T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAYANIKLI PD KONTROLCÜ TASARIMI

GÖKHAN AKÇA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
KONTROL VE OTOMASYON PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. AKIN DELİBAŞI

İSTANBUL, 2013

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAYANIKLI PD KONTROLCÜ TASARIMI

Gökhan AKÇA tarafından hazırlanan tez çalışması 30.10.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Akın DELİBAŞI

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Akın DELİBAŞI

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. İbrahim KÜÇÜKDEMİRAL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. İsmail Aksoy

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi sonlandırmakla birlikte lisansüstü eğitime başlama nedenlerimden biri olan kariyerime akademik katkı sağlama hedefine ulaşmanın mutluluğunu yaşıyorum. Bununla birlikte tez çalışmam sırasında edindiğim bilgi, birikim ve tecrübelerin çalışma hayatım boyunca bana katkı sağlayacağından eminim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni manevi olarak destekleyen ve tez çalışmamı sonlandırmamda büyük emeği olan Arife GÜVEN’ e, Ramazan AKÇA’ ya ve adını bu sınırlı satırlar dâhilinde sayamadığım, tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tezin oluşumunda en büyük katkıya sahip kişiye, dersler dâhil her an yanımda olan değerli hocama, yüksek lisans boyunca elde ettiğim tüm başarı ve başarısızlıkların ortağı olan danışmanım sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Akın DELİBAŞI’ na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ekim, 2013

Gökhan AKÇA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\eta_{g,y}$	Yükün bağlı olduğu taşıyıcı motorun dişli kutusu verimi
$K_{g,y}$	Yükün bağlı olduğu taşıyıcı motorun dişli kutusu diş oranı
$\eta_{m,y}$	Yükün bağlı olduğu taşıyıcı motorun verimi
$K_{t,y}$	Yükün bağlı olduğu taşıyıcı motorun tork sabiti
$I_{m,y}$	Yükün bağlı olduğu taşıyıcı motorun giriş akımı
$\eta_{g,j}$	Taşıyıcı motoru dişli kutusu verimi
$K_{g,j}$	Taşıyıcı motoru dişli kutusu diş oranı
$\eta_{m,j}$	Taşıyıcı motoru verimi
$K_{t,j}$	Taşıyıcı motoru tork sabiti
$I_{m,j}$	Taşıyıcı motoru giriş akımı
$\eta_{g,t}$	Kule motoru dişli kutusu verimi
$K_{g,t}$	Kule motoru dişli kutusu diş oranı
$\eta_{m,t}$	Kule motoru verimi
$K_{t,t}$	Kule motoru tork sabiti
$I_{m,t}$	Kule motoru giriş akımı
J_{θ}	Kule motoru eylemsizlik momenti
J_{α}	α sapma açısının oluşturduğu eylemsizlik momenti
J_{φ}	Makaranın eylemsizlik momenti
J_{ψ}	Vinç kolu motorunun eylemsizlik momenti
J_{γ}	γ sarkaç açısının oluşturduğu eylemsizlik momenti
γ	Vinç kolunun sarkaç açısı
α	Yükün dikey eksendeki sapma açısı
β	Sistemin sonsuz normu
θ	Kuleye bağlı döner kolun açısı
φ	Yükün bağlı olduğu makaranın açısı
g	Yerçekimi ivmesi
$m_{taşıyıcı}$	Taşıyıcının kütlesi
m_p	Yükün kütlesi
X_j	Taşıyıcının pozisyonu
l_p	Vinç kolu ile yük arasındaki dikey mesafe
l_j	Kule ile taşıyıcı arasındaki yatay mesafe
z	Yükün dikey eksendeki konumu
$r_{j,kasnak}$	Taşıyıcı motoruna ait kasnak yarıçapı
$r_{y,makara}$	Yüke bağlı makaranın yarıçapı

F_c	Viskoz sönümleme kuvveti
F_j	Taşıyıcı motoru tarafından üretilen doğrusal kuvvet
f_{ai}	Makaranın eylemsizliğinin ürettiği güç
f_y	Taşıyıcı motoru tarafından üretilen güç
$f_{coulomb}$	Coulomb sürtünmesinden kaynaklanan güç
B_y	Taşıyıcıya bağlı sarkacın viskoz sürtünme tork katsayısı
B_ψ	Taşıyıcı viskoz sönümleme kuvvet katsayısı
B_θ	Kule motoru viskoz sürtünme tork katsayısı
B_α	α açısının oluşturduğu viskoz sürtünme sönümleme tork katsayısı
$\tau_{m,j}$	Viskoz sönümleme kuvveti
$\tau_{m,t}$	Kule motoru tarafından üretilen tork
$q[i]$	Genelleştirilmiş koordinatlar
$Q[i]$	Genelleştirilmiş kuvvet
L	Lagrange eşitliği

KISALTMA LİSTESİ

PD	Oransal Türev
DME	Doğrusal Matris Eşitsizliği
LMI	Linear Matrix İnequality
MIMO	Çok Giriş-Çok Çıkış
HIFOO	H-Infinity Fixed Order Optimization
HANSO	Hybrid Algorithm for Non-Smooth Optimization
DA	Doğru Akım
DAQ	Data Acquisition Card
HIL	Hardware in Loop
DIO	Sayısal Giriş/Çıkış
CW	Saat Yönünde
CCW	Saat Yönünün Tersine
RCA	Radio Corporation of America
DB	A type of D-Sub connectors
PIV	Oransal İntegral Hız
LQR	Linear Quadratic Regulator
EOM	Equation of Motion
LQG	Linear Quadratic Gaussian Control

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

DAYANIKLI PD KONTROLCÜ TASARIMI

Gökhan AKÇA

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Akın DELİBAŞI

Kontrol sistemlerinde, sistemin $\mathscr{H}_\infty$ normunu minimize etmek için kullanılan standart tasarım yöntemleriyle elde edilen kontrolcülerin, en az sistem derecesi ile aynı dereceye sahip olmaları gerekmektedir. Bu durum düşük dereceli sistemler için ilk bakışta bir problem oluşturmasa da, sistemde ortaya çıkabilecek taleplere göre performans çıkışlarını oluşturabilmek için sistem giriş ve çıkışlarına eklenecek olan ağırlaştırılmış fonksiyonlar sistemin derecesini arttıracaktır. Standart yöntemler ile elde edilebilecek yüksek dereceli kontrolcülerin, başta gömülü sistemler ve uzay endüstrisi olmak üzere pratik uygulamalarda gerçeklenmesi düşüktür. Bu nedenlerden dolayı düşük ve sabit dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı konusu son zamanlarda kontrol mühendisliğinin en önemli çalışma alanlarından biri haline gelmiş ve bu konuyla ilgili çalışmalarda artış gözlenmiştir. Ancak, sabit dereceli kontrolcü tasarım probleminin konveks olmayan bir kümede tanımlı olması ve konveks olmayan kümelerde genel çözüm için hali hazırda çok terimli zamanlı bir çözme algoritmasının bulunmaması, son yıllarda yapılan çalışmalarda farklı çözüm yöntemlerinin kullanılmasına sebep olmuştur.

Sabit dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım problemlerinde dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri kontrolcüsü tasarlanacak olan sistemin içerdiği belirsizliklerin tasarım yapılırken göz önünde bulundurulmasıdır. Aksi halde tasarlanan kontrolcü, sistemi tam olarak temsil edemeyecek ve üretim kaybı oluşacaktır.

Bu tezin temel amacı sistemin $\mathscr{H}_\infty$ normunu minimize etmek için kullanılabilecek sabit dereceli kontrolcü tasarım metodu geliştirmektir. Kontrolcü tasarımı için standart tasarım yöntemlerinde kullanılan yaklaşımlar yerine pozitif çok terimli matrislerin özellikleri temelinde oluşturulan çok terimli yaklaşım metodu kullanılmıştır. Problemin temelinden gelen konveks olmayan yapı bilinen Kesin Pozitif Reel Lemma ile konveks bir şekle indirgenmiştir. Konveks problemin gösterimi ve çözümünde DME kullanılmıştır. Geliştirilen tasarım metodunun tutuculuğu tamamen seçilen merkezi çok terimliye bağlıdır.

Tezde ilk olarak belirsizlik içeren üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait bir alt sistem olan vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcı için tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanmıştır. Ardından önerilen tasarım metodu kullanılarak aynı model için başta dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ PD kontrolcü olmak üzere farklı derecelere sahip sabit dereceli dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcüler elde edilmiş ve elde edilen kontrolcüler benzetim ortamında sisteme uygulanarak sistem çıktıları oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit Dereceli Kontrolcü, Dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ Kontrolcü, PD Kontrolcü, Belirsizlik İçeren Sistemler, DME.

ABSTRACT

ROBUST PD CONTROLLER DESIGN

Gökhan AKÇA

Department of Control and Automation Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Assist. Prof. Dr. Akın DELİBAŞI

In control systems, when the standard design methods are used to minimize $\mathscr{H}_\infty$ norm of the system, the controllers which were obtained should have least same degree with the system. In this condition, even if there is not any problem for low-order systems at first sight, the system degree are going to increase due to the weighted functions which can be added to systems' input and output for creating performance outputs according to the requests. So the controllers which were obtained with usage of the standard design methods have low feasibility in practical applications, especially in the embedded systems and the aerospace industries. Because of the these reasons, the low-order or fixed-order $\mathscr{H}_\infty$ controller design problem has become the most important field in the control engineering and the studies have increased related with this subject. However, fixed-order controller design problem is defined in a nonconvex cluster and there is not any polynomial solving algorithm for general solution in nonconvex clusters, so different solution methods used in recent studies.

While the fixed order $\mathscr{H}_\infty$ controller is being designed, one of the most important points to be considered is system uncertainties for industrial control systems. Otherwise the controllers can not represent the systems and the production loss will be occured.

The main purpose of this thesis is to develop fixed-order robust $\mathscr{H}_\infty$ controller design method to minimize $\mathscr{H}_\infty$ norm of the system. While the controller is being designed, polynomial approach method is used which is created on basis of positive polynomial matrices' features instead of the using standard design approaches. The certain non-convex structure which is known from base of the problem is reduced to a convex shape with Positive Real Lemma. LMI is used to solve and represent the convex problem. Conservatism of the design method is depend selected central polynomial completely.

In this study, firstly a full-order $\mathscr{H}_\infty$ controller is designed by considering the uncertainty of the system for trolley on the jib subsystem which belongs to a three degree of freedom crane system. Secondly, the robust $\mathscr{H}_\infty$ PD controller is designed with proposed method. As well as fixed order robust $\mathscr{H}_\infty$ controllers which have different controller degrees are designed for same system. Finally, the controllers are applied to systems in simulation network and the system outputs are obtained.

Keywords: Fixed-Order Controller, Robust $\mathscr{H}_\infty$ Controller, PD Controller, Polytopic Uncertain Systems, LMI.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Tez çalışmasının üç kısımdan oluşan "Giriş" bölümünde öncelikle "literatür özeti" kapsamında, tez konusu ve benzeri konulara ilişkin olarak daha önce yapılmış olan akademik ve diğer çalışmalar ile bu çalışmalarda konunun ele alınış biçimleri incelenmektedir. Bölümün ikinci kısmını "tezin amacı" oluşturmakta ve bu kısımda, tezin temel ve yan amaçları, literatür içinde özgün ve yeni olacağı düşünülen tarafları anlatılmaktadır. "Giriş" bölümünün son kısmı ise "hipotez" bölümü olup bu bölümde tezin ortaya koyduğu temel fikir ve bunu destekleyen sonuçlar ortaya konulmaktadır.

1.1 Literatür Özeti

Sistemin $\mathscr{H}_\infty$ normunu minimize etmek için standart tasarım yöntemleri kullanılarak tasarlanan kontrolcülerin dereceleri en az sistem derecesine eşit olacak şekilde elde edilmektedir [1]. Düşük dereceli sistemler için bu durum ilk bakışta bir sorun oluşturmasa da unutulmamalıdır ki; taleplere göre performans çıkışlarını oluşturabilmek için sistemin giriş ve çıkışlarına eklenebilecek olan ağırlaştırılmış fonksiyonlar sistemin derecesini arttıracaktır. Sonuç olarak standart yöntemler ile elde edilecek olan yüksek dereceli kontrolcülerin başta gömülü sistemler ve uzay endüstrisi olmak üzere pratik uygulamalarda gerçeklenmesi zor olacaktır. Bu nedenlerden dolayı düşük ve sabit dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı konusu son zamanlarda kontrol mühendisliğinin en önemli çalışma alanlarından biri haline gelmiş ve konuyla ilgili çalışmalarda artış gözlenmiştir. Ancak, tasarım probleminin konveks olmayan bir kümede tanımlı olması ve konveks olmayan kümelerde genel çözüm için hali hazırda çok terimli zamanlı bir çözme algoritmasının bulunmaması, kontrolcü tasarımında farklı çözüm yöntemlerinin kullanılmasına neden olmuştur.

Standart $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımında DME formülasyonunun kullanımı [2] ve [3] çalışmalarında problemin konveks durum uzay parametrizasyonuna genişletilmesi ile formüle edilmiştir. Ayrıca sistem performansına ilişkin istenilenlerin gerçeklenmesi için kapalı çevrim kutuplarının bir bölgeye atanması problemi, $\mathscr{H}_\infty$ tasarımında Chilali ve Gahinet tarafından [4] de kullanılmıştır.

PID benzeri yapısal kontrolcü, çıkış geri besleme ve sabit dereceli kontrolcü problemleri konveks olmayan bir yapıya karşılık gelmektedir. Literatürde bu problemler genellikle iki şekilde aşılmaya çalışılmıştır. Bunlar iç konveks kestirim [5] ve dış konveks kestirimdir [6]. Dış konveks kestirim problemin çözümünde sadece gereklilik şartını sağlamaktadır, dolayısıyla performansın sağlanması garanti edilemez. İç konveks kestirimde ise alt çözüm kümelerinde kalmasına karşın performansın gerçeklenmesi garanti edilebilmektedir. İşte bu gerçeklikten ötürü yapılan çalışmalarda iç konveks kestirimin değeri daha çok artmıştır.

Düşük dereceli kontrolcü tasarımı için Wang ve Chow tarafından yayınlanan [7] de, sürekli zamanlı sistemler için kesin pozitif reel fonksiyonlar üzerinde aralarında asal çarpanlarına ayırma metodu kullanılarak bir alt çözüme ulaşılmıştır. Bir başka tasarım yöntemi olan matris rankının sınırlandırılması ile derece indirgeme tekniği, bir aktif süspansiyon sistemi için $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımında kullanılmıştır [8]. Bu yöntemin yanında, kısmen arttırılmış Langrange metodu ile sabit dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımının gerçekleştirildiği çalışma [9] verimli sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Ancak bu yöntemlerde kullanılan DME' lerin sağlanması için aranan şart Sınırlı Reel Lemma' daki gibi Lyapunov matrisi olmuş, direk kontrolcü katsayıları olmamıştır.

Kararlılık probleminin DME formülasyonunda direkt kontrolcü katsayılarının kullanıldığı çalışma durum uzay yaklaşımı yerine çok terimli gösterim yaklaşımının kullanıldığı bir çalışmadır [5]. Bu çalışmada, konveks olmayan bir gövde içerisinde Chilali ve Gahinet tarafından [4] de gösterilen DME-bölgeleme tekniği kullanılarak bir iç konveks alt gövde oluşturulmuş ve problem bu gövde üzerinde tanımlanmıştır. Problemin oluşturulmasında Kesin Pozitif Reel Lemmadan ve kuadratik Lyapunov kararlılığından daha az tutucu D- kararlılığından [10] faydalanılmıştır. Etkili sonuçlar veren bu yaklaşıma geometrik koşullar eklenerek Henrion tarafından [11] de sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normunun minimizasyonu sağlanmıştır. Bir başka çalışmada ise sisteme etkiyen belirsizliklerin normunun sınırlı olması fikrine dayalı analiz yapılarak daha önce ortaya çıkan geometrik kısıtlardan kurtulunmuştur [12].

$\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı için kullanılan ve çok terimli zamanlı olmayan algoritmaya dayalı farklı bir tasarım metodu ise çoğunlukla MIMO sistemlerin kontrolcü tasarımı için kullanılan loop-shaping yaklaşımıdır [13]. Buhar jeneratör sistemi için v-gap metric yöntemi ile birlikte dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcünün tasarlandığı [14], kimyasal bir süreç için düzgün olmayan yapıda PID kontrolcünün tasarlandığı [15] ve $\mathcal{H}_\infty$ PID kontrolcü tasarımı için durum uzay modeli çerçevesinde yeni bir algoritmanın önerildiği [16] da loop-shaping metodu kullanılmıştır.

Konveks olmayan yapı içerisinde çok terimli zamanlı olmayan algoritmaya dayalı bir başka tasarım yöntemi ise sabit dereceli kararlılık ve yerel optimizasyon problemlerini çözmek için geliştirilen HIFOO’ dur. HIFOO, belirtilen problemleri çözmek için HANSO destek paketi temelli optimizasyon tekniklerini kullanır. HIFOO, sistemin yerel optimal $\mathcal{H}_\infty$ performansını sağlayan düşük dereceli kontrolcü problemlerinde verimli sonuçlar verebilmektedir [17].

Sabit dereceli kontrolcü tasarım problemlerinde dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri de kontrolcüsü tasarlanacak olan sistemin içerdiği veya içerebileceği belirsizliklerin kontrolcü tasarlanırken göz önünde bulundurulmasıdır. Aksi halde tasarlanan kontrolcü, sistemi tam olarak temsil edemeyecek ve üretim kaybı oluşacaktır. Sistemde yer alan belirsizliklerin dikkate alınarak kontrolcü tasarımının gerçekleştirildiği çalışmalara örnek olarak [5], [12], [18], [19] gösterilebilir.

1.2 Tezin Amacı

Sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normunu minimize etmek için kullanılan standart tasarım yöntemleri ile elde edilen kontrolcü derecelerinin en az kontrol edilecek yapı, kontrolcü ve ağırlıklandırılmış fonksiyonların oluşturduğu sistem ile aynı dereceden olmasından ötürü elde edilen yüksek dereceli kontrolcülerin pratik uygulamalarda gerçeklenmesi kolay olmamaktadır, bu tez çalışmasında örnek alınan sistemin $\mathscr{H}_\infty$ normunu minimize etmek için kullanılabilecek sabit dereceli kontrolcü tasarım metodu geliştirilmeye çalışılacaktır. Geliştirilecek tasarım metodunun etkinliğini gösterebilmek adına belirsizlik içeren üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait vinç kolu alt sisteminde yer alan taşıyıcı için farklı derecelere sahip olacak şekilde dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcüler tasarlanmaya çalışılacaktır.

Tez çalışmasında, satın alınabilir bir eğitim seti olan üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait taşıyıcıya bir bozucu giriş uygulandığı varsayılarak ilk olarak tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanacaktır. Ardından *F. Yang* ve diğerlerinin [12] de önerdiği yöntem kullanılarak literatürde yer alan tasarım yöntemlerinden farklı olarak PD ve benzeri yapısal kontrolcülerin tasarımına da olanak sağlayan sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım metodu gösterilecektir. Gösterilen tasarım metodunda en önemli nokta konveks olmayan bir küme içerisinde D - kararlı bir merkezi çok terimli seçerek konveks bir küme yaratmak olacaktır. Önerilen bu yöntem kullanılarak taşıyıcı için sistem belirsizliklerine karşı dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımı gerçekleştirilecektir. Tezin son kısmında ise çalışmanın çıktısı olarak elde edilen farklı derecelerdeki kontrolcülerin performans çıkıtıları ve sistem durumlarındaki değişimler karşılaştırmalı şekilde verilecektir.

1.3 Hipotez

Vinç kolunda yer alan taşıyıcı sistemindeki belirsizlikler her bir köşe noktası için ayrı ayrı dikkate alınıp, sisteme ait çok terimliler için konveks olmayan gövde içerisinde konveks bir gövde oluşturmakta kullanılan D- kararlı bir yardımcı çok terimli fonksiyonu ve sınırlı bir sonsuz norm değeri verildiğinde sistemi dayanıklı D- kararlı kılıp sonsuz normu için optimal altı bir sonuç veren kontrolcü çok terimlileri bulunabilir.

BÖLÜM 2

ÜÇ SERBESTLİK DERECELİ VİNÇ SİSTEMİ

Bu bölümde dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ PD kontrolcüsü tasarlanacak olan üç serbestlik dereceli vinç sisteminin bileşen yapısı, sistem parametreleri, kablolama yapısı ve sistem modeli hakkında gerekli bilgiler verilecektir [20].

Şekil 2. 1 Vinç sistemi yapısı

2.1 Giriş

Üç serbestlik dereceli vinç sistemi Şekil 2. 1' de gösterildiği gibi kule vinç sisteminin kompakt bir versiyonudur. Gerçek bir vinç sistemine benzer şekilde 3 serbestlik dereceli bir yapıya sahiptir. Kule sistemi her iki yönde de hareket ederken, taşıyıcı sistem yatay eksende ileri ve geri hareket edebilmektedir. Ek olarak taşıyıcı, sisteme bağlı yükün yüksekliği taşıyıcı yardımıyla ayarlanabilmektedir.

Vinç sistemi, sistem yapısına ait yükü tutarken aynı zamanda elektriksel giriş-çıkış devrelerini içeren bir direk olarak da bilinir. Bu devre yapıları, veri toplama terminali ile birlikte bilgisayar ve vinç sistemi arasında veri alışverişini sağlayan sensör ve motor hareket sinyallerinin ulaşımına imkân sağlar.

Yatay eksende kulenin üzerine takılı olan ve bir motor yardımı ile saat yönü ve saat yönünün tersine hareket edebilen sistem vinç kolu sistemi olarak adlandırılmaktadır. Vinç kolu yine başka bir motor ile hareket ettirilen bir taşıyıcıya sahiptir ve bu taşıyıcı kendisine kablo ile bağlı olan yükü dikey eksende hareket ettirebilir. Her bir motor mili optik kodlayıcılar ile donatılmıştır. Bu motorlar her biri 100 Watt kapasiteye sahip olan doğrusal akım kontrollü yükselteçler tarafından sürülmektedir.

2.2 Vinç Sistemi Bileşenleri

2.2.1 Bileşen Terminolojileri

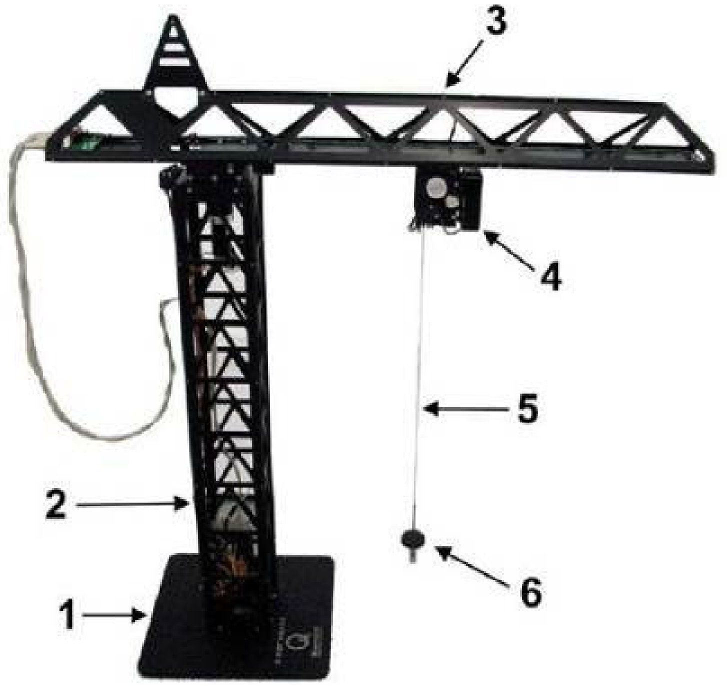
Çizelge 2. 1’ de üç serbestlik dereceli vinç sisteminde yer alan bileşenlerin kısa açıklamaları ve bu bileşenlerin ileriki sayfalarda verilecek olan şekillerde ayırt edilebilmesi için kimlik numaraları verilmiştir.

