

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Sayısal Filtre Tasarımı

Yüksek Lisans Tezi

Sevgi Bakır

1988

Ref
ELK
70
988

Sayısal Filtre Tasarımı

152
95

132
95

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL FİLTRE TASARIMI

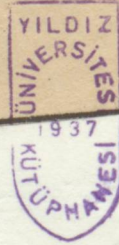
(Yüksek Lisans Tezi)

Elktr. Müh. Sevgi BAKIR

İstanbul — 1988

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
GENEL KİTAPLIĞI
R 152

Kot :95.....
Alındığı Yer : ...Fen Bilimleri Enst.....
Tarih :13/05/1991.....
Fatura :
Fiatı :11.000 TL.....
Ayniyat No :1/3.....
Kayıt No :47644.....
UDC :621.3 378.242.....
Ek :



ÖZET

BÖLÜM 1 - GİRİŞ 1

BÖLÜM 2 - SAYISAL FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 4

2.1. SAYISAL İZLENİMİN TEMEL KAVRANILAR 4

2.2. SAYISAL FİLTRE TASARIMI 7

2.3. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 10

2.4. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 12

2.5. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 15

2.6. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 16

(Yüksek Lisans Tezi)

BÖLÜM 3 - SAYISAL FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 19

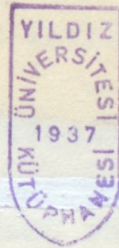
3.1. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 19

3.2. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 21

3.3. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 22

3.4. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 23

Elektr. Müh. Sevgi BAKIR



BÖLÜM 4 - FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 26

4.1. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 26

4.2. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 28

4.3. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 32

4.4. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 36

4.5. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 37

BÖLÜM 5 - FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 42

5.1. FİLTRELEME İÇİN FİDİAL TEMEL KAVRANILAR 42

İÇİNDEKİLER

ÖZET

BÖLÜM 1 - Giriş	1
BÖLÜM 2 - SAYISAL FİLTRELER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. SAYISAL İŞARETLER VE SİSTEMLER	4
2.2. SAYISAL FİLTRELERİN TANIMLANMASI	7
2.3. Z DÖNÜŞÜMÜ	10
2.4. TERS Z DÖNÜŞÜMÜ	12
2.5. AYRIK FOURİER DÖNÜŞÜMÜ	15
2.6. BASİT BİR SAYISAL FİLTRE ÖRNEĞİ	16
BÖLÜM 3 - SAYISAL FİLTRELERE GİRİŞ	19
3.1. TANITIM	19
3.2. SAYISAL FİLTRELERİN SINIFLANDIRILMASI	21
3.3. FIR ve IIR FİLTRELERİN KARŞILAŞTIRILMASI	22
3.4. IIR ve FIR FİLTRE YAPILARI	23
BÖLÜM 4 - IIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI	26
4.1. GERÇEKLEŞTİRİLEBİLME UNSURLARI	28
4.2. SABİT İMPULS CEVABI METODU	28
4.3. GELİŞTİRİLMİŞ İMPULS CEVABI METODU	32
4.4. UYGUNLAŞTIRILMIŞ Z DÖNÜŞÜMÜ METODU	36
4.5. BİLİNEAR DÖNÜŞÜM METODU	37
BÖLÜM 5 - FIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI	42
5.1. FIR SAYISAL FİLTRELERİN ÖZELLİKLERİ	42

5.2. PENCERE FONKSİYONLARI KULLANILARAK FIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI -----	43
5.3. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ -----	50
5.4. FIR SAYISAL FİLTRELER ÜZERİNE BAZI YORUMLAR --	51
BÖLÜM 6 - SAYISAL FİLTRELERİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ ----	53
6.1. DOLAYSIZ GERÇEKLEME -----	54
6.2. DOLAYSIZ YAPILAR -----	54
6.3. DOLAYSIZ YAPIDA TRANSPOZE DEVRE KAVRAMI -----	55
6.4. İKİNCİ DOLAYSIZ YAPI (2D) -----	56
6.5. ÜÇÜNCÜ DOLAYSIZ YAPI (3D) -----	56
6.6. DÖRDÜNCÜ DOLAYSIZ YAPI (4D) -----	58
6.7. İKİNCİ DERECE MODÜLLER -----	58
6.8. KASKAT GERÇEKLEME -----	61
6.9. PARTEİEL GERÇEKLEME -----	62
6.10. MERDİVEN GERÇEKLEME -----	63
6.11. SAYISAL FİLTRELERİN DONANIMI -----	67
BÖLÜM 7 - SAYISAL FİLTRE TASARIM ÖRNEKLERİ -----	80
BÖLÜM 8 - SONUÇ -----	122
KAYNAKLAR -----	123

ABSTRACT =

ÖZET =

Günümüzde sayısal teknoloji büyük bir hızla ilerlemektedir. Bu güne dek kullanılan elektronik sistemler hızla sayısallaştırılmaktadır. Hemen hemen her elektronik sistemde ve özellikle haberleşme sistemlerinde filtrelemenin büyük önemi vardır. Bu nedenle de günümüzde artık filtrelerde sayısallaştırılmaktadır.

Bu çalışmada sayısal filtre tasarımı ele alınmıştır. Konuya açıklık getirmek amacıyla sayısal filtrelerle ilgili temel kavramlar ve sayısal filtre yapıları anlatılmıştır. Daha sonra sayısal filtre çeşitleri için çeşitli tasarım yöntemleri incelenmiş ve tasarlanan sayısal filtreleri gerçekleştirme yöntemlerine kısaca değinilmiştir. Son olarak bilgisayar destekli tasarım örnekleri verilmiştir.

ABSTRACT

No wadays, digital technology is a very important part of electronic systems. So, the electronic systems that have been used in the past are being made digital rapidly too. Filtering has a great importance in almost every electronic systems and particularly in communication systems. Hence, no wadays, filtering is being made digital.

In this work, the digital filtering design was explained. In order to make this subject clear, the basic concepts about digital filters and digital filter structures were explained, too. Then, various design methods for the sorts of the digital filters were observed, and implementation methods of the digital filters which had been designed were mentioned. Finally, the designing samples with computer supports were given.

1-GİRİŞ

İşaretler, akustik, biomedikal mühendislik, haberleşme, kontrol sistemleri, radar, fizik, sismoloji ve telemetri gibi bilim ve mühendislik alanlarının hemen hemen hepsinde ortaya çıkar. İşaretleri sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı işaretler olarak iki genel sınıfa ayrılabilir. Sürekli zamanlı işaretler zamanın bütün anlarında, ayrık zamanlı işaretler ise zamanın ayrık anlarında tanımlıdır.

Filtreleme, istenen bazı karakteristiklere göre işaretin frekans spektrumunun değiştirilebileceği, yeniden biçimlendirilebileceği bir işlemdir. Filtrelemenin kullanım alanları çeşitlidir. Örneğin; gürültünün işarete karışmasını önlemek, ölçmedeki hataları veya kusurlu transmisyon kanalı sebebiyle ortaya çıkan işaret bozulmasını ortadan kaldırmak, kanal kullanımını çoğullamak için karıştırılmış iki yada daha fazla işareti ayırıştırmak, işaretleri frekans bileşkelere çözmek, işaretleri demodüle etmek, ayrık zamanlı işaretleri sürekli işaretlerine dönüştürmek için kullanılır.

Sayısal filtre, ayrık zamanlı işaretleri filtrelemek için kullanılan bir sayısal sistem yada analog filtrenin mikroişlemci kullanarak gerçekleştirilen eşdeğeri olarak tanımlanabilir.

Sayısal filtrelemeye ait birçok teorik kavram Laplace zamanından beri bilinmekteydi. Bununla birlikte o zamanın teknolojisinde bu bilgiler kullanılamıyordu. Sayısal mikroişlemcilerin ortaya çıkmasıyla sayısal filtreler gelişmeye başladı. Sismik bilgileri birçok problemin çözümünde sayısal filtrelemeyi dikkate değer bir şekilde kullanılmışlardır. Sayısal filtreleme teknikleri x ışını filimlerinde, uydular arası haberleşmelerde, uzaktan elde edilen resimlerin netliğini sağlamakta kullanılır. Diğer uygulama alanları; konuşma işleyici radar, sonar, sayısal kontrol devreleri ve çeşitli tıp elektronijî teknolojileridir.

Sayısal filtreler bir sayısal mikroişlemci üzerinde yazılım olarak veya gecikme elemanları, çarpıcılar ve toplayıcılar içeren devreler şeklinde donanım olarak gerçekleştirilebilir. Yıllardır sayısal filtreler yazılım olarak gerçekleştirilmiştir. Günümüzde yazılım gerçekleştirme halen tercih edilen şekildir. Sayısal filtreler genel veya özel amaçlı sayısal mikroişlemciler üzerinde gerçekleştirilmektedir. Bununla birlikte entegre devre teknolojisinin hızla gelişmesi sayısal filtrelerin donanım olarak gerçekleştirilme alanını açmıştır. Günümüzde endüstri sayısal filtrelerin donanım olarak gerçekleştirilmesi için gereken toplayıcı, gecikme elemanı ve çarpıcı yongalarını makul fiyatla üretebilmektedir. IC endüstrisinin tarihine bakıldığında bu bileşkelelerin gelecekte daha ucuz malolacağı ve daha iyi yapılabileceğî tahmin edilmektedir. Sonuç olarak yazılım ve donanım gerçekleştirilmeler sayısal filtreleri daha etkili kılmak için birleştirilebilir.

Bütün bunların yanısıra sayısal filtrelerin analog filtrelere göre üstünlükleri.

- 1- Frekans karakteristiğinde kayma yoktur.
- 2- Düşük frekanslı işaretler elde edilebilir.
- 3- Frekans cevabı karakteristiği ideale çok yakın yapılabilir.
- 4- Lineer faz karakteristikleri elde edilebilir.
- 5- Adaptif filtre yapmak mümkündür.
- 6- Sayısal kelime uzunluğu kontrol edilebilir ve bundan dolayı filtre doğruluğu kesinlikle kontrol edilebilir.
- 7- Empedans uygunluğu gerektirmez.
- 8- Filtre parametrelerinin ısı duyarlılığı olmaması sebebiyle güvenilirliği yüksektir.
- 9- Tümdevre olarak gerçekleştirilmesi sonucu toplu üretimde maliyeti azaltılabilir.

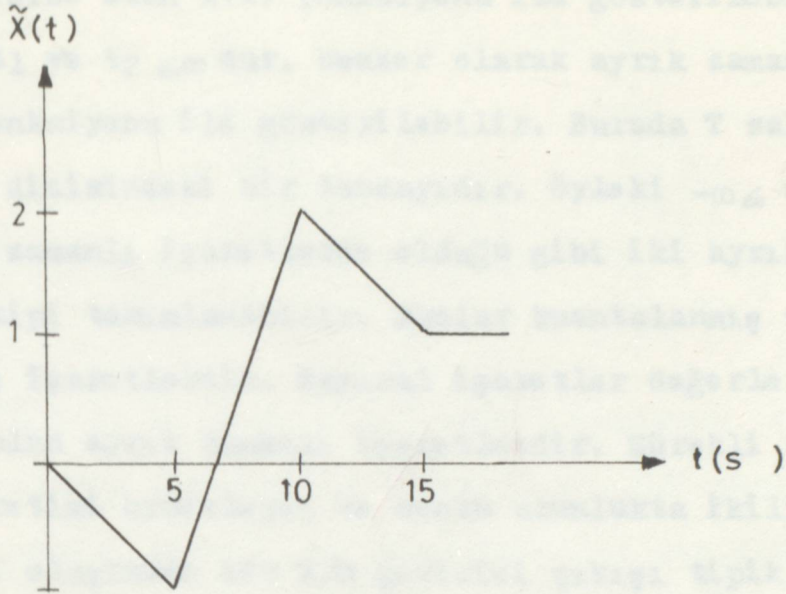
2 - SAYISAL FİLTRELER İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1. SAYISAL İŞARETLER VE SİSTEMLER

Filtre bazı işaretleri geçiren bazılarını da söndüren bir işaret işleyicidir. İşaret ise fiziksel bir sistemin durumu ve davranışı hakkında bilgi taşıyan bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. İşaretler matematiksel olarak bir veya daha fazla bağımsız değişkenin fonksiyonu olarak gösterilebilirler. Örneğin ses işareti matematiksel olarak zamanın fonksiyonu şeklinde gösterilebilir, bir resim ise iki değişkene bağlı bir parlaklık fonksiyonu ile verilebilir. İşaretlerin matematiksel gösteriliminde bağımsız değişkenin zaman olarak adlandırılması alışıl gelmiştir.

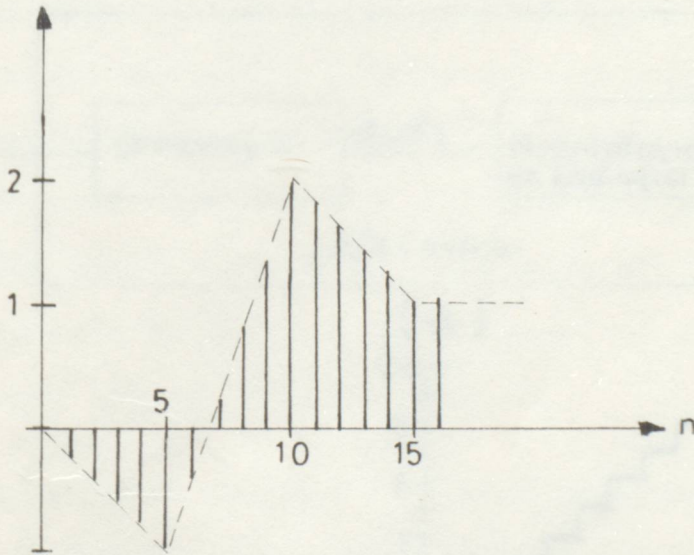
Bir işaretin matematiksel gösteriliminde bağımsız değişken sürekli veya ayrık olabilir. Sürekli zamanlı işaretler yapıları gereği sürekli değişkenli fonksiyonlar ile gösterilirler. Örneğin analog filtrelerde gerilim ve akım dalga şekilleri zamana bağlı sürekli fonksiyonlardır. Ayrık zamanlı işaretler ise ayrık anlarda tanımlı olduklarından bunlarda bağımsız değişken yalnız ayrık değerler alabilir. Yani ayrık zamanlı işaretler sayı dizileriyle gösterilirler. Ayrık zamanlı işaretlerin ana kaynağı sürekli zamanlı işaretlerin

örneklenmesidir.



(a)

$$X(nT) = T = Ts$$

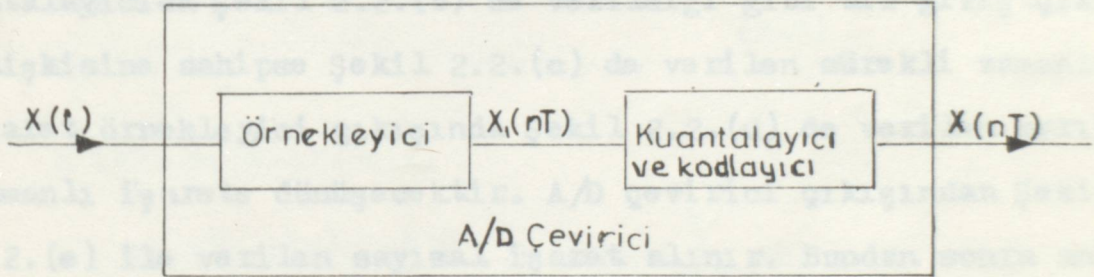


(b)

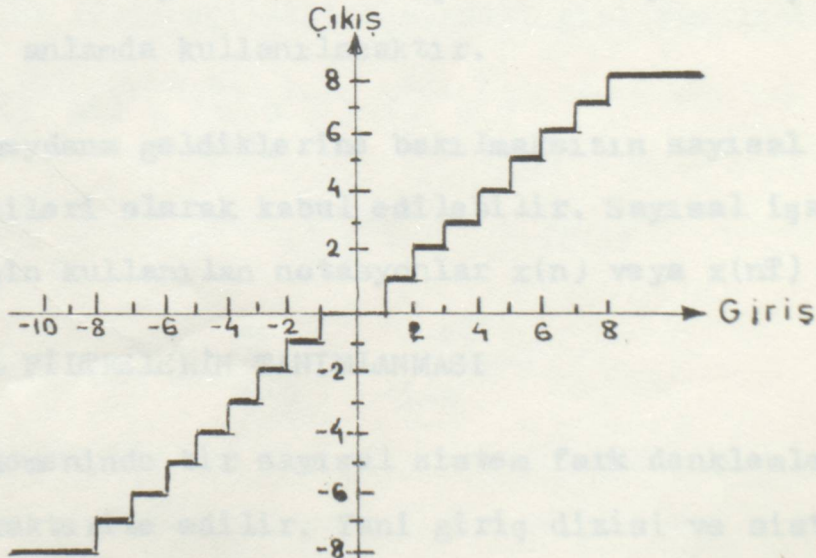
ŞEKİL: 2-1. Bir sürekli işaretin örnekleme (a)

Sürekli işaret (b) Onun karşılık gelen örnekleme dizisi.

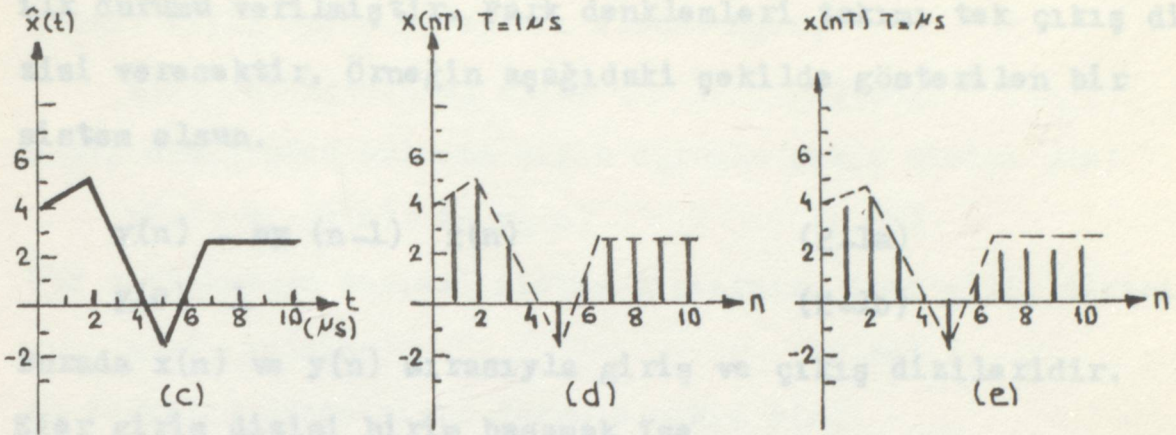
Sürekli zamanlı işaret, tanım kümesi (t_1, t_2) sayılarının dizisi olan $x(t)$ fonksiyonu ile gösterilebilir. Burada $-\infty \leq t_1$ ve $t_2 \leq \infty$ dur. Benzer olarak ayırık zamanlı işaret $x(nT)$ fonksiyonu ile gösterilebilir. Burada T sabit ve n , (n_1, n_2) dizisindeki bir tamsayıdır. Öyleki $-\infty \leq n_1$ ve $n_2 \leq \infty$ dir. Sürekli zamanlı işaretlerde olduğu gibi iki ayırık zamanlı işaret tipi tanımlanabilir. Bunlar kuantalanmış ve kuantalanmamış işaretlerdir. Sayısal işaretler değerleri kuantalanmış olan ayırık zamanlı işaretlerdir. Sürekli zamanlı giriş işaretini örnekleyen ve sonlu uzunlukta ikili sayıların dizisini oluşturan bir A/D çevirici çıkışı tipik bir sayısal işarettir. A/D çeviricinin niteliği şekil 2-2. de gösterilmiştir.



(a)



(b)



ŞEKİL 2.2. Bir A/D çeviricinin fonksiyonu (a) Şematik (b) Kuantalayıcının giriş-çıkış ilişkisi (c) A/D çeviriciye giren sürekli zamanlı işaret (d) Örnekleyicinin çıkışındaki ayrık zamanlı işaret (e) A/D çeviricinin çıkışındaki sayısal işaret.

Eğer örnek alıcı mikrosaniyede bir örnek alıyorsa ve kuantalayıcıda Şekil 2.2.(b) de verildiği gibi bir giriş-çıkış ilişkisine sahipse Şekil 2.2.(c) de verilen sürekli zamanlı işaret örnekleyici çıkışında Şekil 2.2.(d) de verilen ayrık zamanlı işarete dönüşecektir. A/D çevirici çıkışından Şekil 2.2.(e) ile verilen sayısal işaret alınır. Bundan sonra anlatılacak bölümlerde ayrık zamanlı işaret ve sayısal işaret kavramları aynı anlamda kullanılacaktır.

Nasıl meydana geldiklerine bakılmaksızın sayısal işaretler sayı dizileri olarak kabul edilebilir. Sayısal işaretleri göstermek için kullanılan notasyonlar $x(n)$ veya $x(nT)$ dir.

2.2. SAYISAL FİLTRELERİN TANIMLANMASI

Zaman domeninde bir sayısal sistem fark denklemleri takımı ile karakterize edilir. Yani giriş dizisi ve sistemin

ilk durumu verilmiştir. Fark denklemleri takımı tek çıkış dizisi verecektir. Örneğin aşağıdaki şekilde gösterilen bir sistem olsun.

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \quad (2-1a)$$

$$y(0) = 1 \quad (2-1b)$$

Burada $x(n)$ ve $y(n)$ sırasıyla giriş ve çıkış dizileridir.

Eğer giriş dizisi birim basamak ise

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

çıkış dizisi $n = 1, 2, \dots$ için (2-1.a) dan aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} y(1) &= ay(0) + x(1) = a + 1 \\ y(2) &= ay(1) + x(2) = a(a+1) + 1 \\ &= a^2 + a + 1 \\ &\vdots \\ y(k) &= ay(k-1) + x(k) \end{aligned} \quad (2-3)$$

$$= a^k + a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + 1 = \left(\sum_{i=0}^k a^i \right)$$

Eğer $|a| < 1$ ise (2-3) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} y(k) &= \left(\sum_{i=0}^k a^i \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) - \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} a^i \right) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) - a^{k+1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) \quad (2-4) \\ &= (1 - a^{k+1}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} a^i \right) = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a} \end{aligned}$$

Temel olarak bir tek girişli, tek çıkışlı sayısal sistem bir sayı dizisini diğer bir sayı dizisine çevirmek için bir algoritmadır. burada giriş dizisi $x(n)$ ve çıkış dizisi $y(n)$ dir.

$y_1(n)$ ve $y_2(n)$ sırasıyla giriş dizileri $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ den dolayı sıfır durum cevapları olsun. Eğer,

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \quad (2-5a)$$

giriş dizisinden bulunan sıfır durumlu çıkış dizisi $y(n)$

$$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad (2-5b)$$

ile veriliyorsa sayısal sistem lineerdir. Eğer giriş dizisi,

$$x(n) = x_1(n-n_0) \quad (2-6a)$$

ya karşılık düşen sıfır durumlu çıkış $y(n)$

$$y(n) = y_1(n-n_0) \quad (2-6b)$$

ile veriliyorsa sayısal sistem zamanla değişmiyor demektir.

$h(n)$, $\delta(n)$ in sıfır durum cevabı olsun. Sistemin zamanla değişmeme özelliği bizi $h(n-k)$ nın $\delta(n-k)$ nın sıfır durum cevabı olduğu sonucuna götürür. Sistemin lineerlik özelliğinden $x(n)$ giriş dizisinden bulunan sıfır durumlu çıkış dizisi $y(n)$ aşağıdaki şekilde verilir.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \quad (2-7)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (2-8a)$$

Bu şu anlama gelir doğrusal ve zamanla değişmeyen bir sayısal sistem, giriş bir birim impuls dizisi ve sistemin tüm ilk durumları sıfır olduğu zaman sistemin çıkış dizisi olan impuls cevabı $h(n)$ ile karakterize edilebilir. Değişken dönüştürerek (2-8a)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(k) \quad (2-8b)$$

şeklinde yazılabilir. Her iki (2-8) eşitliği iki dizinin

$[x(n)$ ve $h(n)]$ konvolüsyon toplamı olarak adlandırılır. Ve

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (2-9)$$

şeklinde gösterilir.

Sonuç olarak bir zamanla değişmeyen sayısal sistem eğer impuls cevabı $h(n)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (2-10)$$

durumunu sağlıyorsa kararlıdır. Ve $n < 0$ için $h(n) = 0$ ise nedenseldir.

2.3. Z DÖNÜŞÜMÜ

Lineer, zamanla değişmeyen filtrelerin analizi hemen hemen her zaman z dönüşümü kullanılarak yapılır. Bunun başlıca sebebi filtreleri tanımlayan fark eşitliklerinin genellikle daha kolay işlem yapılan cebrik eşitliklere indirgenmesidir. z dönüşümünün fark denklemleri takımına uygulanması Laplace dönüşümlerinin diferansiyel denklem takımına uygulanmasına benzer.

Bir $x(n)$ dizisinin iki taraflı z dönüşümü

$$x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-11)$$

olarak tanımlanır. Burada z bir kompleks değişkendir. Bu nedenle $x(z)$ de komplekstir. Tek taraflı z dönüşümü ise;

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (2-12)$$

bağıntısı ile verilir. Nedensel diziler [$x(n) = 0, n < 0$] için ile z dönüşümü de aynı anlamı taşır.

Genel olarak z dönüşümüne ilişkin kuvvet serisi z düzleminde

$$R_x^- < |z| < R_x^+$$

gibi halka biçiminde bir bölgedeyakınsar. R_x^- sifira kadar küçük, R_x^+ da sonsuza kadar büyük değerler olabilir. z dönüşümünün varolduğu bu bölgeye "yakınsama bölgesi" denir. Neden- sel bir dizi için yakınsama bölgesi her yerde z düzlemindeki R yarıçaplı bir dairenin dışıdır.

Eğer bir $x(n)$ dizisinin $x(z)$, z dönüşümünün sıfırlarını ve kutuplarını bilirsek sabit çarpımlar üzerinden $x(z)$ i kolayca bulabiliriz. Örneğin, eğer $x(z)$, p_1, p_2, \dots, p_N kutuplarına ve z_1, z_2, \dots, z_M sıfırlarına sahipse $x(z)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(z) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (2-13a)$$

veya

$$x(z) = \frac{\alpha z^{(N-M)} \prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \quad (2-13b)$$

Burada α sabittir. Sayısal filtre uygulamalarında (2-13a) tercih edilir. Çünkü ötelemeli yazıcı ve gecikme birimi z^{-1} izleminin bir gerçeğemesidir. (2-13a) daki faktörler birbiriyle çarpılırsa

$$x(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (2-14)$$

elde edilir. Genel filtre tasarımı için esas olarak (2-14) kullanılır.

Lineer, zamanla değişmeyen sistemin impuls cevabının z dönüşümü $H(z)$, sistemin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer fark denklemleri takımıyla gösterilen bir S sistemi verilmişse bu sistemin transfer fonksiyonu bulunabilir. Tersine eğer S sisteminin transfer fonksiyonu verilmişse S sisteminin fark denklemi aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

$$\left(1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}\right) X(z) \quad (2-15)$$

$$y(n) + \sum_{k=1}^N [b_k y(n-k)] = \sum_{i=0}^M [a_i x(n-i)]$$

veya

$$\begin{aligned} y(n) + b_1 y(n-1) + \dots + b_N y(n-N) \\ = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \dots + a_M x(n-M) \end{aligned} \quad (2-16)$$

Yani S sayısal sistemi ya bir fark denklemi ya da transfer fonksiyonu ile gösterilebilir. Sistemin transfer fonksiyonu yalnızca sistemin impuls cevabını sağlayabilir. Tek çıkış dizisini bulabilmek için giriş dizisi ve sistemin ilk durumu bilinmelidir.

2.4. TERS Z DÖNÜŞÜMÜ

z dönüşümleri lineer ve zamanla değişmeyen sistemler

için araçtır. Analizin sonunda karşılık gelen z dönüşümle-
rinden ziyade çıkış dizileri istenir. z dönüşümü alınmış bir
sayı dizisini bulmak için kullanılan metoda ters z dönüşümü
adı verilir.

$x(z)$ in ters z dönüşümü $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C x(z) z^{n-1} dz \quad (2-17)$$

bağıntısı ile bulunur. Buradaki integral kapalı bir C eğrisi
üzerindeki çizgisel integraldir. Basitlik için C , z düzlemin-
deki $x(z)$ in yakınsama bölgesi içinde bir daire olarak dü-
şünülebilir. Genelde $x(z)$ in ters z dönüşümünü bulmak için
(2-17) direk olarak kullanılmaz. Ters z dönüşümünün bulunma-
sı için kullanılan yöntemlerin bazıları aşağıda verilmiştir.

2.4.1. Doğrudan Bölme Metodu

$x(z)$ aşağıdaki gibi verilsin.

$$x(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (2-18)$$

Burada $M \leq N$ dir. $x(z)$ de payın paydaya bölünmesi

$$x(z) = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots \quad (2-19)$$

verir. Buradan

$$x(n) = \begin{cases} x_n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (2-20)$$

elde edilir.

2.4.2. Basit Kesirlere Açma Metodu

$$x(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z-z_k} \quad (2-21)$$

z_k lar $x(z)$ in kutupları olup. A_k lar bu kutuplara ilişkin rezidü lerdir.

$$A_k = (z - z_k) x(z) \Big|_{z = z_k} \quad (2-22)$$

$x(z)$ in katlı kutupları varsa S_k , k inci kutbun katlılık derecesi olmak üzere

$$x(z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{S_k} \frac{C_{kl}}{(z-z_k)^l} \quad (2-23)$$

yazılır. Burada

$$C_{kl} = \frac{1}{(S_k - l)!} \left\{ \frac{d^k}{dz^{S_k - l}} [z - z_k]^{S_k} x(z) \right\}_{z = z_k} \quad (2-24)$$

ifadesinden bulunur.

Eğer payın derecesi paydanıkinden büyükse derecesi payın derecesiyle paydanın derecesinin farkına eşit bir çok terimli yukarıdaki ifadeye eklenir. $x(z)$ in yakınsama bölgesine dayanarak herbir terimin ters dönüşümü tablo yardımı ile hesaplanır.

TABLO 2.1. Z. Dönüşümü Tablosu

$x(z)$	z z	z a
$\frac{z}{z - a}$	$\begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -a^n & n < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{z - a}$	$\begin{cases} a^{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ -a^{n-1} & n < 1 \end{cases}$
$\frac{z}{(z - a)^2}$	$\begin{cases} n a^{n-1} & n \geq 1 \\ 0 & n < 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & n \geq 1 \\ -n a^{n-1} & n < 1 \end{cases}$

$$x(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad z \text{ biçiminde ise} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-30)$$

$$\frac{x(z)}{z} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)} \quad (2-25)$$

$$= \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_N}{z-z_N}$$

$$x(z) = A_1 \frac{z}{z-z_1} + A_2 \frac{z}{z-z_2} + \dots + A_N \frac{z}{z-z_N} \quad (2-26)$$

yazarak ters dönüşüm tablosundan $x(n)$ bulunur. Burada

$$A_k = (z - z_k) \left. \frac{x(z)}{z} \right|_{z=z_k} \quad (2-27)$$

Bu yol katlı kök durumunda da uygulanabilir.

2.5. AYRIK FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Lineer, zamanla değişmeyen bir sisteme giriş olarak

$x(n) = e^{j\omega n}$ uygulandığında çıkış aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = e^{-j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (2-28)$$

Burada $\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega})$ ya sistemin frekans cevabı denir. Bir $x(k)$ işaretinin ayrık fourier dönüşümü (DFT) olan $x(n)$ şu şekilde tanımlanır.

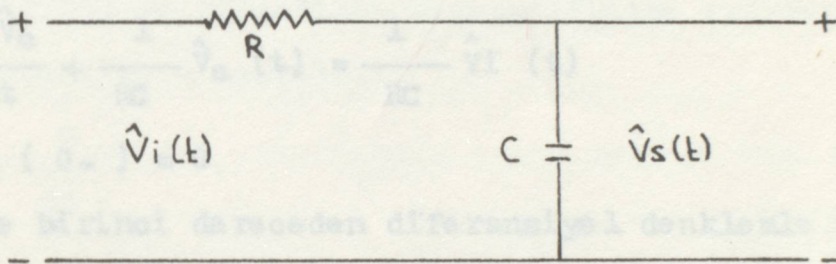
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-29)$$

Benzer şekilde ters ayrık fourier dönüşümü (IDFT) de şu şekilde tanımlanır.

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-30)$$

2.6. BASİT BİR SAYISAL FİLTRE ÖRNEĞİ

Sayısal filtrelemenin temel kavramlarını tanıtmak için şekil 2.3. deki basit RC birinci dereceden alçak geçiren filtreye ile yapılan bir tasarım problemini varsayalım.



Şekil 2.3. RC devresi

RC devresindeki ilk kapasitör gerilimi sıfırdır. $\hat{V}_i(t) = t < 0$ için $\hat{V}_o(t)$ çıkışı

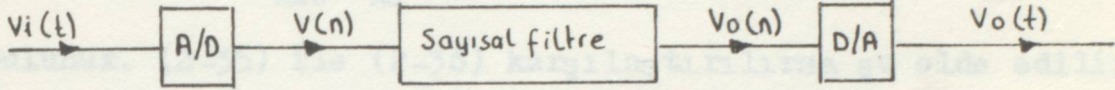
$$\begin{aligned} \hat{V}_o(t) &= \int_0^t \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)(t-\tau)} \hat{V}_i(\tau) d\tau \quad (2-31a) \\ &= \hat{h}(t) * \hat{V}_i(t) \end{aligned}$$

Burada

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{RC} e^{-(1/RC)t} \quad (2.31b)$$

RC Filtresindeki giriş işaretinin sürekli zaman fonksiyonu olması nedeniyle ilk adım, giriş gerilimi $\hat{V}_i(t)$ yi giriş dizisi $\hat{V}_i(n)$ e çevirmek için giriş ucuna bir A/D çevirici koymaktır. Tersine bir D/A çevirici çıkış dizisi $V_o(n)$ i sürekli çıkış işareti $V_o(t)$ ye çevirmek için sayısal filtrenin

çıkış ucuna yerleştirilir. Burada sayısal filtreyi gösteren kutu tasarım probleminin kalbidir.



Şekil 2.4. Sayısal filtrenin genel düzenlemesi

Şekil 2.3. deki RC devresi

$$\frac{d \hat{V}_o}{dt} + \frac{1}{RC} \hat{V}_o(t) = \frac{1}{RC} \hat{V}_i(t) \quad (2-32 a)$$

$$\hat{V}_o(0^-) = 0 \quad (2-32 b)$$

şeklinde birinci dereceden diferansiyel denklemlerle tanımlandığından şekil 2.4. deki sayısal filtrenin

$$V_o(n) = a V_o(n-1) + b V_i(n) \quad (2-33)$$

$$V_o(-1) = 0$$

birinci dereceden fark eşitliği ile tanımlandığını farzedelim

(2-33) ün z dönüşümü alınır

$$(1 - a z^{-1}) V_o(z) = b V_i(z)$$

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{b}{1 - a z^{-1}} \quad (2-34)$$

elde edilir. Buradan impuls cevabı

$$h(n) = b a^n u(n) \quad (2-35)$$

ile verilmiştir. Sayısal filtrenin $V_o(n)$ çıkışı

$$V_o(n) = h(n) * V_i(n)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) V_i(k) \quad (2-35)$$

$$= \sum_{k=0}^n b a^{n-k} V_i(k)$$

ile verilmiştir. Eğer T saniyelik zaman aralıklarıyla T yi

enteğre etmek için toplama yaklaşımı kullanılırsa

$$\hat{V}_0(nT) = \sum_{k=0}^n \frac{T}{RC} e^{-(n-k)(T/RC)} \hat{V}_i(kT) \quad (2-36)$$

bulunur. (2-35) ile (2-36) karşılaştırılırsa şu elde edilir.
Eğer

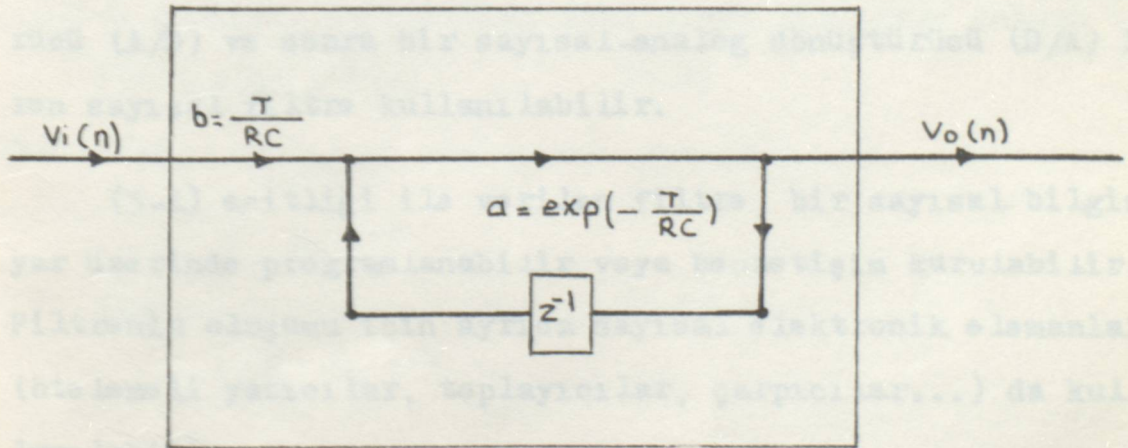
1- A/D ve D/A çeviricileri içindeki örnekleme periyodu T saniye.

