntısı olan denklem (2.30) genellikle simetrik bir denklem sistemi değildir. Bu denklem sistemi çözülerek q yüklerinin değerleri belirlenir. Bu yüklerle denklem (2.28)' den yalıtkan bölge içerisindeki herhangi bir noktanın potansiyeli ve elektrik alan şiddeti kolaylıkla hesaplanabilir.

2.3.1. Tek Yalıtkanlı Sistemler İçin Yük Benzetim Yöntemi

Tek yalıtkanlı bir elektrot sisteminde, potansiyelleri bilinen N adet elektrot (iletken) bulunduğunu varsayalım. Böyle bir elektrot sisteminin alan dağılımı YBY ile incelenirken yukarıda açıklandığı gibi iletkenlerin içine veya alanı incelenecek bölgenin dışına n adet benzetim yükü yerleştirilir. Yüklerin tipi ve yerleri için kabul yapılır. Yük tipi, elektrot sisteminin geometrik şekline uygun seçilir.

Benzetim yüklerinin değerlerini belirlemek için elektrot yüzeyi üzerinde m adet sınır noktası seçilir. Sınır koşulu olarak herhangi bir sınır noktasında bütün benzetim yüklerinin potansiyellerinin toplamından oluşan V_i potansiyelinin iletkenin V_e potansiyeline eşit olması gerekir. Sınır noktalarının sayısı benzetim yüklerinin sayısına eşit ($m = n$) alınır. Buna göre yük değerleri:

$$[P]_{n,n} [q]_{n,1} = [V]_{n,1} \quad (2.31)$$

denkleminde bulunur. Burada $[p]$ = potansiyel katsayıları matrisi, $[q]$ = yüklerden oluşan sütun matrisi ve $[V]$ = sınır noktalarının potansiyellerinden oluşan sütun matrisidir. Yüklerin değeri belirlendikten sonra bu yüklerin, elektrot yüzeyinin her yerinde sınır koşullarını sağlayıp sağlamadığını kontrol etmek gerekir. Çünkü denklem (2.31) u çözmek için gerçek elektrot sistemi yerine yalnızca n adet ayrı sınır noktası kullanıldığından, elektrot yüzeyi üzerinde sınır noktaları dışındaki herhangi bir noktanın potansiyeli bu yüklerle hesaplandığında elde edilen potansiyel, gerçek elektrot potansiyelinden farklı olabilir. Bu nedenle, benzetim doğruluğunu belirlemek için elektrot yüzeyinde sınır noktaları dışında, potansiyeli bilinen belirli sayıda “sınır noktası” nda denklem (2.28) ile potansiyel hesabı yapılır. Elde edilen potansiyellerle bilinen sınır potansiyelleri (elektrot potansiyeli) arasındaki fark benzetimin doğruluğu için bir ölçüdür.

Eğer hesaplanan sınır noktası potansiyelleri ile o noktadaki elektrot potansiyelleri arasındaki fark kabul edilebilir değerden büyükse aşağıdaki gibi değişkenlerden bir veya birkaçının değiştirilmesiyle hesaplamalar yinelenerek yeni yük değerleri belirlenir. Değişkenler:

1. Benzetim yüklerinin sayısı,
2. Benzetim yüklerinin yerleri,
3. Benzetim yüklerinin tipi,
4. Sınır noktalarının yerleri.

Bu şekilde uygun yük değerleri elde edilir edilmez bu yüklerle elektrotlar dışındaki yalıtkan bölge içindeki herhangi bir noktanın potansiyeli ve elektriksel alanı toplama ilkesi ile çözümsel olarak kolayca hesaplanabilir. Potansiyel, denklem (2.28) in çözülmesiyle hesaplanırken elektriksel alan şiddeti, bu büyüklüğün çeşitli doğrultulardaki bileşenlerinin toplanmasıyla hesaplanır. Örneğin üç boyutlu koordinat sisteminde herhangi bir C_i noktasındaki E_i elektriksel alanı

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial x} q_j \right] \vec{i}_x + \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial y} q_j \right] \vec{i}_y + \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} q_j \right] \vec{i}_z \\ &= \left[\sum_{j=1}^n (f_{ij})_x q_j \right] \vec{i}_x + \left[\sum_{j=1}^n (f_{ij})_y q_j \right] \vec{i}_y + \left[\sum_{j=1}^n (f_{ij})_z q_j \right] \vec{i}_z \end{aligned} \quad (2.32)$$

bağıntısıyla hesaplanır. Burada $(f_{ij})_x$, $(f_{ij})_y$, $(f_{ij})_z$ katsayıları “alan katsayıları” adını alır. \vec{i}_x , \vec{i}_y , \vec{i}_z ise sırasıyla x,y ve z doğrultularındaki birim vektörlerdir.

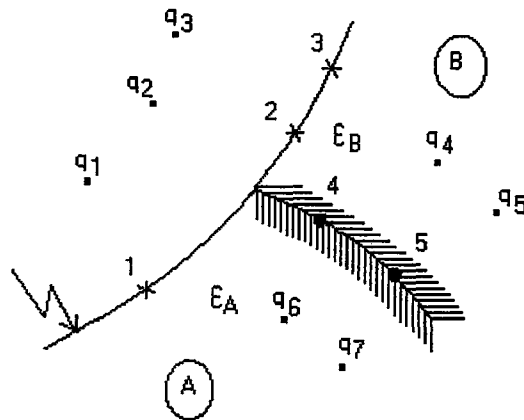
Birçok durumda bir iletken sistemi ile sıfır potansiyelli bir sonsuz düzlem arasındaki elektriksel alanın incelenmesi gerekir. Böyle durumlarda sözkonusu düzlem “görüntü yükleri” nin başlangıcı olarak alınıp hesaba katılır. Eğer elektrot sisteminde potansiyeli bilinmeyen “serbest elektrotlar” varsa denklem (2.31) her bir serbest elektrodun üzerindeki iç yüklerinin toplamının sıfır olduğunu ifade eden ek bir koşulu içerecek şekilde değiştirilir. Eğer serbest elektrot bilinen bir yüke sahipse iç yüklerin toplamı bu yük değerine eşit alınır (Singer et-al, 1974).

2.3.2. Çok Yalıtkanlı Sistemler İçin Yük Benzetim Yöntemi

Birden çok yalıtkanlı oluşan bir sistem için YBY ile elektriksel alan hesapları biraz karmaşıklaşmaktadır. Bunun sebebi, gerilim altındaki bir yalıtkan içerisinde dipollerin ortaya çıkmasıdır. Bu yalıtkanlı dipoller elektriksel alan tarafından yeniden dizilirler. Bu yük dizilişinde dipollerin karşılıklı yük etkileri, yalıtkanın iç kısmında birbirini yok ederken yalıtkanın yüzeyinde bir yüzeysel yük oluşmasına sebep olurlar. Bu yüzden elektrotların benzetiminden başka, yalıtkanlar arasındaki sınırlarında ayrık yüklerle benzetiminin yapılması gerekir. Bunun daha önce göz önüne alınan durumlardan sadece iki önemli farkı vardır:

1. Genel olarak, yalıtkanlar arası sınır bir eş potansiyel yüzey değildir.
2. Denklem sisteminin oluşturulabilmesi için yalıtkanlar arası sınırın her iki tarafında da elektriksel alan hesaplanabilmelidir.

Yöntemin uygulanmasını anlatmak için, şekil 2.7’de gösterildiği gibi az sayıda benzetim yükünün kullanıldığı iki yalıtkanlı basit bir örnek seçilmiştir.



Şekil 2.7. Çok yalıtkanlı bir sistemin benzetimi

Elektrot üzerinde n_E adet sınır noktası ve elektrot içinde aynı sayıda yük alınmıştır. Bunlardan n_{EA} adedi A yalıtkanı tarafındadır. (1 numaralı sınır noktası) ve $n_E - n_{EA}$ adedi ise B yalıtkanı tarafındadır. (2 ve 3 numaralı sınır noktaları). Burada n_E adet yük, her iki ortamdaki yani hem A yalıtkanındaki hemde B yalıtkanındaki potansiyellerin ve elektrikselsel alan şiddetlerinin hesabında kullanılır. Yalıtkanların ara kesitinde n_B adet sınır noktası (4 ve 5 numaralı sınır noktaları) ile B yalıtkanında n_B adet yük (4 ve 5 numaralı yükler, bunlar A yalıtkan için geçerlidir) ve A yalıtkanında n_B adet yük (6 ve 7 numaralı yükler, bunlarda B yalıtkanı için geçerlidir) vardır. Toplam olarak $n_T = n_E + n_B (= 5)$ adet sınır noktası ve $n_q = n_E + 2n_B (= 7)$ adet yük vardır.

Benzetim yüklerinin belirlenmesi için gerekli denklem sistemi, sağlanması gereken sınır koşullarından yararlanılarak oluşturulur:

1. Elektrot ile A yalıtkanı arasındaki sınır noktasının (1 numaralı noktanın) potansiyeli V_e olmalıdır. (V_e elektrot potansiyeli)

$$\sum_{j=1}^{n_E+n_B} p_j q_j + \sum_{j=n_E+1}^{n_E+2n_B} p_j q_j = V_e \quad (2.33)$$

(1..3) (4..5)

2. Elektrot ile B yalıtkanı arasındaki sınır noktalarında da potansiyel V_e olmalıdır (2 ve 3 numaralı sınır noktaları).

$$\sum_{j=1}^{n_E} p_j q_j + \sum_{j=n_E+n_B+1}^{n_E+2n_B} p_j q_j = V_e \quad (2.34)$$

(1..3) (6..7)

3. Yalıtkanların ara kesiti üzerindeki sınır noktalarında potansiyeller bilinmemektedir, fakat herbir sınır noktası için A yalıtkanındaki (V_A) ve B yalıtkanındaki (V_B) potansiyellerin eşit ($V_A = V_B$) olması koşulundan:

$$\sum_{j=1}^{n_E} p_j q_j + \sum_{j=n_E+n_B+1}^{n_E+2n_B} p_j q_j = \sum_{j=1}^{n_E} p_j q_j + \sum_{j=n_E+1}^{n_E+n_B} p_j q_j \quad (2.35)$$

(1..3) (6..7) (1..3) (4..5)

yazılabilir . Buda basitleştirilerek

$$- \sum_{j=1n_B+1}^{n_E+n_B} p_j q_j + \sum_{j=n_E+n_B+1}^{n_E+2n_B} p_j q_j = 0 \quad (2.36)$$

(4...5) (6...7)

elde edilir.

4. P_j , verilen bir sınır noktasındaki potansiye j yükün etkisini gözönüne alan bir katsayıdır. Benzer şekilde f_j de j . yükün verilen bir sınır noktasındaki alan şiddeti vektörünün yalıtkan sınırına dik (normal) bileşenine katkısını gösterir. O zaman, yalıtkanların ara kesitindeki sınır noktalarında B yalıtkanındaki alan şiddetinin normal bileşeni, A yalıtkanındakinden ϵ_B defa daha büyük olmalıdır, buna göre

$$D_{nA} = D_{nB} \rightarrow \epsilon_B E_{nB} = \epsilon_A E_{nA}$$

$$\epsilon_B \left[\sum_{j=1}^{n_E} f_j q_j + \sum_{j=n_E+1}^{n_E+n_B} f_j q_j \right] = \epsilon_A \left[\sum_{j=1}^{n_E} f_j q_j + \sum_{j=n_E+1}^{n_E+2n_B} f_j q_j \right] \quad (2.37)$$

(1...3) (4...5) (1...3) (6...7)

veya

$$(\epsilon_B - \epsilon_A) \sum_{j=1}^{n_E} f_j q_j + \epsilon_B \sum_{j=n_E+1}^{n_E+n_B} f_j q_j - \epsilon_A \sum_{j=n_E+n_B+1}^{n_E+2n_B} f_j q_j \quad (2.38)$$

(1...3) (4...5) (6...7)

dir. Bu örnekte, 4' ten 7' ye kadar olan yükler A yalıtkanı sınırı için kullanılmış iken 1' den 3' e kadar olanlar elektrot için (4 ve 5) seçilmişken 1' den 3' e kadar olan sınır noktaları elektrot üzerinde seçilmiştir.

Verilen bir sınır noktasındaki denklemler yazılırken sınır noktasının üzerinde bulunduğu yalıtkan içerisindeki yükler gözönüne alınmaz. Örneğin şekil 2.7.' de 1 ile gösterilen sınır noktasındaki potansiyel sadece 1' den 5' e kadar olan yüklerin oluşturduğu potansiyellerin toplanmasıyla hesaplanır. Benzer şekilde, B yalıtkanı tarafından bakıldığında 5 ile gösterilen sınır noktasındaki potansiyel ve elektriksel alan şiddeti de sadece 1' den 3' e ve 6' dan 7' ye kadar olan yüklerin oluşturduğu potansiyellerin toplamı ile hesaplanır. Böylece elde edilen $n_E + 2 n_B (= 7)$ adet lineer denklem aynı sayıda bilinmeyen yükün hesabı için kullanılır.

Bu örnekten de görüldüğü gibi, çok yalıtkanlı sistemlerin benzetiminin daha karmaşık olduğu açıktır. Üstelik yalıtkan sınırlar daha karmaşık bir yapıya sahip olduğu zaman böyle bir benzetimin doğruluğu da kötüleşmektedir.

2.3.3. Benzetim Yüğü Tipleri

YBY ' nin uygulamasının başarılı olabilmesi için, diğer etkenlerin yanısıra uygun tipte benzetim yüğü seçilmesi de önemlidir. YBY ' in kullandığı ilk çalışmalarda noktasal yüğüler, sonsuz uzunlukta ve yarısız uzunlukta çizgisel yüğüler kullanılmıştır. Singer ve arkadaşları yaptıkları yoğunluğu periyodik olarak değişen halkasal yüğüleri ve sonlu çizgisel yüğüleri kullanmışlardır. Son yıllarda daha başka yüğü tiplerinin de kullandığı çalışmalara raslanmaktadır. Bunlar arasında eliptik silindirselsel yüğüler, küresel yüğüler, düzlemsel yüğüler, disk tipi yüğüler, sabit yüğü yoğunluklu halkasal yüğüler, hacimsel yüğüler, tabaka ve halka şeklinde düzlemsel yüğüler ve değişken yoğunluklu çizgisel yüğüler sayılabilir.

Herhangi bir tip benzetim yükünü kullanmak için potansiyel ve alan katsayılarının bilinmesi gerekir. Bu katsayılara ilişkin bağıntılar, yukarıda sayılan yüğü tipleri için literatürde verilmiştir. Genelde noktasal ve çizgisel yüğülerin potansiyel ve alan katsayıları hesaplama süresi az olan basit çözümsel bağıntılarla verilebilir.

Örneğin noktasal yüğü için p potansiyel katsayısı ve f alan katsayıları;

$$p = (4\pi\epsilon)^{-1}$$

$$f_x = (x - a)(4\pi\epsilon^3)^{-1}$$

$$f_y = (y - b)(4\pi\epsilon^3)^{-1}$$

$$f_z = (z - b)(4\pi\epsilon^3)^{-1}$$

(2.39)

dir. Sonsuz çizgisel yüğü için p potansiyel katsayısı ve f alan katsayıları;

$$p = (2\pi\epsilon)^{-1} \ln (r_0/r)$$

$$f_x = (x - a)(2\pi\epsilon^2)^{-1}$$

$$f_y = (y - b)(2\pi\epsilon^2)^{-1}$$

$$f_z = (z - b)(2\pi\epsilon^2)^{-1}$$

(2.40)

dir. Burada r_0 , sıfır potansiyelli en yakın nokta ile yük arasındaki uzaklıktır. Bu bağıntılarda görüntü yüklerinin etkisi gözönüne alınmamıştır.

Daha karmaşık şekilli yük tipleri için potansiyel ve alan katsayılarının, zorunlu olarak sayısal bir yöntemle hesaplanması gerekebilir. Diğer taraftan elektrot sisteminin geometrik şekline uygun karmaşık şekilli yük tipleri kullanılırsa daha az sayıda yükle, verilen bir sistemin benzetimi yapılabilir. Bu yüzden, basit olanların yerine karmaşık yük tipleri kullanılırsa, bilgisayar için gerekli bellek ve hesaplama süresi daha az olabilir. Genelde yüksek gerilim sistemlerinin çoğunun benzetimi, temel yük tipleri yani noktasal, çizgisel ve halkasal yükler veya bunların uygun bileşkeleri kullanılarak başarılı bir şekilde yapılabilir (Malik, 1989).

Karmaşık yük tiplerinin aşağıdaki durumlarda kullanılması önerilir:

1. Benzetim yüklerinin sayısını ve böylece denklem sistemini küçültmek için,
2. Eksenel simetrik ve simetrisiz üç boyutlu problemlerin benzetimi için,
3. Çok yalıtkanlı sistemlerin hesaplanması için,
4. İnce elektrotlu sistemleri modellemek için,
5. Keskin uçları bulunan elektrotların benzetimi için,

Genelde kullanılacak benzetim yükü tipinin seçimi elektrot sisteminin karmaşıklığına, var olan hesaplama araçlarına ve kişisel deneyimlere bağlıdır.

2.4. Monte Carlo Yöntemi (MCY)

Monte Carlo Method (MCM)

İstatistiksel kökenli bir yöntem olan Monte Carlo Yöntemi (MCY) bir noktanın potansiyelini, bir anda büyük yaklaşım fonksiyonları kullanmaksızın dolayısı ile az işleme ve az bilgisayar belleği kullanarak kısa sürede hesaplama imkanı veren bir yöntemdir. Bu yöntem tüm problemi çözmeksizin alt bölgenin incelenmesine imkan verir. Bu kısımda, temel MCY ile sınırlarda potansiyel değerleri verilen yani Dirichlet tipi sınır koşullarına sahip bir bölge içinde Laplace denkleminin sayısal olarak çözümü açıklanmıştır. Bununla, elektrostatik alan problemlerinin çözümünde farklı bir seçenek

sunmak, bir yöntemin uygulanmasında kullanabilecek farklı yollardan örnekler vermek ve bir problemin istatistiksel yaklaşımla nasıl çözüleceğini göstermek amaçlanmıştır.

MCY, rasgele yürüyüş ilkesine dayanır. Bu yöntemle bir noktanın potansiyeli, herbiri bu noktadan başlayan ve sınırlarda son bulan belli sayıda rasgele yürüyüş ile kestirilir. Bu rasgele yürüyüşleri gerçekleştirebilmek için rasgele sayılara ihtiyaç vardır. Rasgele sayılar değişik yöntemler kullanılarak elde edilebilir (Sadıku, 1990). Rasgele sayılar bir bilgisayarın rasgele sayı üretiminden yararlanılarak elde edilebilir. Elde edilen bu sayılar gerçekte rasgele sayılar olmayıp uzun bir dizinin elemanlarıdır.

Potansiyel teorisi ile rasgele yürüyüş arasındaki ilişki, ilk olarak 1944' te Kakutani tarafından gösterilmiştir. Daha sonra ihtimale dayanan potansiyel teorisi olarak adlandırılan bu teori, elektrik mühendisliği de dahil birçok alana uygulanmıştır. Yöntemde kullanılan farklı rasgele yürüyüş türleri farklı MCY'lerinin ortaya çıkmasına yol açmıştır. Burada en tanınmış MCY' lerinden, sabit ve serbest rasgele yürüyüşlü MCY' leri hakkında bilgi verilecektir.

