

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DÖNÜÖLÇERLER VE DÖNÜÖLÇERLİ DENGELEYİCİLER

TARIK AYABAKAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
YRD. DOÇ.DR. İLKER ÜSTOĞLU**

İSTANBUL 2014

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖNÜÖLÇERLER VE DÖNÜÖLÇERLİ DENGELEYİCİLER

Tarık AYABAKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 30.06.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Engin YEŞİL

İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Öncelikle bana güvenip danışmanlığımı kabul etmesi ve yüksek lisans çalışmam boyunca her zaman her konuda destek olması sebebiyle değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU'na, çok kıymetli tecrübelerini ve bilgilerini benden esirgemeyen Gölcük Tersanesi Komutanlığı personeli Sayın Cemil Acar 'a, her türlü şartlarda bana güvenen ve hep destek olan değerli hayat arkadaşım eşim Özgül AYABAKAN ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran, 2014

Tarık AYABAKAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTIMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ÖZET.....	xii
ABSTRACT.....	xiv
BÖLÜM 1	16
GİRİŞ	16
1.1 Literatür Özeti.....	16
1.2 Tezin Amacı.....	17
1.3 Hipotez	17
BÖLÜM 2	18
DÖNÜÖLÇERLERİN TARİHÇESİ.....	18
BÖLÜM 3	23
DÖNÜÖLÇERİN TANIMI VE ÇALIŞMA PRENSİBİ	23
3.1 Rijitlik	26
3.2 Devinim(Presesyon)	27
BÖLÜM 4	30
DÖNÜÖLÇERİN DİNAMİK YAPISI	30
4.1 Momentumun ilkesi	30

4.1.1	Bir maddesel noktanın açışal momentumu.....	31
4.1.2	Açışal Momentumun Korunumu.....	31
4.2	Rijit Sistemlerin Üç Boyutlu Kinetiği.....	32
4.3	Rijit bir cismin üç boyuttaki açışal momentumu	34
4.4	Atalet Elipsoidi	37
4.5	Rijit bir cismin üç boyuttaki kinetik enerjisi.....	41
4.6	Rijit Bir Cismin Kendi Kütle Merkezi Etrafındaki Hareket Denklemleri	42
4.7	Bir Dönüölçerin Hareketi Euler Açıları.....	44
4.8	Bir Dönüölçerin Devamlı Devinimi	47
4.9	Dönüölçerin Kuzey Yönünü Bulması	50
BÖLÜM 5		54
DÖRDÜNCÜ DERECEDEDEN SERBESTLİKLİ DÖNÜÖLÇER		54
5.1	Değişkenlerin Tanımlanması.....	54
5.2	Açışal Konumların Genel Değerlendirilmesi	55
5.3	Dönüölçerin Lineer Olmayan Dinamikleri	57
5.4	Dönüölçerin Lineerleştirilmiş Dinamikleri	57
5.5	Dönüölçerin doğrusal dinamikleri.....	58
5.6	Dönüölçerin Farklı Eksenlerinin Kontrolü.....	61
5.7	4. Dereceden Serbestlikli Dönüölçer İçin Tam Mertebeden Gözleyici Tasarımı	63
5.7.1	Giriş	63
5.7.2	Sylvester Denklemi.....	64
5.7.3	Lyapunov Denklemi.....	65
5.7.4	Sylvester Denklemi İle Durum Kestirimi.....	65
5.7.5	Sylvester-Gözleyici Denklemi.....	66
5.7.6	Sylvester Denklemi Tekil Olmayan Çözümlerinin Karakterizasyonu	68
BÖLÜM 6		77
CH-47 HELİKOPTER MODELİNDE KUTUP ATAMA İŞLEMİNDE ÇEŞİTLİ ALGORİTMALARIN UYGULANMASI VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI		77
6.1	Giriş.....	77
6.2	Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metodlar	81
6.2.1	Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Özyineli (Recursive) RQ Uygulama Metodu	81
6.2.2	Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Dolaylı RQ Algoritma.....	83
6.3	Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metotlar.....	84
6.3.1	Özyineli Çok Girişli Özdeğer Atama Algoritması	84
6.3.2	Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Doğrudan QR Algoritma	86
6.3.3	Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Schur Metodu.....	86
6.4	CH-47 Helikopter Modeli	90
BÖLÜM 7		95
SONUÇ VE ÖNERİLER		95

KAYNAKLAR.....	96
ÖZGEÇMİŞ	98

SİMGE LİSTESİ

h_o	Açısal momentumu
I_{OL}	OL eksenine göre atalet momenti
m	Rijit cismin kütlesi
w	Açısal hız
$\bar{v}$	Kütle merkezinin hızı
$\overline{I_{x'}}$	Ağırlık merkezine göre asal atalet moment
$\sum F$	Rijit cisim üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı
$\sum M_G$	G kütle merkezine göre momentlerinin toplamı
Δm	Maddesel noktanın kütlesi
Ω	Dönen takımın açısal hızı
$\dot{\phi}$	Devinim hızı
$\dot{\psi}$	Dönme hızı
T_i	Gövdelere uygulanan tork
θ_i	Açısal konum

KISALTMA LİSTESİ

RSF	Real Schur Form
PID	Proportional-Integral-Derivative
FRS	Fin Roll Stabilization

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Bohnenberger Makinesi [2]	19
Şekil 2. 2 Dönüölçerin gelişimi	20
Şekil 3. 3 Dönüölçer[15].....	25
Şekil 3. 4 Yatay eksenli dönüölçer[15].....	25
Şekil 3. 5 Dönüölçerin devinim hareketi[15]	26
Şekil 3. 6 Dönüölçer hareketi[15].....	27
Şekil 3. 7 Devinin Dönüölçer üzerindeki etkisi[15].....	27
Şekil 3. 8 Spin vektör yönü tespiti için sağ el kuralı[15]	28
Şekil 3. 9 Devinin yönünü tespit etmek için sağ el kuralı[15]	29
Şekil 4. 10 Rijit cisme etkiyen kuvvetler[16]	33
Şekil 4. 11 O noktası sabit olan rijit cisim[16].....	34
Şekil 4. 12 Rijit cisim[16].....	37
Şekil 4. 13 Atalet elipsoidi[16]	38
Şekil 4. 14 Atalet elipsoidinin asal eksenleri ile çakışma durumu[16]	39
Şekil 4. 15 Eliptik tabanlı homojen koni[16]	40
Şekil 4. 16 $OABC$ Dört yüzlüsü[16]	40
Şekil 4. 17 Rijit cisim[16].....	41
Şekil 4. 18 Rijit cisim[16].....	42
Şekil 4. 19 Dönüölçer ve Euler açıları[16]	45
Şekil 4. 20 Dönüölçer ve dönen karşılaştırma takımı[16].....	47
Şekil 4. 21 Dönüölçer devinim eksenleri [16]	48
Şekil 4. 22 Devinin ve spin etkisi[16]	49
Şekil 4. 23 Dönüölçerli pusulanın esas yapısı[16]	50
Şekil 4. 24 Dönüölçerli pusulanın esas yapısı[16]	51
Şekil 5. 25 Dört serbestlikli dönüölçer modeli [17].....	54
Şekil 5. 26 Sistem giriş-çıkışları[18]	55
Şekil 5. 27 Dönüölçerin şematik gösterimi[17].....	56
Şekil 5. 28 Durum ve Kestirilmiş Durumların karşılaştırması.....	75
Şekil 5. 29 Durum ve Kestirilmiş Durumların karşılaştırması.....	76
Şekil 6. 30 Durum geri besleme yapısı[20]	78
Şekil 6. 31 Kazanç matrislerinin koşul sayıları.....	91
Şekil 6. 32 Tek girişli özdeğer atama için Özyineli RQ algoritması	92
Şekil 6. 33 Tek girişli özdeğer atama için Dolaylı (Implicit) RQ algoritması.....	92
Şekil 6. 34 Özyineli çok girişli özdeğer atama algoritması.....	93
Şekil 6. 35 Doğrudan(Explicit) QR çok girişli özdeğer atama algoritması.....	93

Şekil 6. 36 Schur Metodu	93
--------------------------------	----

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 5. 1 Dönüölçer elemanları[18]	55
Çizelge 5. 2 Dönüölçer eleman değeri[17]	71

DÖNÜÖLÇERLER VE DÖNÜÖLÇERLİ DENGELEYİCİLER

Tarık AYABAKAN

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç.Dr. İlker ÜSTOĞLU

Dönüölçerler günümüzde birçok sistemde kullanılmaktadır. 200 yıllık geçmişi ile sürekli olarak gelişim gösteren dönüölçerler öncelikle denizcilikte daha sonra havacılıkta yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Dönüölçerler 20.yy başlarından itibaren gemilerin yalpa (roll) hareketini dengeleme (stabilizer) maksadı ile kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde de ticari ve askeri gemilerde kullanılmaya devam etmektedir.

Kullanımı her geçen gün artan dönüölçerlerin kontrol teorisi ile olan uygulamaları da son yıllarda artmaktadır. Çalışmada dengeleyici sistemlerde kullanılan dönüölçerlerin çalışma prensibi ve dinamik yapısı incelenmiştir. Sonrasında dördüncü dereceden serbestlikli dönüölçerin lineer olmayan yapısı lineerleştirilerek lineer dönüölçer modeline tam mertebeden gözleyici tasarlanmıştır. Kestirilmiş durumlar ile sistem durumları karşılaştırılmıştır.

Kontrol teorisinde önemli yer tutan kutup atama problemi yine dönüölçer kullanım alanlarından birisi olan helikopter modelinde incelenmiştir. Kutup atama probleminde genel olarak kullanılan Ackerman, Bass-Gura metotlarından farklı olarak beş adet 5 (beş) farklı algoritma CH-47 Helikopter modelinde uygulanarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca kullanılan tüm algoritmaları kapsayan genel bir algoritma yapısına da yer verilmiştir. CH-47 modelinde kullanılan algoritmalarından elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve bize en iyi durumu veren algoritma ortaya koyulmuştur.

Gözleyici tasarımında MATLAB programı, kutup atama metotlarının uygulanmasında Mathematica programı kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dönüölçer, dengeleyici, gözleyici tasarımı, kutup atama

GYROSCOPES AND GYROSTABILIZERS

Tarik AYABAKAN

Department of Control and Automation Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. Dr. İlker ÜSTOĞLU

Gyroscopes with their 200 years development are used in many systems. They are begun to used in navigation at first then at aviation. From the beginning of 20th century they are used to stabilize roll movement of ships. Today they are still used both in navy and merchant ships.

Applications of control theory on gyroscopes rise in recent years. In this thesis working principle and dynamic structure of gyro-stabilizers are studied. Then non-linear model of four degree freedom gyro is linearized. After that full-order observer is designed for the linearized gyro model. Estimated state gains and system state are compared.

In this thesis we also studied on, one of the most important problem of control theory, pole assignment problem for a helicopter model. In pole assignment problem we studied on five algorithms different from well-known Ackerman and Bass-Gura formula. We used five different algorithms for CH-47 Helicopter model and compared the solutions we had. We also give a template of numerical algorithms for eigenvalue assignment problem. Results we had from the algorithms for CH-47 Helicopter model are compared. After comparison the most efficient algorithm is proposed.

In observer design MATLAB program and for application of pole assignment methods Mathematica program is used.

Keywords: Gyroscope, stabilizer, observer design, pole assignment

1.1 Literatür Özeti

Dönüölçerler 18.yydan itibaren bilim dünyasının her zaman ilgi odağı olmuştur. Yapılan çalışmalar günümüze neredeyse aralıksız olarak devam ederek gelmiştir. 200 yıla aşkın bir süredir devam eden çalışmalar dönüölçerin kullanım alanını yaygınlaştırmıştır [1]. Leon Foucault'nun yapmış olduğu çalışmalar sonraki çalışmalar için dönüm noktası olmuştur[2].

20.yy başlarında Anschütz ve Sperry'nin yapmış olduğu çalışmalar dönüölçerlerin uygulamadaki güvenilirliğini artırmıştır. Kontrol teorilerinin dönüölçerle ilgili birçok uygulaması bulunmaktadır. Dönüölçer doğrusal olmayan yapıya sahiptir. Geçmişte hem doğrusal olmayan hem de doğrusallaştırılmış modeller üzerinde çalışmalar olduğu görülmektedir. [3,4] nolu çalışmalarda lineer olmayan modeli ve basit PID geri beslemeli kontrol yapısı incelenmiştir. Lei, Xu ve Zheng tarafından [5] iki lineer olmayan yapıdaki dönüölçerin senkronizasyonu üzerine çalışılmıştır. Özellikle son 30 yılda karmaşık yapısına rağmen dönüölçerin lineer olmayan modeli üzerine yapılan çalışmalarda artış olmuştur[6]. Diğer taraftan lineerleştirilmiş model üzerine yapılan çalışmalar da popülerliğini korumaktadır. Ashok ve Patil uzay araçlarında kullanılan kontrol momentli dönüölçerler için dayanıklı LQR kontrolör tasarlamışlardır[7]. G.N. Roberts tarafından gemilerin olmazsa olmaz parçası dönüölçerlerin denizcilikteki kullanım alanları anlatılmıştır[8]. Günümüzde savaş gemilerinde geminin yalpa hareketini dengelemek için PID kontrolörlü klasik kontrol teorisini kullanan fin sistemleri kullanılmaktadır. [9] nolu çalışmada fin dengeleme(FRS) sistemlerinde farklı kontrol stratejilerinin sağlayacağı potansiyel iyileşmeler ele alınmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Çalışmada günlük yaşantımızda neredeyse tamamen yer almış olan dönüölçerlerin tarihsel gelişimi, çalışma prensibinin yalın bir dille anlatımı, dinamik yapısının analizi ve kontrol teorisinin iki önemli probleminin uygulamasının gösterimi amaçlanmıştır.

Uygulaması yapılan kontrol teorisi problemleri gözleyici tasarımı ve kutup atama problemidir. Sistem kararlılığı ve performansı üzerine önemli etkileri olan problemlerle ilgili olarak algoritmalar verilerek modeller üzerindeki sonuçları gösterilmeye çalışılmıştır.

1.3 Hipotez

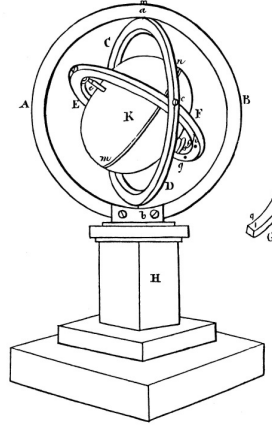
Dönüölçerler 20.yy başlarından itibaren özellikle denizcilikte ve havacılıkta yaygın olarak kullanılmaktadır. Denizcilikte yön bulma ve gemi dengeleme, havacılıkta oto pilot sistemlerinde vazgeçilmez unsurlardır. Günümüzde ise kullanım alanı her geçen gün artmaktadır. Tez çalışmasında kontrol teorisinin iki önemli problemi dönüölçer modellerinde incelenmiştir. İlk olarak dördüncü dereceden serbestlikli dönüölçer modelinde Sylvester denklemi ile tam mertebeden gözleyici tasarlanmış ve tasarlanan gözleyici sayesinde elde edilen kestirilmiş durumlar ile sistem durumları karşılaştırılmıştır. Daha sonra dönüölçerlerin yaygın olarak kullanıldığı helikopter modelinde durum geribesleme ile özdeğer atama problemi 5 (beş) adet farklı algoritmalar uygulanarak incelenmiştir. Böylelikle özdeğer atama probleminde kullanışlı ve güvenilir alternatif algoritmalar sunulmuştur. Yapılan karşılaştırmalar sonunda modelimize en uygun algoritma belirlenmiştir.

DÖNÜÖLÇERLERİN TARİHÇESİ

Dönüölçer (gyroscope) 18.yy dan itibaren, bugünkü kullanım alanlarından farklı olarak önce eski bir denizcilik aleti olan sekstantı geliştirme amacıyla sonrasında ise dünyanın dönüş hareketini göstermeye yönelik çalışmalar sonunda icat edilmiştir. Dönüölçerin ortaya çıkmasını sağlayan bilim adamlarından Bohnenberger Astronomi ile ilgili çalışmaları sonunda “makine”sini (Bohnenberger’s machine) icat ederken, Leon Foucault ise dünyanın dönüş hareketini göstermek için kullandığı alete “cayroskop” adını vermiştir ve bu isim günümüze kadar süregelmiştir.

Dönüölçerli sistemlerin temelini oluşturan dönüölçer (gyroscope) dünyanın dönüş hareketini göstermeye yönelik çalışmalar sonucunda icat edilmiştir. Her ne kadar dönüölçer kavramı dünyanın dönüş hareketini gösterme çalışmaları ile ortaya çıkmış olsa da bu konudaki ilk çalışmalar günümüzdeki en yaygın kullanım alanı olan denizcilikte, seyrüseferde yön bulmada yaşanan zorlukların üstesinden gelmek için yapılmıştır. Bahsettiğimiz ilk çalışmalardan “Serson Speculum”u dönüölçer ile ilgili ilk ciddi çalışma olarak kabul edilir. Serson 1754 yılında “Gentlemen’s Magazine” adlı dergide tasarımının detaylarını da anlatmıştır[2]. Serson'un icadı denizcilikte yön bulmada kullanılan sekstantın sisli ve görüş şartlarının elverişli olmadığı durumlardaki dezavantajlarını gidermek maksadıyla yapmış olduğu çalışmalar sonucu ortaya çıkmıştır. Serson'un tasarımı görüş şartlarının zorlaştığı durumlarda sekstantın kullanılabilmesi için ufuk hattını aydınlatma görevi görmekteydi. Ne yazık ki Serson'un ölümü test çalışmaları sırasında gemisinin batması sonucu olmuştur ve çalışmaları yarım kalmıştır[2].

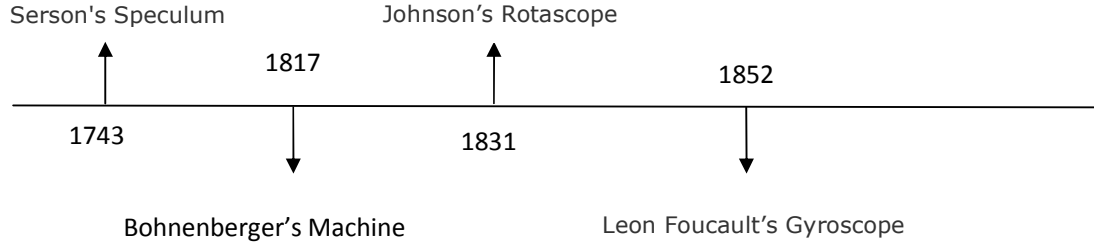
1817 yılında Bohnenberger ilk dönüölçeri icat etmiş ama adına "makine" koymuştur. Temel olarak bir kürenin dönmesi ile sistem oluşturulmuştur. 19.yy boyunca üretimi yapılan ve okullarda fizik ve astronomi derslerinde eğitim maksatlı kullanılan makineye uzun yıllar erişilememiştir. Bohnenbergerin yaşadığı kent Tübingen’de bir okuldaki stok sayımı sırasında makine yeniden ortaya çıkar ve böylece Bohnenbergerin yayınlarındaki makineyi uygulamalı olarak inceleme fırsatı doğar. Bohnenberger yayınlarında tasarımının ayrıntılarından ve kullanımından bahsetmiştir. Ayrıca 1813 yılında Poisson tarafından ilk kez ortaya atılan devinim kavramı da ayrıntılı olarak Bohnenberger’in yayınlarında yer almıştır. Bohnenberger’in tasarımı ve çalışmaları Foucault’nun çalışmalarının temelini oluşturması açısından önemlidir. Almanya’da doğan dönüölçerin Fransa’da incelenmeye başlaması ise Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace’ın dönüölçeri dünyanın dönüş ekseninin devinim(presesyon) özelliğini Fransa’daki okullarda öğretilmesi maksadıyla getirilmesini tavsiye etmesiyle olur [2].



Şekil 2. 1 Bohnenberger Makinesi [2]

1832 yılında Walter Johson’un çalışmasında kürenin yerini disk almıştır. İcat ettiği aleti "Rotascope" olarak adlandırmıştır. Her ne kadar dönüölçer benzeri çalışmalar 18.yy başlarından itibaren yapılmış olsa da bu sistemi uygulamaya koyan ve "cayroskop" ismini veren John Bernard Leon Foucaulttur. Foucault'nun teorisi dönüölçerli pusulanın çalışma prensibine temel oluşturur.

"Her serbest dönen cisim diğer dönen bir cisim tarafından etkiye maruz kalırsa, eksenini en kısa yoldan yeni dönme rotasına paralel olacak şekilde değiştirme eğilimindedir. Böylelikle her iki dönme aynı doğrultuda olur." [11]



Şekil 2. 2 Dönüölçerin gelişimi

Foucault'nun birinci kanununa göre üçüncü dereceden serbestlikli yani üç düzlemde de serbestçe hareket edebilen ve yerçekimi kuvvetinden etkilenmeyen bir dönüölçer dünyanın dönüşünü göstermelidir.

Foucault'nun ikinci kanuna göre ise ikinci dereceden serbestlikli dönüölçeri dikkate alır. Kutuplar hariç dünyanın herhangi yerinde iki kütleli nispi hareketinden dolayı dünya ekseninde kendi dönüş eksenini koruma eğilimindedir. Dünyanın dönüşü ile birlikte dönüölçer dönerken kendi dönüş düzlemini koruma eğilimindedir. Sonuç olarak dönüölçere etki eden yerçekimi kuvveti devinim hareketine neden olacaktır ve dönüş düzlemi dünyanınki ile eşlenik olmaya yakın olacaktır. Böylece dünyanın dönüölçerin altında dönme eğilimini sınırlayacaktır.

Bu kanunlar dönüölçerin pusula olarak kullanılmasına işaret eder. Üçüncü dereceden serbestlikli bir dönüölçer uzaydaki kerterizlerle kıyaslanacak hatların sabitlenmesi veya bilinen rotada kalınmasında kullanılır. İkinci dereceden serbestlikli dönüölçer kendi eksenini ile kuzey – güney hattını göstererek dünya dönüş düzleminde yer alır. Foucault'nun çalışmaları sadece dünyanın dönüş hareketini göstermekle kalmamış aynı zamanda dönüölçerli pusula, dönüölçerli dengeleyiciler gibi birçok icadın önünü açmıştır[11].

Dönüölçerin gelişiminde 19.yy keşfedilme dönemidir. Bu dönemde yapılan çalışmalar sonraki yy.da yapılacak çalışmalara ışık tutmuştur. Teknolojik gelişmelerle sistemler kendini yenilese de temel çalışma prensipleri genelde aynı kalmıştır. 20 yy.da ise yaşanan I. ve II. Dünya savaşları nedeniyle ülkelerin savunma sanayisinde yaptıkları harcamaların ve yatırımların artması ile dönüölçerler savaş sistemlerinin, cihazların vazgeçilmez parçası olmuştur. Gemi inşasında metalin kullanımının yaygınlaşması ile yön göstermede manyetik etkilerden etkilenmeyen araçların önemi anlaşılmaya

başlamıştır. Bu konudaki çalışmalar bazı araştırmacılar tarafından iki ve üç düzlemde serbest cayrostatlar ile manyetik pusulanın yerini alacak bir cihazı üretmek ümidiyle başlamıştır.

Dr. Anschütz 1900 yılında Foucault'nun belirlediği hususlar ile üç düzlemde serbest cayrostat üzerinden deneylere başlamıştır. Yaptığı çalışmaları sonuçlandırması fazla uzun sürmemiştir. Dönüölçerli pusulanın gelişimi ile ilgili dönüm noktası 1906 ilkbaharında gerçekleşmiştir. Anschütz ilk defa üç düzlemde serbest dönüölçere iki düzlemde serbest dönüölçer uyguladığında sistemi Foucault'nun çalışmasında da belirtildiği gibi meridyen hattına yönlendirme etkisinin olduğunu gördü. Yıllardır devam eden çalışmalar sonunda iki düzlemde serbest dönüölçerin kullanımı yeterli olduğu görülmüş oldu [11].