2- (2.33) de farzedilen sayısal filtre karakteristik denklemindeki a , b sabitleri

$$b = \frac{T}{RC} \quad (2-37a)$$

$$a = e^{-(T/RC)} \quad (2-37b)$$

değerlerini alırsa, o zaman sayısal filtrenin $V_0(n)$ çıkışı Şekil 2.3. deki RC alçak geçiren filtrenin $\hat{V}_0(t)$ çıkışının örneklenmiş dizisidir. (2-37) ile verilen parametrelerle (2.33) deki fark denklemini gerçekleyen bir sayısal filtre Şekil 2.5. de görülmektedir.



3-SAYISAL FİLTRELERE GİRİŞ

3.1. TANITIM

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \quad (3-1)$$

eşitliği ile tanımlanan, zamanla değişmeyen lineer ayrık zamanlı sistem genel olarak sayısal filtre olarak bilinir. Bu filtreler sayısal işaret işleme sistemlerinin önemli elemanlarından biridir ve çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında önemli uygulamalar bulur.

Sayısal işaret işleme için belirli karakteristiklere uygun filtrelerin elde edilmesinde kullanılacak bir takım yöntemler geliştirilmiştir. Tasarımcılara sunulan bu yöntemler, filtre sabitleri a_k ve b_k lar ile yakından ilgilidir. Daha sonraki bölümlerde bu tasarım yöntemleri incelenecektir. Analog işaretleri işlemek için önce bir analog-sayısal dönüştürücü (A/D) ve sonra bir sayısal-analog dönüştürücü (D/A) içeren sayısal filtre kullanılabilir.

(3-1) eşitliği ile verilen filtre, bir sayısal bilgisayar üzerinde programlanabilir veya benzetişim kurulabilir. Filtrenin oluşumu için ayrıca sayısal elektronik elemanlar (ötelemeli yazıcılar, toplayıcılar, çarpıcılar...) da kullanılabilir.

İşaret işleme için sayısal filtre kullanmanın iki önemli

avantajı vardır. Bunlardan ilki, sayısal filtrelerin çok iyi bir kararlılığa sahip olması ve davranışlarının önceden bilinemesidir. Çünkü, yalnızca iki durum ile (0, 1) çalışan elektronik devrelerle gerçekleştirilir. Diğer taraftan, ikinci önemli özellik ise bu filtrelerin kolayca değiştirilebilir olmasıdır. Bunun anlamı şudur; filtre karakteristikleri, filtre sabitlerinin ön bellekte yeni bir yerleşimi ile kolayca değiştirilebilir. Yani, tek bir filtre yapısı giriş ve çıkış işaretlerinin birçoğuna hizmet edebilir.

(3-1) eşitliğine z dönüşümü uygulanırsa;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^M a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) \right] z^{-n} \quad (3-2)$$

elde edilir. Sol taraf $\{y_n\}$ nin z dönüşümü $Y(z)$ i verir. Sağ taraf ise öteleme özelliği yardımıyla bulunabilir. $\{x_n\}$ nin z dönüşümü $x(z)$ iken $\{y_{n-k}\}$ nin z dönüşümü $z^{-k} Y(z)$ ve $\{x_{n-k}\}$ nin z dönüşümü $z^{-k} x(z)$ dir. Böylece (3-2),

$$Y(z) = \left[\sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \right] x(z) - \left[\sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \right] Y(z) \quad (3-3)$$

şekline dönüşür. Bu eşitliği daha uygun bir şekle sokmak için

$$Y(z) = X(z) - H(z) \quad (3-4)$$

yazılırsa,

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (3-5)$$

elde edilir. $H(z)$, filtrenin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu, çıkışın z dönüşümü $Y(z)$ ile, girişin z dönüşümü

$x(z)$ in oranıdır. Görüldüğü gibi $H(z)$, z^{-1} in rasyonel bir fonksiyonudur. Bu fonksiyonun payı,

$$N(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} \quad (3-6)$$

ve paydası,

$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} \quad (3-7)$$

dir. $N(z)$ ve $D(z)$ in kökleri sırasıyla $H(z)$ in sıfırları ve kutuplarını verir.

(3-1) ile belirlenen sayısal filtre, önceki N adet y_{n-1} , y_{n-2}, \dots, y_{n-N} çıkış örneğini ve önceki M adet x_n , x_{n-1}, \dots, x_{n-M} giriş örneğini kullanarak n - çıkış örneği y_n i hesaplar. İçinde bulunulan andaki çıkış örneğini hesaplamak için sonraki giriş veya çıkış örnekleri gerekmediğinden, filtre fiziksel olarak gerçekleştirilebilir. Sonuçta, filtrenin kararlı olduğu varsayılırsa ($n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 0$) tüm kutuplar birim daire içinde yer alır.

$h(n)$ in değeri şu bağıntı ile verilir.

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) z^n \frac{dz}{z} \quad (3-8)$$

$\{y(n)\}$ çıkışı, $\{x(n)\}$ girişi ile $\{h(n)\}$ impuls cevabının konvolüsyonudur.

3.2. SAYISAL FİLTRELERİN SINIFLANDIRILMASI

(3-1) ile verilen, sayısal filtreye ilişkin fark denkleminde $x(n)$ giriş dizisi, $y(n)$ çıkış dizisi, a_k ve b_k reel katsayılardır.

1- $b_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \dots, M$ olan filtreler. Bu filtrelerde impuls cevabı azalan üstel fonksiyonların toplamı şeklindedir ve filtrenin sonsuz sayıda impuls cevabı vardır. Bu nedenle bu filtrelere sonsuz impuls cevaplı filtre ya da IIR (Infinite Impulse Response) filtre denir. Geri beslemeli olması nedeniyle ardışıl sayısal filtre (Recursive Filter) de denir.

2- $b_k = 0$, $k=0$ olan filtreler. Bu filtrelerde

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) \quad (3-9)$$

olur. Bu durumda transfer fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \quad (3-10)$$

$$h(k) = \begin{cases} a_k & 0 \leq k \leq N \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3-11)$$

olur. Burada (3-10) sonlu impuls cevaplı filtrenin fark denklemdir. Bu tür filtrelere FIR (Finite Impulse Response) filtre denir. Geri beslemeli olmaması nedeniyle ardışıl olmayan filtre (Nonrecursive Filter) de denir.

3.3. FIR ve IIR FİLTRELERİN KARŞILAŞTIRILMASI

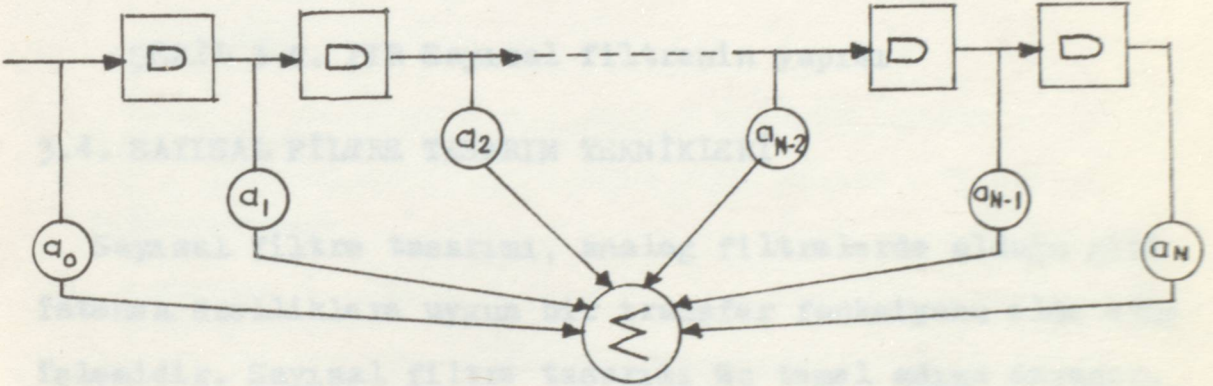
FIR filtreler her zaman kararlıdır. Çünkü impuls cevabı sonludur ve çıkışla giriş arasında geri besleme yoktur.

FIR filtrenin genlik ve faz karakteristikleri istenildiği gibi seçilebilir. Tasarım bu belirlemeden yola çıkarak oluşturulur. Çıkıştaki faz bozulması olasılığını yok etmek mümkündür.

Ancak FIR filtrelerin gerçekleştirilmesinde genel olarak daha çok aritmetik ve bellek kullanılmaktadır. Bu FIR filtrelerin IIR filtrelere göre bir sakıncasıdır.

IIR filtrelerin çok iyi genlik cevapları sağlamalarına karşın FIR filtreler tamamen lineer faz karakteristiği sağlarlar.

3.4. IIR VE FIR FİLTRE YAPILARI

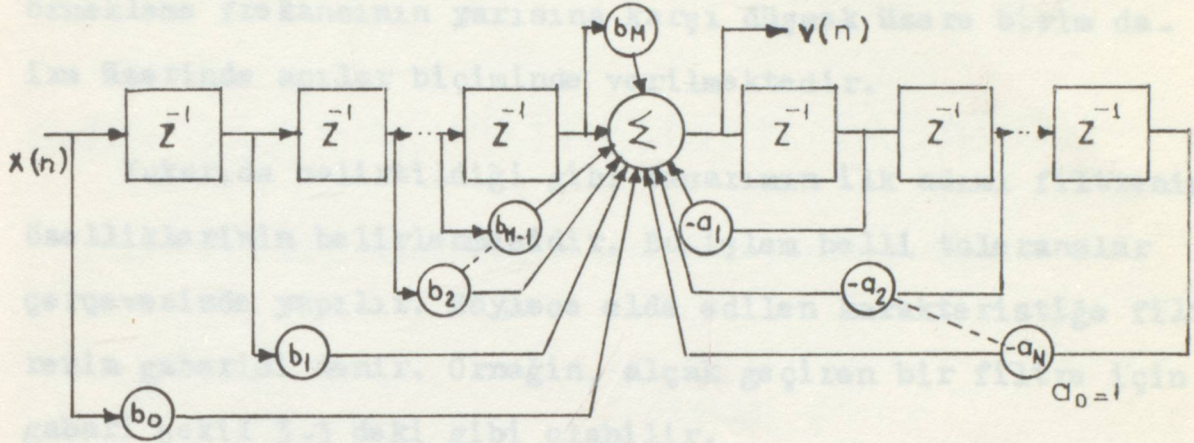


ŞEKİL 3-1. FIR sayısal filtrenin yapısı

Şekil 3-1. de FIR filtrenin yapısı gösterilmiştir. Burada a_i ler sabit sayılardır. Görüldüğü gibi filtrenin yapısı çok basit olup temelli N uçlu bir gecikme hattına dayanır. Örnekleme periyodu T_s ise hattın toplam gecikmesi $N \cdot T_s$ dir. Analog filtrelerde bu hat LC hücrelerden oluşabilir. Sayısal filtrelerde ise ötelemeli yazıcılar (shift register) kullanılır. Bu durumda yazıcıya uygulanan darbelerin periyodu T_s olacaktır.

Belli bir andaki çıkış işaretinin elde edilmesi için yalnız geçmişteki ve o andaki giriş işaretleri yerine, geçmiş

çıkış işaretleride alınırsa IIR filtre elde edilmiş olur. IIR filtrenin blok gösterilimi şekil 3-2 de verilmiştir.



ŞEKİL 3-2. IIR Sayısal filtrenin yapısı

3.4. SAYISAL FİLTRE TASARIM TEKNİKLERİ

Sayısal filtre tasarımı, analog filtrelerde olduğu gibi istenen özelliklere uygun bir transfer fonksiyonu elde etme işlemidir. Sayısal filtre tasarımı üç temel adıma dayanır.

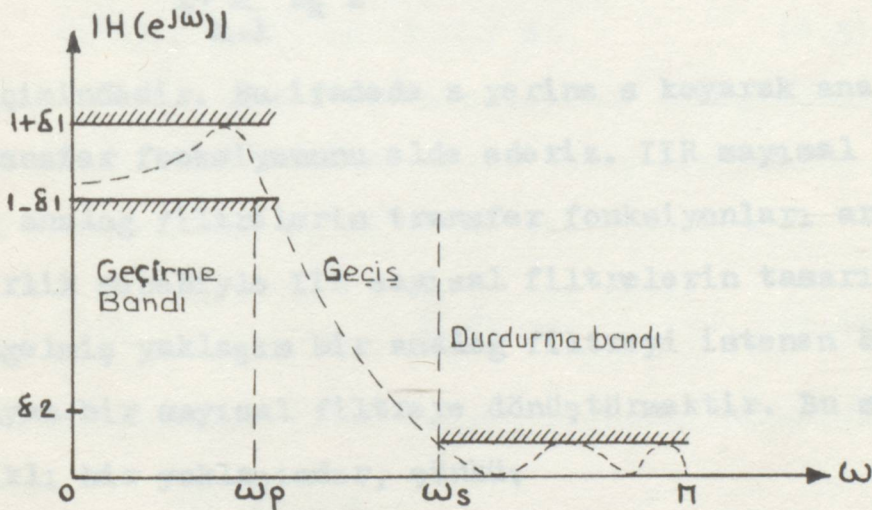
- 1) Sistemin istenen özelliklerinin belirlenmesi.
- 2) Nedensel, ayrık zamanlı bir sistem kullanarak bu özelliklere yaklaşımları.

3) Gerçekleme.

Pratikte en çok rastlanan durum analog işaretlerden periyodik örnekleme yoluyla elde edilen sayısal işaretlerin filtrelenmesidir. Analog ve sayısal filtrelerin özellikleri genellikle frekans domeninde verilir. (alçak geçiren, band geçiren, yüksek geçiren filtreler gibi) Örnekleme hızı ve rildiğinde analog filtrenin özelliklerinden sayısal filtrenin

özelliklerine geçmek kolaydır. Yalnız analog frekansların Hertz cinsinden olmasına karşın, sayısal frekanslar $z=-1$ örnekleme frekansının yarısına karşı düşmek üzere birim daire üzerinde açılar biçiminde verilmektedir.

Yukarıda belirtildiği gibi tasarımın ilk adımı filtrenin özelliklerinin belirlenmesidir. Bu işlem belli toleranslar çerçevesinde yapılır. Böylece elde edilen karakteristiğe filtrenin gabarisi denir. Örneğin, alçak geçiren bir filtre için gabari şekil 3-3 deki gibi olabilir.



ŞEKİL 3-3. İdeal alçak geçiren filtre yaklaşımı için tolerans sınırları eğrisi.

Filtrenin gabarisi belirlendikten sonra sıra bu gabariye yaklaşma problemine gelmektedir. Bu aşamada kullanılacak filtrenin ne tür sistemle gerçekleştirileceğini belirlemek gerekir. IIR sistem durumunda istenen frekans cevabına rasyonel bir fonksiyonla, FIR sistem durumunda ise bir polinom yardımıyla yaklaşılmaktadır.

4-IIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI

IIR Sayısal filtrelerin transfer fonksiyonları.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (4-1)$$

biçimindedir. Bu ifadede z yerine s koyarak analog filtrenin transfer fonksiyonunu elde ederiz. IIR sayısal filtrelerin ve analog filtrelerin transfer fonksiyonları arasındaki benzerlik sebebiyle IIR sayısal filtrelerin tasarımı için alışılmış yaklaşım bir analog filtreyi istenen özellikleri sağlayan bir sayısal filtreye dönüştürmektir. Bu son derece mantıklı bir yaklaşımdır, çünkü;

1) Analog filtre tasarımı oldukça ilerlemiştir. Elde edilmiş yararlı sonuçları ve analog filtreler için halen gelişen tasarım işlemlerini sayısal filtre tasarımında kullanmak avantajlı olmaktadır.

2) Birçok yararlı analog filtre tasarım yöntemi basit, kapalı biçimdeki formüllere dayanmaktadır. Bu nedenle analog tasarım formüllerine dayandırılmış sayısal filtre tasarım yöntemleri gerçeklemede kolaylık sağlamaktadır.

3) Birçok uygulamada analog, lineer, zamanla değişmeyen

bir filtrenin performansı sayısal filtre kullanarak simüle edilmektedir.

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M d_k s^k}{\sum_{k=0}^M c_k s^k} = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)} \quad (4-2)$$

analog sistem fonksiyonunu ele alalım. Burada $x_a(t)$ giriş ve $y_a(t)$ çıkış, $x_a(s)$ ve $Y_a(s)$ sırasıyla bunların laplace dönüşümleridir. Bu sistemin giriş-çıkış ilişkisi konvolüsyon integrali ile verilir.

$$Y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t-\tau) d\tau \quad (4-3)$$

Burada $h_a(t)$, $H_a(s)$ in ters laplace dönüşümüdür. Diğer taraftan $H_a(s)$ sistem fonksiyonuna sahip bir analog sistem aşağıdaki gibi diferansiyel eşitlik ile tanımlanabilir.

$$\sum_{k=0}^N c_k \frac{d^k Y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M d_k \frac{d^k X_a(t)}{dt^k} \quad (4-4)$$

İlişkin sayısal filtre rasyonel sistem fonksiyonu da

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4-5)$$

biçimindedir. Giriş-çıkış ilişkisi, konvolüsyon toplamı

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \quad (4-6)$$

ya da

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (4-7)$$

fark denklemi ile verilir. Analog sistemi sayısal sisteme dönüştürürken $H(z)$ ya da $h(n)$ i analog filtre tasarımından elde

etmek gerekir. Böyle dönüşümlerde analog frekans cevabının temel özelliklerinin sonuçta elde edilen sayısal filtrede korunması istenir. Kısaca s düzleminin sanal ekseninin z düzlemindeki birim daireye karşı düşmesi istenir. İkinci olarak kararlı bir analog filtre kararlı bir sayısal filtreye dönüşmelidir. Yani analog sistemin s düzleminin sol yarısında kutupları varsa sayısal filtrenin de birim daire içinde kutupları olmalıdır. Bu sınırlamalar aşağıda ele alacağımız dönüşüm yöntemlerinin temelini oluşturur.

4.1. GERÇEKLEŞTİRİLEBİLME UNSURLARI

Bir IIR filtrenin gerçekleştirilebilmesi için şu koşulları sağlaması gerekir.

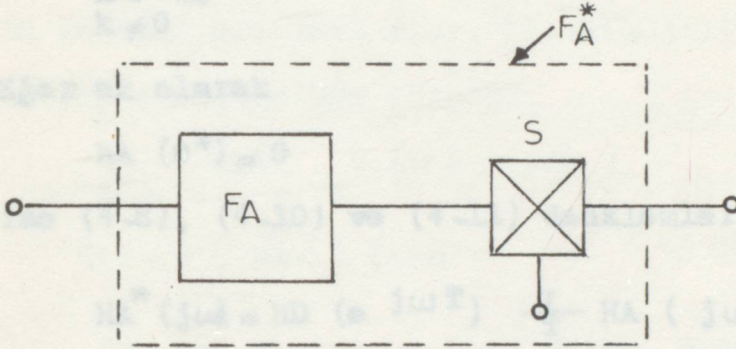
- 1) z in reel sayılarına sahip bir rasyonel fonksiyonu olmalı.
- 2) Kutupları z düzlemindeki birim dairenin içinde bulunmalı.
- 3) Paydadaki polinomun derecesi paydaki polinomun derecesine eşit veya küçük olmalıdır.

Katsayılar, birim gecikme, çarpma ve toplama elemanlarının giriş ve çıkışlarının reel sayılar olabilmesi için reel olmalıdır. İkinci ve üçüncü koşullar ise kararlı ve nedensel bir filtre olduğunu gösterir.

4.2. SABİT İMPULS CEVABI METODU

Şekil 4-1'deki örneklenmiş veri filtresi FA^* yı gözönüne

alalım. Burada S bir ideal impuls örnekleyicisi ve FA da $H_A(s)$ ile karakterize edilen bir analog filtredir. FA^* bir sürekli zamanlı transfer fonksiyonu $HA^*(s)$ ile ya da eşdeğer şekilde bir ayrık zamanlı transfer fonksiyonu $HD(z)$ ile temsil edilebilir.



ŞEKİL 4-1. Örneklemiş veri filtresi

$$HA^*(j\omega) = H_D(e^{j\omega T})$$

$$= \frac{h_A(0+)}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega + jk\omega_s) \quad (4-8)$$

Burada $\omega_s = 2\pi/T$ örnekleme frekansdır ve

$$h_A(t) = L^{-1} H_A(s)$$

$$h_A(0+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s H_A(s)) \quad (4-9)$$

$$H_D(z) = Z h_A(nT)$$

Böylece verilmiş bir FA analog filtresine karşı düşen ve $H_D(z)$ ile temsil edilen sayısal filtre aşağıdaki yol takip edilerek elde edilebilir.

1) Analog filtrenin impuls cevabı olan $h_A(t)$ oluşturulur.

2) $h_A(t)$ de t yerine nT koyulur.

3) $h_A(nT)$ nin z dönüşümü alınır.

Eğer $H_A(j\omega) = 0$ $|\omega| \geq \frac{\omega_s}{2}$ için; ise o zaman

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} H_A(j\omega + jk\omega_s) = 0, |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \text{ için} \quad (4-10)$$

Eğer ek olarak

$$h_A(0^+) = 0 \quad (4-11)$$

ise (4-8), (4-10) ve (4-11) denklemlerinden

$$H_A^*(j\omega) = HD(e^{j\omega T}) \frac{1}{T} H_A(j\omega) \quad (4-12)$$

elde edilir. Burada $|\omega| \leq \omega_s/2$ dir.

Yani eğer $H_A(j\omega)$ sınırlı bantlı ise, oluşturulacak sayısal filtrenin temel band frekans cevabı analog filtreninki ile yaklaşık olarak aynıdır.

Eğer $H_A(s)$ daki payda derecesi pay derecesine en az iki geçerse (4-10) ve (4-11) denklemlerindeki temel kabuller ω_s in belli bir değeri için geçerlidir. Ek olarak $H_A(s)$ in kutupları basit ise

$$H_A(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - p_i} \quad (4-13)$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki birinci ve ikinci adımlardan

$$h_A(t) = L^{-1} H_A(s) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i t} \quad (4-14)$$

$$\text{ve } h_A(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{p_i nT}$$

olur. Ek olarak üçüncü adımdan da

$$H_D(z) = z^{-n} H_A(nT) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{T p_i}} \quad (4-15)$$

elde edilir.

$H_A(s)$ deki kutupların kompleks eşlenik çiftleri A_i ve $e^{T p_i}$ nin kompleks eşlenik değerlerini verdiklerinden $H_D(z)$ in katsayıları reel olur. $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ kutbu $H_D(z)$ de z_i kutbunun ifadesinde görülür.

$$z_i = e^{T p_i} = e^{T(\sigma_i + j\omega_i)} \quad (4-16)$$

$\sigma_i < 0$, $z_i < 1$ için

Böylece kararlı analog filtre kararlı sayısal filtreye dönüşür. Ayrıca $H_D(z)$ deki payda derecesi pay derecesini geçemez ve bu yüzden $H_D(z)$ gerçekleştirilebilir.

Sabit impuls cevabı metodu (4-10) ve (4-11) eşitliklerindeki temel kabullerin geçerli olduğu Butterworth, Bessel veya Chebyscheff alçak geçiren ve band geçiren filtreler için iyi sonuç verir. Metodun bir avantajı da analog filtrenin kayıp karakteristiğini olduğu kadar fazını da muhafaza eder. Bu teknikte rasyonel analog filtre rasyonel sayısal filtreye, kararlı analog filtre kararlı sayısal filtreye, nedensel analog filtre nedensel sayısal filtreye dönüşür. Bu tekniğin en kötü yanı yüksek geçiren analog filtre gibi bazı durumlarda başarısız olmasıdır.

Basit kökü olan bir analog filtre transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$H_A(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad (4-17)$$

$$h_A(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(nT)$$

$$h_A(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(nT)$$

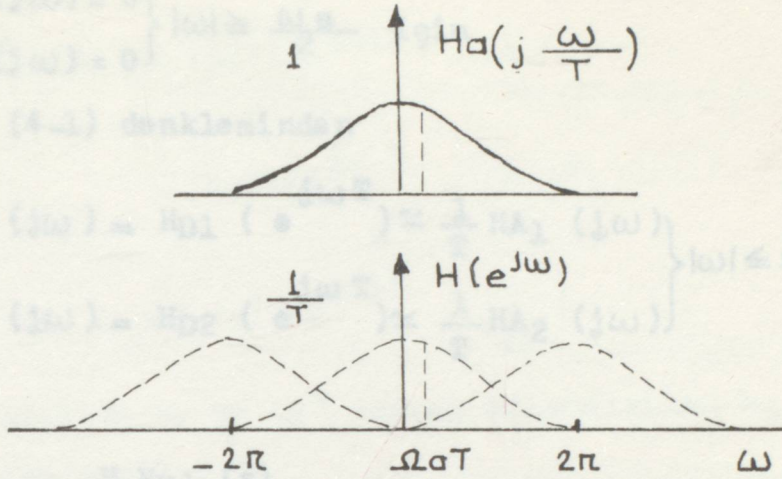
$$H(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \quad (4-18)$$

Eğer S_k sol yarı kompleks düzleminde ise $e^{s_k T}$ birim dairenin içindedir. Görülüyor ki s düzleminden z düzlemine olan dönüşüm bire-bir değildir. Yani z düzlemindeki bir noktadan ulaşmak mümkündür.

4.3. GELİŞTİRİLMİŞ SABİT İMPULS CEVABI METODU

Katlanma etkisi, sabit impuls cevabı metodunun kullanım alanını sınırlar.

Katlanma etkisi = Örnekleme teoreminden bilindiği gibi sürekli zamanlı bir $f(t)$ işaretinin T aralıklarıyla alınan örnekleri ile ifade edebilmek için minimum örnekleme periyodu $T \leq 1/2B$ olmalıdır. Eğer örnekleme aralığı T , $1/2B$ den büyük olursa, orijinal işaretin spektral bileşenleri birbiri üzerine binecektir. Bu durumda alçak geçiren bir filtre kullanarak orijinal işareti elde etmek mümkün olamaz. Bu soruna katlanma etkisi veya katlanma olayı denir.



ŞEKİL 4-2. Sabit impuls cevabı metodundaki katlanma etkisinin grafiksel gösterimi.

Geliştirilmiş impuls cevabı metodunu incelersek

$$H_A(s) = \frac{H N(s)}{D(s)} = \frac{H \prod_{i=1}^M (s-s_i)}{\prod_{i=1}^N (s-p_i)} \quad (4-19)$$

transfer fonksiyonunu ele alalım. Burada M, N kadar büyük olabilir.

$$H_A(s) = \frac{H_{HA_1}(s)}{H_{A_2}(s)} \quad (4-20)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$H_{A_1}(s) = \frac{1}{D(s)} \quad (4-21)$$

ve

$$H_{A_2}(s) = \frac{1}{N(s)} \quad (4-22)$$

olur. Açıkça görülüyor ki M, N ≥ 2 için (4-2) denkleminde

$$h_{A_1}(0+) \quad h_{A_2}(0+) = 0$$

olur. Ayrıca

$$\left. \begin{array}{l} HA_1(j\omega) = 0 \\ HA_2(j\omega) = 0 \end{array} \right\} |\omega| \geq \frac{\omega_s}{2} \text{ için}$$

Ek olarak (4-1) denkleminde

$$\left. \begin{array}{l} HA_1^*(j\omega) = HD_1(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} HA_1(j\omega) \\ HA_2^*(j\omega) = HD_2(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} HA_2(j\omega) \end{array} \right\} |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \text{ için}$$

Böylece

$$H_D(z) = \frac{H HD_1(z)}{HD_2(z)} \quad (4-23)$$

şeklinde yazılabilir. Öyleki

$$H_D(e^{j\omega T}) = \frac{H HD_1(e^{j\omega T})}{HD_2(e^{j\omega T})} = HA(j\omega), |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \text{ için}$$

Eğer $HA(s)$ in sıfırları ve kutupları basitse (4-14) eşitliğinden

$$HD_1(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{T p_i}} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)} \quad (4-24)$$

$$HD_2(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - e^{T s_i}} = \frac{N_2(z)}{D_2(z)} \quad (4-25)$$

elde edilir. Böylece (4-23), (4-24) ve (4-25) eşitliklerinden

$$H_D(z) = \frac{H N_1(z) D_2(z)}{N_2(z) D_1(z)} \quad (4-26)$$

elde edilir.

$N_2(z)$ in bazı sıfırları z düzlemindeki birim dairenin üzerinde veya dışında yerleşmiş olabileceğinden elde edilecek filtre kararsız olabilir. Fakat bu sorun kolayca çözümlenebilir.

$H_D(z)$ in reel bir kutbuna z_i dersek

$$\begin{aligned} |e^{j\omega T} - z_i| &= |z_i| \left| e^{-j\omega T} - \frac{1}{z_i} \right| \\ &= |z_i| \left| \left(e^{j\omega T} - \frac{1}{z_i} \right)^* \right| \\ &= |z_i| \left| e^{j\omega T} - \frac{1}{z_i} \right| \end{aligned}$$

ve benzer şekilde z_i ve z_i^* olarak adlandırılan bu kompleks eşlenik kutup çifti için

$$\begin{aligned} |(e^{j\omega T} - z_i)(e^{j\omega T} - z_i^*)| &= \\ = |z_i|^2 \left| \left(e^{j\omega T} - \frac{1}{z_i} \right) \left(e^{j\omega T} - \frac{1}{z_i^*} \right) \right| & \quad (4-27) \end{aligned}$$

olur. Böylece $H_D(z)$ in birim dairenin dışındaki kutupları kayıp karakteristiğinin biçimini değiştirmeden tersleri ile değiştirilebilir. Diğer yandan birim dairenin üzerindeki kutuplar genlikleri hafifçe azaltılarak halledilir. Bu metod alçak geçiren ve band geçiren eliptik filtreler için sabit impuls cevabı metodunun tersine iyi sonuçlar verir. Bu metodun dezavantajı ise $N_1(z)$ ve $N_2(z)$ polinomlarının $H_D(z)$ in mertebesini yükseltmesidir. Bu metod uygulanırken takip edilecek yol kısaca şöyle özetlenebilir.

1- Verilen $H_A(s)$ fonksiyonundan (4-21) ve (4-22) eşitlikleri yardımıyla $HA_1(s)$ ve $HA_2(s)$ oluşturulur.

2- $HA_1(s)$ ve $HA_2(s)$ in kutupları ve rezidüleri bulunur.

3- (4-24) ve (4-25) eşitliklerinden $HD_1(z)$ ve $HD_2(z)$ oluşturulur.

4- $N_2(z)$ in birim dairenin dışındaki sıfırları tersleri ile değiştirilir.

5- H sabiti minimum geçiş kaybı elde edilecek şekilde ayarlanır.

4.4. UYGUNLAŞTIRILMIŞ Z DÖNÜŞÜMÜ METODU

IIR filtrelerin tasarımında kullanılan diğer bir metod uygunlaştırılmış z dönüşümü metodudur. Bu metod (4-19) eşitliğindeki gibi bir sürekli zaman transfer fonksiyonuna karşı düşen bir ayrık zamanlı transfer fonksiyonu oluşturabilir. Öyleki

$$H(z) = (z+1)^L \frac{H \prod_{i=1}^M (z - e^{s_i T})}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})} \quad (4-28)$$

Burada L bir tamsayıdır. Bu metod modifiye edilmiş sabit impuls cevabı metodu ile ilişkilidir. İkisinin arasındaki fark (4-26) eşitliğindeki $N_1(z) / N_2(z)$ yerine $(z+1)^L$ teriminin gelmesidir. L nin değeri HA (s) in $s = \infty$ olduğu zamanki sıfırlarının sayısına eşittir. L nin çeşitli durumlar için aldığı değerler tablo 4.1 de verilmiştir.

TABLO 4.1. L nin tipik değerleri.

FİLTRENİN TİPİ	ALÇAK GEÇİREN	YÜKSEK GEÇİREN	BAND GEÇİREN	BAND SÖNDÜREN
TÜM KUTUPLU	N	0	N/2	0
ELİPTİK				
N TEK	1	0	1 N/2 TEK için	
N ÇİFT	0	0	0 N/2 ÇİFT için	0

Bu metod yüksek geçiren ve band söndüren filtreler için mantıklı sonuçlar verir. Ancak Chebyschef ve eliptik filtrelerde geçirme bandı dalgalılığını bozmaya meyillidir. Alçak geçiren ve band geçiren filtreler için geliştirilmiş sabit impuls cevabı metodu ile daha iyi yaklaşıklıklar elde edilir.

4.5. BİLİNEAR DÖNÜŞÜM METODU

Sabit impuls cevabı metodundaki istenmeyen katlanma etkisinin giderilmesi için, s düzleminden z düzlemine bire-birlik bir dönüşüm sağlanması gerekir. Bu tip dönüşümlerden biri de bilinear dönüşümdür.

Sabit impuls cevabı metodunda elde edilen sayısal filtre $t = nT$ için orijinal analog filtreninki ile aynı impuls cevabına sahiptir. Bu tasarım metodunda ise elde edilen sayısal filtre herhangi bir giriş için, orijinal analog filtre ile yaklaşık olarak aynı zaman domeni cevabına sahip olacaktır. Türetme;

$$H_I(s) = \frac{1}{s} \quad (4-29)$$

transfer fonksiyonu ile karakterize edilen bir analog entegratör farzedelim Entegratörün impuls cevabı

$$L^{-1} H_I(s) = h_I(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0+ \text{ için} \\ 0 & t \leq 0- \text{ için} \end{cases} \quad (4-30)$$

dir. Ve bu entegratörün keyfi bir $x(t)$ girişine cevabı

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_1(t-\tau) d\tau \quad (4-31)$$

konvolüsyon integrali ile verilir. Eğer $0+ < t_1 < t_2$ ise

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_0^{t_2} x(z) h_I(t_2-z) dz - \int_0^{t_1} x(z) h_I(t_1-z) dz \quad (4-31)$$

yazılabilir. $0 < z \leq t_1, t_2$ için

$$h_I(t-z) = h_I(t_1-z) = 1 \quad (4-32)$$

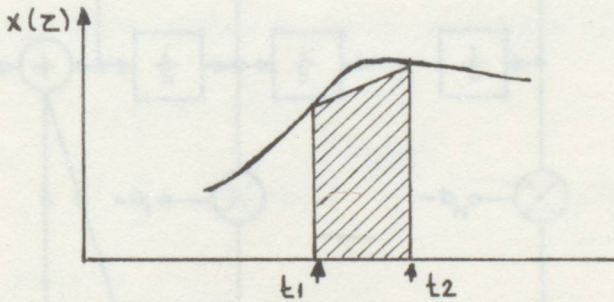
olur ve böylece (4-31) eşitliği

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(z) dz \quad (4-33)$$

şeklinde basitleşir. $t \rightarrow t_2$ iken şekil (4-3) den

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2} [x(t_1) + x(t_2)]$$

elde edilir.



ŞEKİL 4.3. Analog Entegratörün cevabı.

Ayrıca $t_1 = nT - T$ ve $t_2 = nT$ olarak

$$y(nT) - y(nT - T) = \frac{T}{2} [x(nT - T) + x(nT)] \quad (4-34)$$

fark eşitliği oluşturulabilir. Bu denklem herhangi bir giriş için analog entegratörle yaklaşık olarak aynı zaman domaini cevabına sahip bir sayısal entegratörü gösterir. Yukarıdaki eşitlikten

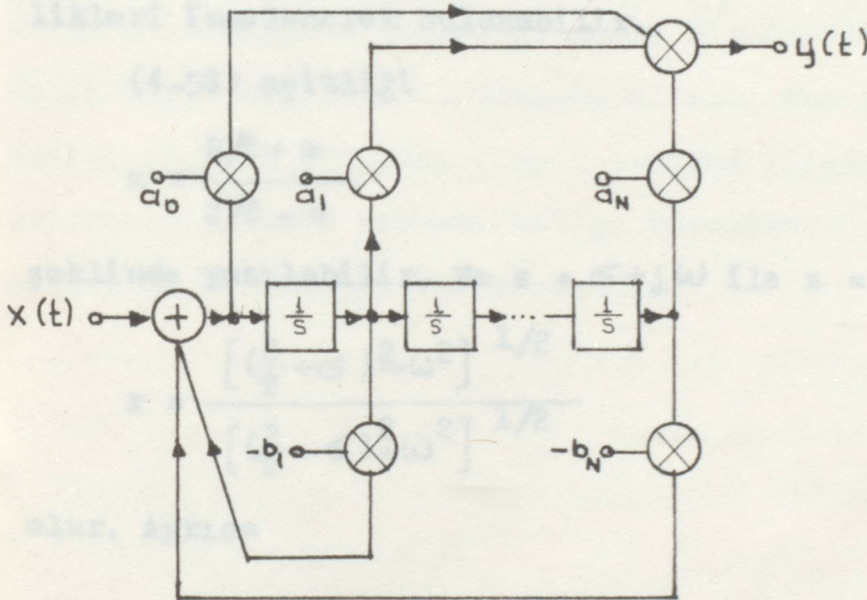
$$Y(z) - z^{-1} Y(z) = \frac{T}{2} [z^{-1} x(z) + x(z)] \quad (4-35)$$

elde edilir. Böylece sayısal entegratörün transfer fonksiyonu şu şekilde çıkarılabilir.