2.4.1. Sabit Rasgele Yürüyüşlü MCY

Sabit rasgele yürüyüşlü MCY' nde rasgele yürüyüşler sabit uzunluktaki adımlarla ve koordinat eksenlerine paralel olarak yapılır. Yöntem, Laplace denklemini çözmek için kullanılabilir. Dirichlet tipi sınır koşullarına sahip bir bölge için Laplace denklemi

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.41)$$

ve bölgenin sınırında $V = V_p$ yazılabilir.

Sabit rasgele yürüyüşlü MCY işleme, bölgeyi düzgün (kare gözlü) bir ağa bölerek başlanır ve ∇^2 yerine sonlu fark eşdeğeri alınır. Şekil 2.8' den görüldüğü gibi kare gözlerden oluşan bir ağın herbir kare gözünün kenar uzunluğu h olarak alınırsa, V ' nin x ' e göre ileri merkezi farklarla ikinci mertebe türevleri yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{V(x+h,y) - V(x,y)}{h} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{V(x+h,y) - 2V(x,y) + V(x-h,y)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

olur. Benzer biçimde y' ye göre merkezi farklarla ikinci türev için,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V(x,y+h) - 2V(x,y) + V(x,y-h)}{h^2} \quad (2.43)$$

yazılabilir. (2.42) ve (2.43) denklemleri (2.41) denkleminde kullanılırsa Laplace denkleminin sonlu farklar yazılımı elde edilir.

$$\left[\frac{V(x+h,y) + V(x-h,y) + V(x,y+h) + V(x,y-h) - 4V(x,y)}{h^2} \right] = 0 \quad (2.44)$$

Buradan $V(x,y)$ çözümlürse

$$V(x,y) = \frac{1}{4} [V(x+h,y) + V(x-h,y) + V(x,y+h) + V(x,y-h)] \quad (2.45)$$

veya

$$V(x,y) = P_{x+} V(x+h,y) + P_{x-} V(x-h,y) + P_{y+} V(x,y+h) + P_{y-} V(x,y-h) \quad (2.46)$$

elde edilir. Burada

$$P_{x+} = P_{x-} = P_{y+} = P_{y-} = \frac{1}{4}$$

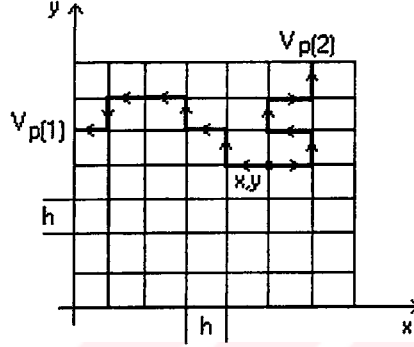
dir. (2.46) denklemini ihtimalli olarak değerlendirilebilir. Herhangi bir (x,y) noktasından rasgele hareket eden bir parçacığın sırasıyla (x,y) noktasından $(x+h,y)$, $(x-h,y)$, $(x,y+h)$ ve $(x,y-h)$ noktalarından birisine hareketi P_x ve P_y ihtimalleri ile belirlenir. Parçacığın hareket edeceği yönü belirlemek için, $0 < n < 1$ aralığında rasgele bir n sayısı üretmek gerekir. Üretilen n sayısı parçacığın hareket edeceği yönü aşağıdaki gibi belirtilir.

Parçacık, n rasgele sayısının değerine göre, (x,y) noktasından

- 1) $0 < n < 0.25$ aralığında ise $(x+h,y)$ noktasına;
- 2) $0 < n < 0.5$ aralığında ise $(x-h,y)$ noktasına;

- 3) $0 < n < 0.75$ aralığında ise $(x, y + h)$ noktasına;
 4) $0 < n < 1.0$ aralığında ise $(x, y - h)$ noktasına hareket eder.

Kare gözlü ağ yerine düzgün dikdörtgen gözlü bir ağ kullanıldığında, $P_x = P_x$, $P_{y+} = P_y$ ve $P_x \neq P_y$ olur. Bunun yanında, kübik gözlerden oluşan üç boyutlu bir problemde $P_{x+} = P_x = P_{y+} = P_y = 1/6$ olur. Her iki durumda da n raslantı sayısının değerine göre alt ihtimal aralıkları benzer şekilde tanımlanır.



Şekil 2.8 Düzgün bir ağda sabit rasgele yürüyüşler

Bir (x, y) noktasındaki potansiyeli hesaplamak için bu noktadan başlamak üzere rasgele yürüyen bir parçacık göz önüne alınır. Parçacık ağdaki düğümden düğüme, sınıra erişene kadar ilerletilir. Parçacık sınıra ulaştığında yürüme sona erer ve parçacığın ulaştığı noktadaki V_p sınır potansiyeli kaydedilir. Örneğin, birinci yürüme sonundaki V_p değeri $V_p(1)$ olarak kaydedilir (şekil 2.8). İşleme (x, y) başlangıç noktasından ikinci bir parçacık yola çıkarılarak devam edilir. Bu parçacığın sınıra ulaşip yürüyüşün sonlandığı sınırın V_p değeri de, şekil 2.8' de gösterildiği gibi, $V_p(2)$ olarak alınır. Bu işlem, (x, y) noktasından çıkan 3, 4, ..., N parçacıklar ile yürüyüşleri sonunda $V_p(3), V_p(4), \dots, V_p(N)$ değerleri belirlenerek sürdürülür. Bilinmeyen potansiyel değeri, bilinen potansiyel değerlerinden istatistiksel olarak kestirilir. Buna göre Dirichlet probleminin çözümü olan (x, y) noktasındaki potansiyelin beklenen değeri, $V_p(1), V_p(2), \dots, V_p(N)$ değerlerinden

$$V(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_p(i) \quad (2.47)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada N toplam yürüyüş sayısıdır. Hesabın doğru sonuca yakınsama hızı $N_1/2$ ile değişir. Bu nedenle daha doğru sonuçlar elde etmek için daha çok sayıda yürüyüş yapmak gerekir.

$V(x,y)$ 'yi belirtmek için (2.47) denklemini kullanmak yerine farklı bir yaklaşımda, rasgele yürüyüşlerin herhangi bir sınırdaki son bulma ihtimalini hesaplamaktır. Bu yolla, P_k bir rasgele yürüyüşün k sınırdaki son bulması ihtimali $V_p(k)$, k sınırın potansiyeli ve M sınır sayısı olmak üzere herhangi bir (x,y) noktasındaki potansiyeli

$$V(x,y) = \sum_{k=1}^M P_k V_p(k) \quad (2.48)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir.

Bütün ağdaki potansiyel değerlerinin benzer şekilde belirlendiği Sonlu Farklar yöntemi (SFY) (Finite Difference Method; FDM)'nin tersine MCY ile çözüm bölgesi içinde herhangi bir noktadaki potansiyel ayrı olarak hesaplanabilir. Yöntem basit ve güvenlidir, yalnızca sınır yüzeylerini gerektirir. Her yürüyüş dizisi yalnızca bir noktanın potansiyelini verir. Bu tür MCY' nin bir olumsuzluğu yavaş olmasıdır. Bu nedenle, bu yöntemin az sayıda potansiyel değerinin bulunması gerektiği durumlarda kullanılması tavsiye edilir.

2.4.2. Serbest Rasgele Yürüyüşlü MCY

Serbest rasgele yürüyüşlü MCY' nin ilkesi, potansiyel teorisinin “ Ortalama Değer Teoremi “ ne dayanır. Tamamı bölge içinde kalan, (x,y,z) merkezli, R yarıçaplı bir K küresi için potansiyel

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_s V(r) dS \quad (2.49)$$

dir. Bölge içinde herhangi bir kürenin merkezindeki potansiyel, küre yüzeyinde alınan potansiyelin ortalama değerine eşittir. İki boyutlu potansiyel değişimi için, $V(x,y)$;

$$V(x,y) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_l V(r) dl \quad (2.50)$$

dir. Burada integral (x,y) merkezli, R yarıçaplı bir çember boyunca alınmıştır. (2.49) ve (2.50) denklemlerinden;

$$V(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 V(r,\theta,\phi) dF dT \quad \text{veya} \quad (2.51)$$

$$V(x,y) = \int_0^1 V(r,\phi) dF$$

yazılabilir. Burada ;

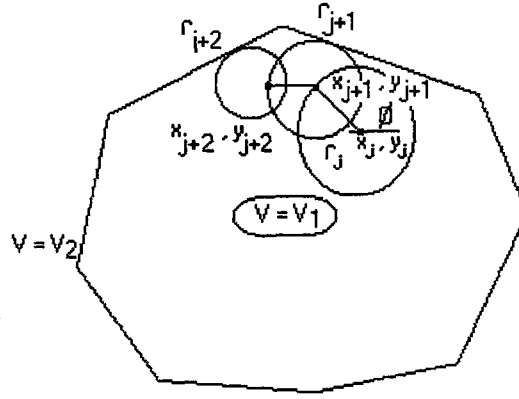
$$F = \frac{\phi}{2\pi}, \quad T = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \quad (2.52)$$

dır. θ ve Φ küresel koordinat değişkenleridir. F ve T fonksiyonları θ ve Φ ' ye karşılık düşen ihtimal dağılımları olarak göz önüne alınabilir. $dF / d\Phi = \text{sabit}$, $dT / d\theta = 1/2 \sin\theta$ olduğundan, bütün Φ açıları eşit ihtimalli, buna karşılık θ açıları için ihtimallerin değişken olduğu söylenebilir.

Serbest rasgele yürüyüşlü MCY, (4.49) ve (4.50) denklemlerinin uygulanmasına dayanır. İki boyutlu bir problemde, örneğin rasgele hareket eden bir parçacığın i . yürüyüşünde j . adımdan sonra (x_j, y_j) noktasında bulunduğu varsayılırsa, ($j+1$). adım şu şekilde atılır: önce, merkezi (x_j, y_j) noktasında olan ve r_j yarıçapı (x_j, y_j) noktası ile sınır arasındaki en kısa uzaklığa eşit olan bir çember çizilir. Φ koordinatı $0 < n < 1$ aralığında bir n rasgele sayısı ile ($0, 2\pi$) arasında düzgün olarak dağılmış bir raslantı değişkeni olarak $\Phi = 2\pi n$ bağıntısından hesaplanır. ($j+1$). adımdan sonra parçacık

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + r_j \cos\phi_j \\ Y_{j+1} &= Y_j + r_j \sin\phi_j \end{aligned} \quad (2.53)$$

noktasında bulunur ve bu durum şekil 2.9 ' de olduğu gibi gösterilebilir. Bir sonraki adım, merkezi (x_{j-1}, y_{j+1}) noktasında bulunan ve yarıçapı (r_{j+1}), (x_{j+1}, y_{j+1}) noktası ile sınır arasındaki en kısa uzaklığa eşit olan çemberin çizilmesi ile atılır. Bu işlem, birçok kere yinelenir. Yürüyüş, sınıra, önceden öngörülen küçük bir d uzaklığına yaklaşıncaya kadar sürer ve bu durumda sınır aşıldığı varsayılır. i . yolun sonunda $V_p(i)$ potansiyeli kaydedilir. Sonunda sabit rasgele yürüyüşte olduğu gibi herhangi bir (x, y) noktasındaki potansiyel N yürüyüşten sonra (2.44) denklemi kullanılarak bulunur. Ortalama değer teoreminin tekrarlanarak uygulanması, bilinmeyen potansiyel ile bilinen potansiyel arasındaki ilişkiyi verir.



Şekil 2.9 Serbest rasgele yürüyüşün gösterimi

Serbest rasgele yürüyüşlü Monte Carlo yöntemi ile yukarıda özetlenenlere benzer işlemler uygulanarak üç boyutlu problemlerde çözülebilir. (x_j, y_j, z_j) noktasından rasgele hareket edecek parçacık bir sonraki adımda r_j yarıçapı, (x_j, y_j, z_j) noktası ile sınır arasındaki en kısa uzaklığa eşit olan bir kürenin yüzeyi üzerinde yeni yerine gidecektir. Φ koordinatı, 0 ile 1 arasında rasgele bir sayı olan n ile 2π çarpılarak ($\Phi=2\pi n$) bulunur. θ koordinatı, 0 ile 1 arasında başka bir n raslantı sayısı alınıp

$$\theta = \arccos(1 - 2n) \quad (2.54)$$

bağıntısından bulunur. Böylece i . yürüyüşte $(j + 1)$. adımdan sonra parçacığın yeni yeri

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= X_j + r \cos \phi_j \sin \theta_j \\ Y_{j+1} &= Y_j + r \sin \phi_j \cos \theta_j \\ Z_{j+1} &= Z_j + r_j \cos \theta_j \end{aligned} \quad (2.55)$$

bağıntılarıyla hesaplanabilir. Son olarak ta yine

$$V(x, y, z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_p(i) \quad (2.56)$$

bağıntısı yardımıyla $V(x, y, z)$ bulunur. Serbest rasgele yürüyüşlü MCY'nde, hem adım uzunlukları hem de hareket yönleri sabit değildir. Bu büyüklükler serbest olarak değerler aldığından bu hareket serbest hareket olarak göz önüne alınır. Serbest yürüyüşte uzun bir atlayışta sabit yürüyüşteki birçok ara adımları geçilir. Sınıra ulaşmak için genelde birkaç adım yeterlidir, bu yüzden hesaplama sabit adımli yürüyüşten daha hızlıdır.

BÖLÜM 3

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

3.1. Giriş

Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), fiziksel matematiğin sınır değer problemlerine, yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan bir sayısal yöntemdir. Yöntem ilk olarak 1940'lı yıllarda önerilmiş 1950'li yıllarda uçak tasarımında kullanılmaya başlanmıştır. Bundan sonra yöntem geliştirilmiş ve yapı analizi ile ilgili problemlere çok yaygın olarak uygulanmaya başlanmıştır. Günümüzde, SEY mühendislik ve matematik problemlerinin çözümünde geniş uygulama alanına sahiptir.

SEY' in elektrik mühendisliğinde kullanılması ilk olarak Winslow ile 1965 yılında başlanmıştır. Bu yöntemin esası, karmaşık sınır koşulları nedeniyle tüm çözüm bölgesi için bir potansiyel fonksiyonu bulmanın mümkün olmadığı durumlarda, çözümün sonlu küçük elemanlar içinde aranmasına dayanır. SEY' de de diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi bir sistemin sonlu sayıdaki bilinmeyen büyüklüğün sistemin bilinen büyüklükleri cinsinden bulunması yolu izlenir. SEY kapalı sınırlarla tanımlanan bölgelerin çözümü için çok uygundur. Ancak bu yöntemin açık sınırlı alan problemlerine uygulanması bazı problemler çıkarır. Bunun sebebi, kaynaktan ve inceleme altındaki nesneden belirli uzaklıktaki bir mesafede alanın sıfır farzedilmesidir ve bu durum genellikle bir sıfır potansiyel sınırı sonsuz sınır şartına benzetilerek uygulanır.

Yöntemin elektromagnetik alan problemlerine uygulanması ilk olarak 1968'de yapılmıştır. SEY transformatörler, turbo alternatörler, çıkık kutuplu genaratörler, eddy akımları çeşitli izotropik ve anizotropik magnetik problemleri lineer indüksiyon motorları, elektrostatik problemler, YG teçhizatında potansiyel ve alan dağılımları gibi, değişik elektrik problemlerine uygulanmış ve tüm uygulama alanlarında malzeme ve teçhizatın optimum tasarımı için çözüme iyi bir yaklaşım sağlamıştır.

Elektromagnetik alan problemlerinin çoğu ya kısmi türevli ya da integralli denklemleri içerir. Kısmi türevli denklemler Sonlu Farklar ya da SEY ile çözülebilir. Yöntemin açıklaması öncelikle bağıntıları daha az karışık ve denklem sayısının çok olmadığı iki boyutlu Laplace tipi elektrik alanları ile ilgili olarak yapılacaktır.

3.2 Minimum Enerji İlkesi

SEY, ilgilenilen bir bölgenin tamamında enerji denklemini minimumlaştırma ilkesine dayanır. Bu bölgedeki alan Laplace ve Poisson tipinde bir elektrik veya magnetik alan olabilir. Şimdi iletkenliği ihmal edilen ve dielektrik sabiti alan doğrultusu olan bir dielektrik içinde (izotropik olmayan bir ortam) sürekli hal elektrostatik alanı ele alınsın. Bu durumda hiç bir uzaysal yük olmadıkça veya birikmedikçe, potansiyel çizgiler sınırlardan (metal elektrotlardan) başlayacaktır. Böyle Laplasyen bir alan için, kartezyen koordinat sisteminde bir V hacmi içinde depolanmış elektrostatik potansiyel enerji şu şekildedir:

$$W = \iiint_V \left[\frac{1}{2} \left\{ \epsilon_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \epsilon_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] dx dy dz \quad (3.1)$$

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ izotropik olmayan bir ortamın dielektrik sabitleridir ve $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$ olan izotropik bir ortamda bile farklı dielektrik malzemeler arasındaki sınırlarda dahi ϵ ' un tam değerinin değişebileceği akıldan çıkarılmamalıdır. Yukarıdaki (3.1) denkleminde $\epsilon |\nabla \phi|^2 / 2$ terimi birim $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ hacmindeki enerji yoğunluğu olduğu kolayca görülebilir. Potansiyel değişimin z eksenini boyunca sabit kaldığı iki boyutlu durumlarda, birim uzunluğa düşen enerji yoğunluğu ifadesi aşağıdaki yazılabilir.

$$\frac{W}{z} = w = \frac{\epsilon}{2} \iint |\Delta \phi|^2 ds \quad (3.2)$$

Enerji yoğunluğu bağıntısından yararlanarak enerjiyi minimum yapan potansiyel değerlerini bulmak için öncelikle katsayıları henüz bilinmeyen ve basit fonksiyonların toplamından oluşmuş bir $\phi(x,y)$ potansiyel yaklaşım fonksiyonunun tanımlanmış olması gerekir. Tanımlanacak bu potansiyel fonksiyonun bölge içinde sürekli olduğu ve sonlu sayıda türevi bulunacağı göz önünde tutulmalıdır.

Bir çözüm bölgesi içinde sınır koşullarını sağlayan birden fazla potansiyel fonksiyonu elde etmek imkanı vardır, ancak bunlardan bir tanesi

$$\nabla^2 V = \Delta V = 0 \quad (3.3)$$

Laplace denklemini sağlar ve bu fonksiyon tektir. Laplace denklemini sağlayan bu çözüm aynı zamanda bölge içindeki potansiyel enerjiyi minimum yapan çözümdür. Bunun tersi de söylenebilir, yani bölge içinde enerjiyi minimum yapan potansiyel çözümlü, Laplace denklemini sağlayan potansiyel çözümdür.

$$\begin{array}{ccc} \text{Minimum enerji koşulunu} & & \text{Laplace denklemini} \\ \text{sağlayan potansiyel fonksiyon} & \longleftrightarrow & \text{sağlayan potansiyel fonksiyon} \end{array}$$

Bu nedenle SEY' de Laplace denklemini çözmek yerine enerji denklemini minimum yapan bir potansiyel çözümünü bulmak yoluna gidilir.