Devinim (presesyon) dönme eksenine harici kuvvet etki ettiğinde ortaya çıkan spin yapan gövdenin hareketine denir. Devinim hareketinin kökü Newton birinci kanununa yani "eylemsizlik prensibi" ne dayanır. Newton birinci kanununa göre "Bir cisim üzerine dengelenmemiş bir dış kuvvet etkiledikçe, cisim hareket durumunu (durağanlık veya sabit hızlı hareket) korur."

Devinim dönüölçerli dengeleyicinin icadının temelini oluşturur. Amerikan Sperry ilk önce bu buluşunu otomobilleri sonrasında da gemileri dengelemede kullanmıştır. Yaptığı çalışmalar sonunda sıkı sıkıya montelenmiş tekerler otomobilleri ve sıkı sıkıya montelenmiş türbinlerin de gemilerin yalpa hareketini azaltmadığını ifade etmiştir. Sperry'e göre tekerler ve türbinlerin sıkı montelenmesi dış kuvvetlere karşı hareket etmelerine engel olmaktadır ve bozucu dış kuvvetlerin enerjisini absorbe etmektedir.

Sperry çalışmalarında sürekli olarak "devinim" konseptini tanımlamıştır ve en yalın tanımı aşağıdaki gibidir.

"Eğer dönüölçerin ekseninin bir ucuna kuvvet uygularsam bu kuvvete direnç uygulayacaktır. Fakat uygulanan kuvvet yönüne dik açı yapacak yönde dönmeye devam edecektir. Uygulanan kuvvete 90 derecelik bu harekete devinim denir. Pratikte şu durum gözlenecektir ki dönüölçer doğrusal hareket tarafından uygulanan kuvvetlere karşı direnç göstermez sadece açısal hareketler devinime neden olur ve dönüölçer

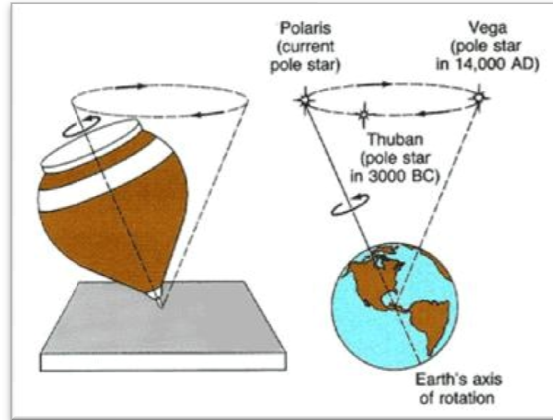
sadece açısız hareketlere direnç gösterir. Açısız hareketin nereye uygulandığı önemli değildir fakat yapılan hareket açısız olmalıdır.”[12]

Alman Herman Anschütz Kaempfe ve Amerikan Elmer Ambrose-Sperry’nin yapmış olduğı çalışmalar 20.yy başlarından itibaren aktif olarak kullanılmaya başlamıştır. Sperry icat etmiş olduğı dönüölçeri Alman Donanmasına satma teşebbüsünde bulunduğunda iki bilim adamı arasında patent davası açılmıştır. Dava dosyasının bilirkişiliğini Albert Einstein yapmıştır. Einstein yaptığı incelemeler sonunda Anschütz’ün haklı olduğunu daha özgün bir çalışma yaptığını ve Sperry’nin yaptığı çalışmalarda Anschütz’ün yaptığı çalışmaları kullandığını tespit etmiştir. Mahkeme Sperry’i 300.000 Mark para cezasına çarptırmıştır. Ancak aynı dönemde başlayan I.Dünya Savaşı nedeniyle bu ceza yerine getirilmemiştir. Nitekim savaş sonunda müttefikler Alman patentlerine el koymuştur[10].

1909 yılında dönüölçer Sperry tarafından yön bulmadan farklı olarak ilk kez otopilot sistemlerinde kullanılmaya başlanmıştır. 1916 yılında ise Sperry tarafından uçaklarda yapay ufuk çizgisi (artificial horizon) oluşturmada ve aynı yıl Anschütz tarafından gemilerde otopilot sistemlerinde kullanılmaya başlanmıştır. 1914 yılında gemiler için dönüölçerli dengeleyici olarak kullanılmaya başlanmıştır. Günümüzde konum bilgisine ihtiyaç duyan hemen hemen tüm sistem cihazlarda dönüölçerler kullanılmaktadır.

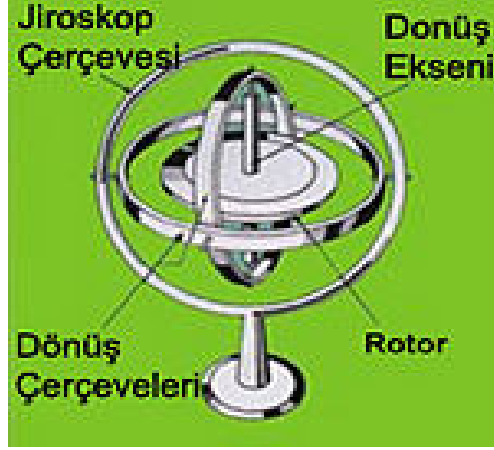
DÖNÜÖLÇERİN TANIMI VE ÇALIŞMA PRENSİBİ

Dönüölçerler genel kullanımda cayro (gyro) olarak adlandırılır. Esasında dünyanın dönüş hareketi de dönüölçerin karakteristik özelliğini taşır. Dünyanın kendi eksenindeki dönüşü dengeleyici etki oluşturur ve kutup yıldızını gösterir şekilde dönmesini sağlar.



Şekil 3.1 Dünyanın dönüş hareketi[13]

Hızlı şekilde dönen pervane, küre, top vs. temelde dönüölçerdir. Dönüölçer yapı olarak serbest dönüşe sahip rotor(disk) ve birbirine bağlı ve serbestçe dönebilen mafsallardan(çemberler) oluşur.



Şekil 3.2 Dönüölçerin elemanları[14]

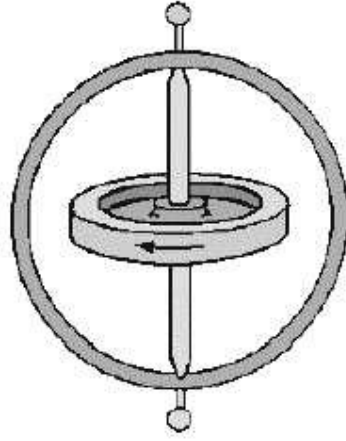
Dönüölçer tarihçe kısmında da anlatıldığı üzere yaklaşık 100 yıllık çalışma süresi sonrasında bulunmuş dönüölçer ismini ise bulunduktan daha sonra başka bir bilim adamı tarafından almıştır. Dönüölçer (gyroscope) kelimesi Fransızca kökenlidir ve Yunanca iki kelimenin birleşiminden oluşur "gyros" dairesel dönüş ve "skopein" görüntülemek anlamında, çevirisi ile dünyanın "dairese dönüşü görüntülemek" anlamındadır. Fransızca kökenli olmasındaki neden Leon Foucault tarafından dünyanın dönüş hareketini göstermek amacıyla kullanması ve dünyaya duyurmasıdır[15].

Dönüölçer genel tanımı ile asal momentum korunumu prensibine dayanan bir ayardır. Halka çerçeve içerisinde eksen üzerine yerleştirilmiş, rahatlıkla dönebilen ve sürtünmesi azaltılmış olan bir diskten oluşur. Dönüölçerin diski belirli bir hızla döndürüldüğünde, ayar bir asal momentum kazanır. Yer çekimi kuvveti kendine doğru dönüölçere bir yön vermeye çalışsa da dönüölçer, bu kuvvete dik bir açıyla hareketine devam eder.

Dönüölçerin eylemleri Newton'un hareket kanunlarına dayanmaktadır. Dönüölçerin pratikteki uygulamaları iki temel karakteristik üzerine kuruludur; Rijitlik (Rigidity) ve Devinim(Presesyon). Kısaca tanımlayacak olursak bu iki kanuna göre;

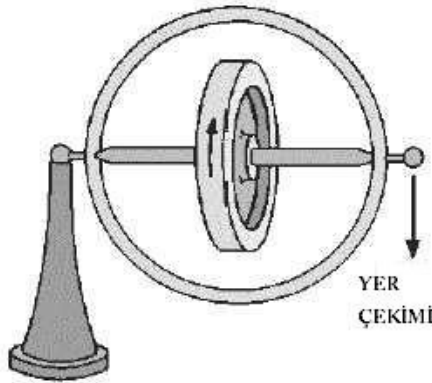
- **Rijitlik** : Serbest dönen bir dönüölçer eksen yönünü, dış kuvvetler uygulanmadıkça, muhafaza etmeye çalışır.
- **Devinim hareketi** : Serbest dönen bir dönüölçerin eksenine herhangi bir kuvvet uyguladığımızda dönüölçer eksenini bu kuvvete dik bir yön alır.

Topaç bu hareketi anlatmak için güzel bir örnektir. Topaç hızlı döndüğü sürece yıkılmadan dönmeye devam eder. Bu sırada topaca etkiyen yerçekimi kuvveti bozucu etki ile eksen yönünü değiştirmeye çalışır. Ancak topacın hızlı dönmesinin oluşturduğu dönüölçer (gyro action) etkisi bu eğilime karşı koyar. Bu konuda başka bir örnek de bisiklettir. Bisikleti yüksek hızlarda iken dengelemek daha kolaydır. Çünkü yüksek hızda bisiklet tekerleri dönüölçer gibi çalışır ve dönme eksenlerini yere paralel olarak korumaya çalışırlar. Dönüölçer rotorunu hızlı bir şekilde döndürdüğümüzde ve zemine koyduğumuzda üzerindeki hızın oluşturduğu etki ile dik olarak kendi eksenini koruyarak dönmeye devam edecektir. Bu özelliği rijitlik (rigidity).



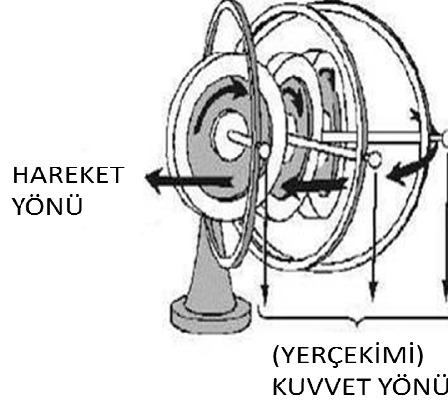
Şekil 3. 3 Dönüölçer[15]

Eğer dönüölçeri durdurup yatay konuma getirirsek ve bu konumunda rotoru döndürmeye başlarsak dönüölçer düşmeyecektir. Yer çekimi kuvvetinin yönünü değiştirmesine karşı koyarak yatay eksenle hareketine devam edecektir.



Şekil 3. 4 Yatay eksenli dönüölçer[15]

Dönüölçer yerçekimi kuvvetine karşı koyarak hareketine devam ederken yerçekimi kuvvetine dik açıyla yoluna devam eder. Dönüölçerin uygulanan kuvvete 90° lik açı ile eksen hareketine devam etmesi devinim(precession) hareketidir.



Şekil 3. 5 Dönüölçerin devinim hareketi[15]

Şekil 3.5'te dönüölçerin uzakta kalan kısmı pivot noktasıdır. Yerçekimi kuvveti dönüölçeri aşağıya çekmeye çalışmaktadır. Eğer dönüölçer rotoru ok yönünde dönerse, dönüölçer sola doğru hareket eder. Eğer rotor şekilde görünenin aksi yönde dönerse, dönüölçer sağa doğru hareket eder. Her iki durumda da hareket yönü uygulanan yerçekimi kuvvetine diktir. Eksen yatay konumunu korumaktadır ve dönüölçer yerçekimi kuvvetine pivot noktasından dönüş yaparak cevap vermektedir.

3.1 Rijitlik

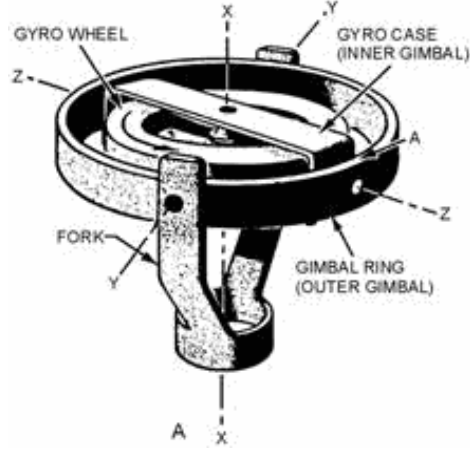
Rijitlik için dönüölçerin dönüşüne uygulanan harici kuvvete karşı direnme gücü de diyebiliriz. Çünkü bu güç sayesinde dönüölçer kendi eksenini muhafaza eder. Dönüölçerin rijitliğini etkileyen üç etken vardır; rotor ağırlığı, rotor ağırlığının bozulması ve rotor hızı.

Dönüölçer kapalı bir mekanik sistem olarak düşünülebilir. Sistem enerjisi uygulanan enerjiye eşittir. Bu nedenle dönüölçer rotorunu döndürmek için gerekli olan enerji rotorda açısal moment olarak bulunur. Açısal momentum rotor ağırlığı ve rotor dönüş hızı ile oluşur. Dönüölçerin rotor ağırlığı arttıkça döndürmek için gerekli tork daha fazla olacaktır ve rotorun açısal momentumu da daha büyük olacaktır. Aynı şekilde sahip, farklı

ağırlıkta ve aynı hızla dönen iki rotoru ele alacak olursak daha ağır olan rotor daha büyük açısal momentuma sahip olacağı için dönüş ekseninde daha rijit davranacaktır.

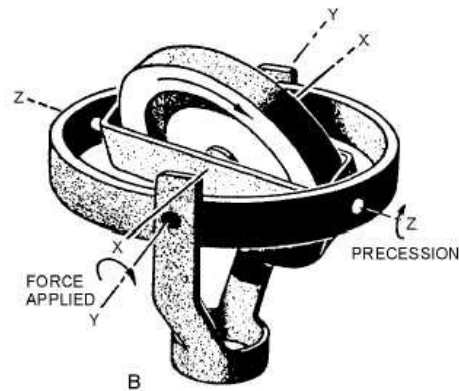
3.2 Devinim(Presesyon)

Elde edilen bilginin sağlıklı olması açısından dönüölçerin dönüş eksenini bazı referanslara bağlı olmalıdır. Genellikle referans olarak yeryüzü alınır. Bu işlem devinim ile sağlanır ve dönüölçer istenen eksenini gösterene kadar devinim yapar.



Şekil 3. 6 Dönüölçer hareketi[15]

Devinim hareketini göstermek için öncelikle yukarıdaki şekilde gösterilen dönüölçer parçalarını tanıtalım. Dönüölçer rotoru montelidir ve iç çemberde(inner gimbal) döner. İç çember dış çember(outer gimbal) ile bağlantılıdır ve dönüölçer Z ekseninde sallanabilir. Dış çember ise destek(fork) noktalarından dönebilir. Destek biriminin nasıl monte edildiği dikkate alınmadığında dönüölçer rotoru her hangi düzlemde serbestçe hareket edebilir. Bu nedenle bu yapıdaki dönüölçerlere serbest dönüölçerler denir.



Şekil 3. 7 Devinimin Dönüölçer üzerindeki etkisi[15]

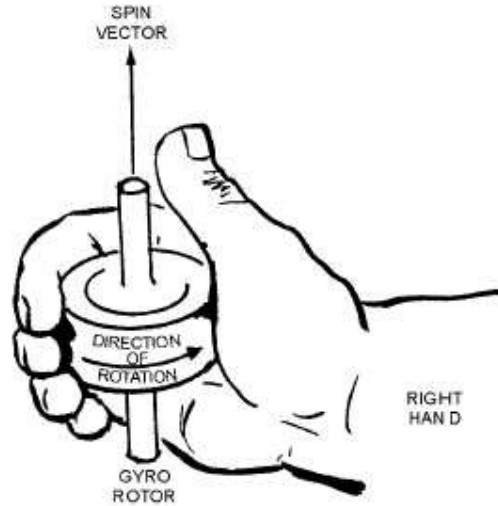
Devinimin etkisini göstermek için şekil 3-6'da dış çemberi A noktasında Z ekseninde ittirelim. Çemberin Y ekseninde dönmesini bekleyebilirsiniz. Buna karşılık iç çember şekil 3-7'de görüldüğü gibi Z ekseninde dönecektir.

Böylelikle daha önce bahsettiğimiz tanımı tüm dönüölçerler için genelleştirebiliriz. Rotor uygulanan kuvvete dik açıyla hareket eder. Eğer şekil 3-6'da A noktasına ittirmeye devam edersek, iç çember rotor dönme eksenini yatay konuma gelene kadar dönmeye devam edecektir. Bu andan sonra devinim olmayacaktır ve rotor uygulanan kuvvet ile aynı yönde dönecektir.

Devinimi etkileyen faktörler; ağırlık, şekil ve rotor hızıdır. Bu faktörler rijitliğe etkileyen faktörler ile aynıdır. Dolayısıyla rijitlik ile etkileyen kuvvetin oluşturacağı devinim hızı arasında ilişki vardır. Dönüölçerdeki yüksek rijitlik, devinim oluşmasını zorlaştırır ve etkileyen kuvvet sonunda daha az devinim olur.

Dönüölçer hareketi üç temel nicelik ile analiz edilebilir:

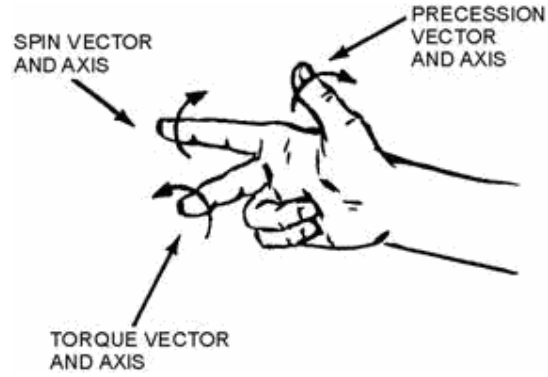
- SPİN (dönüölçer rotorunun açısal hızı)
- TORK (rotor ekseninin yönünü değiştirmek için uygulanan döner hareket)
- DEVİNİM (tork uygulandığında spin ekseninde oluşan açısal değişim)



Şekil 3. 8 Spin vektör yönü tespiti için sağ el kuralı[15]

Dönüölçerin hareketini tanımlayan nicelikler vektöre bağlıdır. Böylelikle nispi olarak yönlerini belirlemek kolaydır. Spin vektörü rotorun spin eksenini belirten yöndedir.

Tork vektörü uygulanan kuvvetin hissedildiği yönü gösterir. Devinim vektörü devinimin olduğu yönü gösterir. Yukarıdaki şekilde gösterildiği gibi spin vektörü yönü tespit edilebilir. Eğer iki vektörün yönü biliniyorsa sağ el kuralı ile üçüncü vektör yönü aşağıdaki gibi bulunabilir.



Şekil 3. 9 Devinim yönünü tespit etmek için sağ el kuralı[15]

DÖNÜÖLÇERİN DİNAMİK YAPISI

4.1 Momentumun ilkesi

Bir F kuvvetinin etkisinde bulunan bir m maddesel noktası göz önüne alalım. “Bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse, maddesel nokta, bileşke kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bu bileşke kuvvetin doğrultusunda bir ivme kazanır.” olarak tanımladığımız ve $F = ma$ olarak bildiğimiz Newton’un ikinci kanununda a yerine $a = dv/dt$ koyarsak[16]

$$F = m \, dv/dt \quad (4.1)$$

yazar veya m kütlesi sabit olduğundan

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (4.2)$$

elde ederiz. Buradaki mv vektörüne maddesel noktanın *doğrusal momentumu* veya sadece *momentumu* denir. Bu maddesel noktanın hızı ile aynı doğrultudadır ve şiddeti $kg\,san$ ile ölçülür;

$$mv = \frac{kg\,san^2}{m} \frac{m}{san} = kg - san \quad (4.3)$$

denklemini maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin maddesel noktanın momentumundaki değişim hızına eşit olduğunu ifade etmektedir.

4.1.1 Bir maddesel noktanın açıl momentumu

Bir *Oxyz* Newton karşılaştırma takımına göre harekette bulunan m kütleli bir P maddesel noktası göz önüne alalım. Yukarıda da bahsettiğimiz üzere maddesel noktanın herhangi bir andaki momentumu noktanın v hızı ile m kütlelerinin çarpımından elde edilen mv vektörü olarak tanımlanmaktadır. mv vektörünün O ya göre momentine maddesel noktanın o anda O' ya göre *momentumunun momenti* veya *açıl momentumu* adı verilir ve h_o ile gösterilir.

P nin yer vektörünü r ile göstererek

$$h_o = r \times mv \quad (4.4)$$

Yazarız ve h_o vektörünün r ile mv nin bulunduğu düzleme dik olduğunu görürüz; şiddeti ise r ile mv arasındaki açı ϕ olmak üzere

$$h_o = rmv \sin \phi \quad (4.5)$$

olur .

4.1.2 Açıl Momentumun Korunumu

Bir maddesel noktanın bir O noktasına göre açıl momentumunun değişim hızı, maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin O ya göre M_o momentine eşittir. t nin her değeri için M_o sıfır ise

$$M_o = \frac{dh_o}{dt} = 0 \quad (4.6)$$

Verir ve t 'ye göre integre edilerek

$$h_o = \text{sabit} \quad (4.7)$$

elde edilir. O halde *bir maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin O ya göre momenti t nin her değeri için sıfır ise maddesel noktanın O ya göre açıl momentumu korunur.*

Bir maddesel noktaya etkiyen kuvvetlerin bileşkesi sıfır olursa o maddesel noktanın sabit bir O noktasına göre açıl momentumu koruduğu açıktır. Fakat dengede olmayan bir F kuvvetinin etkisi altında bulunan bir maddesel noktanın açıl

momentumu, F kuvvetinin tesir çizgisi sabit bir O noktasından geçen bir merkezselsel kuvvet olması halinde de korunur.

h_o açısal momentumunu tanımından merkezselsel bir kuvvetin etkisinde hareket eden bir maddesel nokta için şunu yazabiliriz

$$h_o = r \times mv = \text{sabit} \quad (4.8)$$

Bu bağıntıdan şu sonuç çıkar; maddesel noktanın r yer vektörü, sabit h_o vektörüne dik olmak zorundadır. O halde merkezselsel bir kuvvet etkisinde olan bir maddesel nokta h_o ya dik olan sabit bir düzlemde hareket eder. h_o vektörü ile bu sabit düzlem maddesel noktanın başlangıçtaki r_0 yer vektörü ve başlangıçtaki v_0 hızı yardımıyla tanımlanır. Kolaylığı sağlamak için aşağıdaki çözümlemede şekil düzleminin sabit hareket düzlemi ile çakıştığını farz edeceğiz.

Yarıçap vektörü ile maddesel noktanın yörüngesinin teğeti arasındaki açıyı ϕ ile göstererek h_o açısal momentumunun şiddetinin sabit olduğunu yazalım:

$$h_o = r (mv \sin \phi) = \text{sabit} \quad (4.9)$$

$v \sin \phi$ nin, hızın radyale dik v_θ bileşenini gösterdiğine ve onun da $r d\theta/dt$ ye eşit olduğuna dikkat ederek

$$h_o = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{sabit} \quad (4.10)$$

yazabiliriz.