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{T} \frac{z+1}{z-1} \quad (4-36)$$

$$H_A(s) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k s^{N-k}}{s + \sum_{k=1}^N b_k s^{N-k}} \quad (4-37)$$

ile karakterize edilen bir analog filtre analog toplayıcılar, çarpıcılar ve entegratörlerle gösterilebilir. Bu durum şekil 4.4. de gösterilmiştir.



ŞEKİL 4.4. HA (s) in gerçekleştirilmesi.

Şekil 4.4. deki her analog eleman karşı düşen bir sayısal eleman ile değiştirilirse, sonuçta bir sayısal filtre elde edilir. Eğer yukarıdaki sayısal entegratör kullanılırsa elde edilecek sayısal filtrenin transfer fonksiyonu

$$S = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (4-38)$$

şeklinde bilinear dönüşüm uygulanarak elde edilebilir. Sonuç olarak.

$$H_D(z) = H_A(s) \Big|_s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (4-39)$$

elde edilir. Elde edilen sayısal filtre herhangi bir giriş için orijinal analog filtreninki ile hemen hemen aynı zaman domeni cevabına sahiptir.

Elde edilecek sayısal filtre ile analog filtrenin frekans cevapları arasındaki ilişki, bilinear dönüşümün özellikleri incelenerek bulunabilir.

(4-38) eşitliği

$$z = \frac{2/T + s}{2/T - s} \quad (4-40)$$

şeklinde yazılabilir. Ve $s = \sigma + j\omega$ ile $z = r e^{j\theta}$ ile

$$r = \frac{\left[\left(\frac{2}{T} + \sigma \right)^2 + \omega^2 \right]^{1/2}}{\left[\left(\frac{2}{T} - \sigma \right)^2 + \omega^2 \right]^{1/2}} \quad (4-41)$$

olur. Ayrıca

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega}{2/T + \sigma} - \tan^{-1} \frac{\omega}{2/T - \sigma} \quad (4-42)$$

şeklinde dir. Açıkça görülür ki

$$r > 1 \quad \sigma > 0 \text{ için}$$

$$r = 1 \quad \sigma = 0 \text{ için}$$

$$r < 1 \quad \sigma < 0 \text{ için}$$

Buradan s düzleminden z düzlemine geçmede iyi bir dönüşümün şu özellikleri taşıması gerektiği görülür.

1- s düzleminin sağ yarısı z düzlemindeki $z = 1$ birim dairesinin dışındaki alana karşı düşmelidir.

2- s düzleminin sanal eksenini $z = 1$ birim dairesinin üstüne karşı düşmelidir.

3- s düzleminin sol yarısı $z = 1$ birim dairesinin iç kısmına karşılık düşmelidir. Bu şart kararlılık ve nedensellik gibi özelliklerin dönüşüm sonucu değişmemesini sağlar. Bu dönüşüm altında frekans karakteristikler korunur. Geniş bantlı, keskin kesim frekanslı analog filtreler yine bu özelliklere sahip sayısal filtrelere dönüştürülebilir. Katlanma etkisinin olmayışı bilinear dönüşüme bir özellik kazandırır. Ancak diğer taraftan bu dönüşüm altında sayısal frekans ve analog frekans arasında lineer olmayan ilişki sonucu analog filtrenin frekans karakteristiği bozulmaktadır. Ayrıca impuls cevabı da bu dönüşüm ile korunamaz.

5-FIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI

5.1. FIR SAYISAL FİLTRELERİN ÖZELLİKLERİ

IIR Filtrelerin çok iyi genlik cevapları sağlamalarına karşın FIR filtrelerde tamamen lineer faz karakteristiği sağlanırlar.

Bir nedensel FIR filtrenin sistem fonksiyonu

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (5-1)$$

şeklindedir. Yani $H(z)$, z in $N-1$ inci dereceden bir polinomudur. Böylece $H(z)$ sonlu z düzleminde herhangi bir yere yerleştirilebilen $N-1$ sifıra ve tümü $z = 0$ da yayılmış olan $N-1$ tane kutba sahiptir.

FIR filtre için $h(n)$ birim örnek cevabı sonlu uzunlukta olup Fourier dönüşümü

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (5-2)$$

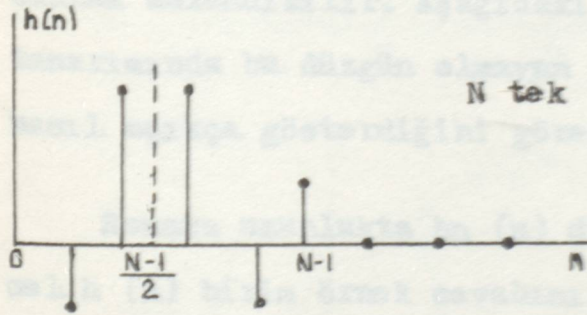
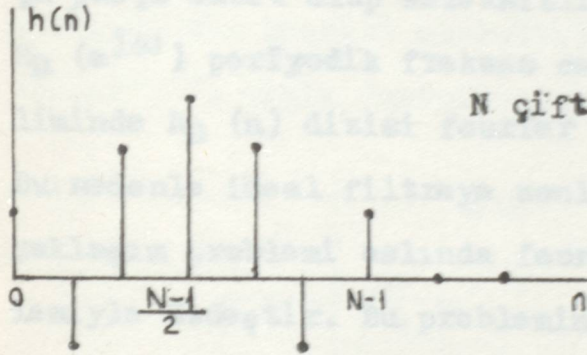
biçimindedir. Sonlu uzunlukta bir dizi, fourier dönüşümünden alınan N örnek değeriyle tamamen bellidir. Bu nedenle FIR filtre tasarımı ya birim örnek cevabının katsayılarını bularak ya da frekans cevabının N örnek değerini belirleyerek yapılır.

Birim örnek cevabı

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad (5-3)$$

koşulunu sağladığında filtrenin faz karakteristiği lineer olacaktır. Bu, $H(e^{j\omega})$ ifadesinden kolayca görülebilir. Bu koşul altında frekans cevabı

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \right] & N \text{ tek ise} \\ e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2}\right)} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos\left(\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right] & N \text{ çift ise} \end{cases} \quad (5-4a)$$



ŞEKİL 5.1. Lineer fazlı FIR filtreler için tipik impuls cevapları.

5.2. PENCERE FONKSİYONLARI KULLANILARAK FIR SAYISAL FİLTRELERİN TASARIMI

FIR filtre tasarımında en uygun yaklaşımın bir sonsuz süreli impuls cevap dizisini kısaltarak sonlu uzunlukta impuls cevabı elde etmektir.

İstenen frekans cevabı $H_D(e^{j\omega})$ nun verildiğini var

sayalım

$$H_D(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_D(n) e^{-j\omega n} \quad (5-5)$$

olup, $h_D(n)$ ilişkin birim örnek cevabıdır.

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (5-6)$$

Genellikle frekans seçici bir filtre için $H_D(e^{j\omega})$ parça parça sabit olup süreksizlikler band sınırlarındadır. $H_D(e^{j\omega})$ periyodik frekans cevabının fourier serisi gösteriliminde $h_D(n)$ dizisi fourier katsayıları rolü oynamaktaydı. Bu nedenle ideal filtreye sonlu uzunlukta $h(n)$ dizileriyle yaklaşım problemi aslında fourier serilerinin yakınsama problemiyle özdeşdir. Bu problemin en bilinen görünümü GIBBS OLAYI olarak adlandırılır. Aşağıdaki açıklamada FIR filtrelerin tasarımında bu düzgün olmayan yakınsaklık olayının kendisini nasıl açıkça gösterdiğini göreceğiz.

Sonsuz uzunlukta $h_D(n)$ dizisinden sonlu uzunlukta neden-
sel $h(n)$ birim örnek cevabını elde etmenin bir yolu dilimle-
mektir.

$$h(n) = \begin{cases} h_D(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases} \quad (5-7)$$

Genel olarak, $h(n)$ dizisini, istenen birim örnek cevabı ile bir $w(n)$ sonlu uzunlukta pencere dizisinin çarpımı olarak gösterebiliriz.

$$h(n) = h_D(n) w(n) \quad (5-8)$$

Yukarıdaki örnek durum için

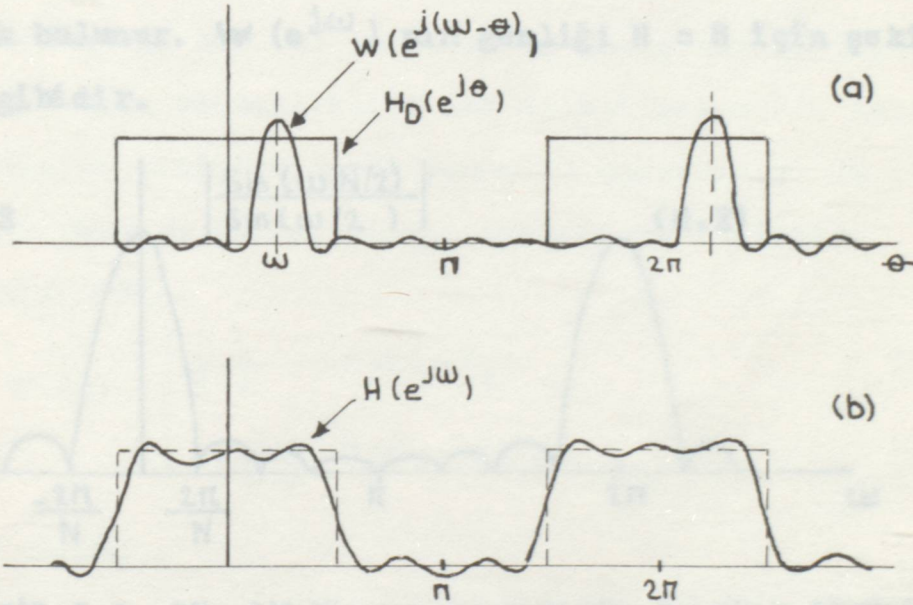
$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Dikdörtgen} \\ \text{pencere} \end{array} \quad (5-9)$$

biçimindedir. Kompleks konvolüsyon teoremini kullanarak

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\theta}) w(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (5-10)$$

yazılabilir. Yani $H(e^{j\omega})$ istenen frekans cevabı ile pencerenin fourier dönüşümünün periyodik sürekli konvolüsyonudur.

$H(e^{j\omega})$ frekans cevabı, istenen frekans cevabı $H_D(e^{j\omega})$ nın bozulmuş bir benzeri olacaktır. Şekil 5.2. $H_D(e^{j\theta})$ ve $w(e^{j(\omega-\theta)})$ tipik fonksiyonlarını gösterir.



ŞEKİL 5.2. (a) İstenilen impuls cevabı. Kısaltılarak gerçekleştirilen konvolüsyon işlemi (b) istenilen impuls cevabının pencerelemesinden oluşan tipik yaklaşım.

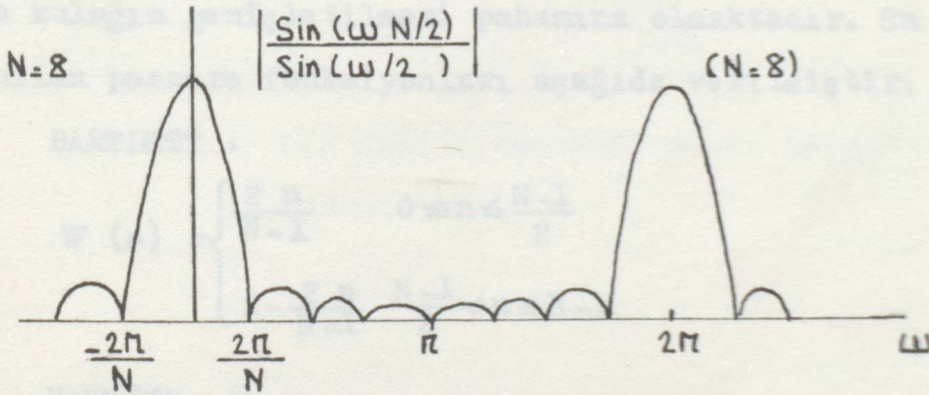
Konvolüsyon ifadesinden $H_D(e^{j\omega})$ daki değişimlere göre $w(e^{j\omega})$ ne kadar dar olursa $H(e^{j\omega})$ nın istenen $H_D(e^{j\omega})$

ya o kadar benzeyeceği görülmektedir. O halde pencere dizisinin seçimi bir yandan filtrenin gerçekleşmesinde hesap süresini azaltmak için $W(n)$ in olabildiğince kısa tutulması, diğer yandan da istenen frekans karakteristiğini elde edebilmek için de $W(e^{j\omega})$ nin olabildiğince dar tutulması sınırlamalarına dayanmaktadır. Bu iki sınırlama birbirleriyle çelişmektedir.

Dikdörtgen pencere için frekans cevabı

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega \frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \quad (5-11)$$

olarak bulunur. $W(e^{j\omega})$ nin genliği $N = 8$ için şekil 5.3. deki gibidir.



ŞEKİL 5.3. Bir dikdörtgen pencerenin fourier dönüşümünün genliği ($N = 8$)

Görüldüğü gibi, $W(e^{j\omega})$ nin fazı lineerdir. N arttıkça ana kulağın genliği azalır. Ana kulak, $\omega = -\frac{2\pi}{N}$ ile $\omega = \frac{2\pi}{N}$ arasında kalan bölge olarak tanımlanır.

Diğer yandan dikdörtgen pencere için yan kulakçıklar da önemsiz değildir ve N arttıkça ana kulakla yan kulakçıklarına

tepe değerleri de altlarındaki alan sabit kalacak biçimde artar. Her kulakçığın genişliği de azalır. Bunun sonucunda $W(e^{j(\omega-\theta)})$, $H_d(e^{j\omega})$ nın süreksizlik noktası üzerinden kayarken $W(e^{j(\omega-\theta)}) H_d(e^{j\omega})$ integrali $W(e^{j(\omega-\theta)})$ nın her kulakçığı süreksizlik noktasından geğerken titreşimli bir değişim gösterecektir. Her kulakçığın altındaki alan sabit kaldığından N in artırılmasıyla titreşimler daha hızlı olacak buna karşılık genlikleri azaltılamayacaktır. Fourier serileri kullanımında Gibbs olayı olarak adlandırılan bu sonucun üstesinden daha yumuşak dilimleme yapılarak gelinmektedir.

Pencereyi her iki yanda yavaş yavaş sıfıra düşürerek yan kulakçııkların yükseklikleri azaltılabilmektedir. Ancak buda ana kulağın genişletilmesi pahasına olmaktadır. En yaygın kullanılan pencere fonksiyonları aşağıda verilmiştir.

BARTLETT :

$$W(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (5-12 \text{ a})$$

$$(5-12 \text{ b})$$

HANNİNG :

$$W(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5-13)$$

HAMMING :

$$W(n) = 0.54 - 0.46 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5-14)$$

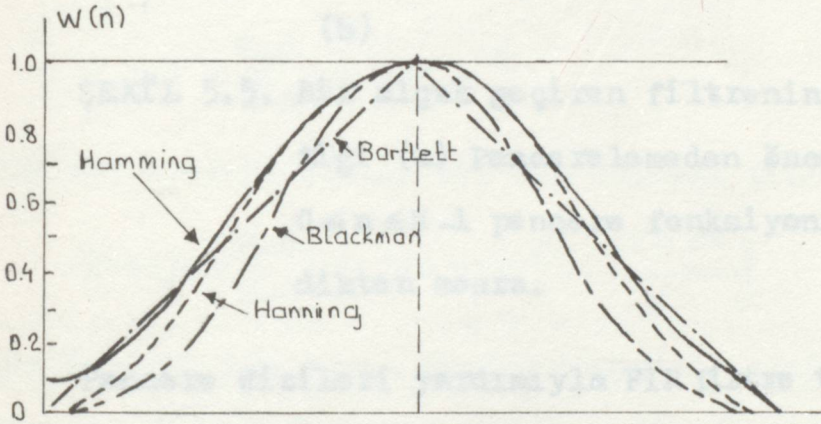
BLACKMAN :

$$W(n) = 0.42 - 0.5 \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{4\pi n}{N-1} \right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (5-15)$$

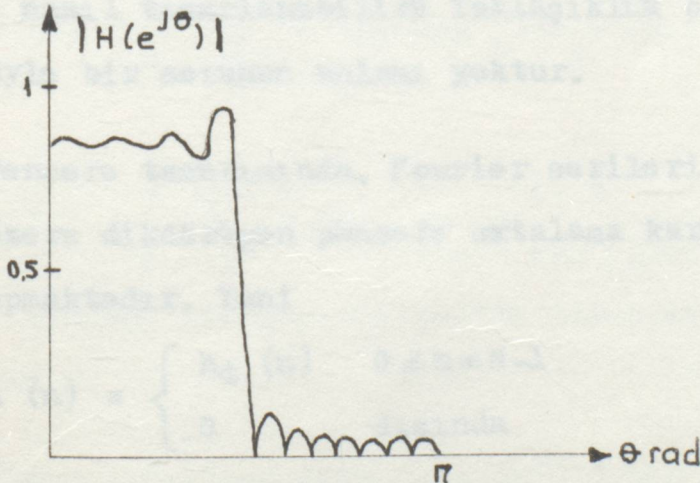
KAISER

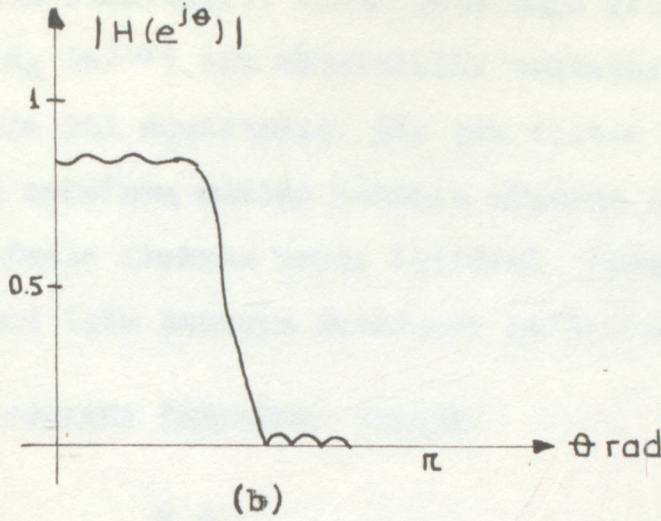
$$W(n) = \begin{cases} \frac{I_0 \left[\omega_0 \sqrt{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2 - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)^2} \right]}{I_0 \left[\omega_0 \left(\frac{N-1}{2}\right) \right]} & \text{dışında} \\ 0 & \text{dışında} \end{cases} \quad (5-16)$$

Burada $I_0(0)$ sıfırınca derecede Bessel fonksiyonunun modifiye edilmiştir.



ŞEKİL 5.4. FIR filtre tasarımında en yaygın kullanılan pencereler





ŞEKİL 5.5. Bir alçak geçiren filtrenin genlik karakteristiği (a) Pencerelemeden önce (b) $W(n) = \text{Cos} \frac{2\pi n}{N}$ $0 \leq n \leq N-1$ pencere fonksiyonu ile pencereledikten sonra.

Pencere dizileri yardımıyla FIR filtre tasarımı pek çok uygulamada uygun ve doyurucu bir yaklaşım olmaktadır. Hangi uygulamada hangi pencerenin daha iyi sonuç verdiği de bilgisayar programı yardımıyla kolaylıkla belirlenebilmektedir. Bununla birlikte acaba verilen bir N değeri için en iyi olan sayısal filtre nasıl tasarlanabilir? Yaklaşıklık ölçütü verilmeksizin böyle bir sorunun anlamı yoktur.

Pencere tasarımında, Fourier serileri kuramından bilindiği üzere dikdörtgen pencere ortalama karesel hatayı minimum yapmaktadır. Yani

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{dışında} \end{cases}$$

için

$$\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

(5-17)

minumum olmaktadır. Ancak görüldüğü gibi bu yaklaşıklık ölçütü $H_d(e^{j\omega})$ nin süreksizlik noktalarında istenmeyen değişimlere yol açmaktadır. Bir çok filtre tipi için daha iyi bir ölçüt maksimum mutlak hatanın minimum yapılmasıdır. Bir ya da daha fazla frekans bandı içindeki maksimum mutlak hatayı küçültmek için tasarım metodları geliştirilmiştir.

5.3. FREKANS ÖRNEKLEME YÖNTEMİ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (5-18)$$

ile karakterize edilen bir FIR sayısal filtrenin

$$\tilde{H}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \exp\left[-\frac{j2\pi nk}{N}\right] \quad (5-19)$$

ile belirli bir ayırık fourier dönüşümü eşdeğeri vardır. $\tilde{H}(k)$ sayısal filtre frekans cevabının düzgün olarak dağılmış N noktalı örneklenmiş dizisidir. Sonuç olarak $h(n)$ impuls cevabı dizisi ve FIR sayısal filtrenin $H(z)$ transfer fonksiyonu (5-19) daki DFT cinsinden aşağıdaki gibi verilir.

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) \exp\left[\frac{j2\pi nk}{N}\right] \quad (5-20)$$

ve

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}(k) \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1} \exp[j2\pi k/N]} \quad (5-21)$$

(5-21) ifadesi FIR sayısal filtre tasarımı için önemli bir anahtardır.

İstenen frekans cevabı $H_d(e^{j\theta})$ nin $-\pi \leq \theta \leq \pi$ için ve - rildiği, yani tüm θ lar için tanımlandığı farzedilsin. Tasarım

işlemi $\tilde{H}(k)$ nin istenen frekans cevabının düzgün ve N noktada örneklenmiş dizisi olmasıyla gerçekleşir.

$$\tilde{H}(k) \triangleq H_d(e^{j\theta})|_{\theta = 2\pi k/N} \quad (5-22)$$

Burada $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ dir. (5-22) deki önbilgiyi kullanarak (5-21) ile bir uygun FIR transfer fonksiyonu elde edilebilir. Bu işlem sonuçtaki frekans cevabı ile istenen karakteristiğin örneklenmiş noktalarda uygun düşmesini sağlar.

$$\theta = \frac{2\pi k}{N} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \text{ için} \quad (5-23)$$

5.4. FIR SAYISAL FİLTRELER ÜZERİNE BAZI YORUMLAR

Analog filtrelerdeki gibi, IIR sayısal filtrelerde tam lineer faz karakteristiklerine sahip değildir. Tersine FIR sayısal filtreler lineer faz karakteristiklerine sahip olarak tasarlanabilir. Ek olarak FIR sayısal filtreler daima kararlıdır. Bunlar FIR sayısal filtrelerin iyi yönleridir. Olumsuz olarak FIR sayısal filtrenin gerçekleştirilmesi çok hesaplama ve sayısal komponentler gerektirir. Bu yüzden FIR sayısal filtreler IIR sayısal filtrelerden daha pahalıdır. mesela FIR sayısal filtre

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-L} \quad (5-24 a)$$

veya

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \dots + x(n-L) \quad (5-24 b)$$

($L+1$) sayıyı toplamakla gerçekleştirilebilir. IIR sayısal filtre yaklaşımını alırsak

$$H(z) = \frac{1 - z^{-(L+1)}}{1 - z^{-1}} \quad (5-25 a)$$

Veya

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-L-1) \quad (5-25 \text{ b})$$

Yani, üç toplama ile aynı filtreleme fonksiyonunu gerçekleştirebiliriz. Genellikle, IIR sayısal filtreler karşılık gelen FIR sayısal filtrelere nazaran özel filtreleme fonksiyonları elde etmek için daha az hesaplama ve donanım gerektirirler. Bu nedenle çoğu zaman FIR sayısal filtreler, IIR sayısal filtreler için pratik olmayan veya imkansız olan görevleri yerine getirmekte kullanılır. Lineer faz filtreleri ve multirate filtreler (Burada giriş işaretleri ve karşılık gelen çıkış işaretleri farklı oranda örneklenir.)

6 - SAYISAL FİLTRELERİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

İstenen işaret işleme özelliklerine ulaşmak için bir transfer fonksiyonu elde edildikten sonra ortaya çıkan problem, bu transfer fonksiyonunu yapılandırmak, gerçekleştirmektir.

Sayısal filtrelerin yapılandırılması için kullanılan standart elemanlar bilindiği gibi, gecikme birimleri, toplayıcılar ve çarpma elemanlarıdır. İlke olarak pozitif rakamlar kadar negatif rakamları işleminde basit olduğu söylenebilir. Bu nedenle transfer fonksiyonlarındaki özdeğerler pozitif sayılarla sınırlandırılmamıştır.

IIR sayısal filtrelerin transfer fonksiyonları, FIR sayısal filtreninkinden farklı olduğu için gerçekleştirme teknikleri temelde aynı olduğu halde bunları ayrı ayrı incelemek gereklidir.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=0}^N b_i z^{-i}} = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (6-1)$$

ifadesini gerçeklemek için iki ayrı yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlar dolaysız yaklaşım ve dolaylı yaklaşımdır. Dolaysız yaklaşımda $H(z)$ transfer fonksiyonu tek bir aşamada gerçekleştirilir. Dolaylı yaklaşımda ise transfer fonksiyonu birinci ve

ikinci dereceden bölümlere ayrıştırılır. (6.1.) in gerçekleşmesi böylece tüm ilişkinin birinci ve ikinci derece bölümlerinin gerçekleşmesi ve bazı yollarla tekrar birleştirilmesi ile tamamlanmış olur. Kuantalama hataları dikkate alındığında dolaylı yaklaşımın daha iyi sonuç verdiği söylenebilir.

6.1. DOLAYSIZ GERÇEKLEME

Dolaysız yaklaşımda sayısal transfer fonksiyonlarının gerçekleşmesi için birçok teknik vardır. Bunlar arasında, dolaysız yapılar, merdiven ve kafes yapıları ve modüler yapıları sayabiliriz. Dolaysız yapılar, filtrelerin fark denklemlerini çeşitli yollarla gerçekleyen tekniklerdir. Bu tekniklerde kullanılan çarpan sabitleri, transfer fonksiyonlarının özdeğerleri olmaktadır. Düşük dereceli fonksiyonlar için dolaysız yapılar çok uygundur. Merdiven ve kafes yapılarında ise çarpan sabitleri aritmetik seriler yoluyla hesaplanır. Ancak sonuçta iyi bir gerçekleştirme elde edildiği söylenemez. Sayısal filtre gerçeklemede kullanılan öteki yöntemler arasında da minimum sayıda çarpan elde edilerek oluşturulan bazı özel teknikler bulunmaktadır.

6.2. DOLAYSIZ YAPILAR

Birinci Dolaysız Yapı (I D) :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{-i}} \quad (6-2)$$

denklemini bir $M(z)$ ara değişkeni ile çarpılıp bölünürse sonuç değişmez. Bundan sonra da yeni denklem ikiye ayrılır ve

bu denklemlerin ters z dönüşümü alınırrsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$m(k) = x(k) - \sum_{i=0}^n b_i m(k-i) \quad (6-3 a)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i m(k-i) \quad (6-3 b)$$

Bu denklemler birinci dolaysız yapının (I D) tanım denklemleridir ve Şekil 5.1 a da I D yapısının blok diyagramı görülmektedir. Şekillerde, zaman geciktirme elemanları dikdörtgen kutularla, çarpma elemanları işaretlenmiş oklarla, toplayıcılar içinde "+" işareti bulunan daireler ve elipsler tarafından ve işaret dağılım noktaları hatların birleştiği yerde koyu noktalarla gösterilmiştir.

I D yapısı kanonik yapı olarak da bilinir. Bu yapıda sadece n tane zaman geciktirme elemanı vardır. Bu (6.1) denkleminde verilen n. dereceden transfer fonksiyonu için minimum sayıdır.

6.3. DOLAYSIZ YAPIDA TRANSPOZE DEVRE KAVRAMI

Bir sayısal filtrenin transpoze yapısı blok diyagramının bütün dallarındaki işaret akış yönlerinin ters çevrilmesi ile elde edilir. Bu durumda toplama elemanları, işaret dağılım noktalarına ve işaret dağılım noktaları da toplama elemanlarına dönüşür. Transpoze devrenin transfer fonksiyonu esas devreninki ile aynıdır. Bundan dolayı sayısal filtreler için yapılar transpoze çiftleri halinde bulunur. Sonuç olarak yapıların bu özellikleri bir ikinci derek (2D) yapı türetmek

için kullanılabilir.

6.4. İKİNCİ DOLAYSIZ YAPI (2D)

1 D yapısının transpozesi alındığında şekil 6.1 b de gösterilen 2D yapısı elde edilir. Bu diyagramda (6.1.) denklemini gerçekler. Fakat 2D için $n+1$ toplama elemanı gerektiği halde 1D yapısı iki tane toplama elemanı yeterlidir. 2D nin fark denklemleri aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} p_i(k) &= p_{i+1}(k-1) + a_i x(k) - b_i y(k), \quad i=1, n-1 \\ p_n(k) &= a_n x(k) - b_n y(k) \\ y(k) &= a_0 x(k) + p_1(k-1) \end{aligned} \quad (6-4)$$

Bu yapı da kanoniktir. Yani geciktirme elemanı sayısı en az fonksiyon mertebesi kadar olabilir. Böyle sistemlere kanonik sistemler denir.

6.5. ÜÇÜNCÜ DOLAYSIZ YAPI (3D)

(6.1) denkleminde

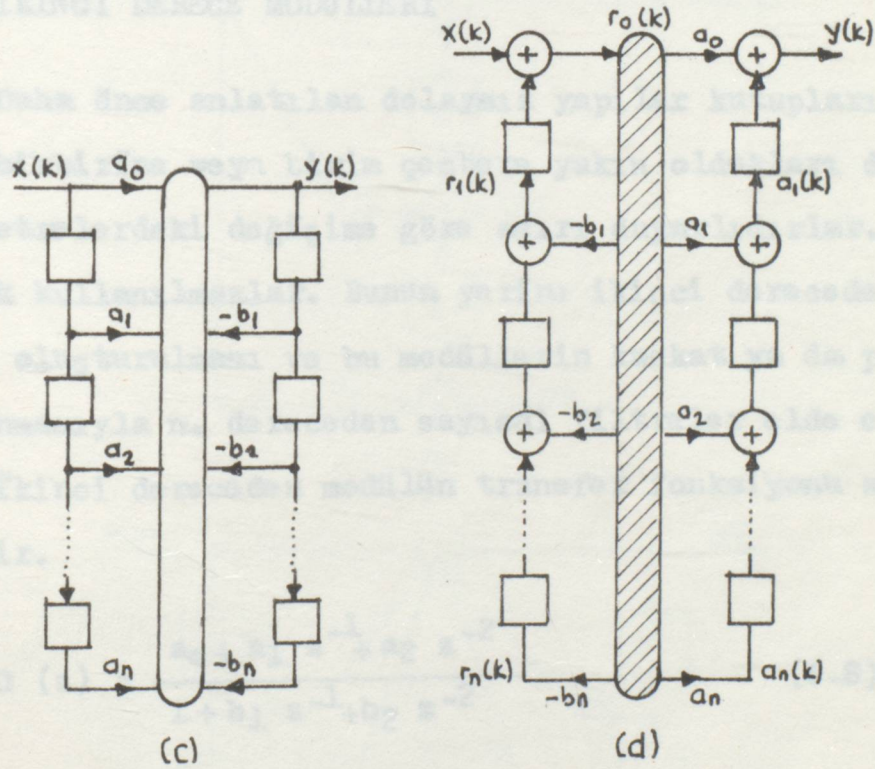
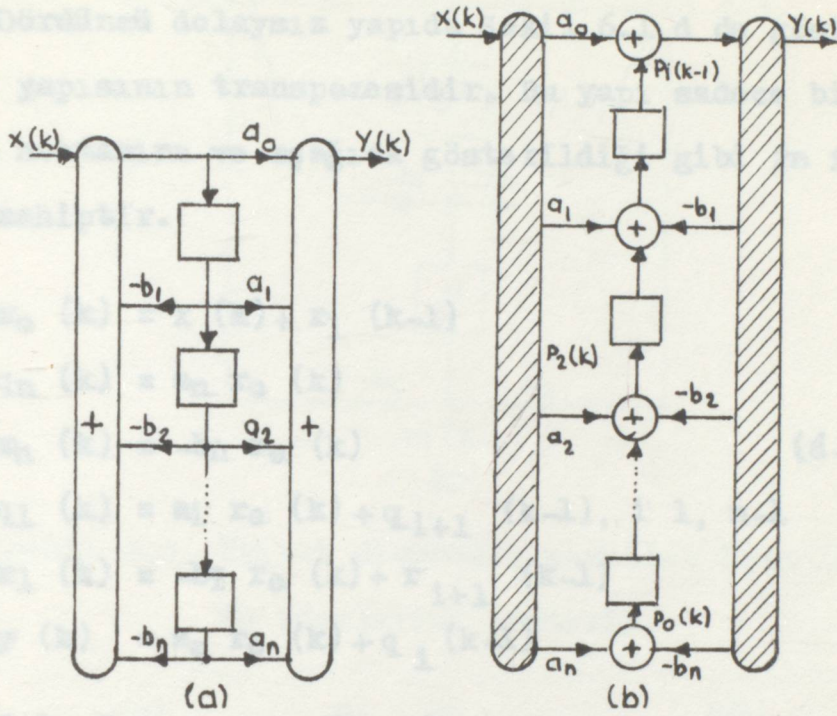
$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=0}^n b_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \\ Y(z) &= \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} Y(z) \end{aligned} \quad (6-5)$$

yazılabilir. Bu denklemin ters z dönüşümü alınır

$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i x(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i y(k-i) \quad (6-6)$$

olur. Bu üçüncü dolaysız yapı (3D) için fark eşitliğidir. Bu fark eşitliğinin blok diyagramı şekil 6.1.c de verilmiştir. Bu yapıda sadece bir tane toplama elemanı fakat $2n$ tane zaman geciktirme elemanı mevcuttur.

6.6. DÖNÜŞÜM İZLENİMLİ YAPILAR (4D)



ŞEKİL 6.1. Direk yapılar (a) 1D (b) 2D (c) 3D (d) 4D

6.6. DÖRDÜNCÜ DOLAYSIZ YAPI (4D)

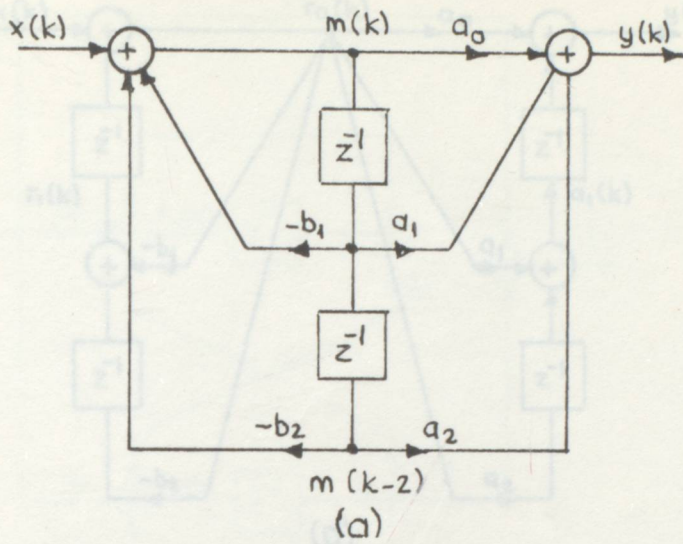
Dördüncü dolaysız yapıda Şekil 6.1 d de gösterildiği gibi 3D yapısının transpozesidir. Bu yapı sadece bir işaret dağıtma noktasına ve aşağıda gösterildiği gibi 2n fark denklemine sahiptir.

$$\begin{aligned}
 r_0(k) &= x(k) + r_1(k-1) \\
 q_n(k) &= a_n r_0(k) \\
 r_n(k) &= -b_n r_0(k) \\
 q_1(k) &= a_1 r_0(k) + q_{i+1}(k-1), \quad i=1, n-1 \\
 r_1(k) &= -b_1 r_0(k) + r_{i+1}(k-1) \\
 y(k) &= a_0 r_0(k) + q_1(k-1)
 \end{aligned} \tag{6-7}$$

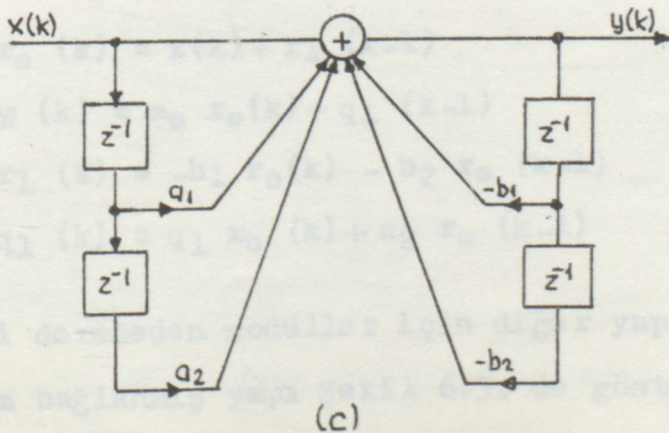
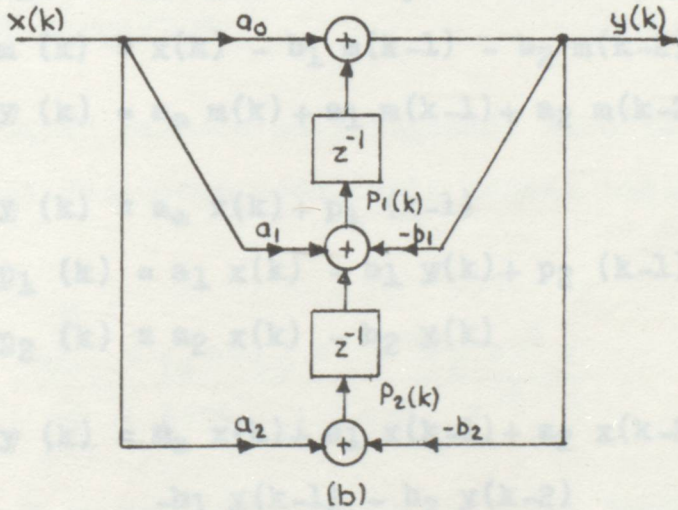
6.7. İKİNCİ DERECE MODÜLLERİ

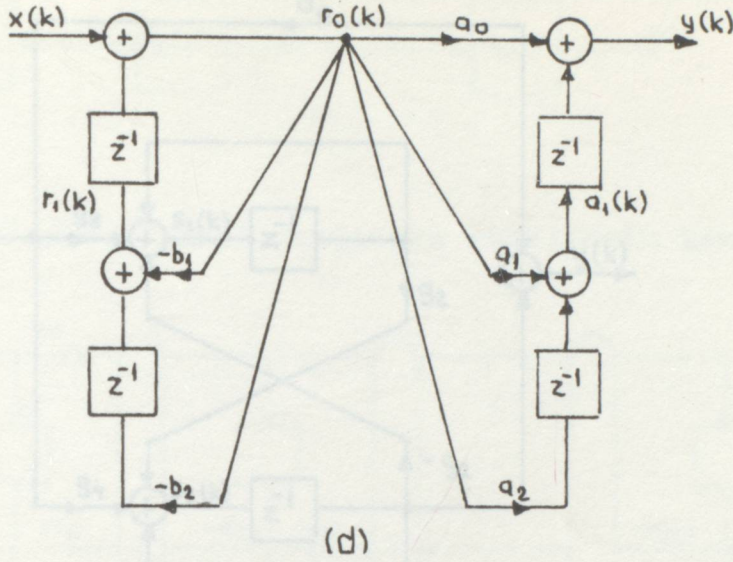
Daha önce anlatılan dolaysız yapılar kutupların çok sayıda birbirine veya birim çembere yakın oldukları durumlarda parametrelerdeki değişime göre aşırı duyarlıdırlar. Bu nedenle pek kullanılmazlar. Bunun yerine ikinci dereceden modüllerin oluşturulması ve bu modüllerin kaskat ya da paralel bağlanmasıyla n. dereceden sayısal filtreler elde edilmektedir. İkinci dereceden modülün transfer fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \tag{6-8}$$



ŞEKİL 6.2. İkinci dereceden modüller için 1D, 2D, 3D ve 4D yapılarını gösterir.