3.3. Sınır Değer Problemleri

Sınır değer problemleri, fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesinde ortaya çıkmakta ve bunların çözümü fiziksel matematiğin önemli bir konusunu oluşturmaktadır. Tipik bir sınır değer problemi, bir Ω bölgesinde, bölgeyi kuşatan S sınırı üzerindeki sınır koşulları ile birlikte

$$L \phi = f \quad (3.4)$$

temel diferansiyel eşitliği ile tanımlanabilir. Burada L bir diferansiyel operatör, f uyarıcı veya kaynak fonksiyonu ve ϕ ise bilinmeyen büyüklüktür. Elektromagnetikte, böyle bir diferansiyel eşitlik, basit bir Laplace veya Poisson eşitliği olabilir. Bunun yanında sınır koşulları da, basit Dirichlet ve Neumann koşullarından, karmaşık empedans koşullarına kadar değişebilir.

Sınır değer problemlerinin mümkün olduğu kadar analitik yoldan çözülmesi arzu edilir. Bununla beraber, genellikle analitik çözüm çok az durumda elde edilebilir. Elektromagnetikte bu tür durumlar arasında örneğin, sonsuz geniş paralel düzlemler arasındaki alanın hesabı; dikdörtgen, silindirselsel ve küresel boşluklardaki boşluk rezonansları ve sonsuz düzlemler, kamalar, dairesel silindirler ve kürelerden dalga dağılım problemleri bulunur. Mühendislik alanında pratik öneme sahip diğer birçok problemin analitik çözümü zordur veya yoktur. Bu zorluğu aşmak için, çeşitli yaklaşım metodları geliştirilmiştir, bunlar arasında Ritz ve Galerkin yöntemleri en yaygın olarak kullanılmaktadır.

3.3.1. Rayleigh - Ritz Yöntemi

Rayleigh-Ritz yöntemi, Varyasyonel formda ifade edilen problemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir. Yani yöntem, problemin çözümünde Varyasyonel yakalaşımından yararlanır.

SEY' de kullanılan bölmemede bir tek üçgen eleman gözönüne alındığında; yöntemin uygulanması için, önce

$$\phi(x,y) = p_1 + p_2 x + p_3 y + p_4 xy + p_5 x^2 + p_6 y^2 + p_7 x^2 y + \dots \quad (3.5)$$

gibi yüksek dereceli polinomlarla tanımlanan bir deneme fonksiyonu seçilmelidir. Bu deneme fonksiyonu basit olarak

$$\phi(x,y) = p_1 + p_2 x + p_3 y \quad (3.6)$$

şeklinde birinci dereceden bir polinom olduğunu farzedelim. Eğer üçgenin köşelerinde potansiyeller ϕ_i , ϕ_j ve ϕ_m ise, deneme fonksiyonu herbir köşe noktasında o köşenin potansiyel değerini sağlamak zorunda olacaktır,

$$\begin{aligned} \phi_i &= p_1 + p_2 x_i + p_3 y_i \\ \phi_j &= p_1 + p_2 x_j + p_3 y_j \\ \phi_m &= p_1 + p_2 x_m + p_3 y_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

ifadeleri yazılabilir. Üçgenin alanı ise, köşe koordinatları cinsinden

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

dir. Denklem (3.7)'den p_1 , p_2 ve p_3 değerleri kolayca bulunur. Aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\
a_j &= x_m y_i - x_i y_m \\
a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\
b_i &= y_j - y_m \\
b_j &= y_m - y_i \\
b_m &= y_i - y_j \\
c_i &= x_m - x_j \\
c_j &= x_i - x_m \\
c_m &= x_j - x_i \\
N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\
N_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\
N_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ve bu değerler denklem (3.6)'da yerlerine yazılırsa

$$\phi(x,y) = N_i(x,y)\phi_i + N_j(x,y)\phi_j + N_m(x,y)\phi_m \tag{3.10}$$

bulunur (İtaka et-al.,1980).

Burada kullanılan N fonksiyonlarına şekil fonksiyonları veya Enterpolasyon fonksiyonları denilir. Böylece elde edilen $\phi(x,y)$ deneme fonksiyonu, üçgenin köşeleri dahil her tarafında geçerlidir. Her köşede o köşeye ait şekil fonksiyonun değeri 1, diğer köşelere ait şekil fonksiyonlarının değeri sıfırdır. Herbir üçgen eleman içinde, potansiyel fonksiyonunun Laplace diferansiyel denklemini sağladığı varsayıldığından, homojen sınır koşullarında Laplace denkleminin karşı düşen fonksiyonel

$$F = \iint \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{3.11}$$

dir. Potansiyel fonksiyonları yerine denklem (3.10) kullanılırsa

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial x} = (b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m) / 2\Delta \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} + \phi_m \frac{\partial N_m}{\partial y} = (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m) / 2 \Delta \quad (3.13)$$

ve böylece

$$F = \left[\frac{(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)}{2 \Delta} \right]^2 \iint dx dy + \left[\frac{(c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)}{2 \Delta} \right]^2 \iint dx dy \quad (3.14)$$

bulunur. Buradan

$$\Delta = \iint dx dy \quad (3.15)$$

olmak üzere

$$F = \frac{1}{4 \Delta} \left[(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_m \phi_m)^2 + (c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_m \phi_m)^2 \right] \quad (3.16)$$

elde edilir. $F = f(\phi_i, \phi_j, \phi_m)$ de F 'yi minimum yapan ϕ_i, ϕ_j, ϕ_m değerlerini bulmak için, değişkenlere göre kısmi türevler alınırsa, ϕ_i için

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 2 \left[\frac{(b_i^2 + c_i^2)}{4 \Delta} \phi_i + \frac{(b_i b_j + c_i c_j)}{4 \Delta} \phi_j + \frac{(b_i b_m + c_i c_m)}{4 \Delta} \phi_m \right] \quad (3.17)$$

yazılır. Burada $S_{ji} = S_{ij}$, $S_{mi} = S_{im}$ ve $S_{mj} = S_{jm}$ olarak

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \frac{b_i^2 + c_i^2}{4 \Delta}, \\ S_{ij} &= \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4 \Delta} \\ S_{im} &= \frac{b_i b_m + c_i c_m}{4 \Delta} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
S_{jm} &= \frac{b_j b_m + c_j c_m}{4\Delta} \\
S_{jj} &= \frac{b_j^2 + c_j^2}{4\Delta} \\
S_{mm} &= \frac{b_m^2 + c_m^2}{4\Delta}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

kısaltmaları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \phi_i} &= 2 \left(S_{ii} \phi_i + S_{ij} \phi_j + S_{im} \phi_m \right) \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_j} &= 2 \left(S_{ji} \phi_i + S_{jj} \phi_j + S_{jm} \phi_m \right) \\
\frac{\partial F}{\partial \phi_m} &= 2 \left(S_{mi} \phi_i + S_{mj} \phi_j + S_{mm} \phi_m \right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur. Enerji fonksiyonlarını minimum yapmak için gerekli minimizasyon şartı

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi_i} + \frac{\partial F}{\partial \phi_j} + \frac{\partial F}{\partial \phi_m} = 0 \tag{3.21}$$

dır. Ve böylece sistem denklemleri matris formda

$$\begin{bmatrix} S_{ii} & S_{ij} & S_{im} \\ S_{ji} & S_{jj} & S_{jm} \\ S_{mi} & S_{mj} & S_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

olarak yazılır (Silvester and Ferrari, 1983).

3.3.2. Galerkin Yöntemi

Fonksiyonelin bilinmediği durumlarda Varyosyenel hesap yönteminden faydalanamayız. Galerkin yönteminde fonksiyonele ihtiyaç yoktur, bu yöntemde doğrudan diferansiyel denklemden çözüme gidilir.

$$\Delta \phi = -g \quad (3.23)$$

ifadesinin tam çözümü " ϕ_0 " olsun. Bu durumda asıl diferansiyel denklem

$$\varepsilon = \Delta \phi_0 + g = 0 \quad (3.24)$$

eşitliğinden görüldüğü gibi, tam çözüm için sifira eşittir. Tam çözüm olmayan bir deneme fonksiyonu ϕ_d için ise, diferansiyel denklem sıfırdan farklı olacaktır.

$$\varepsilon = \Delta \phi_d + g \neq 0 \quad (3.25)$$

ε ile gösterilen fark ifadesine dik öyle bir W ağırlık fonksiyonu vardırki, ε ile çarpımının integrali sıfırdır.

$$\int \varepsilon W dx dy = 0 \quad (3.26)$$

W ağırlık fonksiyonuna, şekil fonksiyonu da denilebilir. ε fark fonksiyonu

$$\varepsilon = \Delta \phi^e + g \quad (3.27)$$

W ağırlık fonksiyonu da

$$W = \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

dir. ε ve W 'nin bu değerleri denklem (3.26)'da yerlerine yazıldığında

$$\int_R (\Delta \phi^e + g) \begin{bmatrix} N_1^e \\ N_2^e \\ N_3^e \end{bmatrix} dx dy = 0 \quad (3.29)$$

elde edilir. Buradaki üç denklemden birincisini ele alalım.

$$\int_{R'} (\Delta \phi^e + g) N_1^e dx dy = 0 \quad (3.30)$$

şeklinde olan birinci denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\int_{R'} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R'} g N_1^e dx dy \quad (3.31)$$

Bu ifade Green teoreminden faydalanılarak

$$\int_{R'} \Delta \phi^e N_1^e dx dy = - \int_{R'} \nabla \phi^e \cdot \nabla N_1^e dx dy + \int_C N_1^e \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad (3.32)$$

şeklinde elde edilebilir.

Sağ taraftaki ikinci terim, çözüm bölgesini sınırlayan eğrinin tamamı veya bir kısmı üzerinde geçerli olan sınır şartlarını probleme dahil etmeyi sağlar. Sağ taraftaki birinci terimin çözümü için ise, ifadeler aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla \phi_1^e &= \vec{i} \frac{\partial \phi^e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \\ \nabla N_1^e &= \vec{i} \frac{\partial N^e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial N^e}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.33)$$

olur. Bu ifadelerin çarpımından sadece $ii = 1$ 'li ve $jj = 1$ 'li terimlerin katsayıları elde edilir. Diğer katsayılar dik iki vektörün skaler çarpımı nedeniyle sıfır olacaktır. Sonuçta

$$\nabla \phi^e \cdot \nabla N_1^e = \frac{\partial \phi^e}{\partial x} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} + \frac{\partial \phi^e}{\partial y} \frac{\partial N_1^e}{\partial y} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi^e \cdot \nabla N_1^e &= \left(\phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right) \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ &+ \left(\phi_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + \phi_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + \phi_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.35)$$

bulunur. Görüldüğü gibi

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\
S_{12} &= \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \\
S_{13} &= \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

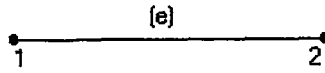
ifadeleri daha önce Rayleigh-Ritz yöntemi ile elde edilen matris katsayılarına ilişkin ifadeler ile aynıdır. Denklem (3.29)' nin diğer iki denklemine de benzer işlemler uygulanırsa, Denklem (3.22) ile verilmiş olan matrisin bütün elemanları hesaplanmış olacaktır.

3.4. Sonlu Elemanlar Yönteminde İşlem Basamakları

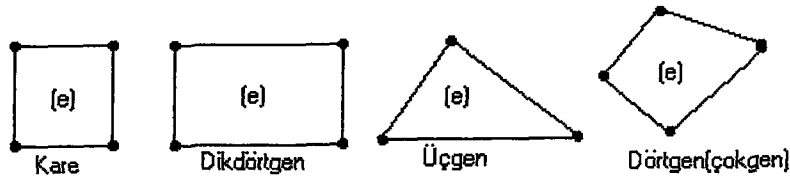
3.4.1. Çözüm Bölgesinin Bölmelenmesi

Süreklilik problemlerinde alan değişkeni, çözüm bölgesindeki noktalara ilişkin bir fonksiyondur. Dolayısıyla alan değişkeninin sonsuz sayıda değerleri vardır ve problem sonsuz sayıda bilinmeyenlidir. Problemin sonlu sayıda bilinmeyenli duruma indirgenmesi amacıyla birinci adım olarak çözüm bölgesi sonlu sayıda elemanlar ile bölmelenir.

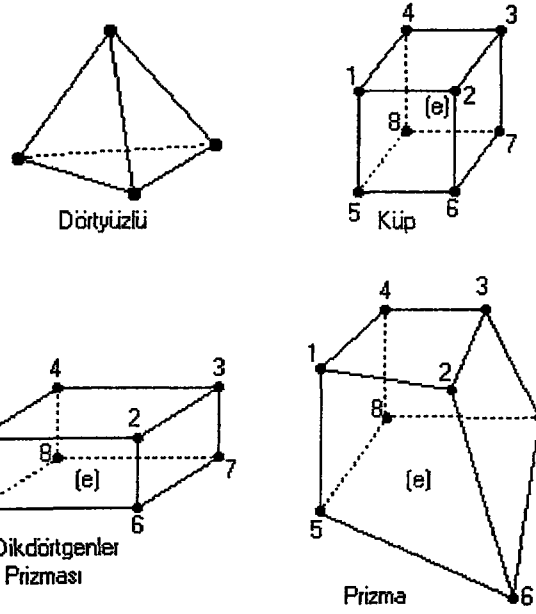
Kapalı bir bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi, boyutları, konumları ve biçimleri isteğe bağlı olarak seçilen elemanlarla yapılabilir. Bu elemanlar, bir boyutlu problemlerde doğru parçası şeklinde, iki boyutlu problemlerde üçgen, kare, dikdörtgen veya çokgen gibi şekillerde, üç boyutlu problemlerde ise küp, prizma, dörtyüzlü gibi şekillerde ve değişik büyüklüklerde seçilebilir(3.1, 3.2, 3.3, 3.4). Bu seçim inceleme altındaki malzeme veya cihazın sınırları gözönüne alınarak yapılır.



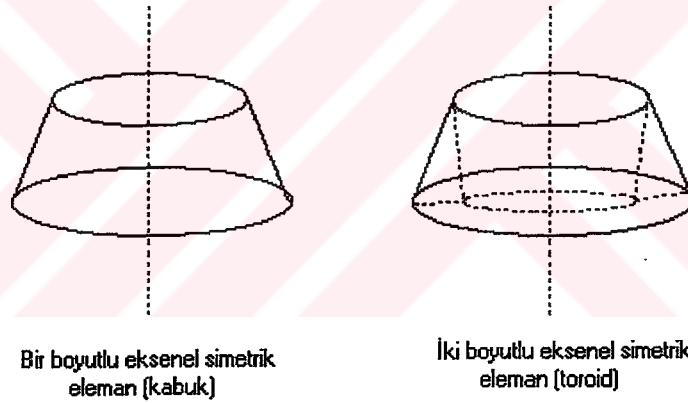
Şekil 3.1 Bir boyutlu sonlu eleman



Şekil 3.2 İki boyutlu sonlu eleman örnekleri



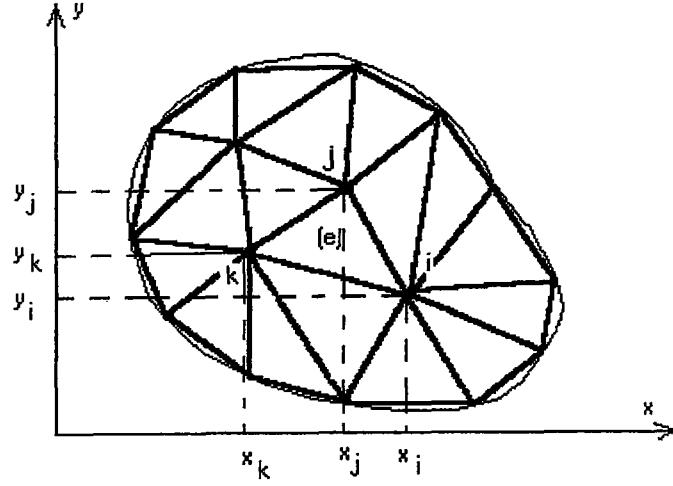
Şekil 3.3 Üç boyutlu sonlu eleman örnekleri



Şekil 3.4 Eksenel simetrik sonlu eleman örnekleri

İki boyutlu bir bölgenin sınırını nokta nokta tanımlamak ve bu noktaları doğru parçaları ile birleştirmekle bir yaklaşık sınır elde etmek mümkündür. Noktalar ne kadar sıklaştırılır, dolayısıyla doğru parçaları ne kadar küçültülürse gerçek sınır o kadar doğru biçimde tanımlanmış olacaktır.

Genellikle, sınırlara kolaylıkla uyum sağlamaları ve bölgeyi bölmelemede zorluk çıkarmamaları nedeniyle iki boyutlu problemlerde üçgen elemanlar çok kullanılırlar. Elemanların biçimlerini ve sayısını seçmekteki bu serbestlik, SEY'e geniş esneklik kazandırır. Böylece çözüm bölgesi, istenilen büyüklük ve sıklıkta elemanlar ile bölmelenerek düğüm sayısı ve dolayısıyla çözüm denklemlerinin sayısı değiştirilebilir (Şekil 3.5).



Şekil 3.5 Çözüm bölgesinin bölmelenmesi

Bölge içindeki eleman sayısı ve dağılımı çözümün doğruluğuna etki eden etkenlerdendir. Bir bölge içinde elemanların nerelerde yoğunlaştırılacağı kolayca kestirilebilir. Örneğin küçük eğrilik yarıçaplı elektrotlara yakın yerlerde küçük ve sık, büyük eğrilik yarıçaplı yerlerde de büyük ve seyrek elemanlar kullanmak uygundur. Bu sayede gereksiz elemanlar nedeniyle doğrusal denklem sisteminin ve çözüm süresinin gereksiz büyümesi önlenmiş olur.

Üçgen elemanların tanımlanması, elemanların ve köşe (düğüm) noktalarının numaralandırılması ve koordinatlarının belirlenmesi demektir. Kapalı bir bölgenin sonlu elemanlara ayırma işlemi (ayrıklaştırma), eğer eleman sayısı az ise elle yapılabilir. Fakat eleman sayısı arttıkça elle ayrıklaştırma işlemi zorlaşacak ve imkansızlaşacaktır.

Son yıllardaki çalışmalar elemanların tanımlanması ve bunların verilmiş bir sınır yüzeye uydurulması işleminin bilgisayar tarafından otomatik olarak yaptırılması (Automatic Mesh Generation) üzerine yoğunlaşmıştır. Bu sayede elemanlara ait parametreler çok hızlı bir yolla elde edildikten sonra, bilgisayar belleğinde ayrılmış bir bölümde saklanırlar (Andersen, 1973).

3.4.2. Şekil (Enterpolasyon) Fonksiyonlarının Seçimi

İkinci adımda, herbir elemanı belirleyen düğümler yardımıyla o eleman üzerinde veya içinde alan değişkeninin değişimini gösteren şekil (enterpolasyon) fonksiyonunun tipi seçilir. Alan değişkeni skaler, vektörel veya yüksek dereceli bir tensör olabilir. Çünkü bunların integral ve türevlerini almak kolaydır. Polinomlar lineer, kuadratik, kübik v.b. yapıda olabilirler.