Çizelge 2. 1 Vinç sistemi bileşenleri

KN#	Açıklama	KN#	Açıklama
1	Temel gövde	4	Taşıyıcı
2	Kule	5	Çelik kablo
3	Vinç kolu	6	Yük

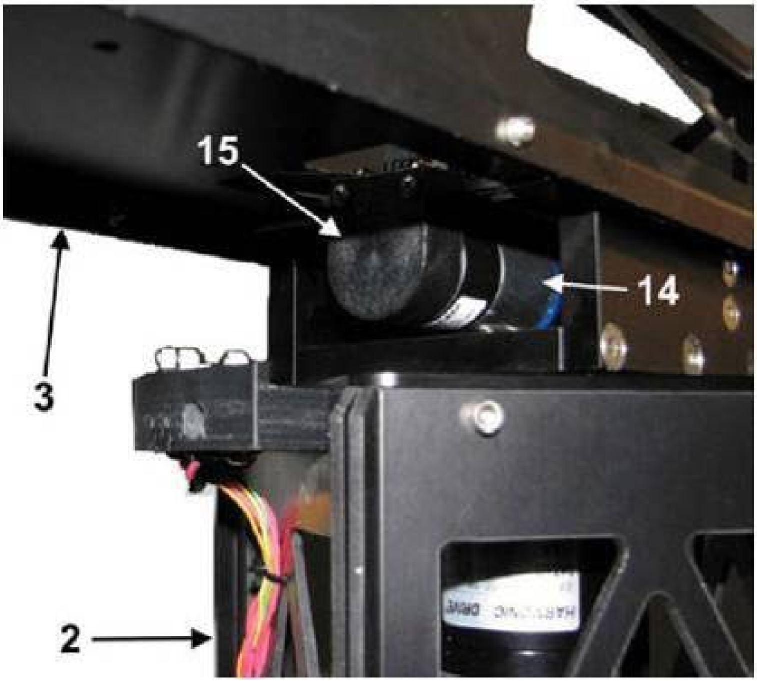
Çizelge 2. 1 Vinç sistemi bileşenleri (Devamı)

7	Kule Motoru	24	Yük motoru çıkış kasnağı
8	Harmonik sürücü	25	Kayış
9	Kule kodlayıcısı	26	Sarkaç
10	CCW kule limit anahtarı	27	Y sarkacının kodlayıcısı (γ)
11	CW kule limit anahtarı	28	X sarkacının kodlayıcısı (α)
12	CCW kule kilitleme güvenlik anahtarı	29	Yük limit anahtarı
13	CW kule kilitleme güvenlik anahtarı	30	Çelik kablo (gösterilmemiştir)
14	Taşıyıcı motoru	31	Giriş/çıkış plakası
15	Taşıyıcı kodlayıcısı	32	Kule kodlayıcısının konektörü
16	Doğrusal rehber	33	Taşıyıcı kodlayıcısının konektörü
17	CCP-RET limit anahtarı	34	Yük kodlayıcısının konektörü
18	CCP-EXT limit anahtarı	35	X sarkacına ait kodlayıcının (γ) konektörü
19	Yük devre kutusu	36	Y sarkacına ait kodlayıcının (α) konektörü
20	Yük kasnağı	37	Kule motorunun konektörü
21	Yük motoru	38	Vinç kolu motorunun konektörü
22	Yük kodlayıcısı	39	Taşıyıcı motorunun konektörü
23	Yük motoru dişli kasnağı	40	Sayısal konektör limit anahtarları

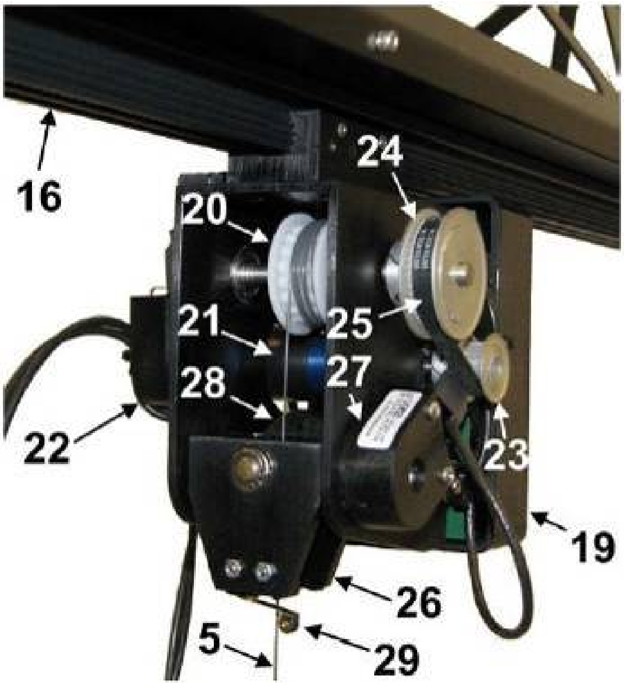


Şekil 2. 2 Vinç sistemi üzerinde yer alan ana bileşenler

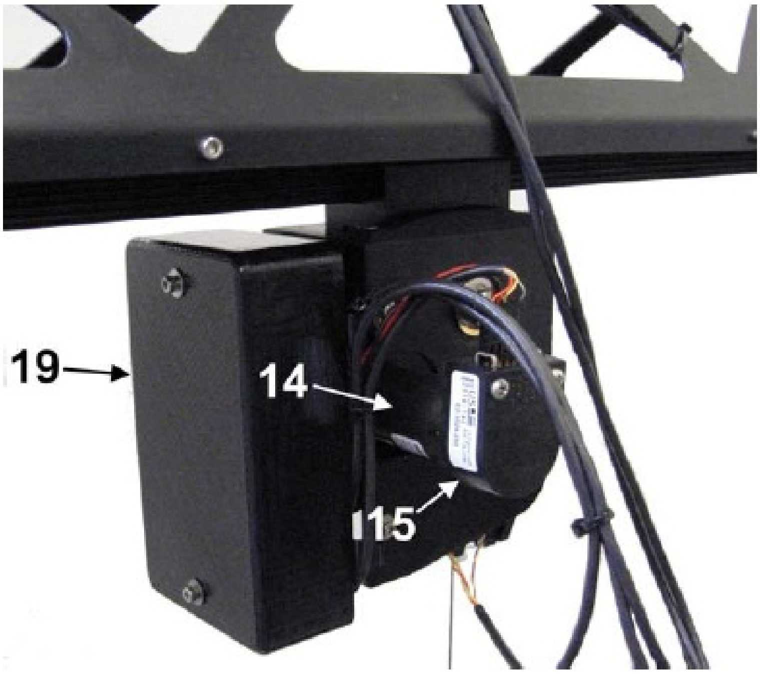
Şekil 2. 3 Kule motoru ve limit anahtarları



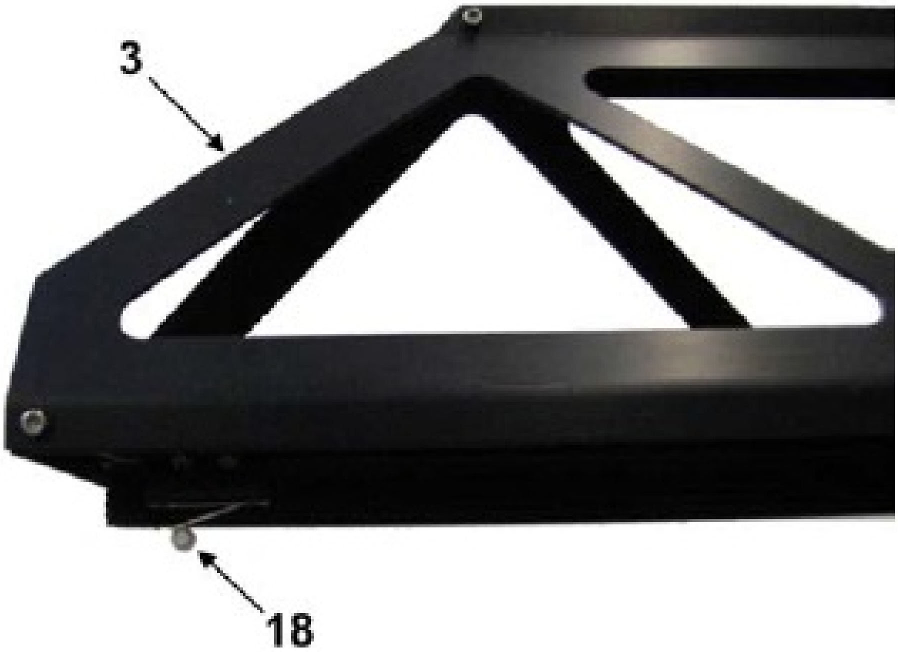
Şekil 2. 4 Taşıyıcı motoru



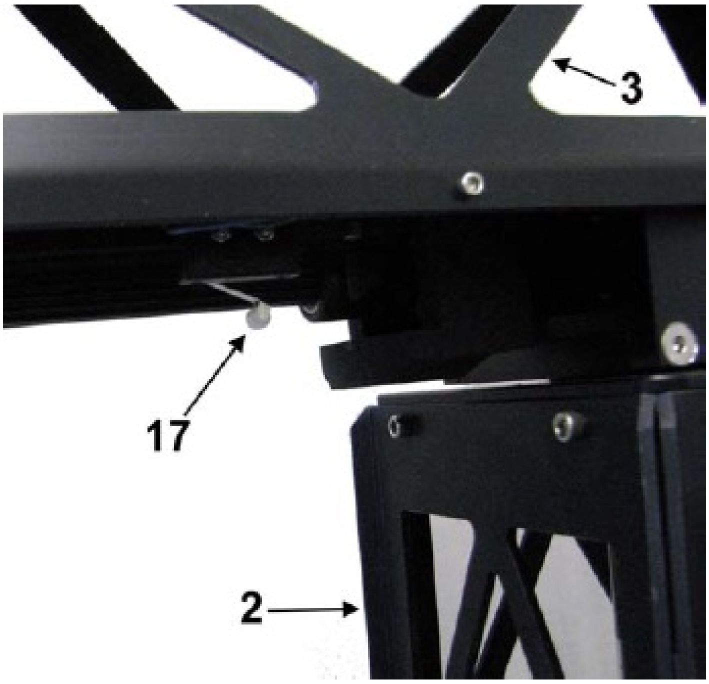
Şekil 2. 5 Taşıyıcı üzerindeki bileşenler



Şekil 2. 6 Taşıyıcı motor üzerinde yer alan bileşenler



Şekil 2. 7 EXT limit anahtarı



Şekil 2. 8 RET limit anahtarı

Şekil 2. 9 Konektör panosu

2.2.2 Bileşen Açıklamaları

Bu bölümde Çizelge 2. 1' de verilmiş olan sistem bileşenlerinin çalışma yapısından bahsedilecek ve bu bileşenlerin sistem içerisinde ne gibi görevler üstlendiği açıklanacaktır.

2.2.2.1 Kule

2.2.2.1.1 Motor ve Kodlayıcı

Şekil 2. 2' de görüldüğü gibi üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait kulenin yapısı, zemine göre dik olacak şekilde tasarlanmıştır. Kule, tabanda bulunan plakanın üzerine konumlandırılarak sistemin dikey konumunda kalmasına katkı sağlanmıştır. Kule sisteminin üst kısmı yüksek kalitede bir dc motor (KN#7), harmonik sürücü (KN#8) ve bir optik kodlayıcıdan (KN#9) oluşmaktadır. Kulenin üzerine yatay olarak konumlandırılmış olan yapı vinç kolu (KN#3) olarak adlandırılmıştır. Optik kodlayıcılar vinç kolu sisteminin açısal dönmesini hesaplarken, motorlu dişli kutusu vinç kolu sistemini saat yönünde ve tersi yönde hareket ettirebilmektedir.

2.2.2.1.2 Kule Limit Anahtarları

Kule sistemi Şekil 2. 3' de görülebileceği gibi yönleri saat yönünün tersinde (KN#10) ve saat yönünde (KN#11) olmak üzere iki adet limit anahtarına sahiptir. Her bir anahtar kule tarafından tetiklenebilmektedir. Bu tetiklenme kalibrasyon ve güvenlik için yazılım tarafından kullanılabilecek sayısal bir sinyaldir.

2.2.2.1.3 Kule Kesme Diyotları

Ek olarak kule sistemi Şekil 2. 3' de gösterildiği üzere, saat yönünün tersine (KN#13) ve saat yönünde (KN#12) olmak üzere akım kesme diyotları gibi davranan iki adet kilitleme anahtarına sahiptir. Bunlar donanım güvenlik sınırlayıcılarıdır. Kule sistemi döner ve anahtarlar üzerinde aşağı yönde baskı uygularsa, güç modülü bu yönde kule motorunun akım desteğini durduracaktır. Böylece kule saat yönünde dönüyorsa ve saat yönü anahtarına aşağı yönlü baskı uygularsa, kulenin saat yönünde daha fazla hareket etmesi mümkün olmayacaktır. Fakat kullanıcı, sistemi saatin tersi yönünde hareket ettirmek için akım desteği sağlayabilecektir. Bu işlemler yazılımdan bağımsız olarak gerçekleştirilebilmektedir.

2.2.2.1.4 Kablolar

Kablolar ve teller çoğunlukla sistem içerisine yerleştirilmiş ve bilgisayar ile üç serbestlik dereceli vinç sistemi arasındaki sinyalleri taşıyan yapılardır. Kablo ve teller yatay eksen üzerinde öncelikli olarak çeşitli motorlara ve kodlayıcılara bağlıdır. Bu kablolardan çoğu kule sisteminin içeriğinde yer alan devre kartlarının giriş/çıkış arayüzlerinde sonlanır.

2.2.2.2 Vinç Kolu

Yatay eksende kule sisteminin üzerine monte edilmiş olan ve Şekil 2. 2’ de gösterilen sistem vinç kolu (KN#3) olarak adlandırılır. Şekil 2. 4’ de gösterildiği gibi vinç kolu sistemi bir adet dc motora (KN#14) ve bir adet kodlayıcıya (KN#15) sahiptir. Motor vinç kolu sistemine monte edilmiş olan taşıyıcının (KN#4) pozisyonunu belirlemede kullanılır. Taşıyıcı vinç kolu sisteminin alt kısmı boyunca hareket edebilmektedir.

Vinç kolu sisteminin uç kısmındaki durdurma bloğu, Şekil 2. 7’ de gösterilen CCP-EXT limit anahtarı (KN#18) ile donatılmıştır. Bu blok taşıyıcının istenmeyen sınırlarda hareketini önlemektedir. Limit anahtarı ise kontrolcünün durdurulmasını tetiklemek için veya kalibrasyon için kullanılabilmektedir. Şekil 2. 8’ de gösterilen CCP-RET limit anahtarı (KN#17) ise mesafe sensörü olarak kullanılır ve taşıyıcının başlangıç noktasında olup olmadığını belirler.

2.2.2.3 Taşıyıcı

Şekil 2. 6’ da görüldüğü gibi taşıyıcı sistem kendisine bağlı olan yükü hareket ettirmek için bir adet dc motor (KN#22) ve bir adet kodlayıcı (KN#6) ile donatılmıştır. Yine Şekil 2. 5’ de resmedildiği üzere motor çıkış mili kayış (KN#25) yardımıyla çıkış kasnağını (KN#24) sürmek için dişli kasnağa (KN#23) bağlıdır. Kasnağın üzeri uç kısmında yük (KN#6) asılı olan çelik kablo ile sarılmıştır. Yükün yerden yüksekliği değiştirilmek istenildiğinde kasnak içeri veya dışarı doğru hareket ettirilir.

Taşıyıcı sisteminin alt tarafında bulunan ve Şekil 2. 5' de gösterilen denge noktası (KN#26) kablonun herhangi bir yöne sallanmasına imkan sağlamaktadır. Bu noktada denge noktasının alt tarafına tutturulmuş bir limit anahtarı (KN#29) bulunmaktadır. Yük limit anahtarı üzerinde baskı yaptığında sensör tetiklenir. Bu sinyal yükte fazla miktarda artış olmasını önlemek ve kalibrasyon için kullanılmaktadır.

Çelik kablo vinç kolu sistemine uzunlamasına asılıyken, kablonun sallanma miktarını ölçen optik kodlayıcı (KN#27) Şekil 2. 5' de gösterilmektedir. Yük vinç kolu sistemine karşı dik olarak hareket ettiği zaman kablonun sallanma miktarını hesaplayan optik kodlayıcılar ise KN#28 ile kodlanmıştır.

2.2.2.4 Giriş/Çıkış Arayüz Birimleri

Üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait giriş/çıkış birimleri Şekil 2. 9' da gösterilmiştir. Giriş/çıkış birimi vinç sistemine ait kulenin tabanına yakın olacak şekilde konumlandırılmıştır. Bu birim veri toplama terminal kartı ve güç modülünün üç serbestlik dereceli vinç sisteminin arayüzü ile doğrudan iletişim kurmasına imkân sağlayan konektör soketlerine sahiptir.

2.2.2.5 Güç Modülü

Güç modülü darbe genişlik modülasyonlu bir akım yükseltecidir ve üç serbestlik dereceli vinç sisteminde yer alan motorları sürmek için kullanılır. Güç modülünün teknik özellikleri Çizelge 2. 2' de yer almaktadır. Bu özelliklere göre veri toplama kartından gelen sinyal giriş konektörüne bağlı olmalıdır. Duyu konektör çıkışları DA motor içinde ölçülen mevcut değerlerdir. Güç modülünün aktif konektör soketi güç modülünü aktif veya pasif hale getirmek için sayısal giriş sinyallerini bilgisayardan alır. Güçlendirilmiş akım ise çıkış konektöründen gönderilir.

Güç modülünün çıkış soketinden gelen her bir motor sürücüsünün güçlendirilmiş akım sinyali bir led ile gösterilmektedir. Vinç motoru veya herhangi bir hareketin çıkış sinyali aktif hale geldiğinde çıkış sinyaline ait led yanmaktadır. Aynı şekilde herhangi bir çıkış sinyali pasif hale geldiğinde ise çıkış sinyaline ait sönmektedir. Örnek olarak, güç modülüne ait bir çıkış aktif olursa, vinç motoru bu çıkışa bağlanıp harekete geçecek ve bu çıkışa ait led yanmaya başlayacaktır. Modüle ait çıkış pasif olduğunda ise vinç motoru harekete geçemeyecek ve led yanmayacaktır.

Çizelge 2. 2 Güç modülü teknik özellikleri

Sembol	Açıklama	Değer	Birim
	Güç modülünün maksimum giriş gerilimi aralığı	[-10, +10]	V
	Güç modülünün maksimum giriş akımı	25	mA
	Güç modülü aktif şerit kablo sinyallerinin gerilimi	[0, 5]	V
	Güç modülünün aktif şerit kablo sinyalleri	1	mA
	Harici güç kaynağı	120/240	V
	Harici güç kaynağının gerilim frekansı	60/50	Hz
V_{A_SUP}	Güç modülünün kaynak gerilimi	27	V
V_{A_RING}	Güç modülü gerilimi giriş aralığı	[-10, +10]	V
K_a	Güç modülünün kazancı	0.5	A/V
I_{MAX}	Güç modülü akımının tepe noktası	7	A
$I_{MAX, CONT}$	Güç modülünün sürekli çıkış akımı	2.15	A
B	Akım yükseltecinin bant genişliği	500	Hz
S_{AMP_SEN}	Akım sensörünün duyarlılığı	2.0	A/V

2.3 Vinç Modeli ve Sistem Parametreleri

Üç serbestlik dereceli vinç sisteminde yer alan kule, vinç kolu ve yük alt sistemleriyle ile ilgili genel teknik özellikler Çizelge 2. 3, 2. 4 ve 2. 5’ de verilmiştir. Ek olarak eksenler ile ilgili eylemsizlik moment bilgileri Çizelge 2. 6’ da ve çeşitli bileşenlerin ebat bilgileri Çizelge 2. 7’ de listelenmiştir.

Çizelge 2. 3 Kule motoru ve kodlayıcı teknik özellikleri

Sembol	Matlab Gösterimi	Açıklama	Değer	Birim
$K_{t,t}$	Kt_t	Kule motorunun tork sabiti	8.93	N.m/A
K_{emb}		Kule motorunun geri-emf sabiti	0.119	V.s/rad
$R_{m,t}$		Kule motorunun terminal direnci	11.5	Ω
$L_{m,t}$		Kule motorunun terminal endüktansı	3.16	mH
J_m		Çarkın eylemsizlik momenti	1.02e-6	$kg.m^2$
$J_{m,t}$	Jm_t	Eşdeğer çarkın eylemsizlik momenti (dişli oranı ile birlikte)	0.0102	$kg.m^2$
$T_{max,c}$		Maksimum sürekli tork (dişli kutusu çıkışında)	8.6	N.m
$T_{max,p}$		Azami tork (dişli kutusu çıkışında)	22.6	N.m
$K_{g,t}$	Kg_t	Kule motoruna ait dişli kutusunun dişli oranı	100:1	
$\mu_{g,t}$	eff_g_t	Kule motorunun dişli kutusu verimi	1.00	

Çizelge 2. 3 Kule motoru ve kodlayıcı teknik özellikleri (Devamı)

$I_{m,c}$		Kule motorunun maksimum sürekli akımı	0.943	A
$I_{m,p}$		Kule motorunun maksimum azami akımı	4.1	A
$S_{PPR,\Theta}$		Kule kodlayıcısının çözünürlüğü	4096	counts/rev
$K_{enc,\Theta}$	K_ENC_THE	Kule konumunun hassasiyet kazancı	1.534e-5	m/rev

Çizelge 2. 4 Taşıyıcıya ait teknik özellikler

Sembol	Matlab Gösterimi	Açıklama	Değer	Birim
$K_{t,j}$	Kt_j	Taşıyıcı motorunun tork sabiti (dişli oranı olmadan)	0.0396	N.m/A
$R_{m,j}$		Taşıyıcı motorunun terminal direnci	6.8	Ω
$L_{m,j}$		Taşıyıcı motorunun terminal endüktansı	0.620	mH
$J_{m,j}$	Jm_j	Taşıyıcı motorunun çark eylemsizliği	1.63e-7	$kg.m^2$
$\eta_{g,j}$	eff_g_j	Taşıyıcı motoruna ait dişli kutusunun verimi	0.95	

Çizelge 2. 4 Taşıyıcıya ait teknik özellikler (Devamı)

Kg,j	Kg_j	Taşıyıcı motoruna ait dişli kutusunun dişli oranı	3.7:1	
$V_{m,j}$		Taşıyıcı motorunun nominal gerilimi	12	V
P_t	Pt	Vida adımı	0.0127	m/rev
$S_{PPR,J}$		Taşıyıcı kodlayıcısının çözünürlüğü	4096	counts/rev
$K_{enc,x}$	K_ENC_X	Taşıyıcı konumunun hassasiyet kazancı (yön kuralı ile birlikte)	-8.38e-7	m/rev
l_j	1j	Taşıyıcının eksenden maksimum uzaklığı	0.8065	M

Çizelge 2. 5 Yüke ait teknik özellikler

Sembol	Matlab Gösterimi	Açıklama	Değer	Birim
$K_{t,y}$	Kt_y	Yük motorunun tork sabiti (dişli oranı olmadan)	0.0261	N.m/A
$\mu_{m,y}$	eff_m_y	Yük motorunun verimi	1.00	
$K_{g,y,i}$	Kg_y_i	Motor dişli kutusu (iç dişli oranı)	14:1	
$K_{g,y,e}$	Kg_y_e	Motor kasnağının dişli oranı (harici)	2:1	
$K_{g,y}$	Kg_y	Motor kasnağının eşdeğer dişli oranı	28:1	

Çizelge 2. 5 Yüke ait teknik özellikler (Devamı)

$\mu_{g,y}$	eff_y_t	Yük motorunun dişli kutusu verimi	1.00	
$J_{m,y}$	Jm_y	Eşdeğer çarkın eylemsizlik momenti (dişli oranı ile birlikte)	5.8e-7	$kg.m^2$
$r_{y,reel}$	r_y_reel	Yük makarasının yarıçapı	0.0148	M
$m_{y,reel}$	m_y_reel	Yük makarasının kütlesi	0.030	Kg
$S_{PPR,Z}$		Yük kodlayıcısının çözünürlüğü	4096	counts/rev
$K_{enc,z}$	K_ENC_Z	Yük konumunun hassasiyet kazancı	-7.83e-7	m/rev
$S_{PPR,\alpha}$		X sarkacına ait kodlayıcının çözünürlüğü	4096	counts/rev
$K_{enc,\alpha}$	K_ENC_ALPHA	X sarkacının konum hassasiyet kazancı	0.0015	m/rev
$S_{PPR,\gamma}$		Y sarkacına ait kodlayıcının çözünürlüğü	4096	counts/rev
$K_{enc,\gamma}$	K_ENC_GAMMA	Y sarkacının konum hassasiyet kazancı	0.0015	m/rev
l_p	1p	Vinç kolundan yüke olan uzaklık	0.8636	M
m_p	m_p	Yükün kütlesi (her biri 0.12 kg)	0.147	Kg

Çizelge 2. 6 Eksenler ile ilgili eylemsizlik moment bilgileri

Sembol	Matlab Gösterimi	Açıklama	Değer	Birim
J_{θ}	J_theta	Kule motorunun eşdeğer eylemsizlik momenti	0.8872	$kg.m^2$
J_{ψ}	J_psi	Vinç kolu motorunun eşdeğer eylemsizlik motoru	9.14e-7	$kg.m^2$
J_{ϕ}	J_phi	Taşıyıcı motorunun eşdeğer eylemsizlik momenti	3.64e-6	$kg.m^2$
J_{α}	J_alpha	Sarkaca ait α açısı etkili eşdeğer eylemsizlik momenti	0.00	$kg.m^2$
J_{γ}	J_gamma	Sarkaca ait γ açısı etkili eşdeğer eylemsizlik momenti	0.00	$kg.m^2$

Çizelge 2. 7 Vinç sisteminde yer alan bileşenlerin ebat bilgileri

Sembol	Açıklama	Değer	Birim
L_S	Kulenin bir tarafının uzunluğu	0.1475	M
L_B	Kare taban plakanın kenar uzunluğu	0.405	M

Çizelge 2. 7 Vinç sisteminde yer alan bileşenlerin ebat bilgileri (Devamı)

L_E	Taşıyıcının etkin uzunluğu	0.75	M
L_W	Kulenin dikey eksen uzunluğu	1.202	M
H_T	Taban plakasının kalınlığı	0.01	M
H_F	Lastik ayakların kalınlığı	0.00735	M
W_J	Vinç kolu tabanının genişliği	0.12	M
H_J	Vinç kolunun tabandan yüksekliği	0.115	M
L_J	Yatay eksende vinç kolunun uzunluğu	1.205	M
L_Y	Taşıyıcı tarafının uzunluğu (yola paralel taraf)	0.0575	M
W_K	Vinç kolunun genişliği	0.04845	M

2.4 Vinç Modeli Kablolama Prosedürü

Bu bölümde üç serbestlik dereceli vinç sisteminde var olan standart bağlantı prosedürü tanıtılacaktır.