ŞEKİL 6.2. İkinci dereceden direk modüller (a) 1D,
(b) 2D, (c) 3D, (d) 4D

Herbir yapıyı tanımlayan fark eşitlikleri aşağıda verilmiştir.

$$1D = \begin{aligned} m(k) &= x(k) - b_1 m(k-1) - b_2 m(k-2) \\ y(k) &= a_0 m(k) + a_1 m(k-1) + a_2 m(k-2) \end{aligned} \quad (6-9)$$

$$y(k) = a_0 x(k) + p_1(k-1)$$

$$2D = p_1(k) = a_1 x(k) - b_1 y(k) + p_2(k-1) \quad (6-10)$$

$$p_2(k) = a_2 x(k) - b_2 y(k)$$

$$3D = \begin{aligned} y(k) &= a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + a_2 x(k-2) \\ &\quad - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) \end{aligned} \quad (6-11)$$

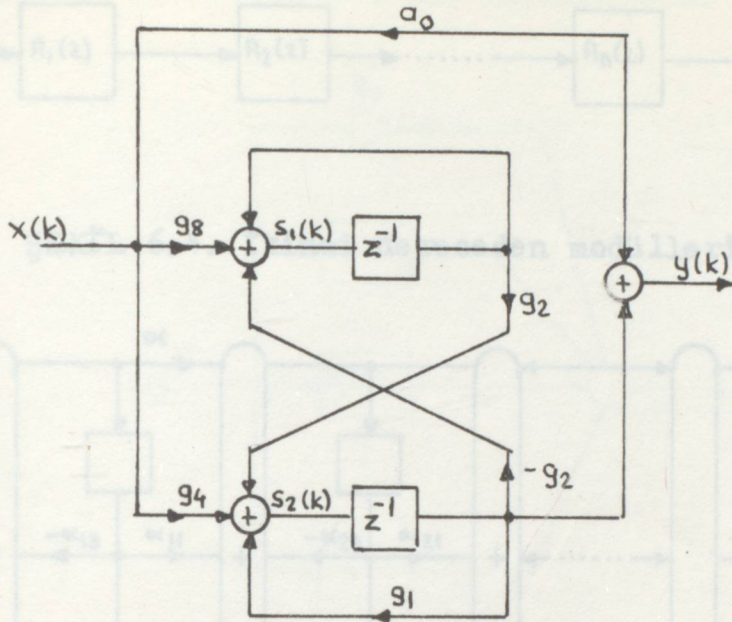
$$r_0(k) = x(k) + r_1(k-1)$$

$$4D \quad y(k) = a_0 r_0(k) + q_1(k-1) \quad (6-12)$$

$$r_1(k) = -b_1 r_0(k) - b_2 r_0(k-1)$$

$$q_1(k) = q_1 r_0(k) + a_2 r_0(k-1)$$

İkinci dereceden modüller için diğer yapılarda mevcuttur. Çapraz bağlanmış yapı Şekil 6.3. de gösterilmiştir. Bu yapıyı Ix yapı olarak adlandırılır.



ŞEKİL 6.3. lx yapısı.

6.8. KASKAT GERÇEKLEME

Duyarlılık probleminde kaçınmak için (6.1) de verilen $H(z)$ ikinci dereceden modüllerin kaskat bağlanmasıyla oluşturulur.

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^m (\alpha_{i0} + \alpha_{i1} z^{-1} + \alpha_{i2} z^{-2})}{\prod_{i=1}^m (1 + \alpha_{i3} z^{-1} + \alpha_{i4} z^{-2})} \quad (6-13)$$

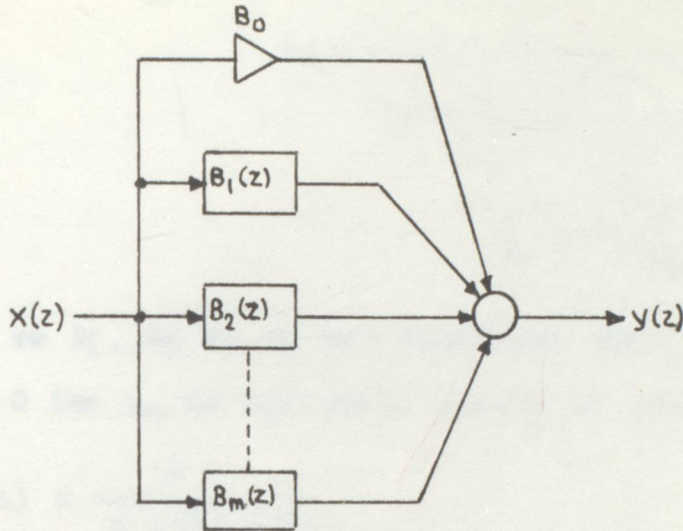
Burada m $n/2$ ye eşit veya büyük en küçük tamsayıdır. Denklem aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$H(z) = \prod_{i=1}^m (A_i(z))$$

$$A_i(z) = \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} z^{-1} + \alpha_{i2} z^{-2}}{1 + \alpha_{i3} z^{-1} + \alpha_{i4} z^{-2}} \quad (6-14)$$

Aşağıdaki şekil bir kaskat yapısının blok diyagramını göstermektedir.

Aşağıdaki şekil paralel bir yapının blok diyagramını gösterir.



ŞEKİL 6.9. Paralel Gerçekleme.

n . dereceden bir filtre $n = 2$ olan 3D yapılarının paralel bağlanması biçiminde gerçekleştirilmek istenirse $2m+2$ tane zaman geciktirme elemanına $4m+1$ tane çarpma, $m+1$ tane de toplama elemanına ihtiyaç vardır.

6.10. MERDİVEN GERÇEKLEME

Direk yapıların duyarlılık problemini düzeltmek için bir üçüncü metod merdiven yapıyı gerçeklemektir. Eğer $H(z)$ aşağıdaki şekilde ifade edilirse.

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}} \quad (6-16)$$

Burada $a_n \neq 0$ ve $b_n \neq 0$ dir. Bu durumda $H(z)$ sürekli kesirler şeklinde açılabilir.

$$D(z) = A_0 \frac{1}{B_1 z^{-1} + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{B_2 z^{-1} + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{B_3 z^{-1} + \frac{1}{A_3 + \frac{1}{B_n z^{-1} + \frac{1}{A_n}}}}}}}} \quad (6-17)$$

Burada A_i ve B_i , a_i ve b_i den türetilen reel sabitlerdir.

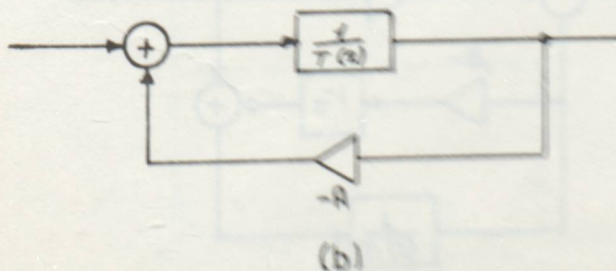
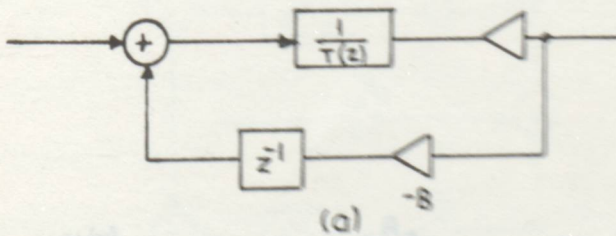
Eğer $a_n = 0$ ise A_0 da sıfırdır. (6.17) yi gerçeklemek için

$$G_1(z) = \frac{1}{B z^{-1} + T(z)} \quad (6-18)$$

$$G_2(z) = \frac{1}{A + T(z)}$$

gerçekleştirilmelidir. Bu fonksiyonlar Şekil 6.7 deki gibi gerçekleştirilebilir. Şekil 6.7 de gösterilen gerçekleştirme işlemi aşağıdaki gibidir.

$$H(z) = A_0 + \frac{1}{B_1 z^{-1} + T_1(z)} \quad (6-19)$$



ŞEKİL 6.7. (a) $G_1(z)$ (b) $G_2(z)$

işlemin bu bölümü şekil 6.8. a da gösterilmiştir. Daha sonra

$$T_1(z) = \frac{1}{A_1 + T_2(z)} \quad (6-20)$$

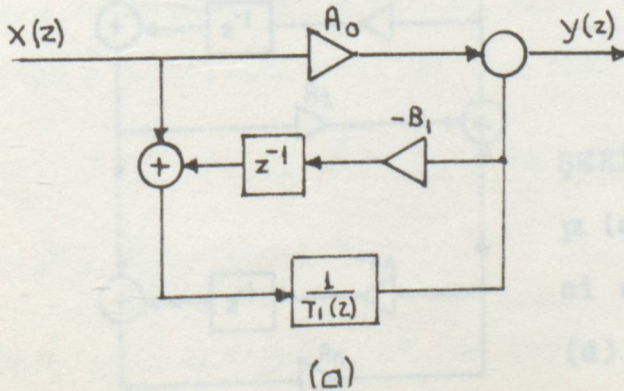
$$\frac{1}{T_1(z)} = A_1 + T_2(z)$$

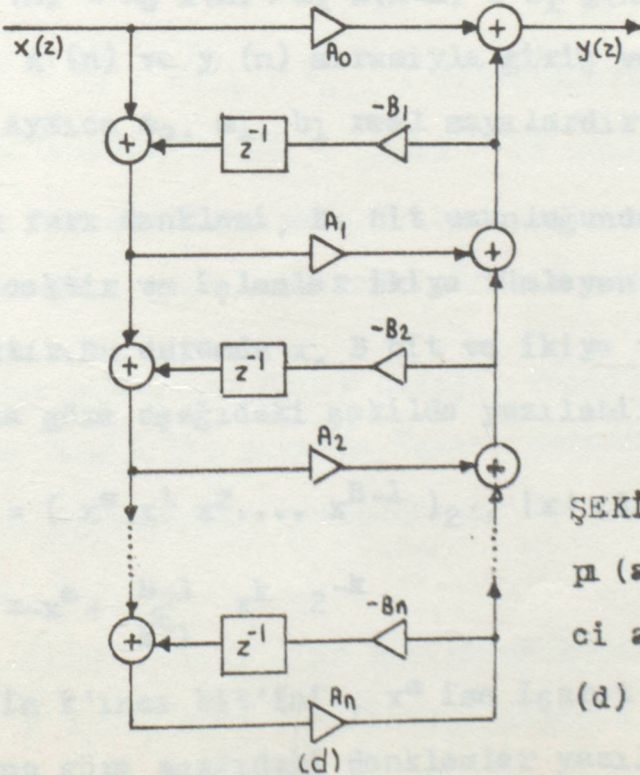
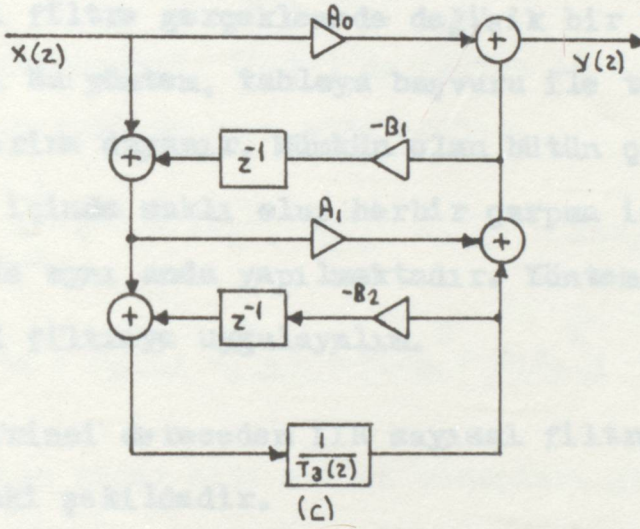
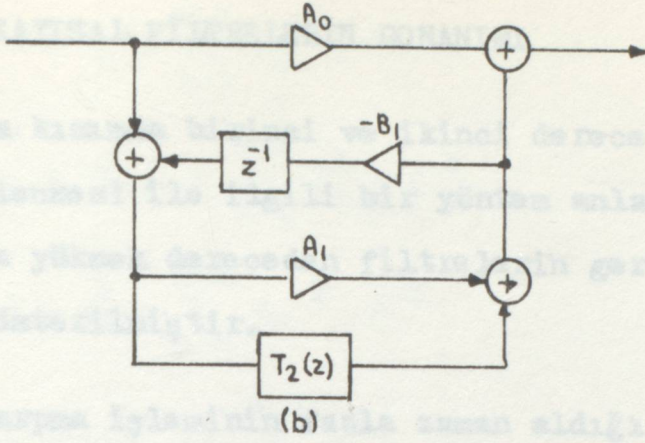
ifade edilir. Bu adım şekil 6.8 b de gösterilmiştir. Üçüncü adımda

$$T_2(z) = \frac{1}{B_2 z^{-1} + T_3(z)} \quad (6-21)$$

gösterilir ki bu esasa şekil 6.8 c de gösterildiği gibi birinci adımın tekrarıdır. İşlem şekil 6.8 d deki merdiven yapıya ulaşana kadar tekrarlanır.

Merdiven yapı kanoniktir. Çünkü n zaman geciktirme elemanına sahiptir. Ayrıca $2n+1$ çarpıcı gerektirir ve $2n$ işaret dağılım noktasına sahiptir.





ŞEKİL 6.8. Merdiven yapının (a) ilk adım (b) ikinci adım (c) üçüncü adım (d) son adım.

6.11. SAYISAL FİLTRELERİN DONANIMI

Bu kısımda birinci ve ikinci dereceden filtrelerin gerçekleşmesi ile ilgili bir yöntem anlatılmış, bu yöntemle daha yüksek dereceden filtrelerin gerçekleşmesi ve donanımı gösterilmiştir.

Çarpma işleminin fazla zaman aldığı gözönünde tutularak, sayısal filtre gerçekleştirilmede değişik bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem, tabloya başvuru ile toplama ve öteleme işlemlerine dayanır. Mümkün olan bütün çarpma sonuçları ROM'un içinde saklı olup her bir çarpma işlemi toplama ve öteleme ile aynı anda yapılmaktadır. Yöntemi birinci dereceden bir IIR filtreye uygulayalım.

Birinci dereceden IIR sayısal filtrenin fark denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1) \quad (6-22)$$

Burada, $x(n)$ ve $y(n)$ sırasıyla giriş ve çıkışı göstermektedir. Ayrıca a_0 , a_1 , b_1 reel sayılardır.

Bu fark denklemi, B. bit uzunluğunda bir donanımla gerçekleştirilecektir ve işlemler ikiye tümleyen aritmetik ile yapılacaktır. Bu durumda x , B bit ve ikiye tümleyen bir sayı olduğuna göre aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x = (x^0 x^1 x^2 \dots x^{B-1})_2, |x| < 1$$

$$x = -x^0 + \sum_{k=1}^{B-1} x^k 2^{-k} \quad (6-23)$$

x^k , x in k'inci bit'ini, x^0 ise işaret bitini göstermektedir. Buna göre aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$Y_n = -Y_n^0 + \sum_{k=1}^{B-1} Y_n^k 2^{-k} \quad (6-24 \text{ a})$$

$$Y_{n-1} = -Y_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^{B-1} Y_{n-1}^k 2^{-k} \quad (6-24 \text{ b})$$

$$x_n = -x_n^0 + \sum_{k=1}^{B-1} x_n^k 2^{-k} \quad (6-24 \text{ c})$$

$$x_{n-1} = -x_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^{B-1} x_{n-1}^k 2^{-k} \quad (6-24 \text{ d})$$

(6-24) denklemleri, (6-22) de yerine konur ve yeniden düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$Y_n = \sum_{k=1}^{B-1} 2^{-k} F(x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k) - F(x_n^0, x_{n-1}^0, Y_{n-1}^0) \quad (6-25)$$

$$F(x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k) = a_0 x_n^k + a_1 x_{n-1}^k - b_1 Y_{n-1}^k \quad (6-26)$$

Buraya kadar elde edilen sonuçları gözönüne alarak aşağıdaki algoritmaya göre devreyi kurup çalıştırmak mümkündür.

1) $F(x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k)$ fonksiyonundan $2^3 = 8$ değişik değer elde edilmektedir. (Çünkü x in alabileceği değer ya "0" ya da "1" dir.) Bu nedenle bu değerler önceden hesaplanıp daha sonra geri çağrılmak amacıyla bir ROM da saklanmalıdır.

2) Her bir $y(n)$ örnek çıkışı, değerlerin ötelenerek toplanması ve basit bir çıkarma işlemi sonucunda (6-25) ile verilen filtre denkleminin hesaplanması ile elde edilebilir. Bunun için.

a) Silme girişi olan bir akümülatör kullanmak.

b) $k = B-1$ için F_k değerini tayin etmek.

c) F_k ile akümülatörün içeriğini toplamak (İkiye tümleyen toplam)

d) Akümülatörün içeriğini bir bit sağa ötelemek. (ikiye tümleyen öteleme)

e) $k = B-2, B-3, \dots, 1$ için b, c, d adımlarını tekrarlamak.

f) F_0 değerini tayin etmek.

g) F_0 değerini akümülatörün içeriğinden çıkarmak (ikiye tümleyen çıkarma) gerekir.

3) $x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k$ bitleri ROM un adres girişlerini belirler. Bu bitlerin değerlerine göre $F(\dots)$ in alabileceği değerler tablo 6.1 de gösterilmiştir.

TABLO 6.1. Birinci dereceden sayısal filtrede $F(\dots)$ in alabileceği değerler.

ROM'un adresi			ROM'un içeriği
x_n^k	x_{n-1}^k	Y_{n-1}^k	$F(x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k)$
0	0	0	0
0	0	1	$-b_1$
0	1	0	a_1
0	1	1	$a_1 - b_1$
1	0	0	a_0
1	0	1	$a_0 - b_1$
1	1	0	$a_0 + a_1$
1	1	1	$a_0 + a_1 - b_1$

Görüldüğü gibi ROM'un $x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k$ bitlerinden oluşan adreslerine $F(x_n^k, x_{n-1}^k, Y_{n-1}^k)$ değerleri depolanmıştır. Demek ki B-1 toplama ve öteleme ile bir çıkarma işlemi sonucu Y_n elde edilmektedir.

Buna göre her $y(n)$ değeri B adımda hesaplanmaktadır. Ayrıca $F(\dots)$ fonksiyonunun içerdiği değişken sayısının L olması halinde ROM'da 2^L tane adresin işgal edileceği açıktır. L sayısı filtrenin derecesine bağlıdır.

Birinci dereceden filtre için anlatılan bu yöntem, yüksek dereceden sayısal filtrenin birim yapısını oluşturan ikinci dereceden bir filtreye uygulanırsa. Bu durumda $L=5$ olacağı için $F(x_n^k, x_{n-1}^k, x_{n-2}^k, Y_{n-1}^k, Y_{n-2}^k)$, $2^5 = 32$ değişik değer alabilir. Ayrıca $F(x_n^0, x_{n-1}^0, x_{n-2}^0, Y_{n-1}^0, Y_{n-2}^0)$ 'in çıkarılabilmesi için F in tümlenmiş değerlerine ihtiyaç vardır. Bu nedenle çıkarma işlemi için $\bar{F} = (\bar{F}_0, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_5, \bar{F}_6, \bar{F}_7)$ kullanılmıştır. \bar{F} için de ROM da $2^5 = 32$ ayrı yer işgal edilmiştir. O halde $32 \cdot 32 = 64$ bellek gözü kullanılmış olmaktadır.

İkinci dereceden bir IIR filtrenin fark denklemi.

$$H(z) = \prod_{i=1}^m (A_i(z))$$

$$A_i(z) = \frac{\alpha_{i0} + \alpha_{i1} z^{-1} + \alpha_{i2} z^{-2}}{1 + \alpha_{i3} z^{-1} + \alpha_{i4} z^{-2}} \quad (6-27)$$

ile verilir. $B = 8$ alınmıştır. Bu durumda aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$Y_n = -Y_n^0 + \sum_{k=1}^7 Y_n^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ a})$$

$$Y_{n-1} = Y_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^7 Y_{n-1}^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ b})$$

$$Y_{n-2} = -Y_{n-2}^0 + \sum_{k=1}^7 Y_{n-2}^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ c})$$

$$x_n = x_n^0 + \sum_{k=1}^7 x_n^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ d})$$

$$x_{n-1} = -x_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^7 x_{n-1}^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ e})$$

$$x_{n-2} = -x_{n-2}^0 + \sum_{k=1}^7 x_{n-2}^k 2^{-k} \quad (6-28 \text{ f})$$

Bu denklemler (6.22) de yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$Y_n = \sum_{k=1}^7 2^{-k} F(x_n^k, x_{n-1}^k, x_{n-2}^k, Y_{n-1}^k, Y_{n-2}^k) - F(x_n^0, x_{n-1}^0, x_{n-2}^0, Y_{n-1}^0, Y_{n-2}^0) \quad (6-29)$$

$$F(x_n^k, x_{n-1}^k, x_{n-2}^k, Y_{n-1}^k, Y_{n-2}^k) = a_0 x_n^k + a_1 x_{n-1}^k + a_2 x_{n-2}^k - b_1 Y_{n-1}^k - b_2 Y_{n-2}^k$$

Bu durumda $Y_{n-2}^k, Y_{n-1}^k, x_{n-2}^k, x_{n-1}^k, x_n^k$, bitleri, kullanılan EPROM'un adres girişlerini oluşturduklarından aşağıdaki tablo kurulabilir.

TABLO 6.2. İkinci dereceden bir filtre için $F(\dots)$ in alabileceği değerler.

EPROM'un ADRESİ

$$Y_{n-2}^k \quad Y_{n-1}^k \quad x_{n-2}^k \quad x_{n-1}^k \quad x_n^k$$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

EPROMUN İÇERİĞİ

$$F(x_n^k, x_{n-1}^k, x_{n-2}^k, Y_{n-1}^k, Y_{n-2}^k)$$

0
a_0
a_1
$a_0 + a_1$
a_2
$a_0 + a_2$
$a_1 + a_2$
$a_0 + a_1 + a_2$
$-b_1$
$a_0 - b_1$
$a_1 - b_1$
$a_0 + a_1 - b_1$
$a_2 - b_1$
$a_0 + a_1 + a_2 - b_1$
$-b_2$
$a_0 - b_2$
$a_1 - b_2$
$a_0 + a_1 - b_2$
$a_2 - b_2$
$a_0 + a_2 - b_2$
$a_2 - b_2$
$a_0 + a_2 - b_2$
$a_1 + a_2 - b_2$
$a_0 + a_1 + a_2 - b_2$
$-b_1 - b_2$

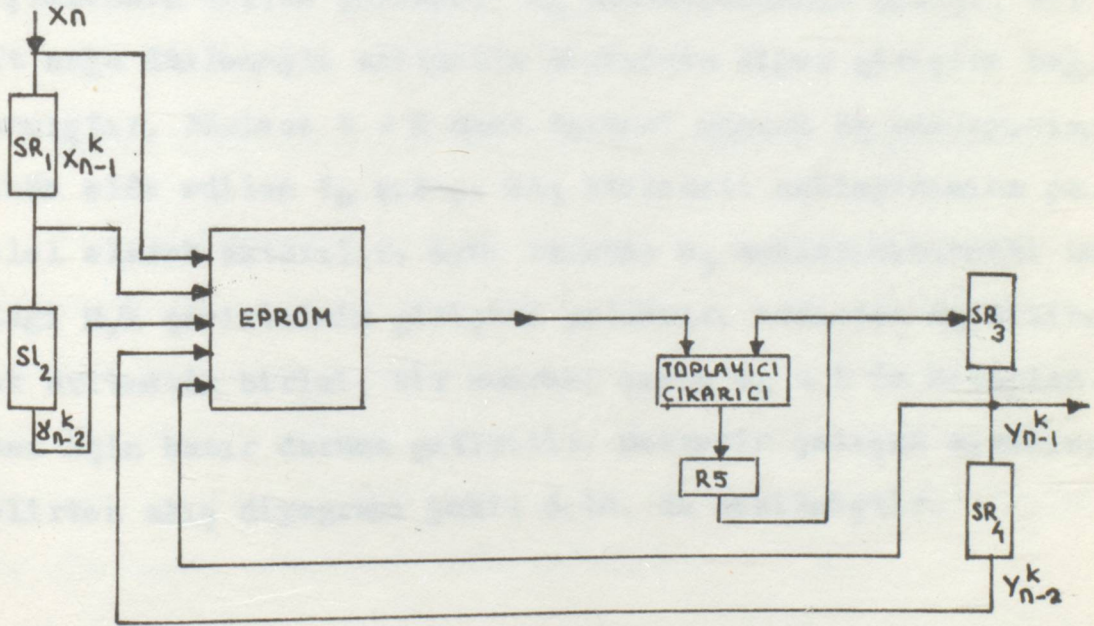
EPROM'UN ADRESİ

1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1

EPROM'UN İÇERİĞİ

$a_0 - b_1 - b_2$
$a_1 - b_1 - b_2$
$a_0 + a_1 - b_1 - b_2$
$a_2 - b_1 - b_2$
$a_0 + a_2 - b_1 - b_2$
$a_1 + a_2 - b_1 - b_2$
$a_0 - a_1 - a_2 - b_1 - b_2$

Bu yöntem ile sayısal filtre gerçekleştirilmesi tümüyle seri veya tümüyle paralel donanıma kadar birçok şekilde olabilir. Tümüyle seri ikinci derece sayısal filtrenin blok diyagramı şekildeki gibidir.

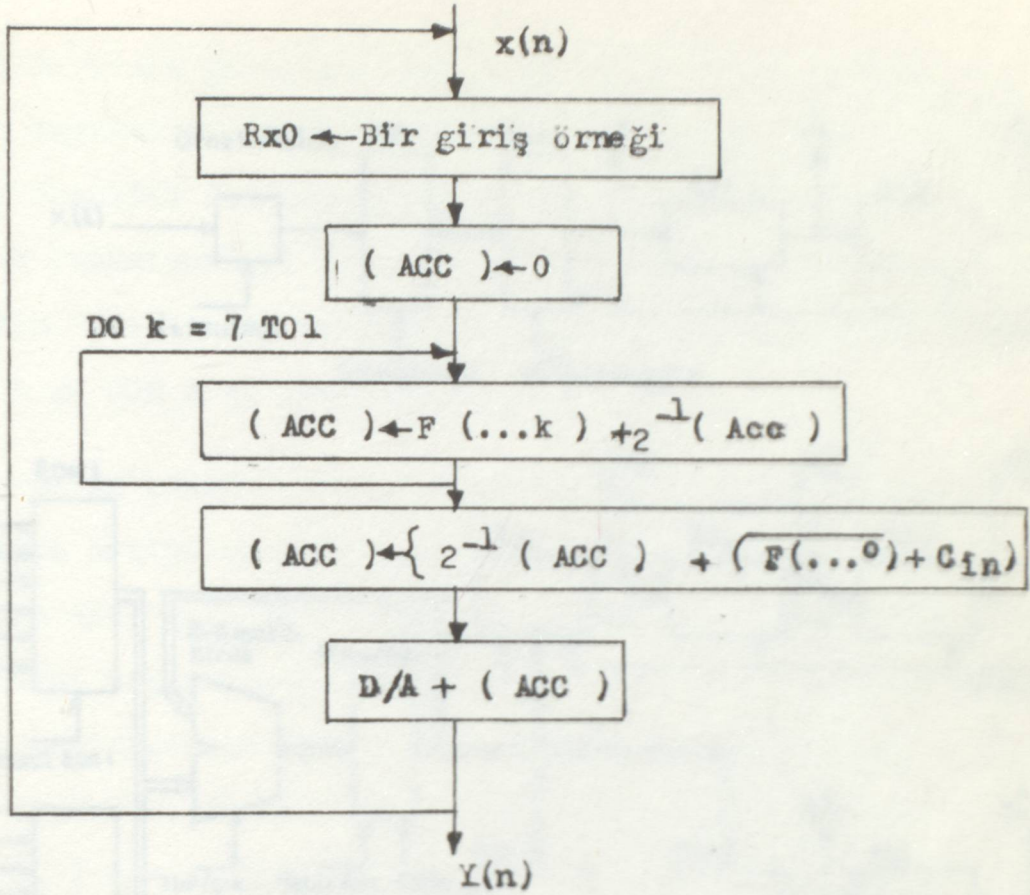


ŞEKİL 6.9. Tümüyle seri ikinci derece sayısal filtrenin blok şeması.

Tümüyle seri ikinci dereceden sayısal filtre hücreleri ile kaskat veya paralel biçimler kolayca gerçekleştirilebilir.

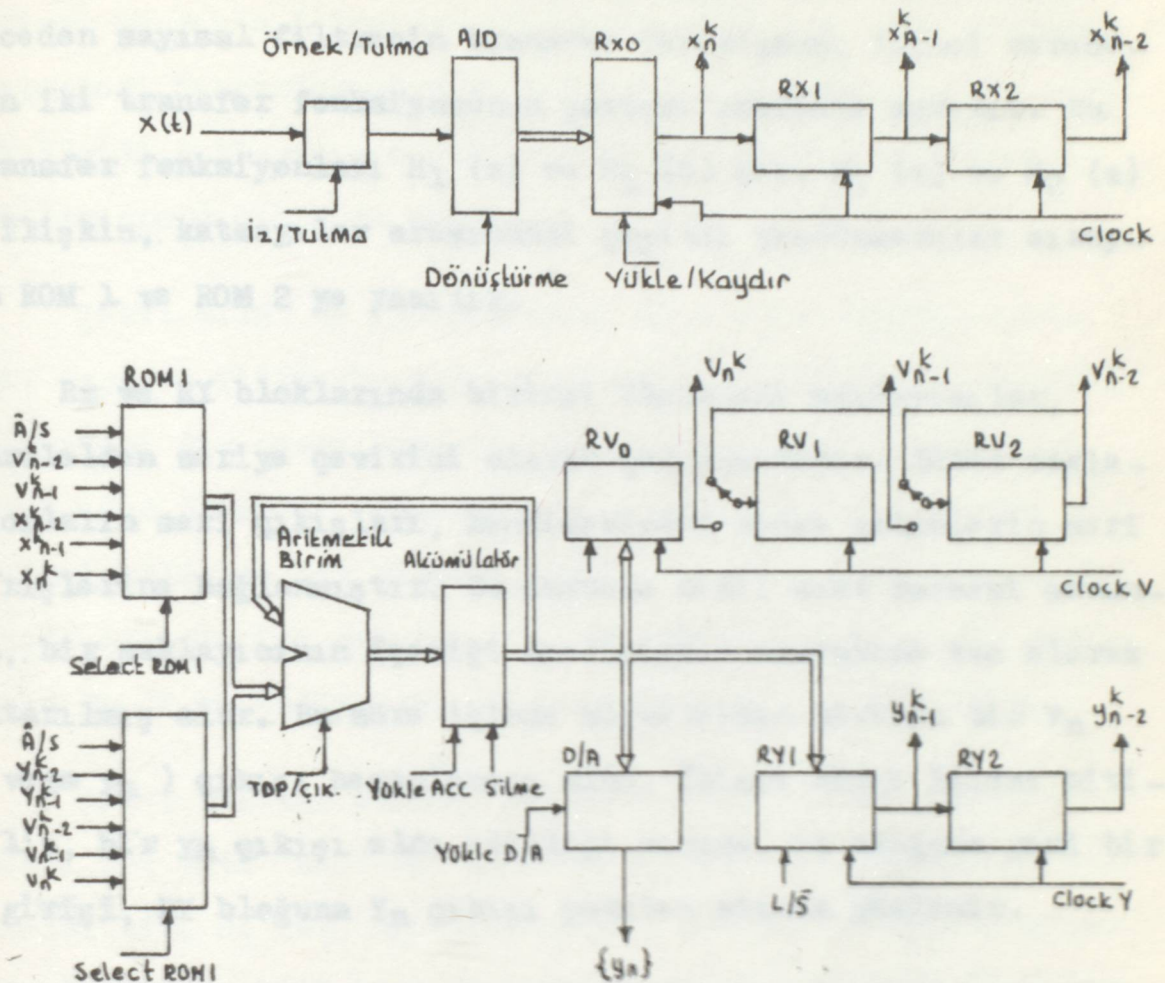
Kaskat biçim ikinci derece hücrelerinin herbirine ilişkin F fonksiyon değerleri için gerekli olan tek bir bellek kullanılarak gerçekleştirilebilir. Böylece donanım karmaşıklığı ve maliyet düşer. Fakat bellek adreslerinde çoğullama yapılması gerekir. Bu durumda herbir hücre zamanda sıra ile çalışmış olacaktır.

Sayısal filtrenin çalışması şu şekilde açıklanabilir. En az anlamlı bit önce olmak üzere veri, ötelemeli saklayıcılara seri olarak girer. Her öteleme sonucunda ötelemeli saklayıcıların çıkışlarında yeni bir $(x_n^k, x_{n-1}^k, x_{n-2}^k, y_{n-1}^k, y_{n-2}^k)$ vektörü oluşur. Bu durumda belleğin çıkışında elde edilen F fonksiyonunun değeri, aritmetik biriminin girişlerinden birine yollanır. R₅ saklayıcısının çıkışı, bir bit sağa ötelemeyle aritmetik biriminin diğer girişine bağlanmıştır. Böylece B = 8 saat darbesi sonucu R₅ saklayıcısında elde edilen Y_n çıkışı SR₃ ötelemeli saklayıcısına paralel olarak aktarılır. Aynı zamanda R₅ saklayıcısındaki bu bilgi D/A çeviricinin girişine yollanır. Ardından R₅ silinerek aritmetik birimi, bir sonraki çıkış Y_{n+1}'in hesaplanması için hazır duruma getirilir. Devrenin çalışma sırasını belirten akış diyagramı Şekil 6.10. da verilmiştir.



Şekil 6.10. Devrenin çalışmasını gösteren akış diyagramı.

İkinci dereceden filtre blokları, çeşitli şekillerde bağlanarak daha yüksek dereceden filtreler elde edilebilir. Dördüncü dereceden sayısal filtreye ait blok diyagram şekil 6.11. de gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü gibi ikinci dereceden sayısal filtre donanımına ek olarak bir ROM ve üç tane ötelemeli saklayıcı daha gelmiştir.



ŞEKİL 6.11. Dördüncü dereceden sayısal Filtrenin blok diyagramı

Bu devrenin çalışması şöyle açıklanabilir. Dördüncü dereceden sayısal filtrenin transfer fonksiyonu, ikinci dereceden iki transfer fonksiyonunun çarpımı şeklinde ayrılır. Bu transfer fonksiyonları $H_1(z)$ ve $H_2(z)$ dir. $H_1(z)$ ve $H_2(z)$ e ilişkin, katsayılar arasındaki çeşitli kombinasyonlar sırayla ROM 1 ve ROM 2 ye yazılır.