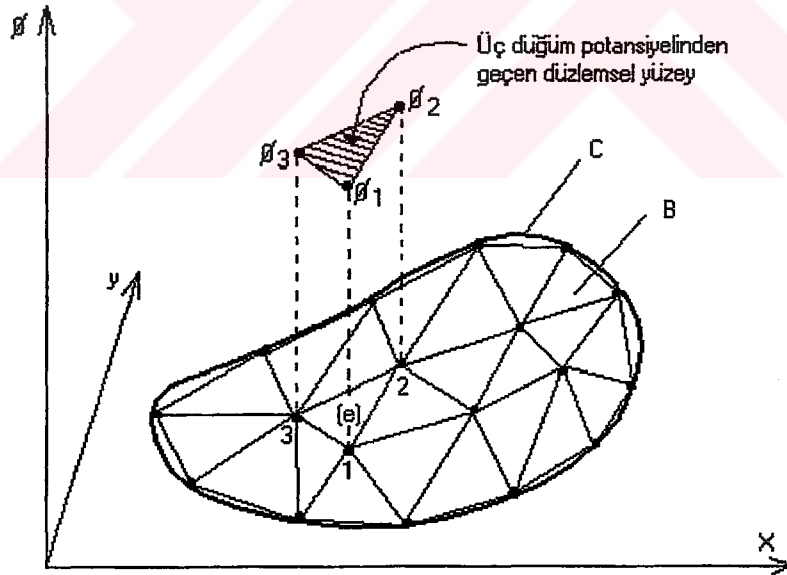
Yaklaşık bir çözüm oluşturmak üzere bölge elemanlara ayrıldıktan sonra, $\phi(x,y)$ potansiyelinin her eleman içinde standart bir bağıntı ile değiştiğini kabul etmek gerekir. Bu bağıntı n . dereceden bir polinom olabilir.

$$\phi(x,y) = p_1 + p_2 x + p_3 y + p_4 xy + p_5 x^2 + p_6 y^2 + p_7 x^2 y + \dots \quad (3.37)$$

Seçilen polinomun derecesi ne kadar yüksek ise, doğru çözüme o kadar iyi yaklaşır. Polinomun katsayıları, üçgen veya içinde seçilmiş düğümlerinin koordinatları ve potansiyelleri cinsinden bulunabilir. Eğer polinomun derecesi yüksek olursa, daha fazla düğüm tanımlamak gerekir, fakat bu durumda bilinmeyen sayısı çok artacak ve ifadeler karmaşıklaşacaktır. Birinci dereceden bir yaklaşımda polinomun üç katsayısı vardır.

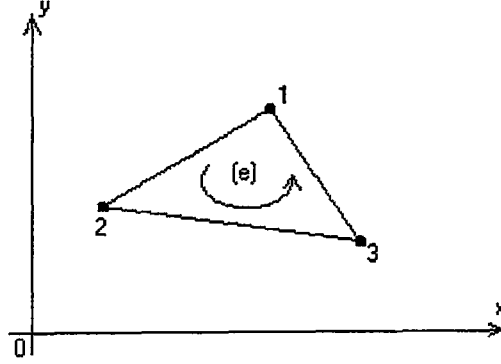
$$\phi(x,y) = p_1 + p_2 x + p_3 y \quad (3.38)$$

Bu tip polinom için üç düğüm gerekir ki, bunlar da üçgenin köşe noktalarıdır. Birinci dereceden bir yaklaşım sonunda $\phi(x,y)$ her eleman içinde ve kenarlarında doğrusal olarak değişir. Böylece gerçek çözümün yerini parça parça lineer bir fonksiyon alır.



Şekil 3.6. Elemanlara bölünmüş bölge ve üç düğüm potansiyellerinden geçen lineer çözüm yüzeyi $\phi(x,y)$.

Eğer tanımlanan bölgedeki üçgenlerin köşe noktaları ortak ise, potansiyel değişimi iki üçgenin arasındaki sınırdaki da sürekli olacaktır. Bu sınırlar arasında aralık olmadığından x-y düzlemi üzerinde çözüme yaklaşan (x,y) parça-parça bir çözümdür, fakat tüm bölge içinde sürekli dir.



Şekil 3.7. Tipik bir sonlu üçgen eleman

(3.38) ifadesindeki p_1 , p_2 , p_3 katsayıları Şekil (3.7)' de ele alınan tipik bir sonlu eleman içinde elde edilsin. Üçgenin köşe potansiyelleri sırasıyla ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 ise, (3.38) ifadesinin her düğüm için yazılmasıyla (3.39) deki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

(3.39)' daki katsayı matrisinin determinantı üçgenin alanının iki katına eşittir. Alanın sıfır olması durumu dışında, p_1 , p_2 katsayıları bu denklemlerin çözümünden bulunabilir. Bulunan sonuçların (3.38) ifadesinde yerine konmasıyla elde edilen potansiyel fonksiyonu (3.40)'deki gibi yazılabilir. Üçgen içindeki potansiyel değişimi artık, düğüm noktalarının potansiyelleri ile $\alpha_i(x,y)$ gibi lineer katsayısı fonksiyonlarının çarpımlarının toplamıdır.

$$\phi(x,y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \alpha_i(x,y) \quad (3.40)$$

Burada $\alpha_i(x,y)$ şekil fonksiyonu olarak adlandırılır. A üçgen elemanın alanı olmak şartıyla şekil fonksiyonlarının açık ifadeleri (3.41)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_3 - x_1)y] \\
\alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_1 - x_2)y]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Bu ifadelerden de görüleceği gibi (3.40)'ın köşe arasında interpolasyonu mümkündür. İ. köşe üzerinde, sadece o köşenin indisine sahip olan α_i birim değere düşür, diğerleri ise sıfır olurlar.

$$\begin{aligned}
\alpha_i(x_j, y_j) &= 0 & i \neq j \\
" &= 1 & i = j
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Tek bir üçgen eleman içinde depolanmış elektrostatik potansiyel enerji (3.2) denklemi ve (3.40) ifadelerinin kullanılmasıyla elde edilebilir. Eleman içindeki potansiyellerin gradyenti,

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla \alpha_i \tag{3.43}$$

olarak bulunur. Burada ϕ_i sabit olduğu için gradyentin dışına çıkabilir, $\nabla \alpha$ ise x ve y koordinatlarından bağımsız hale gelir. $|\nabla \phi|^2$ terimi toplamların çarpımı cinsinden yazılırsa,

$$|\nabla \phi|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j \tag{3.44}$$

bulunur. Elde edilen (3.48) ifadesi (3.2)'deki enerji denklemlerinde yerine konulursa, tek bir elemana ait enerji denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$W^{(e)} = \frac{\epsilon^{(e)}}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j ds \tag{3.45}$$

Bu ifadede (e) üssü elemanı tanımlar. Elemana ait enerji denklemi ikinci dereceden (Quadratic) bir matris formuna getirilebilir.

$$W^{(e)} = \frac{1}{2} \phi^T S^{(e)} \phi \tag{3.46}$$

Burada ϕ sütun vektör, ϕ^T ise bu vektörün transpozisini gösterir. $S^{(e)}$ elemana ait “katılık matrisi” (stiffness matrix) olarak isimlendirilen bir kare matristir. (3.41)’deki ifadelerin ∇ ile çarpılmasından sonra;

$$S_{11} = \varepsilon^{(e)} \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j ds \quad (3.47)$$

denklemine yerine konmasıyla şekil matrisinin elemanları (3.48)’deki ifadeler şeklinde yazılabilirler. $\varepsilon^{(e)}$ eleman içindeki yalıtıkana ait dielektrik sabitidir. Burada bulunan (e) üst indisleri üzerinde işlem yapılan elemanın numarasını gösterir. Formüllerden de görüleceği gibi “Katılık matrisi” simetrik bir matristir. Yani matrisin S_{12}, S_{13}, S_{23} elemanları ile S_{21}, S_{31}, S_{32} elemanları sırasıyla birbirine eşittir.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2 \right] \\ S_{12} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_3 - x_1) \right] \\ S_{13} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_2) \right] \\ S_{21} &= S_{12} \\ S_{22} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right] \\ S_{23} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) \right] \\ S_{31} &= S_{13} \\ S_{32} &= S_{23} \\ S_{33} &= \frac{\varepsilon^{(e)}}{4A} \left[(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \right] \\ A &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.4.3 Elemanların Birleştirilmesi

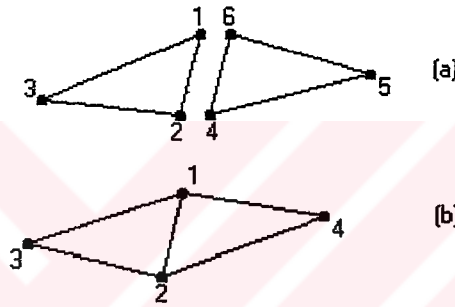
Herhangi bir üçgen eleman için, elemanın enerjisi daha önceden gösterildiği gibi yaklaşık olarak hesaplanabilir. Tüm bir bölge içindeki toplam enerji, eleman enerjilerinin toplamına eşittir. (3.49) ifadesindeki N , bölge içindeki toplam eleman sayısıdır.

$$W = \sum_{i=1}^N W^{(e)} \quad (3.49)$$

Üçgen parçalardan oluşmuş bileşke bir model, başlangıçta tek bir model gibi düşünülebilir. Henüz var olan bu üçgenler topluluğuna bir üçgen daha eklendiğinde sürekliliğin ne derece etkileneceği ile ilgilenmek yeterli olacaktır. Daha kolay anlaşılması amacıyla, modelin şekil 3.8-a'daki 1-2-3 üçgeninden meydana geldiğini ve 4-5-6 üçgenin buna bağlanacağı varsayalım.

Her üçgene ilişkin üç köşe potansiyeli olduğundan, üçgen çiftinin mümkün olan tüm birleşme durumları altı köşenin potansiyellerini içeren vektör ile tanımlanabilir.

$$\phi_{ayr}^T = [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6]_{ayr} \quad (3.50)$$



Şekil 3.8 Elemanların birleştirilmesi

Burada "ayr" indisi elemanların herhangi bir yol ile birbirlerine bağlanmamış olduğunu gösterir.

$$W = \frac{1}{2} \phi_{ayr}^T S_{ayr} \phi_{ayr} \quad (3.51)$$

Bu ifade eleman çiftine ait toplam enerjiyi gösterir. Burada S_{ayr} ayrık üçgen çiftine ait şekil matrisidir (Dirichlet Matrisi). Bu matrisin daha açık bir şekli aşağıda verilmiştir.

$$S_{ayr} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44}^{(2)} & S_{45}^{(2)} & S_{46}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & S_{54}^{(2)} & S_{55}^{(2)} & S_{56}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & S_{64}^{(2)} & S_{65}^{(2)} & S_{66}^{(2)} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.52)$$

S_{ayr} matrisi daha kısa gösterilmesi için parçalanmış matris formunda yazılabilir.

$$S_{\text{ayr}} = \begin{bmatrix} S^{(1)} & 0 \\ 0 & S^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Çözümü aranan potansiyel fonksiyonunun tüm bir bölge içinde elemanlar arasındaki sınırlarda sürekli olması gerekir. Daha önceki kısımlarda belirtildiği gibi, potansiyel her üçgenin içinde ve kenarlarında uzaklık ile doğrusal olarak değişen bir fonksiyondur. Diğer bir deyişle, potansiyelin sabit bir değeri için üçgenin içinden bir doğru parçası geçer ve bunun sürekli olduğu bellidir. Elemanların herbirlerinden ayrı ayrı düşünülmesi durumunda potansiyel, üçgenlerin arasındaki sınırlarda süreksizlik gösterir. Şimdiye kadar yapılan işlemlerde üçgenler birbirlerinden ayrı, fakat sonsuz küçük uzaklıkta düşünülmesiyle şekil 3.8-a'daki 1-6 ve 2-4 düğümlerinin potansiyelleri eşit yapılırsa, şekil 3.8-b'deki duruma geçilir. Bu durumda iki üçgenden oluşan bir dörtgen bölge oluşur. Oluşan bu dörtgen bölgedeki düğümleri tekrar numaralandırmak gerekir. Bu numaralandırma işlemi için özel bir kural uygulanmaz.

Birbirlerinden ayrı ayrı üçgenleri birleştirirken, düğümlere ait denklemler aşağıdaki gibi matrisel biçimde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}_{\text{bir}} \quad (3.54)$$

Burada "bir" indisi elemanların birleştirilmesiyle oluşan sistemin düğüm potansiyellerine ait sütun vektörü gösterir. B elemanların birleştirilmesini sağlayan bağlantı matrisini göstermek üzere yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde kısaltılabilir.

$$\phi_{\text{ayr}} = B \phi_{\text{bir}} \quad (3.55)$$

B matrisinin elemanlarını oluştururken benzer düğümler ile çarpım halindeki elemanlar "1" seçilmiş, diğerleri ise "0" alınmışlardır. (3.55) ifadesinin (3.51)'de yerine konulmasıyla, birleştirilmiş eleman çiftine ait enerji yoğunluğu;

$$W = \frac{1}{2} \phi_{bir}^T S_{bir} \phi_{bir} \quad (3.56)$$

burada S_{bir} ;

$$S_{bir} = B^T S_{ayr} B \quad (3.57)$$

birleştirilmiş katsayı matrisini temsil eder. Matrisel işlemler sonucunda S_{bir} matrisinin açık ifadesi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$S_{bir} = \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{66}^{(2)} & S_{12}^{(1)} + S_{64}^{(2)} & S_{13}^{(1)} & S_{65}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} + S_{46}^{(2)} & S_{22}^{(1)} + S_{44}^{(2)} & S_{23}^{(1)} & S_{45}^{(2)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 \\ S_{56}^{(2)} & S_{54}^{(2)} & 0 & S_{55}^{(2)} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (3.58)$$

Elemanların ayrı ve birleşik durumlarındaki numaralandırılması işlemine sırasıyla “ Yerel numaralandırma ” ve “ genel numaralandırma ” denir.

Bu kısımda anlatılanların daha kolay anlaşılması için birbirine komşu olan iki üçgen elemanın birleştirilmesiyle şekil matrisinin elde edilmesi gösterildi. Çözüm bölgesinde çok fazla sayıda eleman ve düğüm tanımlanırsa, S_{bir} matrisinin kuruluşu ve uygun bir belleğe atanması bilgisayar tarafından yaptırılır. Tanımlanan her düğüme iki düğüm numarası vermek gerekir. Bunlar “ Yerel düğüm numarası ” (Local node number) ve “ Genel düğüm numarası ” (Global node number) olarak isimlendirilirler. Yerel düğüm numarası bir düğümün ilişkisi olduğu elemanın kaçınıcı düğümü olduğunu gösterir. Genel düğüm numarası ise, herhangi bir düğümün bölge içindeki tüm düğümlerin içindeki sırasını gösterir. Ancak böyle bir numaralandırma yapılırsa S_{bir} matrisinin bilgisayar yardımıyla kurulması mümkün olabilir.

3.4.4 Denklem Sisteminin Çözümü

Sürekli ve yaklaşık bir potansiyel dağılımına ait enerji yoğunluğu, daha önceki kısımlarda düğüm potansiyellerinin sütun vektörleri şeklinde ikinci derceden bir matris formunda elde edilmişti. Laplace denkleminin yaklaşık bir çözümünü elde etmek için, sonlu elemanlar ile modellenmiş bölgenin enerjisini minimumlaştırmak gerekir. Enerji ifadesinin ikinci derceden olması nedeniyle, enerjiyi minimum yapan sadece tek bir potansiyel vektörü vardır. Bunu yapabilmek için,

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_k} = 0 \quad (3.59)$$

yapmak yeterlidir. Burada k , birleştirilmiş potansiyel vektörünün eleman sayısına eşittir. Her düğümün potansiyeline göre alınan kısmi türevler sonucunda $k \times k$ boyutunda lineer bir denklem takımı elde edilir.

$$\left[S_{bir} \right]_{k \times k} \left[\phi_{bir} \right]_{k \times 1} = 0 \quad (3.60)$$

Bilindiği gibi bu minimumlaştırma bütün düğüm potansiyellerinin serbest değiştiği kısıtlamasız bir minimumlaştırma problemidir. Potansiyeller üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmışsa herbir düğümün potansiyeli sıfır olacağından, enerjinin minimum değeri sıfırdır. Böyle bir problem bir sınır değer problemine karşı gelmez. Fakat ele alınan problem bir sınır değer problemi olduğuna göre bazı potansiyellerin değeri sınır koşulu olarak verilebilir. Diğer bir deyişle, elektrotlar üzerindeki potansiyel değerleri bilinmektedir. Örneğin, genel düğüm numaralandırılması yapılırken önce değeribilinmeyen potansiyellere numara verilsin, daha sonra da sınır koşullarına ait, potansiyeli bilinen düğümler numaralandırılsın. Değeri bilinmeyen düğümlerin potansiyelleri serbest değişkenler olduklarından bunlara “ s ” indisi verilsin. Diğer düğümlerin potansiyelleri belirli olduğundan bunlar da “ b ” indisiyle gösterilirse (3.59) ifadesi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_k} = \frac{\partial}{\partial \left[\phi_s \right]_k} \left\{ \left[\phi_s^T \ \phi_b^T \right] \begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \\ S_{bs} & S_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_s \\ \phi_b \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.61)$$

Değerleri belli ϕ_b potansiyelleri değişken olmadıkları için, bunlara göre türev almaya gerek yoktur. Sadece serbest değişkenlere göre türev alınırsa dikdörtgen bir matris eşitliği elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} S_{ss} & S_{sb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_s \\ \phi_b \end{bmatrix} = 0 \quad (3.62)$$

Bu matrislerin çarpımı elde edilecek matrisin satır sayısı serbest değişkenlerin sayısına eşittir. Sol tarafta bulunan S_{ss} matrisi tekil olmayan bir kare matristir.

$$S_{ss} \phi_s = -S_{sb} \phi_b \quad (3.63)$$

S_{ss} 'in tersi alınıp sağ tarafa geçirilirse, bütün düğümlere ait potansiyel vektörü,

$$\phi = \begin{bmatrix} -S_{ss}^{-1} S_{sb} \phi_b \\ \phi_b \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

şeklinde bulunmuş olur. Bulunan bu potansiyeller üçgen elemanların düğümlerine ait potansiyel değerleridir. Ayrıca lineer enterpolasyon yaparak, sadece düğüm noktalarında değil, eleman içindeki herhangi bir noktadaki potansiyel değeri de hesaplanabilir.

Elde edilen bu bir dizi düğüm potansiyeli sadece minimum enerjiyi veren parça-parça düzlemsel bir yüzey için birleşik bir ifadedir.

3.4.5 İstenen Diğer Hesaplamaların Yapılması

a) Elektrik Alanı Hesabı;

İfade (3.6)'daki yaklaşık potansiyel fonksiyonunun (3.6)'daki üçgen eleman içinde doğrusal bir bağıntıyla değiştiği kabul edilmişti. Bu eleman içindeki E elektrik alan vektörünün bileşenleri

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -P_2 \quad (3.65)$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -P_3 \quad (3.66)$$

ve doğrultusu

$$\theta = \tan^{-1} \frac{P_3}{P_2} \quad (3.67)$$

olacaktır. Bu durumda elektrik alan vektörünün şiddeti

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{P_2^2 + P_3^2} \quad [V/m] \quad (3.68)$$

olarak yazılabilir. P_1 ve P_2 birer sabit olduğuna göre, elektrik alan vektörünün doğrultusu ve şiddetinin eleman içinde sabit kaldığı görülür. Bu durum potansiyel fonksiyonunun x ve y 'nin yüksek dereceden terimlerini içermesinden kaynaklanır. Potansiyel fonksiyonundaki yüksek dereceden terimlerin ihmal edilmesi, yapılan hesaplarda bir miktar hataya sebep olur. Bu hata, ancak gradyentin yüksek olması beklenen yerlerde daha küçük boyutlu elemanlar tanımlamakla bir derecede önlenir.

b) *Kapasite Hesabı;*

SEY ile, incelenen bir elektrot sisteminde elektrik alan dağılımından başka, sistemin kapasitesi de yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bunun için elektrotlar arasındaki yalıtkan ortamdaki elektrostatik enerjinin hesaplanmasından faydalanılır. Ortamda depo edilen enerji

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint \epsilon_r E^2 dV \quad (3.69)$$

ile hesaplanabilir. İki boyutlu alan için, elektrotların z- eksenini boyunca uzunluğu 1 ise, (3.69)'deki integral yaklaşık olarak bir toplam ile ifade edilebilir.