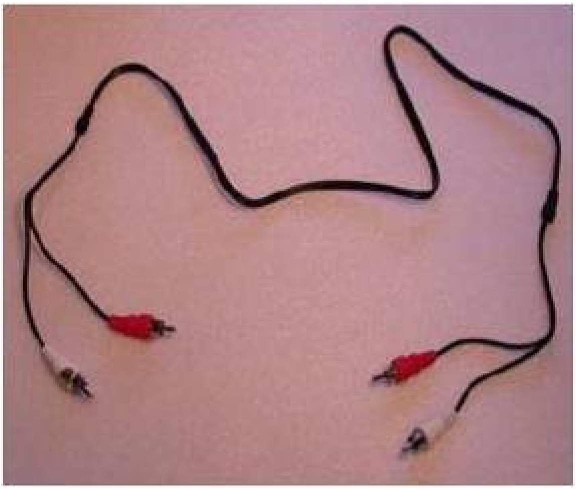
2.4.1 Kablo Terminolojileri

Üç serbestlik dereceli vinç sisteminin bağlantı yapısı içerisinde kullanılan standart kablolar Çizelge 2. 8’ de açıklamaları ile birlikte verilmiştir.

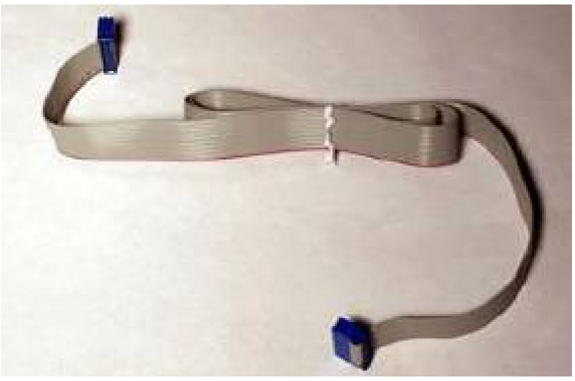
2.4.2 Vinç Sisteminde Yer Alan Tipik Bağlantılar

Bu bölümde vinç sistemini kurarak aktif hale getirmek için gerekli olan bilgi ve prosedürler verilecektir. Şekil 2. 14 ve Şekil 2. 15’ de sistemde yer alan bağlantılar verilmiştir. Bu şekillerde numaralandırılmış bileşenlerin açıklamaları vinç sistemindeki bağlantı yapısının özetlendiği Çizelge 2. 9’ da yer almaktadır. Kablo ve tel bağlantılarının yapılmasının ardından vinç sistemi istenilen amaç doğrultusunda kullanılabilir. Vinç sisteminin kurulması için öncelikle bilgisayarın ve güç modülünün

Çizelge 2. 8 Kablo terminolojileri

Kablo	Açıklama
 Şekil 2. 10 Analog giriş/çıkış kablosu	Analog giriş/çıkış kablosu iki ayrı RCA kablosundan oluşmaktadır. Bu kabloların her birinin iki ucunda da erkek konektörler mevcuttur. Kabloların birbirinden ayrı olduğunun vurgulanması için kablolardan bir tanesi kırmızı, diğeri beyaz renkte olacak şekilde tasarlanmıştır. Bir kablo HIL terminal kartından güç modülüne bir analog sinyal taşırken, diğer kablo DAQ terminal kartından güç modülüne diğer analog sinyali taşımaktadır. Ticari ve endüstriyel uygulamalarda bazen analog giriş/çıkış sinyal kablosu yerine Stereo RCA kablolar tercih edilebilmektedir.

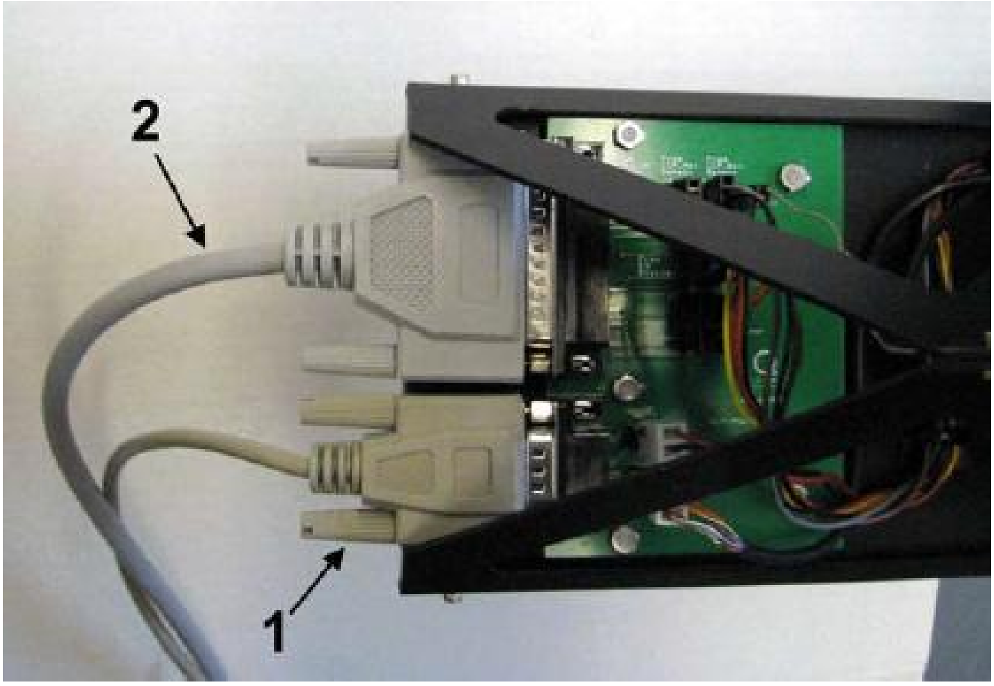
Çizelge 2. 8 Kablo terminolojileri (Devamı)

 Şekil 2. 11 Güç modülü motor kablosu	Motor kablosu bir ucunda 4-çatallı erkek konektöre, diğer ucunda ise 4 erkek pinli DIN konektöre sahiptir. Sadece tek bir şekilde takılabilmesi için kablonun güç modülü tarafı anahtarlanmıştır. Ayrıca kablonun güvenli bir şekilde takılabilmesi için vidalanabilen ve dönebilen bir kapak mevcuttur. Her motor kablosu güç modülünden sisteme ait motorlardan birine akım güçlendirilmiş sinyal taşımak ile görevlendirilmiştir.
 Şekil 2. 12 Şerit kablo	Şekil 2. 12’ de iki adet 16 telli şerit kablolar verilmiştir. Şerit kablolar iki ucunda da aynı dişi konektörlere sahiptir ve kabloların tek bir şekilde takılabilmesi için her iki uç da anahtarlanmıştır. Bir kablo güç modülü ile DAQ terminal kartı arasında bağlıdır. Bu kablo çıkış soketinde mevcut olan güçlendirilmiş motor sinyallerine izin vererek ve reddederek bilgisayardan güç modülüne aktif sinyalleri taşır. Diğer kablo ise DAQ terminal kartı ile vinç sistemi arasında bağlıdır ve BCP, L/R, vinç kolu Ret, vinç kolu Ext ve yük gibi limit anahtar sinyallerini taşır.

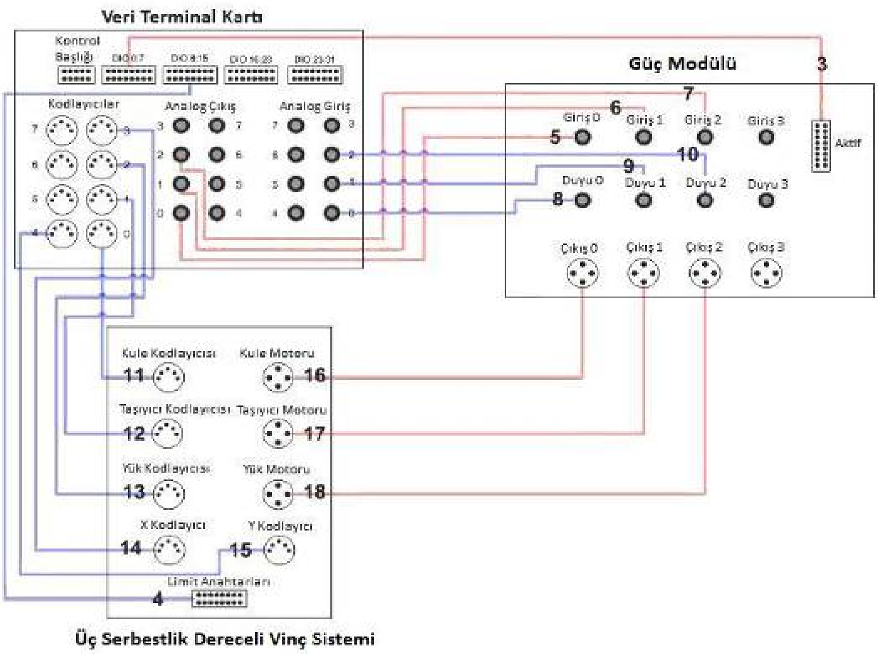
Çizelge 2. 8 Kablo terminolojileri (Devamı)

 Şekil 2. 13 Kodlayıcı kablosu	Kodlayıcı kablosu iki ucu da 5 pinli stereo DIN konektörden oluşan bir kablodur. Kodlayıcı kablosu vinç sistemine ait kodlayıcıdan direkt olarak veri toplama kartına bağlıdır. Bu kablo kodlayıcı sinyallerini taşır ve aynı zamanda kodlayıcıya DA güç desteği sağlar.

gücünün kesildiğinden emin olunmalıdır. Özellikle açıkken değiştirilebilen kodlayıcı sinyalleri için herhangi bir girişimde bulunulmamalıdır. Kodlayıcı sinyalleri bilgisayardan kodlayıcıya güç taşıyarak kodlayıcının, HIL kartında veya bilgisayarda var olabilecek tehlikeli dalgalanmalara karşı duyarlı olmasını sağlamaktadır. Gerekli birimlerde gücün var olmadığından emin olunduktan sonra vinç kolundan çıkan DB-9 ve DB-25 konektörleri, Şekil 2. 14’ de gösterildiği gibi siyah kule tabakası üzerine yerleştirilmiş DB-9 ve DB-25 dişi konektörlerine bağlanmalıdır. Vinç sistemi, veri toplama kartı ve güç modülü arasındaki bağlantılar ise Şekil 2. 15’ de gösterilen ve Çizelge 2. 9’ de özetlenen bağlantı yapısı dikkate alınarak yapılabilir. Bu şekil ve çizelgede 2 şerit kablonun, 5 kodlayıcı kablosunun, 3 analog çıkış kablosunun ve 3 analog giriş kablosunun bağlantılarının nasıl yapılacağına dair bilgiler yer almaktadır.



Şekil 2. 14 Kule ve vinç kolu arasındaki bağlantı yapısı



Şekil 2. 15 Veri terminal kartı, güç modülü ve vinç sistemi arasındaki bağlantılar

Çizelge 2. 9 Vinç sisteminde var olan kablo yapısının özeti

Kablo#	Kablo Tipi	Başlangıç Yeri	Sonlanma Yeri	Sinyal
1	DB-9	Vinç kolu	Kule üzerindeki DB-9 konektör	Taşıyıcı ve yük motoru sinyalleri
2	DB-25	Vinç kolu	Kule üzerindeki DB-25 konektör	Taşıyıcı, yük ve sarkaç kodlayıcı sinyalleri, ayrıca kule CW, kule CCW, vinç kolu Ret, vinç kolu Ext ve yük limit anahtarları
3	Şerit kablo	Terminal kartı DIO0	Güç modülü	Aktif/pasif motorlar
4	Şerit kablo	Terminal kartı DIO1	Vinç limit anahtarı	Vinç üzerinde okunan limit anahtarları
5	RCA kablosu	Terminal kartı analog çıkış #0	Güç modülü giriş #0	Kule motorunun yükseltici komutu
6	RCA kablosu	Terminal kartı analog çıkış #1	Güç modülü giriş #1	Taşıyıcı motorunun yükseltici komutu
7	RCA kablosu	Terminal kartı analog çıkış #2	Güç modülü giriş #2	Yük motorunun yükseltici komutu
8	RCA kablosu	Terminal kartı analog giriş #0	Güç modülü duyu #0	Kule motorunda ölçülen akım

Çizelge 2. 9 Vinç sisteminde var olan kablo yapısının özeti (Devamı)

9	RCA kablosu	Terminal kartı analog giriş #1	Güç modülü duyu #1	Taşıyıcı motorunda ölçülen akım
10	RCA kablosu	Terminal kartı analog giriş #2	Güç modülü duyu #2	Yük motorunda ölçülen akım
11	Kodlayıcı kablosu	Kule kodlayıcısının konektörü	Terminal kartı Kodlayıcı giriş #0	Kule motoru kodlayıcısı dönen kulenin açısını hesaplamak için kullanılır, θ
12	Kodlayıcı kablosu	Taşıyıcı kodlayıcısının konektörü	Terminal kartı Kodlayıcı giriş #1	Taşıyıcı motoru taşıyıcının kaydırımını hesaplar, x
13	Kodlayıcı kablosu	Yük kodlayıcısı	Terminal kartı Kodlayıcı giriş #2	Yük motoru kodlayıcısı yükün yüksekliğini ölçmek için kullanılır, z
14	Kodlayıcı kablosu	X sarkacına ait kodlayıcı	Terminal kartı Kodlayıcı giriş #3	Yükün vinç kolunun enine göre sallanma açısı, γ
15	Kodlayıcı kablosu	Y sarkacına ait kodlayıcı	Terminal kartı Kodlayıcı giriş #4	Yükün vinç kolunun boyuna göre sallanma açısı, α
16	Motor kablosu	Güç modülü çıkış #0	Kule motorunun konektörü	Kule motoruna giden güçlendirilmiş sinyal

Çizelge 2. 9 Vinç sisteminde var olan kablo yapısının özeti (Devamı)

17	Motor kablosu	Güç modülü çıkış #1	Taşıyıcı motorunun konektörü	Taşıyıcı motoruna giden güçlendirilmiş sinyal
18	Motor kablosu	Güç modülü çıkış #2	Yük motorunun konektörü	Yük motoruna giden güçlendirilmiş sinyal

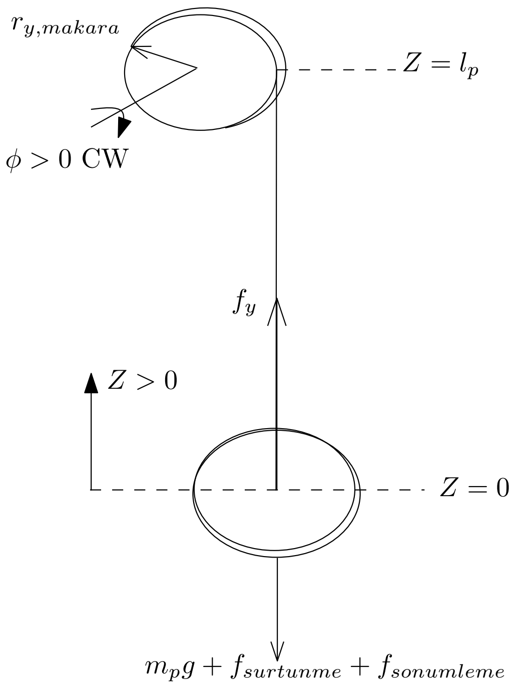
2.5 Sistem Modeli

Üç serbestlik dereceli vinç sistemi kendi içinde yük, vinç kolu ve kule olmak üzere 3 ayrı alt sisteme ayrılmaktadır. Bu alt sistemlere ait model yapısı bu bölümde verilecektir. Maple çalışma sayfası yardımıyla gerçekleştirilen modelleye ait komut dosyalarına ise tez çalışmasının ek kısmında yer verilmiştir.

2.5.1 Yük Alt Sistemi

2.5.1.1 Yük Pozisyonunun Modellenmesi

Bu bölümde, yükün dikey pozisyonu ile taşıyıcı motorunun giriş akımı arasındaki ilişkiyi tanımlayan açık çevrim transfer fonksiyonu modellenmiştir. Yük alt sisteminin serbest cisim diyagramı Şekil 2. 16' da gösterilmiştir. Şekilde yer alan üst çember taşıyıcı motorunun üzerine yerleştirilmiş bir makarayı temsil etmektedir. Taşıyıcı motoruna pozitif akım uygulandığında, makara saat yönünde döner ve yükü aşağıya doğru salmaya başlar. Yüke bağlı kablo tam olarak açıldığında yükün yerden yüksekliği sıfır olur. Üst çemberin eksen noktası ile yükün kütlesinin merkezi arasındaki uzaklık l_p ile temsil edilmektedir.



Şekil 2. 16 Yük konumunun modeli

Şekil 2. 16' da serbest cisim diyagramı verilen yük alt sisteminin hareketlerini temsil eden denklem

$$m_p \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t) \right) + f_{ai}(t) = f_y(t) - m_p g - B_y \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) - f_{coulomb}(t), \tag{2. 1}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu ifade yer alan m_p yükün kütlesini, z yükün dikey eksendeki konumunu, f_{ai} makaranın eylemsizliğinin ürettiği gücü, f_y taşıyıcı motoru tarafından üretilen gücü, g yerçekimi ivmesi sabitini, B_y viskoz sönümleme parametresini ve $f_{coulomb}$ Coulomb sürtünmesinden gelen gücü temsil etmektedir.

Coulomb sürtünmesi sıfır civarında süreksiz olduğundan dolayı bu değer sistemin sürekli bir Laplace modelini çıkartmak için ihmal edilebilir.

$$f_{coulomb}(t) = 0, \tag{2. 2}$$

Buna ek olarak viskoz sönümleme parametresinin de

$$B_y = 0, \tag{2. 3}$$

ihmal edildiği varsayıldığında (2.1) eşitliği

$$m_p\left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)+f_{ai}(t)=f_y(t)-m_pg\,, \tag{2. 4}$$

şekline indirgenebilmektedir. Bu denkleme ait Laplace dönüşümü ise z, f_y ve f_{ai} parametrelerinin Laplace dönüşümleri $Z=Z(s)$, F_y ve F_{ai} ile temsil edilerek

$$m_ps^2Z+F_{ai}=F_y-\frac{m_pg}{s}\,, \tag{2. 5}$$

şeklinde oluşturulabilir. Verilen çizelgelerde tanımlanan taşıyıcı motoru parametreleri $\eta_{g,y}$, $K_{g,y}$, $\eta_{m,y}$ ve $K_{t,y}$ için giriş akımı $I_{m,y}$' e göre taşıyıcı motoru tarafından üretilen doğrusal güç

$$F_y=\frac{\eta_{g,y}K_{g,y}\eta_{m,y}K_{t,y}I_{m,y}}{r_{y,\mathrm{makara}}}\,, \tag{2. 6}$$

eşitliği ile verilebilmektedir.

Taşıyıcı üzerindeki makaranın eylemsizliğinden gelen gücün $Z(s)$' e göre tanımlanmış olması gerekmektedir. Makaranın eylemsizliğinin oluşturduğu tork dikkate alındığında ise $\phi(t)$ makaranın açısı, J_ϕ ise makaranın eylemsizlik momenti olmak üzere

$$\tau_{ai}=J_\phi\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right), \tag{2. 7}$$

şeklinde bir tork eşitliği oluşturulabilmektedir. Burada yükün doğrusal pozisyonunu ile makaranın açısı arasındaki ilişki

$$\phi(t)=\frac{z(t)}{r_{y,makara}}\,, \tag{2. 8}$$

ifadesi ile tanımlanabilir. Tork değeri verildiğinde kütle üzerindeki doğrusal güç hareket denklemi ise aşağıdaki gibi verilebilir.

$$f_{ai} = \frac{\tau_{ai}}{r_{y,makara}} \tag{2. 9}$$

Denklem (2. 8)' in denklem (2. 7)' de yerini almasıyla elde edilen tork eşitliği denklem (2. 9)' da yerine koyulduğunda $z(t)$' e göre makaranın dönmesinden kaynaklanan doğrusal güç denklemi

$$f_{ai} = \frac{J_{\phi}\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)}{r_{y,makara}{}^2}, \tag{2. 10}$$

şeklinde elde edilmektedir. Bu güce karşılık gelen Laplace dönüşümü ise

$$F_{ai} = \frac{J_{\phi}s^2 Z}{r_{y,makara}{}^2}, \tag{2. 11}$$

şeklindedir.

Motor güç denklemi (2. 6) ve makara eylemsizlik gücü denklemi (2. 11), denklem (2. 5)' de yerine aldığında elde edilen harekete ait son yük denklemi ise

$$\left(m_p + \frac{J_{\phi}}{r_{y,makara}{}^2}\right) Zs^2 = \frac{\eta_{g,y}K_{g,y}\eta_{m,y}K_{t,y}I_{m,y}}{r_{y,makara}} - \frac{m_p g}{s}, \tag{2.12}$$

şeklindedir.

Sonuç olarak açık çevrim taşıyıcı motoruna ait giriş akımının etki ettiği yük konumunun transfer fonksiyonu

$$Z(s) = \frac{r_{y,makara}\eta_{g,y}K_{g,y}\eta_{m,y}K_{t,y}I_{m,y}(s)}{s^2(m_p r_{y,makara}{}^2 + J_{\phi})} - \frac{r_{y,makara}{}^2 m_p g}{s^3(m_p r_{y,makara}{}^2 + J_{\phi})} \tag{2.13}$$

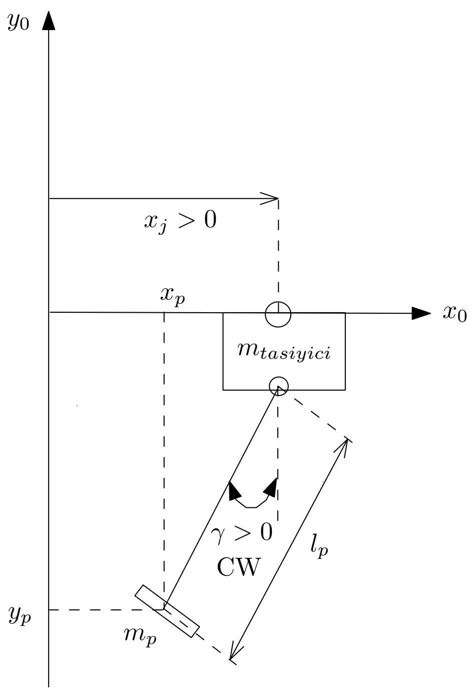
seklinde elde edilmektedir.

2.5.2 Vinç Kolu Alt Sistemi

2.5.2.1 Vinç Kolunun Modellenmesi

Bu bölümde üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait vinç kolu alt sisteminin modeli ve doğrusal durum-uzay parametrizasyonu verilecektir. Vinç kolu alt sistemi, kendisine dik olarak hareket eden yük alt sisteminin sabit bir yükseklikte olduğu ve sabit bir α sarkaç açısına sahip olduğu düşünülerek iki boyutlu doğrusal bir çerçevede modellenmiştir. Diğer bir değişle yükün sadece γ sarkaç açısı ile hareket ettiği varsayılmıştır.

Sistemde yer alan taşıyıcı donanımında yer alan motor, kayış ve kasnak gibi elemanlar ile birlikte vinç kolu alt sistemine asılmış şekildedir. DA motor içindeki $I_{m,j}$ akımı pozitif olduğunda taşıyıcı kuleden uzaklaşarak vinç kolunun sonuna doğru hareket etmeye başlar. Bu durum pozitif hız olarak tanımlanmıştır. Böylece, taşıyıcı Şekil 2. 17' de yer alan serbest cisim diyagramının sağ tarafına doğru hareket ettikçe taşıyıcının pozisyonu X_j pozitif şekilde artacaktır.



Şekil 2. 17 Vinç koluna ait serbest cisim diyagramı

Vinç kolu sisteminde yük taşıyıcı birimine çelik bir kablo ile bağlı durumdadır. Bu kablonun sert olduğu varsayılarak yük sistemi bir asılı sarkaç olarak dikkate alınmıştır. Şekil 2. 17' de görülebileceği üzere taşıyıcı pozitif yönde hareket ettiğinde sarkaç açısı γ saat yönünde oluşacaktır. Bu durum pozitif dönme hızı olarak tanımlanır.

Vinç kolunun modellenmesinde sistemin doğrusal olmayan dinamiklerini elde etmek için Lagrange metodu kullanılmıştır. Elde edilen doğrusal olmayan denklemler ayrıca doğrusallaştırılmış ve durum uzay parametrizasyonu çıkarılmıştır.

Lagrange metodunda kullanılan gösterimler

$X_j(t)$ = Taşıyıcının doğrusal pozisyonu

$\gamma(t)$ = γ Sarkaç açısı

ve genelleştirilmiş koordinatlar

$$q := \left[X_j(t), \gamma(t) \right], \tag{2.13}$$

$$qd := \left[\frac{d}{dt} X_j(t), \frac{d}{dt}\gamma(t) \right], \tag{2. 14}$$

şeklindedir.

Kartezyen koordinat sisteminde Şekil 2. 17 kullanılarak elde edilen yükün ağırlık merkezinin konumu

$$x_p := x_j(t) - l_p \sin(\gamma(t)) \ , \tag{2. 15}$$

$$y_p := -l_p \cos(\gamma(t)) , \tag{2. 16}$$

denklemleri ile temsil edilebilir. Konum denklemleri yerine hız denklemleri kullanıldığında ise ağırlık merkezinin konumu

$$xd_p := \left(\frac{d}{dt} x_j(t) \right) - l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right), \tag{2. 17}$$

$$yd_p := -l_p \sin(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right), \tag{2. 18}$$

şeklinde oluşur.

Lagrange denklemlerinde kullanılmak üzere tanımlanan durum uzay denklemlerine ait değişkenler X durum vektörü olmak üzere sırasıyla

$$subs\_X_q := \left\{ x_j(t) = X_1, \gamma(t) = X_2 \right\}, \tag{2. 19}$$

$$subs\_X_{qd} := \left\{ \frac{d}{dt} x_j(t) = X_3, \frac{d}{dt} \gamma(t) = X_4 \right\}, \tag{2. 20}$$

vinç kolu motoruna uygulanan giriş akımına ait değişken ve

$$subs\_U := \left\{ I_{m,j} = U_1 \right\}, \tag{2. 21}$$

konum denklemlerine ait değişkenler

$$subs\_X_{qdd} := \left\{ \frac{d^2}{dt^2} x_j(t) = Xd_3, \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) = Xd_4 \right\}, \tag{2. 22}$$

$$X_{qdd} := \left[Xd_3(t), Xd_4(t) \right], \tag{2. 23}$$

şeklinde yazılabilir.