Rx ve Ry bloklarında birinci ötelemeli saklayıcılar, paralelden seriye çevirici olarak çalışmaktadır. Bütün saklayıcıların seri çıkışları, kendilerinden sonra gelenlerin seri girişlerine bağlanmıştır. Bu durumda sekiz saat darbesi sonunda, bir saklayıcının içeriği kendisinden sonrakine tam olarak aktarılmış olur. Bu süre içinde hücrelerden birinin bir V_n (veya y_n) çıkışı hesaplanmış olur. İkinci hücre işlemi bitirilip, bir y_n çıkışı elde edildiği sırada, Rx bloğuna yeni bir x girişi, Ry bloğuna Y_n çıkışı paralel olarak yüklenir.

Rv bloğu yapısal olarak diğerlerinden farklıdır. Burada ilk ötelemeli saklayıcı yine paralelden seriye çevirici görevini yapar. Filtre çalışırken, Rv bloğu, iki aşama için ayrı ayrı kullanılır. Rv bloğu birinci aşamada ilk kaskat hücre için çalışır. Bu sırada Rv saklayıcılarında öteleme yapılır. Birinci aşama sonunda bir V_n çıkışı hesaplanır ve ikinci kaskat hücrenin girişine verilir. Rv bloğu ikinci aşamada ikinci kaskat hücre için çalışır. Bu sırada Rv, saklayıcılarında döndürme yapılır. İkinci aşamanın sonucunda bir y_n çıkışı elde edilir. Rv bloğunda, önce öteleme sonra döndürme yapabilmek amacıyla saklayıcılar arasında NAND kapılarından oluşmuş ikiye bir saklayıcı kullanılır.

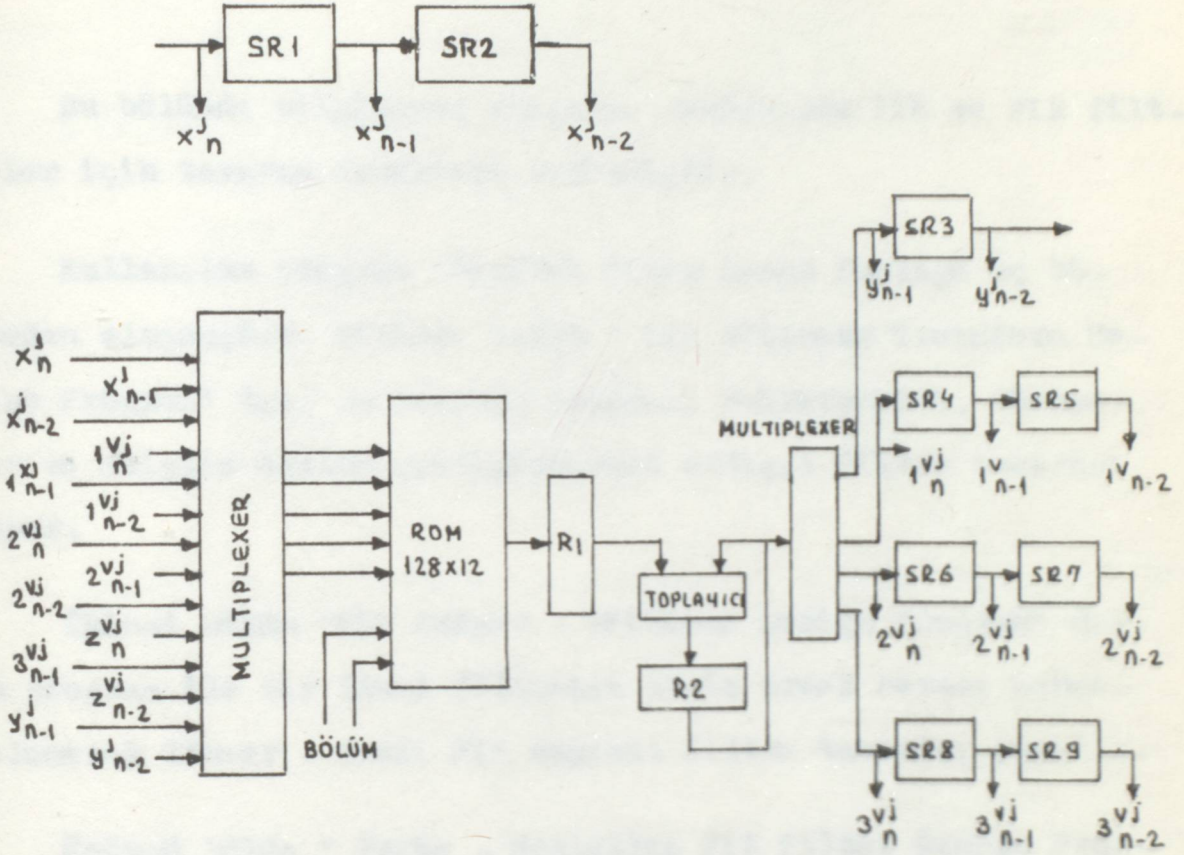
Her iki ROM'un girişinde bulunan V_{n-1}^k , V_{n-2}^k değerleri ikinci hücrenin işlemleri bittikten sonra, birinci hücrenin işlemleri tekrarlanmalıdır. Bu amaçla çoklayıcının bir girişi ilgili saklayıcının çıkışına diğer girişinde bir önceki saklayıcının çıkışına bağlıdır.

Şekil 6.12. de ise sekizinci dereceden kaskat yapıda bir sayısal filtrenin blok diyagramı görülmektedir. Burada, sekizinci dereceden transfer fonksiyonu, dört tane ikinci dereceden transfer fonksiyonuna ayrılmış ve bu transfer fonksiyonlarına ait katsayı kombinasyonları, aynı ROM'un değişik adreslerine yazılmıştır. Bu gerçeğe sözcük uzunluğu $B=12$ ve kullanılan ROM belleği 128×12 by'tir.

ROM'a yazılan katsayı kombinasyonlarının en yüksek anlamlı iki biti "SECTION" kontrol işareti ile seçilmektedir. Bu iki bit, $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$, $H_4(z)$ 'ye ait bilgilerin bulunduğu bölümleri seçmeye yarar. Her bölümde 32 byte'lik bilgi vardır. Her bölüm içindeki bu bilgi alanları ise ötelemeli saklayıcılardan çıkan ve multipleks edilerek ROM'un adres girişlerine gelen giriş, çıkış ve durumlara ait işaretlerle belirlenir.

İkinci, dördüncü ve sekizinci dereceden olan bu yapılar kaskat biçimindedir. Aynı yapılar paralel biçimde de gerçekleştirilebilir. Fakat bu durumda hız ile birlikte maliyet de artacaktır.

7. SAYISAL FİLTRELERİN KASKAT YAPISI



ŞEKİL 6.12. Sekizinci dereceden kaskat yapıda sayısal filtrenin blok diyagramı.

7. SAYISAL FİLTRE TASARIM ÖRNEKLERİ

Bu bölümde bilgisayar programı yardımıyla IIR ve FIR filtreler için tasarım örnekleri verilmiştir.

Kullanılan program "Digital Filter Design Package üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm " IIR Bilinear Transform Design Program" dır. Bu tasarım programı Butterworth, Chebyshev ve Eliptic analog prototiplerden ardışıl filtre tasarımı yapar.

İkinci bölüm "FIR Kaiser - Window Design Program" dır. Bu program ile bir ideal filtrenin birim örnek cevabı pencere-lenerek lineer -fazlı FIR sayısal filtre tasarımı yapılır.

Üçüncü bölüm " Parks - McClellan FIR Filter Design Program" dır. Bu tasarım programı Parks - McClellan algoritmasını kullanarak lineer fazlı FIR sayısal filtre tasarımı yapar.

Ekte bu tasarım programlarıyla yapılan örnekler verilmiştir.

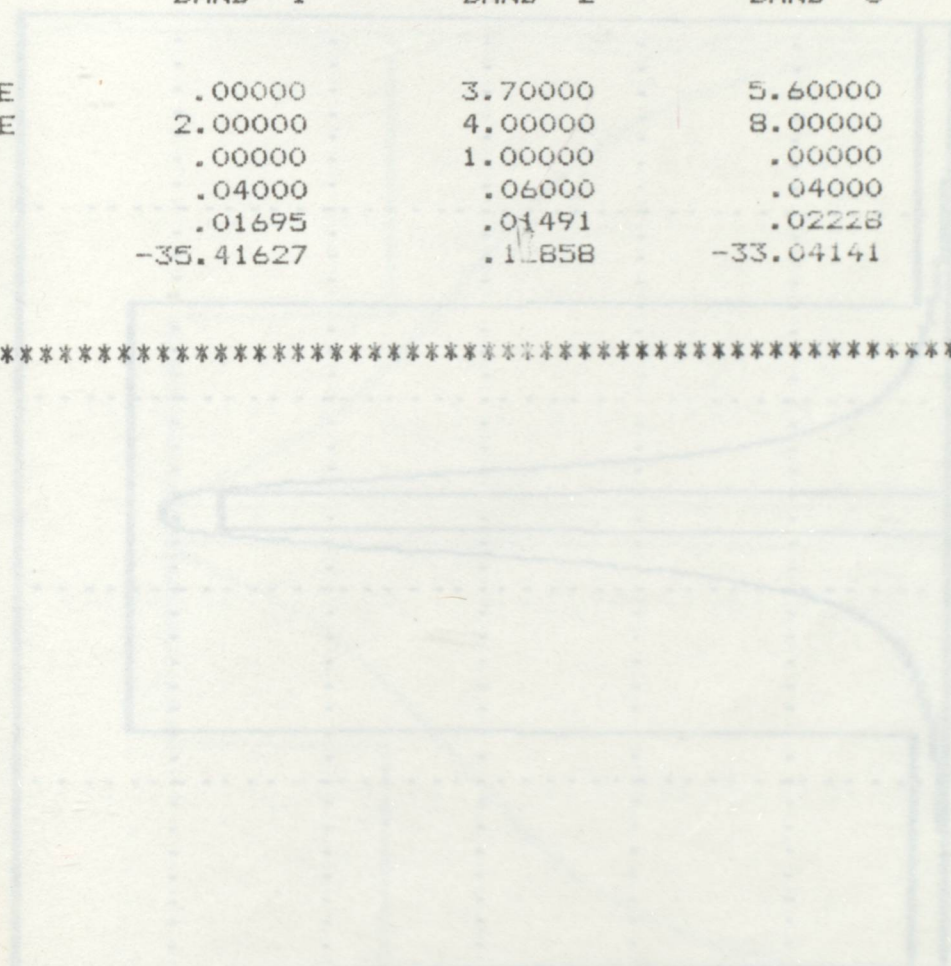
INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
 BUTTERWORTH BANDPASS FILTER
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

FILTER ORDER = 4
 SAMPLING FREQUENCY = 16.000 KILOHERTZ

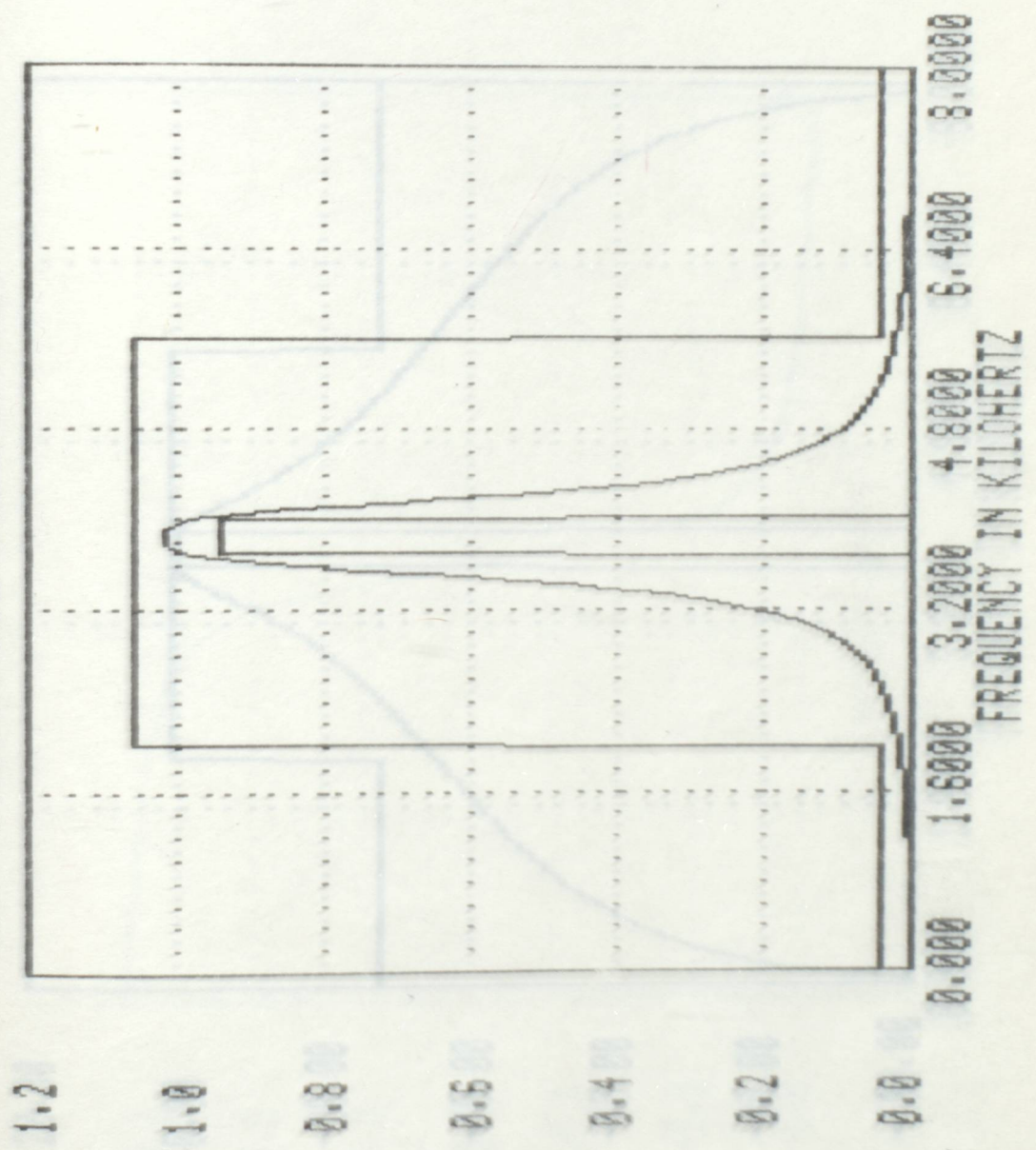
A(I,1)	A(I,2)	B(I,0)	B(I,1)	B(I,2)
.046257	.845714	.077608	.000000	-.077608
-.262631	.847117	.155323	.000000	-.155323

*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

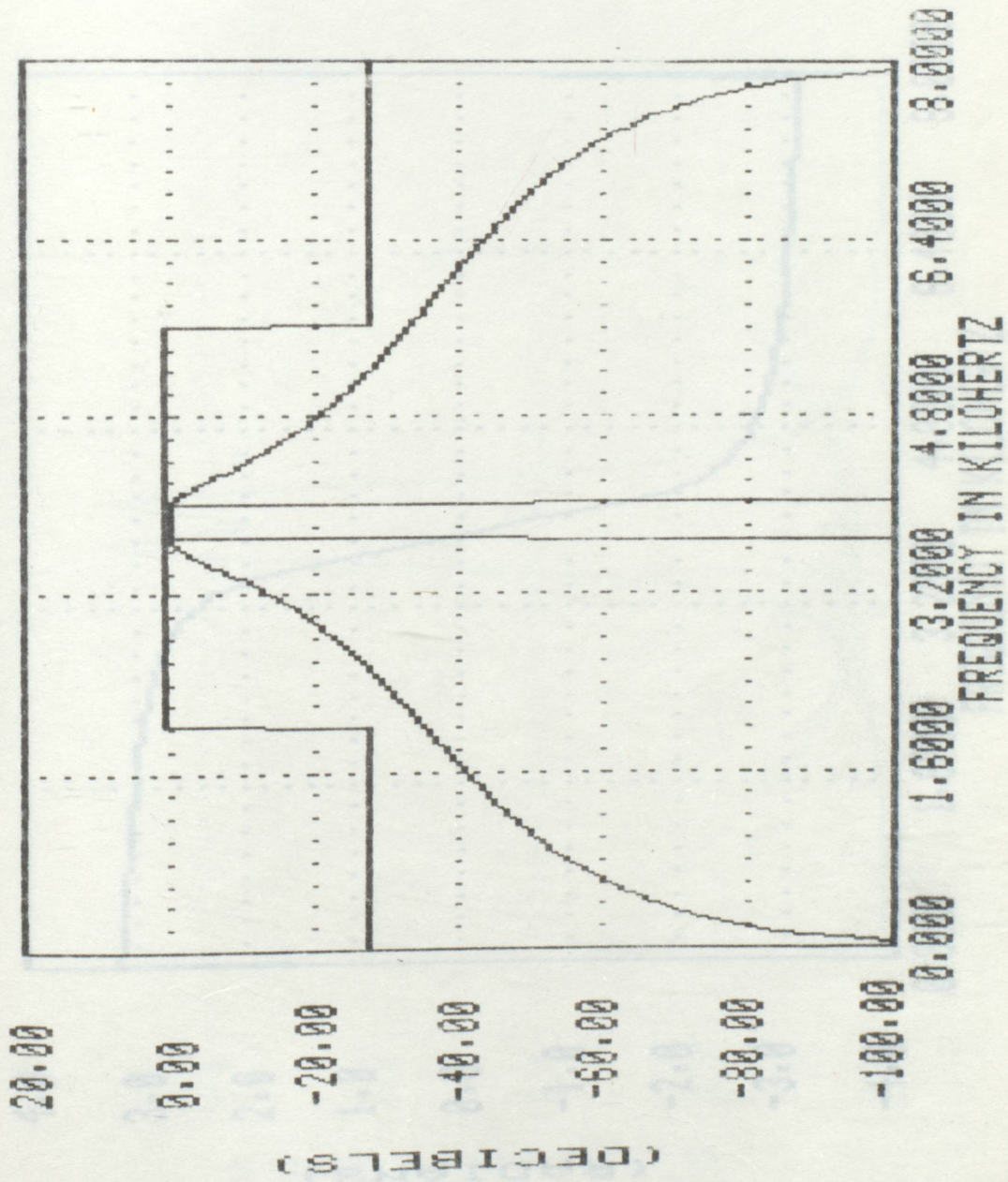
	BAND 1	BAND 2	BAND 3
BAND EDGE	.00000	3.70000	5.60000
BAND EDGE	2.00000	4.00000	8.00000
GAIN	.00000	1.00000	.00000
RIPPLE	.04000	.06000	.04000
RIPPLE	.01695	.01491	.02228
IN DB	-35.41627	.11858	-33.04141



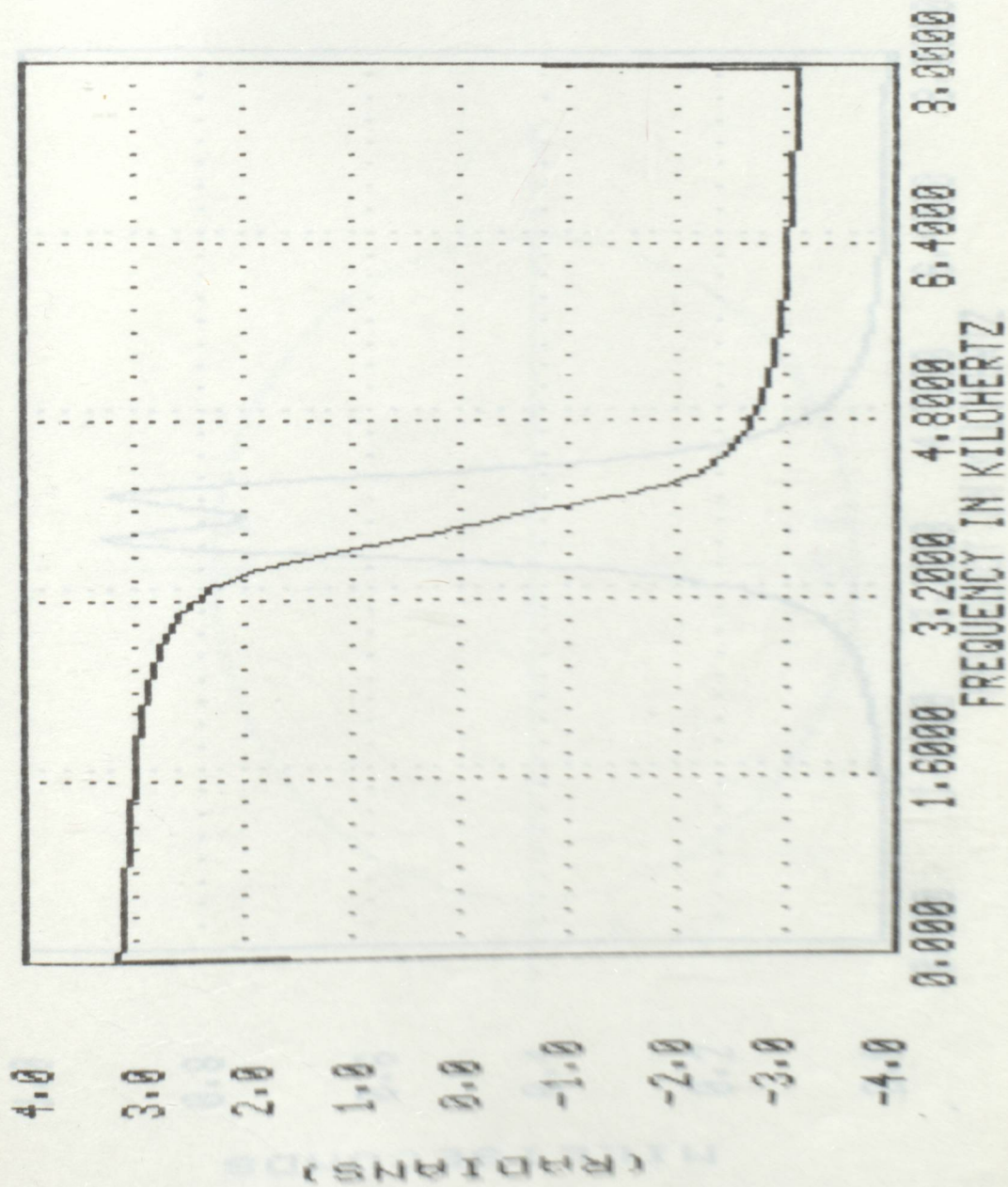
LOG MAGNITUDE RESPONSE



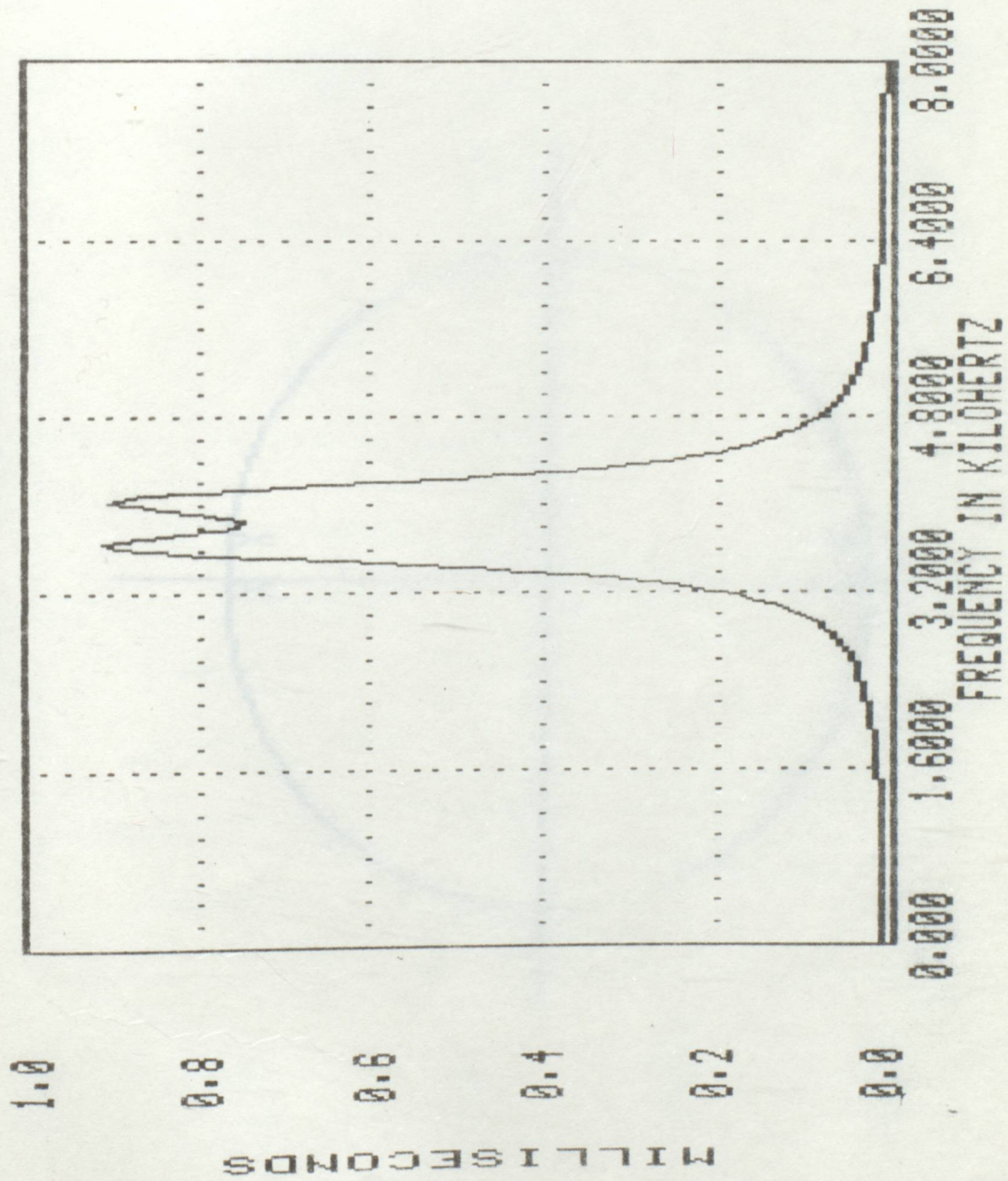
LOG MAGNITUDE RESPONSE

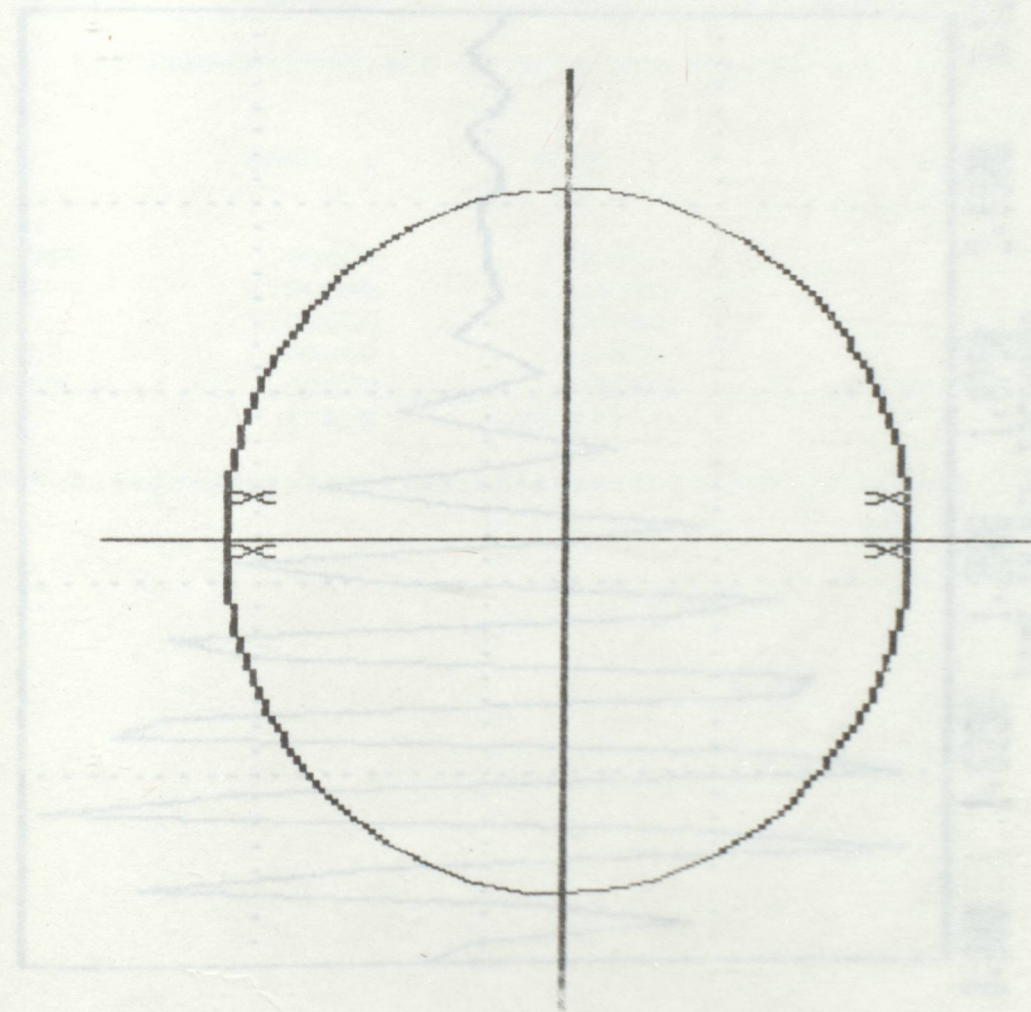


PHASE RESPONSE



GROUP DELAY





0.10

0.05

0.00

-0.05

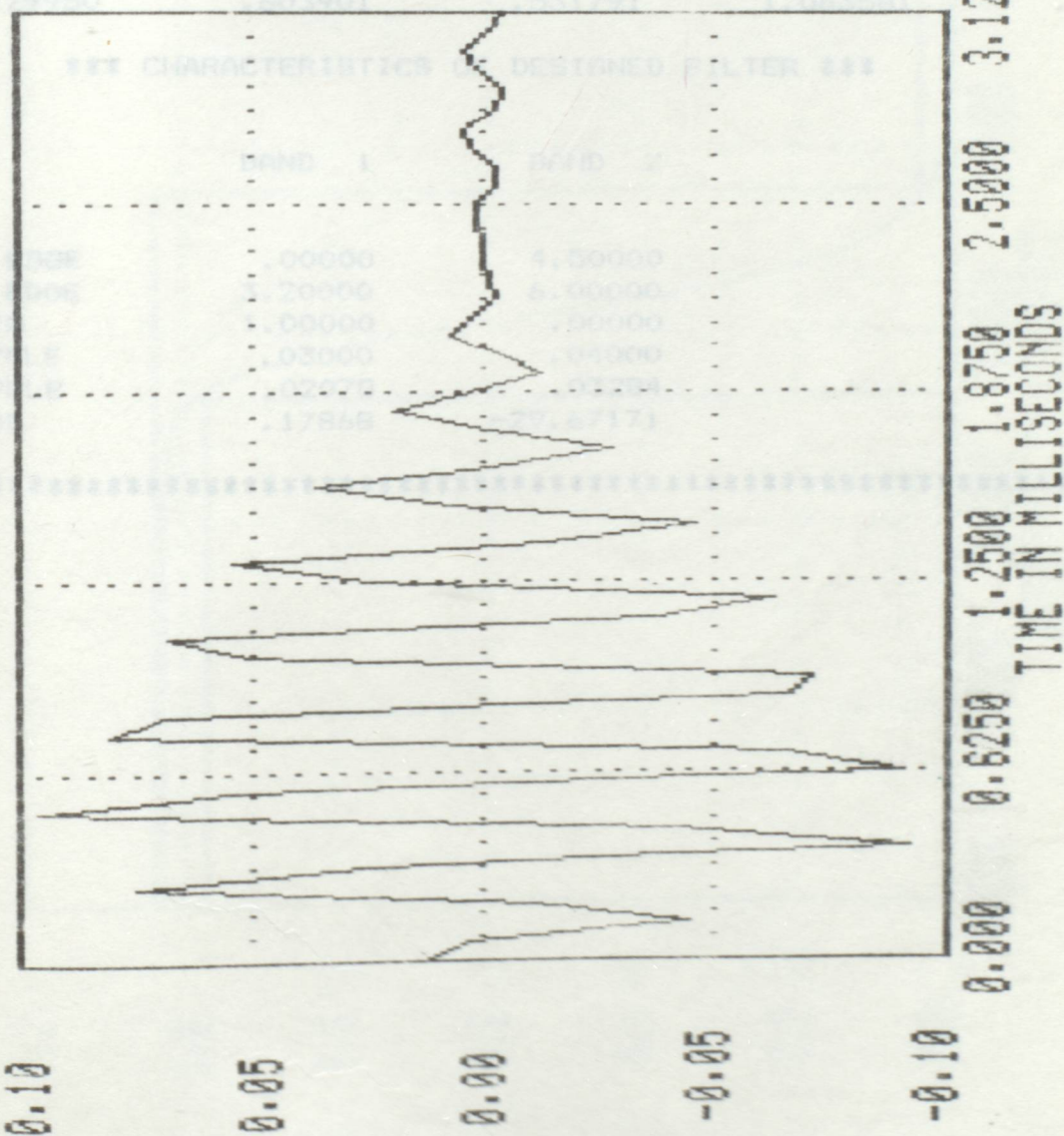
-0.10

INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
 BUTTERWORTH LOWPASS FILTER
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

FILTER ORDER = 6
 SAMPLING FREQUENCY = 12,000 KILOHERTZ

A(1,1)	A(1,2)	B(1,0)	B(1,1)	B(1,2)
.311437	.040764	.338050	.676101	.338050
.587363	.194239	.387901	.775801	.387901
.478850	.403801	.531281	1.043581	.531281

IMPULSE RESPONSE



INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
 BUTTERWORTH LOWPASS FILTER
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

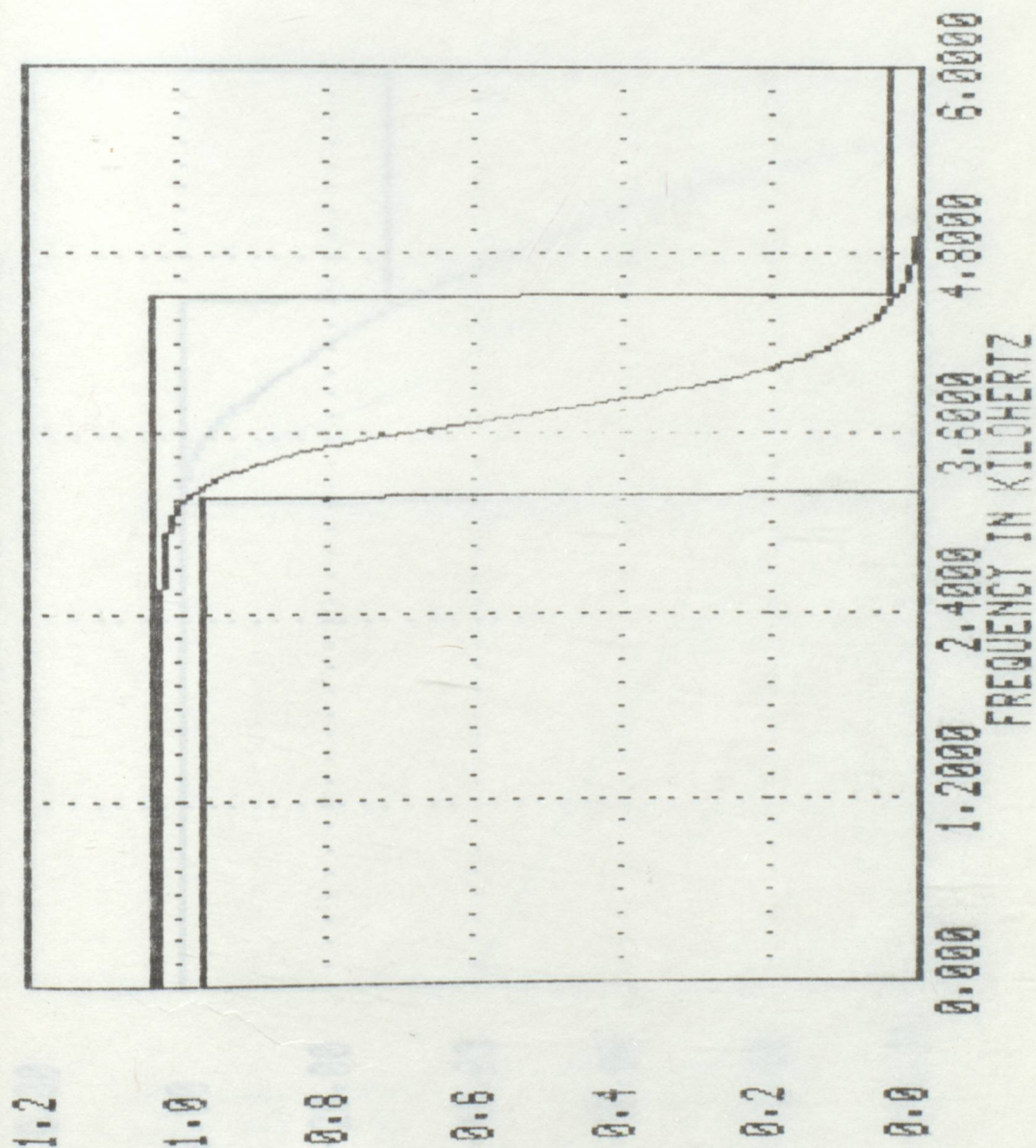
FILTER ORDER = 6
 SAMPLING FREQUENCY = 12.000 KILOHERTZ