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \sum_{i=1}^n \epsilon_{ri} A_i E_i^2 \quad (3.70)$$

Bu bağıntıda

n: Tanımlanan eleman sayısı,

ϵ_{ri} : İ. eleman içindeki bağlı dielektrik sabiti

A_i : İ. elemanın alanı

E_i : İ. eleman içindeki elektrik alan şiddetidir.

İncelenen elektrot sistemi bir kondansatör gibi düşünülürse elektrotlara uygulanan gerilim $U = \phi_{\max} - \phi_{\min}$ olmak üzere, kondansatörde depolanan enerji

$$W = \frac{1}{2} CU^2 \quad (3.71)$$

yazılabilir. (3.70) ile (3.71) ifadesi birbirine eşitlenerek,

$$\bar{C} = \frac{C}{l} = \frac{\epsilon_0 \sum_{i=1}^n \epsilon_{ri} A_i E_i^2}{U^2} \quad [F/m] \quad (3.72)$$

formülünden hesaplanabilir.

3.5. Sonlu Elemanlar Yöntemi için Giriş Verilerinin Hazırlanması

SEY' in ortaya çıkışından itibaren, diğer yöntemlere göre problemlerin çözümünde önemli üstünlükler sağlamıştır. Ancak uygulamada bazı zorlukları da beraberinde getirmiştir. Bunlardan en önemlisi giriş verilerinin hazırlanmasıdır. Elemanları belirleyen düğümlerin numaraları ve koordinatları, malzeme özellikleri ve başlangıç değerleri gibi bilgilerden oluşan verilerin el ile hazırlanması ve bilgisayara girilmesi önemli zorluklara, yazım hatalarına ve zaman kaybına neden olmaktadır. Bunun için yöntemin ortaya çıkmasından hemen sonra verilerin otomatik üretimi için de çalışmalara başlanmıştır (Cebeci, 1992).

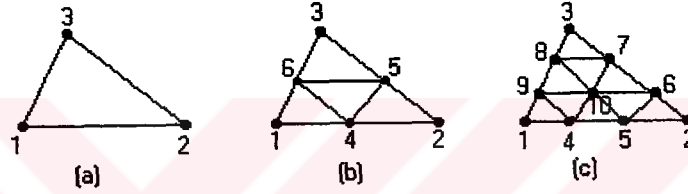
Özellikle elektrik ve magnetik alan hesaplamalarında kullanılmak üzere yapılan bir çalışmada, elektrodların ve elektrik makinalarının eğrisel kenarlarını iyi bir şekilde temsil eden ve bölgede üçgen elemanlar yardımıyla otomatik olarak ızgara üretimini gerçekleştiren bir algoritma sunuldu. Bunu için önce çözüm bölgesi içerisindeki elektrodların şekline ve değişik sıklıkta bölmelenmesi istenen kısımlara göre başlangıç noktaları tesbit edilir. Sonra bu noktalardan çizilen yatay ve düşey doğruların araları istenen sıklıkta doğrularla taranır, böylece çözüm bölgesi farklı büyüklükteki dörtgenlerle bölmelenmiş olur. Daha sonra bu dörtgenlerin birer köşegeni yardımıyla üçgen elemanlar elde edilir. Eğrisel yapıdaki elektrodları veya sınırları üçgenlerin kenarları ile çakıştırmak üzere; dörtgenlerin köşeleri, eğrisel kenar üzerinde sayısı belirlenen düğümlerle üst üste gelecek şekilde kaydırılır. Bu durumda eğrisel kenarın geçtiği yerdeki dörtgenler yamuklara dönüşür ve böylece kenar boyunca eğrilerek birleşen dörtgen köşegenleri, eğrisel kenarı uygun bir şekilde modellemiş olur (Andersen, 1973).

Sonlu Eleman analizleri için veri üretimi ile ilgili çok önemli çalışmalardan birinde, eğrisel kenarlı bölgelerin bölmelenmesi için otomatik veri üretiminin iki farklı yöntemi takdim edilmiştir. Bunlar, her ikisi de kuadratik şekil fonksiyonu kullanan, alan ve izoparametrik koordinat sistemleridir. Önce geometriye ve malzeme değişimlerine bağlı olarak ayrıştırılmış olan kısımlar, belirli sayıda üçgen bölgeler oluşturulacak şekilde el ile bölünür. Daha sonra algoritma bu bölgeleri, üç veya altı düğümlü üçgen elemanlar ile otomatik olarak bölmeler ve farklı bölgeleri, bir Merge algoritması kullanarak birleştirir (Ghassami, 1982).

3.5.1. Alan Koordinatları, Şekil Fonksiyonları ve İzoparametrik Bölmeleme İle İlgili Temel Özellikler

Yapılan çalışmada, çözüm bölgesini bölmelemek için iki tip üçgen eleman kullanılmıştır. Birincisi, üç düğümlü üçgen elemanlardır. İkincisi ise, eğrisel kenarları iyi bir şekilde temsil etmek üzere izoparametrik curvilinear bölmelemeyi sağlayan altı düğümlü üçgen elemanlardır.

Üçgen elemanlar, sahip oldukları düğüm sayısına göre lineer, kuadratik, kübik, kuartik, küntik...vs. elemanlar olarak isimlendirilir. Bu elemanlar bir üçgen ailesi oluştururlar. Şekil 3.9 'da üçgen ailesinin elemanlarından bir kısmı gösterilmiştir.



Şekil 3.9. (a) Lineer, (b) Kuadratik ve (c) Kübik eleman.

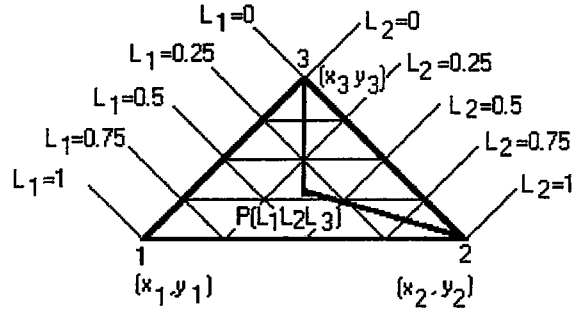
Üçgen ailesinin lineer ve kuadratik elemanlar için, koordinat sistemleri ile şekil fonksiyonları arasındaki bağıntıları göstermek üzere Şekil 3.10 'da verilen 1-2-3 üçgenini ele alalım. L_1 , L_2 , L_3 koordinatları ile kartezyen koordinat sistemi arasında,

$$\begin{aligned} X &= L_1 X_1 + L_2 X_2 + L_3 X_3 \\ Y &= L_1 Y_1 + L_2 Y_2 + L_3 Y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (3.73)$$

lineer bağıntı vardır. 1 noktasında $L_1 = 1$ ve $L_2 = L_3 = 0$, 2 noktasında $L_2 = 1$ ve $L_1 = 0$, 3 noktasında da $L_3 = 1$ ve $L_1 = L_2 = 0$ 'dır. Denklem (3.73)'ün x ve y 'ye göre çözümünden,

$$\begin{aligned} L_1 &= (a_1 + b_1 x + c_1 y) / 2\Delta \\ L_2 &= (a_2 + b_2 x + c_2 y) / 2\Delta \\ L_3 &= (a_3 + b_3 x + c_3 y) / 2\Delta \end{aligned} \quad (3.74)$$

elde edilir.



Şekil 3.10. Alan ve kartezyen koordinatsisteleri arasındaki ilişki.

(a) Doğrusal üçgen eleman için şekil fonksiyonları: Basit olarak alan koordinatlarıdır.

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

(3.75)

(b) Kuadratik üçgen eleman için şekil fonksiyonları: Köşe düğümleri için

$$N_1 = (L_1 - 1) L_1$$

$$N_2 = (L_2 - 1) L_2$$

$$N_3 = (L_3 - 1) L_3$$

(3.76)

ve kenarların ortasındaki düğümler için de

$$N_4 = 4L_1 L_2$$

$$N_5 = 4L_2 L_3$$

$$N_6 = 4L_3 L_1$$

(3.77)

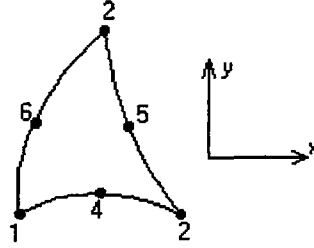
şeklindedir (Zienkiewicz, 1977 ; Rao, 1989).

Şekil 3.11 'de gösterilen üçgen bölgenin altı anahtar düğümlüne ait kartezyen koordinatların bilindiğini farzedelim. Eğer bu üçgen bölgede izoparametrik curvilinear bölmeleme yapılması istenirse, sınır üzerinde ve bölge içerisinde oluşturulacak düğümlerin kartezyen koordinatları,

$$X = \sum_{i=1}^6 N_i X_i$$

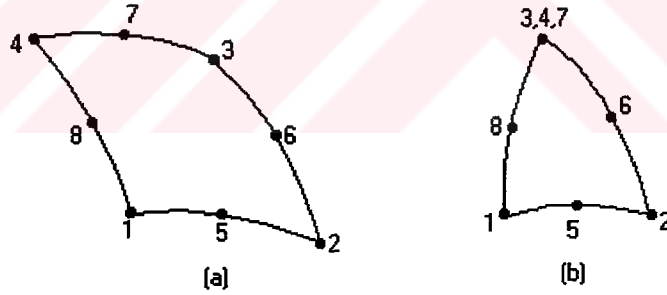
$$Y = \sum_{i=1}^6 N_i Y_i$$
(3.78)

ile elde edilebilir.



Şekil 3.11. İzoparametrik bölge.

Şekil 3.12.a 'da 8-düğümlü bir dörtgen eleman gösterilmiştir. Görüldüğü gibi düğümlerin dördü elemanın köşelerinde, diğer dördü de köşeleri birleştiren kenarların orta noktasında bulunur. Böyle bir dörtgen bölgenin iki köşesinin çakıştığını düşünelim. Bu durumda dörtgen bölge bozulur ve bir üçgen bölgeye dönüşür. Şekilden görüldüğü gibi 3, 4 ve 7 no.lu düğümler çakışmıştır (Şekil 3.12.b).

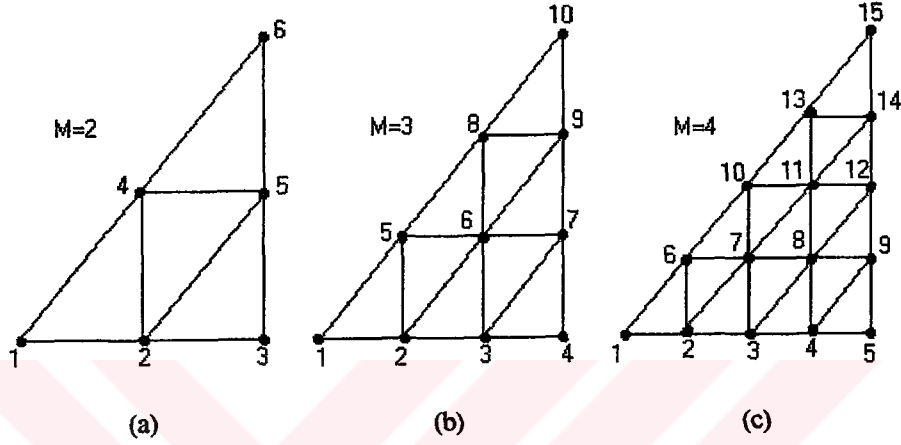


Şekil 3.12 (a) Dörtgen bölge. (b) Dörtgen bölgenin üçgen bölgeye dönüşmüş hali.

3.5.2 Merge Algoritması

Farklı bölgeler, Merge algoritmaları kullanılmak suretiyle birbiriyle bağlanabilir. Bu farklı bölgeler, herhangi bir sıra ile numaralanabilir. Algoritma, aynı düğümleri (aynı x,y,z koordinatlı olanları) bulacaktır. Bu bölmeleme yöntemi yapılırken; çözüm bölgesi, eğrisel kenarlar gözönüne alınmaksızın, mümkün olan en az sayıda üçgen elemana bölünür ve başlangıç bilgisi olarak; üçgen köşelerin koordinatları (x_1, x_2, x_3) , kenarların orta noktalarına ait koordinatları (x_4, x_5, x_6) , her bir

elemanın dielektrik sabiti, başlangıç potansiyel değeri bilinen kenar ve bu potansiyelin değeri belirlenir. Üçgenin herhangi bir kenarı eğrisel değilse, o kenarın orta noktasında düğüm numarası belirlemeye gerek yoktur.; x_4, x_5, x_6 için sıfır yazılır. Düğümlerin başlangıç numaraları, bir kenar üzerindeki bölmeleme sayısına bağlı olarak, uygun şekilde tesbit edilmelidir. Değişik bölmeleme durumları için düğümlerin nasıl numaralandırılacağı şekil 3.13 'te gösterilmiştir. Burada M, üçgenin her bir kenarının kaç parçaya bölüneceğini belirleyen bölmeleme sayısıdır.



Şekil 3.13. Farklı M değerleri ile bir üçgen elemanın bölmelemesi.

Şekil 3.13 'ten görüldüğü gibi bölmeleme sonunda elde edilecek eleman sayısı, M ile belirlenmektedir:

$$NELEM = M \cdot M \quad (3.79)$$

Bölmeleme sonunda meydana gelecek düğüm sayısı ise; M'in çift olması durumunda,

$$\begin{aligned} M = 2 \text{ için } NPOIN &= (M+1) \cdot M \\ M = 4 \text{ " } NPOIN &= (M+1) \cdot (M-1) \\ M = 6 \text{ " } NPOIN &= (M+1) \cdot (M-2) \\ \text{" " " } & \end{aligned} \quad (3.80)$$

şeklinde ve M'in tek sayısı durumunda da,

$$\begin{aligned} M = 3 \text{ için } NPOIN &= (M+1) \cdot (M-1) + (M-1) \\ M = 5 \text{ " } NPOIN &= (M+1) \cdot (M-2) + (M-2) \\ M = 7 \text{ " } NPOIN &= (M+1) \cdot (M-3) + (M-3) \\ \text{" " " } & \\ \text{" " " } & \end{aligned} \quad (3.81)$$

şeklinde değişmektedir. İki eleman birleştirildiğinde; toplam eleman sayısı iki katına yükselir, düğüm sayısı ise iki katından $(M+1)$ kadar az olur (Cebeci, 1992).

Bir çözüm bölgesi içerisindeki farklı üçgen elemanlar için ayrı ayrı M 'ler kullanılabilir. Böylece istenen kısımların daha seyrek veya daha sık olarak üçgen elemanlara ayrıştırılması sağlanabilir.



BÖLÜM 4

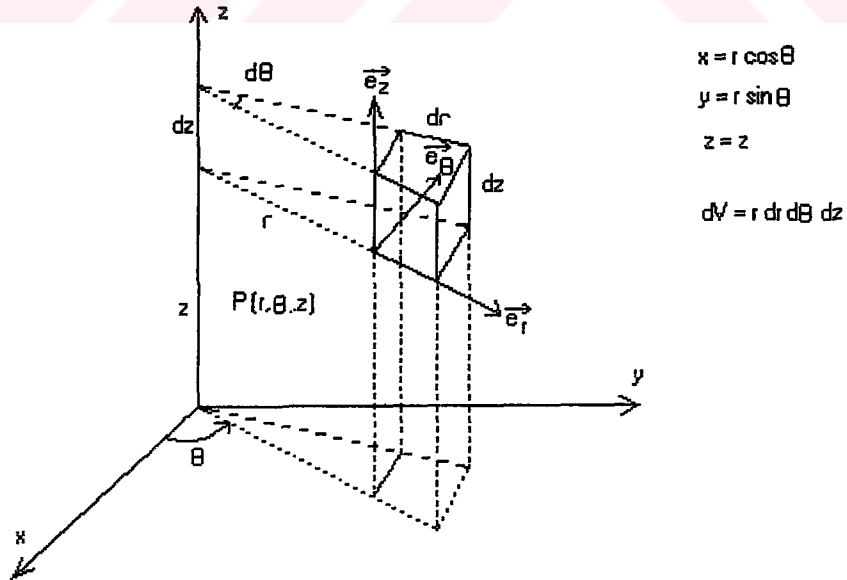
EKSENEL SİMETRİLİ PROBLEMLERİN ANALİZİ

4.1. Giriş

Bu bölümde, eksenel simetrlili problemlerin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü için gerekli bağıntıların çıkarılması hedeflenmiştir. Buradaki “eksenel simetri” kavramı ile elektrotların simetri eksenini boyunca alınan bir kesitin, bu eksen etrafında döndürüldüğünde değişmeyeceği ifade edilmektedir. Bu tip problemler üç boyutlu olmasına karşın, iki boyutlu olarak incelenebilir.

4.2. Problemin Silindirik Koordinat Sisteminde İncelenmesi

Koordinat sistem, silindirik koordinat sistemi olarak ele alındığında, eksenel simetri nedeniyle herhangi bir (r, θ, z) noktasındaki potansiyelin değeri r ve z sabit kalmak koşuluyla θ ile değişmez. Bu durumda problemin üç boyutlu bir uzay yerine bir düzlem üzerinde incelenmesi mümkündür.



Şekil 4.1 Silindirik koordinat sistemi

Silindirik koordinatlarda

$$\vec{\text{grad}} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ olması nedeniyle ($\phi = \phi(r, z)$)

$$\vec{\text{grad}} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (4.2)$$

olarak ele alınabilir.

4.3 Elektrostatik Enerji

İncelenen elektrot sisteminin simetri ekseninden geçen düzlem üzerindeki “ B ” çözüm bölgesinin yarısının simetri eksenini etrafında 2π kadar döndürülmesiyle oluşan V hacmi içerisinde depolanan potansiyel enerji:

$$W = \frac{\epsilon}{2} \iiint \left| \vec{\text{grad}} \phi \right|^2 r dr d\theta dz \quad (4.3)$$

dir. Burada “ $r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$ ” sonsuz küçük dV hacmidir. Eğer (4.2)’deki ifade (4.3)’de yerine konarak $\theta = 0 - 2\pi$ arasında integre edilirse enerji,

$$W = \epsilon \pi \iint \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} r dr dz \quad (4.4)$$

olarak bulunur.

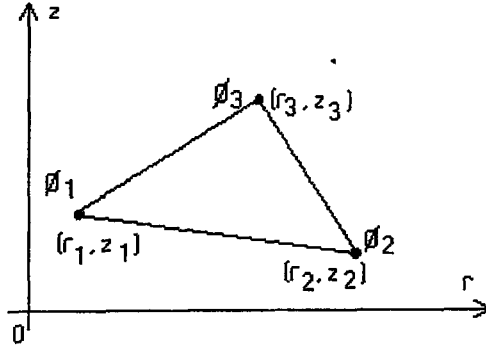
4.4 Problemin Formülasyonu

Potansiyelin dönme açısı θ ’dan bağımsız olması nedeniyle üçgen elemanlar r - z koordinat sisteminde tanımlanamaz gösterilmiştir. Şekil 4.2’de bir üçgen elemanın bu koordinat sisteminde tanımlanması gösterilmiştir. Burada r ve z, radyal ve aksenal koordinatları göstermektedir.