Sisteme ait Lagrange denklemlerini elde etmek için sistemde var olan toplam potansiyel ve kinetik enerjinin hesaplanması gerekmektedir.

2.5.2.1.1 Toplam Potansiyel Enerji

Vinç kolu sistemine ait toplam potansiyel enerji, elastik ve yerçekimsel potansiyel enerjilerin toplamından oluşmaktadır. Sisteme ait elastik ve yerçekimsel potansiyel enerjiler sırasıyla

$$V_e = 0, \tag{2. 24}$$

$$V_g := -m_p g l_p \cos(\gamma(t)), \tag{2. 25}$$

şeklinde verilmektedir. Bu durumda sistemin toplam potansiyel enerjisi $V_T = V_e + V_g$ ifadesine eşittir.

$$V_T := -m_p g l_p \cos(\gamma(t)) \tag{2. 26}$$

2.5.2.1.2 Toplam Kinetik Enerji

Sisteme ait toplam kinetik enerji, genel koordinat denklemleri ve bu denklemlerin birinci türevleri kullanılarak elde edilmektedir. İlk olarak motorlu taşıyıcıya ait öteleme kinetik enerjisi, $m_{taşıyıcı}$ taşıyıcının kütlesi olmak üzere

$$Tt_1 := \frac{1}{2} m_{taşıyıcı} \left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right)^2, \tag{2. 27}$$

ifadesi ile verilebilir.

Motorlu taşıyıcının dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji ise J_w vinç kolu motorunun eylemsizlik momentini temsil etmek üzere

$$Tr_1 := \frac{1}{2} J_w \left(\frac{d}{dt} \psi_m(t) \right)^2, \tag{2. 28}$$

şeklinde yazılır. Denklemde yer alan motor açısı ve doğrusal uzaklık arasındaki ilişkiden yola çıkarak $K_{g,j}$ dişli oranını, $r_{j,kasnak}$ kasnak yarıçapını ifade etmek üzere

$$\frac{d}{dt} \psi_m(t) = \frac{K_{g,j} \left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right)}{r_{j,kasnak}}, \tag{2. 29}$$

eşitliği oluşturulabilir.

Bu durumda motorlu taşıyıcının dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji

$$Tr_1 := \frac{1}{2} \frac{J_w K_{g,j}^2 \left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right)^2}{r_{j,kasnak}^2}, \tag{2. 30}$$

eşitliği ile yeniden yazılır. Taşıyıcıya ait maksimum doğrusal hız 0.125 m/s dir. Diğer vinç parametreleri de kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik oluşturulabilir.

$$\frac{J_w K_{g,j}{}^2}{r_{mp}{}^2} < 0.24\ \text{kg} < M_c\,, \tag{2. 31}$$

Böylece motorlu taşıyıcının dönmesinden kaynaklanan kinetik enerjinin ihmal edilebileceği ortaya çıkmıştır.

Diğer yandan sarkaç sisteminin dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji

$$Tr_2 := \frac{1}{2} J_\gamma \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right)^2, \tag{2. 32}$$

denklemi ile verilebilir. Bu denklemde yer alan $\frac{d}{dt}\gamma(t)$ ifadesi sarkacın açısal hızına eşittir.

Sarkaç sistemine ait öteleme kinetik enerjisi ise

$$Tt_2 := \frac{1}{2} m_p \left(\left(\left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right) - l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right) \right)^2 + l_p{}^2 + \sin(\gamma(t))^2 \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right)^2 \right), \tag{2. 33}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu durumda vinç kolu sistemine ait toplam kinetik enerji

$$T_T := Tt_1 + Tt_2 + Tr_1 + Tr_2\,, \tag{2. 34}$$

denklemine eşittir.

$$\begin{aligned} T_T := {} & \left(\frac{1}{2} m_{taşıyıcı} + \frac{1}{2} m_p \frac{1}{2} \frac{J_w K_{g,j}{}^2}{r_{j,kasnak}{}^2} \right) \left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right)^2 \\ & - m_p l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right) \left(\frac{d}{dt} X_j(t) \right) \\ & + \left(\frac{1}{2} m_p \left(l_p{}^2 \cos(\gamma(t))^2 + l_p{}^2 \sin(\gamma(t))^2 \right) + \frac{1}{2} J_\gamma \right) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t) \right)^2 \end{aligned} \tag{2. 35}$$

2.5.2.1.3 Genelleştirilmiş Kuvvetler

Sistemde var olan ve modelleme için Euler-Lagrange denklemlerinde kullanılan kuvvetlerin açıklamaları bu bölümde verilmiştir.

F_c = Viskoz sönümleme kuvveti

F_j = Taşıyıcı motoru tarafından üretilen doğrusal kuvvet

B_y = Sarkacın viskoz sürtünme tork katsayısı

B_ψ = Taşıyıcının viskoz sönümleme kuvvet katsayısı

Verilen her iki viskoz parametresi de hesaplamalarda ihmal edilmiştir.

Lagrange denklemlerinde genelleştirilmiş koordinatlar $q[i]$, üzerine uygulanan genelleştirilmiş kuvvetler ise $Q[i]$ parametresi ile temsil edilmektedir.

Coulomb sürtünmesi ihmal edildiğinde, sarkaç ve taşıyıcı üzerindeki doğrusal hareketten dolayı oluşan kuvvet

$$Q_1 = F_j, \tag{2. 36}$$

$$Q_2 = 0, \tag{2. 37}$$

denklemleri ile gösterilebilir.

F_j motor dişlisi üzerinde motor tarafından oluşturulan doğrusal güçtür ve aşağıdaki eşitlik ile verilebilir.

$$F_j := \frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j}}{r_{j,kasnak}}, \tag{2. 38}$$

Sistemde var olan genelleştirilmiş kuvvet bu durumda F_j' e eşit olacaktır.

$$Q := \left[\frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j}}{r_{j,kasnak}}, 0 \right] \tag{2. 39}$$

2.5.2.1.4 Euler-Lagrange Denklemleri ve Durum Uzay Matrislerinin Belirlenmesi

Q_i genelleştirilmiş kuvvet olarak bilinen harici güçlerin kombinasyonu, q_i genelleştirilmiş koordinatlar ve L sistemin Lagrange eşitliği olmak üzere N. dereceden serbestlik dereceli bir sistem için Lagrange denklemleri

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial q\partial ot_i}L\right)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial q_i}L\right)=Q_i, \quad i=1,2,\ldots,N, \tag{2. 40}$$

şeklinde yazılır.

Sistemin Lagrange eşitliği ise, T sistemin toplam kinetik enerjisini, U sistemin toplam potansiyel enerjisini temsil etmek üzere

$$L=T-U, \tag{2. 41}$$

ifadesi ile verilebilir.

Sisteme ait dinamik denklemler tezin Ek - C bölümünde verilen Maple kodu ile aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
EOM_orig := {} & m_p l_p \sin(\gamma(t))\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2 \\
& -\frac{\left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 - m_p r_{j,kasnak}{}^2 - J_\psi K_{g,j}{}^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}X_j(t)\right)}{r_{j,kasnak}{}^2} \\
& - m_p l_p \cos(\gamma(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\right) \\
& = \frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j}}{r_{j,kasnak}}, \qquad , \\
& - m_p l_p \cos(\gamma(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}X_j(t)\right) \\
& + \left(m_p l_p{}^2 + J_\gamma\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\right) + m_p g l_p \sin(\gamma(t)) = 0
\end{aligned} \tag{2. 42}$$

Verilen Euler-Lagrange hareket denklemleri durum fonksiyonları olarak genişletildiğinde aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$
\begin{aligned}
&EOM\_durum := m_p l_p \sin(X_2) X_4^{\,2} \\
&-\frac{\left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^{\,2} - m_p r_{j,kasnak}^{\,2} - J_\psi K_{g,j}^{\,2}\right) Xd_3}{r_{j,kasnak}^{\,2}} \\
&-m_p l_p \cos(X_2) Xd_4 = \frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j}}{r_{j,kasnak}}, \\
&-m_p l_p \cos(X_2) Xd_3 + \left(m_p l_p^{\,2} + J_\gamma\right) Xd_4 + m_p g l_p \sin(X_2) = 0
\end{aligned}
\tag{2. 43}
$$

Hareket denklemlerinin istenilen şekilde doğrusallaştırılması için bu işlemin operasyonun pasif noktası civarında yapılması gerekmektedir. Burada küçük genlik ve titreşimler için doğrusallaştırma $\alpha = 0$ açısı civarında gerçekleştirilmiştir.

Doğrusallaştırılmış hareket denklemi

$$
\begin{aligned}
&EOM\_seri := \\
&\frac{Xd_3 m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^{\,2} + Xd_3 m_p r_{j,kasnak}^{\,2} + Xd_3 J_\psi K_{g,j}^{\,2}}{r_{j,kasnak}^{\,2}} \\
&\frac{-m_p l_p Xd_4 r_{j,kasnak}^{\,2} + m_p l_p X_4^{\,2} X_2 r_{j,kasnak}^{\,2}}{r_{j,kasnak}^{\,2}} \\
&= \frac{\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} U_1}{r_{j,kasnak}}, \qquad , \\
&-m_p l_p Xd_3 + Xd_4 m_p l_p^{\,2} + Xd_4 J_\gamma + m_p g l_p X_2 = 0
\end{aligned}
\tag{2. 44}
$$

şeklinde yazılabilir.

Lagrange eşitliğinin mekaniklerinden gelen doğrusal olmayan sistemin denklemleri ise aşağıdaki denklem ile temsil edimektedir.

$$
F(q)qdd + G(q,qd)qd + H(q)q = L(q,qd,u) \tag{2. 45}
$$

Denklemde yer alan F, G ve H simetrik yapıya sahiptir ve sırasıyla kütle, sönümleme ve sertlik matrislerini temsil eder.

Kütle matrisi sistemde var olan bağlantılar ile ilgili bilgiler içermektedir.

$$F_i = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + m_p r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2}{r_{j,kasnak}{}^2} & \text{-}m_p l_p \cos(X_2) \\ \text{-}m_p l_p \cos(X_2) & m_p l_p{}^2 + J_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.\,46)$$

Küçük kaydırımlar için eylemsizlik matrisi doğrusallaştırıldığında F_i matrisi

$$F\_doğ = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + m_p r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2}{r_{j,kasnak}{}^2} & \text{-}m_p l_p \\ \text{-}m_p l_p & m_p l_p{}^2 + J_\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.\,47)$$

şeklini alır.

Hareket denklemlerinin ikinci dereceden durumlara göre türevleri için doğrusal olmayan çözüm

$$\frac{d^2}{dt^2} X_j(t) = \frac{r_{j,kasnak} \begin{pmatrix} J_\gamma r_{j,kasnak} m_p l_p \sin(\gamma(t)) \\ + m_p{}^2 l_p{}^3 r_{j,kasnak} \sin(\gamma(t)) \end{pmatrix} \left(\dfrac{d}{dt} \gamma(t) \right)^2}{\begin{pmatrix} \left(-K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 - J_\gamma K_{g,j}{}^2 \right) J_\psi \\ + \left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 - m_p r_{j,kasnak}{}^2 \right) J_\gamma \\ - m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 - m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \\ + m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \cos(\gamma(t))^2 \end{pmatrix}}$$

$$+\frac{r_{j,kasnak}\begin{pmatrix} m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 g\sin(\gamma(t))\cos(\gamma(t)) \\ -m_p{}^2 l_p{}^2 \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j} \\ -J_\gamma \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \left(-K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 - J_\gamma K_{g,j}{}^2\right) J_\psi \\ +\left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 - m_p r_{j,kasnak}{}^2\right) J_\gamma \\ -m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 - m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \\ +m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \cos(\gamma(t))^2 \end{pmatrix}}, \tag{2. 48}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t) = \frac{m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \cos(\gamma(t))\sin(\gamma(t))\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2}{\begin{pmatrix} \left(-K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 - J_\gamma K_{g,j}{}^2\right) J_\psi \\ +\left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 - m_p r_{j,kasnak}{}^2\right) J_\gamma \\ -m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 - m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \\ +m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \cos(\gamma(t))^2 \end{pmatrix}}$$

$$+\frac{m_p l_p\begin{pmatrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 g\sin(\gamma(t)) + \\ m_p r_{j,kasnak}{}^2 g\sin(\gamma(t)) + \sin(\gamma(t))\,\mathrm{g}\, K_{g,j} J_\psi \\ -r_{j,kasnak}\cos(\gamma(t)) \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} I_{m,j} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \left(-K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 - J_\gamma K_{g,j}{}^2\right) J_\psi \\ +\left(-m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 - m_p r_{j,kasnak}{}^2\right) J_\gamma \\ -m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 - m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \\ +m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2 \cos(\gamma(t))^2 \end{pmatrix}}, \tag{2. 49}$$

denklemleri ile temsil edilmektedir.

Hareket denklemlerinin doğrusallaştırması sırasında küçük açılar için trigonometrik fonksiyonların seri açılımları kullanılmıştır. Bu durumda hareket denklemlerin ikinci dereceden durumlara göre türevleri için doğrusal çözüm

$$\frac{d^2}{dt^2}X_j(t)=\frac{\begin{matrix}-gm_p{}^2l_p{}^2r_{j,kasnak}{}^2\gamma(t)-\\ r_{j,kasnak}(-m_pl_p{}^2\eta_{g,j}K_{g,j}\eta_{m,j}K_{t,j}I_{m,j})\\ -J_\gamma\eta_{g,j}K_{g,j}\eta_{m,j}K_{t,j}I_{m,j}\end{matrix}}{\begin{pmatrix}\left(K_{g,j}{}^2m_pl_p{}^2+J_\gamma K_{g,j}{}^2\right)J_\psi\\ +\left(-m_{taşıyıcı}r_{j,kasnak}{}^2+m_pr_{j,kasnak}{}^2\right)J_\gamma\\ +m_{taşıyıcı}r_{j,kasnak}{}^2m_pl_p{}^2\end{pmatrix}}, \tag{2. 50}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)=\frac{\begin{matrix}-m_pl_p\begin{pmatrix}m_pr_{j,kasnak}{}^2g\\ +m_{taşıyıcı}r_{j,kasnak}{}^2g+gK_{g,j}{}^2J_\psi\end{pmatrix}\gamma(t)\\ +m_pl_p\eta_{g,j}K_{g,j}\eta_{m,j}K_{t,j}I_{m,j}r_{j,kasnak}\end{matrix}}{\begin{pmatrix}\left(K_{g,j}{}^2m_pl_p{}^2+J_\gamma K_{g,j}{}^2\right)J_\psi\\ +\left(-m_{taşıyıcı}r_{j,kasnak}{}^2+m_pr_{j,kasnak}{}^2\right)J_\gamma\\ +m_{taşıyıcı}r_{j,kasnak}{}^2m_pl_p{}^2\end{pmatrix}}, \tag{2. 51}$$

şeklinde verilebilir.

Hareket denklemlerinin çözümü ile vinç kolu sistemine ait durum uzay matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{g m_p^2 l_p^2 r_{j,kasnak}^2}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 m_p l_p^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + m_p r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{m_p l_p g\left(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 + m_p r_{j,kasnak}^2 + J_\psi K_{g,j}\right)}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 m_p l_p^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + m_p r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 52}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{r_{j,kasnak}\eta_{g,j} K_{g,j}\eta_{m,j} K_{t,j}\left(m_p l_p^2 + J_\gamma\right)}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 m_p l_p^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + m_p r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi} \\ \dfrac{m_p l_p \eta_{g,j} K_{g,j}\eta_{m,j} K_{t,j} r_{j,kasnak}}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 m_p l_p^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + m_p r_{j,kasnak}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi} \end{bmatrix}, \tag{2. 53}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 54}$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 55}$$

Sarkaç sisteminin dönmesinden kaynaklanan eylemsizlik momenti $J_\gamma = 0$ olarak ihmal edilip matris içerisinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise vinç kolu sisteminin

$$\frac{\partial}{\partial t}x = Ax + Bu\,, \tag{2. 56}$$

$$y = Cx + Du\,, \tag{2. 57}$$

doğrusal durum uzay parametrizasyonuna ait durum uzay matrisleri

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{m_p r_{j,kasnak}{}^2 g}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{g(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + m_p r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2)}{(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2) l_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 58}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{r_{j,kasnak}\eta_{g,j}K_{g,j}\eta_{m,j}K_{t,j}}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2} \\ \dfrac{r_{j,kasnak}\eta_{g,j}K_{g,j}\eta_{m,j}K_{t,j}}{(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2) l_p} \end{bmatrix}, \tag{2. 59}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 60}$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 61}$$

halini almaktadır.

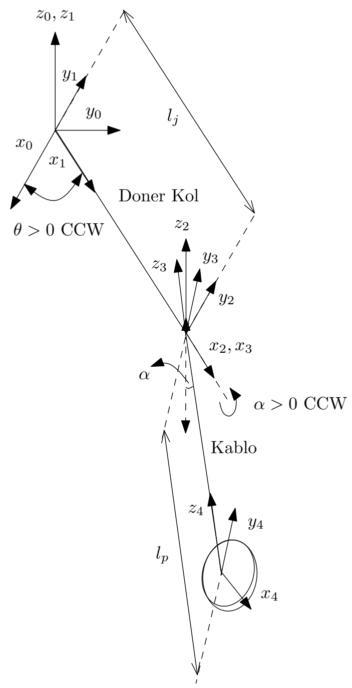
2.5.3 Kule Alt Sistemi

2.5.3.1 Kulenin Modellenmesi

Bu bölümde üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait kule alt sisteminin modeli ve doğrusal durum-uzay parametrizasyonu verilecektir.

Kule alt sistemi, taşıyıcı pozisyonunun sabit, γ sarkaç açısının “0” ve yükün yerden yüksekliğinin sabit olduğu düşünülerek bir döner kol olarak modellenmiştir. Böylece harekete sahip tek eklemler kule ile ilgili olan ve α sarkaç açısına sahip olan vinç kolu eksenleridir.

Şekil 2. 18’ de gösterildiği gibi, kule alt sistemi sabit duran bir döner kol olarak modellenirken, taşıyıcının vinç kolunun sonunda yatay kuleye l_j kadar uzaklıkta sabit olarak durduğu varsayılmıştır. Yük sistemi ise asılı bir sarkaç olarak modellenmiş ve yükün taşıyıcı kasnağına olan uzaklığının l_p olduğu varsayılmıştır. Kule sistemi döner kolun açısı θ ve sarkaç sapma açısı α olmak üzere iki adet ölçülebilen duruma sahiptir. Taşıyıcıya bağlı bulunan yük 3 boyutlu uzayda hareket etmektedir. Kule motoru giriş akımı $I_{m,t}$ pozitif olduğunda döner kol saat yönünün tersine hareket eder. Bu durum pozitif hız olarak tanımlanmıştır. Şekil 2.18’ de görülebileceği gibi sistem saat yönünün tersine hareket ettiğinde, sarkaç açısı pozitif olacak şekilde tanımlanmıştır.



Şekil 2. 18 Kule sisteminin kinematiği

Kulenin modellenmesinde sisteme ait hareket denklemleri Lagrange tekniği kullanılarak elde edilmiştir.

Lagrange metodunda kullanılan gösterimler

$\theta(t)$ = Döner kolun açısı

$\alpha(t)$ = Yükün dikey eksendeki sapma açısı ve genelleştirilmiş koordinatlar

$$q := [\theta(t), \alpha(t)], \tag{2. 62}$$

$$qd := \left[\frac{d}{dt}\theta(t), \frac{d}{dt}\alpha(t)\right], \tag{2. 63}$$

şeklindedir. Modellemede kullanılan genelleştirilmiş koordinatlar Lagrange koordinatları olarak da bilinir.

Kule sisteminin modellenmesinde dönüşüm matrislerinden faydalanılmıştır. Bu dönüşüm matrisleri; temel bir eksen etrafında dönme için tanımlanan dönüşüm matrisi

$$R_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 64}$$

vinç kolu boyunca taşıyıcının dönme hareketini tanımlayan dönüşüm matrisi

$$T_{1j} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 65}$$

temel taşıyıcı konumunu koordine eden dönüşüm matrisi

$$T\_0\_2 := \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t))l_j \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t))l_j \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 66}$$

sarkaca bağlı yükün sapma açısını tanımlayan dönüşüm matrisleri

$$T_h := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 67}$$

$$T\_2\_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t))l_p \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & -\cos(\alpha(t))l_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 68}$$

ve yük sistemini koordine eden temel dönüşüm matrisi T_0_4 ise

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t))\cos(\alpha(t)) & \sin(\theta(t))\sin(\alpha(t)) & \begin{array}{c}-\sin(\theta(t))\sin(\alpha(t))l_p \\ +\cos(\theta(t))l_j\end{array} \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t))\cos(\alpha(t)) & -\cos(\theta(t))\sin(\alpha(t)) & \begin{array}{c}\cos(\theta(t))\sin(\alpha(t))l_p \\ +\sin(\theta(t))l_j\end{array} \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & -\cos(\alpha(t))l_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2. 69}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Kule sistemi aşağıda belirtilen durumlara bağlı olarak çalışmaktadır.

1) $\alpha = 0$ yükün mükemmel bir aşağı yönlü pozisyon ile sarkaca bağlı olduğunu belirtir.

2) $\frac{d}{dt}\theta(t) > 0$ olduğunda döner kol saat yönünün tersine yani pozitif yönde hareket eder.

3) $\frac{d}{dt}\alpha(t) > 0$ olduğunda sarkaç saat yönünün tersine yani pozitif yönde hareket eder.

3 boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde taşıyıcı pozisyonu

$$x_1 := \cos(\theta(t))l_j, \tag{2. 70}$$

$$y_1 := \sin(\theta(t))l_j, \tag{2. 71}$$

$$z_1 := 0, \tag{2. 72}$$

ve yük pozisyonu

$$x_2 := -\sin(\theta(t))\sin(\alpha(t))l_p + \cos(\theta(t))l_j, \tag{2. 73}$$

$$y_2 := \cos(\theta(t))\sin(\alpha(t))l_p + \sin(\theta(t))l_j, \tag{2. 74}$$

$$z_2 := -\cos(\alpha(t))l_p \tag{2. 75}$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır.

3 boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde hız denklemlerini tanımlamak için ise aşağıdaki denklemler kullanılmıştır.

$$xd_1 := -\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)l_j \tag{2. 76}$$

$$yd_1 := \cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)l_j \tag{2. 77}$$

$$zd_1 := 0 \tag{2. 78}$$

$$\begin{aligned} xd_2 := &-\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\sin(\alpha(t))l_p \\ &-\sin(\theta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)l_p - \sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)l_j \end{aligned} \tag{2. 79}$$

$$\begin{aligned} yd_2 := &-\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\sin(\alpha(t))l_p \\ &+\cos(\theta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)l_p + \cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)l_j \end{aligned} \tag{2. 80}$$

$$zd_2 := \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)l_p \tag{2. 81}$$

Euler-Lagrange denklemlerinde kullanılmak üzere tanımlanan durum uzay denklemlerine ait değişkenler X durum vektörü olmak üzere, sırasıyla

$$subs\_X_q := \{\theta(t) = X_1, \alpha(t) = X_2\}, \tag{2. 82}$$

$$subs\_X_{qd} := \left\{\frac{d}{dt}\theta(t) = X_3, \frac{d}{dt}\alpha(t) = X_4\right\}, \tag{2. 83}$$

kule motoruna uygulanan giriş akımına ait değişken ve

$$subs\_U := \{ I_{m,t} = U_1 \},\tag{2. 84}$$

ikinci dereceden türevler ile birlikte konum denklemlerine ait değişkenler

$$subs\_X_{qdd} := \left\{ \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = X_{d3}, \frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = X_{d4} \right\},\tag{2. 85}$$

$$X_{qdd} := [X_{d3}(t), X_{d4}(t)],\tag{2. 86}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Sisteme ait Lagrange denklemlerini elde etmek için sistemde var olan toplam potansiyel ve kinetik enerjinin hesaplanması gerekmektedir.

2.5.3.1.1 Toplam Potansiyel Enerji

Kule sistemine ait toplam potansiyel enerji, elastik ve yerçekimsel potansiyel enerjilerin toplamından oluşmaktadır. Sisteme ait elastik ve yerçekimsel potansiyel enerji

$$V_e = 0,\tag{2. 87}$$

$$V_g := -m_p g l_p \cos(\alpha(t)),\tag{2. 88}$$

denklemleri ile verilebilir. Bu durumda sistemin toplam potansiyel enerjisi $V_T = V_e + V_g$ denklemine eşittir.

$$V_T := -m_p g l_p \cos(\alpha(t))\tag{2. 89}$$

2.5.3.1.2 Toplam Kinetik Enerji

Sisteme ait toplam kinetik enerji, genel koordinat denklemleri ve bu denklemlerin birinci türevleri kullanılarak elde edilebilir. İlk olarak döner kola ait kinetik enerji, J_θ kule motorunun eylemsizlik momenti olmak üzere

$$Tr_1 := \frac{1}{2} J_\theta \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2,\tag{2. 90}$$

ifadesi ile verilebilir.

J_α döner kolun eylemsizlik momentini ve α sarkacın sapma açısını temsil etmek üzere yükün dönmesinden kaynaklanan kinetik enerji ise

$$Tr_2 := \frac{1}{2} J_\alpha \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right)^2, \tag{2. 91}$$

şeklinde yazılır.