4.2 Rijit Sistemlerin Üç Boyutlu Kinetiği

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezinin sistemin bütün kütlesi bu noktada toplanmış ve tüm dış kuvvetler bu noktaya etkiyormuş gibi hareket etmektedir. Kütlesi m olan ve kütlesi Δm olan çok sayıda maddesel noktadan oluştuğu rijit bir cismin G kütle merkezinin $\bar{a}$ ivmesi

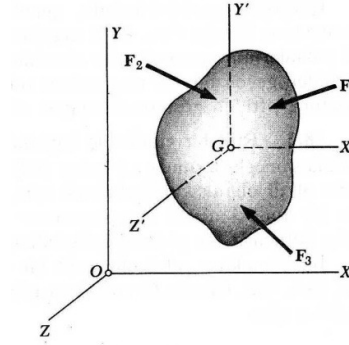
$$\sum F = m\bar{a} \quad (4.11)$$

ifadesiyle tanımlanır; burada $\sum F$ rijit cisim üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamını gösterir, $\bar{a}$ ise OXYZ Newton karşılaştırma takımına göre ölçülür.

Diğer taraftan dış kuvvetlerin momentleri ile maddesel noktalar sisteminin açısal momentumunun değişim hızı arasındaki bağıntı,

$$\sum M_o = \frac{dh_o}{dt} \quad (4.12)$$

şeklindedir; burada M_o rijit sistem üzerine etkiyen kuvvetlerin O ya göre momentlerinin toplamını, h_o ise cismin hareketi OXYZ Newton karşılaştırma takımından gözlendiğinde cismin O ya göre açısal momentumunu göstermektedir. Cisme etkiyen kuvvetlerin G kütle merkezine göre momentlerinin toplamı $\sum M_G$ ile ve hareketli GX'Y'Z' takımına göre gözlendiğinden cismin G'ye göre açısal momentumu



Şekil 4. 10 Rijit cisme etkiyen kuvvetler[16]

h_G' ile gösterilirse aşağıdaki eşitlik de yazılabilir:

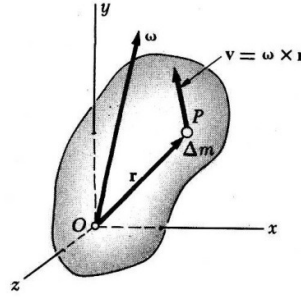
$$\sum M_G = \frac{dh_G'}{dt} \quad (4.13)$$

(4.11) ve (4.12) – veya (4.11) ve (4.13)- bağıntılarıyla tanımlanan altı skaler denklem, verilen kuvvetlerin ν mesnet reaksiyonlarının etkisi altında kalan rijit bir cismin hareketini belirlemek için kullanılır. Örneğin, bir O noktası sabit olan rijit bir cisim göz önüne alalım. Cismin herhangi bir andaki konumunu tanımlamak için üç açının verilmesi gereklidir. Bu açılar (4.12) ile tanımlanan üç diferansiyel denklemin integrasyonu ile belirlenebilir; O daki reaksiyonun üç bileşeni ise (4.11) e karşı gelen üç skaler denklemin çözümü ile elde edilebilir. Verilen kuvvetlerin etkisi altında uzayda serbestçe hareket eden rijit bir sistem için 4.11 ve 4.13 bağıntılarını kullanmak daha uygundur. (4.11) e karşı gelen üç skaler denklem cismin G kütle merkezinin hareketini

tanımlarken (4.13) e karşı gelen üç skaler denklem cismin G noktası etrafındaki hareketini tanımlar.

4.3 Rijit bir cismin üç boyuttaki açısal momentumu

Daha önce elde edilen (4.12) ve (4.13) denklemlerini daha etkili kullanabilmek için, rijit bir sistemin verilen bir andaki açısal momentumunu belirleme hususunda daha kullanışlı bir yöntem belirlenmelidir.



Şekil 4. 11 O noktası sabit olan rijit cisim[16]

Bir O noktası sabit olan rijit bir cisim göz önüne alalım (Şek 4.2). Cismin O noktasına göre açısal momentumu

$$h_o = \sum [r \times (\Delta m)v] \quad (4.14)$$

dir; burada r ve v sırasıyla kütlesi Δm olan P maddesel noktasının yer vektörünü ve hızını gösterir. Fakat $v = \omega \times r$ olup burada ω cismin o andaki açısal hızıdır. Bu değer (4.14) de yerine konursa

$$h_o = \sum [r \times (\omega \times r)\Delta m] \quad (4.15)$$

elde edilir. Daha sonra açısal momentumun x bileşeni için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\begin{aligned} h_x &= \sum [y(\omega_z r_z - \omega_y r_y) - z(\omega_y r_z - \omega_z r_y)] \Delta m \\ &= \sum [y(\omega_z y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_y z)] \Delta m \\ &= \omega_z \sum (y^2 + z^2) \Delta m - (\omega_y \sum xy \Delta m) - (\omega_z \sum xz \Delta m) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Bu ifadedeki toplamalar, integrallerle değiştirilir ve

$$\begin{aligned}
h_x &= w_x \int (y^2 + z^2) dm - (w_y \int xy dm) - w_z \int xz dm \\
h_y &= -w_x \int yx dm + (w_y \int (z^2 + x^2) dm) - w_z \int yz dm \\
h_z &= -w_x \int zx dm - (w_y \int zy dm) - w_z \int (x^2 + y^2) dm
\end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Karesel terimleri kapsayan integraller cismin sırasıyla x,y ve z eksenlerine göre *kütlesel atalet momentini* gösterir:

$$\begin{aligned}
I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\
I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\
I_z &= \int (x^2 + y^2) dm
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Koordinatları çarpımını kapsayan integraller için ise aşağıdaki *kütlesel çarpım atalet momenti* tanımlaması yapılır:

$$\begin{aligned}
P_{xy} &= \int xy dm & P_{yz} &= \int yz dm & P_{zx} &= \int zx dm \\
P_{yx} &= \int yx dm & P_{zy} &= \int zy dm & P_{xz} &= \int xz dm
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Burada $P_{xy}=P_{yx}$, $P_{yz}=P_{zy}$ ve $P_{zx}=P_{xz}$ olduğu açıktır. Bu (4.18) ve (4.19) tanımlamaları (4.17)de yerlerine konulacak olursa, cismin O noktasına göre h_o açılal momentumunun bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
h_x &= I_x w_x - P_{xy} w_y - P_{xz} w_z \\
h_y &= -P_{yx} w_x + I_y w_y - P_{yz} w_z \\
h_z &= -P_{zx} w_x - P_{zy} w_y + I_z w_z
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Cismin kütle merkezine göre h'_G açılal momentumunun bileşenleri için, ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momentlerini kapsayan benzer bağıntılar elde edilir.

(4.20) bağıntıları w vektörünü h_o vektörüne dönüştüren işlemin, atalet momentlerinin meydana getirdiği aşağıdaki bağıntı ile tanımlandığını gösterir:

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{yx} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{zx} & -P_{zy} & I_z \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

(4.21) matrisi cismin O noktasına göre atalet tansörü adını alır. Farklı bir eksen takımı kullanılacak olursa yeni bir atalet ve çarpım atalet momentleri matrisi bulunur. Bununla birlikte bu yeni matris ile tanımlanan dönüşüm aynı kalmalıdır. Çünkü verilen bir w açısal hızına karşı gelen h_o açısal momentumu, koordinat eksenlerin seçiminden bağımsızdır. Asal atalet eksenleri adı verilen ve cismin bunlara göre çarpım atalet momentlerinin sıfır olmasını sağlayan bir $Ox'y'z'$ eksen takımı bulmak her zaman mümkündür. Bu durumda (4.21) matrisi köşegen bir şekle gelir:

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Burada $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ cismin asal atalet momentlerini gösterir ve (4.20) bağıntıları şu şekle girer:

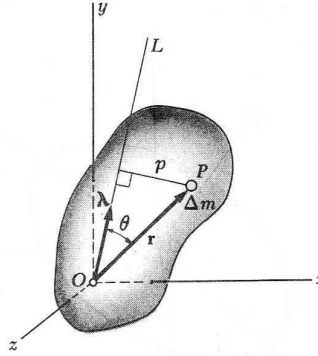
$$h_{x'} = I_{x'} w_{x'} \quad h_{y'} = I_{y'} w_{y'} \quad h_{z'} = I_{z'} w_{z'} \quad (4.23)$$

Şuna işaret edelim ki $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ asal atalet momentleri eşitse, O noktasına göre açısal momentumunun $h_{x'}$, $h_{y'}$, $h_{z'}$ bileşenleri, açısal hızın $w_{x'}$, $w_{y'}$, $w_{z'}$ bileşenleri ile orantılı olur ve h_o vektörü ile w vektörü aynı doğru üzerine düşer. Bununla birlikte w 'nin koordinat eksenlerinden biri doğrultusunda olması hali dışında genellikle, asal atalet momentleri farklı olduğundan h_o ile w da *farklı doğrultuda olacaktır*. Buna göre *rijit bir cismin h_o açısal momentumu ile w açısal hızı ancak ve ancak w nın asal atalet eksenlerinden birine paralel olması halinde aynı doğrultuda olurlar*. $I_{x'} = I_{y'} = I_{z'}$ özel halinde O dan geçen her doğru asal atalet eksenini olarak göz önüne alınabilir ve h_o ile w vektörleri her zaman bir doğru üzerinde bulunur. Bu şart, karşılaştırma düzlemine göre simetrik bir cismin düzlemsel hareket yapması halinde gerçekleştiğinden böyle bir cismin h_o açısal momentumu I_w vektörü

gösterilebilmiştir. Bununla birlikte bu sonucun karşılaştırma düzlemine göre simetrik olmayan bir cismin düzlemsel hareketine veya rijit bir cismin üç boyutlu hareketine uygulanamayacağı hususu gözden uzak tutulmalıdır. w nın asal atalet eksenlerinden bir doğrultusunda olması halinin dışında , rijit bir cismin açısal momentumu ile açısal hızı farklı doğrultulardadır ve h_o ın w dan belirtilmesi için (4.20) veya (4.23) bağıntısı bulunmalıdır.

4.4 Atalet Elipsoidi

w nın h_o ya dönüşümünü sağlayan (4.21) atalet tansörünün özelliklerini daha iyi kavrayabilmek amacıyla şekil 4.2deki cismin OL eksenine göre I_{OL} atalet momentini tanımlayalım. OL doğrultusundaki birim vektör λ ve cismin P maddesel noktasının yer vektörü r ile gösterilsin (Şek.4.3).



Şekil 4. 12 Rijit cisim[16]

P den OL ye indirilen dikmenin p boyu, $\lambda \times r$ vektörel çarpımının $r \sin \theta$ şiddetine eşittir. Maddesel noktanın kütlesi Δm ile gösterilirse

$$I_{OL} = \sum p^2 \Delta m = \sum (\lambda \times r)^2 \Delta m \quad (4.24)$$

yazılır. Vektörel çarpımın karesini, dik bileşenleri cinsinden yazarak toplam işareti integral ile değiştirilirse

$$\begin{aligned} I_{OL} = \int \left[(\lambda_z y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2 \right] dm &= \lambda_z^2 \int (y^2 + z^2) dm + \\ \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2\lambda_z \lambda_y \int xy dm - 2\lambda_y \lambda_z \int yz dm - \\ 2\lambda_z \lambda_x \int zx dm \end{aligned} \quad (4.25)$$

veya (4.18) ve (4.19) bağıntıları göz önünde tutularak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2P_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2P_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2P_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (4.26)$$

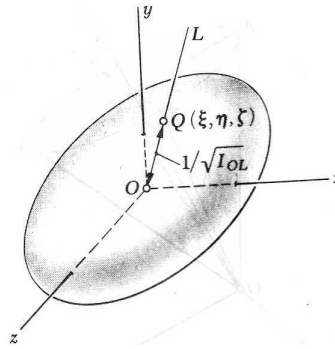
Şimdi cismin atalet momentinin sabit O noktasından geçen çok sayıda OL eksenlerine göre belirlendiğini kabul edelim ve her OL ekseninde O dan $OQ = I/\sqrt{I_{OL}}$ uzaklığında ölçülen bir Q noktası işaret edelim. Bu Q noktalarının geometrik yeri bir yüzey tanımlar (Şekil. 8.5) Bu yüzeyin denklemi (4.26) de I_{OL} yerine $1/(OQ)^2$ koyarak ve eşitliğin her iki tarafını $(OQ)^2$ ile çarparak elde edilir. Q noktasının dik koordinatları ξ, η, ζ ile gösterilirse,

$$(OQ)\lambda_x = \xi \quad (OQ)\lambda_y = \eta \quad (OQ)\lambda_z = \zeta$$

olduğu düşünülerek,

$$I_x \xi^2 + I_y \eta^2 + I_z \zeta^2 - 2P_{xy} \xi \eta - 2P_{yz} \eta \zeta - 2P_{zx} \zeta \xi = 1 \quad (4.27)$$

yazılır. Bu denklem *ikinci mertebeden bir yüzey* denklemdir. Her OL ekseninde için hesaplanan I_{OL} atalet momenti sıfırdan farklı olduğundan O dan uzaklığı sonsuz olan bir Q noktası bulunmaz. Buna göre bu yüzey bir *elipsoit* gösterir. Cismin O dan geçen her eksene göre atalet momentini belirleyen bu elipsoide cismin O daki *atalet elipsoidi* adı verilir.



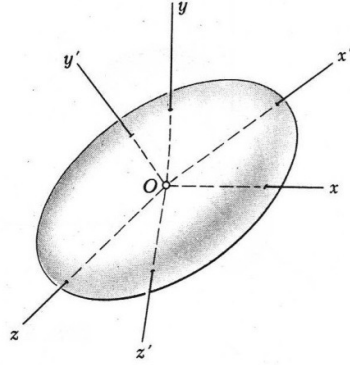
Şekil 4. 13 Atalet elipsoidi[16]

(4.27) denklemi ile (4.21) matrisi karşılaştırılırsa, verilen bir cismin O noktasındaki atalet elipsoidi ile atalet tansörünün aynı katsayılarla tanımlandığı görülür. Buna göre, bir vektörü göstermek için nasıl bir ok kullanılırsa, atalet tansörünü ve w nın h_O ya

dönüşümünü göstermek için de atalet elipsoidi kullanılabilir. Şuna işaret edelim ki, şekil 4.4 de eksenler dönecek olursa; *bileşenleri* dönüşürken vektörü gösteren okun sabit kalması gibi *elipsoidi tanımlayan denklemin katsayıları değişir, fakat elipsoidin kendisi değişmeden kalır*. Atalet elipsoidinin asal eksenleri ile çakışan bir x', y', z' eksen takımı seçilirse elipsoit denklemi

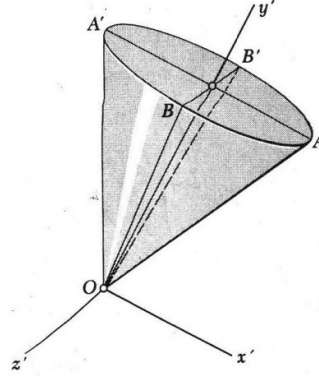
$$I_{x'}\xi'^2 + I_{y'}\eta'^2 + I_{z'}\zeta'^2 = 1 \quad (4.28)$$

olur ve bu denklemde artık çarpım atalet momentleri bulunmaz. Böylece şunu göstermiş oluyoruz ki, cismin şekli ve göz önüne alınan O noktası asıl olursa olsun cismin çarpım atalet momentlerinin sıfır olduğu eksen takımı bulmak her zaman mümkün olur. Bu durumda atalet tansörü (4.22) matrisi ile belirlenir ve w yı $h_O a$ dönüştüren bağıntılar (4.23) formunu alır.



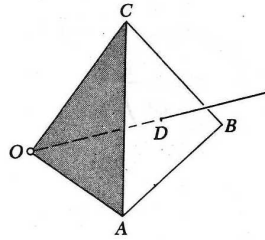
Şekil 4. 14 Atalet elipsoidinin asal eksenleri ile çakışma durumu[16]

x', y', z' eksenleri cismin O daki asal atalet eksenleri ve $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ ise cismin O daki asal atalet momentleri olurlar. Atalet elipsoidinin çizilişi hatırlanırsa, üç asal atalet momentinin, cismin O dan geçen herhangi bir eksene göre hesaplanan atalet momentleri içerisinde en büyük ve en küçük atalet momentleri olduğu görülür.



Şekil 4. 15 Eliptik tabanlı homojen koni[16]

Keyfi formda olan bir cismin asal atalet eksenlerinin belirlenmesi, üçüncü dereceden bir denklemin çözümünü gerektirdiği halde, bu eksenlerin hemen görülebileceği birçok haller vardır. Örneğin şekil 4.6 da görüldüğü gibi eliptik tabanlı homojen bir koni ele alalım. Bu konide OAA' ve OBB' gibi birbirine dik iki simetri düzlemi bulunur. (4.19) tanımlamasından gerçekleştirilebileceği gibi $x' y'$ ve $y' z'$ düzlemleri, bu iki simetri düzlemiyle çakışacak şekilde seçilirse bütün çarpım atalet momentleri sıfır olur. Bu sebeple böyle alınan x', y', z' eksenleri, cismin O noktasından geçen asal atalet eksenleri olur ve açısal hızı biliniyorsa, (4.23) bağıntıları kullanılarak koninin O ya göre açısal momentumu bulunur. Şekil 4.7 de görüldüğü gibi homojen ve düzgün bir $OABC$ dört yüzlüsü söz konusu olursa O tepesini karşısındaki yüzün D merkezine birleştiren doğru ile O dan geçen ve bu OD doğrusuna O da dik olan her eksen, O daki asal atalet eksenleri olur. Eğer, O etrafında 120 derecelik bir dönme sonunda dört yüzünün şekli ve kütle dağılımının değişmediği düşünülürse bu özellik anlaşılır. Bunun sonucu olarak O daki atalet elipsoidi de bu dönme sonunda değişmeden kalır. Bu nedenle elipsoit OD etrafında döneldir. OD doğrusu ile buna O da dik olan her doğru elipsoidin bir asal eksen olmak zorundadır.

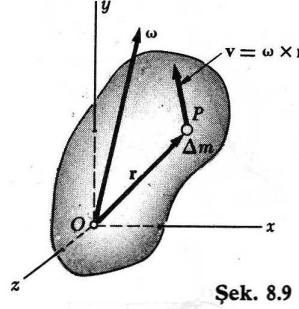


Şekil 4. 16 $OABC$ Dört yüzlüsü[16]

4.5 Rijit bir cismin üç boyuttaki kinetik enerjisi

O noktası sabit olan rijit bir cisim göz önüne alalım (şek 4.8). Verilen bir anda cismin açısal hızını w ve kütlesi Δm olan bir P maddesel noktasının yer vektörünü r ile gösterelim. P noktasının v hızının, $v = w \times r$ vektörünün şiddetine eşit olduğu bilinmektedir. Buna göre, cismin bu andaki kinetik enerjisi aşağıdaki ifade ile belirlenir:

$$T = \frac{1}{2} \sum (\Delta m) v^2 = \frac{1}{2} \sum (w \times r)^2 \Delta m \quad (4.29)$$



Şekil 4. 17 Rijit cisim[16]

Bir önceki kısımda , (4.26) ifadesinin (4.24) den çıkarılmasında yapılmış olanlara benzer işlemler sonunda şu temel bağıntı elde edilir:

$$T = \frac{1}{2} (I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2 - 2P_{xy} w_x w_y - 2P_{yz} w_y w_z - 2P_{zx} w_z w_x) \quad (4.30)$$

Eğer cismin x' , y' , z' asal atalet eksenleri, koordinat eksenleri olarak seçilirse yukardaki bağıntı aşağıdaki şekli alır:

$$T = \frac{1}{2} (I_{x'} w_{x'}^2 + I_{y'} w_{y'}^2 + I_{z'} w_{z'}^2) \quad (4.31)$$

Rijit bir cismin genel bir hareketi söz konusu olursa, cismin ağırlık merkezinden geçen bir karşılaştırma takımına göre kinetik enerjisini belirlemek için (4.30) veya (4.31) bağıntısı kullanılabilir. Cismin genel bir hareketindeki kinetik enerji aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} (\bar{I}_{x'} w_{x'}^2 + \bar{I}_{y'} w_{y'}^2 + \bar{I}_{z'} w_{z'}^2) \quad (4.32)$$

Burada

$\bar{v}$ = kütle merkezinin hızı

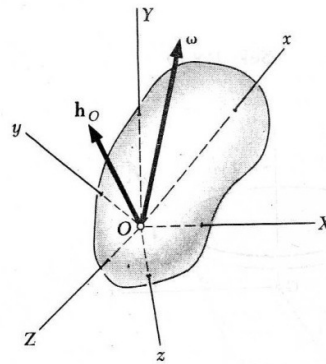
w = açısal hız

m = rijit cismin kütlesi

$\overline{I_{x'}}, \overline{I_{y'}}, \overline{I_{z'}}$ = ağırlık merkezine göre asal atalet momentleridir.

4.6 Rijit Bir Cismin Kendi Kütle Merkezi Etrafındaki Hareket Denklemleri

(4.3) temel denklemlerine dönecek olursak orada rijit cismin hareketinin ve dolayısıyla w açısal hızının, bir Newton veya sabit karşılaştırma takımına göre tanımlanması gerektiği görülür. Buna göre h_O tanımlayan (4.20) bağıntılarını yazarken w nın sabit x, y ve z eksenleri doğrultusundaki bileşenlerini kullanmak doğal görünmektedir. Fakat cisim döndüğünden, tüm atalet momentleri sürekli olarak değişir ve bunların değerlerini zamanın bir fonksiyonu olarak belirlemek gereklidir. Bu nedenle x, y ve z eksenlerini cisme bağlamak ve böylece tüm atalet momentlerinin değerlerinin hareket süresince, sabit kalmasını sağlamak daha uygun olur (Şek. 4.9). Daha önce gösterildiği gibi, w nın h_O dönüşümü koordinat eksenlerinin seçiminden bağımsız olduğundan bunu yapmakta sakınca yoktur. Ancak w açısal hız vektörü, yine sabit bir $OXYZ$ takımına göre tanımlanmalıdır; ondan sonra w vektörü, dönen x, y ve z eksenleri doğrultusunda bileşenlerine ayrılabilir. (4.20) bağıntısı uygulayarak, h_O vektörünün dönen eksenler doğrultusundaki bileşenleri bulunur. h_O vektörü aynı zamanda cismin sabit $OXYZ$ takımına göre yaptığı harekette, O ya göre açısal momentumunu gösterir.



Şekil 4. 18 Rijit cisim[16]

Açısal momentumun (4.20) deki bileşenlerini t ye göre türetirsek h_O vektörünün, dönen $Oxyz$ takımına göre $\frac{\delta h_O}{\delta t}$ değişim hızını tanımlamış oluruz:

$$\frac{\delta h_O}{\delta t} = \frac{\delta h_x}{\delta t} i + \frac{\delta h_y}{\delta t} j + \frac{\delta h_z}{\delta t} k \quad (4.33)$$

Burada i, j, k lar, dönen eksenler doğrultusundaki birim vektörlerdir. h_O vektörünün sabit $OXYZ$ takımına göre değişme hızı $\frac{\delta h_O}{\delta t}$ ye $\Omega \times h_O$ vektörel çarpımını eklemekle bulunur; burada Ω dönen takımın açısal hızını gösterir. (4.12) yi şu şekilde tekrar yazalım

$$\sum M_O = \frac{\delta h_O}{\delta t} + \Omega \times h_O \quad (4.34)$$

Burada

$\sum M_O$ = rijit cisme etkiyen kuvvetlerin O ya göre momentlerinin toplamı

h_O = cismin, sabit $OXYZ$ takımına göre açısal momentumu

$\frac{\delta h_O}{\delta t} = h_O$ in, dönen $Oxyz$ takımına göre , (4.20) ve (4.33) den hesaplanan değişme hızı

Ω = dönen takımın açısal hızı

Daha önceki incelemelerde kabul edildiği gibi, dönen $Oxyz$ takımı cisme bağlanmışsa, bunun Ω açısal hızı cismin w açısal hızına özdeş olarak eşittir. Bununla birlikte, genellikle, cisme bağlı olmayan ancak cismin tüm atalet momentleri sabit kalacak şekilde dönen bir karşılaştırma takımını kullanmanın daha elverişli olduğu çeşitli uygulamalar mevcuttur. Bu gibi hallerde dönen takımın Ω açısal hızı ile cismin w açısal hızı birbirlerinden farklı olur.