A(I,1)	A(I,2)	B(I,0)	B(I,1)	B(I,2)
.311437	.040764	.338050	.676101	.338050
.357363	.194239	.387901	.775801	.387901
.479950	.603901	.531791	1.063581	.531791

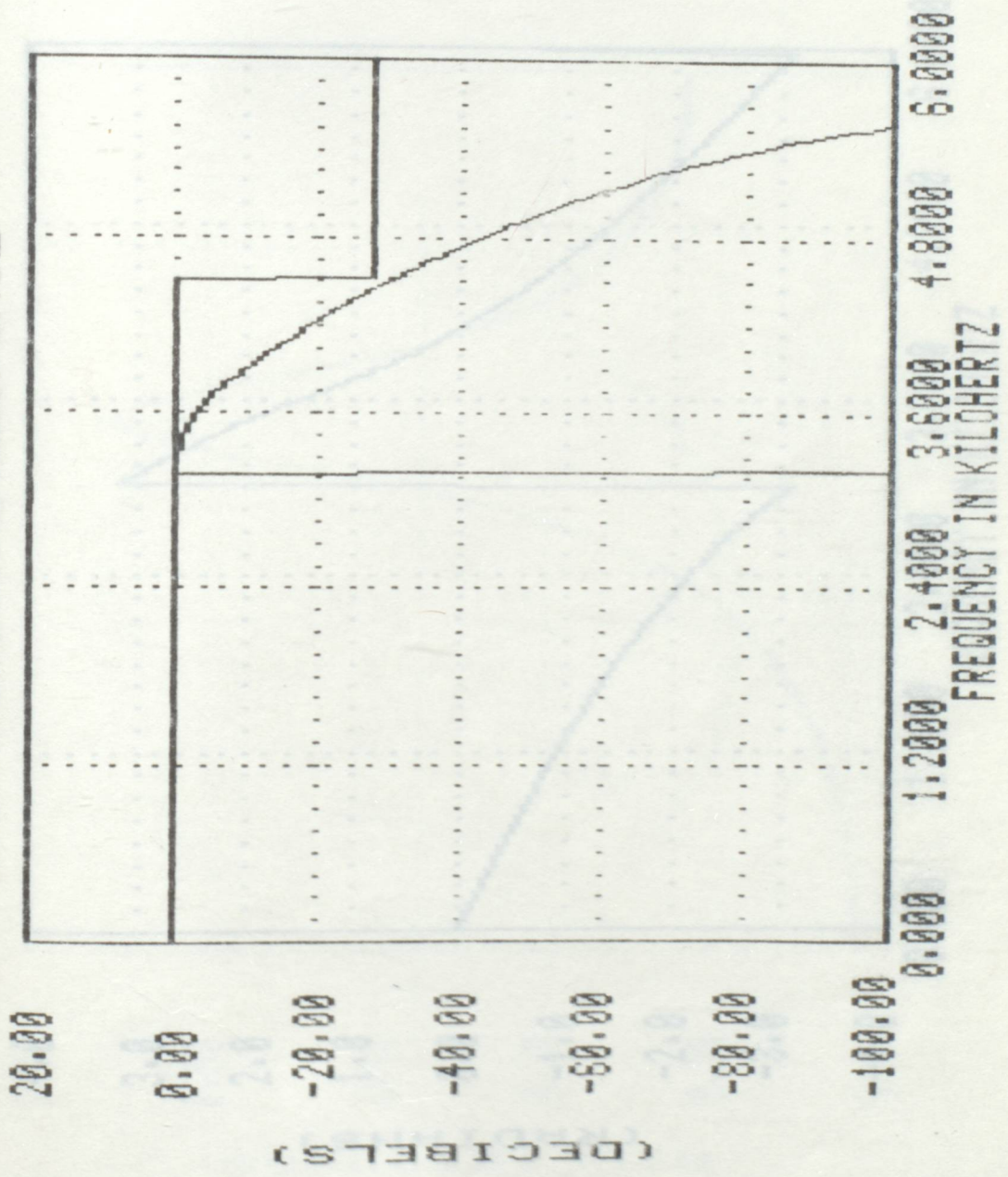
*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2
LOWER BAND EDGE	.00000	4.50000
UPPER BAND EDGE	3.20000	6.00000
INITIAL GAIN	1.00000	.00000
INITIAL RIPPLE	.03000	.04000
INITIAL RIMMUM RIPPLE	.02078	.03284
INITIAL RIMPLE IN DB	.17868	-29.67171

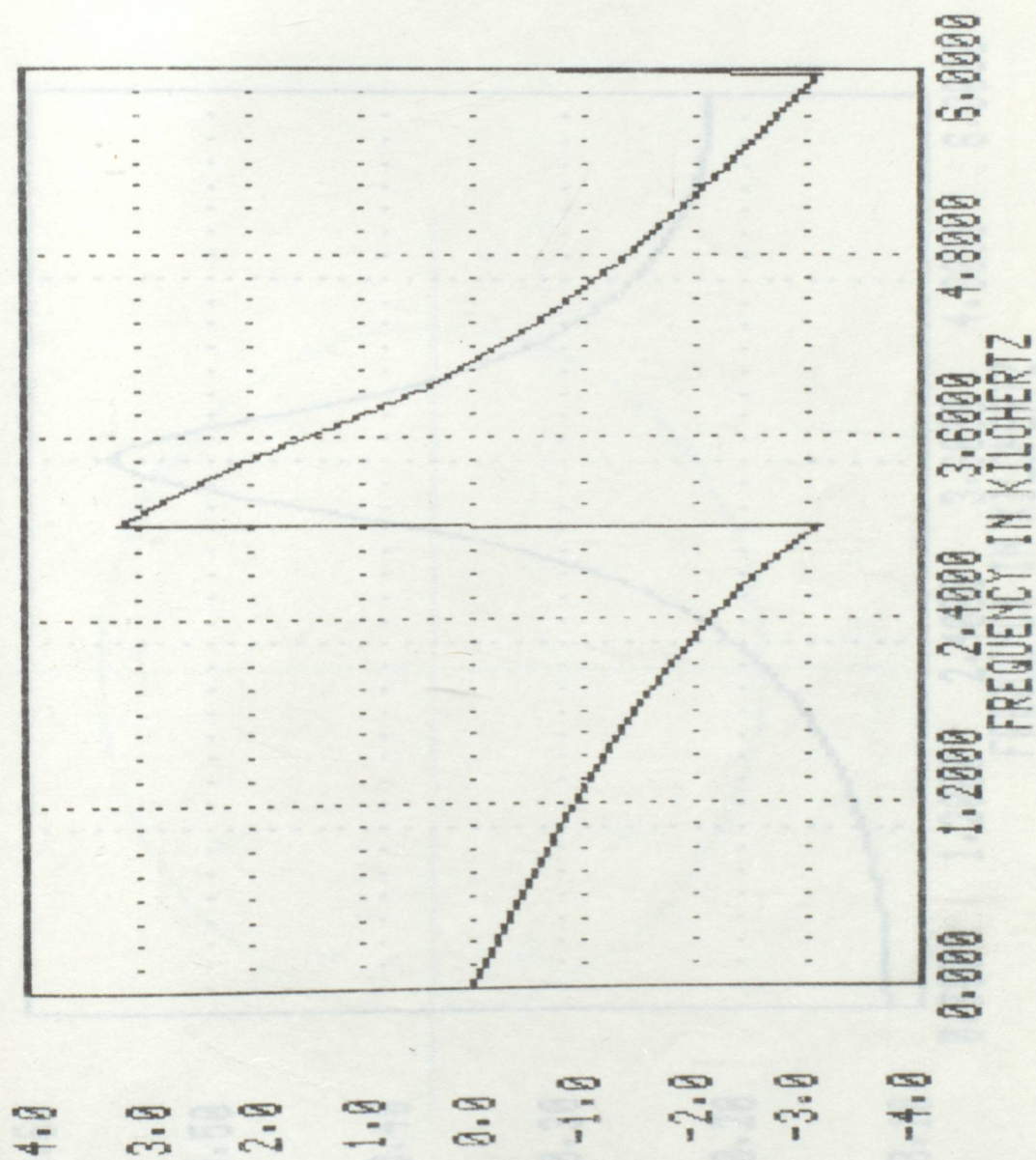
MAGNITUDE RESPONSE



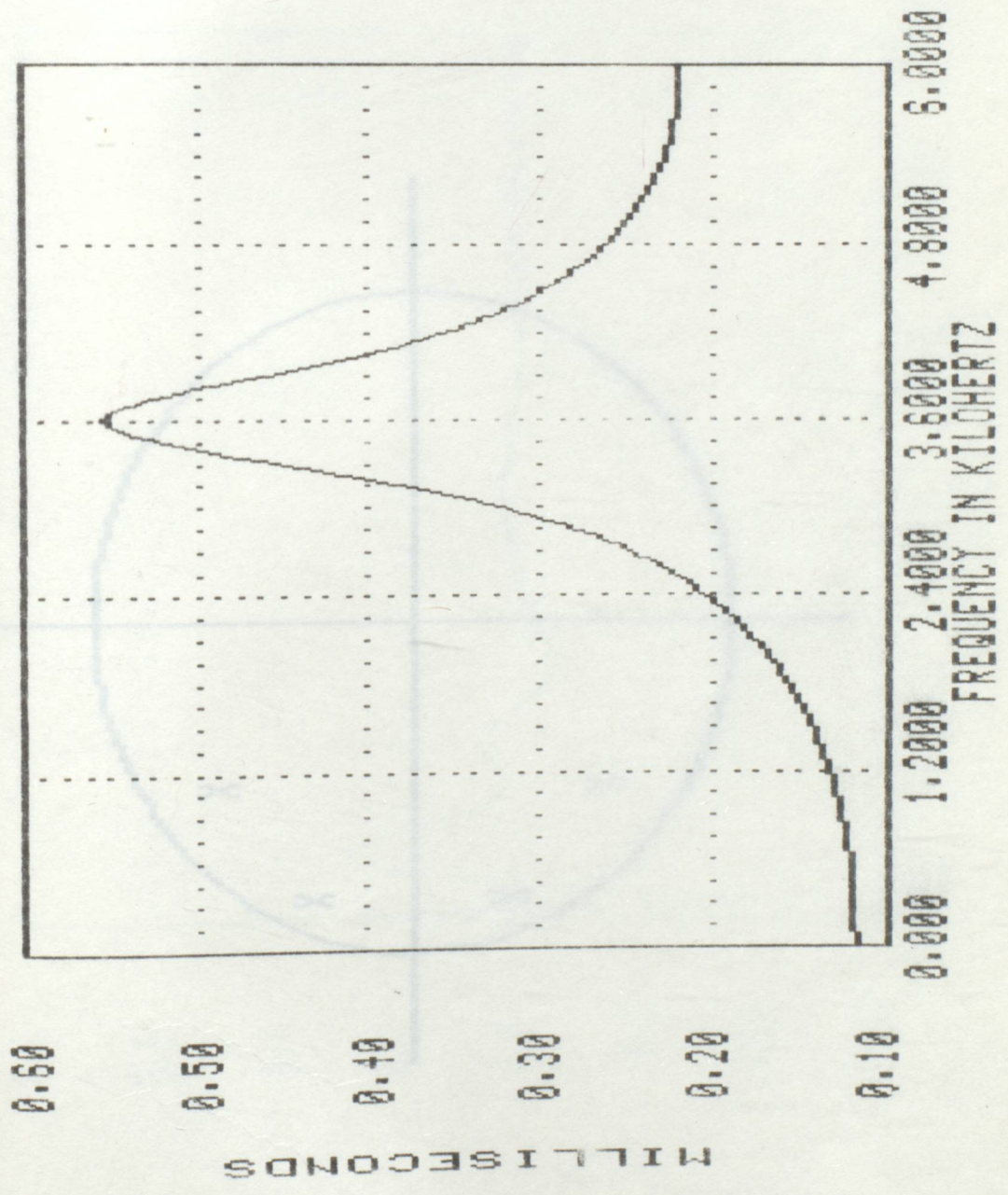
LOG MAGNITUDE RESPONSE

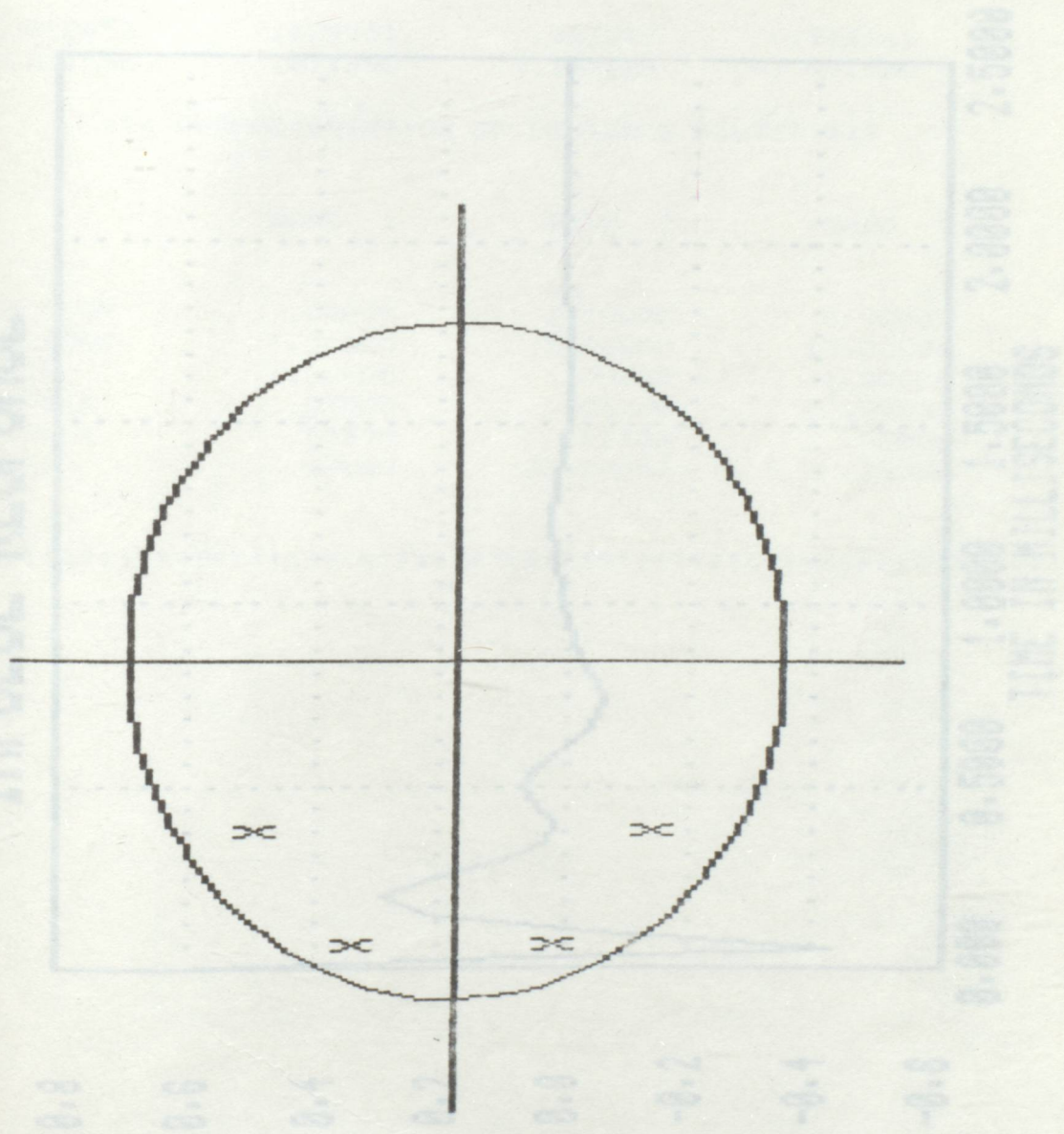


PHASE RESPONSE



GROUP DELAY



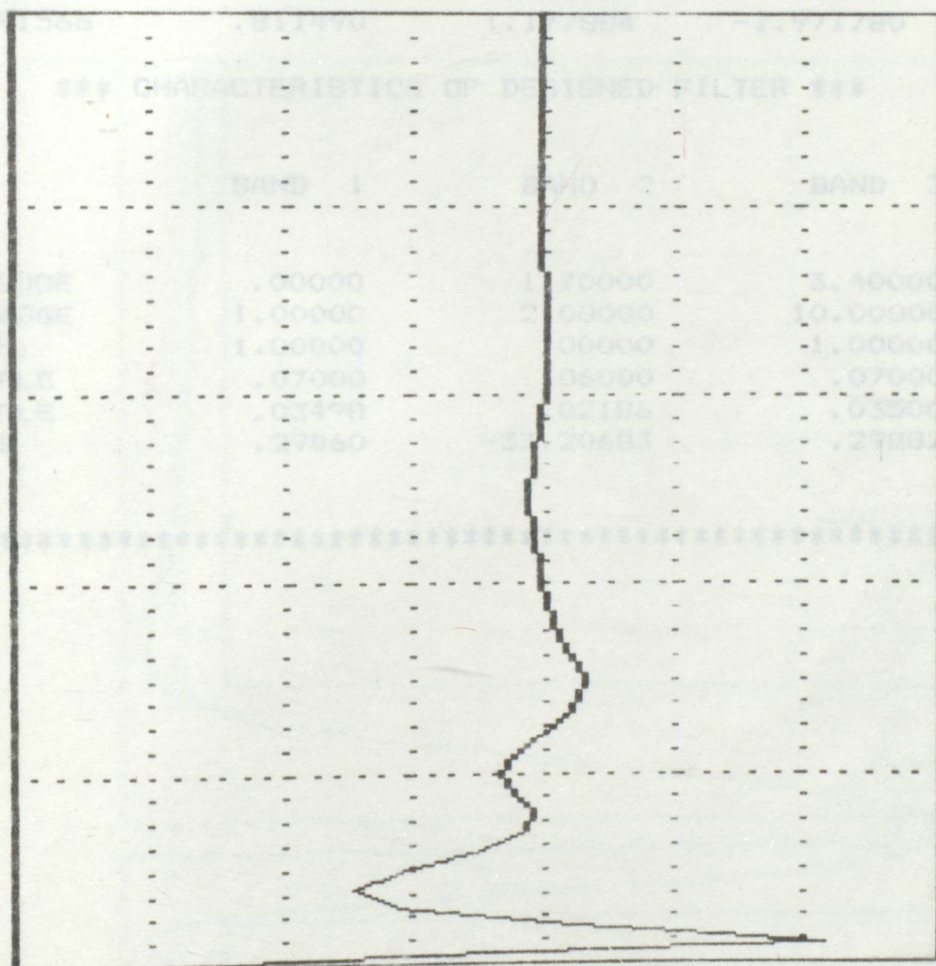


INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
 CHEBYSHEV I BANDSTOP FILTER
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

FILTER ORDER = 4
 SAMPLING FREQUENCY = 20.000 KILOHERTZ

A(1,1)	A(1,2)	B(1,0)	B(1,1)	B(1,2)
-1.018653	.628931	.563297	-.942361	.563297
1.617730	1.077700	1.170000	1.177730	1.177854

*** CHARACTERISTIC OF DESIGNED FILTER ***



0.000 0.5000 1.0000 1.5000 2.0000 2.5000
 TIME IN MILLISECONDS

0.8

0.6

0.4

0.2

0.0

-0.2

-0.4

-0.6

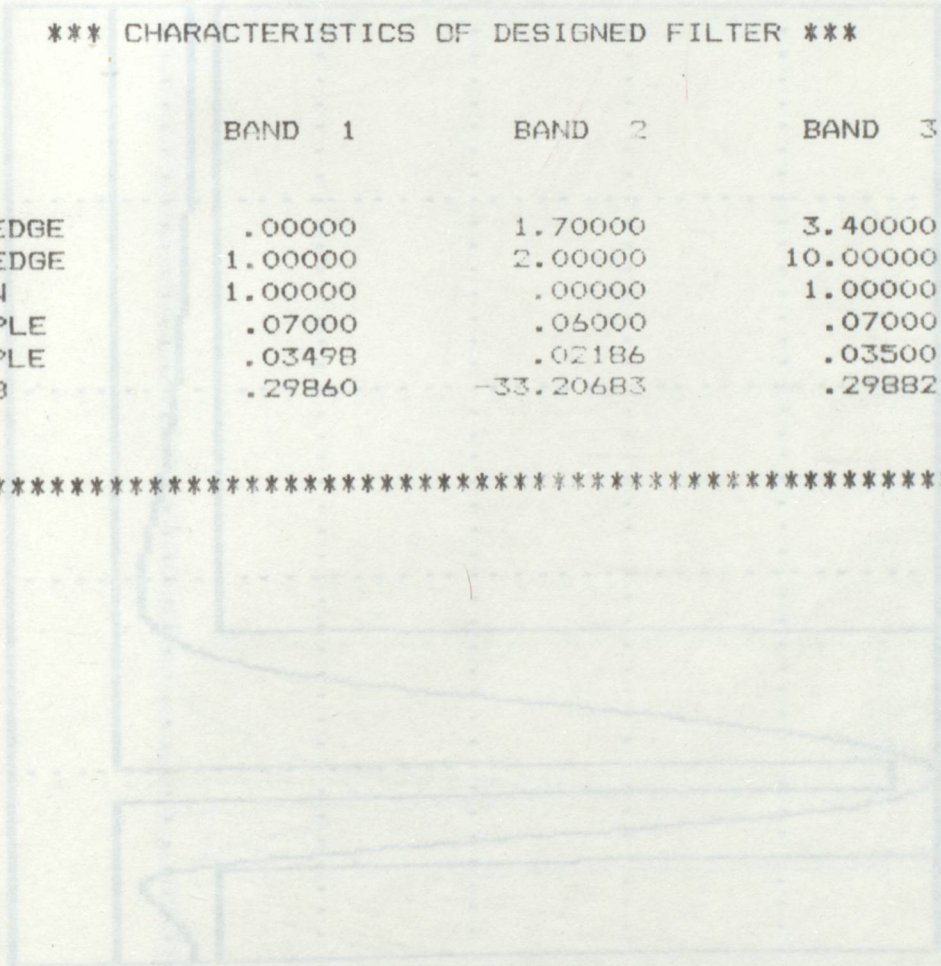
INFINITE IMPULSE RESPONSE (IIR)
 CHEBYSHEV I BANDSTOP FILTER
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

FILTER ORDER = 1
 SAMPLING FREQUENCY = 20.000 KILOHERTZ

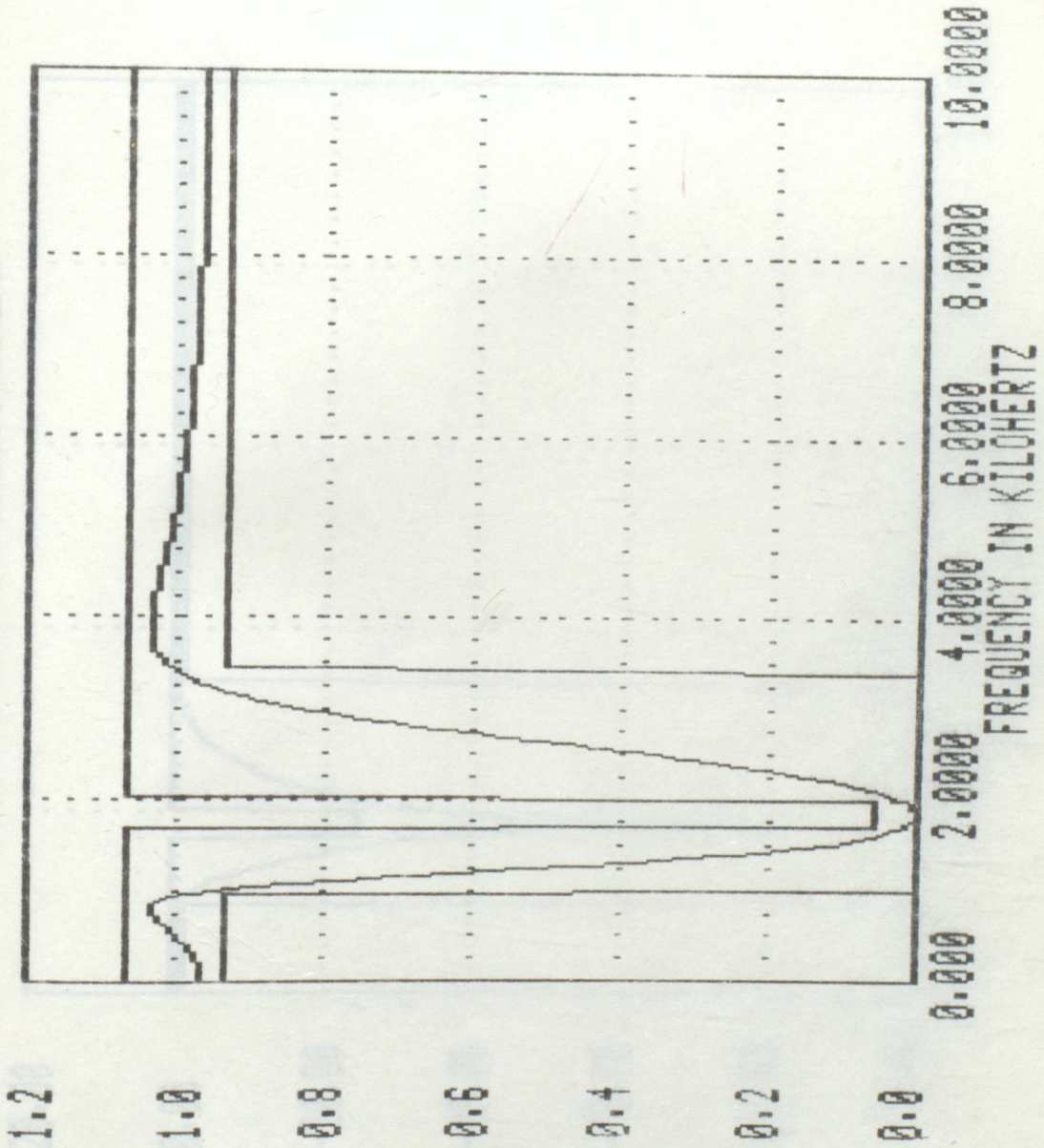
A(I,1)	A(I,2)	B(I,0)	B(I,1)	B(I,2)
-1.018653	.629931	.563297	-.942361	.563297
-1.691566	.811490	1.177884	-1.971780	1.177884

*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

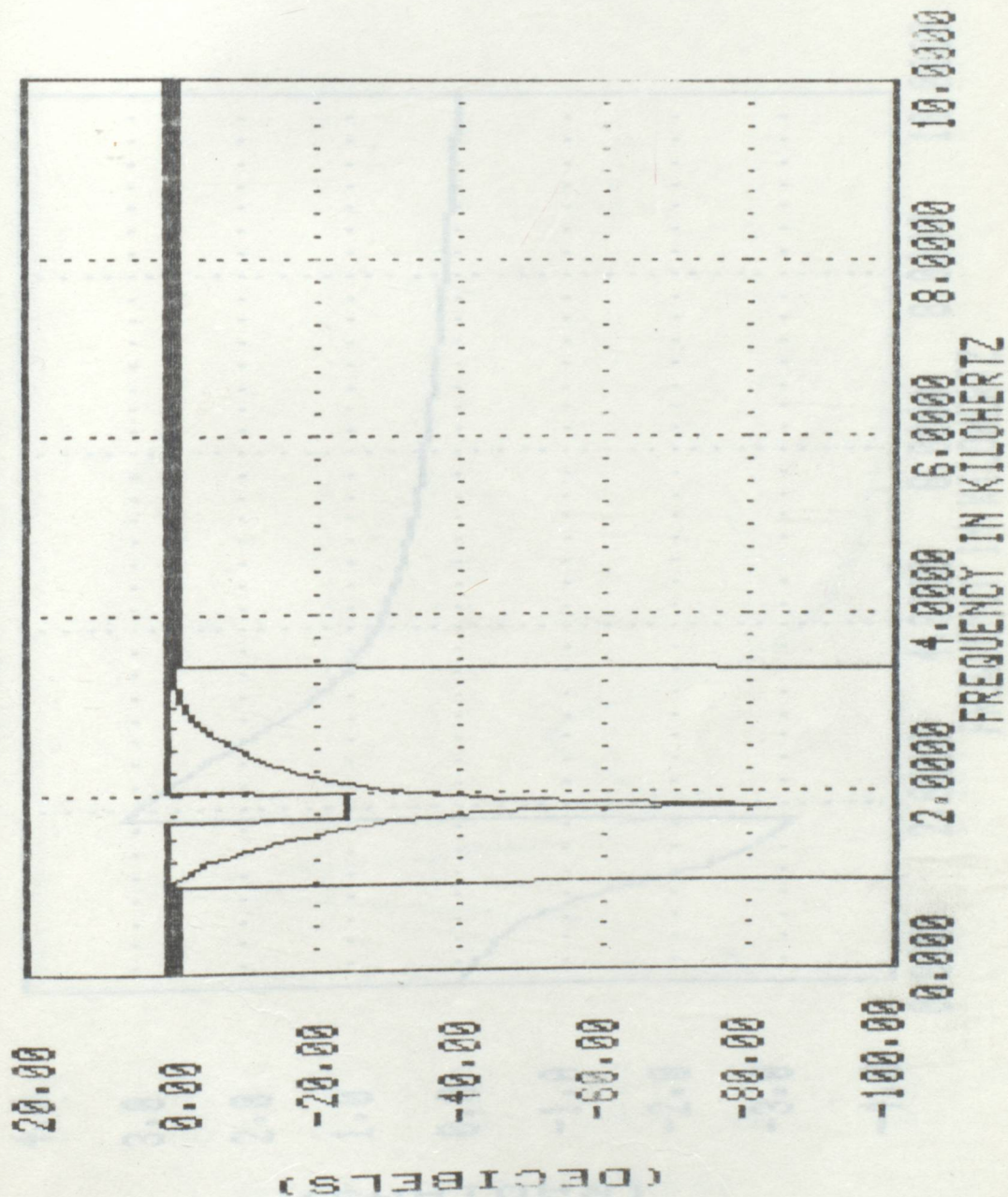
	BAND 1	BAND 2	BAND 3
BAND EDGE	.00000	1.70000	3.40000
BAND EDGE	1.00000	2.00000	10.00000
AL GAIN	1.00000	.00000	1.00000
AL RIPPLE	.07000	.06000	.07000
UM RIPPLE	.03498	.02186	.03500
E IN DB	.29860	-33.20683	.29882