Ek olarak sisteme ait öteleme kinetik enerjisi

$$Tt := \frac{1}{2} m_p \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) l_p \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right) l_j \\ + \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_j^2 + \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_p^2 \\ - \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_p^2 \cos(\alpha(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) l_p^2 \end{pmatrix}^2, \tag{2. 92}$$

denklem seti ile verilirken, kule sisteminin toplam kinetik enerjisi

$$T_T := Tr_1 + Tr_2 + Tt, \tag{2. 93}$$

denklemine eşittir ve

$$T_T := \frac{1}{2} J_\theta \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 + \frac{1}{2} J_\alpha \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_p \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) l_p \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right) l_j \\ + \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_j^2 + \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_p^2 \\ - \left(\frac{d}{dt}\theta(t) \right)^2 l_p^2 \cos(\alpha(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}\alpha(t) \right) l_p^2 \end{pmatrix}^2, \tag{2. 94}$$

şeklinde hesaplanmıştır.

2.5.3.1.3 Genelleştirilmiş Kuvvetler

Sistemde var olan ve modelleme için Euler-Lagrange denklemlerinde kullanılan kuvvetlerin açıklamaları bu bölümde verilmiştir.

$\tau_{m,j}$ = Viskoz sönümleme kuvveti

$\tau_{m,t}$ = Kule motoru tarafından üretilen tork

B_{θ} = Kule motorunun viskoz sürtünme tork katsayısı

B_{α} = Sarkacın α sapma açısına ait viskoz sürtünme sönümleme tork katsayısı

Verilen her iki viskoz parametresi de hesaplamalarda ihmal edilmiştir.

Lagrange denklemlerinde genelleştirilmiş koordinatlar $q[i]$, üzerine uygulanan genelleştirilmiş kuvvetler ise $Q[i]$ parametresi ile temsil edilmektedir.

$$Q_1 = \tau_{m,t}\,, \tag{2. 95}$$

$$Q_2 = 0\,, \tag{2. 96}$$

Motor dişlisi üzerinde motor tarafından oluşturulan tork $\tau_{m,t}$, aşağıdaki eşitlik ile verilebilir.

$$\tau_{m,t} := \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} I_{m,t}\,, \tag{2. 97}$$

Sistemde var olan genelleştirilmiş kuvvet ise bu durumda $\tau_{m,t}$' e eşit olmaktadır.

$$Q := \left[\eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} I_{m,t}, 0 \right] \tag{2. 98}$$

2.5.3.1.4 Euler Lagrange Denklemleri ve Durum Uzay Matrislerinin Belirlenmesi

Q_i genelleştirilmiş kuvvet olarak bilinen harici güçlerin kombinasyonu, q_i genelleştirilmiş koordinatlar ve L sistemin Lagrange eşitliği olmak üzere N. dereceden serbestlik dereceli bir sistem için Lagrange denklemleri

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial q \partial ot_i}L\right)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial q_i}L\right)=Q_i, \quad i=1,2,\ldots,N, \tag{2. 99}$$

şeklinde yazılır.

Sistemin Lagrange eşitliği ise, T sistemin toplam kinetik enerjisini, U sistemin toplam potansiyel enerjisini temsil etmek üzere

$$L=T-U, \tag{2. 100}$$

ifadesi ile verilebilir.

Hareket denklemlerinin istenen şekilde doğrusallaştırılması için bu işlemin operasyonun pasif noktası civarında yapılması gerekmektedir. Burada küçük genlik ve titreşimler için doğrusallaştırma $\alpha=0$ açısı civarında gerçekleştirilmiştir.

Doğrusallaştırma sırasında küçük açılar için trigonometrik fonksiyonların seri açılımları kullanılmıştır. Doğrusallaştırılmış hareket denklemi

$$\begin{aligned}
&EOM_seri := Xd_3 J_\theta + Xd_3 m_p l_j{}^2 + m_p Xd_4 l_p l_j \\
&+2m_p l_p{}^2 X_4 X_2 X_3 = \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} U_1, \\
&m_p l_p Xd_3 + Xd_4 J_\alpha + Xd_4 m_p l_p{}^2 + m_p g l_p X_2 = 0
\end{aligned} \tag{2. 101}$$

şeklindedir.

Lagrange eşitliğinin mekaniklerinden gelen doğrusal olmayan sistemin denklemleri ise aşağıdaki gibi ile temsil edilir.

$$F(q)qdd + G(q,qd)qd + H(q)q = L(q,qd,u), \tag{2. 102}$$

Denklemde yer alan F, G ve H simetrik yapıya sahiptir ve sırasıyla kütle, sönümleme ve sertlik matrisleri olarak adlandırılır.

Kütle matrisi sistemde var olan bağlantılar ile ilgili bilgiler içermektedir.

$$F_i=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_p l_p{}^2 - \frac{1}{2}m_p l_p{}^2\cos(2X_2) + J_\theta + m_p l_j{}^2 & m_p\cos(X_2) l_p l_j \\ m_p\cos(X_2) l_p l_j & J_\alpha + m_p l_p{}^2 \end{bmatrix} \tag{2. 103}$$

Küçük kaydırımlar için eylemsizlik matrisi doğrusallaştırıldığında ise F_i matrisi

$$F\_doğ = \begin{bmatrix} J_\theta + m_p l_j^2 & m_p l_p l_j \\ m_p l_p l_j & J_\alpha + m_p l_p^2 \end{bmatrix}, \tag{2. 104}$$

şeklini alır.

Hareket denklemlerinin çözümünün ardından kule sistemi için elde edilen durum uzay matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{m_p^2 l_p^2 l_j g}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p^2 l_j^2 J_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{m_p l_p g (m_p l_j^2 + J_\theta)}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p^2 l_j^2 J_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 105}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} (J_\alpha + m_p^2 l_p^2)}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_j^2 J_\alpha} \\ -\dfrac{m_p l_p \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} l_j}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_j^2 J_\alpha} \end{bmatrix}, \tag{2. 106}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 107}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2. 108}$$

şeklinde verilebilir.

Kule sistemi ile çalışılırken dikkat edilmesi gereken önemli noktalardan biri vinç kolu sisteminde olduğu gibi sadece kule ve sarkaç pozisyonlarının ölçülebilmesidir. Hız' a ait durum denklemleri ise yüksek geçiren filtreler ile elde edilebilmektedir.

BÖLÜM 3

DOĞRUSAL MATRİS EŞİTSİZLİĞİ VE KARARLILIK MODELLERİ

Bu bölümde sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı için geliştirilecek tasarım metodunda kullanılan DME' lerin genel özelliklerinden, kullanım alanlarından ve çözüm yöntemlerinden bahsedilecektir [21]. Buna ek olarak genel kontrolcü tasarım problemlerinin tanımlanmasında kullanılan ve oluşan kapalı çevrim sistemin kararlılığını sağlayan genel kararlılık modellerinden bahsedilecek ve bu kapsamda tez çalışmasında geliştirilecek sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım metodunda kullanılan D - kararlılık ayrıntılı olarak incelenecektir.

3.1 Doğrusal Matris Eşitsizliği

Bir doğrusal matris eşitsizliği

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n \prec 0 , \tag{3. 1}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Burada;

- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n tane karar değişkeni içeren vektörü göstermektedir.
- $F_0, \ldots F_n$ gerçek simetrik matrisleri göstermektedir.
- $\prec 0$ ifadesi kesin negatifliği göstermektedir. Bu bağlamda ifade tüm özdeğerlerin sıfırdan kesin küçük olmasını söylemekte ve bir başka gösterim ile en büyük özdeğerin sıfırdan küçük olması $\lambda_{\max}(F(x)) < 0$ gerektiğini belirtmektedir.

Doğrusal matris eşitsizliği aracını kullanırken gerekli olacak bazı gösterimleri de burada belirtmekte fayda olacaktır. A matrisi kare ve $m \times m$ eşitliğini sağlıyorsa Hermityen bir matristir. Burada A matrisi reel ise aynı zamanda simetriktir ve $A = A^T$ eşitliğini sağlar.

Doğrusal matris eşitsizlikleri, x gibi bir değişken üzerinden konveks bir kıstas belirlemek için kullanılabilir. Bu da, DME aracının günümüzde optimizasyon problemlerinin çözümünde ilgi çekici olmasını sağlamaktadır.

$$\zeta := \{x \mid F(x) \prec 0\}, \tag{3. 2}$$

$F(x) \prec 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi konvekstir. Gerçekte $x_1, x_2 \in \zeta$ ve $\sigma \in (0,1)$ olduğu durumda,

$$F(\sigma x_1 + (1-\sigma)x_2) = \sigma F(x_1) + (1-\sigma)F(x_2) \prec 0, \tag{3. 3}$$

şeklindeki F fonksiyonu $\sigma > 0,\ (1-\sigma) > 0$ koşulu altında ılgındır. $F(x) \prec 0$ eşitsizliğinin x üzerinden konveks kıstas olması özel bir durum olsa da bir çok konveks küme bu şekilde kolaylıkla tanımlanabilir. Bu sayede DME' ler genel konveks küme özelliklerine ilaveten daha birçok cazip özelliği de barındırırlar.

DME Sistemleri: Doğrusal matris eşitsizliği sistemleri sonlu sayıda DME' den oluşmaktadır. Konveks fonksiyon ve küme tanımlarından da bilindiği gibi

$$F_1(x) \prec 0, \ldots, F_k(x) \prec 0, \tag{3. 4}$$

şeklindeki DME' lerin her birinin oluşturduğu olası kümenin kesişimi de konvekstir. Bir başka ifadeyle, (3. 4) DME' sini sağlayan tüm x lerin kümesi konvekstir. Gerçekte, tek tek DME' leri yazmak yerine tamamı tek bir DME de

$$F(\mathrm{x}) := \begin{bmatrix} F_1(\mathrm{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(\mathrm{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_k(\mathrm{x}) \end{bmatrix}, \tag{3. 5}$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlik aslında her hangi bir x için $F(x)$ matrisinin simetrik olduğunu belirtmektedir. $F(x)$ matrisinin özdeğerlerinin oluşturduğu küme $F_1(x),\cdots,F_k(x)$ matrislerinin tek tek özdeğerlerinin birleşiminden oluşan küme ile aynıdır. $F(x)\prec 0$ eşitsizliğini sağlayan x ifadesi (3. 4) ile belirtilen tüm eşitsizlikleri sağlamaktadır. Sonuç olarak çoklu DME kısıtlamaları bir DME kısıtlamasına indirgenebilir.

Yine DME' ler üzerinde yapacağımız bazı matematiksel uygulamalar ile doğrusal olmayan eşitsizlikler, doğrusal olan eşitsizliklere çevrilebilir. Örneğin $M \in \mathbb{R}^{nxn}$ şeklinde bir matris ele alalım

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \tag{3. 6}$$

bu matris içerisinde M_{11}' in $r \times r$ boyutunda tekil olmayan bir matris olduğunu kabul edersek,

$$S := M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}, \tag{3. 7}$$

şeklinde tanımlı bir S matrisi, M matrisi içerisinde M_{11}' in Schur tümleyeni olmaktadır. Eğer M simetrikse

$$M \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M_{11} \prec 0 \\ S \prec 0 \end{Bmatrix}. \tag{3. 8}$$

Schur Tümleyen

$F : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{S}$ tanımlanmış ve

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}, \tag{3. 9}$$

şeklinde parçalanmış olsun. Bu ayrıştırmada $F_{11}(x)$ karedir ve aşağıdaki önermeler birbirine eşdeğerdir.

a) $F(x) \prec 0$. (3. 10)

b) $$\begin{Bmatrix} F_{11}(x) \prec 0 \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)\left[F_{11}(x)\right]^{-1} F_{12}(x) \prec 0 \end{Bmatrix}. \tag{3. 11}$$

c) $$\begin{Bmatrix} F_{22}(x) \prec 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)\left[F_{22}(x)\right]^{-1} F_{21}(x) \prec 0 \end{Bmatrix}. \tag{3. 12}$$

3.1.1 DME' lerin Kullanım Alanları

Kontrol konusu içerisindeki bir çok optimizasyon probleminde, sistem tanılamada ve işaret işlemede, kıstaslar DME ile formüle edilebilinir. Burada akla gelen soru şudur; "Acaba tüm optimizasyon problemleri DME formalizasyonuna indirgenerek, verimli ve gerçekçi bir çözüme ulaşılabilir mi?" $f : \zeta \to \mathbb{R}$ tanımlı bir performans fonksiyonunun minimizasyonu veya maksimizasyonu problemi doğrusal matris eşitsizliği olan $F(x) \prec 0$ gibi x değişkeni üzerinden tanımlı konveks kısıtlamalar gösteriyorsa, bu tip problemler bir çeşit konveks optimizasyon problemidir. Çok açıktır ki $F(x)$ performans fonksiyonu, konveks olduğu sürece çözüme ilişkin algoritmalar ve geliştirmeler konveks optimizasyon ile ilişkilidir.

Aslında DME' ler için $F : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ ılgın ise genelde iki temel çalışma alanı vardır.

a) Varlık (Feasibility): Bu çalışma alanı belirtilen $F(x) \prec 0$ DME kısıtlamasını sağlayan en az bir $x \in X$ ' in var olup olmadığını irdelemektedir.

b) Optimizasyon: DME kısıtlamalarını sağlayan elemanlar ile oluşturulmuş küme $\zeta := \{x \mid F(x) \prec 0\}$ şeklinde ifade edilmiş olsun. Burada $V_{opt} = \inf_{x \in \zeta} f(x)$ belirleme problemine DME kısıtlamalarıyla optimizasyon problemi denir.

Bazı temel örnekler vermek gerekirse;

Örnek 1 Kararlılık: $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere, zamanla değişmeyen doğrusal otonom bir sistem

$$\dot{x} = Ax \qquad A \in \mathbb{R}^{nxn} \, , \tag{3. 13}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu türden bir sistem ancak ve ancak $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ sağlanıyorsa asimptotik kararlıdır. Açıktır ki $X \succ 0$ ve $A^T X + XA \prec 0$ eşitsizliklerini sağlayan öyle bir $X = X^T$ bulanabilirse bu sistem asimptotik olarak kararlıdır. Aslında bu önerme $V(x) = x^T Xx$ Lyapunov fonksiyonuyla gösterilmektedir. Öyleyse sistemin asimptotik kararlılık problemi

$$\begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + XA \end{bmatrix} \prec 0, \tag{3. 14}$$

gibi bir DME' nin çözümüne ait varlık problemine indirgenebilir.

Örnek 2 μ Analizi: Çoğu zaman μ analizinde, bir M matrisine karşın $\left\| DMD^{-1} \right\| < 1$ eşitsizliğini sağlayan köşegen bir D matrisinin aranması problemi ile karşılaşılır.

$$\left\| DMD^{-1} \right\| < 1 \Leftrightarrow D^{-T} M^T D^T DMD^{-1} \prec I, \tag{3. 15}$$

$$\Leftrightarrow M^T D^T DM \prec D^T D, \tag{3. 16}$$

$$\Leftrightarrow M^T XM - X \prec 0. \tag{3. 17}$$

Burada, $X := D^T D \succ 0$ dır. Bu örnekteki problemde belirtilen kıstaslar altında bir matrisin varlığının incelenmesi bir DME varlık problemine karşılık gelmektedir.

Örnek 3 Tekil Değer Minimizasyonu: $F : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ ifadesinin tanımlı ılgın bir fonksiyonu, $\upsilon_{\max}(\cdot)$ ifadesinin de gerçek simetrik bir matrisin en büyük tekil değerini gösterdiği kabul edildiğinde tekil değer minimizasyon problemi x üzerinden $f(x) := \upsilon_{\max}(F(x))$ gibi bir fonksiyonun minimizasyonu olarak tanımlanabilir.

$$f(x) < \beta \Leftrightarrow \beta_{\max}(F^T(x)F(x)) < \beta^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta}(F^T(x)F(x)) - \beta I \prec 0, \tag{3. 18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \beta I & F(x) \\ F^T(x) & \beta I \end{bmatrix} \succ 0. \tag{3. 19}$$

Şimdi

$$y := \begin{bmatrix} \beta \\ x \end{bmatrix}, \qquad G(y) := -\begin{bmatrix} \beta I & F(x) \\ F^T(x) & \beta I \end{bmatrix}, \qquad g(y) := \beta, \tag{3. 20}$$

tanımlamaları yapıldığında x üzerinden f gibi bir fonksiyonu minimize etme problemi $G(y) \prec 0$ kıstasını sağlayan her y üzerinden g' yi minimize etme problemine dönüşür. Bundan dolayı, bu problem de bir çeşit DME ile optimizasyon problemidir.

Örnek 4 Durum Geri Besleme Problemi: Zamandan bağımsız

$$\dot{x} = A_i x + B_i u \qquad i = 1, 2, \dots k, \tag{3. 21}$$

gibi k tane doğrusal zamanla değişmeyen sistem tanımlanmış olsun. Burada $A_i \in \mathbb{R}^{nxn}$ ve $B_i \in \mathbb{R}^{nxm}$ şeklindedir. Problem, k adet otonom $\dot{x} = (A_i + B_i F)x$, $i = 1, 2, \dots k$ sistemini $u = Fx$ durum geri besleme kuralı ile asimptotik kararlı kılan F statik kazanç matrisinin belirlenmesidir. Örnek 1' den yola çıkarak $i = 1, 2, \dots k$ için

$$\begin{Bmatrix} X_i \succ 0 \\ (A_i + B_i F)^T X_i + X_i (A_i + B_i F) \prec 0 \end{Bmatrix}, \tag{3. 22}$$

matris eşitsizliklerini sağlayan F ve X_i matrisleri bulunduğunda problem çözülmüş olacaktır. Ancak X_i ve F matrisleri bilinmeyen olduğu sürece, tanımlanan bu eşitsizlikler DME değildir. DME sistemlerine dönüştürebilmek için yol $Y = X^{-1}$ ve $K = FY$ gibi yeni değişkenler tanımlayıp yukarıdaki eşitsizlikleri tekrar yazmaktır. Bu durumda elde edilen eşitsizlikler bilinmeyenler üzerinden doğrusal olacaktır.

$$\begin{Bmatrix} Y \succ 0 \\ A_i Y + Y A_i^T X_i + B_i K + K^T B_i^T \prec 0 \end{Bmatrix}. \tag{3. 23}$$

Görüldüğü gibi Y ve K değişkenlerine sahip DME' ler elde edilmiş durumdadır. Durum geri besleme problemi (3. 23)' de yer alan DME' ler kapsamında kullanılan Y ve K matrislerinin varlığının incelenmesi problemine dönüşmüştür. Bu durumda kontrol problemi çözümünün $F = KY^{-1}$ olacağı açıktır.

3.1.2 DME' lerin Çözüm Yöntemleri

3.1.2.1 Elipsoit Yöntemi

Elipsoit algoritması diğer algoritmalar ile karşılaştırıldığında, nümerik olarak daha dayanıklıdır ve uygulanabilirliği ile ön plana çıkmaktadır. Ancak bu yöntemin dezavantajı büyük ölçekli optimizasyon problemlerinde oldukça yavaş çalışmasıdır.

Bu bölümde, DME' lerin kullanım alanlarından çözümün varlığı probleminin bu algoritma ile nasıl çözümlenebildiğine dair temel noktalar incelenecektir.

$F:\mathbb{R}^n \to \mathrm{S}$ tanımlı ve ılgın bir fonksiyon olsun. Ayrıca optimum değeri $V_{opt} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ olarak tanımlanan $f(x) := \beta_{\max}(F(x))$ fonksiyonu dikkate alınsın. Bu noktada $F(x) \prec 0$ şartının sağlanmasının ancak $\beta_{\max}(F(x)) < 0$ durumunda gerçeklenebileceğini hatırlamakta fayda vardır. Açıktır ki DME $F(x) \prec 0$ ancak ve ancak $V_{opt} < 0$ iken gerçeklenebilir. $V_{opt} \geq 0$ olduğu durumda ise olası değildir.

Tekil değer minimizasyonu örneğinde tanımlanan $y = col(\beta, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ vektörü ve doğrusal maliyet fonksiyonu $g(y) = \beta$, konveks küme $\zeta := \{y \in \mathbb{R} \times \mathrm{X} | G(y) \prec 0\}$ üzerinde tanımlanırsa, burada

$$G(y) := -\begin{bmatrix} \beta I & F(x) \\ F^T(x) & \beta I \end{bmatrix}, \tag{3. 24}$$

şeklinde ılgın bir fonksiyondur. $F(x) \prec 0$ DME' sinin çözümünün varlığı, optimizasyon probleminde konveks ζ kümesi üzerinde minimize edilen g maliyet fonksiyonunun optimum değerinin işaretiyle belirlenmektedir.

Algoritmadaki birinci adıma g konveks fonksiyonunu uygulayıp, g'nin $y_k \in \zeta$ noktasındaki g_k alt gradyanı belirlenir. g fonksiyonu doğrusal olduğu sürece, y_k noktasındaki g' nin alt gradyanı k ve y_k' dan bağımsız olarak tektir ve $g_k = col(1, 0, \ldots, 0)$ şeklindedir. Elipsoit algoritmasının geri kalan adımları artık kolaylıkla uygulanabilir.

3.1.2.2 İç Nokta Yöntemi

Konveks optimizasyon konusundaki en büyük ve önemli buluş, iç nokta yönteminin bulunmasıdır. Nesterov ve Nemirovskii [22] de DME problemlerinin gerçekçi ve uygulanabilir bir anlam kazanmasını sağlamıştır.

Algoritmanın ana fikri şu şekilde özetlenebilir. F ılgın bir fonksiyon ve minimize etmek istediğimiz $f:\zeta \to \mathbb{R}$, $\zeta := \{x \mid F(x) < 0\}$ uzayında tanımlı bir konveks fonksiyon olsun. Optimize etmek istediğimiz konveks problem ise

$$V_{opt} = \inf_{x \in \zeta} f(x), \qquad (3.\ 25)$$

olsun. Bu problemi çözebilmek için (optimum veya optimuma çok yakın çözüm) öncelikle bir bariyer fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere haiz olmalıdır:

- ζ ' nin içinde kesin konveks olmalı,
- ζ ' nin içindeki birbirini takip eden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ noktaları boyunca $+\infty$ yaklaşıldığında, fonksiyon da ζ ' nin sınırına yakınsamalıdır.

Yukarıda belirtildiği gibi $\varnothing$ gibi bir bariyer fonksiyonu verildiğinde $x \in \zeta$ koşulundaki $f(x)$ fonksiyonunun minimizasyonu şeklindeki kısıtlamalı optimizasyon problemi,

$$f_t(x) := tf(x) + \varnothing(x), \qquad (3.\ 26)$$

şeklindeki kısıtlamasız bir optimizasyon problemine dönüşmüş olur. Burada $t > 0$ dır ve ceza parametresini simgelemektedir. Ayrıca f_t fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de kesin konvekstir. Temel fikir f_t fonksiyonunun $x(t)$' sini herhangi $t > 0$ anında minimize edebilecek $t \to x(t)$' ye uygun eşlemeyi belirlemektir. Kısıtlamasız optimizasyon probleminin çözümü için kullanılan hemen hemen tüm iç nokta yöntemlerinde Newton-Raphson iterasyon tekniği kullanılır.

Eğer $F(x) \prec 0$ gibi bir DME' nin çözümünün varlığı problemi ile karşı karşıya kalınırsa, burada f fonksiyonunun bir rolü yoktur.

Olası bariyer fonksiyonlarından biri logaritmik fonksiyondur. Bir bariyer fonksiyonu logaritmik fonksiyon olarak

$$\varnothing(x) := \begin{cases} \log\det - F(x)^{-1} & \text{Eğer } x \in \zeta \\ \infty & \text{tüm diğer durumlarda} \end{cases}, \tag{3. 27}$$

ζ kümesinin boş olmadığı ve sınırlı olduğu kabul edilirse, $\varnothing$ kesin konveks olur ve ζ üzerinde bir bariyer fonksiyonu olur. Bu durumda $\varnothing$ fonksiyonunun minimumunu teşkil eden x_{opt} çözümünün tek olarak var olduğu gösterilebilir. Açıktır ki bu nokta ζ kümesinin içindedir ve ζ ' in çözüm kümesinin analitik merkezi olarak adlandırılır.

x_{opt} noktası genellikle Newton iterasyonundan kolayca

$$x_{k+1} := x_k - (\varnothing''(x_k))^{-1}\varnothing'(x_k), \tag{3. 28}$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki $\varnothing'$ ve $\varnothing''$ ifadeleri sırasıyla $\varnothing$' nin gradyanı ve Hesiyanını göstermektedir.

$F(x) \prec 0$ gibi bir DME' ye bağlı $f(x)$ fonksiyonunun minimizasyon problemi başka bir değişle

$$\hat{F}_t(x) := -\begin{bmatrix} f(x)-t & 0 \\ 0 & F(x) \end{bmatrix} < 0, \tag{3. 29}$$

DME' nin çözümünün varlığı problemi şeklinde de ifade edilebilir. Burada $t > t_0 := \inf_{x\in\zeta} f(x)$ ceza parametresidir. Aynı bariyer fonksiyonunu kullandığımızda, kısıtlamasız optimizasyon problemi

$$g_t(x) := \log\det - \hat{F}_t(x)^{-1} = \underbrace{\log\frac{1}{t-f(x)}}_{\varnothing_0(t-f(x))} + \underbrace{\log\det - F(x)^{-1}}_{\varnothing(x)}, \tag{3. 30}$$

fonksiyonunun minimizasyonu olarak şekillenmektedir.

3.2 Kararlılık Modelleri

Herhangi bir sistem için elde edilecek olan kontrolcü ile birlikte oluşacak kapalı çevrim sistemin kararlılığını sağlamak adına, tasarım yöntemlerinin problem tanımlarında kullanılabilecek olan 3 farklı kararlılık modeli mevcuttur.