Üçgen eleman içinde potansiyelin lineer değişeceği kabul edilirse potansiyel

$$\phi = P_1 + P_2 r + P_3 z \quad (4.5)$$

şeklinde bir ifade ile verilebilir.



Şekil 4.2. Radyal - Eksenal koordinatlarda bir üçgen eleman

(4.5)'deki potansiyel fonksiyonu her düğüm için yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

(4.6)'daki denklem takımından P_1 , P_2 ve P_3 katsayıları "Cramer kuralı" ile bulunabilir. Katsayı matrisinin determinanı:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2A = (r_2 z_3 - r_3 z_2) + (r_3 z_1 - r_1 z_3) + (r_1 z_2 - r_2 z_1) \quad (4.7)$$

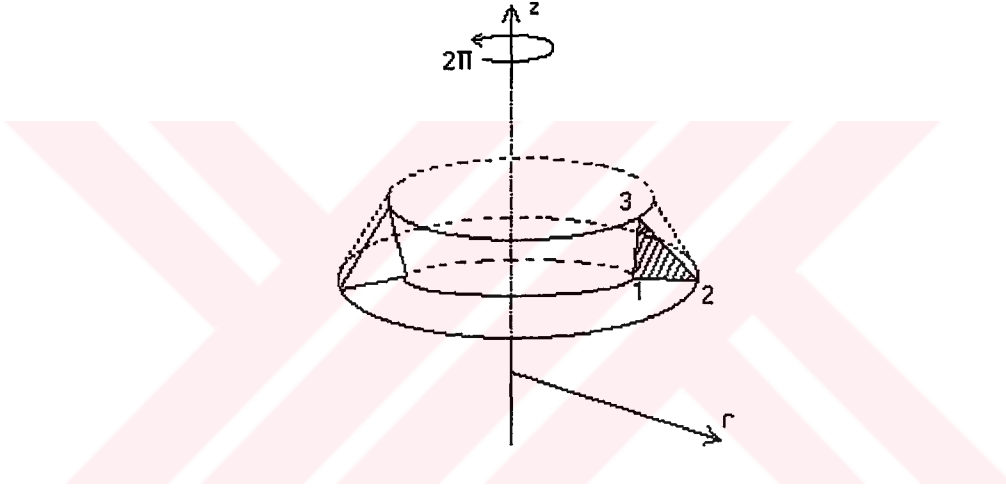
A üçgen elemanın alanı olmak üzere, determinant üçgenin alanının iki katına eşittir. P_1 , P_2 ve P_3 katsayıları cramer kuralına göre

$$P_1 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & z_1 & \phi_1 \\ r_2 & z_2 & \phi_2 \\ r_3 & z_3 & \phi_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad P_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \phi_1 \\ 1 & z_2 & \phi_2 \\ 1 & z_3 & \phi_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad P_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & \phi_1 \\ 1 & r_2 & \phi_2 \\ 1 & r_3 & \phi_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (4.8)$$

eşitliklerinden bulunur. Bu eşitliklerin sonucunda

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{2A} \left[(r_2 z_3 - r_3 z_2) \phi_1 + (r_3 z_1 - r_1 z_3) \phi_2 + (r_1 z_2 - r_2 z_1) \phi_3 \right] \\
 P_2 &= \frac{1}{2A} \left[(z_3 - z_2) \phi_1 + (z_1 - z_3) \phi_2 + (z_2 - z_1) \phi_3 \right] \\
 P_3 &= \frac{1}{2A} \left[(r_3 - r_2) \phi_1 + (r_1 - r_3) \phi_2 + (r_2 - r_1) \phi_3 \right]
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.3 Radyal-eksenel koordinatlarda bir üçgen kesitli halka eleman

İfade (4.5)' in $\frac{\partial \phi}{\partial r}$ ve $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ şeklindeki türevleri düzenlenerek (4.4)' de yerine konulursa, bir üçgen elemanın Z eksenini etrafında 2π kadar döndürülmesiyle şekil 4.3' de gösterilen üçgen kesitli bir halka elemanın oluşturduğu hacim içerisindeki enerji

$$W^{(e)} = \epsilon_r^{(e)} \epsilon_0 \pi (P_2^2 + P_3^2) \iiint_{A^{(e)}} r \, dr \, dz \tag{4.10}$$

olarak bulunur. Burada;

$\epsilon_r^{(e)}$: Eleman içindeki ortamın bağıl dielektrik sabiti

ϵ_0 : Boşluğun dielektrik sabitidir.

Şekil 4.2' deki üçgen elemanın $A^{(e)}$ yüzeyi üzerinden yapılan integrasyon işleminin sonucu:

$$\iint_{A^{(e)}} r \, dr \, dz = \frac{A}{3}(r_1 + r_2 + r_3) = A r_c \quad (4.11)$$

$$r_c = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

olur, (4.10)' da yerine konulursa, enerji:

$$W^{(e)} = \varepsilon_r^{(0)} \varepsilon_0 \pi A (P_2^3 + P_3^2) r_c \quad (4.12)$$

sonlu elemanlar yöntemi (SEY), tüm bölge içindeki enerjinin minimumlaştırılması prensibine dayanır. Ele alınan bir elemanın enerjisi, elemanın düğüm potansiyellerine bağlı olarak yazılabildiğine göre

$$\frac{\partial W^{(e)}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (4.13)$$

yapılırsa

$$\frac{\partial W^{(e)}}{\partial \phi_i} = \varepsilon_r^{(0)} \varepsilon_0 \pi A \left[2 P_2 \frac{\partial P_2}{\partial \phi_i} + 2 P_3 \frac{\partial P_3}{\partial \phi_i} \right] r_c = 0 \quad (4.14)$$

$i = 1, 2, 3$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.15)$$

3x3 boyutunda “ katılık matrisi ” elde edilir. Katılık matrisi simetrik bir matris olup elemanları

$$S_{11} = \frac{\varepsilon_r^{(e)} \pi}{2A} [(r_3 - r_2)^2 + (z_2 - z_3)^2] r_c$$

$$S_{12} = \frac{\varepsilon_r^{(e)} \pi}{2A} [(r_3 - r_2)(r_3 - r_1) + (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)] r_c \quad (4.16)$$

$$S_{13} = \frac{\varepsilon_r^{(e)} \pi}{2A} [(r_3 - r_2)(r_1 - r_2) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_2)] r_c$$

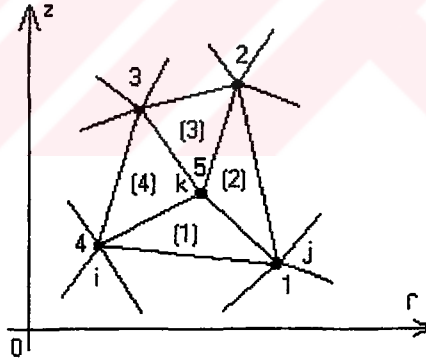
(4.14) ifadesindeki cebirsel işlemler sonucunda bulunur. Yukarıda anlatılan minimumlaştırma prensibi çözümün yapılacağı bölgedeki elemanlara aynı anda uygulanacak olursa, tanımlanan tüm elemanların düğüm potansiyelleri arasındaki bağıntı bir lineer denklem sistemine dönüşür.

$$[S_{sist}][\phi] = 0 \quad (4.17)$$

Burada ϕ , sistemin düğüm noktalarının potansiyellerinden oluşan bir sütun matristir. S_{sist} matrisi simetrik ve tekil olmayan bir matris olup, oldukça seyrek (Sparse matris).

(4.17)'de elde edilen lineer denklem sistemindeki katsayı matrisinin seyrek olması dolayısıyla, doğrudan matris tersi alma yöntemlerinden faydalanmak hem gereksiz bellek kaybına neden olacak hem de büyük boyutlu matrislerde bilgisayarın yuvarlatma hatası dolayısıyla hata miktarı artacaktır. Bu nedenle bilinmeyen sayısı yüzü geçtiği zaman iteratif yöntemler önem kazanır (Flatabö ve Riege, 1972).

Şekil 4.4' deki üçgen elemanlar incelendiğinde, 5 nolu düğümüne ait ϕ_5 potansiyelinin değeri, bu düğümüne komşu dört düğümün potansiyeline bağlıdır. Benzer şekilde 1,2,3 ve 4 düğümleri için de o düğümüne komşu düğümlerin potansiyelleri birbirlerine bağlıdır.



Şekil 4.4 Üçgen elemanlardan oluşmuş ızgaradan bir bölüm.

5 nolu düğüm için, 1, 2, 3 ve 4 nolu elemanların enerjilerini aynı anda minimum yapan ϕ_5 değeri aranır

$$\frac{\partial \left[\sum_{i=1}^4 W^{(i)} \right]}{\partial \phi_5} = 0 \quad (4.18)$$

yazılabilir(Kuffel, 1984).

Bu minimumlaştırma işleminin sonucunda

$$\begin{aligned}
 & \left[S_{ki}^{(1)} \phi_4 + S_{kj}^{(1)} \phi_1 + S_{kk}^{(1)} \phi_5 + \right. && \text{[eleman (1)'den]} \\
 & S_{ki}^{(2)} \phi_1 + S_{kj}^{(2)} \phi_2 + S_{kk}^{(2)} \phi_5 + && \text{[eleman (2)'den]} \\
 & S_{ki}^{(3)} \phi_2 + S_{kj}^{(3)} \phi_3 + S_{kk}^{(3)} \phi_5 + && \text{[eleman (3)'den]} \\
 & \left. S_{ki}^{(4)} \phi_3 + S_{kj}^{(4)} \phi_4 + S_{kk}^{(4)} \phi_5 \right] = 0 && \text{[eleman (4)'den]}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

elde edilir. Bu denklem

$$K_{15} \phi_1 + K_{25} \phi_2 + K_{35} \phi_3 + K_{45} \phi_4 + K_{55} \phi_5 = 0 \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 K_{15} &= \left[S_{ki}^{(2)} + S_{kj}^{(1)} \right] \\
 K_{25} &= \left[S_{ki}^{(3)} + S_{kj}^{(2)} \right] \\
 K_{35} &= \left[S_{ki}^{(4)} + S_{kj}^{(3)} \right] \\
 K_{45} &= \left[S_{ki}^{(1)} + S_{kj}^{(4)} \right] \\
 K_{55} &= \left[S_{kk}^{(1)} + S_{kk}^{(2)} + S_{kk}^{(3)} + S_{kk}^{(4)} \right] = \sum_{m=1}^4 S_{kk}^{(m)}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak elde edilir.

Lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan iteratif yöntemlerde her düğüm için (4.20)'deki gibi bir denklemin kurulması ve sonra da iterasyona sokulması gerekir. Denklemi oluşturan K_{ij} sabitlerinin hesaplanması ve iterasyona sokulacak düğüm potansiyelinin eşitliğini diğer tarafında yalnız bırakılması işlemi iterasyon için gereklidir.

Şekil 4.4'deki 1 nolu eleman incelendiğinde, bu elemanın katılık matrisindeki k , satırının elemanları (4.21)'deki K_{ij} katsayılarına toplam halinde katkıda bulunduğu görülür. Bu aynı zamanda 5 düğümünü saran diğer elemanlar da benzer şekilde katkıda bulunurlar. Bu durumda herhangi bir k düğüme ait potansiyel

$$\phi_k = - \frac{1}{\sum_T S_{kk}} \left[\sum_T (S_{ki} \phi_i + S_{kj} \phi_j) \right] \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \sum_T işareti k düğümünü saran elemanların toplamını ifade etmektedir.

Şekil 4.4'deki i, j, k indisleri her üçgen için saat yönünde ters yönde olacak şekilde işaretlenir.

4.5 İteratif Çözüm

Laplasyon alan problemlerinde belirli bir potansiyel değere sahip en az iki elektrot vardır. Tanımlanan elemanlara ait düğümlerin potansiyelleri bu iki elektrodun potansiyeli arasında bir değer alır. İterasyondan önce elektrotların üzerindeki düğümler hariç diğer bütün düğümlerin potansiyellerine başlangıç olarak ortalama değeri verildikten sonra bu düğümler sırayla iterasyona sokulurlar.

$$\phi^0 = \phi_{ort} = \frac{1}{2} (\phi_{max} + \phi_{min}) \quad (4.23)$$

ϕ_k ' nin (4.22)'den hesaplanmasıyla k. inci düğüm için yeni potansiyel değeri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\phi_k^{(n+1)} = \phi_k^n + w(\phi_k - \phi_k^{(n)}) \quad (4.24)$$

Burada w rölaksasyon veya hızlandırma faktörü (acceleration factor) olup $1 < w < 2$ arasında alacağı bir w_0 değeri iterasyonun en hızlı yakınsamasını sağlar. w_0 ' ın yaklaşık değeri deneme - yanılma ile bulunabilir. Elektrotlar üzerindeki düğümler iterasyona sokulmayıp, bu işlem süresince sabit bırakılır.

Her iterasyon tamamlandıktan sonra düğüm potansiyellerinin bir önceki iterasyona göre bağlı değişimlerinin maksimum değeri belirli bir ϵ sınırı altında kaldığında, yani;

$$\max \left| \frac{\phi^{(n-1)} - \phi^{(n)}}{\phi^{(n)}} \right| < \epsilon \quad (4.25)$$

olduğunda çözümün gerçek değere yeterince yakınsadığı kabul edilerek iterasyon durdurulur.

4.6 Elektrik Alan Şiddeti Hesabı

Potansiyelin bir üçgen eleman içinde lineer olarak değişmesi nedeniyle elektrik alan şiddeti

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \quad (4.26)$$

olup, eleman içinde sabit bir değer alır.

4.7 Kapasite Hesabı

Elektrot sisteminin kapasitesi, çözüm bölgesinde tüm elemanlar içindeki elektrostatik enerjinin hesabından yararlanarak

$$C = \frac{2w}{U^2} = \frac{2\epsilon_0 \pi \sum_{i=0}^n \epsilon_{ri} A_i E_i^2 r_{ci}}{U^2} \quad (4.27)$$

ifadesinden bulunabilir. Burada n , üçgen elemanların sayısıdır.

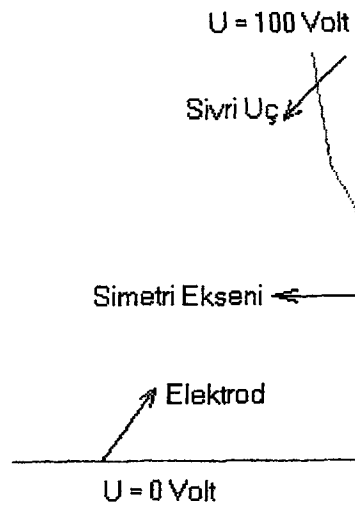
BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

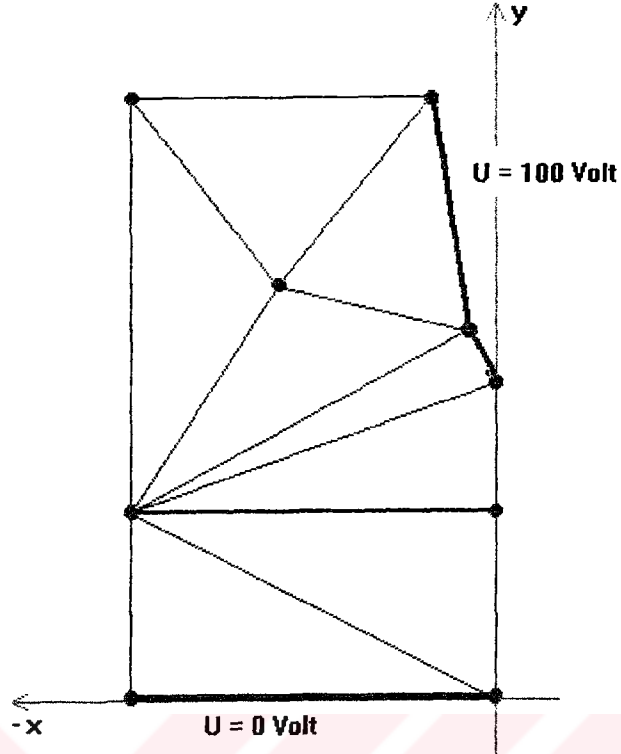
5.1. Çözölmüş Problemlerle İlgili Bilgisayar Sonuçları.

SEY kullanılarak yapılan problem çözümlerinde, elemanların boyutlarının sınırlara uygun ve yeterli sayıda olması, yapılan hesap hatalarının azaltılması bakımından önem taşımaktadır. Özellikle düzgün olmayan eğrisel kenarlı problemlerde eleman sayının çok fazla seçilmesi gerekmektedir. Bundan dolayı SEY ile çözüm yapan bilgisayar programları, çok miktarda giriş bilgisine ihtiyaç duymaktadır. Elemanları belirleyen düğümlerin numaraları ve koordinatları, malzeme özellikleri ve başlangıç değerleri gibi bilgilerden oluşan verilerin el ile hazırlanması büyük zorluklara sebep olmaktadır. Bu zorluklardan kurtulmak ve Sonlu eleman programlarının kullanımını kolaylaştırmak için otomatik veri üretimi konusunda çalışmalar yapılmıştır.

Bu kısımda otomatik veri üretimi için şekil 5.1 'deki Sivri uç-Düzlem elektrod sistemi ele alınmıştır. Burada problemimizin şekli simetrik olduğundan dolayı, yalnızca sol tarafı alınmıştır. Problemi çözmek için önce 8 elemanlı ve 9 düğümlü küçük bir başlangıç bilgisi tesbit etmek için el ile bölmeleme yapılmıştır. Başlangıç bilgisinde, potansiyel değeri bilinen düğümlerle o düğümlerdeki potansiyel değerleri belirlenmiştir. Ayrıca bütün elemanların sahip oldukları dielektrik katsayıları ve iletkenlikleri verilmiştir.

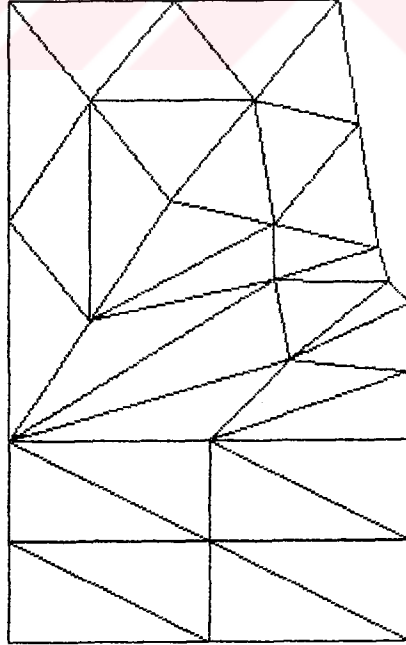


Şekil 5.1. Sivri Uç-Düzlem elektrod sistemi.