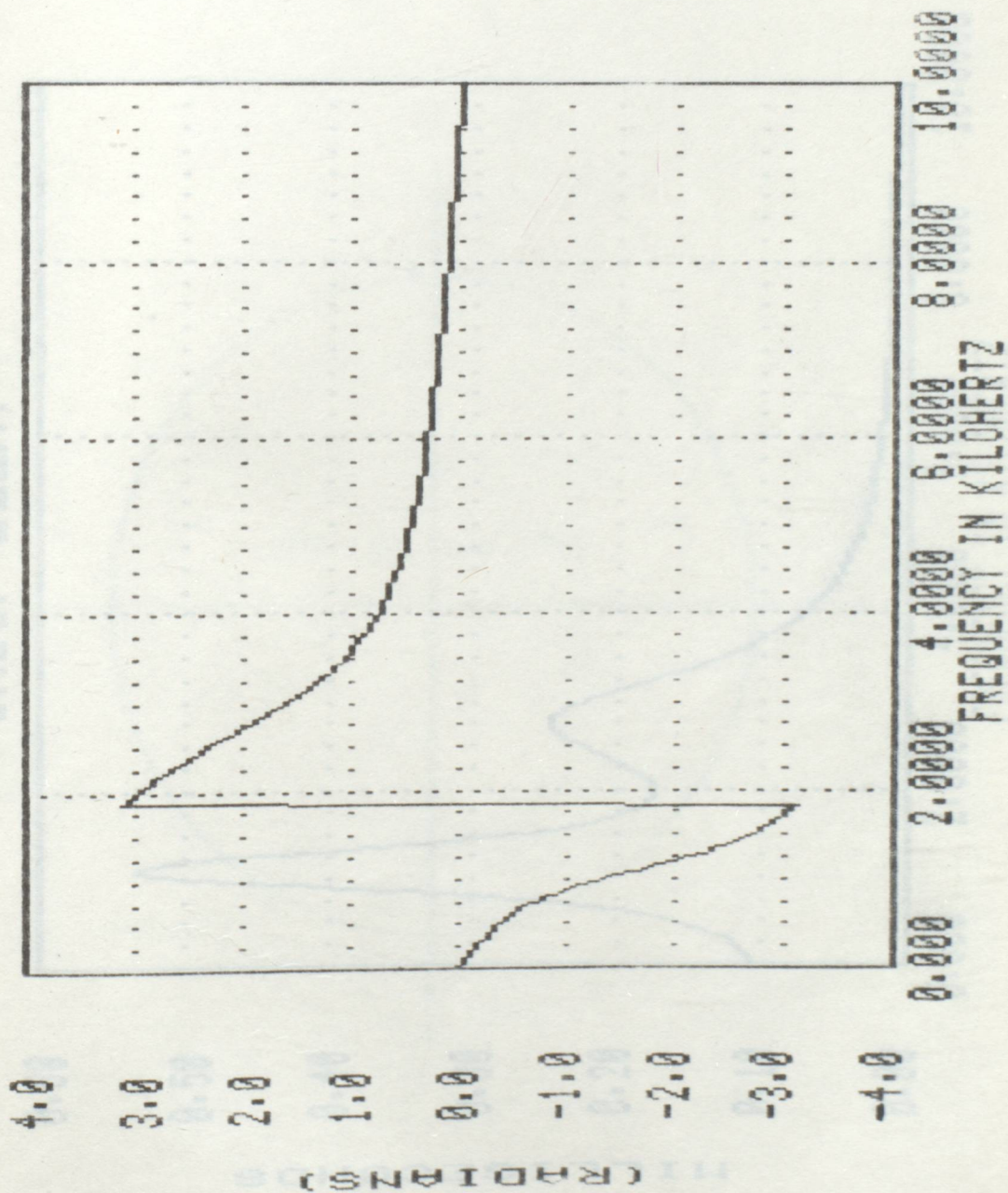
MAGNITUDE RESPONSE



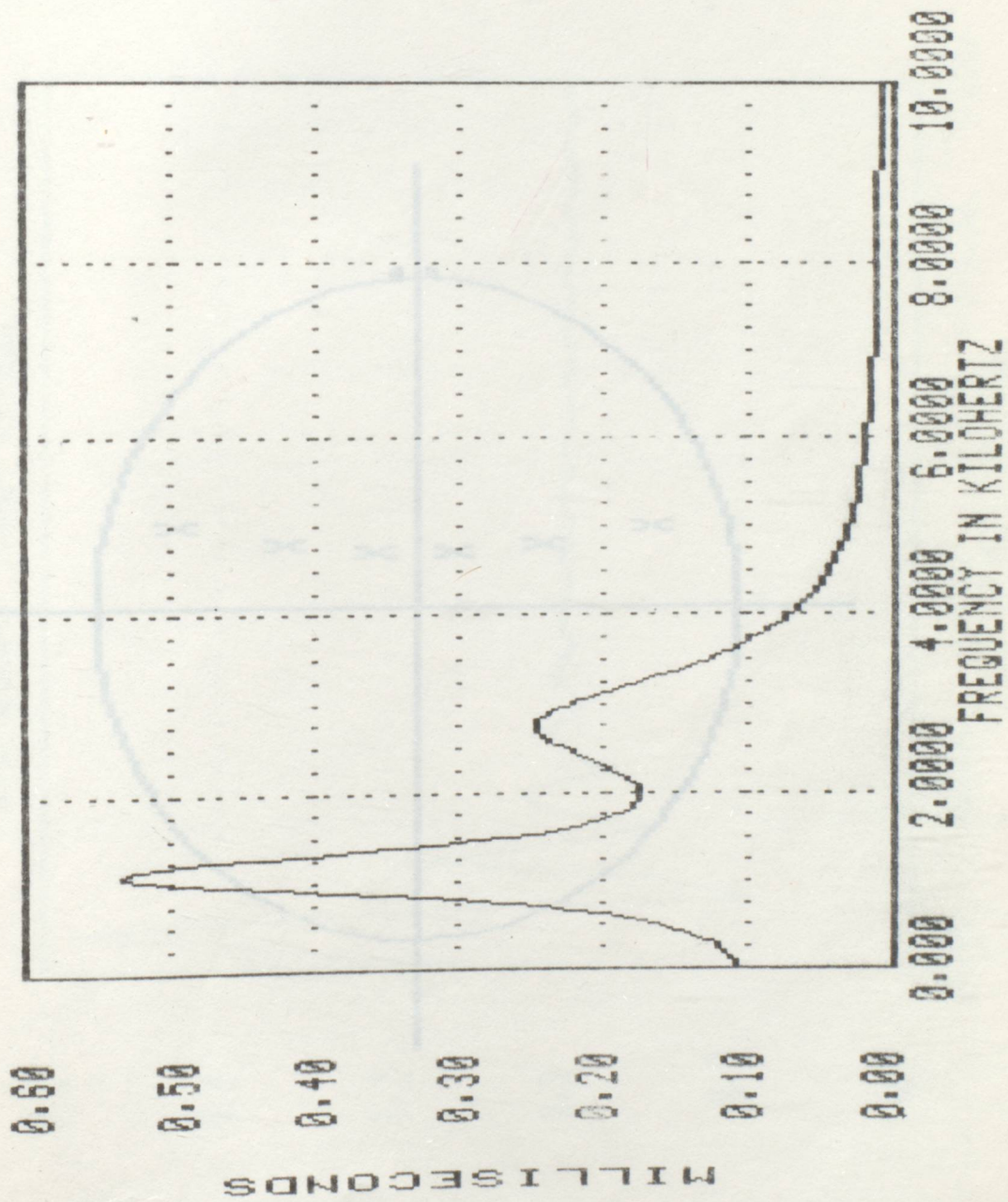
LOG MAGNITUDE RESPONSE

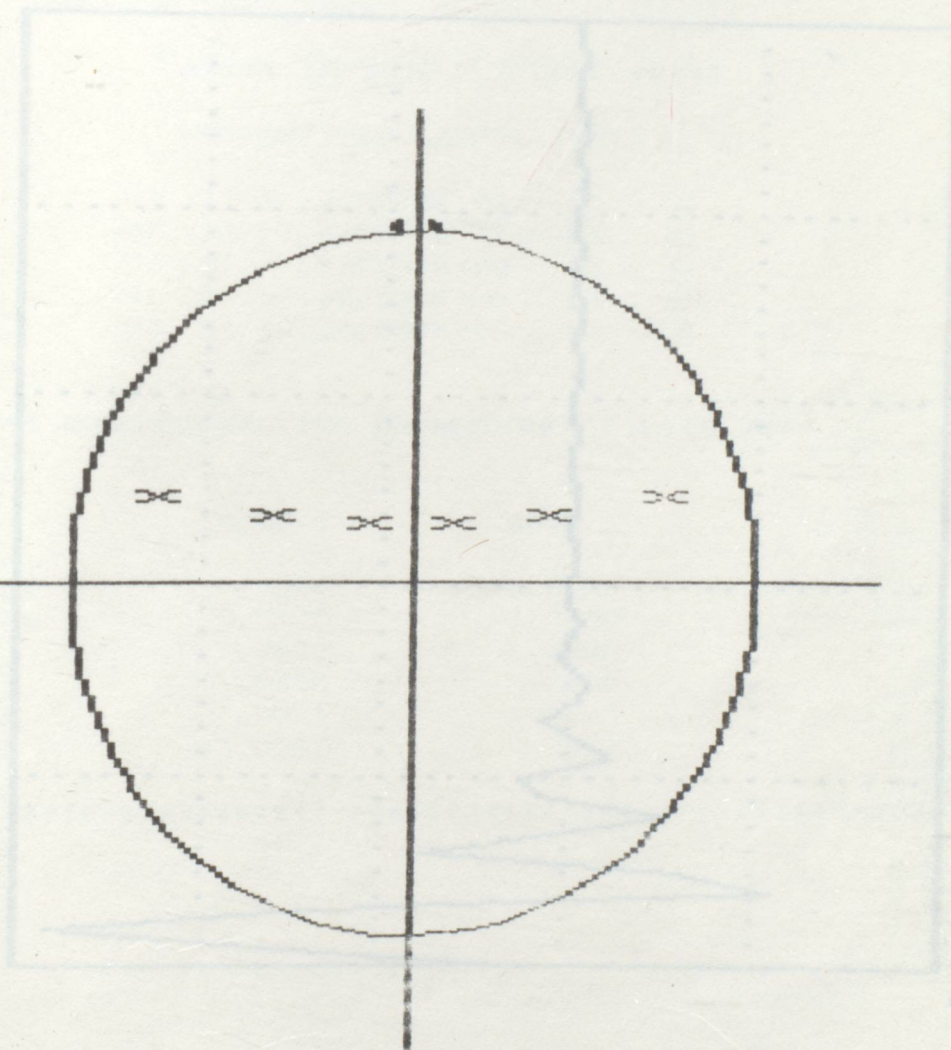


PHASE RESPONSE



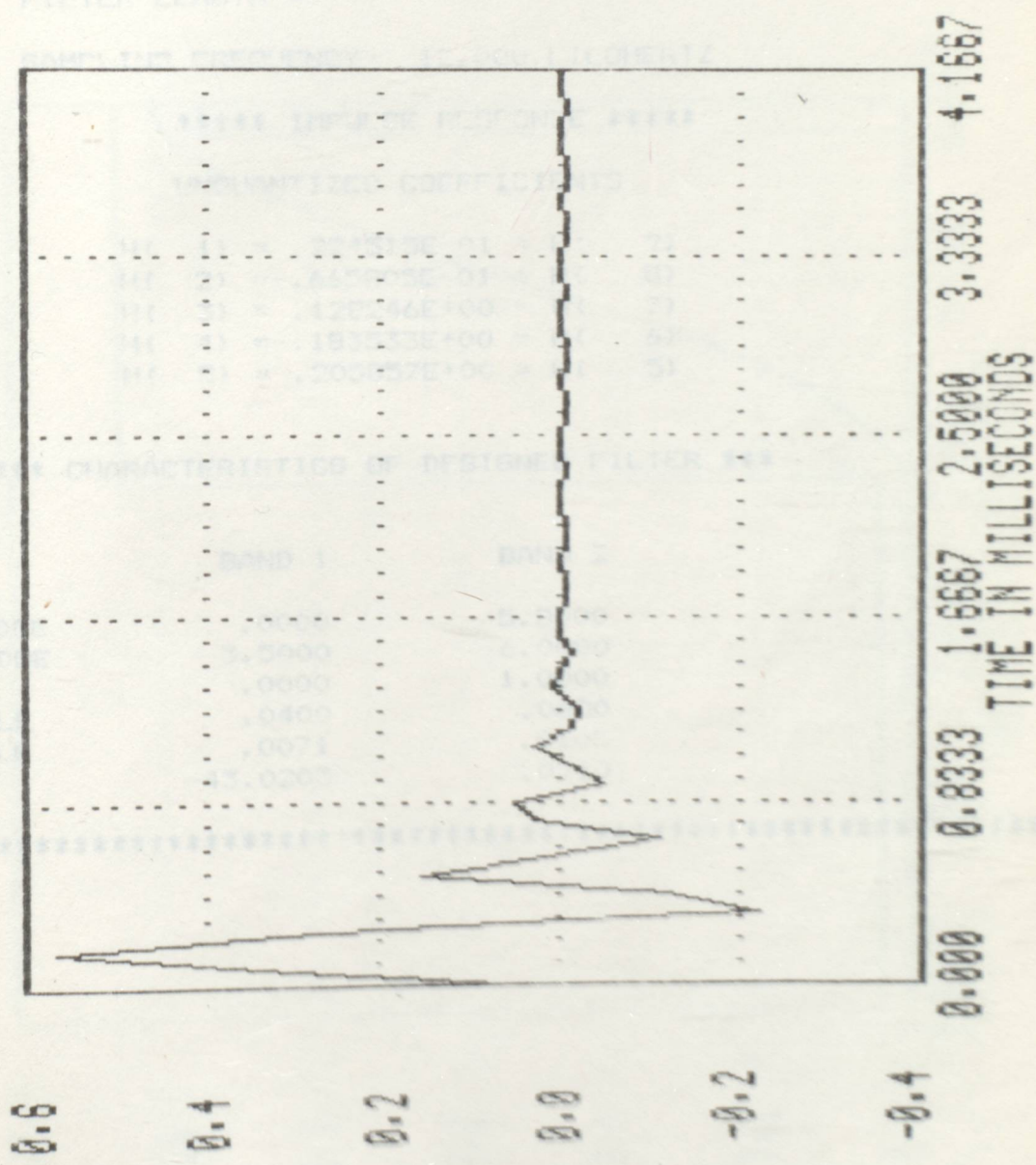
GROUP DELAY





0.800 0.9333 1.0667 2.5000 3.3333 4.1667
TIME IN MILLISECONDS

IMPULSE RESPONSE



0.6
0.4
0.2
0.0
-0.2
-0.4

0.000 0.8333 1.6667 2.5000 3.3333 4.1667

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
COEFFICIENTS DETERMINED
HIGH PASS FILTER

FILTER LENGTH = 9

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 PARKS-McLELLAN ALGORITHM
 HIGHPASS FILTER

FILTER LENGTH = 7

SAMPLING FREQUENCY = 12.000 KILOHERTZ

**** IMPULSE RESPONSE ****

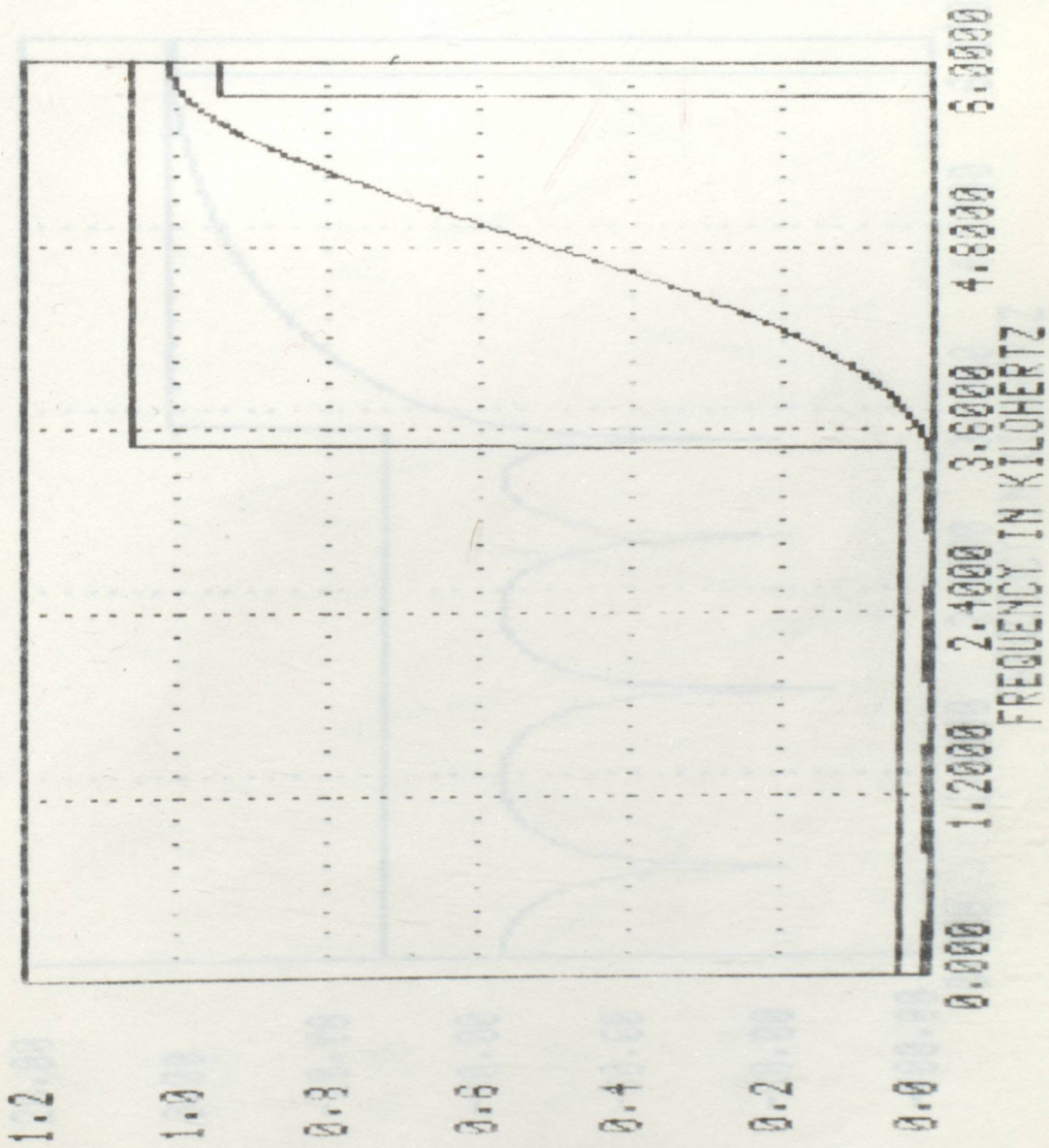
UNQUANTIZED COEFFICIENTS

H(1) = .224515E-01 = H(7)
 H(2) = -.665805E-01 = H(6)
 H(3) = .120246E+00 = H(5)
 H(4) = -.183533E+00 = H(4)
 H(5) = .205857E+00 = H(3)

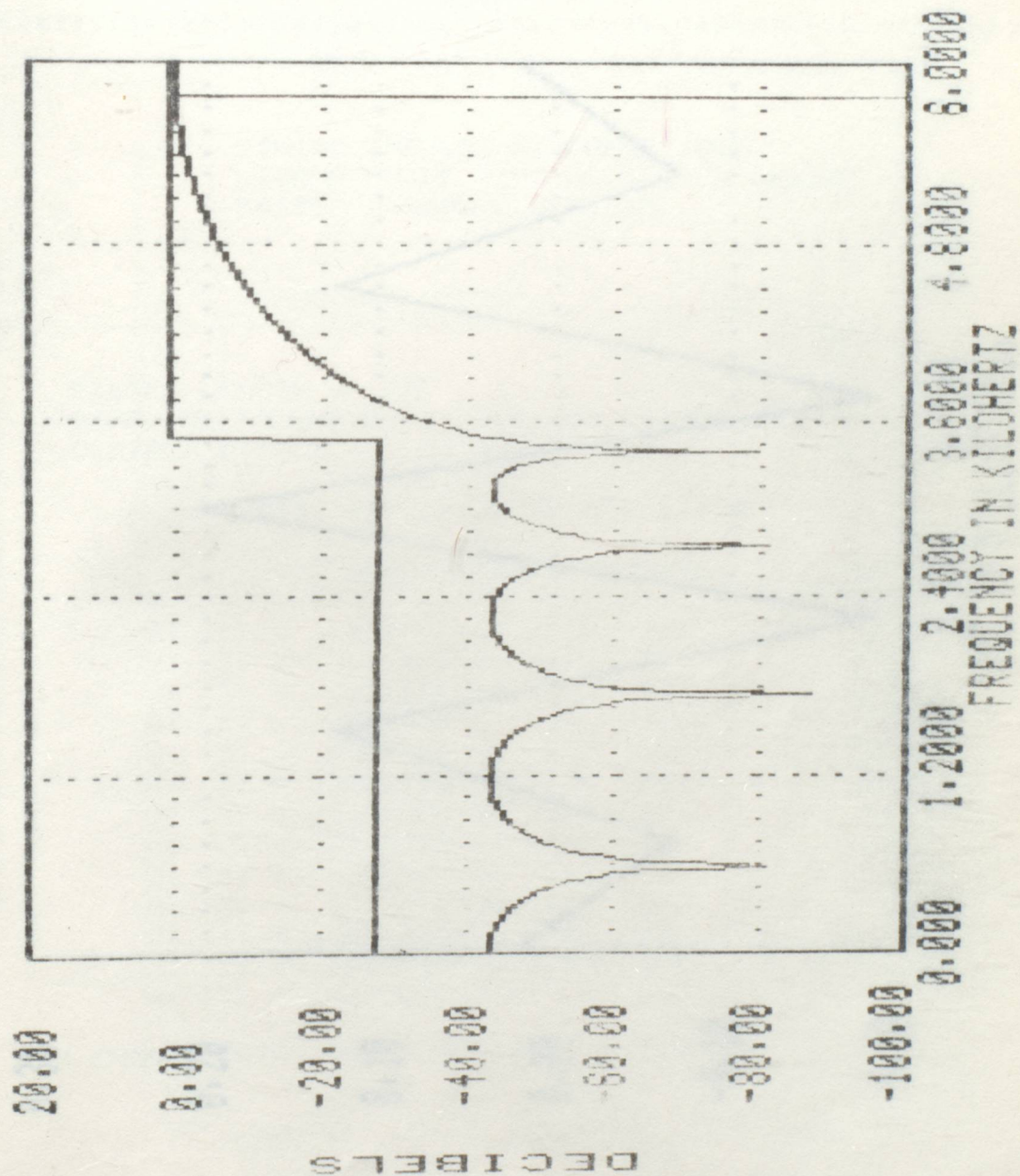
*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2
BAND EDGE	.0000	5.3000
BAND EDGE	3.5000	6.0000
GAIN	.0000	1.0000
RIPPLE	.0400	.0600
RIPPLE	.0071	.0105
IN DB	-43.0203	.0910

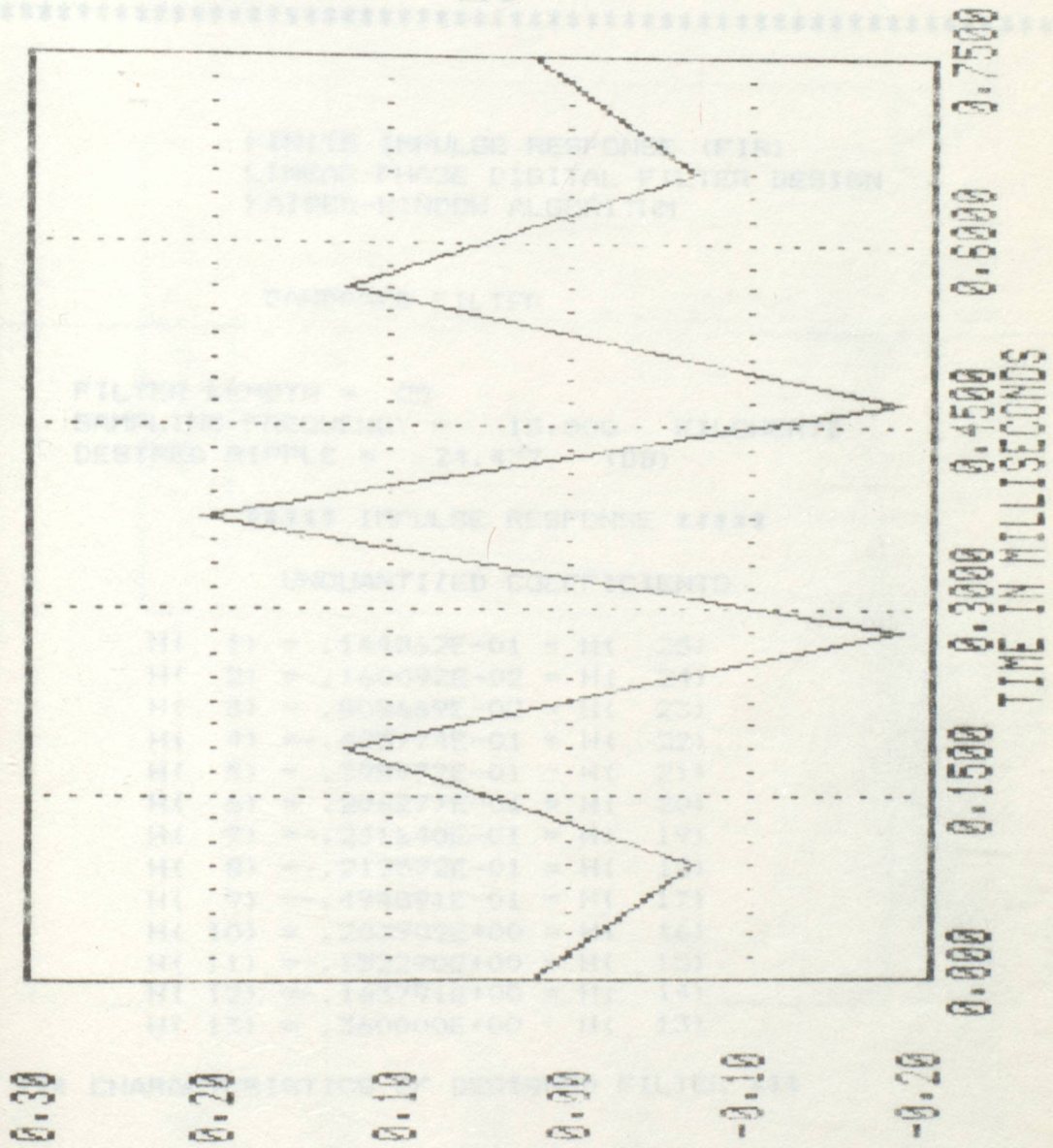
MAGNITUDE RESPONSE



LOG MAGNITUDE RESPONSE



UNIT SAMPLE RESPONSE



FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 KAISER-WINDOW ALGORITHM

BANDPASS FILTER

FILTER LENGTH = 25
 SAMPLING FREQUENCY = 15.000 KILOHERTZ
 DESIRED RIPPLE = 24.437 (DB)

***** IMPULSE RESPONSE *****

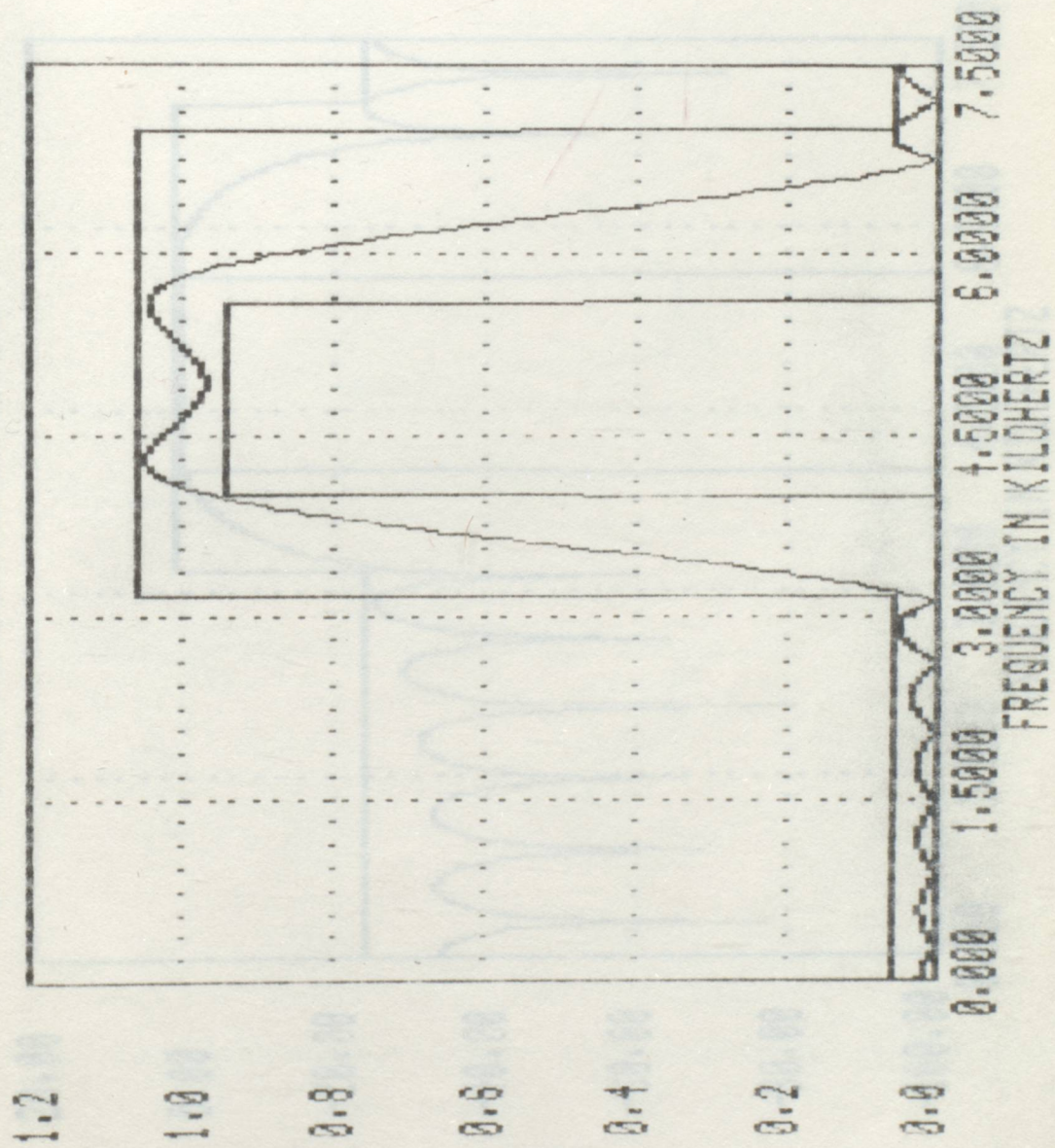
UNQUANTIZED COEFFICIENTS

H(1) = .144862E-01 = H(25)
 H(2) = .160092E-02 = H(24)
 H(3) = .808669E-02 = H(23)
 H(4) = -.485774E-01 = H(22)
 H(5) = .398977E-01 = H(21)
 H(6) = .206277E-01 = H(20)
 H(7) = -.231640E-01 = H(19)
 H(8) = -.212572E-01 = H(18)
 H(9) = -.494891E-01 = H(17)
 H(10) = .203909E+00 = H(16)
 H(11) = -.152290E+00 = H(15)
 H(12) = -.163791E+00 = H(14)
 H(13) = .360000E+00 = H(13)

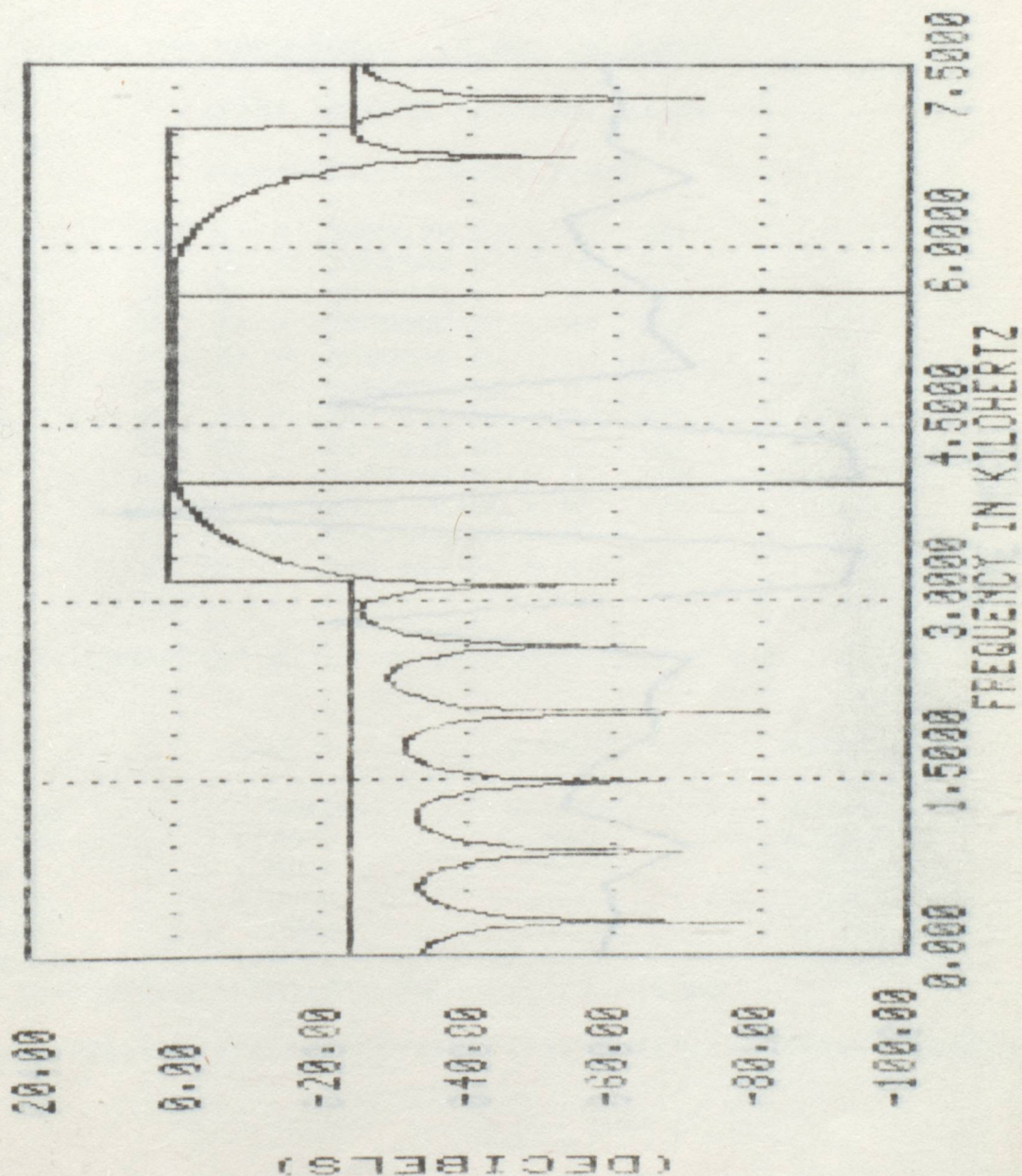
*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2	BAND 3
LOWER BAND EDGE	.0000	4.0000	7.0000
UPPER BAND EDGE	3.2000	5.6000	7.5000
MINIMAL GAIN	.0000	1.0000	.0000
MINIMAL RIPPLE	.0600	.0600	.0600
MAXIMUM RIPPLE	.0528	.0501	.0591
RIPPLE IN DB	25.5423	.4247	-24.5681

MAGNITUDE RESPONSE



LOG MAGNITUDE RESPONSE

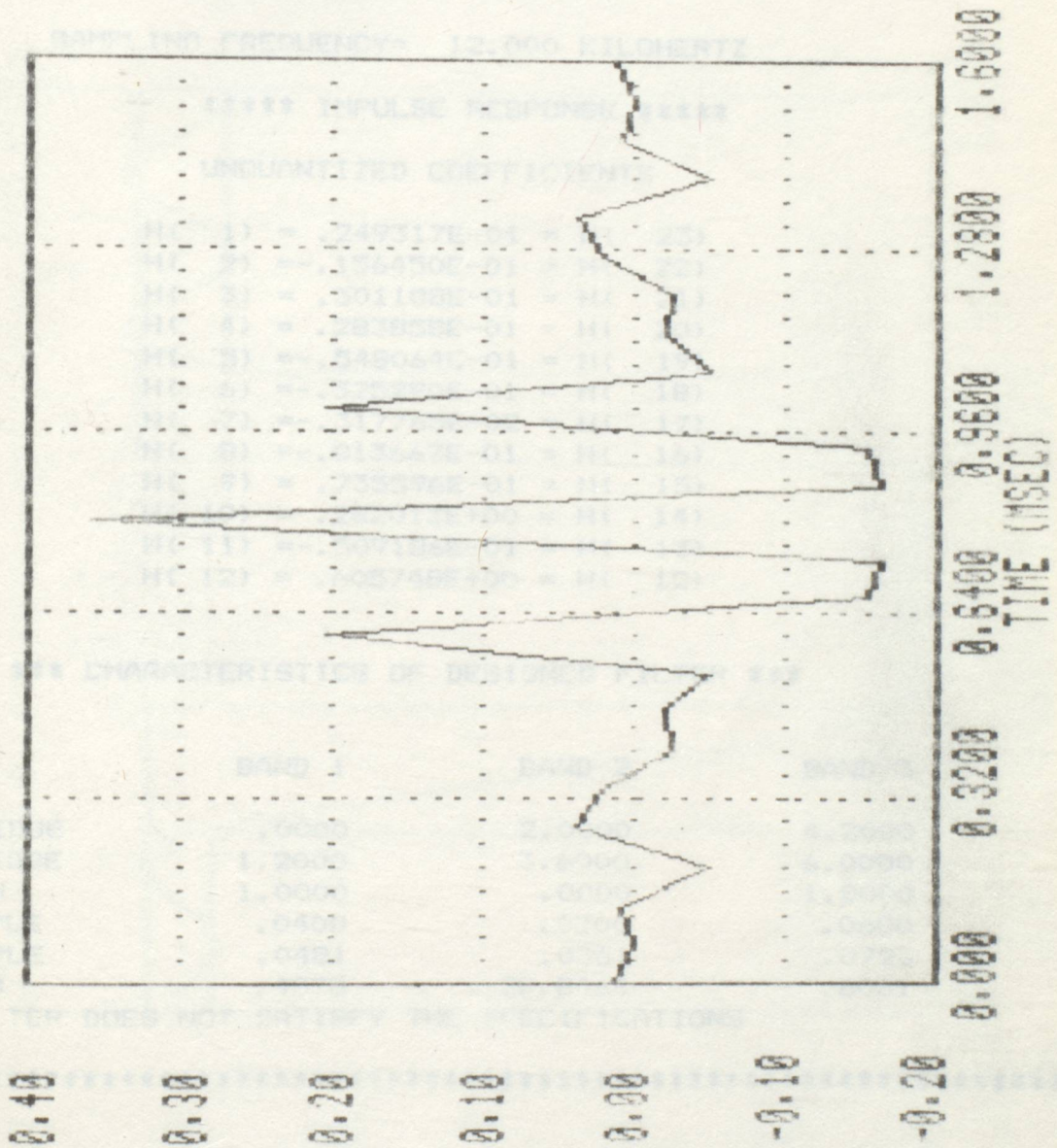


FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 PAPER-BUSCHMAN ALGORITHM
 BANDPASS FILTER

FILTERED LENGTH = 25

SAMPLE AND FREQUENCY: 12,000 HZ (DISK)

IMPULSE RESPONSE



FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 PARKS-McCLELLAN ALGORITHM

BANDSTOP FILTER

FILTER LENGTH = 23

SAMPLING FREQUENCY = 12.000 KILOHERTZ

***** IMPULSE RESPONSE *****

UNQUANTIZED COEFFICIENTS

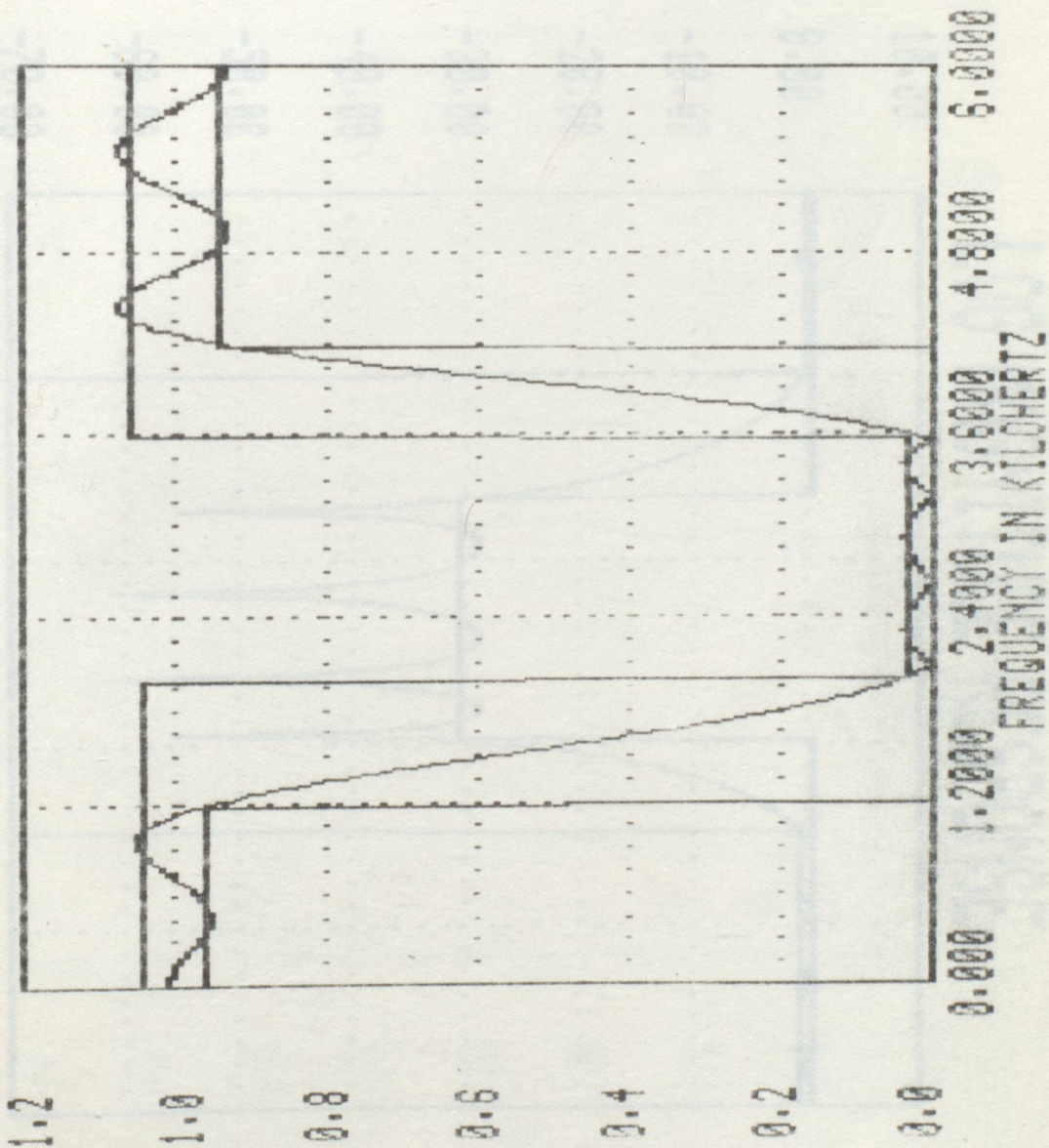
H(1) = .249317E-01 = H(23)
 H(2) = -.156450E-01 = H(22)
 H(3) = .301188E-01 = H(21)
 H(4) = .283858E-01 = H(20)
 H(5) = -.548064E-01 = H(19)
 H(6) = -.325290E-01 = H(18)
 H(7) = -.317765E-02 = H(17)
 H(8) = -.813667E-01 = H(16)
 H(9) = .735596E-01 = H(15)
 H(10) = .282013E+00 = H(14)
 H(11) = -.509186E-01 = H(13)
 H(12) = .605748E+00 = H(12)