(4.34) bağıntısı üç skaler denkleme eşdeğer olup bunlar, bir noktası sabit bir cismin hareketini veya verilen bir hareketi oluşturmak için cisme etkisi gerekli kuvvetleri belirlemek için kullanılır. (4.4) den başlayıp benzer bir yol izleyerek

$$\sum M_G = \frac{\delta h'_G}{\delta t} + \Omega \times h'_G \quad (4.35)$$

bağıntısı çıkarılır; bu bağıntı rijit bir cismin kendi ağırlık merkezi etrafındaki hareketini belirlemekte kullanılır.

Eğer x, y ve z eksenleri, cismi asal atalet eksenleriyle çakışacak şekilde seçilirse, h_0 açısal momentumunun bileşenlerini belirtmekte, basitleştirilmiş olan (4.23) bağıntıları kullanılır. İndislerdeki üsler atılacak olursa

$$h_0 = I_x w_x i + I_y w_y j + I_z w_z k \quad (4.36)$$

yazılır. Burada I_x, I_y, I_z cismin asal atalet momentlerini gösterir. (4.36) deki h_0 değeri (4.34) de yerine konulur ve $\Omega = w$ alınırsa, üç skaler denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum M_x &= I_x \dot{w}_x - (I_y - I_z) w_y w_z \\ \sum M_y &= I_y \dot{w}_y - (I_z - I_x) w_z w_x \\ \sum M_z &= I_z \dot{w}_z - (I_x - I_y) w_x w_y \end{aligned} \quad (4.37)$$

İsviçreli Matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) e izafeten Euler hareket denklemleri adını alan bu denklemler, rijit bir cismin sabit bir nokta etrafındaki hareketini çözümlenmekte kullanılır. Cismin kendi kütle merkezi etrafındaki hareketi için benzer denklemler çıkarılabilir. Bununla birlikte, ileriki kısımlarda (4.37) denklemleri yerine, daha genel, toplu ve vektörel bir formda olması ve daha kolay hatırlanması bakımından, (4.34) denkleminin kullanılması tercih edilecektir.

4.7 Bir Dönüölçerin Hareketi Euler Açıları

Bir dönüölçer aslında, geometrik ekseni etrafında serbestçe dönen bir rotordan oluşur. Kardan türü bir askı düzeni kurulursa (şekil 4.10) bir dönüölçer her doğrultuyu alabilir, fakat kütle merkezi uzayda sabit kalır. Verilen bir anda dönüölçerin konumunu tanımlamak için sabit bir $OXYZ$ karşılaştırma takımı seçeceğiz; takımın Z ekseni dış çemberin A ve A' yataklarının belirlediği doğrultu olarak alınacaktır. Dönüölçer için karşılaştırma konumu olarak da iki çember ile rotor üzerindeki bir DD' çapının belirlediği sabit bir YZ düzlemini göz önüne alacağız (Şekil 4.10a). Dönüölçer bu karşılaştırma konumundan, keyfi her konuma (Şekil 4.10b) aşağıdaki adımlarla getirilebilir

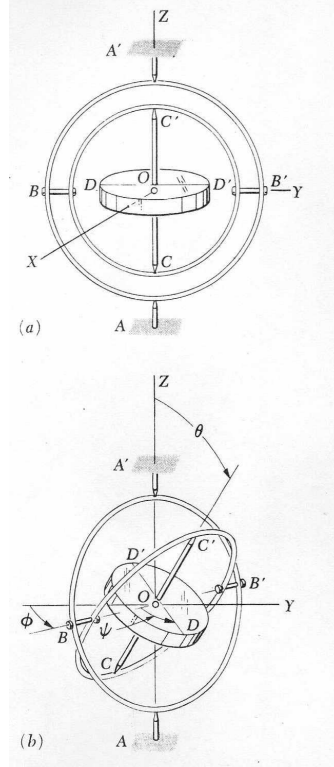
1) Dış çember AA' ekseninde ϕ kadar döner,

2) iç çember BB' etrafında θ kadar döner

3) Rotor CC' etrafında ψ kadar döner.

ϕ , θ ve ψ Euler açıları adı verilir; bunlar bir dönüölçerin verilen her andaki konumunu tam olarak tanımlar. Bunların $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ ve $\dot{\psi}$ türevleri dönüölçerin söz konusu anda sırasıyla, devinim (presesyon) hızı, nütasyon hızı ve spin (dönme) hızı adını alır.

Dönüölçerin açısal hızının ve açısal momentumunun bileşenlerini hesaplamak için, y eksenine BB' ve z eksenine CC' doğrultusunda olan ve iç çembere bağlı olarak dönen bir $Oxyz$ eksen takımını kullanacağız. Bu eksenler dönüölçerin asal atalet eksenleridir. Fakat dönüölçerin devinim ve nütasyon hareketlerini izledikleri halde spin yapamazlar. Bu nedenle, dönüölçere bağlı bir eksen takımı yerine, bunları kullanmak daha elverişlidir. Şimdi dönüölçerin sabit $OXYZ$ karşılaştırma takımına göre w açısal hızını, sırasıyla dönüölçerin devinim, nütasyon ve dönmesini gösteren üç kısmi açısal hızın toplamı olarak ifade edeceğiz.



Şekil 4. 19 Dönüölçer ve Euler açıları[16]

Dönen eksenler doğrultusundaki birim vektörleri i, j, k ve sabit Z eksen doğrultusundaki birim vektörü K ile gösterirsek

$$w = \dot{\phi}K + \dot{\theta}j + \psi k \quad (4.38)$$

yazılır. w için elde edilmiş olan vektör bileşenleri ortogonal olmadıklarından K birim vektörünü x ve z eksenleri doğrultusunda bileşenlere ayıracağız

$$K = -\sin \theta i + \cos \theta k \quad (4.39)$$

K' 'nin bu değerini yukarıda yerine koyarsak

$$w = -\sin \theta i + \dot{\theta}j + (\psi + \dot{\phi}\cos\theta)k \quad (4.40)$$

buluruz. Koordinat eksenleri asal atalet eksenleri olduğundan h_o açısal momentumunun bileşenleri, w nın bileşenlerinin sırasıyla rotorun x, y ve z eksenlerine göre atalet momentleri ile çarparak elde edilebilir. Rotorun dönme eksenine göre atalet momenti I ve O dan geçen enine bir eksene göre atalet momenti I' ile gösterilir ve çemberlerin kütlesi ihmal edilirse aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$h_o = -I' \dot{\phi}\sin\theta i + I' \dot{\theta}j + I(\psi + \dot{\phi}\cos\theta)k \quad (4.41)$$

Hareketli eksenlerin iç çembere bağlandıkları ve bu nedenle spin yapmadıkları hatırlanırsa, bunların açısal hızları

$$\Omega = \dot{\phi}K + \dot{\theta}j \quad (4.42)$$

Toplamı ile veya K nın yukarıda belirttiğimiz değerini kullanarak

$$\Omega = -\dot{\phi}\sin\theta i + \dot{\theta}j + \dot{\phi}\cos\theta k \quad (4.43)$$

Şeklinde yazılabilir. h_o ve Ω nın bulduğumuz değerleri

$$\sum M_O = \frac{\delta h_o}{\delta t} + \Omega \times h_o \quad (4.34)$$

Temel denklemine yerine konularak aşağıdaki üç diferansiyel denklem elde edilir:

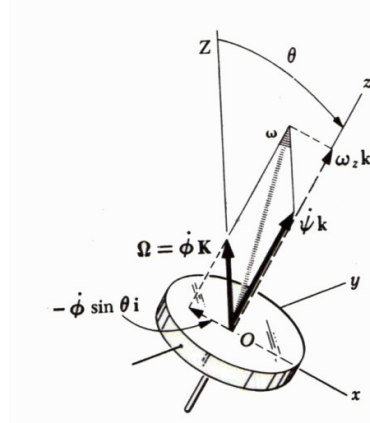
$$\begin{aligned} \sum M_x &= -I'(\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta) + I\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \sum M_y &= -I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin\theta + \cos\theta) + I\dot{\theta}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \sum M_z &= I\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Denklemleri verilen bir kuvvetler sisteminin etkisi altında bulunan ve çemberlerinin kütlesi ihmal edilen bir dönüölçerin hareketini tanımlar. Bunlar aynı zamanda eksenel simetrik bir cismin(veya dönel cisim)simetri ekseninde tespit edilen bir nokta etrafındaki hareketini veya eksenel simetrik cismin kütle merkezi etrafındaki hareketini tanımlamakta da kullanılır. Yukarda Euler açılarını anlamakta dönüölçer çemberlerinden yararlanmışsak da bu açıların, herhangi bir rijit cismin konumunu, mesnetleme şekline bağlı olarak, cismin bir noktasına bağlı bir koordinat takımına göre tanımlamakta kullanılabileceği açıktır.

(4.44) denklemleri lineer olmadıklarından ϕ , θ ve ψ Euler açılarını t zamanının analitik fonksiyonları olarak ifade etmek genellikle mümkün olmaz ve sayısal çözüm yöntemleri kullanılması gerekir.

4.8 Bir Dönüölçerin Devamlı Devinimi

Bu kısımda θ açısının, $\dot{\phi}$ devinim hızının ve $\dot{\psi}$ dönme hızının sabit kaldığı, özel bir dönüölçer hareketini ele alacağız. Bir dönüölçerin devamlı devinimi adı verilen bu hareketin değişmemesini sağlamak için dönüölçere uygulanması gereken kuvvetleri belirlemeye çalışacağız.



Şekil 4. 20 Dönüölçer ve dönen karşılaştırma takımı[16]

Üçlü denklemleri kullanacak yerde dönüölçerin göz önüne alınmış olan bu özel haldeki açısal momentumunun değişim hızını hesaplayarak gerekli kuvvetlerin momentlerinin toplamını belirleyeceğiz. Önce şuna işaret edelim ki, dönüölçerin w açısal hızı, h_o açısal

momentumu ve dönen karşılaştırma takımının (Şek 4.11) Ω açısal hızı sırasıyla aşağıdaki ifadelerle indirgenir:

$$w = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + w_z \mathbf{k} \quad (4.45)$$

$$h_o = -I' \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + I w_z \mathbf{k} \quad (4.46)$$

$$\Omega = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (4.47)$$

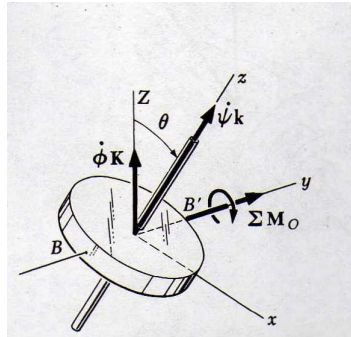
Burada $w_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ dönüölçerin toplam açısal hızının, spin eksenine doğrultusundaki bileşenleri $\theta, \dot{\phi}$ ve $\dot{\psi}$ sabit olduklarından, h_o vektörünün dönen karşılaştırma takımına göre şiddeti ve doğrultusu sabittir ve bunun bu takıma göre $\frac{\delta h_o}{\delta t}$ değişim hızı sıfır olur. Bu durumda temel denklemi şu şekle iner:

$$\Sigma M_o = \Omega \times h_o \quad (4.48)$$

Ve M_o, h_o eşitliklerden

$$\Sigma M_o = (I w_z - I' \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j} \quad (4.49)$$

Dönüölçerin kütle merkezi uzayda sabit olduğundan, (4.11) yardımıyla $\Sigma F = 0$ bulunur; böylece, dönüölçerin deviniminin devamlılığını sağlamak için ona uygulanması zorunlu olan kuvvetler, yukarıdaki denklemin sağ tarafına eşit olan bir kuvvet çiftine indirgenmiş olur. Şuna işaret etmeliyiz ki, bu kuvvet çifti, dönüölçerin devinim eksenine ve spin eksenine dik bir eksen etrafında uygulanmalıdır (Şek 4.12).



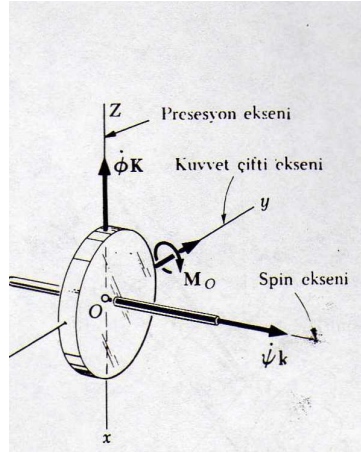
Şekil 4. 21Dönüölçer devinim eksenine [16]

Devinim eksenini ile dönme ekseninin birbirine dik olduğu özel halde, $\theta=90^\circ$ olur ve yukarıdaki denklem

$$\sum M_o = I\dot{\psi}\dot{\phi}j \quad (4.50)$$

şeklini alır. Buna göre eğer dönüölçere, bunun dönen eksenine dik bir eksen etrafında etkiyen bir M_o kuvvet çifti uygularsak dönüölçer, dönme eksenini ile kuvvet çifti eksenine dik bir eksen etrafında devinim hareketi yapar. Bu hareketin yönü, dönmeyi, kuvvet çiftini ve devinimi gösteren vektörler bir sağ takımı teşkil edecek şekilde belirlenir (Şekil 4.13)

Dönüölçerlerin eksenlerinin doğrultularını değiştirebilmek için oldukça büyük kuvvet çiftleri gerektiğinden, bunlar torpil ve gemilerin dengelenmesinde kullanılır. Döner mermiler ve güller bu dönüölçerlerin etkisi nedeniyle yörüngelerine teğet kalır. Bir bisiklette yüksek hızlarda dengeyi korumak döner tekerleklerin dengeleme etkisinden dolayı daha kolaydır.

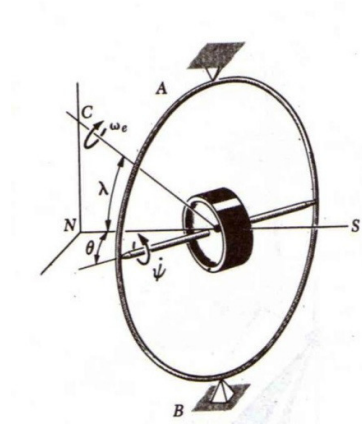


Şekil 4. 22 Devinim ve spin etkisi[16]

Bununla birlikte dönüölçer etkisi her zaman iyi karşılanmaz ve zorlanmış devinime maruz kalan dönel şaftların mesnet ve yataklarının tertibinde göz önüne alınması zorunludur. Uçuş doğrultusunu değiştirmekte olan bir uçağa, pervanelerinden gelen reaksiyonlar da göz önünde tutulmalı ve bunlar mümkün mertebede dengelenmelidir.

4.9 Dönüölçerin Kuzey Yönünü Bulması

Dönüölçerin en bilindik özelliği olan Kuzey-Güney hattını göstermesidir. Bu kısımda bu özelliğini göstereceğiz.



Şekil 4. 23 Dönüölçerli pusulanın esas yapısı[16]

Bir dönüölçerli pusulanın esas yapısı şekil 4.14'de görülmektedir. Rotoru tek çembere bağlı bir eksen etrafında $\dot{\psi}$ hızı ile dönerken çember de düşey AB eksen etrafında serbestçe dönmektedir. Rotor ekseninin boylam düzlemi ile yaptığı açı Θ ve yer küresi üzerindeki konumunun enlem açısı λ ile gösteriliyor. OC doğrultusunun dünya eksenine paralel olduğu ve dünyanın kendi eksen etrafındaki açısal hızının w_e olduğu biliniyor

(a) Öncelikle bu dönüölçerli pusulanın hareket denklemlerinin

$$I'\ddot{\Theta} + I w_z w_e \cos \lambda \sin \Theta - I' w_e^2 \cos^2 \lambda \sin \Theta \cos \Theta = 0 \quad (4.51)$$

$$I \dot{w}_z = 0 \quad (4.52)$$

olduğunu göstereceğiz. Burada w_z toplam açısal hızın rotor eksen doğrultusundaki bileşenini, I ve I' ise sırasıyla rotorun kendi simetri eksenine ve O dan geçen enine bir eksene göre atalet momentlerini, göstermektedir.

(b) Daha sonra w_e^2 li terimleri ihmal ederek, Θ nın küçük değerleri için

$$\ddot{\Theta} + \frac{I w_z w_e \cos \lambda}{I'} \Theta = 0 \quad (4.53)$$

olacağını ve dönüölçerli-pusulanın ekseninin, kuzey-güney doğrultusunda bir salınım yapacağını göstereceğiz.

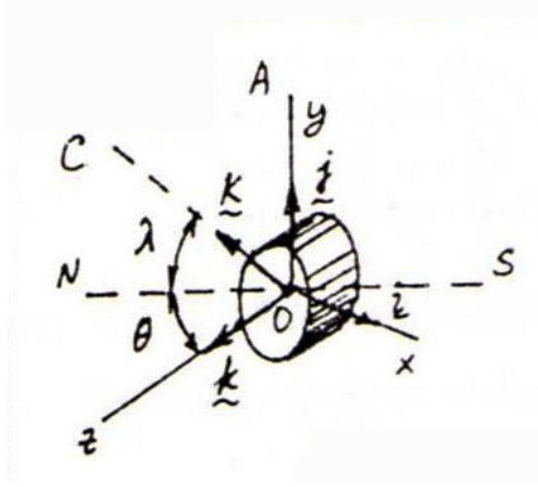
Çembere bağlanmış bir $Oxyz$ karşılaştırma çerçevesi seçelim. y eksenini OA düşeyi üzerinde, z eksenini rotor eksenini üzerinde olsun. Bu çerçevenin bir Newton karşılaştırma çerçevesine göre açısal hızı

$$\Omega = w_e K + \dot{\Theta} j \quad (4.54)$$

dir;

K dünya eksenini boyunca birim vektördür. K 'yı xyz eksenleri boyunca bileşenlere ayıralım,

$$K = -\cos \lambda \sin \Theta i + \sin \lambda j + \cos \lambda \cos \Theta k \quad (4.55)$$



Şekil 4. 24 Dönüölçerli pusulanın esas yapısı[16]

yerine koyarak

$$\Omega = -w_e \cos \lambda \sin \Theta i + (\dot{\Theta} + w_e \sin \lambda) j + w_e \cos \lambda \cos \Theta k \quad (4.56)$$

Rotorun açısal hızı, Ω ya $\dot{\psi} k$ spinini ekleyerek elde edilir.

$$w_z = \dot{\psi} + w_e \cos \lambda \cos \Theta \quad (4.57)$$

koyarak

$$w = -w_e \cos \lambda \sin \Theta i + (\dot{\Theta} + w_e \sin \lambda) j + w_z k \quad (4.58)$$

(a) Rotorun açısal momentumu

$$h_0 = I_x w_x i + I_y w_y j + I_z w_z k \quad (4.59)$$

dır; burada $I_x = I_y = I'$ ve $I_z = I$ dır (asal atalet moment)

(4.58) yi kullanarak

$$h_0 = -I'w_e \cos \lambda \sin \theta i + I'(\dot{\theta} + w_e \sin \lambda) j + I w_z k \quad (4.60)$$

Şimdi

$$\sum M_o = \frac{\delta h_0}{\delta t} + \Omega \times h_0 \quad (4.61)$$

Yazalım. (4.56) ve (4.60)'ü (4.61)'de yerine koyarak

$$\begin{aligned} \sum M_o &= -I'w_e \cos \lambda \cos \theta \dot{\theta} i + I' \ddot{\theta} j + I \dot{w}_z k + [-w_e \cos \lambda \sin \theta i + (\dot{\theta} + w_e \sin \lambda) j + w_e \cos \lambda \cos \theta k] \times [-I'w_e \cos \lambda \sin \theta i + I'(\dot{\theta} + w_e \sin \lambda) j + I w_z k] \\ \sum M_o &= [-I'w_e \cos \lambda \cos \theta \dot{\theta} + (\dot{\theta} + w_e \sin \lambda)(I w_z - I' w_z \cos \lambda \cos \theta)] i + \\ &[I' \ddot{\theta} + I w_z w_e \cos \lambda \cos \theta - I' w_e^2 (\cos \lambda)^2 \sin \theta \cos \theta] j + [I \dot{w}_z - w_e \cos \lambda \sin \theta I'(\dot{\theta} + w_e \sin \lambda) + (\dot{\theta} + w_e \sin \lambda) I' \cos \lambda \sin \theta] k \end{aligned} \quad (4.63)$$

Görülüyor ki rotor z eksenini etrafında serbestçe dönebilmektedir (spin) ; keza y eksenini etrafında dönüşü de serbesttir. (Tek sınırlama, x etrafındaki kuvvet çiftinden gelmektedir.) O halde $\sum M_o$ nun y ve z bileşenleri sıfır olmalıdır.

$$I' \ddot{\theta} + I w_z w_e \cos \lambda \cos \theta - I' w_e^2 (\cos \lambda)^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4.51)$$

$$I \dot{w}_z = 0 \quad (4.52)$$

(b) İkinci denklemden $w_z = \text{sabit}$ çıkar. İlk denklemi şöyle yazalım:

$$I' \ddot{\theta} + (I w_z - I' w_e \cos \lambda \cos \theta) w_e \cos \lambda \sin \theta = 0 \quad (4.64)$$

$w_z \gg w_e$ olduğu açıktır, o halde parantez içindeki ikinci terimi ihmal edebiliriz:

$$I' \ddot{\theta} + I w_z w_e \cos \lambda \sin \theta = 0 \quad (4.65)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{I w_z w_e \cos \lambda}{I'} \sin \theta = 0 \quad (4.66)$$

Bu denklem gösterir ki rotor kuzey-güney (N-S) doğrultusunda (bu doğrultuda $\theta = 0$ dır) bir basit sarkaç gibi salınım yapar ve bu bize N-S doğrultusunu bulma olanağı sağlar. θ nın küçük değerleri için

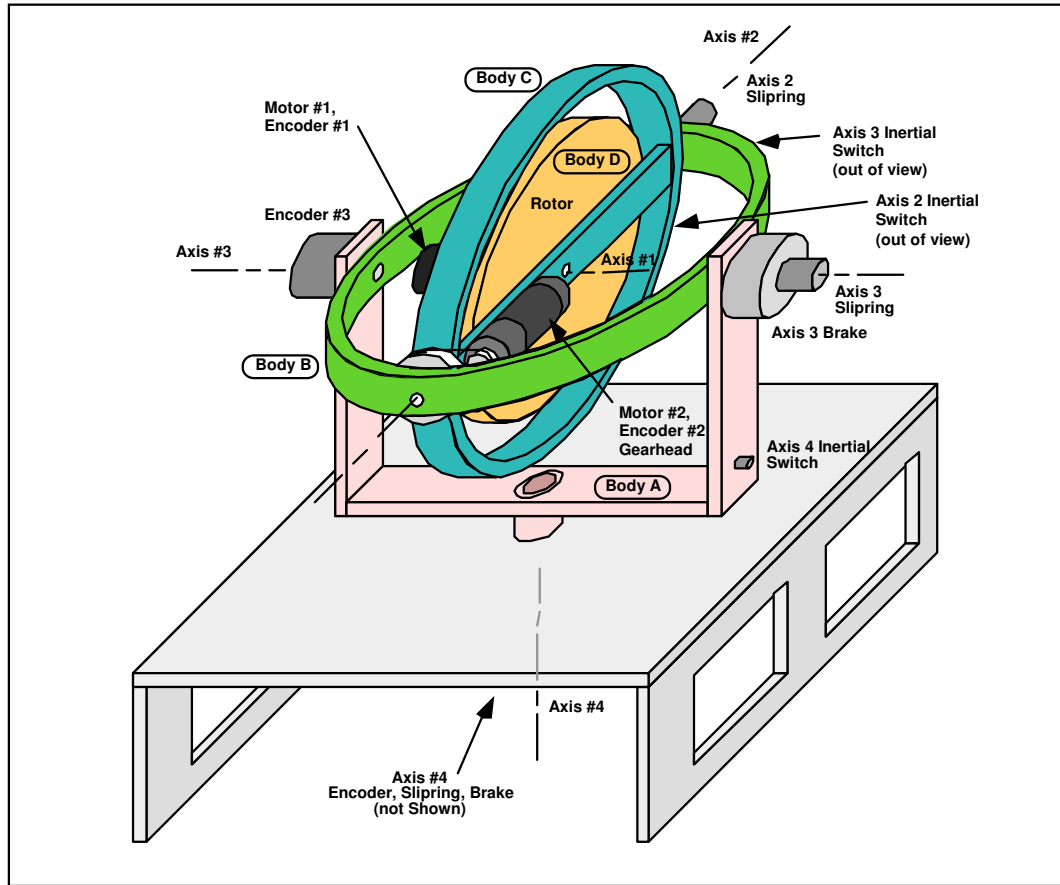
$$\ddot{\theta} + \frac{I w_z w_e \cos \lambda}{I'} \theta = 0 \quad (4.53)$$

olur; bu basit harmonik harekettir. Salınım periyodu

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{I w_z w_e \cos \lambda}} \quad (4.67)$$

dır ve $\lambda = \pm 90^\circ$ olunca periyod ∞ olur. O halde dönüölçerli pusula, kutup bölgelerinde N-S doğrultusunu bulmakta kullanılamaz.