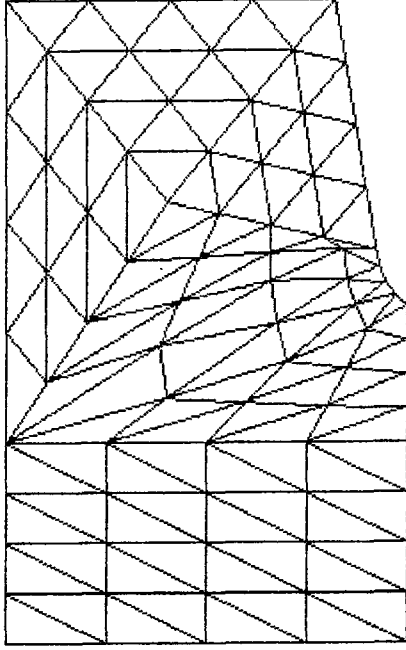
Şekil 5.2. Sivri Uç-Düzlem elektrod sistemi için başlangıç bölmelemesi.

Şekil 5.2 'ye göre tesbit edilen başlangıç bilgisinden, $M = 2$ (bölmeleme katsayısı) için hesaplanan değerler Şekil 5.3. 'te çizilmiştir.

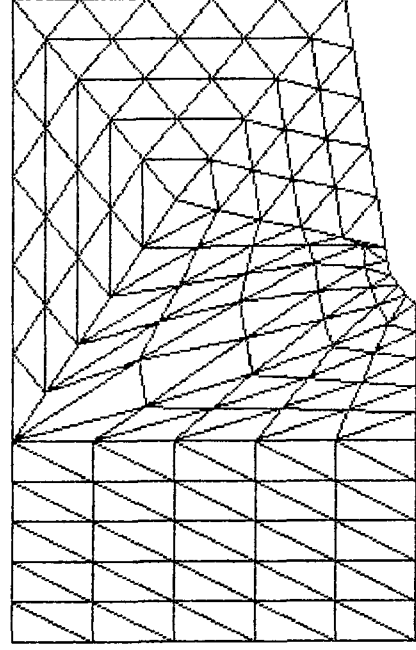


Şekil 5.3. $M = 2$ için Sivri Uç-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme (NELEM=32, NPOIN=25)

Değişik M değerleri için elde edilen diğer bölmelemeler aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.

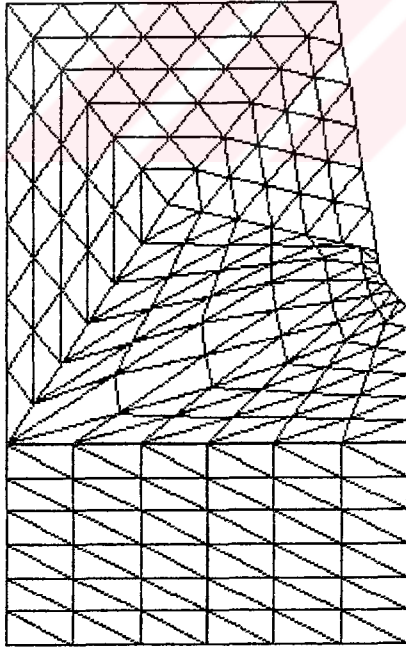


M = 4 (NELEM= 192, NPOIN=131)

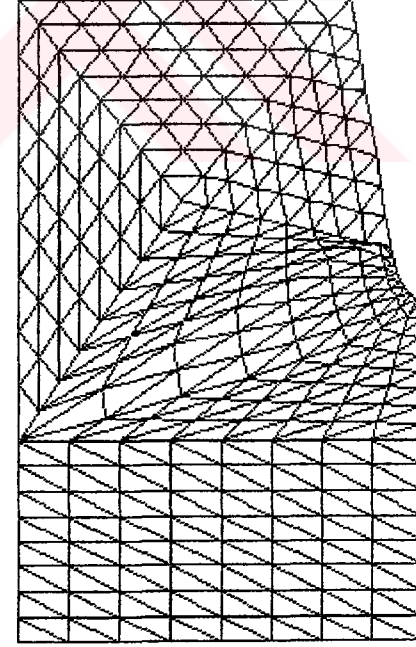


M=5 (NELEM=300, NPOIN=193)

Şekil 5.4. M = 4 ve M=5 için Sivri Uç-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme.



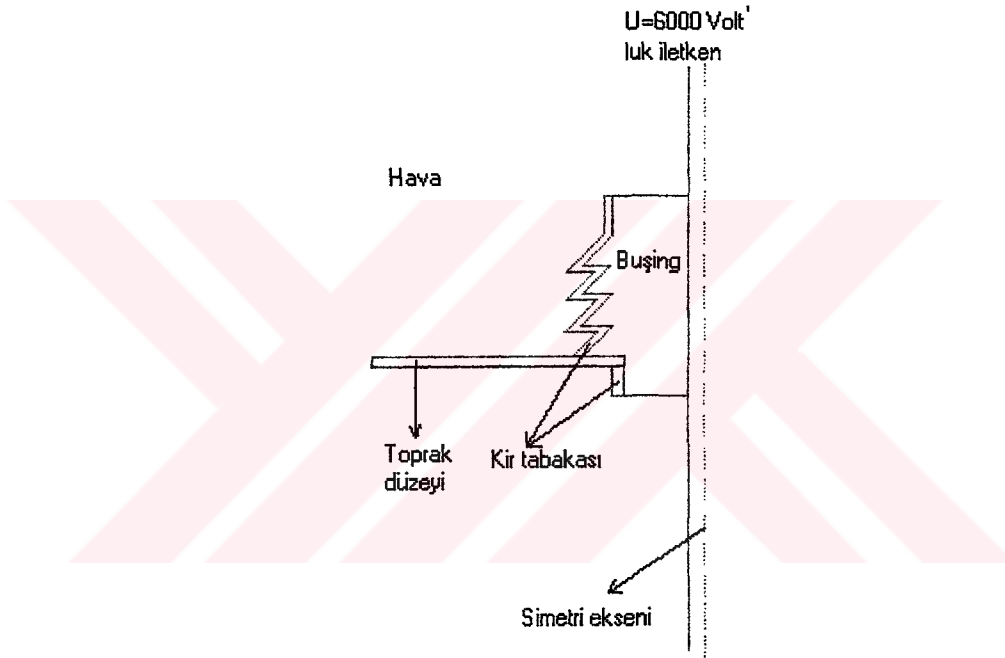
M=6 (NELEM=432, NPOIN=267)



M= 8 (NELEM=768, NPOIN=451)

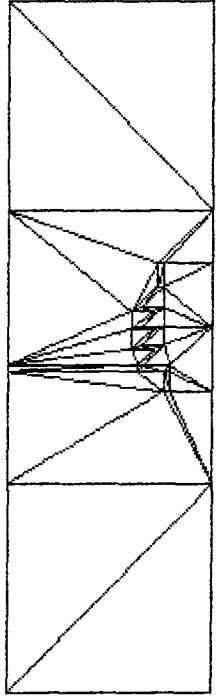
Şekil 5.5. M = 6 ve M=8 için Sivri Uç-Düzlem elektrod sistemine ait bölmeleme

Bu kısımda örnek problem olarak “ Buşing ” ele alınmıştır. Şekil 5.6 ‘da yüksek gerilim iletkeninin toprak düzeyinden geçişi için kullanılan tipik bir buşing görülmektedir. Normal şartlarda bushing yalıtkandır, fakat üzerinde bulunan kir tabakası elektrik alan oluşturur. Havanın geçirgenliği 1 ‘dir, bushing’in ise 5.5 olarak alınmıştır. Gerilim kademesi olarak 6000 V kabul edilmiştir. Şeklin geometrisi, iletkene göre simetriktir, bundan dolayı problem iki boyutlu bir problem olarak analiz edilebilir. Bu simetriden dolayı buşingin sadece sol tarafı alınarak çözüm yapıldı. Bushing ‘in üzerinde bulunan kir tabakasının homojen olarak dağıldığı kabul edilmiştir. Ayrıca bu kir tabakasının çeşitli durumları için yani iletkenlik katsayısının çeşitli değerleri için kompleks potansiyel çözümler yapıldı.

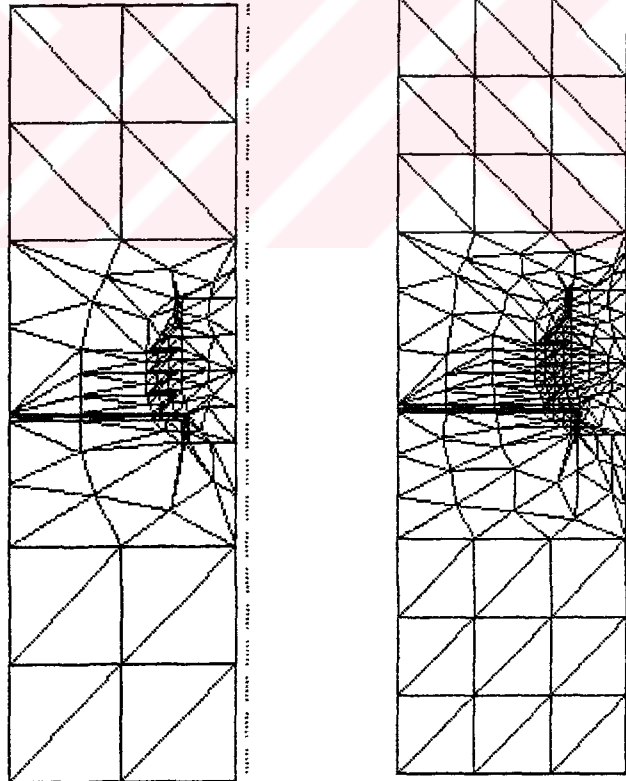


Şekil 5.6. YG iletkeninin toprak geçişi için kullanılan buşing.

İlk olarak daha önce de yapıldığı gibi, giriş bilgisi elde etmek üzere problemin el ile bölmeleme yapıldı. Şekil 5.7 ‘de bu bölmeleme çizilmiştir. Daha sonra şekil M ‘in 2,3 ve 4 değerleri için bölmeleme yapılmıştır. Kompleks potansiyel çözümü yapılırken, ilk olarak buşingin ideal (yani üzerinde kir tabakası olmadığı) durum için incelenmiştir. Yani $\sigma = 0$ olma durumu ki bu durum statik elektrik alanı olma durumudur. Burada denklem sistemi, sadece ϵ ‘a bağlı katsayılardan oluşur ve bu katsayılar reeldir. Dinamik elektrik alanı durumunda ise $\sigma \neq 0$ ‘dır ve uygulanan alternatif gerilime ait frekansın etkisi gözönüne alınmalıdır. Ve bu durumda kompleks dielektrik sabiti “ $\sigma + j w \epsilon$ ” olarak işleme konulur.

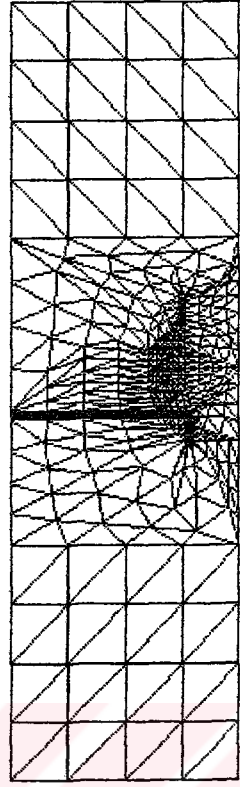


Şekil 5.7. Bushing için başlangıç bölmelemesi. (NELEM=59, NPOIN=37)

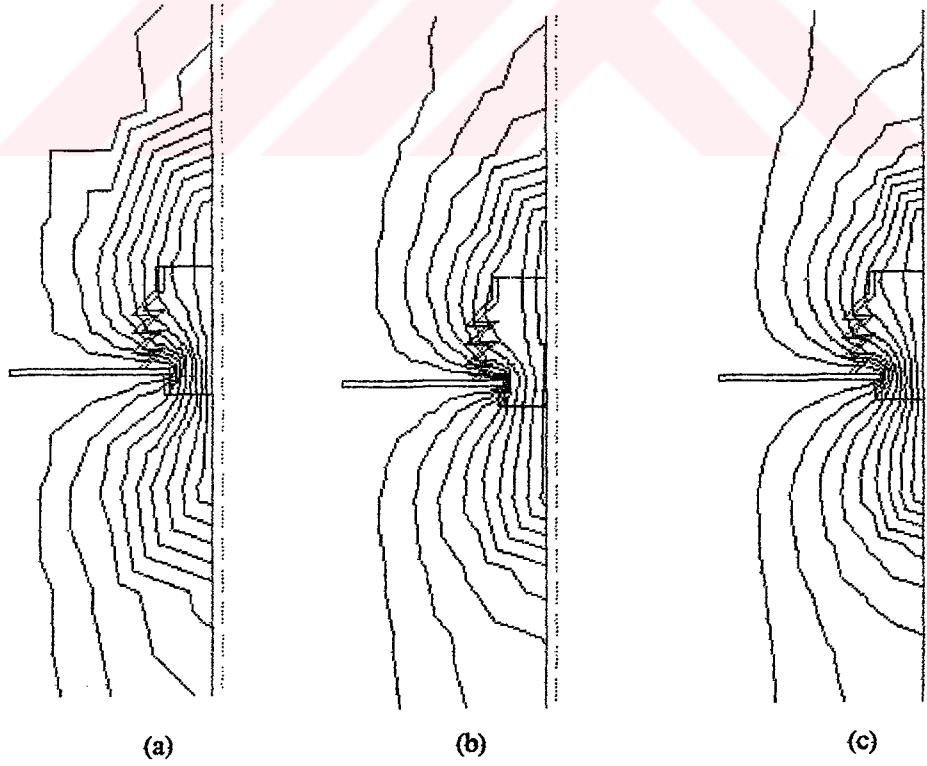


M=2 (NELEM=236, NPOIN=132) M=3 (NELEM=531, NPOIN=286)

Şekil 5.8. M=2 ve M=3 için buşinge ait bölmeleme.

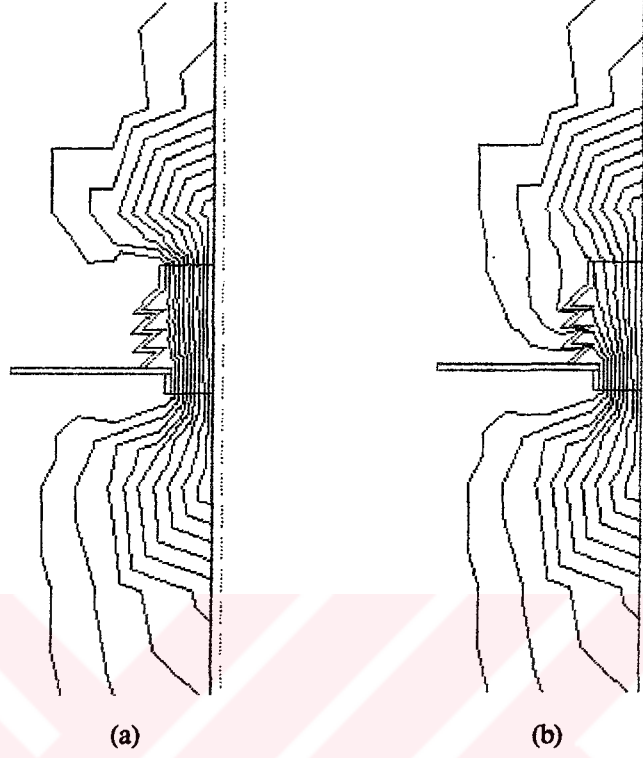


Şekil 5.9. $M = 4$ için buşinge ait bölmeleme (NELEM= 944, NPOIN= 499)

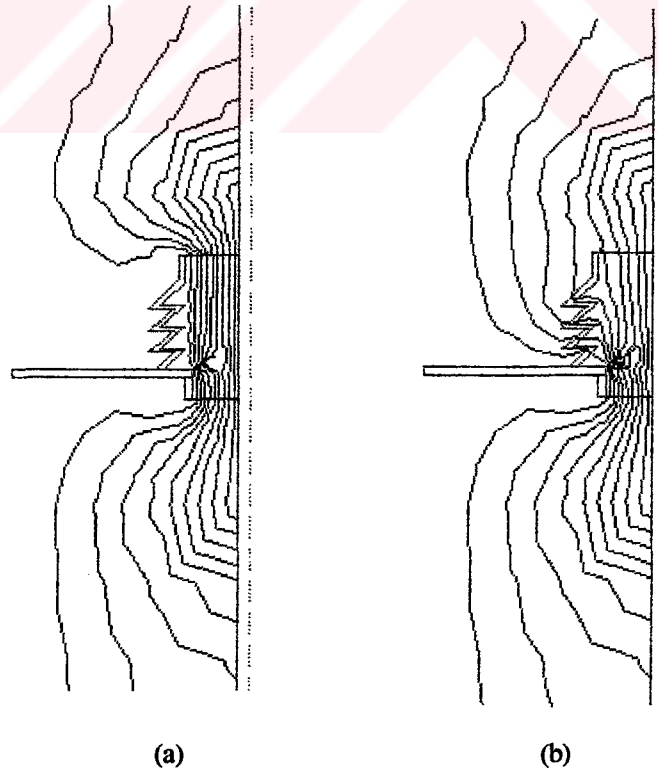


Şekil 5.10. $\sigma = 0$ olması durumunda buşing için eşpotansiyel eğriler. Buşing'in a) $M=2$, b) $M = 3$, c) $M = 4$ ile bölmelenmesi durumundaki eğriler.

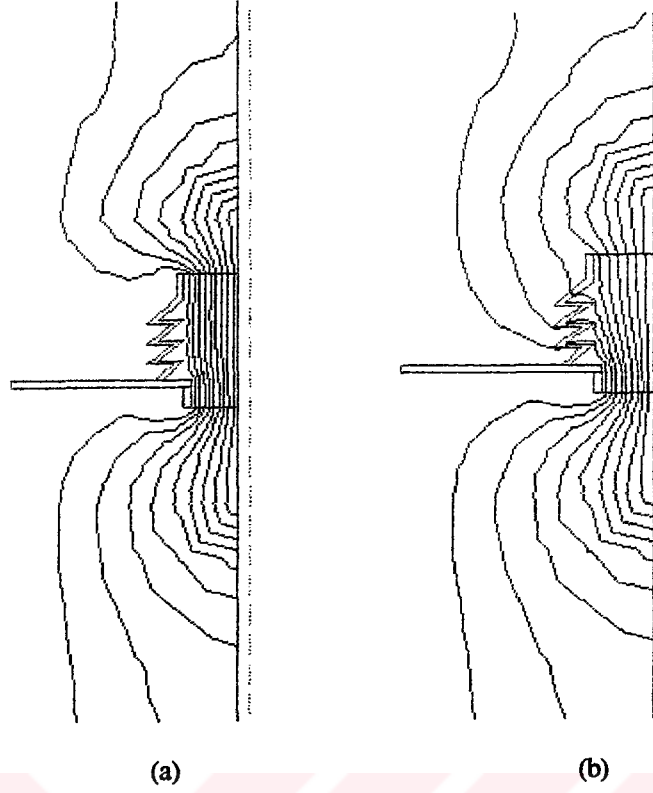
Daha önce dinamik alanlardan yani, $\sigma \neq 0$ durumundan bahsedilmişti. Aşağıdaki şekillerde M 'nin ve σ 'nın çeşitli değerlerine göre eşpotansiyel eğrilerin çizimi gerçekleştirilmiştir.



Şekil5.11. $M = 2$ ve a) $\sigma = 10^{-2}$ b) $\sigma = 10^{-6}$ için çizilen genlik eşpotansiyel eğriler.