3.2.1 Dayanıklı Kararlılık

Sabit fakat bilinmeyen σ vektörü $\sigma = \left[\sigma_1, \ldots \sigma_n\right]^T$ eşitliği ile verilmek üzere

$$Q := \left\{ A(\sigma) : A(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i A_{vi}, \ \ \sum_{i=1}^{N} \sigma_i = 1, \ \ \sigma_i \geq 0 \right\}, \tag{3. 31}$$

konveks bölgesinde tanımlanan belirsizliğe sahip çok terimli

$$\delta(x) = A(\sigma)x\,, \tag{3. 32}$$

$A(\sigma) \in Q$ için ancak ve ancak

a) sürekli zamanlı bir sistem için

$$A^T(\sigma)P(\sigma) + P(\sigma)A(\sigma) < 0\,, \tag{3. 33}$$

b) ayrık zamanlı bir sistem için

$$A^T(\sigma)P(\sigma)A(\sigma) - P(\sigma) < 0\,, \tag{3. 34}$$

şeklinde verilen eşitsizlikleri sağlayan $P(\sigma) = P^T(\sigma) > 0$ matrisi var ise dayanıklı kararlıdır [23].

Burada $A(\sigma)$, $N = 2^p$ şeklinde belirsizliklerin oluşturduğu kümenin köşe sayısı olmak üzere $i = 1, 2, \ldots N$ için A_{vi} ile tanımlanan belirsizliklerin oluşturduğu konveks sete karşılık gelmektedir.

Oliveira ve diğerleri tarafından [24] de belirtildiği üzere belirsizlik parametresi σ ve $A(\sigma)$' nın bir fonksiyonu olarak $P(\sigma)$' yı resmi olarak belirleyecek genel ve sistematik bir yol yoktur. $P(\sigma)$, (3. 33) ve (3. 34) eşitsizliklerinde parametre bağımlı quadratik kararlılığı tanımlayan özel yapıya sahip bir Lyapunov matrisi olarak bilinmektedir.

$P(\sigma)$' yı seçmenin basit bir yolu bu matrisi tek bir Lyapunov matrisi olarak $P(\sigma) = P$ şeklinde belirlemektedir.

3.2.2 Quadratik Kararlılık

Belirsizliğe sahip çok terimli (3. 32), (3. 31) ile verilen belirsizlik bölgesinde ancak ve ancak

a) sürekli zamanlı sistemler için

$$A_{vi}^T P + P A_{vi} < 0, \quad i = 1,2,\ldots N, \tag{3. 35}$$

b) ayrık zamanlı sistemler için

$$A_{vi}^T P A_{vi} - P < 0, \quad i = 1,2,\ldots N, \tag{3. 36}$$

şeklinde verilen eşitsizlikleri sağlayan $P = P^T > 0$ matrisi var ise quadratik kararlıdır [25].

Elde edilen bu yaklaşım genel olarak oldukça yüksek seviyede tutuculuk sağlar. Bu tutuculuğu azaltmak adına durum vektörü $x \in \mathbb{R}^n$, $A_k \in \mathbb{R}^{nxn}$, $k = 0,1,2,\ldots,p$ ve belirsizlik vektörü $\Theta = [\Theta_1,\ldots,\Theta_p] \in \mathbb{R}^p$ için tanımlanan doğrusal sistemin belirsizlik denklemi

$$\delta(x) = (A_0 + A_1\Theta_1 + A_2\Theta_2 + \ldots + A_P\Theta_p)x = A(\Theta)x, \tag{3. 37}$$

ılgın iken parametre bağımlı bir Lyapunov fonksiyonu

$$P(\Theta) = P_0 + P_1\Theta_1 + P_2\Theta_2 + \ldots + P_P\Theta_p, \tag{3. 38}$$

şeklinde tanımlanır.

Ilgın quadratik kararlılık için yeterli durumlar elde edilen veriler doğrultusunda yeniden değerlendirildiğinde aşağıda verilen teorem ortaya çıkarılabilmektedir.

Teorem 3. 1: [26] (3. 37) ile verilen doğrusal denklem ve (3. 38) ile verilen parametre bağımlı Lyapunov fonksiyonu dikkate alındığında, $A(\Theta_m)$ kararlı ise ve

$$(\beta \times \lambda) \in \Gamma \times \Lambda, \tag{3. 39}$$

$M_j = M_j^T$ bazı pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$A^T P_j + P_j A_j + M_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots p, \tag{3. 40}$$

için

$$L(\beta, \lambda) = A^T(\lambda)P(\lambda) + P(\lambda)A(\lambda) + \dot{P}(\lambda) - P_0 + \sum_{j=1}^{p} \Theta_j^2 M_j < 0, \tag{3. 41}$$

$$P(\Theta_m) > 0, \tag{3. 42}$$

eşitsizliklerini sağlayan $(p+1)$ adet simetrik P matrisi var ise (3. 37) denklemi ile verilen sürekli zamanlı doğrusal sistem ılgın quadratik kararlıdır.

$P_0 = P_1 = P_2 = \ldots = P_P = 0$ olduğu durumda (3. 40) ve (3. 41) denklemleri quadratik kararlılık tutuculuğunu azaltır. Ilgın quadratik kararlılık, quadratik kararlılığı kapsar fakat genel olarak diğer parametre bağımlı quadratik kararlılık kavramlarından daha fazla tutuculuğa sahiptir.

3.2.3 D - Kararlılık

Kompleks düzlemde bir bölgede tanımlanan

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \prec 0 \right\}, \tag{3. 43}$$

kararlılık bölgesinin içinde kalan ve

$$\begin{bmatrix} F^T A_{vi} + A_{vi}^T F - aP_i & (A_{vi} + F + b^* P_i)^T \\ A_{vi} + F + b^* P_i & 2I - cP_i \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, 2, \ldots N, \tag{3. 44}$$

şeklinde verilen DME' yi sağlayan F ve $P_i = P_i^T$ matrisleri var ise (3. 32) denklemi ile verilen ifade

$$P(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} P_i \sigma_i, \tag{3. 45}$$

eşitliği ile verilen parametre bağımlı Lyapunov matrisi ile birlikte parametre bağımlı quadratik kararlıdır [5].

Simetrik D matrisi için standart seçimler, kutuplar sol yarı s-düzleminde seçilmek istenildiğinde $a=0, b=1, c=0$ şeklinde, ayrık zamanda kutupların birim disk içinde olunması istenildiğinde ise $a=-1, b=0, c=1$ şeklinde tanımlanmıştır. Simetrik matris elemanlarının farklı sayısal değerleri için kararlılık bölgesi disk, dikey şerit, yatay şerit ve konik gibi farklı şekiller alabilir.

Sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım probleminin kararlılık analizinde quadratik Lyapunov kararlılığından daha az tutucu D - kararlılık modeli kullanılacaktır.

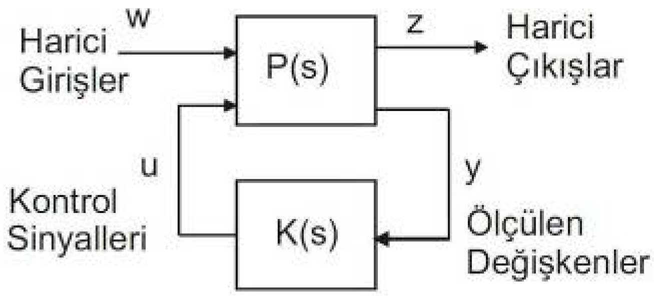
BÖLÜM 4

$\mathcal{H}_\infty$ KONTROLCÜ TASARIM TEKNİĞİ

Tez çalışmasının bu bölümünde ilk olarak standart bir tasarım yöntemi olan çıkış geri besleme yöntemi kullanılarak tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlamak amacıyla gerekli olan problem tanımları yapılacaktır. Ardından kontrolcüsü tasarlanacak olan vinç kolu sistemine ait taşıyıcıya etkiyen bozucu giriş dikkate alınarak vinç kolu alt sistemi tekrar modellenecek ve elde edilen sistem modeli kullanılarak tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanacaktır. Tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcünün elde edilmesinin ardından standart tasarım yöntemlerinin aksine düşük dereceli kontrolcü tasarımına olanak sağlayan sabit dereceli dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarım yöntemi için problem tanımı yapılacak ve çok terimli yaklaşım metodu tanıtılacaktır. Bu yaklaşım metodu çerçevesinde geliştirilecek tasarım yöntemi kullanılarak yeniden modellenen vinç kolu sistemi için dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımı gerçekleştirilecektir. Bölümün son kısmında ise tasarlanan iki farklı kontrolcü, farklı derecelere sahip olacak şekilde tasarlanacak sabit dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcüler ile birlikte benzetim ortamında vinç kolu alt sistemine uygulanarak sistem çıktıları elde edilecektir.

4.1 Çıkış Geri Besleme Yöntemi

Çıkış geri besleme yöntemi ile $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımında temel amaç sistemi harici bozucu girişlere karşı dayanıklı hale getirmektir.



Şekil 4. 1 Standart çıkış geri besleme yapısı

Standart çıkış geri besleme yapısında yer alan $P(s)$

$$P(s)=\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}, \tag{4. 1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu durumda kontrol ve bozucu girişlerin çıkışlara etkisi

$$z = P_{11}w + P_{12}u\,, \quad y = P_{21}w + P_{22}u\,, \tag{4. 2}$$

denklemleri ile ifade edilebilmektedir.

$$u = K(s)y \tag{4. 3}$$

olduğu dikkate alınarak (4. 2) denklemi yeniden oluşturulduğunda

$$z = \left[P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \right] w\,, \tag{4. 4}$$

$$z = F_1(P,K)w\,, \tag{4. 5}$$

eşitlikleri elde edilir.

4.1.1 Performans ve Dayanıklılık

Çıkış geri besleme yöntemi ile $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımında farklı performans ve dayanıklılık hedefleri gözetilebilmektedir.

- Alçak frekans bölgesinde harici girişlere karşı iyi bir bozucu tepkisi isteniyorsa, bu performans $w \to 0$ için duyarlılık fonksiyonu $S = (I + PK)^{-1}$ kullanılarak gerçeklenebilir.

- Kapalı çevrim transfer fonksiyonu için yüksek frekanslarda gürültü uyarı sınırı isteniyorsa, bu hedefe $w \to \infty$ için tam duyarlılık fonksiyonu $T = I - S = I - (I + PK)^{-1}$ kullanılarak ulaşılabilir.
- Parametre değişimlerinden gelen kararsızlığa karşı korunma isteniyor ise $K(I + PK)^{-1}$ ifadesi minimize edilerek bu durum gerçeklenebilir.

$\mathcal{H}_\infty$ tasarım problemi W_1 ve W_3 frekans bağımlı matrisler olmak üzere

$$F_l(P,K) = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_3(I - S) \end{bmatrix}, \tag{4. 6}$$

fonksiyonunun minimizasyon problemi olarak tanımlanabilmektedir.

4.1.2 Problem Tanımı

$\mathcal{H}_\infty$ optimal kontrolcünün elde edilmesinde tasarım algoritması, harici çıkışlar ve harici girişler arasında tanımlanan

$$T_{zw} = F_l(P,K), \tag{4. 7}$$

fonksiyonunun

$$\| T_{zw} \|_\infty < \beta, \tag{4.8}$$

şeklinde minimize edilmesine dayalıdır.

Şekil 4. 1' de yer alan sistem durum uzay formatında

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \tag{4. 9}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \tag{4. 10}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \tag{4. 11}$$

denklemleri ile temsil edilmektedir. Aynı sistem matris formunda ise

$$\left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right], \tag{4. 12}$$

şeklinde gösterilebilir.

Bu noktada optimal $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü elde etmek için aşağıdaki şartların sağlanması gerekmektedir.

- (A, B_2) çifti kararlı kılınabilir, (C_2, A) çifti ise meydana çıkarılabilir olmalıdır.
- (A, B_1) çifti kararlı kılınabilir, (C_1, A) çifti ise meydana çıkarılabilir olmalıdır.
- D_{12} ve D_{21} matrisleri tam rank' a sahip olmalıdır.
- Bütün frekanslar için $\begin{bmatrix} A - jwI & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ matrisi tam sütun rankına sahip olmalıdır.
- Bütün frekanslar için $\begin{bmatrix} A - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ matrisi tam satır rankına sahip olmalıdır.
- Denklemlerin basitleştirilmesi için $D_{11} = 0$ ve $D_{22} = 0$ şeklinde olmalıdır.
- $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{I} \end{bmatrix}$ ve $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ eşitlikleri sağlanmalıdır.
- $D_{12}{}^T C_1 = 0$ ve $B_1 D_{21}{}^T = 0$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

4.1.2.1 Çözüm

$\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım probleminin çözümü iki yeni Hamiltonian matrisi içerir.

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & -\beta^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix}, \tag{4. 13}$$

$$J_\infty := \begin{bmatrix} A^T & \beta^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 \; B_1^T & -A \end{bmatrix}, \quad (4.\ 14)$$

Verilen şartlar altında Hamiltonian matrisleri kullanılarak bir K kontrolcüsünün elde edilmesi Teorem 4. 1 ile açıklanabilir.

Teorem 4. 1 : [1]

- $H_\infty \in \mathrm{dom(Ric)}$ ve $X_\infty := \mathrm{Ric}(H_\infty) \geq 0$, (4. 15)
- $J_\infty \in \mathrm{dom(Ric)}$ ve $Y_\infty := \mathrm{Ric}(J_\infty) \geq 0$, (4. 16)
- $\rho(X_\infty Y_\infty) < \beta^2$, (4. 17)

koşulları sağlanıyorsa $\| T_{zw} \|_\infty < \beta$ şartını sağlayan kabul edilebilir bir optimal altı K kontrolcüsü bulunabilir.

Elde edilecek olan K kontrolcüsü

$$A_\infty := A + \beta^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2, \quad (4.\ 18)$$

$$F_\infty := -B_2 X_\infty, \quad (4.\ 19)$$

$$L_\infty := -Y_\infty C_2^T, \quad (4.\ 20)$$

$$Z_\infty := (I - \beta^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}, \quad (4.\ 21)$$

olmak üzere

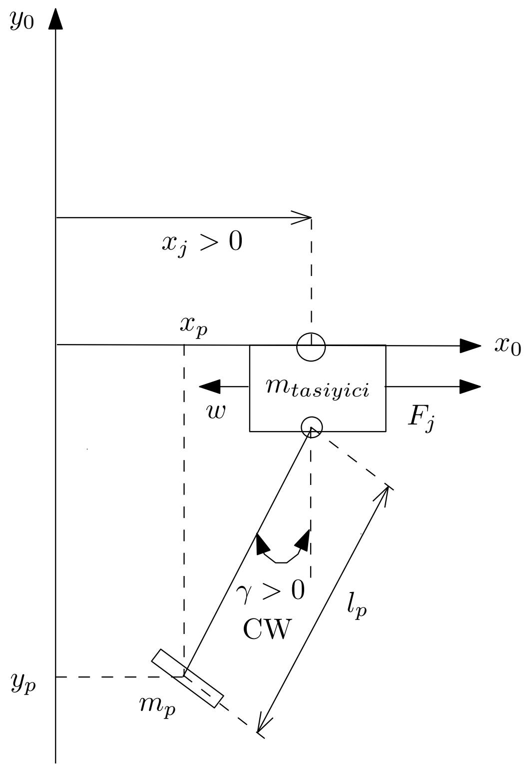
$$K_{opt}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & -A \end{array}\right], \quad (4.\ 22)$$

şeklinde verilebilir.

Tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımının gerçekleştirilmesi için `Matlab Robust Control Toolbox` kapsamında bulunan `hinfsyn` komutu kullanılacaktır. Bu komuta giriş olarak vinç kolu modelinde elde edilecek durum uzay matrisleri verilecek ve derecesi en az vinç kolu sistemi ile aynı dereceden olacak tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanması sağlanacaktır.

4.1.3 Taşıyıcı Sistemine Etkiyen Bozucu Yapısı

Şekil 4. 2’ de gösterildiği gibi vinç kolu alt sisteminde bulunan taşıyıcıya yatay eksende gösterilen doğrultuda bir w kuvveti etki ediyor ise, bu bozucu etkisi ile birlikte sistem modeli içinde bulunan ve denklem (2. 36)’ da yer alan Q_1 değeri $F_J - w$ olarak alınıp vinç kolu alt sistemi tekrar modellendiğinde sisteme ait yeni durum uzay matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.



Şekil 4. 2 Bozucu kuvvet ile birlikte vinç kolu sistemine ait serbest cisim diyagramı

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{g m_p{}^2 l_p{}^2 r_{j,kasnak}{}^2}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{m_p l_p g\left(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + m_p r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}\right)}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 23}$$

$$B_w=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{r_{j,kasnak}\eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j}\left(m_p l_p{}^2 + J_\gamma\right)}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}}, \\ \dfrac{m_p l_p \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j} r_{j,kasnak}}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}}, \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{r_{j,kasnak}{}^2\left(m_p l_p{}^2 + J_\gamma\right)}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}} \\ -\dfrac{m_p l_p r_{j,kasnak}{}^2}{\begin{matrix} m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 m_p l_p{}^2 + m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma \\ + m_p r_{j,kasnak}{}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,j}{}^2 m_p l_p{}^2 + J_\gamma K_{g,j} J_\psi \end{matrix}} \end{bmatrix} \tag{4. 24}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 25}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4. 26}$$

Elde edilen durum uzay matrislerinde sarkaç sisteminin dönmesinden kaynaklanan eylemsizlik momenti $J_\gamma = 0$ olarak ihmal edilip matris içerisinde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise vinç kolu sisteminin

$$\frac{\partial}{\partial t} x = Ax + Bu \,, \tag{4. 27}$$

$$y = Cx + Du \,, \tag{4. 28}$$

doğrusal durum uzay parametrizasyonuna ait durum uzay matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{m_p r_{j,kasnak}{}^2 g}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{g(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + m_p r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2)}{(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2) l_p} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4. 29}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dfrac{r_{j,kasnak} \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j}}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2}, & \dfrac{r_{j,kasnak}{}^2}{m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2} \\ \dfrac{r_{j,kasnak} \eta_{g,j} K_{g,j} \eta_{m,j} K_{t,j}}{(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2) l_p}, & \dfrac{r_{j,kasnak}{}^2}{(m_{taşıyıcı} r_{j,kasnak}{}^2 + J_\psi K_{g,j}{}^2) l_p} \end{bmatrix}, \tag{4. 30}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4. 31}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4. 32}$$

şeklinde olmaktadır.

Vinç kolu sistemi üzerinde yer alan taşıyıcıya uygulanan ters kuvvet, diğer bir değişle bozucu giriş dikkate alınarak oluşan yeni modele ait durum uzay matrisleri belirlenmiştir. Bu model kullanılarak standart çıkış geri besleme yöntemi yardımıyla vinç kolu sistemi için tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarlanacaktır.

4.1.4 Tam Dereceli $\mathscr{H}_\infty$ Kontrolcü Tasarımı

Taşıyıcıya uygulanan bozucu kuvvet dikkate alınarak modellenen sistemin durum uzay matrislerinde yer alan değişkenlere karşılık gelen değerler yerine koyulduğunda vinç kolu sisteminin yeni modeline ait durum uzay matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.7019 & 0 & 0 \\ 0 & -13.3301 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 33}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 18.2478 & -1.1802 \\ 21.1299 & -1.3666 \end{bmatrix} \tag{4. 34}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 35}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4. 36}$$

Elde edilen B_w matrisinin ilk sütunu sisteme ait kontrol girişini, ikinci sütunu ise taşıyıcıya etkiyen bozucu kuvvet girişini temsil etmektedir. Durum uzay matrislerinden C matrisinin ilk satırı ise sisteme ait kontrol çıkışına aittir. Diğer yandan bozucu girişin oluşturduğu performans çıkışına ait matrisi ve çıkış matrislerini elde etmek için bozucu girişe ait performans çıkışının belirlenmesi gerekmektedir. Bozucu girişe karşılık gelen performans çıkışı için

$$X := \begin{bmatrix} X_j(t) \\ \gamma(t) \\ \dfrac{d}{dt}X_j(t) \\ \dfrac{d}{dt}\gamma(t) \end{bmatrix}, \tag{4. 37}$$

olmak üzere taşıyıcının pozisyon ve sarkacın açı parametreleri kullanılmıştır.

$$z = [x_1 + x_2]w \tag{4. 38}$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \tag{4. 39}$$

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \tag{4. 40}$$

Performans çıkışı için oluşturulan matris dikkate alınarak sisteme ait diğer durum uzay matrisleri

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},\ D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},\ D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix},\ D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \tag{4. 41}$$

şeklinde elde edilir.

Kontrolcü tasarımı için elde edilen matrisler ilk olarak aşağıdaki gibi durum uzay modeli halinde temsil edilmiştir.

```
>> P=ss(A,Bw,C,D)
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.7019 & 0 & 0 \\ 0 & -13.3301 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 42}$$

Elde edilen B_w matrisinin ikinci sütunu taşıyıcıya etkiyen bozucu kuvvetin girişini (B_1) temsil ettiğinden dolayı `hinfsyn` komutunun gereksinimlerinden dolayı B_w matrisindeki sütunlar kendi arasında yer değiştirecektir.

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1.1802 & 18.2478 \\ -1.3666 & 21.1299 \end{bmatrix} \tag{4. 43}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 44}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4. 45}$$

Daha sonra `hinfsyn` komutu kullanılarak kontrolcü, kapalı çevrim sistemin durum uzay modeli ve sistemin sonsuz norm değerini elde etmek için Matlab komutuna sırasıyla sistemin durum uzay modeli, C_2 matrisinin satır sayısı ve B_2 matrisinin sütun sayısı giriş olarak verilmiştir. Ek olarak çözüm kümesinde esneklik sağlayan DME' lerin, Riccati denklemleri yerine kullanımını sağlamak için komut parametrelerinde gerekli düzenlemeler yapılmıştır.