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN SERBESTLİKLİ DÖNÜÖLÇER



Şekil 5. 25 Dört serbestlikli dönüölçer modeli [17]

5.1 Değişkenlerin Tanımlanması

Şekil 5.1’de görülen dönüölçer 4 (dört) adet dönen kütleden oluşmaktadır. 4 kütlenin de dönen çember eksenlerine nispi olarak θ kadar açısal konumları vardır. Dinamik

modeli oluşturulurken dönüölçerin simetrik olduğu ve merkezlerinin D'nin merkezinde olduğu varsayılmıştır. Sonuç olarak sadece döner dinamikler dikkat alınmalıdır. Aşağıdaki çizelgede dönüölçeri oluşturan yapının genel görünümü verilmiştir.[18]

Çizelge 5. 1 Dönüölçer elemanları[18]

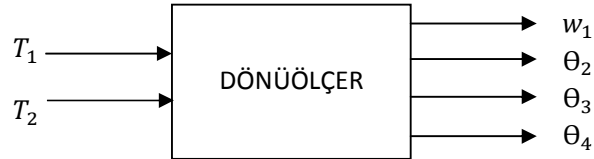
Dönen Kütle	Tanım	Açısal Konum	Atalet
A	Dış çember	θ_4	I^A
B	İç çember	θ_3	I^B
C	Rotor silindiri	θ_2	I^C
D	Rotor	θ_1	I^D

Dönüölçerde bulunan iki adet motor sistem girişlerini oluşturur. Birinci motor rotorda, ikinci motor rotor silindirinde tork oluşturur. Sistem çıkışları ise dört adet encoderlardan yapılan ölçümlerdir. Bu ölçümler hız veya konum olabilir.

$u = T_i$ = gövdelere uygulanan tork (girişler)

$y = \theta_i, w_i$ = encoderlardan ölçülen açısal konumlar ve açısal hızlar (çıkışlar)

Bizim sistemimizin çıkışları birinci eksenin açısal hızı, 2.3.4. eksenlerin açısal konumları olacaktır.



Şekil 5. 26 Sistem giriş-çıkışları[18]

5.2 Açısal Konumların Genel Değerlendirilmesi

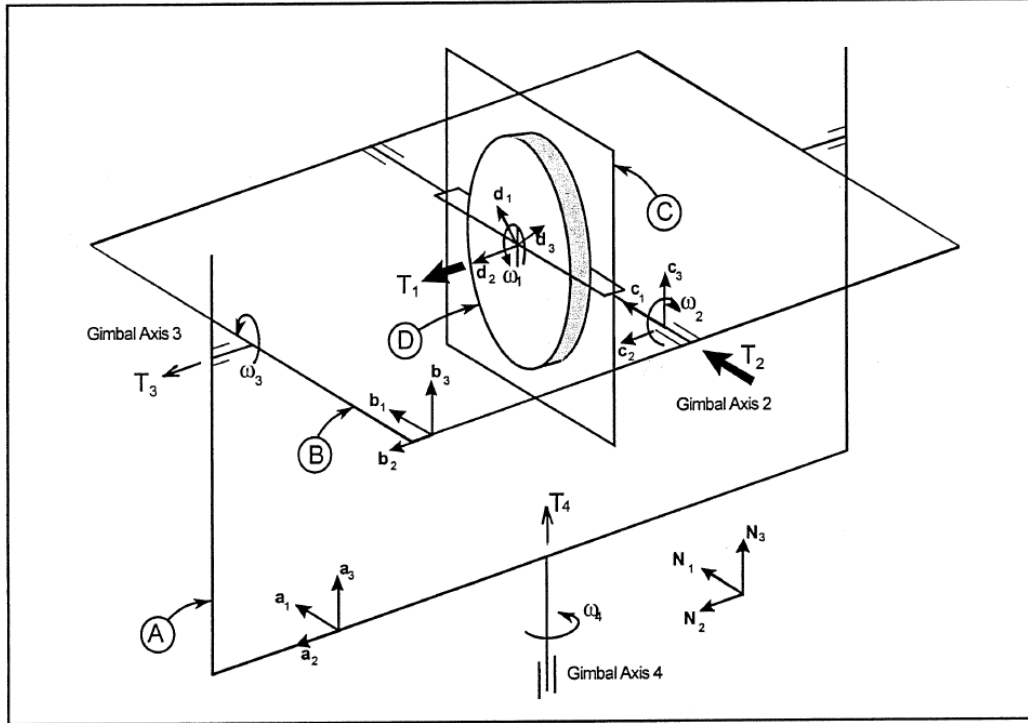
- Rotorun(D) θ_1 açısal konumu dikkate alınmayacak olup sadece $w_1 = \dot{\theta}_1$ açısal hızı hesaplamalarda kullanılacaktır.
- Rotor silindiri (C) iç çember'e (B) dik olduğu durumlarda rotor silindirinin (C) açısal konumu $\theta_2 = 0$ olur.

- İç çember(B) dış çember'e (A) dik olduğu durumlarda rotor silindirin (C) açılal konumu $\Theta_3 = 0$ olur.
- Dış çember (A) serbestçe dönebilir ve dönüölçerin simetrik olduğu kabul edilmiştir. Bu nedenle dış çemberin herhangi açılal konumunda $\Theta_4 = 0$ olur.

Her çember 3 boyutta dönebileceği için x_1, x_2, x_3 eksenleri boyunca I, J, K eylemsizlikleri oluşur. I^b eylemsizliği $b = A, B, C, D$ olmak üzere ,

$$I^b = \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

ve I_b, N_1 eksenindeki eylemsizlik , J_b, N_2 eksenindeki eylemsizlik, K_b, N_3 eksenindeki eylemsizliği tanımlar.



Şekil 5. 27 Dönüölçerin şematik gösterimi[17]

5.3 Dönüölçerin Lineer Olmayan Dinamikleri

Çemberlerin açısai konumları T_1, T_2 iç torkları ile değıştirilebilir. İç torklar uygulandıkça diğeri çemberlere etkiyen karşı toklar oluşur.

- Θ_2 ve Θ_3 açısai konumlarına bağıli olarak, T_1 rotora uygulandığında iç çemberin (B) dönüşüne neden olan T_3 ve/veya dış çemberin (A) dönmesine neden olan T_4 karşı torkuna neden olur.
- Θ_2 'nin açısai konumu T_2 rotor silindirine uygulandığında değıştirilebilir. Θ_3 açısai konumuna bağıli olarak, T_2 rotor silindirine uygulandığında dış çemberin dönüşüne neden olan T_4 karşı torkuna neden olur.

Temel gözlemiden sonra T_1, T_2 iç torkları ile Θ_i açısai konumları ve $w_1 = \dot{\Theta}_i$, $i = 1,2,3,4$ denklemleri dönüölçerin hareket denklemlerini formüle eder. Hareket denklemleri Lagrange denklemleri veya Kane metodu ile çıkarılabilir ve sonuç olarak lineer-olmayan fark denklemleri aşğıdaki formda olur.

$$\begin{aligned} T_1 &= f_1(\Theta_2, \Theta_3, w_2, w_3, w_4, \dot{w}_1, \dot{w}_3, \dot{w}_4) \\ T_2 &= f_2(\Theta_2, \Theta_3, w_1, w_3, w_4, \dot{w}_1, \dot{w}_2) \\ 0 &= f_3(\Theta_2, \Theta_3, w_1, w_2, w_3, w_4, \dot{w}_1, \dot{w}_3, \dot{w}_4) \\ 0 &= f_4(\Theta_2, \Theta_3, w_1, w_2, w_3, w_4, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3, \dot{w}_4) \end{aligned} \quad (5.2)$$

T_1, T_2 iç torkları giriş sinyalleri olarak dikkate alınmıştır. Yukarıdaki denklemlerden de görüldüğü üzere Θ_1 ve Θ_4 'ün dönüölçerin dinamik davranışı üzerinde etkisi yoktur.

5.4 Dönüölçerin Lineerleştirilmiş Dinamikleri

Sadece rotorun açısai hızı $w_1 = \dot{\Theta}_1$ etrafındaki küçük bozulmaları dikkate alarak, rotor silindirin açısai konumu Θ_2 ve iç çemberin açısai konumu Θ_3 lineer olmayan hareket denklemlerinin sadeleştirilmesine izin verir.

$$\begin{aligned} w_1 &= \Omega \\ \Theta_2 &= \overline{\Theta}_2 \\ \Theta_3 &= \overline{\Theta}_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

(5.2) deki denklemler sadeleştirilecek olursa

$$\begin{aligned}
J_D \dot{w}_1 &= T_1 - J_D \cos \bar{\theta}_2 \dot{w}_3 - J_D \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 \dot{w}_4 \\
(I_C + I_D) \dot{w}_2 &= T_2 - J_D \Omega \sin \bar{\theta}_2 w_3 + J_D \Omega \cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 w_4 + (I_C + I_D) \sin \bar{\theta}_3 \dot{w}_4 \\
(J_B + J_D + J_C - (J_C + J_D - I_D - K_C) \sin^2 \bar{\theta}_2) \dot{w}_3 &= \\
&- J_D \cos \bar{\theta}_2 \dot{w}_1 + J_D \Omega \sin \bar{\theta}_2 w_2 - J_D \Omega \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_3 w_4 - \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 \\
&(I_D + K_A + K_B + K_C + (J_C + J_D - I_D - K_C) \sin^2 \bar{\theta}_2 \\
&\quad + (I_C + I_B - K_B - K_C - (J_C + J_D - I_D - K_C) \sin^2 \bar{\theta}_2) \sin^2 \bar{\theta}_3) \dot{w}_4 \\
&= J_D \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 \dot{w}_1 - J_D \Omega \cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 w_2 + (I_C + I_D) \sin \bar{\theta}_3 \dot{w}_2 \\
&\quad + J_D \Omega \sin \bar{\theta}_2 \sin \bar{\theta}_3 w_3 - (J_C + J_D - I_D - K_C) \sin \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_2 \cos \bar{\theta}_3 \dot{w}_3
\end{aligned} \tag{5.4}$$

(5.4) deki denklemler karmaşık görünse de toplam tork eylemsizlik ile açısal ivmenin çarpımına eşittir ve Newton'un 2.kanunu yansıtan aşağıdaki denklem olarak yazılabilir.

$$I \ddot{\theta}_1 = \sum T \tag{5.5}$$

5.5 Dönüölçerin doğrusal dinamikleri

Matris gösteriminde T_1, T_2 torkları ile yazacak olursak

$$J \dot{w}(t) = D w(t) + Q(t) \tag{5.6}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

ve

$$T(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Dönüölçerin dinamik modelini sadeleştirmek için bazı özel durumları kabul edeceğiz.

$$w_1 = \Omega$$

$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 = 0 \tag{5.9}$$

$$\theta_3 = \bar{\theta}_3 = 0$$

Sırası ile rotor hızı sabit, rotor silindiri ile iç çember, iç çember ile dış çember birbirlerine dik konumdadır (Şekil 5.25 deki görünüm).

(5.9) daki denklemler dikkate alındığında hareket denklemleri aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$\begin{aligned}
J_D \dot{w}_1 &= T_1 - J_D \dot{w}_3 \\
(I_C + I_D) \dot{w}_2 &= T_2 + J_D \Omega w_4 \\
(J_B + J_D + J_C) \dot{w}_3 &= -J_D \dot{w}_1 \\
(I_D + K_A + K_B + K_C) \dot{w}_4 &= -J_D \Omega w_2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

ve $J\dot{w}(t) = Dw(t) + Q(t)$ matris gösterimi

$$J = \begin{bmatrix} J_D & 0 & J_D & 0 \\ 0 & (I_C + I_D) & 0 & 0 \\ J_D & 0 & (J_B + J_D + J_C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (I_D + K_A + K_B + K_C) \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_D \Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_D \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

olur ve durum vektörleri ile birinci dereceden fark denklemini açısal hızlar ve bazı açısal konumlarla olarak yazacak olursak

$$x(t) = [\Theta_2(t) \quad \Theta_3(t) \quad \Theta_4(t) \quad w_1(t) \quad w_2(t) \quad w_3(t) \quad w_4(t)]^T \tag{5.14}$$

$$u(t) = [T_1(t) \quad T_2(t)]^T \tag{5.15}$$

olur.

Durum uzay modeli ise

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5.16}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{5.17}$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

olursa

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & U_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & J^{-1}D \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ J^{-1}Q \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$U_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{J_B + J_D + J_C}{J_D(J_B + J_C)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_C + I_D} \\ \frac{-1}{J_B + J_C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Sonuç 7.dereceden durum uzay modelidir. A matrisinin özdeğerlerini hesapladığımızda kutupların konumu şöyledir:

- T_1 torkunun rotoru döndürme çalışmasından oluşan karşı tork T_3 ün sonucu olarak iç çember (Θ_3)in serbest dönüşünden kaynaklanan dönüölçerin hareketinden dolayı 2 kutup 0 (orjinde)dadır.
- Kinematik fark denklemlerinden dolayı 3 ek kutup orjindedir.
- 2 kompleks kutup salınımlı hareketi modeller. Rezonans frekansı w_n kompleks kutupların $\mp jw_n$ konumlarından bulunur ve dönüölçerin nutasyon frekansı olarak tanımlanır. Birimi rad/s'dir.

Laplas dönüşümü ile durum uzay modeli yerine (5.10) daki denklemlerden açısal konum ile uygulanan torklar arasındaki ilişkinin transfer fonksiyonu yazılabilir.

$$\Theta_2(s) = G_{22}(s)T_2(s) \quad (5.24)$$

$$G_{22}(s) = \frac{I_D + K_A + K_B + K_C}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^2 + \Omega^2 J_D^2} \quad (5.25)$$

$$\Theta_3(s) = G_{31}(s)T_1(s) \quad (5.26)$$

$$G_{31}(s) = -\frac{1}{(J_B + J_C)s^2} \quad (5.27)$$

$$\Theta_4(s) = G_{42}(s)T_2(s) \quad (5.28)$$

$$G_{42}(s) = \frac{-J_D \Omega}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^3 + \Omega^2 J_D^2 s} \quad (5.29)$$

4. ve 2. Eksen sabit kabul edildiği durumda Θ_3 , 3. eksen sabit kabul edildiği durumda Θ_2 , 3. eksen sabit kabul edildiği durumda Θ_4 açısal konumlarının transfer fonksiyonu elde edilebilir. Karmaşık görünen transfer fonksiyonlarının formunu temel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$G_{31}(s) = -\frac{1}{(J_B + J_C)s^2} = \frac{K_0}{s^2 + \beta_0 s} \quad (5.30)$$

$$G_{22}(s) = \frac{I_D + K_A + K_B + K_C}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^2 + \Omega^2 J_D^2} = \frac{K_1 w_n^2}{s^2 + 2\beta w_n s + w_n^2} \quad (5.31)$$

$$G_{42}(s) = \frac{-J_D \Omega}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^3 + \Omega^2 J_D^2 s} = \frac{K_2 w_n^2}{s^2 + 2\beta w_n s + w_n^2} \quad (5.32)$$

5.6 Dönüölçerin Farklı Eksenlerinin Kontrolü

İç çember açısal konumu Θ_3 'ü ölçmek için $w_4 = \dot{w}_4 = 0$ kabul edilir. (5.10) ve (5.9) daki denklemler ile

$$\begin{aligned} J_D \dot{w}_1 &= T_1 - J_D \dot{w}_3 \\ (I_C + I_D) \dot{w}_2 &= T_2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$(J_B + J_D + J_C) \dot{w}_3 = -J_D \dot{w}_1$$

olarak sadeleştirilebilir. Denklemleri transfer fonksiyonu olarak tekrar yazacak olursak

$$\Theta_1(s) = G_{11}(s)T_1(s) \quad (5.34)$$

$$G_{11}(s) = \frac{J_B + J_C + J_D}{J_D(J_B + J_C)s^2} \quad (5.35)$$

$$\Theta_2(s) = G_{22}(s)T_2(s) \quad (5.36)$$

$$G_{22}(s) = \frac{1}{(I_C + I_D)s^2} \quad (5.37)$$

$$\Theta_3(s) = G_{31}(s)T_1(s) \quad (5.38)$$

$$G_{31}(s) = -\frac{1}{(J_B + J_C)s^2} \quad (5.39)$$

Eşitliklerini elde ederiz. Yukarıdaki denklemleri genel formda yazacak olursak $i = 1,2,3$ için

$$\Theta_i(s) = G_{i1}(s)T_1(s) \quad (5.40)$$

$$G_{i1}(s) = \frac{K_0}{s^2 + \beta_0} \quad (5.41)$$

K_0 kazanç ve β_0 ek sönümlenmeyi ifade eder. Eğer açısal hızı ölçmek istersek genel denklem formunun 1.dereceden sisteme indirgenebileceğini görürüz. $i = 1,2,3$ için

$$w_i(t) = \frac{d}{dt}\Theta_i(t) \quad (5.42)$$

$$w_i(s) = sG_{i1}(s)T_1(s) \quad (5.43)$$

$$sG_{i1}(s) = \frac{K_0}{s + \beta_0} \quad (5.44)$$

Rotor silindirinin açısal konumu Θ_2 'yi ölçmek için $\dot{\Theta}_1 = w_1 = \Omega > 0$ kabul edilir. $w_4 = \dot{w}_4 = 0$ olup (5.10) ve (5.9) daki denklemler ile

$$J_D \dot{w}_1 = T_1$$

$$(I_C + I_D) \dot{w}_2 = T_2 + J_D \Omega w_4 \quad (5.45)$$

$$(I_D + K_A + K_B + K_C) \dot{w}_4 = -J_D \Omega w_2$$

İncelendiğinde (5.23) ve (5.10)deki son iki denklemin de aynı olduğu görülür. Transfer fonksiyonları ise

$$\Theta_1(s) = G_{11}(s)T_1(s) \quad (5.46)$$

$$G_{11}(s) = \frac{1}{J_D s^2} \quad (5.47)$$

$$\Theta_2(s) = G_{22}(s)T_2(s) \quad (5.48)$$

$$G_{22}(s) = \frac{I_D + K_A + K_B + K_C}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^2 + \Omega^2 J_D^2} \quad (5.49)$$

$$\Theta_4(s) = G_{42}(s)T_2(s) \quad (5.50)$$

$$G_{42}(s) = \frac{-J_D \Omega}{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)s^3 + \Omega^2 J_D^2 s} \quad (5.51)$$

İlk denklem diğer iki denklemden bağımsızdır. Sonuç olarak $w_1(s) = s\Theta_1(s)$ rotor hızı $T_1(s)$ ile kontrol edilebilir. $\dot{\Theta}_1(t) = w_1(t) = \Omega > 0$ ile $G_{22}(s)$ transfer fonksiyonu

$$\Theta_2(s) = G_{22}(s)T_2(s) \quad (5.52)$$

$$G_{22}(s) = K_1 \cdot \frac{w_n^2}{s^2 + 2\beta_1 w_n s + w_n^2} \quad (5.53)$$

K_1 kazancı, β_1 ise dönüölçerdeki sönümlenmeyi ifade eder. $T_2(t)$ ile $w_2(t)$ arasındaki ilişki basit bir ikinci dereceden sistemdir. Bu ikinci dereceden sistemde iki adet kompleks konjuge kutup vardır. Sönümlenmemiş nutasyon frekansı teorik olarak aşağıdaki gibidir.

$$w_n = \frac{\Omega J_D}{\sqrt{(I_C + I_D)(I_D + K_A + K_B + K_C)}} \quad (5.54)$$

$G_{42}(s)$ transfer fonksiyonu $T_2(s)$ torku ile dış çember açısal konumu $\Theta_4(s)$ tanımlar. (5.32) deki gibi iki adet kompleks konjuge kutbu vardır ve ek olarak orjinde bir kutbu daha vardır.

$$G_{22}(s) = K_2 \cdot \frac{w_n^2}{s^2 + 2\beta_1 w_n s + w_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (5.55)$$

K_2 kazancı, β_2 ise dönüölçerdeki sönümlenmeyi ifade eder. Açısal hızı

$$w_4(t) = \frac{d}{dt} \Theta_4(t) \quad (5.56)$$

olarak tanımlarsak aşağıdaki ikinci dereceden sistemi elde ederiz.

$$w_4(s) = s \cdot G_{42}(s)T_2(s), \quad s \cdot G_{42}(s) = K_2 \cdot \frac{w_n^2}{s^2 + 2\beta_2 w_n s + w_n^2} \quad (5.57)$$

5.7 4. Dereceden Serbestlikli Dönüölçer İçin Tam Mertebeden Gözleyici Tasarımı

5.7.1 Giriş

Lyapunov denklemleri kararlılık ve dayanıklı kararlılık analizlerinde, kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik gramyanları belirlemede, H_2 normunu hesaplamada kullanılır. Lyapunov denklem çözümlerine Cebirsel Riccati denklemlerin çözümlerinde Newton metodu gibi bazı iteratif metotların gerçekleştirilmesinde ihtiyaç vardır. Lyapunov

denklemlerinin bu pratik uygulamalarda önemli rolü çözümlerde sayısal güvenilir teknikleri garanti eder.[20]

Sürekli zaman Lyapunov denklemi

$$XA + A^T X = C \quad (5.58)$$

Sylvester denklemi olarak bilinen klasik matris denkleminin özel durumudur

$$XA + BX = C \quad (5.59)$$

Benzer olarak ayrık zaman Lyapunov denklemi:

$$A^T X A - X = C \quad (5.60)$$

Ayrık zaman Sylvester denkleminin özel durumudur:

$$BXA - X = C \quad (5.61)$$

Sylvester denklemleri ayrıca Sylvester-gözleyici denkleminde gözleyici tasarımında ve özdeğer-belirleme veya kutup-yerleştirme problemlerinde kullanılır.