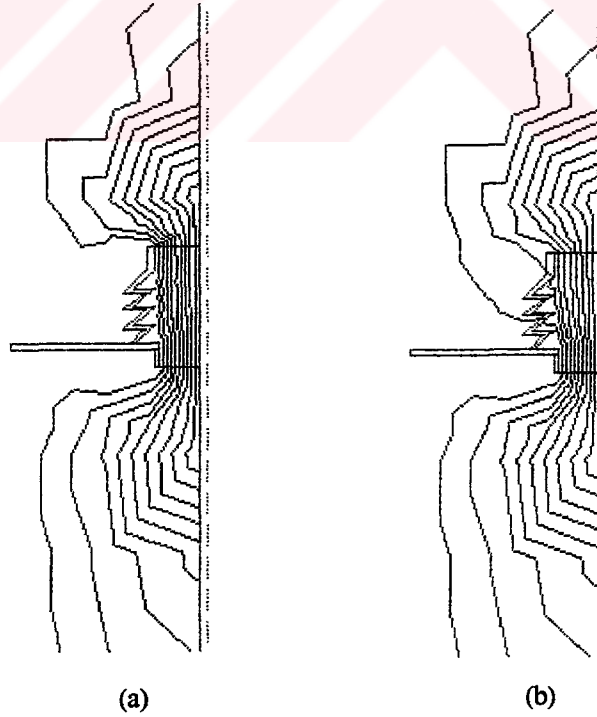


Şekil 5.12. $M = 3$ a) $\sigma = 10^{-2}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için çizilmiş genlik eşpotansiyel eğriler.

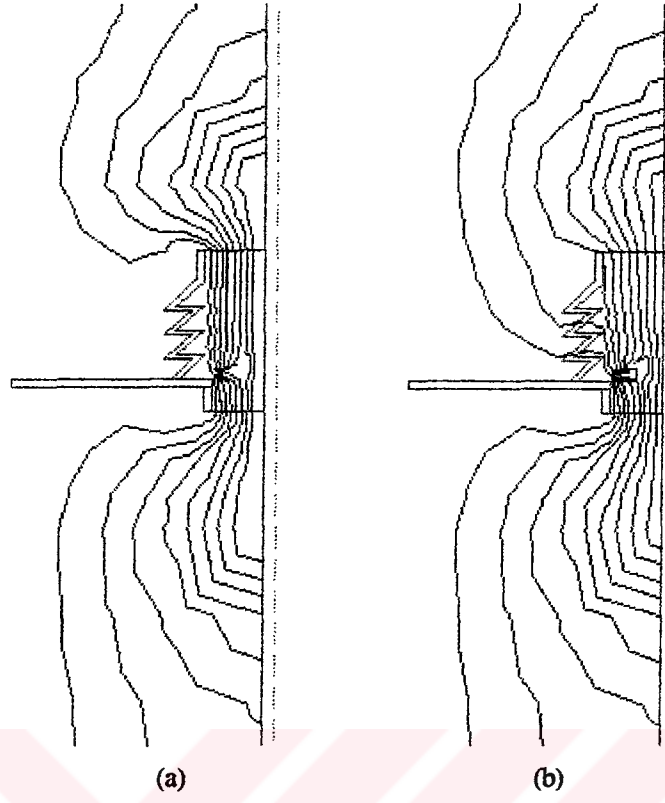


Şekil 5.13. $M = 4$ a) $\sigma = 10^{-2}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için çizilmiş genlik eşpotansiyel eğriler.

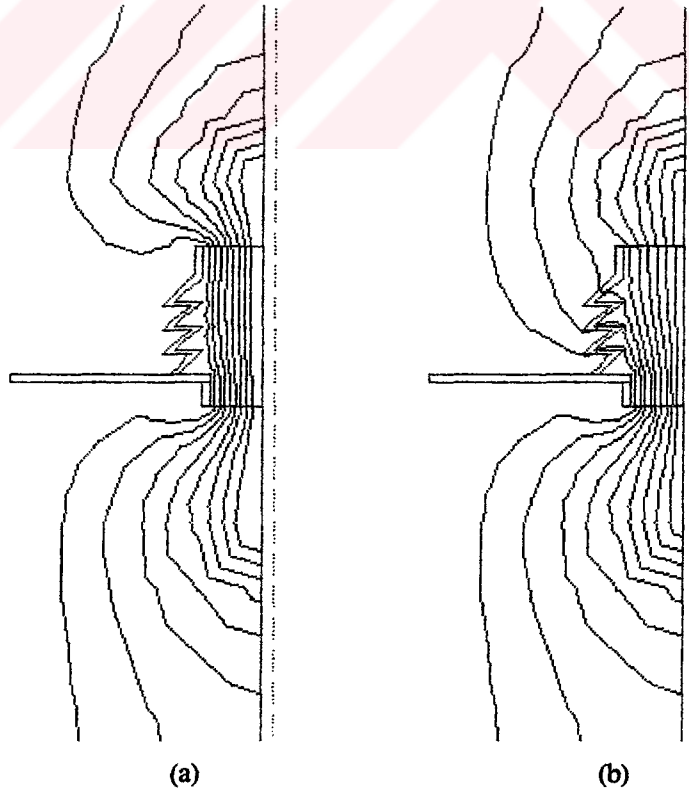
Yukarıda genlik değeri çizilen eşpotansiyel eğrilerin reel ve imajiner kısımları vardır. Bunlar da ayrı ayrı çizilecek olursa aşağıdaki eğriler elde edilir.



Şekil 5.13. $M = 2$ a) $\sigma = 10^{-4}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için reel eşpotansiyel eğrileri.

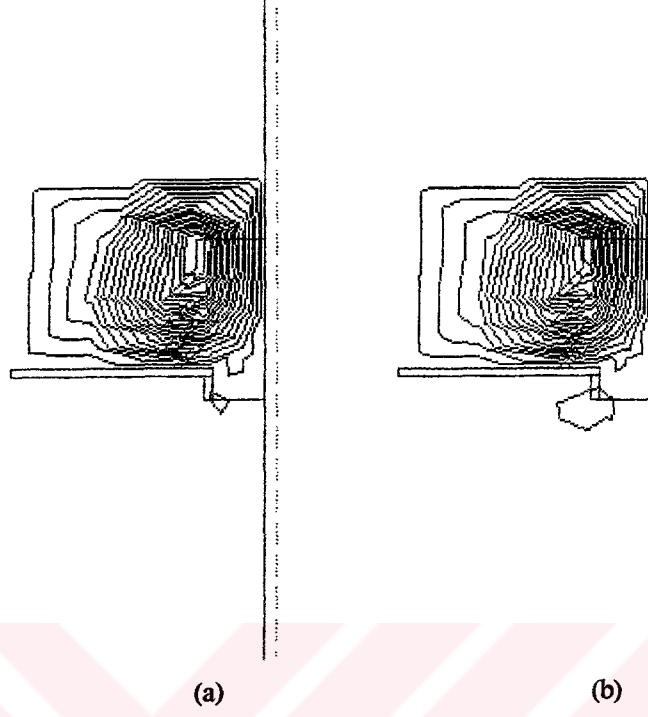


Şekil 5.14 $M = 3$ a) $\sigma = 10^{-4}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için reel eşpotansiyel eğrileri.

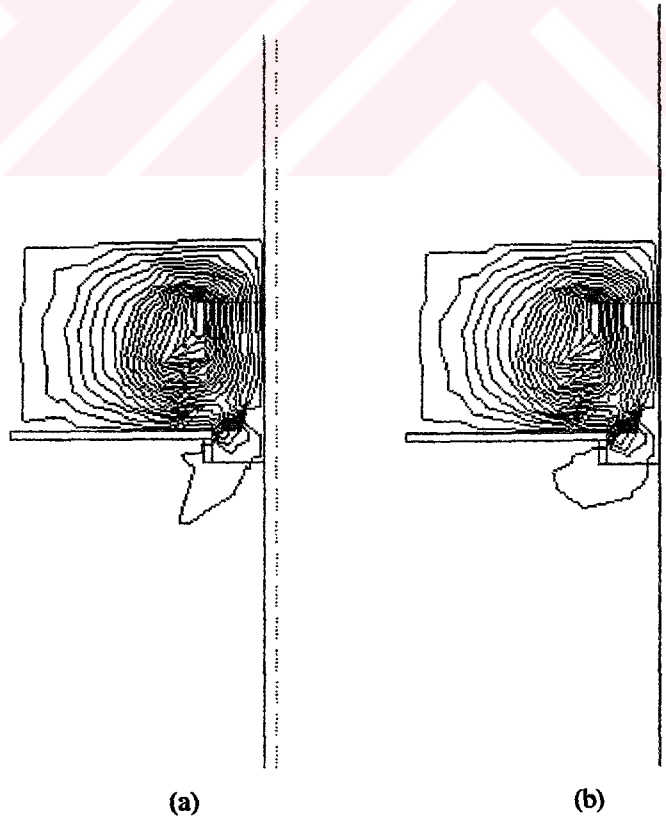


Şekil 5.14. $M = 4$ a) $\sigma = 10^{-4}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için reel eşpotansiyel eğrileri.

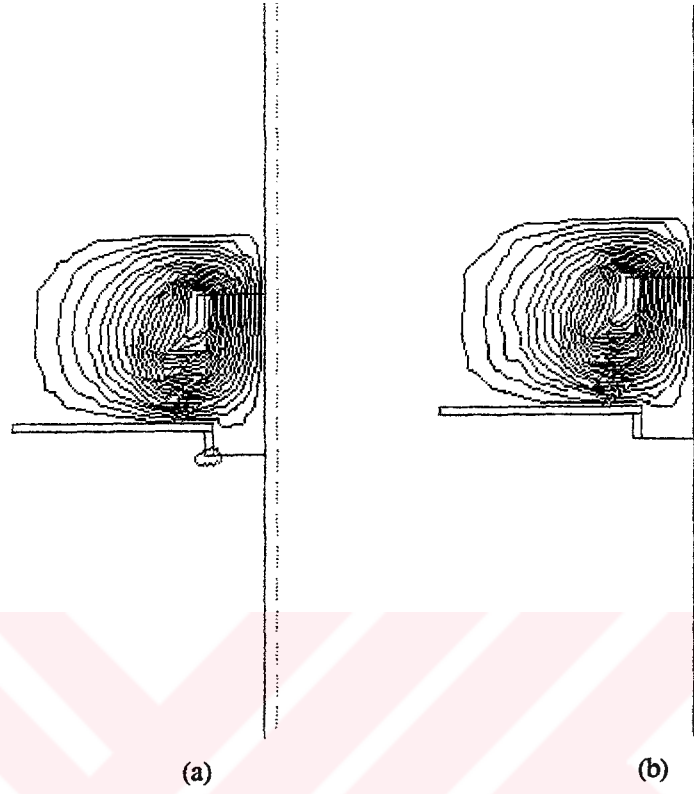
Şimdiye kadar çizilen eğrilerde çizgiler arasında %10 potansiyel farkı vardı yani, eğriler dokuz adet çizgiden oluşuyordu. İmajiner eğrileri çizerken bu sayı ondokuz adete çıkarıldı.



Şekil 5.14. $M = 2$ a) $\sigma = 10^{-2}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için imajiner eşpotansiyel eğrileri.



Şekil 5.14. $M = 3$ a) $\sigma = 10^{-2}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için imajiner eşpotansiyel eğrileri.



Şekil 5.15. $M = 4$ a) $\sigma = 10^{-2}$ ve b) $\sigma = 10^{-6}$ için imajiner eşpotansiyel eğrileri.

5.2. Sonuç

Önce incelenen otomatik bölmeleme probleminde; M 'in çeşitli değerleri için bölmelemeler yapılmıştır. Problemi modellemede M 'in değeri arttıkça yani eleman sayısı arttıkça problem çözümü daha hassaslaşmakta ve modelleme daha iyi olmaktadır. İlk bilgileri almak için yaptığımız bölmeleme ile $M=8$ değeri için yaptığımız bölmeleme arasında sivri ucu modellemek yönünden bir fark olduğu görülmektedir. Bir kabloyu veya bir izolatörü ele aldığımızda eğrisel kenarlar daha fazla olduğundan bu fark daha açık görülecekti. Eleman sayısı arttıkça eğri kenarı, daha fazla kenarla modellemiş olunuyor ki modellemede gerçeğe daha fazla yaklaşmış olunuyor.

Sonra ise buşing'in temiz (yani $\sigma = 0$ olması) durumu ile üzerinde kir tabakası olması ($\sigma \neq 0$ olması) durumu arasındaki fark yukarıdaki eğrilerde aşikar bir şekilde görülmektedir. Kir tabakasının iletkenliğinin küçük olduğu durumlarda, eğriler toprak düzeyine doğru sıkışmıştır. Bunun sonucu olarak bu bölgelerde buşing'in içindeki ve yüzeyindeki elektriksel zorlanmaların daha büyük

olduğunu ve atlamaların bu bölgelerden başlayacağını göstermektedir. Büyük iletkenlik değerlerinde ise, potansiyel dağılımının daha düzgün bir yapıda olduğu belirlenmiştir.

5.3. Öneriler

Elektrik sistemlerinde alan incelemelerine bir başlangıç olan bu çalışmanın devamı olarak bir çok çalışmalar yapılabilir. Hesaplanan potansiyel dağılımdan faydalanılarak, sınırlardaki alan şiddetleri belirlenir. Böylece hangi bölgelerin daha büyük elektriksel zorlanmaya maruz kaldığı tesbit edilerek, yalıtım malzemesi optimum olarak tasarlanabilir. İki boyutlu aksel simetrik olarak incelenen problemler, üç boyutlu aksel simetrik bir problem olarak incelenebilir. Açık sınırlı problemlerin çözümünde daha doğru çözümler yapabilmek için; SEY ve YBY birleştirilerek “ Combination Method ” denilen yöntem kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- 1- ANDERSEN, O.W., (1973), Laplacian Electrostatic Fields Calculations by Finite Elements with Automatic Grid Generation, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, PAS-92(5): 1485-1492, Sept./Oct.
- 2- BRAUER, J.R., (1982), Open Boundary Finite Elements for Axisymmetric Magnetic and Skin Effect Problems, J. Appl. Phys., 53(11), November.
- 3- BRAUER, J.R., KALFAIAN, H., MOREINES, H., (1989), Dynamic Electric Fields Computed by Finite Elements, IEEE Trans. on Industry Applications, 25(6): 1088-1092, Nov./Dec..
- 4- BREBBIA, C.A.,(1980), Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London,U.K.
- 5- CEBEÇİ, M., (1991), Zincir İzolatörlerde Elektrik Alan Dağılımının İncelenmesi, Doktora Tezi, F.Ü. F.B.E.,Elektrik-Elektronik Anabilim Dalı, Elazığ.
- 6- CROUCH, S.L., (1983), Boundary Element Methods in Solid Mechanics, George Allen and Unwin Ltd., U.K.
- 7- FLATABÖ, N., RIEGE, H., (1972), Automatic Calculation of Electric Fields, Int. Sym. on High Voltage Technology (ISH), 17-22, Munich.
- 8- GHASSEMI, F., (1982), Automatic Mesh Generation Scheme for a Two or Three Dimensional Triangular Curved Surface, Computers and Structures, 15(6): 613-626.
- 9- ITAKA, K., KAJI, M., HARA, T., (1980), New Finite Element Field Calculation Technical in Which Continuity of Electric Flux is Satisfied, IEEE Trans. on Power Apparatus and systems, PAS-99(6): 2102-2112.
- 10- KALENDERLİ, Ö., (1994), Elektrik Mühendisliğinde Sonlu Elemanlar Yöntemi, Ders Notları, İ.T.Ü., İstanbul.

11- KUFFEL, E., ZAENGL, W.S., (1984), High Voltage Engineering, Pergamon Press, Oxford.

12- MALIK, N.H., (1989), A Review of The Charge Simulation Method and its Applications, IEEE TRAns. on Electrical Insulation, 24,(1),3-20.

13- RAO, S.S., (1989), The Finite Element Method in Engineering, Second Edition, Pergamon Press, U.K.

14- SADIKU, M.N.O., Monte Carlo Solution of Axisymmetric Potential Problems, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 29. No.6, pp.1042-1046, Nov./Dec. 1993.

15- SILVESTER, P.P., FERRARI, R.L., (1983), Finite Elements for Electrical Engineers, Cambridge University Press.

16- SINGER, H., STEINBIGLER, H., WEISS, P., (1974), A Charge Simulation Method for The Calculation of High Voltage Fields, Trans. on PAS, Vol.93, No.6,pp. 1660-1668.

17- WU, Y., S., (1976), The Boundary Integral Equation Method Using Various Approximation Techniques for Problems Governed by Laplace's Equation, Ms. Thesis, University of Kentucky, Lexington, Kentucky.

18- ZIENKIEWICZ, O.C., (1977), The Finite Element Method, McGraw-Hill Book Company Ltd., U.K.

ÖZGEÇMİŞ***Mustafa OKUYUCU***

Doğum tarihi: 03 Kasım 1971
Doğum yeri: Hassa-HATAY
Lisansı bitirdiği üniversite: F.Ü. Müh. Fak. Elk.-Elektronik Mühendisliği
Mezuniyet yılı: 1994
Yüksek lisans yaptığı üniversite: Yıldız Teknik Üniversitesi
Şu anda yaptığı iş: DPÜ. Simav Tek. Eğt. Fak. Elektrik Eğt. Bölümü'nde Arş. Gör olarak çalışmaktadır.

İNGİLİZCE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

SUMMARY

There are many numerical methods to find out the electrical field strength, effects of the environmental factors on the materials, working characteristics and optimum design of the equipment which are used in electrical systems. In this study, numerical methods and techniques are searched and they are compared with each other.

Furthermore, the features of the Finite Element Method which is a kind of numerical methods. Superiority of the method in the solutions of the electric field problems and the necessity of the automatic mesh generation had been analyzed. For the automatic generation of the data in the solution region, a mesh generation technique well-fitting to the sides of the curved boundary equipment and a data generation program related with have been explained.

Pointed edge-Electrod system have been analyzed for automatic mesh generation. Complex potential solution have been estimated for a high voltage bushing and static and dynamic electrical field distribution.

TÜRKÇE ABSTRAKT (en fazla 250 sözcük) :

(TÜBİTAK/TÜRDOK'un Abstrakt Hazırlama Kılavuzunu kullanınız.)

ÖZET

Elektrik sistemlerinde kullanılan cihazların elektriksel dayanım, optimum tasarım, çevre faktörlerinin sistem ve malzeme üzerindeki etkileri gibi imalat ve işletme karakteristiklerinin belirlenmesinde kullanılan birçok sayısal yöntem vardır. Bu çalışmada nümerik yöntemler ve teknikler incelenmiş ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

Ayrıca, sayısal yöntemlerden Sonlu Elemanlar Yöntemi' nin özellikleri, elektrik alan problemlerinin çözümünde sağladığı üstünlükler ve çözüm bölgesini otomatik olarak bölmelemenin gerekliliği incelenmiştir. Çözüm bölgesine ilişkin verilerin otomatik olarak üretimi için eğrisel kenarlı teçhizatın kenarlarına iyi bir şekilde uyum sağlayan bir bölmeleme tekniği ve buna ilişkin otomatik veri üretim programı anlatılmıştır.

Otomatik ağ üretimi için, sivri uç-elektrod sistemi örnek olarak çözülmüştür. Bir yüksek gerilim bushing'i için kompleks potansiyel çözümü yapılmış, statik ve dinamik elektrik alan dağılımları çizilmiştir.