```
>> [K,CL,GAM]=hinfsyn(P,1,1,'METHOD','lmi')
```

Komutun çalıştırılması sonucu elde edilen $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü

$$K = \frac{-698.7s^3 - 1971s^2 - 3826s - 1.351x10^4}{s^4 + 61.14s^3 + 1371s^2 + 698.1s + 1.543x10^4}, \tag{4. 46}$$

şeklinde 4. dereceden bir kontrolcüdür.

Kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonu ise

$$CL = \frac{\begin{array}{c} -2.547s^6 - 155.7s^5 - 3505s^4 - 2598s^3 \\ -5.767x10^4 s^2 - 9359s - 2.068x10^5 \end{array}}{\begin{array}{c} s^8 + 61.14s^7 + 1384s^6 + 1.426x10^4 s^5 + 6.968x10^4 s^4 \\ +2.239x10^5 s^3 + 8.609x10^5 s^2 + 7.93x10^5 s + 2.801x10^6 \end{array}}, \tag{4. 47}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Son olarak kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonuna ait sonsuz normun minimize edilmesi ile elde edilen β, 0.6935 değerine eşit olarak bulunmaktadır.

4.2 Çok Terimli Yaklaşım Metodu

Çok terimli yaklaşım metodu standart yöntemlerin aksine pozitif çok terimli matrislerin özellikleri temelinde oluşturulmuştur. Problemin temelinden gelen konveks olmayan yapı bilinen Pozitif Reel Lemma ile konveks bir şekle indirgenmiştir. Konveks problemin gösterimi ve çözümünde DME kullanılmıştır. Çok terimli yaklaşım metodunun tutuculuğu tamamen seçilen merkezi çok terimliye bağlıdır [5].

4.2.1 Problem Tanımı

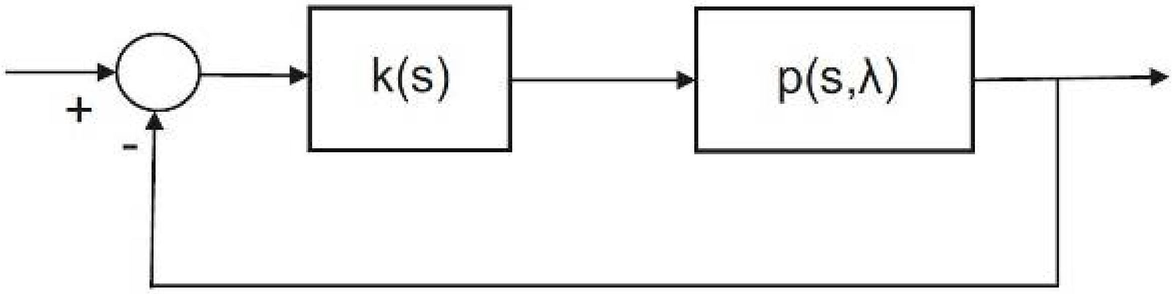
Sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarlamak amacıyla geliştirilen tasarım metodunda, örnek olarak üzerinde çalışılan ve belirsizlikler içeren sistemin pay ve payda cinsinden ifadesi

$$p(s,\lambda) = \frac{b(s,\lambda)}{a(s,\lambda)}, \tag{4. 48}$$

şeklinde kabul edilmiştir. Sistemin pay ve payında yer alan s parametresi sistemin sürekli zamanlı olduğunu, λ parametresi ise sistemin belirsizlikler içerdiğini belirtmek için kullanılmıştır. Sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcüsü tasarlanacak olan sistemin pay, payda ve kontrolcü ile ilişkisi negatif bir geri besleme vasıtasıyla Şekil 4. 3' deki gibi gösterilebilmektedir.

Negatif geri besleme yapısında yer alan sabit dereceli kontrolcü $k(s)$, çok terimliler $y(s)$ ve $x(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$k(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \tag{4. 49}$$



Şekil 4. 3 Standart negatif geri besleme yapısı

Burada $x(s)=x_0+x_1s+\ldots+x_ms^m$ ve $y(s)=y_0+y_1s+\ldots+y_ms^m$ şeklindedir ve ilgili çok terimli katsayılarını göstermek üzere

$$x=\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \ldots & x_m\end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix}y_0 & y_1 & \ldots & y_m\end{bmatrix}, \tag{4. 50}$$

vektörleri oluşturulmuştur.

Oluşan kapalı çevrim sistemin D - kararlılığının sağlanması için sistem kutuplarının

$$D=\left\{s\in\mathbb{C}:\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{12}^* & d_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}\right\}\prec 0, \tag{4. 51}$$

$$\mathrm{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{12}^* & d_{22}\end{bmatrix}, \tag{4. 52}$$

D bölgesi içinde olması gerekir. Buradaki D matrisi bir adet pozitif ve bir adet negatif özdeğer içeren simetrik bir yapıya sahiptir. Simetrik matris için standart seçimler, sürekli zamandaki sistemler için kutuplar sol yarı düzlemde seçilmek istenildiğinde $d_{11}=0, d_{12}=1, d_{22}=0$ şeklinde ve ayrık zamanda kutupların birim disk içinde olunması istenildiğinde ise $d_{11}=-1, d_{12}=0, d_{22}=1$ şeklinde tanımlanmıştır. Simetrik matris elemanlarının farklı sayısal değerleri için kararlılık bölgesi disk, dikey şerit, yatay şerit ve konik gibi farklı şekiller alabilir [10]. Eşitsizlik (4. 51) tek boyutlu bir set olarak aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir.

$$\partial D=\left\{s\in\mathbb{C}:d_{11}+d_{12}s+d_{12}^*s^*+d_{22}ss^*=0\right\} \tag{4. 53}$$

Bundan dolayı (4. 51) eşitsizliğinin sağlanması durumunda kutuplar istenilen D-kararlılık bölgesi içerisinde kalacaktır.

Üç serbestlik dereceli vinç sistemine ait bir alt sistem olan vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcıyı kontrol edecek olan dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımını gerçekleştirmek için yapılan bu çalışmada sistemde var olan belirsizliklerde dikkate alınacağı için daha önce benzer amaç doğrultusunda geliştirilen çok terimli metot kullanılacaktır [5]. Geliştirilen bu metot belirsizlikler içeren bir sistem için genel bir kontrolcü tasarlayarak kararlılık problemini incelediğinden ötürü bu yöntem $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımını gerçekleyecek şekilde geliştirilmeye çalışılacaktır. Bu çalışmada, temel amacımız performans çıkışı ile bozucu girişi arasında kalan sistemin transfer fonksiyonunun sonsuz normunu sınırlandırmak ve minimize etmek olacaktır.

$$\| \mathscr{G}(s,\lambda) \|_\infty \le \beta \tag{4. 54}$$

Burada $\mathscr{G}(s,\lambda)$ fonksiyonu, payı $n(s,\lambda)$ ve paydası $d(s,\lambda)$ olmak üzere sabit dereceli kontrolcünün çok terimlilerine ($x(s)$, $y(s)$) bağlı olan bir fonksiyondur ve performans çıkışı ile bozucu giriş arasında kalan sistemin transfer fonksiyonunu sembolize eder.

4.2.2 Matematiksel Ön Bilgi

Tasarım metodunu geliştirmek için $c(s)$ ve $d(s)$ çok terimlileri $c(s) = c_0 + c_1 s + \ldots + c_m s^m$ ve $d(s) = d_0 + d_1 s + \ldots + d_m s^m$ olacak şekilde tanımlanmışlardır. Ayrıca $c(s)$ ve $d(s)$ çok terimlilerin bölüm şeklinde gösterildiğinde sonsuzda sıfırlarının olmaması için en büyük dereceli katsayıları olan c_m ve d_m sıfırdan farklı bir değere eşit olacak şekilde belirlenmiştir [12]. Bu çok terimlilerin katsayıları

$$c = [c_0 \; c_1 \; \ldots \; c_m], \quad d = [d_0 \; d_1 \; \ldots \; d_m], \tag{4. 55}$$

şeklinde satır matrisi olarak gösterilebilmektedir. Bu noktada $c(s)$ ve $d(s)$ çok terimlileri arasındaki ilişki Lemma 4. 1 vasıtasıyla tanımlanmıştır.

Lemma 4. 1: [5] Çok terimli $d(s)$, ancak ve ancak $\dfrac{c(s)}{d(s)}$ ifadesini D - kesin pozitif reel kılan çok terimli D - kararlı $c(s)$ olduğu durumda D - kararlıdır.

$\dfrac{c(s)}{d(s)}$ ifadesininin kesin pozitif reel olma koşulu $\beta > 0$ için

$$\mathrm{Re}\frac{c(s)}{d(s)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^*(s)}{d^*(s)} + \frac{c(s)}{d(s)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^*(s)d(s) + d^*(s)c(s)}{d^*(s)d(s)}\right) \geq \beta, \tag{4. 56}$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4. 56)' da verilen ifade tek boyutlu bir set olarak aşağıdaki gibi gösterilebilmektedir.

$$c^*(s)d(s) + d^*(s)c(s) - 2\beta d^*(s)d(s) \geq 0 \tag{4. 57}$$

Bu denklem de yer alan $2\beta d^*(s)d(s)$ ifadesi β oldukça küçük bir skaler olduğundan dolayı ihmal edilebilir.

D - kararlılık bölgesini temsil eden DME gösterimi üzerinde yapacağımız genişletme çalışmasında kullanmamız gereken projeksiyon matrisi $(2m)\times(m+1)$ boyutunda

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{4. 58}$$

olacak şekilde tanımlanmıştır.

Teorem 4. 2: [5] Pozitif reel lemma kullanılarak çok terimli $d(s)$, ancak ve ancak

$$c^T d + d^T c - S^T (D \otimes P) S \geq 0, \tag{4. 59}$$

eşitsizliğini sağlayan çok terimli D - kararlı $c(s)$ ve $P = P^T$ olmak üzere m boyutlu bir P matrisi olduğu durumda D - kararlıdır.

Burada $\otimes$ Kronecker Delta işlemini ifade etmek için kullanılmıştır.

Sistem belirsizliklerini polytopic olarak ele aldığımızda sisteme ait çok terimli $d(s,\lambda)$, N adet köşe noktası için $d^i(s) = d_0^i + d_1^i s + \ldots + d_m^i s^m$ yapısındadır. Burada $i = 1,2,\ldots,N$ olacak şekilde formüle edilmiştir.

Teorem 4. 3: [5] Çok terimli $d^i(s)$, ancak ve ancak

$$c^T d^i + d^{iT} c - S^T (D \otimes P^i) S \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{4. 60}$$

eşitsizliğini sağlayan çok terimli D - kararlı $c(s)$ ve $P^i = P^{iT}$ olmak üzere m boyutlu bir P^i matrisi olduğu durumda D - kararlıdır.

Gözlem 4. 1: Teorem 4. 3′ nin gerçeklenmesi, belirsizlik içeren çok terimlinin dayanıklı kararlılığını sağlamak için yeterlidir fakat genel olarak gerekli değildir.

Bu teorem genişletildiğinde belirsizlik içeren bütün durumlar için Şekil 4. 3′ deki sistemin kapalı çevrim karakteristik çok terimlisi, $d(s,\lambda) = a(s,\lambda)x(s) + b(s,\lambda)y(s)$ biçimindedir ve sistemi D - kararlı kılacak $(x(s), y(s))$ çiftleri bulunabilir.

Teorem 4. 4: [12] Sistem belirsizlikleri polytopic olarak ele alınıp sisteme ait çok terimliler $a(s,\lambda)$ ve $b(s,\lambda)$ için D - kararlı bir merkezi çok terimli $c(s)$ verildiğinde

$$c^T d^i(x,y) + d^i(x,y)^{\mathrm{T}} c - S^T (D \otimes P^i) S \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{4. 61}$$

eşitsizliğini sağlayabilen x, y ve simetrik olan P^i matrisleri var ise, kapalı döngü sistemi dayanıklı D - kararlı kılan kontrolcü çok terimlileri $x(s)$ ve $y(s)$ elde edilebilir.

Bu yaklaşım sabit dereceli kontrolcü tasarımı için basit bir yöntem sunar. Tasarımda belirlenmesi gereken kritik parametre merkezi çok terimlidir. Bu seçim konveks seçim gövdemiz üzerindeki tutuculuğu direk olarak etkilemektedir. Örneğin aynı belirsiz sistem için seçilebilecek iki farklı merkezi çok terimlinin göstermiş olduğu çözüm gövdesi birbirinden farklı olacaktır. Bazı durumlarda bu gövdeler birbirini kapsayabilir.

4.2.3 $\mathscr{H}_\infty$ Kontrolcüsü

Literatürde kullanılan standart $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım yöntemleriyle elde edilen kontrolcülerin derecesi pratik uygulamalarda gerçeklenebilecek kadar düşük olmadığından dolayı bu çalışmada düşük dereceli kontrolcü elde etmek amacıyla tasarımda çok terimli metot tercih edilmiştir. Çok terimli yaklaşım ile tasarımda dayanıklı kararlılık ve $\mathcal{H}_\infty$ norm sınırı arasındaki ilişkiyi gösteren eşitsizlik kullanılmaktadır.

Belirsizliğe sahip bir çok terimli:

$$d_\delta(s) = d(s) + n(s)\delta, \quad \|\delta\| < \beta^{-1}, \tag{4. 62}$$

şeklinde formüle edilebilmektedir. Bu ifadede yer alan $n(s)$ ve $d(s)$ nominal çok terimlilerdir, δ ise genliği β^{-1}' den küçük bir skalerdir. Denklem (4. 62)' de yer alan ifade Küçük Kazanç Teoremi (Small Gain Theorem) dikkate alınarak aşağıda verildiği gibi yeniden oluşturulabilir [1, Teorem 9. 1]. Belirsizliğe sahip $d_\delta(s)$ çok terimlisi ile β arasında

$$\left\| \frac{n(s)}{d(s)} \right\|_\infty \leq \beta, \tag{4. 63}$$

$n(s)/d(s)$ sisteminin sonsuz normu ile gösterilen bir ilişki vardır. Burada $n(s)$ çok terimlisine ait katsayılar satır vektörü n ile gösterilirse, Teorem 4. 2' den aşağıda verilen sonuç çıkarılabilir.

Sonuç 4. 1: [12] D- kararlı $c(s)$ merkezi çok terimlisi ve pozitif skaler β değeri verildiğinde

$$\begin{bmatrix} c^T d + d^T c - \varepsilon c^T c - S^T (D \otimes P) S & n^T \\ n & \varepsilon\beta \end{bmatrix} \geq 0, \tag{4. 64}$$