5.7.2 Sylvester Denklemi

A, B, C matrislerinin $n \times n, m \times m$ ve $m \times n$ boyutlarında olduğunu varsayalım.

Teorem 5.1: Sylvester Denklem çözümünün bir tane olması. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ A matrisinin özdeğerleri ve $\mu_1, \dots, \mu_m$ B matrisinin özdeğerleri olsun. $XA + BX = C$ Sylvester denkleminin tek X çözümü vardır ancak ve ancak $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$. Başka bir ifade ile ancak ve ancak A ve $-B$ matrisleri ortak özdeğerleri olmadığında Sylvester denkleminin tekil çözümü vardır.

İspat: Sylvester denklemi $XA + BX = C$ $nm \times nm$ lineer sisteme eşittir

$$Px = c \quad (5.62)$$

$$P = (I_n \otimes B) + (A^T \otimes I_m) \quad (5.63)$$

$$x = \text{vec}(X) = (x_{11}, \dots, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}, \dots, x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{mn})^T \quad (5.64)$$

$$c = \text{vec}(C) = (c_{11}, \dots, c_{m1}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{m2}, \dots, c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{mn})^T \quad (5.65)$$

Böylece Sylvester denkleminin, P ancak ve ancak tekil olmadığında, tek çözümü vardır.

Burada $W \otimes Z$, W ve Z nin Kronecker çarpımıdır. $W = (w_{ij})$ ve $Z = (z_{ij})$ $p \times p$ ve $r \times r$ boyutlarında iki matris ve $W \otimes Z$ Kronecker çarpımı

$$W \otimes Z = \begin{pmatrix} w_{11}Z & w_{12}Z & \cdots & w_{1p}Z \\ w_{21}Z & w_{22}Z & \cdots & w_{2p}Z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{p1}Z & w_{p2}Z & \cdots & w_{pp}Z \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Böylece Sylvester Denklemi (5.59), sistemin (5.62) P matrisi ancak ve ancak tekil olmadığında tek çözümü vardır.

P matrisinin özdeğerleri $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ iken $\lambda_i + \mu_j$ dir (Horn ve Johnson 1991). Bir matrisin determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşit olduğundan P ancak ve ancak $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ iken $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ olduğunda tekil değildir.

5.7.3 Lyapunov Denklemi

Lyapunov denklemi (5.58) Sylvester denklemi (5.59) nin özel durumudur.

Doğal sonuç 5.1 Lyapunov Denklemi Çözümünün tekliği. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ A 'nın özdeğerleri olsun. Lyapunov denkleminin ancak ve ancak $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ iken $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ olduğunda tek X çözümü vardır.

5.7.4 Sylvester Denklemi İle Durum Kestirimi

Durum kestirimi yaklaşımında $A, B, C, u(t)$ ve $y(t)$ bilinmekte iken sistem

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Pu(t) \quad (5.67)$$

ve F $n \times n$, G $n \times r$ ve P $n \times m$ boyutludur. $n \times n$ boyutlu tekil olmayan X matrisi için, herhangi $x(0), z(0)$ ve her $u(t)$ başlangıç koşulları ile hata vektörü $e(t) = z(t) - Xx(t) \rightarrow 0$ olur. $z(t)$ daha sonra $Xx(t)$ 'in kestirilmiş olacaktır. (5.67) sistemi (5.16) ve (5.17) sisteminin durum gözleyicisi olur. Bu fikir D.Luenberger (1964) tarafından üretildiği için kontrol teorisinde Luenberger gözleyicisi olarak geçer.

(5.67) durum gözleyicisi için X, F, G ve P belli koşulları sağlamalıdır.

Teorem 5.2: Gözleyici Teoremi. (5.67) sistemi (5.16) ve (5.17) sisteminin durum g zleyicisidir. $z(t)$ $Xx(t)$ 'in kestirilmişidir. Herhangi $x(0), z(0)$ ve her $u(t)$ başlangıç koşulları için hata $e(t) = z(t) - Xx(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ eğer

$$(i) \quad XA - FX = GC, \quad (5.68)$$

$$(ii) \quad P = XB, \quad (5.69)$$

(iii) F kararlı ise

İspat Eğer (i)-(iii) koşulları sağlanıyorsa $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$

$$e(t) = z(t) - Xx(t) \quad (5.70)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{z}(t) - X\dot{x}(t) \quad (5.71)$$

$$= Fz(t) + Gy(t) + Pu(t) - X(Ax(t) + Bu(t)) \quad (5.72)$$

$y(t) = Cx(t)$ yi yerine yazıp $FXx(t)$ ekleyip çıkardığımızda

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (FX - XA + GC)x(t) + (P - XB)u(t) \quad (5.73)$$

elde ederiz. Eğer (i)ve (ii) koşulları sağlanırsa

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \quad (5.74)$$

elde ederiz.

Ek olarak koşul (iii) sağlandığında $x(0), z(0)$ ve her $u(t)$ için, $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ olur.

Bundan dolayı $z(t), Xx(t)$ 'nin kestirilmiřidir.

5.7.5 Sylvester-Gözleyici Denklemi

Tanım 5.1 Matris denklemi

$$XA - FX = GC \quad (5.75)$$

A ve C verilmiş ve X, F ve G bulunması gereken matrislerdir ve yukarıdaki denklem Sylvester-Gözleyici denklemi olarak adlandırılır.

Bu denklem klasik Sylvester denkleminin varyasyonundan üretilmiřtir

$$XA + TX = R \quad (5.76)$$

A, T ve R verilmiştir ve X bilinmeyen tek matristir.

Algoritma 5.1 Sylvester-gözleyici denklemi ile tam mertebeden gözleyici tasarımı

Girişler A, B, C sistem matrisleri sırasıyla $n \times n, n \times m$ ve $r \times n$ boyutlarındadır.

Çıkış $x(t)$ durum vektörünün kestirilmiş $\hat{x}(t)$

Varsayım (A, C) gözlenebilir.

Basamak 1 Tekil olmayan X matrisini verecek olan G matrisi ve kararlı bir F matrisi seç.

(F, G) çiftinin kontrol edilebilirliğini gördükten sonra denklem (5.75) MATLAB lyap komutunda çözdürmek için yeniden düzenlenecek olursa ;

$-FX + XA - GC = 0$ düzenlemesinden sonra

Basamak 2 Teorem 5.3 deki adımları yerine getirerek tekil olmayan X 'i bul.

Bunun için öncelikle A matrisinin karakteristik polinomunu bul. $a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ A 'nın karakteristik polinomu olmak üzere, $a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayılarını aşağıdaki eşitlikte yerine koyarak S matrisini hesapla

$$S = (F^{n-1} + a_1F^{n-2} + \dots + a_{n-1}I)R + (F^{n-2} + a_1F^{n-3} + \dots + a_{n-2}I) \\ \times RA + \dots + (F + a_1I)RA^{n-2} + RA^{n-1} \quad (5.77)$$

F daha önce tanımladığımız matris ve $R = -G \cdot C$ dir. S matrisini yukarıdaki tanımdan hesapladıktan sonra S matrisinin tekil olmadığını gör. S tekil ise birinci adıma dönerek yeni F ve G matrisi tanımla. Yeni F, G matrisleri ile basamak 2 yi tekrarla. Son olarak X 'in tekil çözümünü bulmak için karakteristik polinom denkleminde λ yerine F 'i koyarak yeniden hesapla. Bulduğun sonucun tersini alarak S ile çarparak X 'i hesapla

$$X = (a(F))^{-1}S \quad (5.78)$$

(X 'in çözümünün tek olması $a(F)$ 'in tekil olmadığını ifade eder.)

Basamak 3 MATLAB $X = lyap(-F, A, -G * C)$ komutu bize X matrisini verir. Burada bulduğun X ile bir önceki adımda bulduğun X 'i karşılaştı. Basamak 2 ve 3'ü kullanarak bulduğun X 'lerin aynı olduğunu gör.

Basamak 4 $P = XB$ hesapla

Basamak 5 Gözleyici $z(t)$ yi aşağıdaki denklemi çözerek tasarla

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Pu(t) \quad (5.67)$$

$$z(0) = z_0 \quad (5.79)$$

Basamak 6 $x(t)$ durum vektörünün kestirilmiş $\hat{x}(t)$ yi bul:

$$\hat{x}(t) = X^{-1}z(t) \quad (5.80)$$

5.7.6 Sylvester Denkleminin Tekil Olmayan Çözümlerinin Karakterizasyonu

Şuana kadar Sylvester-gözleyici tasarımında tam mertebeden tasarımı için tekil olmayan çözümlü X (Algoritma 5.1) veya indirgenmiş mertebeden tasarım için tam rank çözümlü X' e gerek olduğunu gördük.

Bu bölümde tek çözümlü Sylvester denklemi için gerekli koşulları tanımlayacağız. Uygun koşulu sağlamak için sadece tam mertebeden durumları dikkate alacağız.

Teorem 5.2: Sylvester Denkleminin tekil olmayan çözümü için gerekli koşullar. A, F, G ve C $n \times n, n \times n, n \times r$ ve $r \times n$ boyutlarındadır. X Sylvester-gözleyici denkleminin tek çözümü olsun

$$XA - FX = GC \quad (5.81)$$

X' in tekil olmaması için gerekli koşullar; (A, C) gözlenebilir ve (F, G) kontroledilebilir olmalıdır.

İspat (5.81) deki denklemden $A^0 = I_{n \times n}$ ve $F^0 = I_{n \times n}$ matrisler olmak üzere

$$XA^0 - F^0X = 0 \quad (5.82)$$

$$XA - FX = GC \quad (5.81)$$

$$XA^2 - F^2X = GCA + FGC \quad (5.83)$$

$$XA^n - F^nX = GCA^{n-1} + FGCA^{n-2} + \dots + F^{n-1}GC \quad (5.84)$$

$a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ A 'nın karakteristik polinomu ve (F, G) matris takımının kontrol edilebilirlik matrisi C_{FG} ve (A, C) matris takımının gözlenebilir matrisi O_{AC} olsun.

Öncelikle X' in tekliği $a(F)$ matrisinin tekil olmadığını ifade eder. Teorem 5.1'de X (5.81)'un tekil çözümüdür ancak ve ancak A ve F ortak özdeğere sahip olmadığında. Ancak ve ancak $a(F)$ matrisi tekil olmadığında A ve F ortak özdeğere sahip değildir. Çünkü $a(F)$ özdeğerleri n sayıdadır. $\prod_{j=1}^n (\mu_i - \lambda_j)$, $i = 1, \dots, n$; λ_i 'ler A 'nın

özdeğerleri ve μ_i ler F 'nin özdeğerleridir. Böylece, ancak ve ancak X (5.81)'in çözümü tek ise $a(F)$ tekil değildir.

Yukarıdaki denklemleri sırasıyla $a_n, a_{n-1}, \dots, 1$ ile çarptığımızda Cayley-Hamilton teoremini kullanarak bazı cebirsel düzenlemeler sonucunda

$$X = -[a(F)]^{-1}C_{FG}RO_{AC} \quad (5.85)$$

$$R = \begin{bmatrix} a_{n-1}I & a_{n-2}I & \cdots & a_1I & I \\ a_{n-2}I & a_{n-3}I & \cdots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1I & I & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

(5.85)'den X 'in tekil olmaması için C_{FG} ve O_{AC} dikdörtgen matrisleri tam ranka sahip olmalıdır. Başka bir deyişle (F, G) kontroledilebilir ve (A, C) gözlenebilir olmalıdır.

Doğal sonuç 5.2 Eğer G $n \times 1$ ve C $1 \times n$ ise (5.81)'un tek çözümü X 'in tekil olmaması için gerek ve yeter koşullar (F, G) kontroledilebilir ve (A, C) gözlenebilir olmasıdır.

İspat Bu durumda C_{FG} ve O_{AC} kare matrislerdir. Öyleyse (5.85)'de ancak ve ancak (F, G) kontroledilebilir ve (A, C) gözlenebilir olduğunda X tekil değildir.

Teorem 5.2 Datta (1997) tarafından X 'in tekil olmaması durum için, yeterli ve gerek koşullar verilerek, genelleştirilmiştir.

Teorem 5.3 Sylvester denklem çözümünün tekil olmamasının karakterizasyonu.

A, F ve R $n \times n$ matrisler olsun. $a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ A 'nın karakteristik polinomu olmak üzere

$$S = (F^{n-1} + a_1F^{n-2} + \cdots + a_{n-1}I)R + (F^{n-2} + a_1F^{n-3} + \cdots + a_{n-2}I) \\ \times RA + \cdots + (F + a_1I)RA^{n-2} + RA^{n-1} \quad (5.87)$$

Olarak tanımladığımızda Sylvester denkleminin tek X çözümü

$$FX - XA = R \quad (5.88)$$

ancak ve ancak S tekil olmadığında tekil değildir. Buna ek olarak X 'in tekil çözümü

$$X = (a(F))^{-1}S \quad (5.78)$$

(X 'in çözümünün tek olması $a(F)$ 'in tekil olmadığını ifade eder.)

Dönüölçerimizin tüm çemberleri serbest konumda iken durum uzay modelimizde;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_D \Omega}{I_C + I_D} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-J_D \Omega}{I_D + K_A + K_B + K_C} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{J_B + J_C + J_D}{J_D(J_B + J_C)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_C + I_D} \\ \frac{-1}{J_B + J_C} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

olmak üzere *Tanım 5.1* de verilen Sylvester-Gözleyici denklemi;

$$XA - FX = GC \quad (5.81)$$

ile *Algoritma 5.1* Sylvester-gözleyici denklemini kullanarak tam mertebeden gözleyici tasarımı için aşağıdaki adımları yerine getirmemiz gerekir.

İlgili adımlara geçmeden önce durum-uzay modelimizde aşağıdaki tabloda yer alan değerleri yerine koyalım.

Çizelge 5. 2 Dönüölçer eleman değerleri[17]

Dönen Kütle	Atalet Elemanı	Değer (kg-m ²)
A	K_A	0.067
B	I_B	0.012
	J_B	0.018
	K_B	0.030
C	I_C	0.0092
	J_C	0.023
	K_C	0.022
D	I_D	0.015
	J_D	0.027

ve $\Omega = 47.3$ rad/sn olmak üzere A, B, C sistem matrislerimizin yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52.76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.53 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 61.427 & 0 \\ 0 & 41.32 \\ -24.3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Girişler A, B, C sistem matrisleri sırasıyla $n \times n, n \times m$ ve $r \times n$ boyutlarındadır.

Çıkış $x(t)$ durum vektörünün kestirilmiş $\hat{x}(t)$

Varsayım (A, C) gözlenebilirliği Mathematicada kontrol ettiğimizde

```
>>MatrixRank[ObservabilityMatrix[ss]]
```

```
>>7
```

7 durumun da gözlenebildiğini görmüş oluruz.

Basamak 1 Tekil olmayan X matrisini verecek olan G matrisi ve kararlı bir F matrisi seç.

$$F = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

ve

```
>> Co=ctrb(F,G); % F,G çiftinin kontrol edilebilirliğini test et
```

```
>> unco=length(F)-rank(Co)
```

```
unco = 0
```

(F, G) çiftinin kontrol edilebilirliğini gördükten sonra denklem (5.81) MATLAB lyap komutunda çözdürmek için yeniden düzenlenecek olursa ;

$-FX + XA - GC = 0$ düzenlemesinden sonra

Basamak 2 Teorem 5.3 deki adımları yerine getirerek tekil olmayan X 'i bul.

Bunun için öncelikle A matrisinin karakteristik polinomunu bul. $a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ A 'nın karakteristik polinomu olmak üzere, $a_1, \dots, a_{n-1}$ katsayılarını aşağıdaki eşitlikte yerine koyarak S matrisini hesapla

$$S = (F^{n-1} + a_1F^{n-2} + \dots + a_{n-1}I)R + (F^{n-2} + a_1F^{n-3} + \dots + a_{n-2}I) \\ \times RA + \dots + (F + a_1I)RA^{n-2} + RA^{n-1} \quad (5.87)$$

F daha önce tanımladığımız matris ve $R = -G \cdot C$ dir.

A matrisinin karakteristik polinomu;

$$A(\lambda) = \lambda^7 + 502.803 \cdot \lambda^5 \quad (5.89)$$

ve

$$S = \begin{bmatrix} -329877 & 0 & 0 & 0 & 3125 & 0 & -32975 \\ 0 & -698288 & 0 & 0 & 0 & 116381 & 0 \\ 0 & 0 & -1.325 \times 10^6 & 0 & 22881.5 & 0 & 16807 \\ -2.321 \times 10^6 & 0 & 0 & -2.322 \times 10^6 & 32768 & 0 & -216105 \\ 0 & -3.830 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 & 425592 & 0 \\ 0 & 0 & -6.028 \times 10^6 & 0 & 95300 & 0 & 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & -9.133 \times 10^6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S matrisini hesapladıktan sonra S matrisinin tekil olmadığını gör.

$$\det(S) = 2.338 \times 10^{38} \quad (5.90)$$

S tekil ise X 'in tekil çözümünü karakteristik polinom denkleminde λ yerine F i koyarak yeniden hesapla.

$$A(F) = F^7 + 502.803 \cdot F^5 \quad (5.91)$$

Bulduğun sonucun tersini alarak S ile çarparak X 'i hesapla

$$X = (a(F))^{-1}S \quad (5.78)$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.0019 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & -0.0278 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1429 & 0 & -0.0025 & 0 & -0.0018 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0.125 & -0.0018 & 0 & 0.0116 \\ 0 & 0.1111 & 0 & 0 & 0 & -0.0123 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.0016 & 0 & -0.0017 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0909 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

(X 'in çözümünün tek olması $a(F)$ 'in tekil olmadığını ifade eder.)

Basamak 3 $\gg X = \text{lyap}(-F, A, -G * C)$ komutu bize X matrisini verir. Burada bulduğun X ile bir önceki adımda bulduğun X 'i karşılaştır.

$$X = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & -0.0019 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.1667 & 0 & 0 & 0 & -0.0278 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1429 & 0 & -0.0025 & 0 & -0.0018 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0.125 & -0.0018 & 0 & 0.0116 \\ 0 & 0.1111 & 0 & 0 & 0 & -0.0123 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & -0.0016 & 0 & -0.0017 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0909 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Sonuç aynı olduğu için bir sonraki adıma geç.

Basamak 4 $P = XB$ hesapla

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -0.0783 \\ 0.675 & 0 \\ 0 & -0.1019 \\ 7.6784 & -0.0729 \\ 0.3 & 0 \\ 0 & -0.0653 \\ 5.5843 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

Basamak 5 Gözleyici $z(t)$ yi aşağıdaki denklemi çözerek tasarla

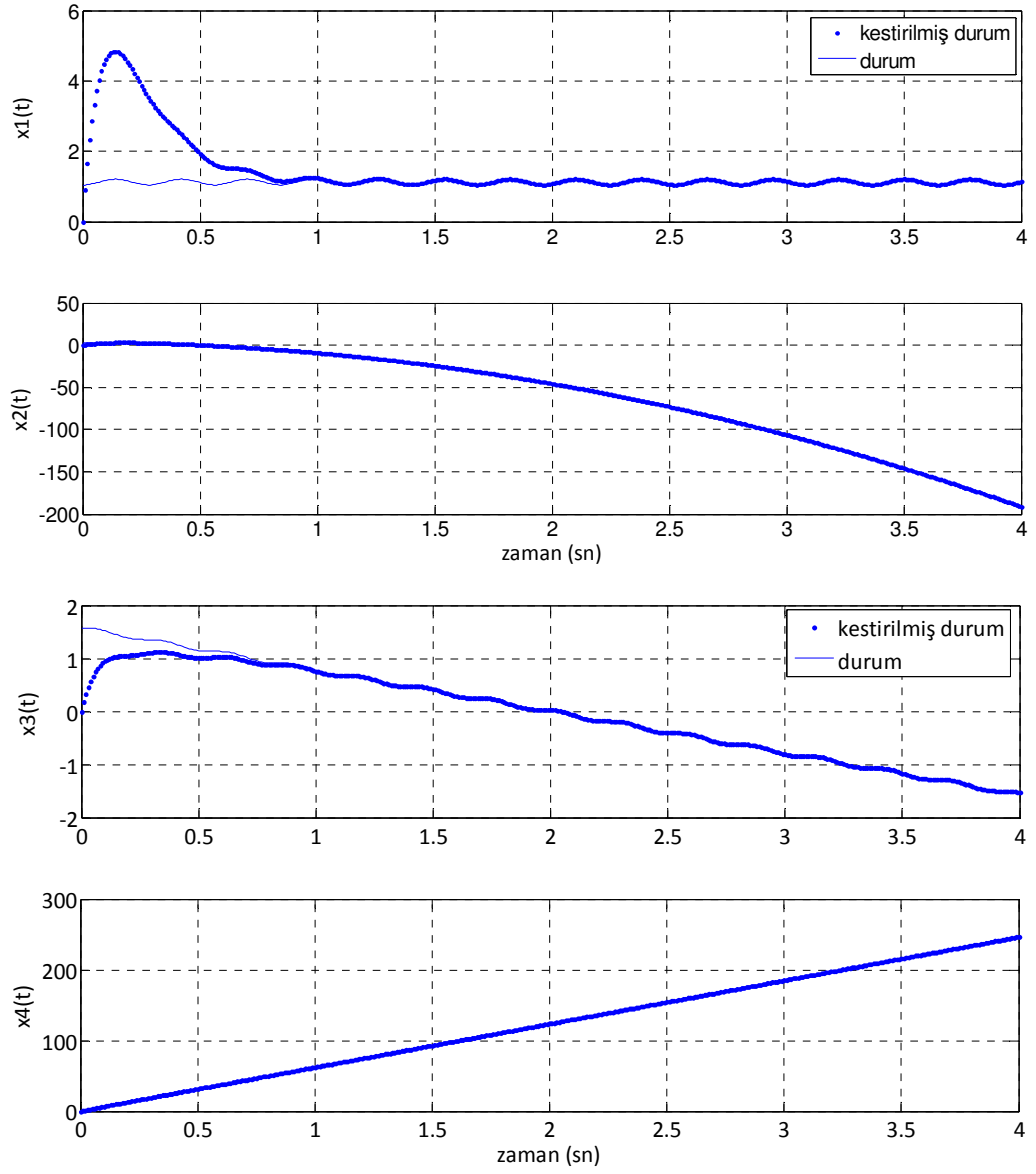
$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Pu(t) \quad (5.67)$$

$$z(0) = 0 \quad (5.79)$$

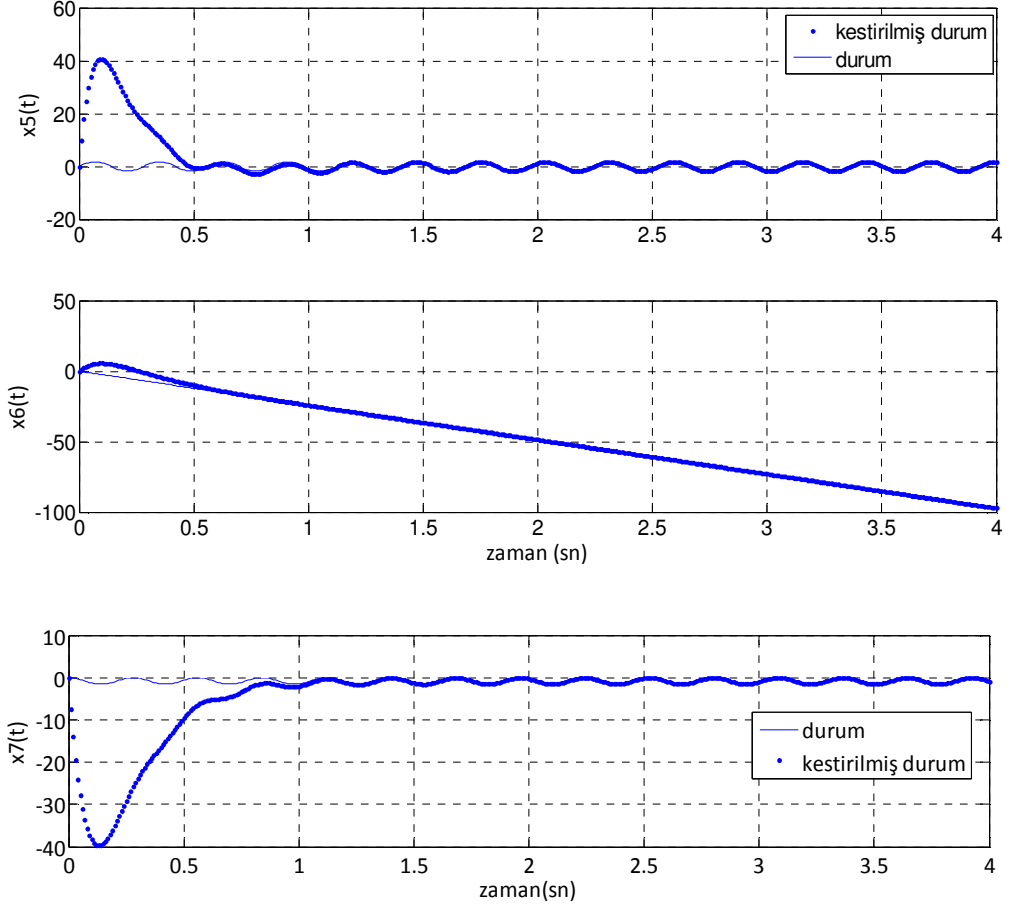
ve $x(0) = [60; 180; 90; 45; 0; 0; 0]$ başlangıç koşulları ile aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Basamak 6 $x(t)$ durum vektörünün kestirilmiş $\hat{x}(t)$ yi bul:

$$\hat{x}(t) = X^{-1}z(t)$$



Şekil 5. 28 Durum ve Kestirilmiş Durumların karşılaştırması



Şekil 5. 29 Durum ve Kestirilmiş Durumların karşılaştırması

Sistemimizin tüm durumları ve kestirilmiş durumları yukarıdaki şekilde gibidir. Kestirilmiş durumların sistemin durumlarını takip ettiği görülmektedir.