*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

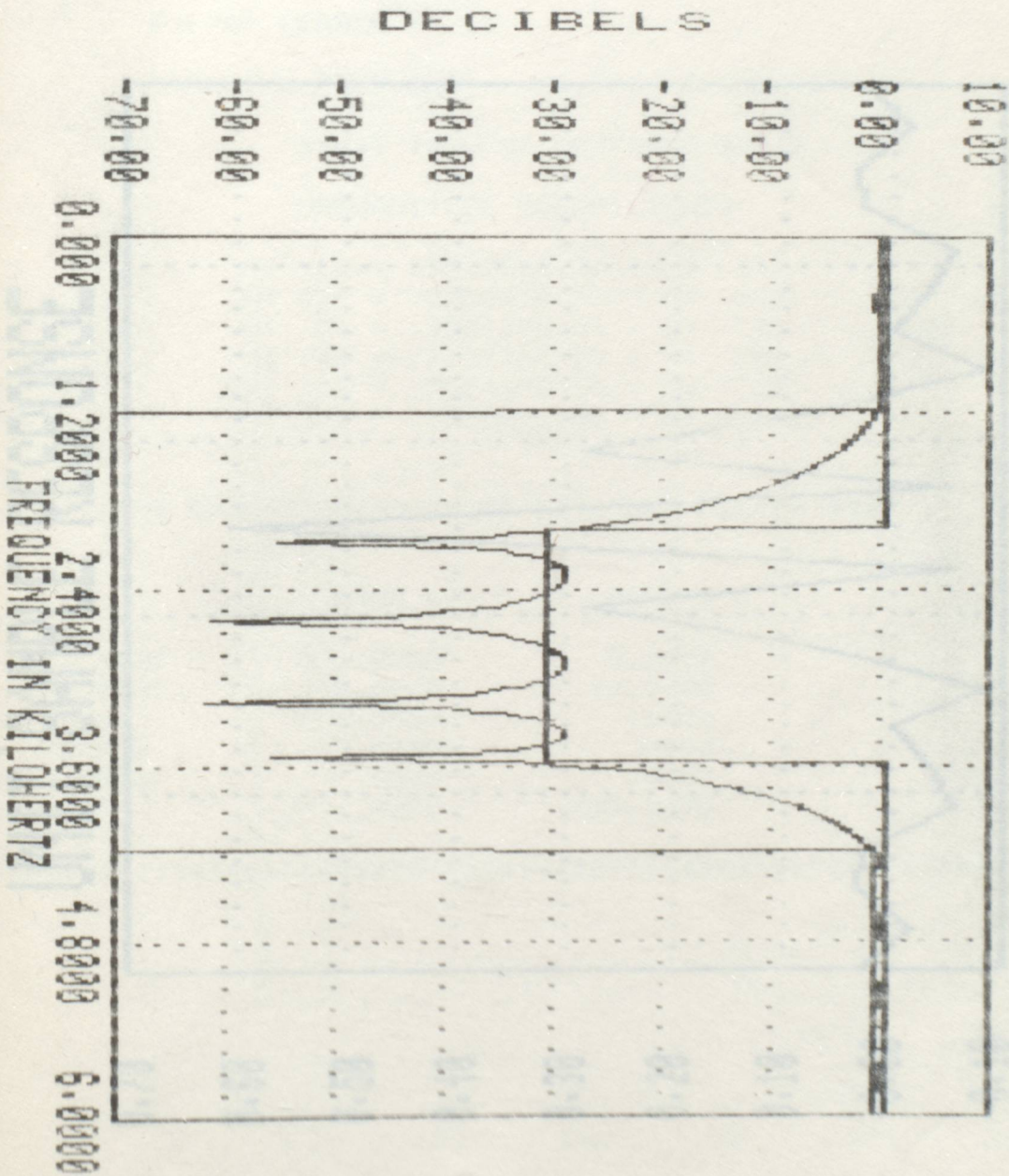
	BAND 1	BAND 2	BAND 3
LOWER BAND EDGE	.0000	2.0000	4.2000
UPPER BAND EDGE	1.2000	3.6000	6.0000
INITIAL GAIN	1.0000	.0000	1.0000
INITIAL RIPPLE	.0400	.0300	.0600
MINIMUM RIPPLE	.0481	.0361	.0723
ATTEN IN DB	.4078	-28.8464	.6061

YOUR FILTER DOES NOT SATISFY THE SPECIFICATIONS

MAGNITUDE RESPONSE



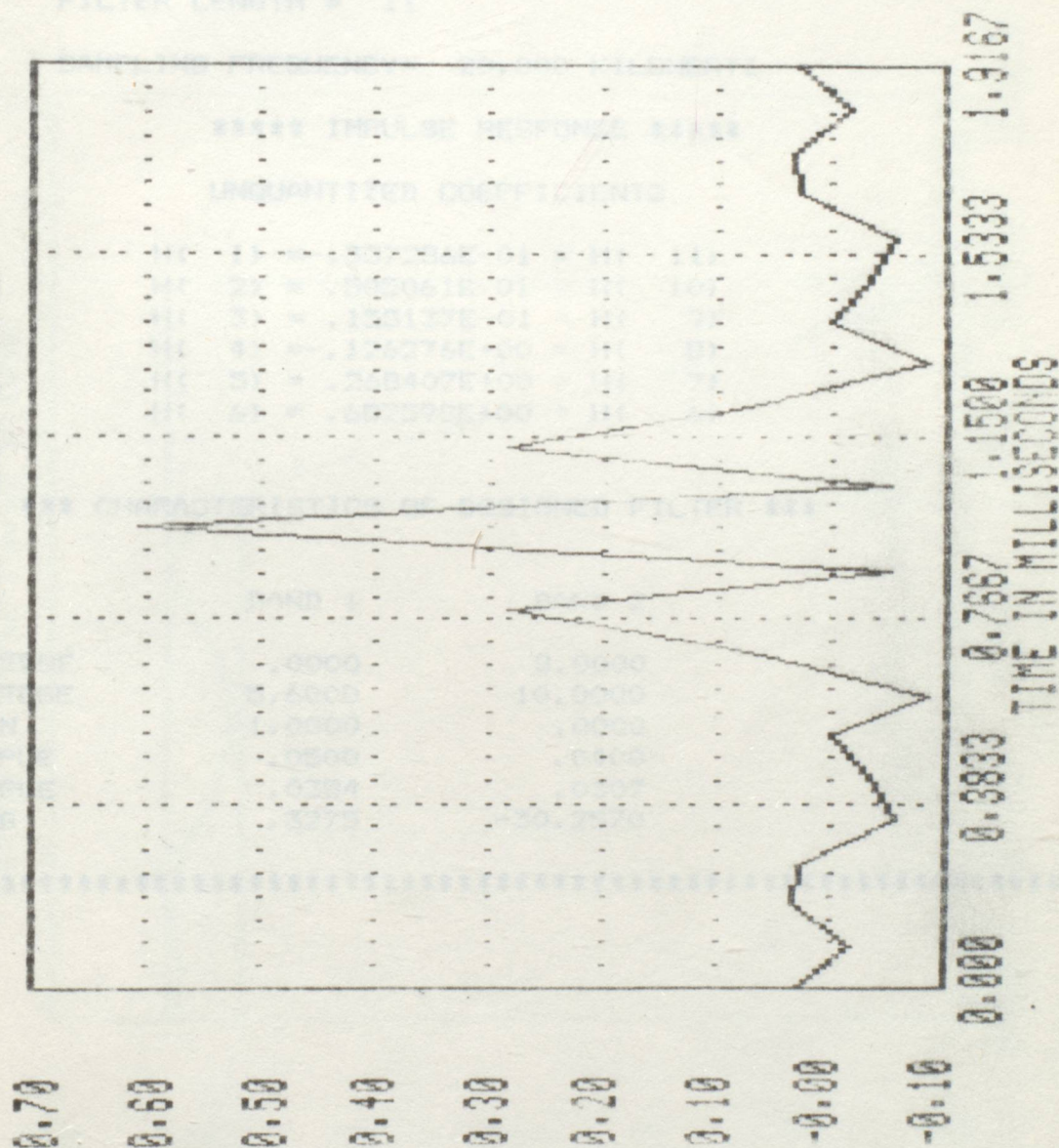
LOG MAGNITUDE RESPONSE



UNIT SAMPLE RESPONSE

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 PARKS-McCLELLAN ALGORITHM
 LOWPASS FILTER

FILTER LENGTH = 11



FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 UNQUANTIZED COEFFICIENTS

n	h[n]
0	0.0000000000
1	0.0000000000
2	0.0000000000
3	0.0000000000
4	0.0000000000
5	0.0000000000
6	0.0000000000
7	0.0000000000
8	0.0000000000
9	0.0000000000
10	0.0000000000

 FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 PARKS-McCLELLAN ALGORITHM

LOWPASS FILTER

FILTER LENGTH = 11

SAMPLING FREQUENCY= 20.000 KILOHERTZ

***** IMPULSE RESPONSE *****

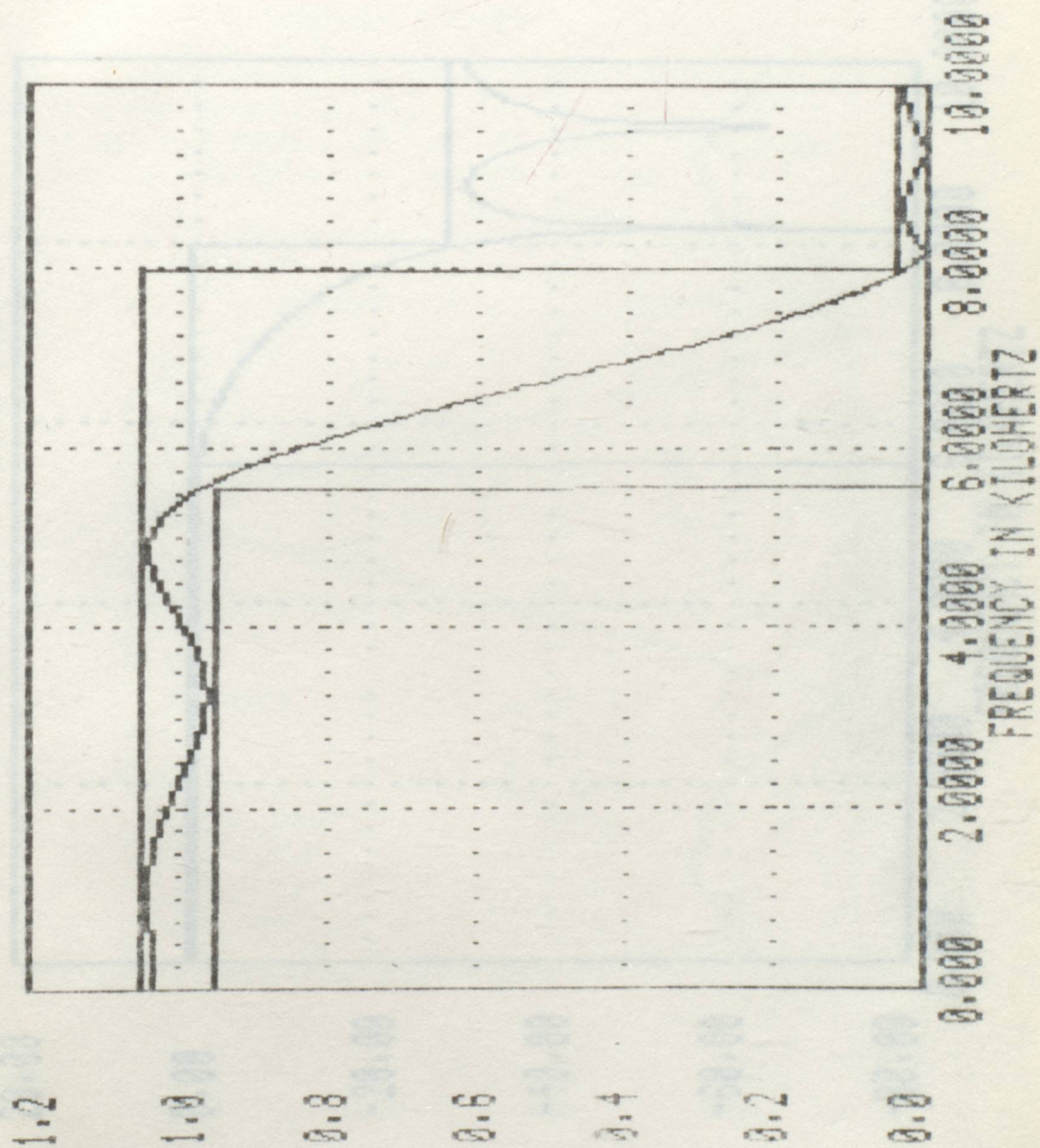
UNQUANTIZED COEFFICIENTS

H(1) = -.337286E-01 = H(11)
 H(2) = .505061E-01 = H(10)
 H(3) = .155137E-01 = H(9)
 H(4) = -.126276E+00 = H(8)
 H(5) = .268407E+00 = H(7)
 H(6) = .682598E+00 = H(6)

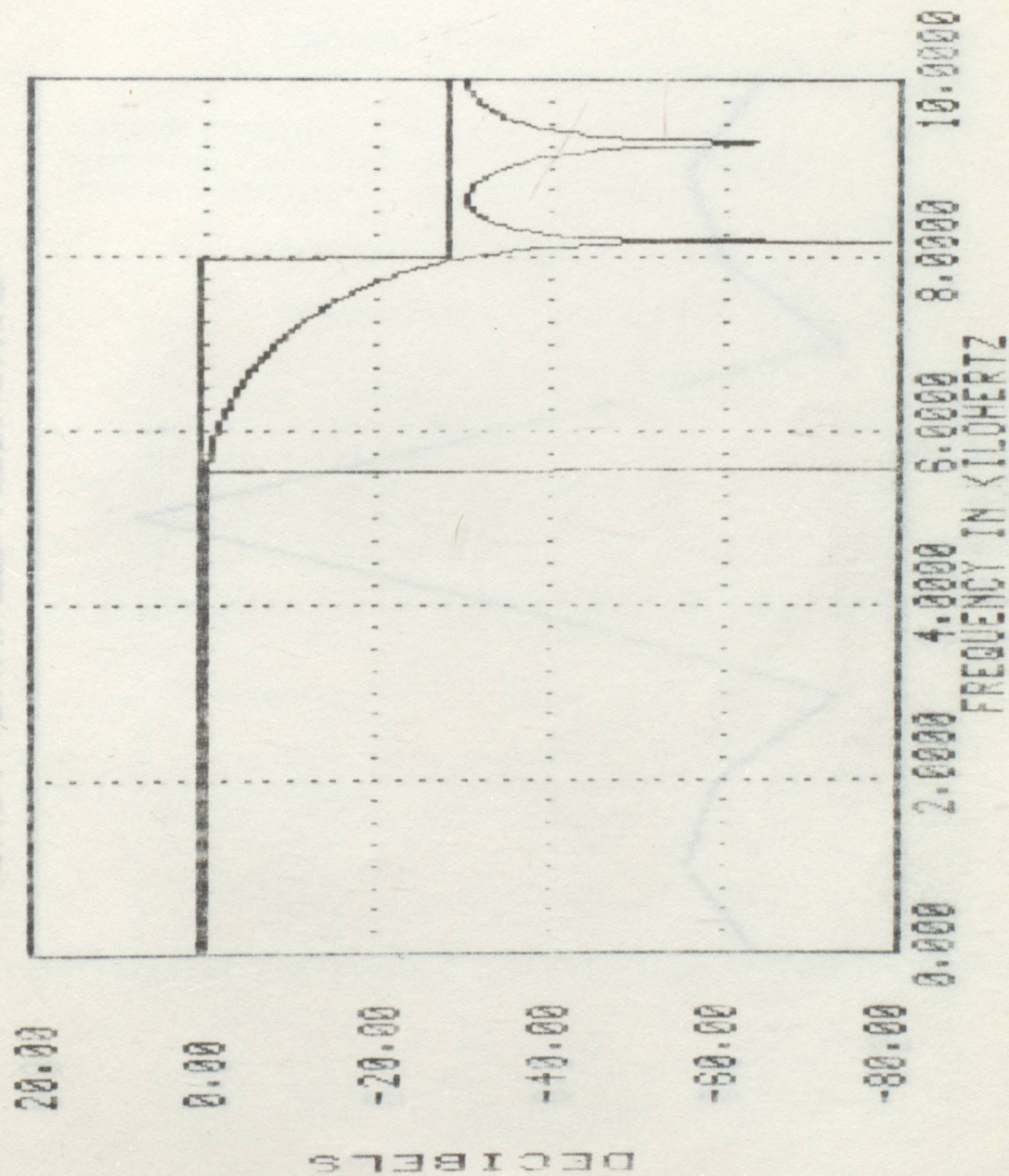
*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2
LOWER BAND EDGE	.0000	8.0000
UPPER BAND EDGE	5.6000	10.0000
INITIAL GAIN	1.0000	.0000
INITIAL RIPPLE	.0500	.0400
MINIMUM RIPPLE	.0384	.0307
RIIPPLE IN DB	.3275	-30.2570

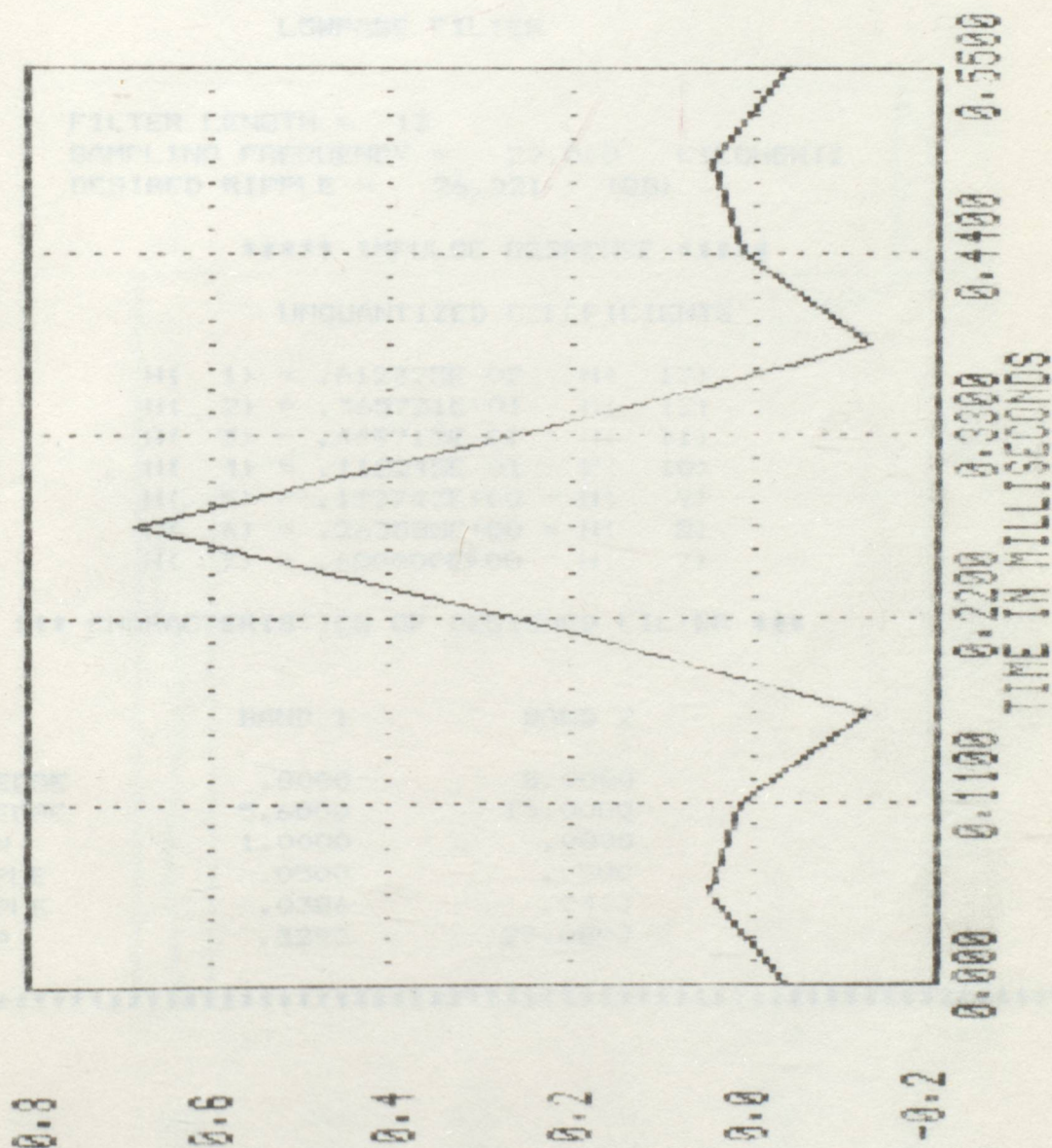
MAGNITUDE RESPONSE



LOG MAGNITUDE RESPONSE



UNIT SAMPLE RESPONSE



 FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
 LINEAR-PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
 KAISER-WINDOW ALGORITHM

LOWPASS FILTER

FILTER LENGTH = 13
 SAMPLING FREQUENCY = 20.000 KILOHERTZ
 DESIRED RIPPLE = 26.021 (DB)

***** IMPULSE RESPONSE *****

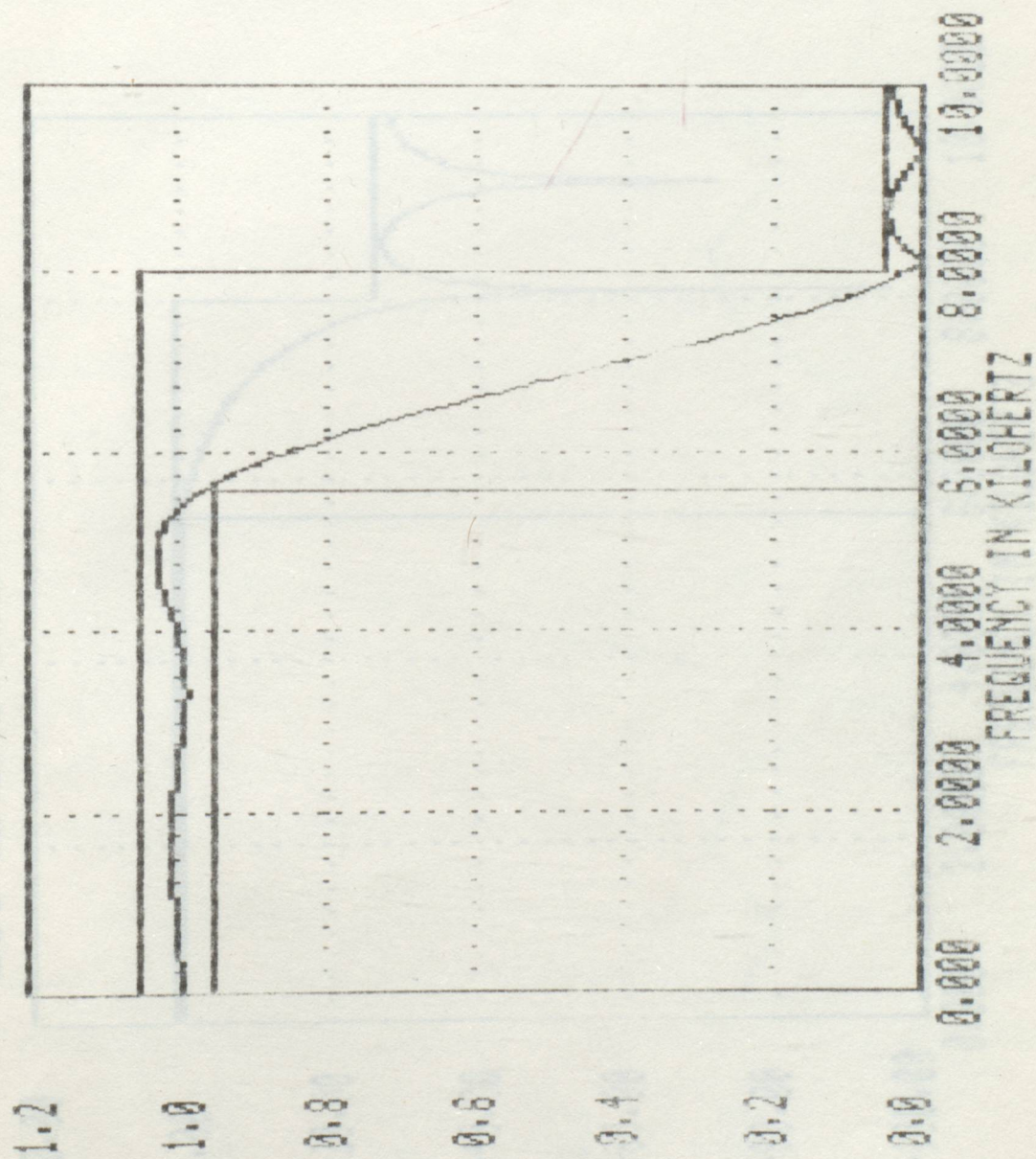
UNQUANTIZED COEFFICIENTS

H(1) = .612325E-02 = H(13)
 H(2) = .365731E-01 = H(12)
 H(3) = .449713E-01 = H(11)
 H(4) = .112245E-01 = H(10)
 H(5) = -.133743E+00 = H(9)
 H(6) = .263888E+00 = H(8)
 H(7) = .680000E+00 = H(7)

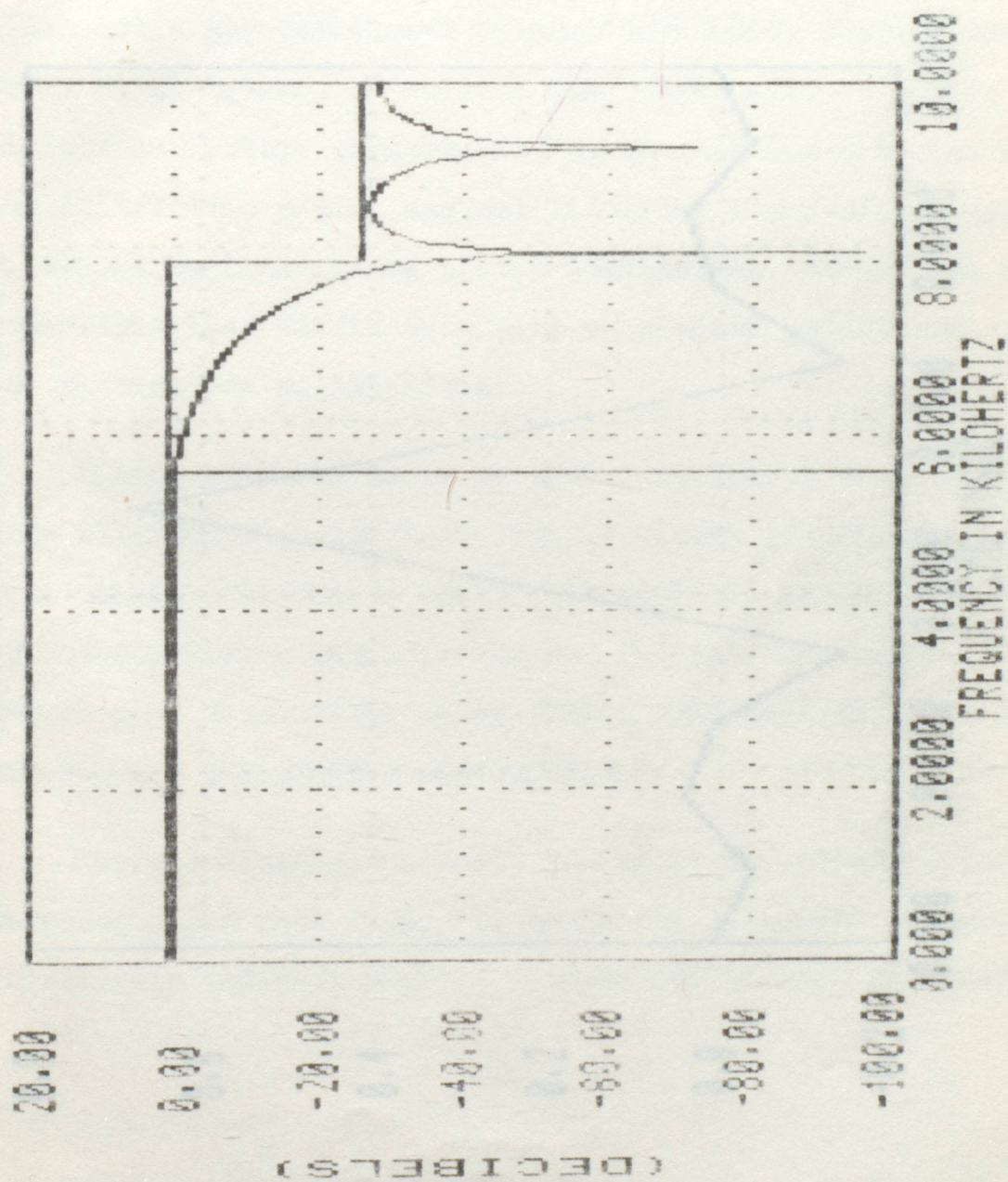
*** CHARACTERISTICS OF DESIGNED FILTER ***

	BAND 1	BAND 2
LOWER BAND EDGE	.0000	8.0000
UPPER BAND EDGE	5.6000	10.0000
INITIAL GAIN	1.0000	.0000
INITIAL RIPPLE	.0500	.0500
MINIMUM RIPPLE	.0386	.0443
MAXIMUM RIPPLE IN DB	.3293	-27.0803

LOG MAGNITUDE RESPONSE



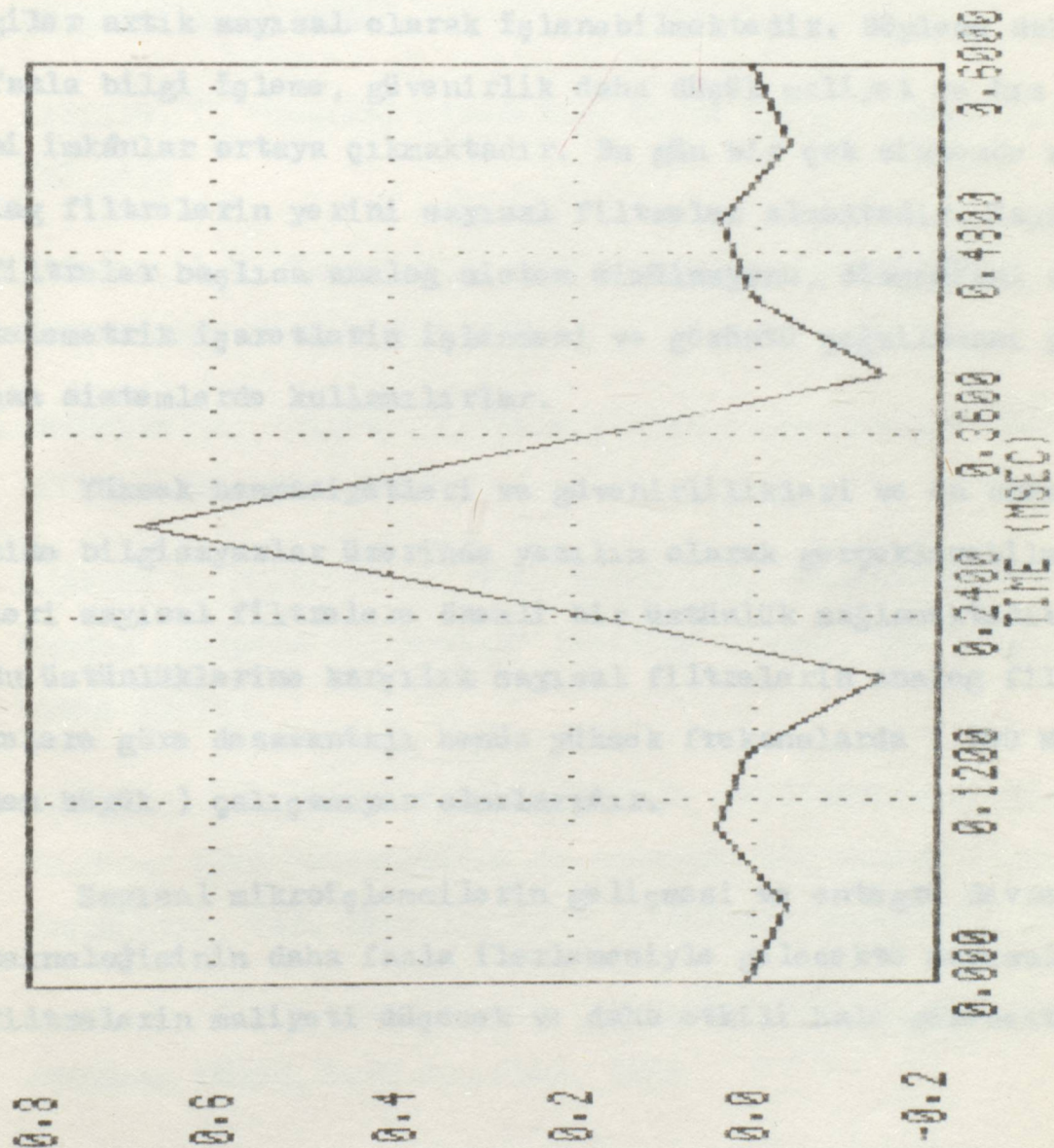
LOG MAGNITUDE RESPONSE



SONUÇ =

Bilgisayarların ve lojik devre elemanlarının çalıştığı zamanlarda bilgilerin işlenmesi belirli zaman aralıklarında gerçekleşmektedir. Bu aralıkların belirli olması, bilgilerin belirli zaman aralıklarında işlenmesiyle mümkündür. Bu aralıkların belirli olması, bilgilerin belirli zaman aralıklarında işlenmesiyle mümkündür.

IMPULSE RESPONSE



KAYNAKLAR =

SONUÇ =

Bilgisayarların ve lojik devre elemanlarının olmadığı zamanlarda bilgilerin işlenmesi sürekli zaman sistemleri ile gerçekleştiriliyordu. Hızla gelişen teknoloji sayesinde bilgiler artık sayısal olarak işlenebilmektedir. Böylece daha fazla bilgi işleme, güvenilirlik daha düşük maliyet ve hız gibi imkânlar ortaya çıkmaktadır. Bu gün bir çok sistemde analog filtrelerin yerini sayısal filtreler almaktadır. Sayısal filtreler başlıca analog sistem simülasyonu, biomedikal ve telemetrik işaretlerin işlenmesi ve görüntü çoğullaması yapan sistemlerde kullanılırlar.

Yüksek hassasiyetleri ve güvenilirlikleri ve en önemlisi bilgisayarlar üzerinde yazılım olarak gerçekleştirilemeleri sayısal filtrelere önemli bir üstünlük sağlamaktadır. Bu üstünlüklerine karşılık sayısal filtrelerin analog filtrelere göre dezavantajı henüz yüksek frekanslarda (100 MHz den büyük) çalışmıyor olmalarıdır.

Sayısal mikroişlemcilerin gelişmesi ve entegre devre teknolojisinin daha fazla ilerlemesiyle gelecekte sayısal filtrelerin maliyeti düşecek ve daha etkili hale gelecektir.

KAYNAKLAR =

- 1- LAM, H.Y.F., "Analog and Digital Filters, Design and Realization" Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979
- 2- YÜCEL, M., Y.Ü. Yüksek Lisans "Ayrık zamanlı Sistemler" Ders Notları, 1986
- 3- KAYIHAN, İ., "Sayısal Filtrelere Toplu Bakış", Rapor-79.11, İTÜ, 1979
- 4- RABINER, L.R., RADER, C.M., "Digital Signal Processing" IEEE Press, New York, 1972
- 5- ANTONIUS, A., "Digital Filters Analysis and Design" John Wiley, Inc. USA, 1979
- 6- CHARLES L. PHILLIPS, H., TROY NAGLE, JR., "Digital Control System Analysis and Design" Prentice - Hall, INC, Englewood Cliffs
- 7- PELED, A., LIU, B., "A New Hardware Realization of Digital Filters" IEEE Transactions on Acoustics and Speech Signal Processing, Vol. ASSP-22, NO.6, S.456-462 December 1974
- 8- CHEETHAM, B.M.G. HUGHES, P.M., "Digital Filters Design" Wireless World, S.43-45, June, 1982
- 9- Bilgisayar Programı, "Digital Filter Design Package", Copyright 1984 : ATLANTA SIGNAL PROCESSORS INC. VERSION 1.10. IBM 11015

TEŞEKKÜR

Her zaman yardım ve desteğini gördüğüm Sayın Hocam
Prof. Dr. Müh. ATIF URAL'a teşekkürü borç bilirim.

Sevgi BAKIR

İstanbul - 1988