**CH-47 HELİKOPTER MODELİNDE KUTUP ATAMA İŞLEMİNDE ÇEŞİTLİ
ALGORİTMALARIN UYGULANMASI VE ELDE EDİLEN SONUÇLARIN
KARŞILAŞTIRILMASI****6.1 Giriş**

Bu bölümde dönüölçerlerin kullanılmakta olduğu alanlardan biri olan helikopter modelinde kontrol teorisinin önemli problemlerinden biri olan kutup atama problemini inceleyeceğiz. Kutup atama işlemleri durum geri beslemesi ile yapılacaktır. Lineer sistemimiz

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (6.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (6.2)$$

ve $x(t)$ durum vektörünü bilinmekte iken

$$u(t) = v(t) - Kx(t) \quad (6.3)$$

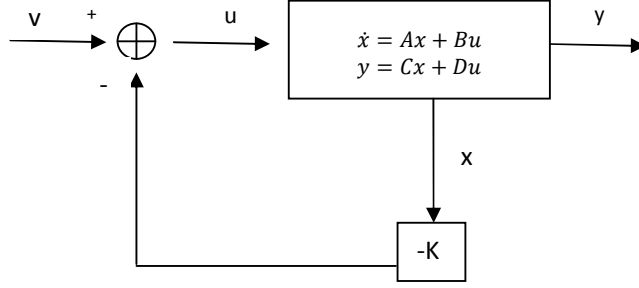
olmak üzere K sabit matris ve $v(t)$ referans giriş vektörüdür.

Giriş vektörü $u(t)$ sisteme tekrar beslendiğinde, elde ettiğimiz yeni sistem:

$$\dot{x} = (A - BK)x(t) + Bv(t) \quad (6.4)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + Dv(t) \quad (6.5)$$

Elde ettiğimiz yeni sistemde bulacağımız K matrisi yeni sistemimizi kararlı kılacak olan matristir. Dolayısı ile durum geri besleme ile kararlı kılma problemimiz, verilen (A, B) matrisleri ile $A - BK$ yı kararlı kılan K matrisini bulmak olarak tanımlanabilir. Grafikselsel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.



Şekil 6. 30 Durum geri besleme yapısı[20]

Özdeğerlerin kompleks düzlemde olması istenilen yerlere atanması (6.3) kontrol kanunu ile atanması durumu geribesleme ile özdeğer atama olarak adlandırılır. Kontrol teorisi literatüründeki genel kullanımı ise kutup-yerleştirme problemidir[20].

Problemimiz matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m} (m \leq n)$ ve Λ kompleks konjuge altında kapalı olarak $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ iken $\Omega(A - BK) = \Lambda$ eşitliğinde $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisini bulunuz. Burada $\Omega(R)$, R 'nin spektrumudur.

K matrisi durum geri besleme matrisidir. Teorem 6.1 K matrisinin varlığı ve tekliğini sağlayan koşulları verir.

Teorem 6.1: Durum geribesleme ile özdeğer atama teoremi

Özdeğer atama probleminin ancak ve ancak (A, B) kontroledilebilir ise her Λ için çözümü vardır. Çözüm ancak ve ancak tek girişli sistem için tektir. Çok girişli sistemlerde, problemin çözümü mümkün ise, birçok çözümü vardır.

Özdeğer atama probleminin çözümü için birçok yöntem bulunmaktadır. Ancak bazı yöntemler (Ackermann formülü, Bass-Gura formülü vs.) teorik olarak doğru olsalar da hesaplamaya dayalı metotlara dayanmazlar. Bu durumun öncelikli nedeni bu yöntemlerin kontrol edilebilir (A, B) çiftinin kontrolör-doğal forma dönüşümüne dayalı olmasıdır. Ayrıca dönüştürülen matris yüksek koşul sayılıdır. Bizim kullanacağımız yöntemler hesaba dayalı metotlar kullanan yöntemlerdir. Kullanacağımız yöntemler (A, B) çifti kontrolör-Hessenberg formuna dönüşümüne veya A matrisinin Schur formuna dönüşümüne dayanır.

Algoritma 6.1: Özdeğer atama problemi için genelleştirilmiş algoritma

Bu yöntemlerde kullanılan algoritmaları genelleştirmek mümkündür. Çünkü yapı olarak benzerdirler. Kullanışlı sayısal olarak etkili bir algoritma kontrol edilebilir (A,B) çiftinin kanonik forma indirgenmesinde iyi koşul sayılara sahip dönüşümü kullanarak yapılmasına dayalı olmalıdır. Kontrolör-Hessenber formu bunun için uygundur.

Basamak 1 Kontrol edilebilir (A,B) çifti ilk olarak Hessenberg çiftine $(H, \tilde{B})$ dönüştürülmelidir. Bunun için ortogonal P matrisi oluşturulur.

$$P A P^T = H \quad (6.6)$$

indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi,

$$PB = \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

B_1 üst üçgendir.

Not: Tek girişli durumlarda, kontrolör-Hessenberg çifti $(H, \tilde{b})$ dir. Burada H , indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi ve $\tilde{b} = Pb = \beta e_1, \beta \neq 0$.

Basamak 2 Özdeğer atama problemi $(H, \tilde{B})$ çifti için H ve $\tilde{B}$ özel formları kullanılarak çözülmüştür. Bu basamakta aşağıdaki eşitlikteki F matrisi bulunur.

$$\Omega(H - \tilde{B}F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (6.8)$$

Not: Tek girişli durumlarda, bu basamakta satır vektörü f^T bulunur. $\Omega(H - \beta e_1 f^T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Basamak 3 Asıl problemimizdeki geri besleme K matrisi, dönüştürülen Hessenberg problemindeki geri besleme matrisi F ile (A,B) çiftini $(H, \tilde{B})$ çiftine dönüştüren P ortogonal matris çarpımı ile yeniden elde edilir :

$$K = FP \quad (6.9)$$

$$\text{Not: } \Omega(H - \tilde{B}F) = \Omega(PAP^T - PBFPP^T) = \Omega(P(A - BK)P^T) = \Omega(A - BK)$$

Basamak 1 de bahsettiğimiz kontrol edilebilir (A,B) çiftinden Hessenberg çiftine $(H, \tilde{B})$ yapılacak dönüşüm için aşağıda yer alan Staircase algoritması kullanılmalıdır.

Algoritma 6.2 Staircase Algoritması. A $n \times n$ ve B $n \times m$ ($m \leq n$).

Basamak 1 B matrisini QR faktörizasyonu kullanarak üçgenleştir. Ortogonal P_1 matrisi ve permutasyon matrisi E_1 elde et

$$P_1 B E_1 = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

B_1 $n_1 \times m$ üst üçgen matrisi ve $n_1 = \text{rank}(B) = \text{rank}(B_1)$.

Basamak 2 A ve B' 'yi tekrar düzenle

$$P_1 A P_1^T = H = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(1)} \\ H_{21}^{(1)} & H_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

$$\tilde{B} = P_1 B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} E^T \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

hesapla, $n_1 \leq n$.

$$H_{11}^{(1)} \text{ } n_1 \times n_1 \text{ ve } H_{21}^{(1)} (n - n_1) \times n_1 \quad (6.13)$$

Eğer $H_{21}^{(1)} = 0$ ise dur.

Basamak 3 $H_{21}^{(1)}$ matrisini QR faktörizasyonu kullanarak üçgenleştir. Ortogonal $\widehat{P}_2$ matrisi ve permutasyon matrisi E_2 elde et

$$\widehat{P}_2 H_{21}^{(1)} E_2 = \begin{pmatrix} H_{21}^{(*)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

$H_{21}^{(*)}$ $n_2 \times n_1$ boyutlu ve $n_2 = \text{rank}(H_{21}^{(1)}) = \text{rank}(H_{21}^{(*)})$ ve $n_2 \leq n_1$.

Eğer $n_1 + n_2 = n$ ise dur.

$$P_2 = \text{diag}(I_{n_1}, \widehat{P}_2) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \widehat{P}_2 \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

I_{n_1} matrisi birim matrisin ilk n_1 satır ve sütunlarından oluşmaktadır.

$$H_2 = P_2 H_1 P_2^T = \begin{pmatrix} H_{11}^{(1)} & H_{12}^{(2)} & H_{13}^{(2)} \\ H_{21}^{(2)} & H_{22}^{(2)} & H_{23}^{(2)} \\ 0 & H_{32}^{(2)} & H_{33}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

matrisini hesapla.

$H_{22}^{(2)}$ $n_2 \times n_2$ boyutlu ve $H_{32}^{(2)} (n - n_1 - n_2) \times n_2$ boyutludur ve $H_{21}^{(2)} = H_{21}^{(*)} E_2^T$.

$$P \equiv P_2 P_1 \quad (6.17)$$

yeniden hesapla.

Eğer $H_{32}^{(2)} = 0$ ise dur. ($\tilde{B}$ matrisi değişmeden kalacaktır.)

Basamak 4

$H_{32}^{(2)}$ matrisinin rankını elde etmek için üçgenleştir. $\widehat{P}_3$ ve E_3 'ü bul.

$$\widehat{P}_3 H_{32}^{(2)} E_3 = \begin{pmatrix} H_{32}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$n_3 = \text{rank}(H_{32}^{(2)})$; $n_3 \leq n_2$ ve eğer $n_1 + n_2 + n_3 = n$ ise dur. Değilse P_3, H_3 ü hesapla ve P yi yukarıdaki gibi yeniden düzenle. ($\tilde{B}$ matrisi değişmeden kalacaktır.)

Basamak 5 Süreci $k \leq n$ için devam ettir, algoritma aşağıdaki Hessenberg çiftinin $(H, \tilde{B})$ elemanlarını verecektir.

$$H \equiv \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & \cdots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \cdots & H_{2k} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H_{k,k-1} & H_{kk} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$\tilde{B} \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

6.2 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metodlar

6.2.1 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Özyineli (Recursive) RQ Uygulama Metodu

QR stratejinin uygulanması zordur. Çünkü R_i in biriktirilmesi gerekmektedir: süreç pahalı ve kararsızdır.

QR faktörizasyonu yerine RQ faktörizasyonunun kullanılması sayısal olarak kullanışlıdır. Yapacağımız gösterimler bunun üzerine olacaktır.

$$H_1 = H \quad (6.21)$$

ve

$i = 1, 2, \dots, n$ için RQ'yi hesapla

$$R_i Q_i = H_i - \lambda_i I \quad (6.22)$$

$$H_{i+1} = Q_i R_i + \lambda_i I \quad (6.23)$$

$$\emptyset(H) = R_1 R_2 \cdots R_n Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (6.24)$$

ve

$$Q = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (6.25)$$

$$R = R_1 R_2 \cdots R_n \quad (6.26)$$

düzenlemesinden sonra

$$f^T = \alpha e_n^T \emptyset(H) \quad (6.27)$$

eşitliğini

$$f^T = \alpha e_n^T R Q = \alpha \rho e_n^T Q \quad (6.28)$$

olarak yazabiliriz.

Burada $\rho = \prod_{i=1}^n r_{nn}^{(i)}$ ve $r_{nn}^{(i)}$ R_i nin (n, n) girişidir. Özyineli RQ uygulama metodunun açık algoritması aşağıdaki gibidir.

Algoritma 6.3 Özyineli RQ algoritması

Girişler H indirgenmemiş üst Hessenberg matrisi ve $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı.

Çıkış f geribesleme vektörü ve $\Omega(H - e_1 f^T) = S$

$$\textbf{Basamak 1} \quad H_1 = H \quad (6.29)$$

Basamak 2 $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$R_i Q_i = H_i - \lambda_i I \quad (6.30)$$

$$H_{i+1} = Q_i R_i + \lambda_i I \quad (6.31)$$

$$\textbf{Basamak 3} \quad \rho = \prod_{i=1}^n r_{nn}^{(i)} \text{ ve } r_{nn}^{(i)} \quad (6.32)$$

için

$$f = \alpha \rho e_n^T Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1 \quad (6.33)$$

hesapla.

6.2.2 Tek Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Dolaylı RQ Algoritma

Algoritma 6.4

Giriş: H indirgenmemiş $n \times n$ Hessenberg matrisi, $\beta \neq 0$ ve $\Omega = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Çıkış: k öyle ki $\lambda(H - \beta e_1 k^t) = \Omega$

Basamak 1 $H_1 = H, \beta_1 = \beta, \hat{Q} = I$ ve $k = 0$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ için

$$e_n^t(H_i - \lambda_i I)P_i^t = \alpha e_n^t \quad (6.34)$$

ve P_i 'yi hesapla

$U_i P_i H_i P_i^t U_i^t$ üst Hessenberg matrisi ve H_i 'yi hesapla

$$Q_i = \begin{bmatrix} y_i^t \\ \hat{Q}_i \end{bmatrix} = U_i P_i \quad (6.35)$$

ve

$$\tau = e_i^t(H_i - \lambda_i I)Q_i^t e_1 / \beta_i \quad (6.36)$$

hesapla

$$\beta_{i+1} = q_{21}^{(i)} \beta_i \quad (6.37)$$

hesapla

$$Q_i H_i Q_i^t = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & H_{i+1} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

ve H_{i+1} hesapla

$$k = k + \tau \hat{Q}^t y_i^t \quad (6.39)$$

hesapla

$$\hat{Q} = \tilde{Q}_i \hat{Q} \quad (6.40)$$

hesapla

$$\textbf{Basamak 2} \quad \tau = (H_n - \lambda_n) / \beta_n \quad (6.41)$$

hesapla

$$k = k + \tau \hat{Q}^t \quad (6.42)$$

hesapla

6.3 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Sayısal Metotlar

6.3.1 Özyineli Çok Girişli Özdeğer Atama Algoritması

Kontrolör-Hessenberg çifti $(H, \tilde{B})$ dönüşümü yapılmış ve $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ takımı verilmiş olsun. Algoritma, F geri besleme matrisinin kolayca hesaplanabileceği, tekil olmayan L matrisini oluşturur. Çok girişli yapıda H matrisinin blok Hessenberg matris yapısında olması bir avantajdır. Böylelikle L matrisi bloklar içerisinde hesaplanabilir. Buradaki gösterimde blok satır-satır hesaplaması ile L matrisi bulunacaktır.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & & & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_{k,k-1} & \Lambda_{kk} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

yapısında özdeğerler $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ Λ matrisinin köşegen bloklarında yer almaktadır.

$$LH - \Lambda L = L \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} F \quad (6.44)$$

eşitliğinde L ve R matrislerinin F matrisini bilmeden bulunabildiği kolaylıkla görülmektedir. L matrisi

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_k \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

olarak hesaplanabilir. Eğer $L_k, L_k = (0, 0, \dots, I_{n_k})$ olarak seçilirse, L tekil olmayacaktır. Blok satırları aşağıdaki gibi eşitlersek

$$LH - \Lambda H = L \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} F \quad (6.46)$$

ve $i = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1$

$$\Lambda_{i+1,i} L_i = L_{i+1} H - \Lambda_{i+1,i+1} L_{i+1} = \tilde{L}_i \quad (6.47)$$

yapısından $\Lambda_{i+1,i}$ ve L_i matrisleri QR faktörizasyon ile bulunabilir. L ve R bulunduktan sonra, F matrisi yukarıdaki denklemden blok lineer sistem çözülerek elde edilebilir.

Algoritma 6.5 Çok girişli özdeğer atama problemi için Özyineli Algoritma

Girişler

A – $n \times n$ durum matrisi

B – $n \times m$ giriş matrisi ($m \leq n$)

$S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı

Kabuller (A, B) kontrol edilebilir

Çıkış K geribesleme matrisi, $\Omega(A - BK) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Basamak 1 Staircase algoritması ile (A, B) çifti kontrolör-Hessenberg $(H, \tilde{B})$ çiftine indirgenir. Bunun için P ortogonal matrisi oluşturulur. $P A P^T = H$, k köşegen bloklu indirgenmemiş blok üst Hessenberg matrisi ve

$$PB = \tilde{B} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

R üst üçgendir ve tam ranklıdır.

Basamak 2 S ayrıştırılır $S = \cup \Omega(\Lambda_{ii})$, Λ_{ii} $n_i \times n_i$ köşegen matristir. $(H = (H_{ij}); H_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i})$ içindeki blokların boyutları n_i leri tanımlar

Basamak 3 $L_k = (0, \dots, 0, I_{n_k})$ olarak tanımla

Basamak 4 $i = k - 1, \dots, 1$ için

$$1.1 \tilde{L}_i \equiv L_{i+1}H - \Lambda_{i+1,i+1}L_{i+1} \quad (6.49)$$

hesapla

$$1.2 \tilde{L}_i^T: \tilde{L}_i^T = QR \quad (6.50)$$

ayrışımını hesapla

$$1.3 L_i = Q_1^T \text{ olarak tanımla. } Q_1, Q = (Q_1, Q_2) \text{ matrisinin } n_i \text{ sütunlarıdır.}$$

Basamak 5 L_{11} L_1 in ilk n_1 sütunu olmak üzere $(L_{11}R)F = L_1H - \Lambda_{11}L_1$ lineer sistemden F 'i bul.

Basamak 6 Asıl problemin geri besleme matrisi K 'yı hesapla: $K \equiv FP$

6.3.2 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Doğrudan QR Algoritma

Çok girişli QR algoritma Miminis ve Paige (1988) tarafından yayınlanmıştır. Yukarıda bahsettiğimiz genelleştirilmiş algoritma adımlarını takip etmektedir. Üç ana adımda sonuca gidilebilir.

Algoritma 6.6

Basamak 1 Kontrol edilebilir (A, B) çifti kontrolör-Hessenberg çiftine $(H, \tilde{B})$ dönüştürülür:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} H_{11} & & & \\ H_{21} & \ddots & & H_{ij} \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & H_{k,k-1} & H_{kk} \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

ve

$$PBU = \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.52)$$

B_{11} matrisi ve H içindeki alt köşegen bloklar $(R, 0)$ formundadır ve R tekil olmayan üst üçgen bir matristir.

Basamak 2 Ortogonal matris Q ve geribesleme matrisi F oluşturulur. Öyle ki $\Omega(Q^T(H - \tilde{B}F)Q) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ (6.53)

Basamak 3 Asıl problemimizin geribesleme matrisi K ikinci basamaktaki Hessenberg probleminde bulunan F geri besleme matrisinden aşağıdaki gibi elde edilir :

$$K = UFP \quad (6.54)$$

6.3.3 Çok Girişli Özdeğer Atama Problemi İçin Schur Metodu

Bu metotta diğer algoritmalarda kullandığımız genelleştirilmiş algoritmayı kullanmayacağız. Çünkü Schur metodunda çok girişli özdeğer atama problemi sistemimizin A matrisinin gerçek Schur formuna-RSF'ye indirgenmesi ile bulunur.

$$R = QAQ^T = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

A matrisinin RSF si ve $\hat{B} = QB$ dönüştürülmüş kontrol matrisi.

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

olarak yazarsak (A, B) kontroledilebilir olduğu için (A_2, B_2) de kontroledilebilirdir.

A matrisinin RSF'si R şu şekilde derecelendirilmiştir; A_1 "iyi" özdeğerleri taşır, A_2 "kötü" özdeğerleri taşır. İyi özdeğerler kalmasını istediğimiz, kötü özdeğerler ise yeniden atamak istediğimiz özdeğerlerdir.

Buradaki önemli soru A_1 'in değişmemesi ve A_2 'nin de yeniden istediğimiz yerlere atanmasını sağlayacak geribesleme matrisi F 'in nasıl belirleneceğidir.

Eğer geri besleme matrisi $F, F = (0, F_2)$ formunda belirlenirse geribesleme matrisi $(R, \hat{B})$ uygulandıktan sonra

$$R - \hat{B}F = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 - B_1F_2 \\ 0 & A_2 - B_2F_2 \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

elde edilir. Burada $R - \hat{B}F$ özdeğerleri A_1 ve $A_2 - B_2F_2$ birleşimidir. Problemimiz $A_2 - B_2F_2$ yapısında istenen spektrumu sağlayacak F_2 'yi bulmaya indirgenmiştir. A_2 köşegen blokları skaler 1×1 veya 2×2 matris olduğu için yapmamız gereken aşağıdaki prosedür ile $p = 1$ veya 2 olmak üzere $p \times p$ matrisine özdeğer atamaktır.

Algoritma 6.7 ($p = 1$ veya 2) özdeğerlerini atama algoritması

Girişler

M – p boyutlu durum matrisi

G – $(p \times m)$ boyutlu kontrol matrisi

Γ_p – kompleks konjuge altında kapalı p kompleks sayıları

r – G 'nin rankı

Çıkış

F_p – Spektrumu Γ_p olan geri besleme matrisi $(M - GF_p)$

Varsayım (M, G) kontroledilebilir.

Basamak 1 G 'nin tekil değer ayrışımını yap. U ve V 'yi bul. $\hat{G}$ $r \times r$ boyutlu matris ve

$$G = U(\hat{G}, 0)V^T \quad (6.58)$$

Basamak 2

$$M: \hat{M} = U^T M U \quad (6.59)$$

Basamak 3 Eğer $r = p$ ise

$$\hat{F}_p = (\hat{G})^{-1}(\hat{M} - J) \quad (6.60)$$

hesapla. J $p \times p$ boyutlu ve özdeğerleri Γ_p . Basamak 6'ya git.

Basamak 4 $\Gamma_2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ ve

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

Basamak 5

$$\hat{F}_p = (\hat{F}_{p1}, \hat{F}_{p2}) \quad (6.63)$$

hesapla:

$$\hat{F}_{p1} = (m_{11} + m_{22} - \lambda_1 - \lambda_2)/\beta \quad (6.64)$$

$$\hat{F}_{p2} = \left(\frac{m_{22}}{m_{21}}\right)\hat{F}_{p1} - (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} - \lambda_1\lambda_2)/(m_{21}\beta) \quad (6.65)$$

Basamak 6

$$F_p = V \begin{bmatrix} \hat{F}_p \\ 0 \end{bmatrix} U^T \quad (6.66)$$

hesapla

Algoritma 6.7 A_2 nin tüm özdeğerlerini atamak için kullanılabilir. Özdeğerlerden 1 veya 2 tanesini bir seferde değiştirerek bu işlem yapılır. Süreç A_2 'nin son $p \times p$ bloğu ile başlar ve daha sonra yukarıdaki algoritma kullanılarak bu blok ile yapılan atama işlemi tamamlanır. Yeni bir $p \times p$ köşegen blok ortogonal benzerlik kullanılarak hareket ettirilir ve atama prosedürü yeni blok için tekrarlanır.

İstenen geribesleme matrisi yukarıda elde ettiğimiz geribesleme matrislerinin bileşimi ile elde edilir. Genel prosedür ise aşağıdaki gibidir:

Algoritma 6.8 Çok girişli özdeğer atama problemi için Schur algoritması

Girişler

A – $n \times n$ durum matrisi

B – $n \times m$ giriş matrisi

S –sayı takımı ve kompleks konjuge altında kapalı

Çıkış K –geribesleme matrisi. Γ takımı altındaki sayılar $A - BK$ nın spektrumudur.

Varsayım (A, B) kontrol edilebilir.

Basamak 1 A matrisini RSF ye dönüştür.

$$A \equiv Q A Q^T = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

A_1 $r \times r$, A_2 $(n - r) \times (n - r)$ boyutlarında olup; A_1 iyi özdeğerlere ve A_2 kötü özdeğerlere sahiptir.

$B \equiv Q B$ olarak yeniden düzenlenir ve $\hat{Q} = Q$ olur.

Basamak 2 $K \equiv 0$ ve $i = r + 1$

Basamak 3 $i > n$ ise dur.

Basamak 4 M 'yi A 'nın içindeki son blokta p . dereceye eşitle ($p = 1$ veya 2). G 'yi B 'nin son p satırlarına eşitle.

Basamak 5 Algoritma 6.7'yi P özdeğerlerini S 'den kaydırmak için kullanarak F_p yi hesapla.

Basamak 6 K ve A 'yı yeniden hesapla:

$$K \equiv K - (0, F_p) Q \quad (6.68)$$

$$A \equiv A - B(0, F_p) \quad (6.69)$$

Basamak 7 A 'nın son bloğunu Q içindeki dönüşümleri toplayarak (i, i) konumuna getir.

Basamak 8 $i \equiv i + p$ ve Basamak 3'e geri dön.

6.4 CH-47 Helikopter Modeli

Özdeğer atama problemi ve problem çözümünde kullanacağımız algoritmalar hakkında ön bilgi verdikten sonra verdiğimiz bilgilerin uygulama safhasına geçebiliriz. Bunun için örnek olarak CH-47 helikopteri modeli kullanılacaktır[19].

$$A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 & 2.4 & -32 \\ -0.14 & 0.44 & -1.3 & -30 \\ 0 & 0.018 & -1.6 & 1.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.14 & -0.12 \\ 0.36 & -8.6 \\ 0.35 & 0.009 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.3 \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

yukarıdaki modele sahip CH-47 helikopterinin aşağıda verilen kutuplarına bakacak olursak;

$$\{-2.22787, 0.491325 + 0.415314i, 0.491325 - 0.415314i, 0.0652236\}$$

sisteme ait üç kutbun eksenin sağ tarafında olduğunu görürüz. Kutup atama işlemi ile olmasını istediğimiz yeni kutuplar $\{-3.8, -2.7, -1.6, -1.5\}$ olsun. Sırasıyla yukarıda bahsettiğimiz algoritmaları kutup atama problemimize uyguladığımızda elde ettiğimiz kazanç matrisleri şöyledir. (Uygulamalar Mathematica Advanced Numerical Methods-Pole Assignment Methos toolbox ile yapılacaktır.)

Özyineli RQ algoritması ile elde ettiğimizde durum kazanç matrisimiz

$$k1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.77002 & -1.19238 & -140.227 & -378.945 \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

Dolaylı RQ algoritması ile elde ettiğimiz kazanç matrisimiz

$$k2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.77002 & -1.19238 & -140.227 & -378.945 \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

Özyineli algoritması ile elde ettiğimiz kazanç matrisimiz:

$$k3 = \begin{pmatrix} -2.09659 & 0.0995402 & 17.7769 & 82.0133 \\ 81.642 & -1.8538 & -409.991 & -2535.45 \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

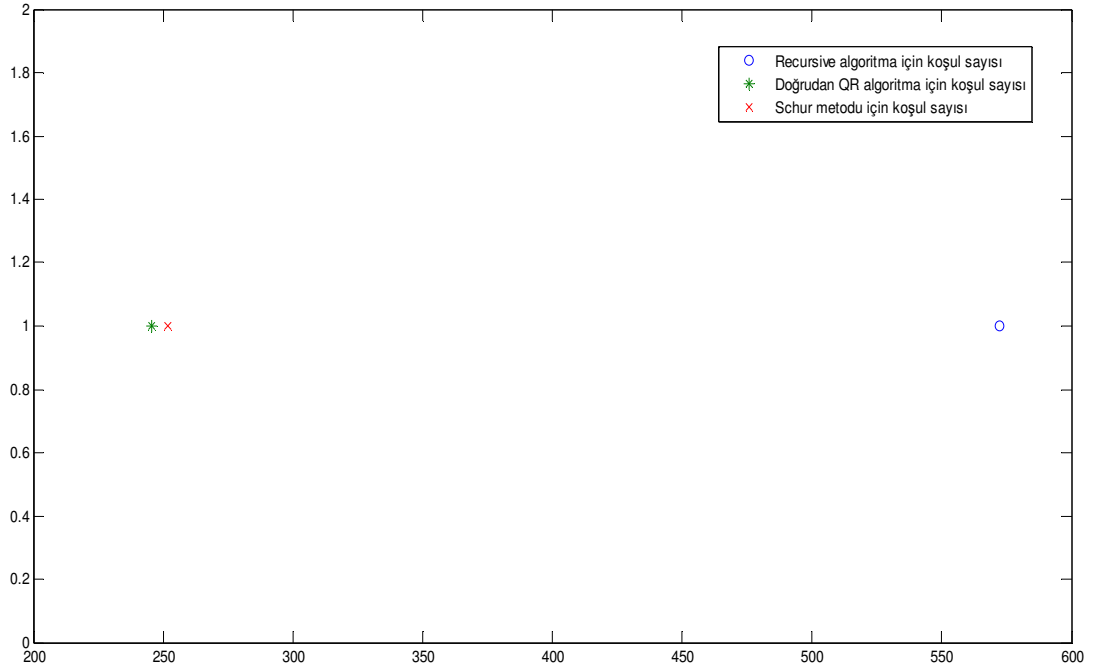
Doğrudan QR algoritması ile elde ettiğimiz durum kazanç matrisimiz

$$k4 = \begin{pmatrix} 0.953249 & 0.0471906 & 24.8759 & 60.6292 \\ 32.0943 & -0.867521 & -449.597 & -1442.29 \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

Schur algoritması ile elde ettiğimiz kazanç matrisimiz aşağıdaki gibi olur.

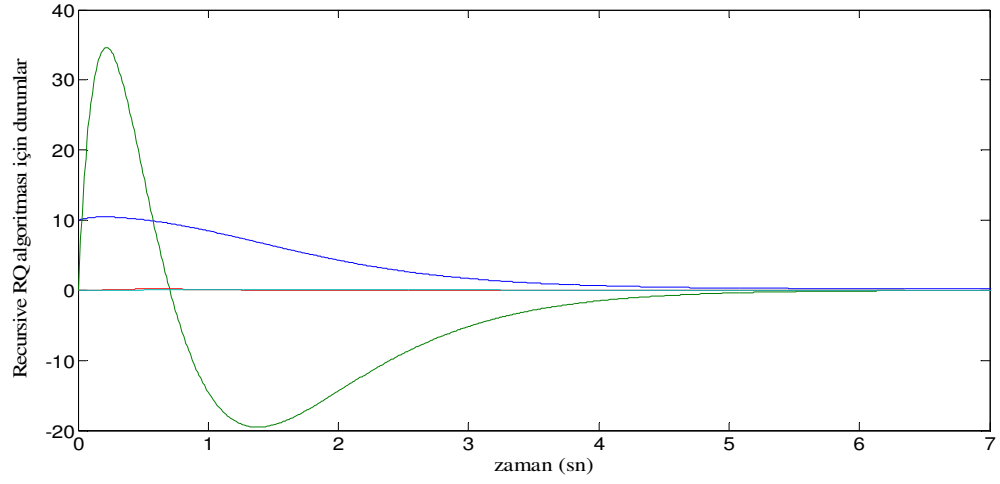
$$k5 = \begin{pmatrix} -1.42439 & 0.085929 & 19.0178 & 66.0814 \\ 0.0363694 & -0.2236 & 1.51843 & 5.24235 \end{pmatrix} \quad (6.77)$$

Elde ettiğimiz kazanç matrislerine baktığımızda tek girişli sistemlerde çözüm tek iken çok girişli sistemlerde çözüm tek değildir. Her algoritmada farklı sonuç elde edilir. Bu nedenle Matlab cond(k) komutu ile koşul sayılarını elde ederek algoritmaların performansına göre hangisini kullanmamız gerektiğine karar vereceğiz.

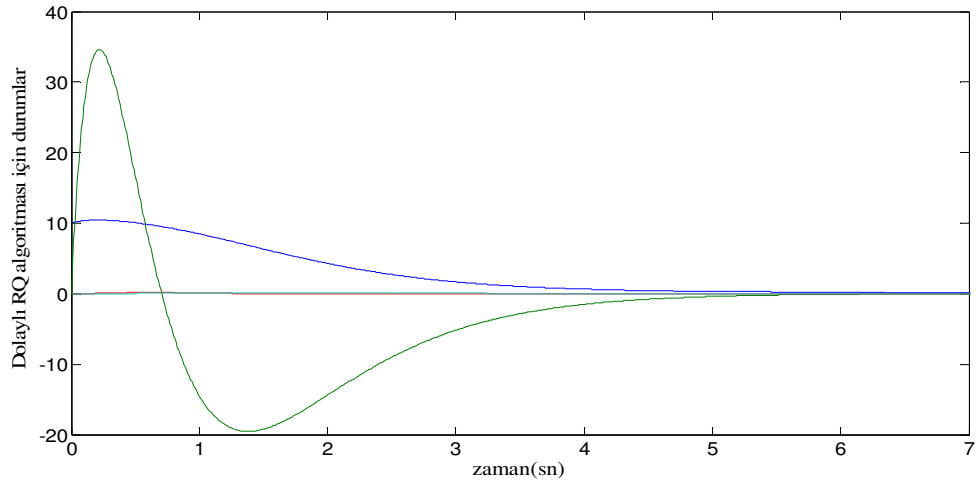


Şekil 6. 31 Kazanç matrislerinin koşul sayıları

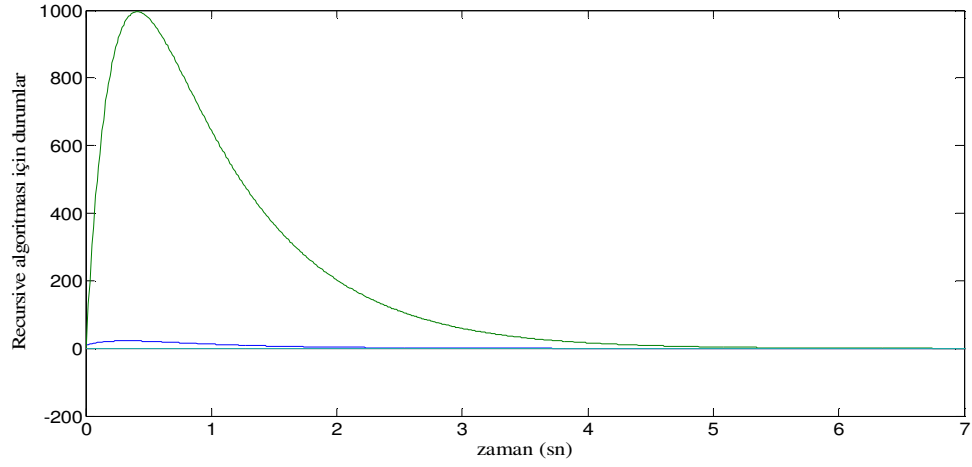
Koşul sayıları Özyineli algoritma için 572.5077, Doğrudan QR algoritma için 245.499, Tek girişli özdeğer atama için Özyineli RQ algoritma ve Dolaylı RQ algoritma için sonsuz (∞), Schur Metodu için ise 251.8903'tür.



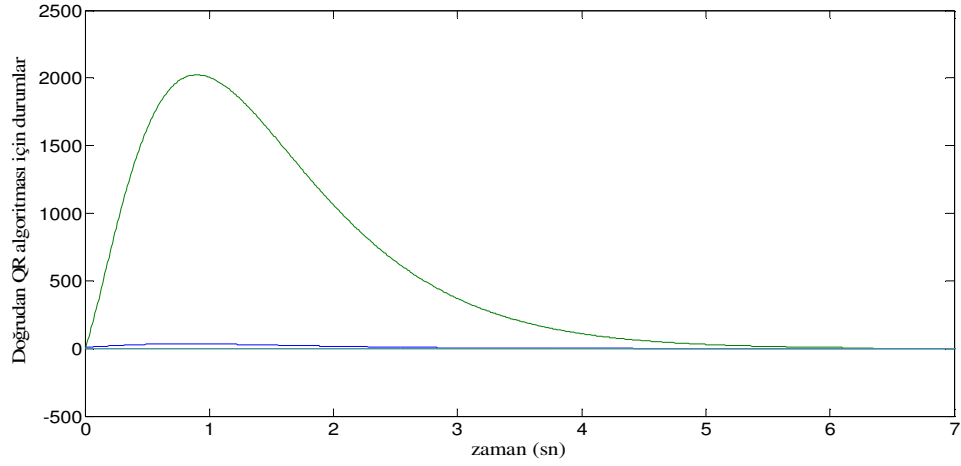
Şekil 6. 32 Tek girişli özdeğer atama için Özyineli RQ algoritması



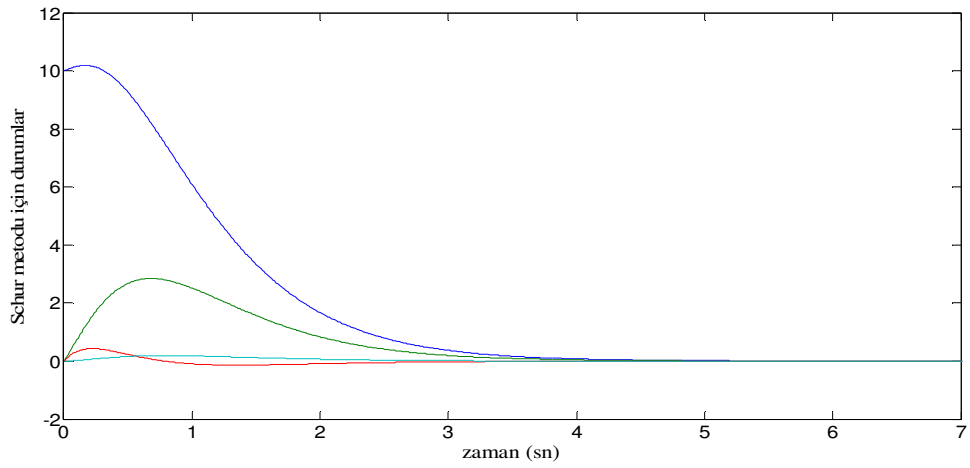
Şekil 6. 33 Tek girişli özdeğer atama için Dolaylı (Implicit) RQ algoritması



Şekil 6. 34 Özyineli çok girişli özdeğer atama algoritması



Şekil 6. 35 Doğrudan(Explicit) QR çok girişli özdeğer atama algoritması



Şekil 6. 36 Schur Metodu

Kazanç matrisleri ve koşul sayılarından anlaşılacağı üzere Doğrudan QR algoritması ile elde edilen koşul sayısı en küçük olanıdır. Her ne kadar istediğimiz özdeğerlere farklı algoritmalarla atama sağlanmış olsa da küçük koşul değerli algoritma tercih edilir. Çünkü yüksek geribesleme kazancı veya yüksek koşul sayısı kapalı çevrim özdeğerlerinde yüksek hassasiyete neden olur. Küçük koşul değeri aynı zamanda daha iyi geçici(transient) hal cevabı sağlar [21,22].

Geçici hal cevaplarına baktığımızda ise en çok aşımı Doğrudan (Explicit) QR, en çabuk oturma tek girişli sistem algoritmaları, en az aşım ve en çabuk oturma schur metodu sağlamaktadır.

Her ne kadar en küçük koşul sayısı Doğrudan QR algoritması ile elde ediliyor olsa da Schur Metodu Doğrudan QR algoritmasına yakın koşul sayısı, en az aşım ve en çabuk oturma avantajları ile en kullanışlı algoritma olarak değerlendirilmektedir. Ancak bu metod (Datta) tarafından en pahalı metod olarak tanımlanmaktadır[20].

SONUÇ VE ÖNERİLER

18.yy başlarından itibaren oluşum içine giren dönüölçerler 19.yy sonunda icat edilmiştir. 20.yy başından itibaren kullanılmaya başlanmış ve kullanım alanı her geçen gün artmıştır. Dinamik yapısı incelendiğinde dönüölçerlerin karmaşık yapısı vardır ve lineer değildir. Bu nedenle yapının lineerleştirilmesi gerekmektedir.

Bu çalışmada dönüölçerin lineerleştirilmiş yapısı incelenerek kontrol teorisinde önemli yere sahip Sylvester denklemi yardımıyla belli başlangıç koşulu ile lineer modele tam mertebeden gözleyici tasarımı yapılmıştır. Çalışma sırasında bulunan X matrisinin doğruluğunu kesinleştirmek maksadıyla Sylvester gözleyici denklemi için algoritma oluşturulurken (Algoritma 5.1), Datta'nın oluşturduğu algorithmadan [20] farklı olarak, Sylvester denklem çözümünün tekil olmamasının karakterizasyonu teoremi (Teorem 5.3) de algoritma adımlarına dâhil edilmiştir. Böylece bulunan X matrisinin sağlamasının algoritma adımları uygulanırken yapılması sağlanmıştır. Tasarlanan gözleyici ile elde edilen kestirilmiş durumlar ile sistemin durumları karşılaştırılmıştır. Sistem durumları ile kestirilmiş durumların kısa sürede birbirini takip ettiği görülmüştür.

Dönüölçerlerin kullanıldığı alanlardan biri de helikopterlerdir. Çalışmada özdeğer atama probleminde çeşitli algoritmalar CH-47 modeli üzerinde uygulanmıştır. Durum geri besleme ile yapılan özdeğer atama işlemi sonunda istediğimiz özdeğerlerin tüm algoritmalar ile atanabildiği görülmüştür. Durum geri besleme ile özdeğer atamada beş farklı algoritma kullanılmıştır. Kullanılan 5 (beş) farklı algoritmalarından elde edilen sonuçlara göre tek girişli sistemler için uygulanan algoritmalarından aynı kazanç matrisleri elde edilmiştir. Yani tek girişli sistemler için çözüm tektir. Ancak çok girişli sistemler için uygulanan algoritmalar sonucunda kazanç matrisi çözümünün her algoritma için farklı olduğu görülmüştür. Bu nedenle kullanılması gereken en uygun algoritmayı belirlemek için elde edilen kazanç matrisleri, koşul sayıları ve özdeğer atama sonrası geçici hal cevapları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar sonucunda Schur metodunun çok girişli sistemlerde en uygun yöntem olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] J.F.Wagner, "From Bohnenberger's Machine to Integrated Navigation Systems,200 Years of Inertial Navigation," Photogrammetric Week 05. Wichmann Verlag, Heidelberg, 2005.
- [2] Wagner, J.; Sorg, H.; Renz, A." The Machine of Bohnenberger." European Journal of Navigation 3 (2005), 4:69-77
- [3] Perez M.,Albertos P.,Angel.J. (2007) "Tuning of a PID controlled gyro by using the bifurcation theory" Systems & Control Letters
- [4] M. Pérez Polo, M. Pérez Molina, "Regular self-oscillating and chaotic behaviour of a PID controlled gimbal suspension gyro ",Chaos Solitons and Fractals 21 (2004) : 1057–1074.
- [5] Lei Y., Wei X., Zheng H. (2005) "Synchronization of two chaotic nonlinear gyros using active control" Physics Letters A (353) : 153-158
- [6] Chen. H.K. (2002) "Chaos and chaos synchronizaiton of a symmetric gyro with linear-plus-cubic damping" Journal of Sound and Vibration (255) : 719-740
- [7] Ashok S., Anil. J (2013), "Robust LQR Control Design of Gyroscope" International Journal of Advanced Computer Research (3)
- [8] Roberts G.N. (2008),"Trends in marine control systems", Annual Reviews in Control (32) :263–269
- [9] Crossland P., (2003) "The effect of roll-stabilisation controllers on warship operational performance", Control Engineering Practice: 423–431
- [10] Matthew Trainer (2008) "Albert Einstein's expert opinions on the Sperry vs. Anschütz gyrocompass patent dispute ",World Patent Information, Volume 30, Issue 4, December 2008, :320-325
- [11] Brothers E.,(1910). The Anschütz Gyrocompass, London
- [12] Sperry Gyroscope Company,inc.(1945),Sperry Gyro-Compass and Gyro-Pilot Manual,Brooklyn
- [13] <http://www.uzayveastronomi.com>, 11 Şubat 2014
- [14] <http://tr.wikipedia.org/wiki/Jiroskop>, 11 Şubat 2014

- [15] Navy-Marine Corps Military Auxiliary Radio System (MARS) Electrical Engineering Training Series, Ch.3
- [16] Tameroğlu,S.S.,Özbek T.,Mühendisler İçin Mekanik,Cilt 2,Dinamik, Birsen Yayınevi
- [17] Control Moment Gyroscope Experiment Worksheet, <http://www.mne.psu.edu/ray/me355web/>, 31 Mart 2014
- [18] Gyroscope Control Experiment, <http://maecourses.ucsd.edu/callafon/labcourse/index.html>, 20 Mart 2014
- [19] Doyle, J. C. and G. Stein.,(1981) Multivariable feedback design: Concepts for a classical / modern synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26, 1: 4–16
- [20] N.Biswa Datta, Numerical Methods for Linear Control Systems, Elsevier, 2003.
- [21] Varga, A., "Robust pole assignment techniques via state feedback," Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on ,5:4655-4660
- [22] John S.Bay, Fundamentals of Linear State Space Systems, McGraw-Hill, 1999
- [23] M. Arnold ve N. Biswa Datta, "Single-input Eigenvalue Assignment Algorithms: A Close-Look", 1997

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : AYABAKAN Tarık
Doğum Tarihi ve Yeri : 26.04.1986 Kayseri
Yabancı Dili : İngilizce, Almanca
E-posta : eskizmal@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Elektrik-Elektronik Mühendisliği	Deniz Harp Okulu	2008
Lise	Fen-Matematik	Deniz Lisesi	2004