eşitsizliğini sağlayabilen $P = P^T$ şeklinde pozitif bir matris ve pozitif skaler bir ε bulunabiliyor ise transfer fonksiyonu $n(s)/d(s)$' nin D- kararlı olduğu ve sistemin $\mathcal{H}_\infty$ normunun $\sqrt{\beta}$ değerinin altında olduğu garanti edilir.

Tasarım yönteminde belirlenmesi gereken kritik parametre yine merkezi çok terimli olmaktadır. Merkezi çok terimlinin seçiminde izlenebilecek en uygun strateji çok terimlinin köklerinin, açık çevrim transfer fonksiyonuna ait karakteristik çok terimli fonksiyonun köklerine yakın seçilmesidir. Böyle bir seçim durumunda tasarım metodunun başarısı artmakta ve daha verimli sonuçlar elde edilebilmektedir [12].

Sistem belirsizliklerini polytopic olarak ele aldığımızda sisteme ait çok terimliler $n(s,\lambda)$ ve $d(s,\lambda)$, N adet köşe noktası için $d^i(s) = d_0^i + d_1^i s + \ldots + d_m^i s^m$ ve $n^i(s) = n_0^i + n_1^i s + \ldots + n_m^i s^m$ yapısındadır. Burada $i = 1, 2, \ldots, N$ olacak şekilde formüle edilmiştir. Yeniden tanımlanan çok terimliler ile $\mathscr{H}_\infty$ norm sınırı

$$\left\| \frac{n(s,\lambda)}{d(s,\lambda)} \right\|_\infty \le \beta, \tag{4. 65}$$

şeklinde oluşturulmuştur.

Belirsizlik içeren sistemimize ait köşe noktalarını gösteren kapalı çevrim transfer fonksiyonları

$$\mathscr{G}_{cl}(s,x,y) = \frac{n^i(s,x,y)}{d^i(s,x,y)}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{4. 66}$$

direk kontrolcü katsayıları cinsinden yazılabilir.

Teorem 4. 5: [12] Sistem belirsizlikleri polytopic olarak ele alınıp sisteme ait çok terimliler $a(s,\lambda)$ ve $b(s,\lambda)$ için D - kararlı bir merkezi çok terimli $c(s)$ ve pozitif β verildiğinde

$$\begin{bmatrix} c^T d^i(x,y) + d^i(x,y)^T c - \varepsilon_i c^T c - S^T (D \otimes P^i) S & n^i(x,y)^T \\ n^i(x,y) & \varepsilon_i \beta \end{bmatrix} \ge 0, \tag{4. 67}$$

eşitsizliğini sağlayabilen x, y, simetrik pozitif $P^i = P^{iT}$ matrisleri ve pozitif skaler ε_i değeri var ise sistemi dayanıklı D - kararlı kılıp sonsuz normu için optimal altı bir sonuç veren kontrolcü çok terimlileri $x(s)$ ve $y(s)$ bulunabilir.

Sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı için geliştirilen çok terimli metot, durum uzay metodunun aksine PID ve benzeri kontrolcü yapılarına esnek ve en önemlisi direk kontrolcü katsayıları ile işlem yapma kolaylığı sunan elverişli bir yaklaşım sunar.

4.2.4 Dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD Kontrolcü Tasarımı

Dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımı için geliştirilen çok terimli metodun uygunluğu, MATLAB arayüzünde geliştirilen yazılım yardımıyla belirsizliğe sahip vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcı için uygun olan kontrolcünün tasarlanması hedeflenerek sınanacaktır. Kontrolcü tasarımında sistem içerisinde ortaya çıkabilecek yarı tanımlı programlama problemleri SeDuMi [27] çözücüsü ve YALMIP [28] arayüzü kullanılarak çözülecektir.

Taşıyıcıya etki eden bozucu giriş ile birlikte modellenen vinç kolu sistemine ait açık çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{-2.547s^2-13.41}{s^4+13.33s^2}, \tag{4. 68}$$

şeklindedir. Ayrıca açık çevrim transfer fonksiyonuna ait kutuplar 0, 0, $\pm 3.6510i$ noktalarında yer almaktadır. Kontrolcü tasarımı sırasında problemin gösterildiği konveks olmayan bölge içerisinde konveks bir bölge tanımlamak için belirlememiz gereken D - kararlı merkezi çok terimli fonksiyonu, bir önceki alt bölümde belirtildiği gibi kutupları mümkün olduğunda açık çevrim transfer fonksiyonunun kutuplarına yakın olacak şekilde -1, -1, -2, $-3\pm 3.6510i$ noktalarında seçilerek

$$c(s)=s^5+10s^4+51.3s^3+121.3s^2+123.6s+44.7, \tag{4. 69}$$

belirlenmiştir. Seçilen bu merkezi çok terimli ile birlikte amaçlanan dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımını gerçekleştirmek için PD kontrolcü yapısının bilinmesi gerekmektedir. PD kontrolcü yapısı oran ve türev sabitleri ile birlikte

$$K_p+\frac{K_d s}{\frac{s}{T}+1}, \tag{4. 70}$$

şeklinde verilebilir. Gerekli işlemler gerçekleştirilip ifade sadeleştirildiğinde ise PD yapısı aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{(K_p+K_d T)s+K_p T}{s+T} \tag{4. 71}$$

Burada verilen T parametresi türev etkisi olarak ta bilinen zaman sabitidir.

Sonuç olarak verilen PD yapısı dikkate alınıp $\beta = 3.23$, $\varepsilon = 0.1$ ve zaman sabiti $T = 5$ değerleri ile birlikte Teorem 4. 5 kullanıldığında sistemi dayanıklı D - kararlı kılan ve ayrıca sonsuz normu $\sqrt{\beta} = 1.8$ değerinin altında tutan

$$\frac{-2.961s - 0.5605}{s + 5}, \tag{4. 72}$$

bir PD kontrolcü tasarlanabilir. Bu durumda $K_p = 0.1121$, $K_d = 0.5698$ olarak elde edilir ve sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{-2.547s^3 - 12.74s^2 - 13.41s - 67.05}{s^5 + 5s^4 + 20.87s^3 + 68.08s^2 + 39.7s + 7.516}, \tag{4. 73}$$

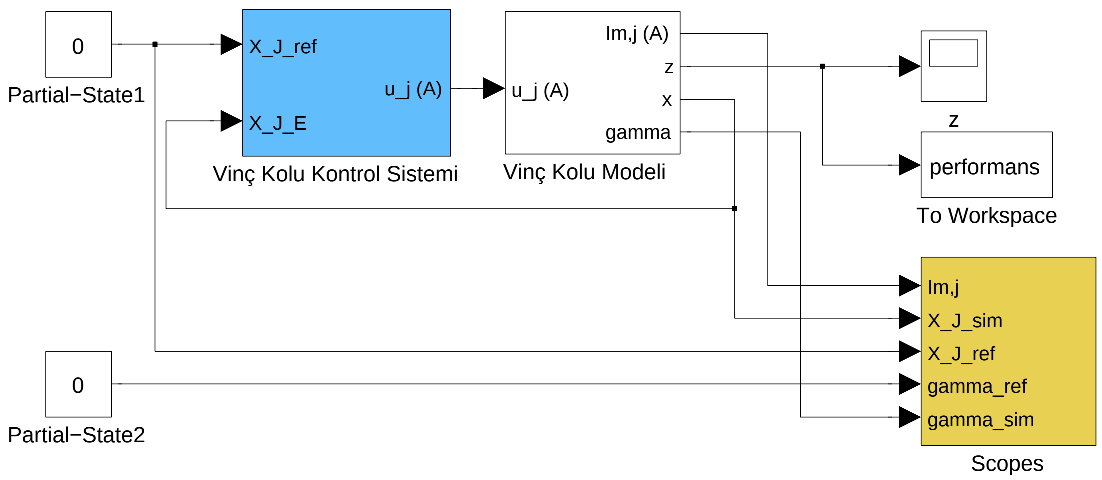
halini alır. Elde edilen karakteristik denklemin kutupları -3.6301, $-0.3358 \pm 0.1503i$, $-0.3491 \pm 3.8951i$ noktalarında yer aldığından dolayı sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonunun sonsuz normunun minimizasyonu için tasarlanan PD kontrolcünün sistemi kararsız halde kararlı hale getirdiği söylenebilir.

Merkezi çok terimlinin belirlenmesinde farklı bir strateji izlenerek daha düşük sonsuz norm değerlerinin elde edilmesi teorik olarak mümkündür. Ayrıca kontrolcü derecesinin sistem gereksinimlerine göre en uygun değerde seçilmesine imkân sağlayacak karşılaştırılmaların yapılması bu tasarım metodu ile mümkün olacaktır.

4.3 Benzetim Sonuçları

Bu bölümde çıkış geri besleme yöntemi ve çok terimli yaklaşım çerçevesinde geliştirilen tasarım metodu kullanılarak tasarlanan iki farklı yapıdaki kontrolcünün sistem üzerindeki etkilerini görebilmek adına benzetim ve uygulama ortamlarında elde edilen sonuçlar paylaşılacaktır. Benzer sonuçlar tez çalışmasında önerilen sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım metodunun etkinliğini gösterebilmek için tasarlanan PD kontrolcünün yanı sıra yine aynı sistem için farklı derecelere sahip olacak şekilde elde edilecek 4 farklı sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü için de verilecektir. Böylece farklı derecelere sahip kontrolcülerin sistem üzerindeki etkileri görülebilecek ve daha verimli yorum yapılabilecektir.

Benzetim sonuçlarını elde etmek için `Matlab-Simulink` arayüzünde kullanılan benzetim yapısı aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 4 Vinç kolu sistemi benzetim yapısı

Benzetim çıktıları, vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcıya ait pozisyon bilgisinden, sistemde yer alan sarkacın açı bilgisinden (gamma), sisteme uygulanan kontrol işaretinden diğer bir değişle taşıyıcının giriş akımından ve bozucu girişe ait performans çıkışından oluşmaktadır. Elde edilecek her bir kontrolcü için verilecek olan bu çıktılarda sistem cevaplarının referans değerine ulaşma süreleri kontrolcülerin cevap hızı ile alakalıdır. Cevap hızını arttırmak için kontrolcünün D- kararlılığının arttırılması gerekmektedir. Bu kapsamda tez çalışmasında oluşturulan benzetim çıktıları tam dereceli kontrolcü haricinde, (4. 52)' de yer alan matrisde $d_{11}=0.5, d_{12}=1, d_{22}=0$ değerleri kullanılarak tasarlanan kontrolcüler için de verilmiştir.

İki farklı D- kararlılık yapısı için sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarım metodu kullanılarak tasarlanan

PD kontrolcüler

$$d_{11}=0 \text{ için } \frac{-2.961s-0.5605}{s+5}, d_{11}=0.5 \text{ için } \frac{-5.752s-1.529}{s+5}, \tag{4. 74}$$

1. dereceden kontrolcüler

$d_{11} = 0$ için $\dfrac{-3.07s - 1.185}{s + 20.11}$, $d_{11} = 0.5$ için $\dfrac{-3.453s - 1.345}{s + 16.15}$, (4. 75)

2. dereceden kontrolcüler

$d_{11} = 0$ için $\dfrac{-3.015s^2 - 13.89s - 6.151}{s^2 + 24.33s + 89.1}$, (4. 76)

$d_{11} = 0.5$ için $\dfrac{-3.076s^2 - 15.04s - 6.432}{s^2 + 24.45s + 93.15}$, (4. 77)

3. dereceden kontrolcüler

$d_{11} = 0$ için $\dfrac{-2.338s^3 - 1.814s^2 - 3.093s - 0.7748}{s^3 + 18.67s^2 + 9.249s + 22.83}$, (4. 78)

$d_{11} = 0.5$ için $\dfrac{-2.318s^3 - 2.544s^2 - 2.972s - 0.8517}{s^3 + 18.42s^2 + 14.05s + 18.31}$, (4. 79)

ve 4. dereceden kontrolcüler

$d_{11} = 0$ için $\dfrac{-2.067s^4 - 4.848s^3 - 4.484s^2 - 4.099s - 0.8033}{s^4 + 19.24s^3 + 37.47s^2 + 28.78s + 29.33}$, (4. 80)

$d_{11} = 0.5$ için $\dfrac{-2.419s^4 - 4.921s^3 - 5.641s^2 - 3.849s - 0.8691}{s^4 + 19.3s^3 + 31.73s^2 + 31.85s + 17.71}$, (4. 81)

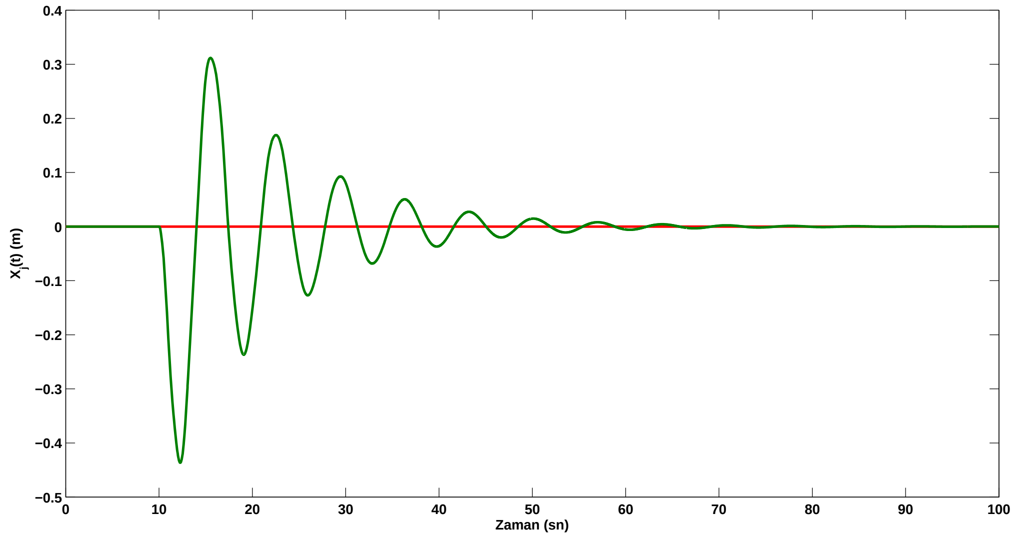
şeklinde elde edilmiştir.

Vinç kolu alt sistemi için `Matlab Robust Control Toolbox` kapsamındaki `hinfsyn` komutu kullanılarak tasarlanan tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü ise

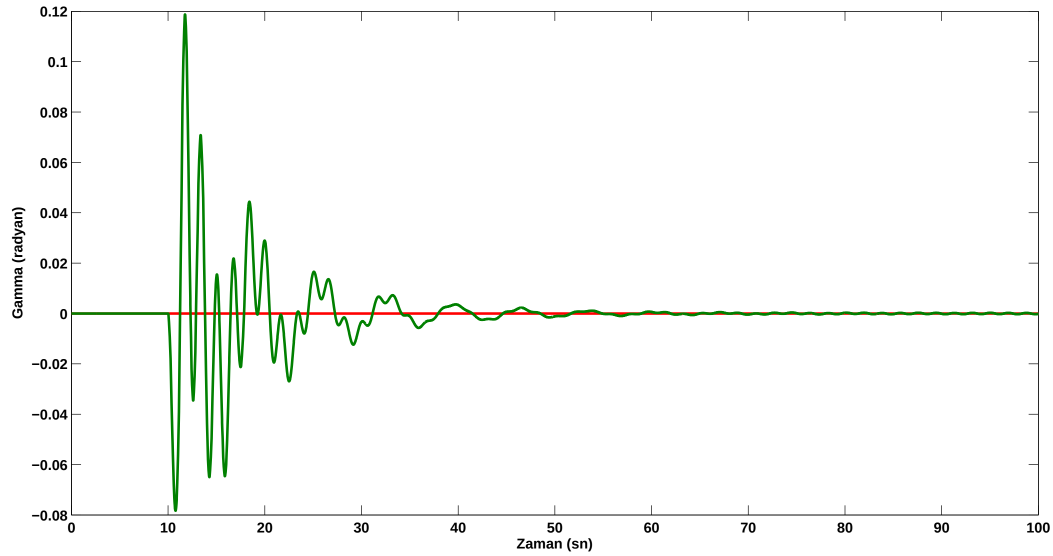
$$\frac{-698.7s^3 - 1971s^2 - 3826s - 1.351x10^4}{s^4 + 61.14s^3 + 1371s^2 + 698.1s + 1.543x10^4}, \qquad (4.\ 82)$$

yapısındadır.

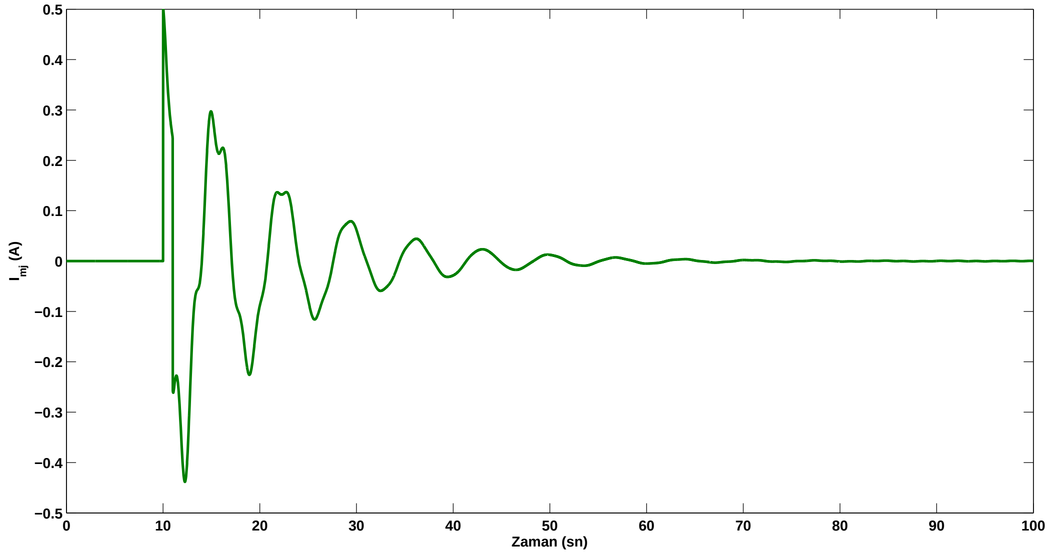
Tasarlanan kontrolcülerin $w = 0.5*(u(t-11) - u(t-10))$ bozucu girişi için oluşturulan benzetim yapısına uygulanması ile elde edilen benzetim çıktıları Şekil 4. 5' den itibaren verilmiştir. Verilen çıktılarda yeşil renk ile çizilmiş olan eğriler $d_{11} = 0$ değeri için tasarlanan kontrolcünün oluşturduğu çıkışı, mavi renk ile çizilmiş olan eğriler ise $d_{11} = 0.5$ değeri için tasarlanan kontrolcünün oluşturduğu çıkışı gösterirken, kırmızı renk ile çizilmiş olan eğriler referans değerlerini belirtmek için kullanılmıştır.



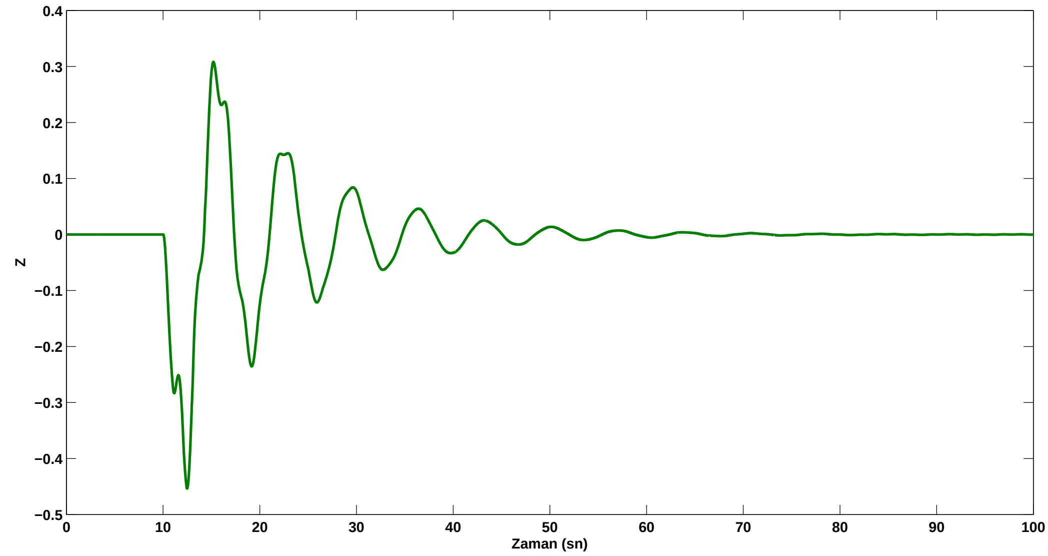
Şekil 4. 5 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



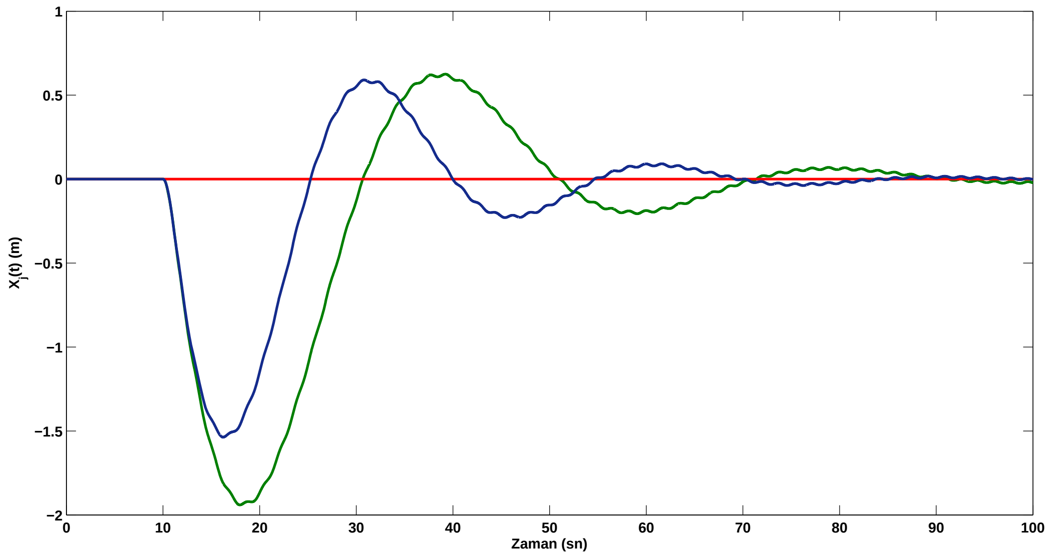
Şekil 4. 6 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



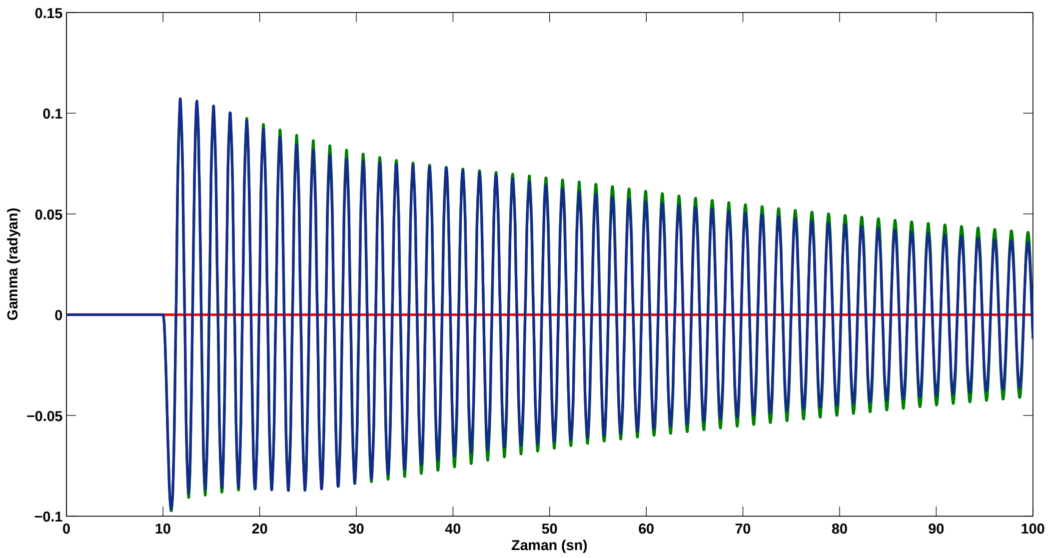
Şekil 4. 7 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



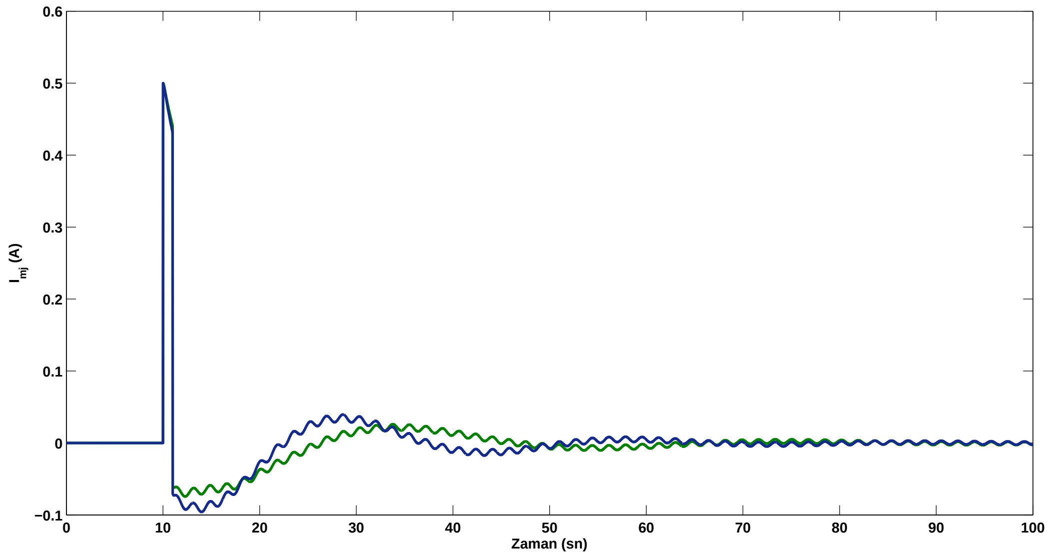
Şekil 4. 8 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



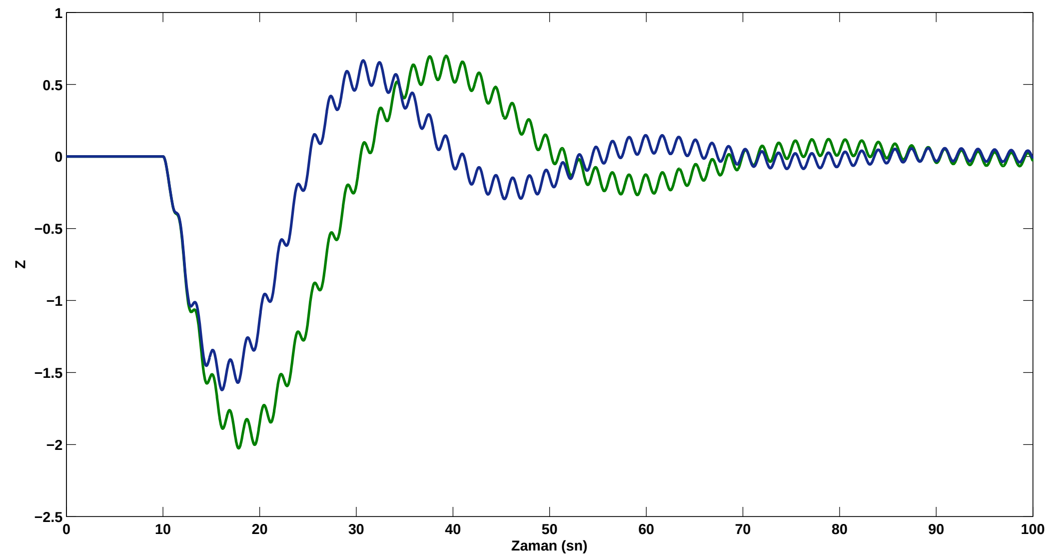
Şekil 4. 9 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



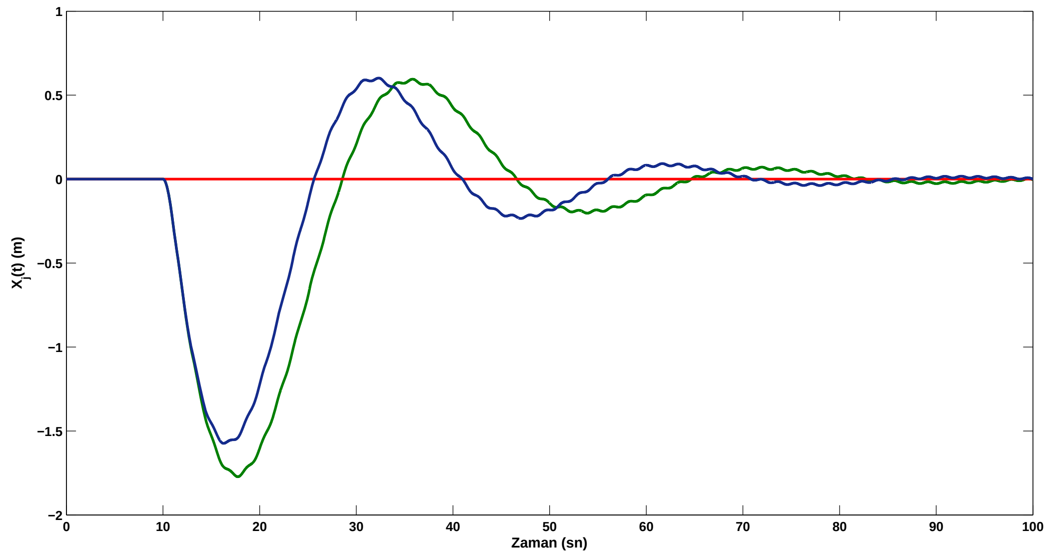
Şekil 4. 10 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



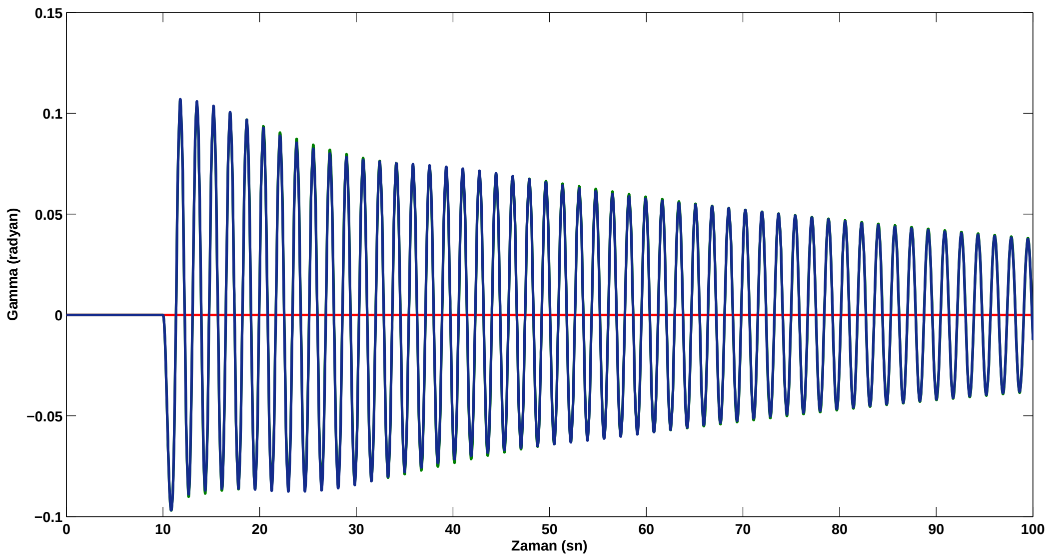
Şekil 4. 11 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



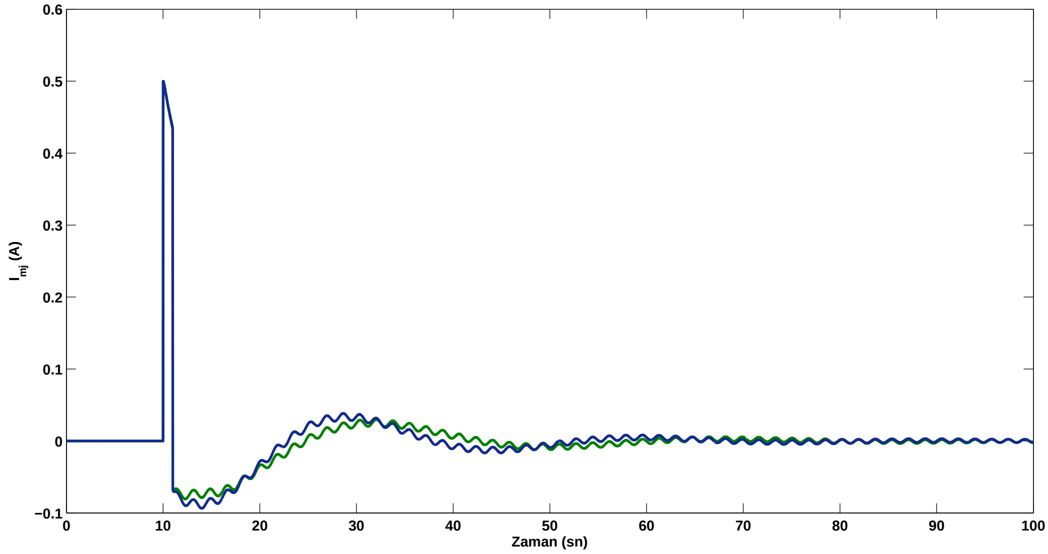
Şekil 4. 12 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



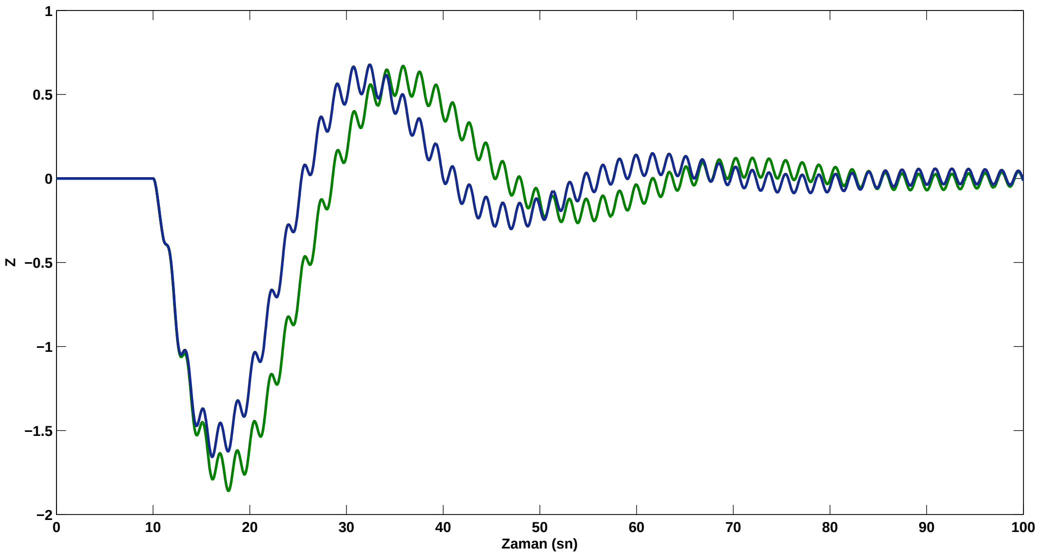
Şekil 4. 13 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



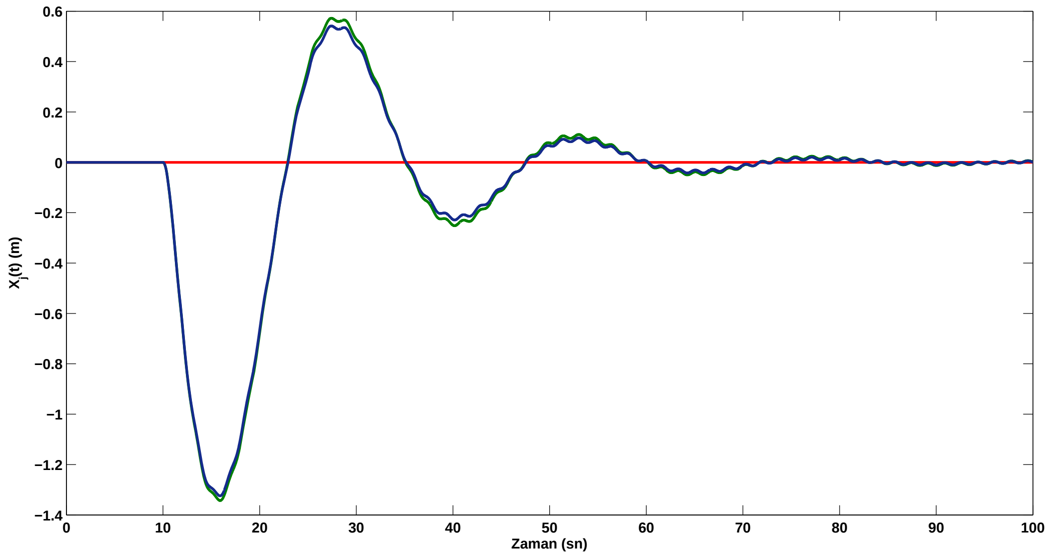
Şekil 4. 14 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



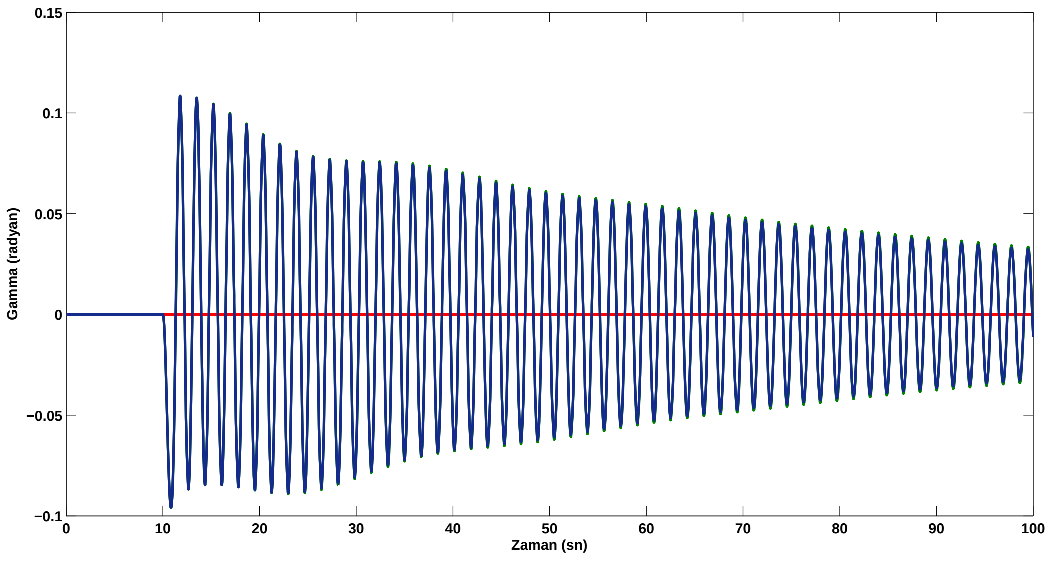
Şekil 4. 15 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



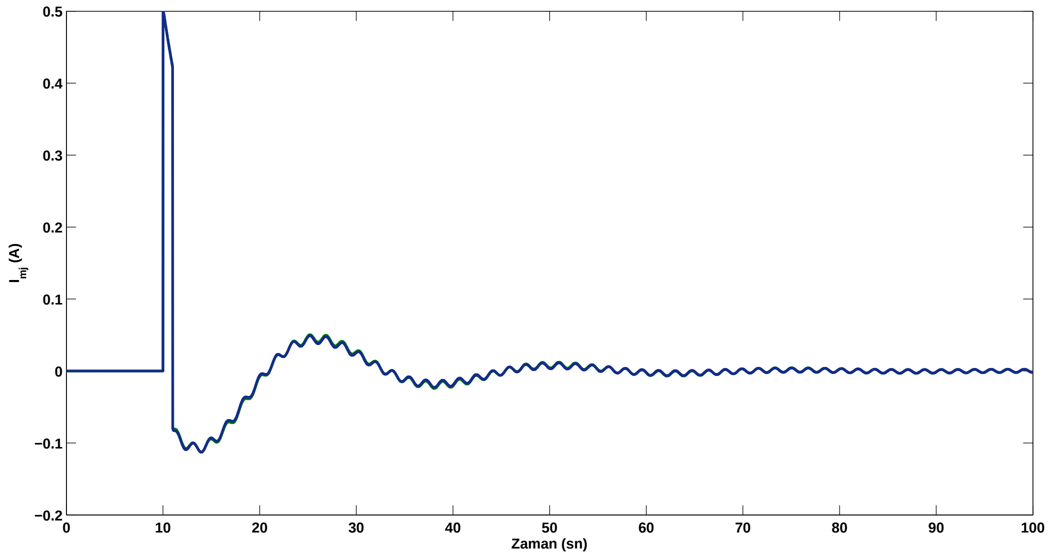
Şekil 4. 16 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



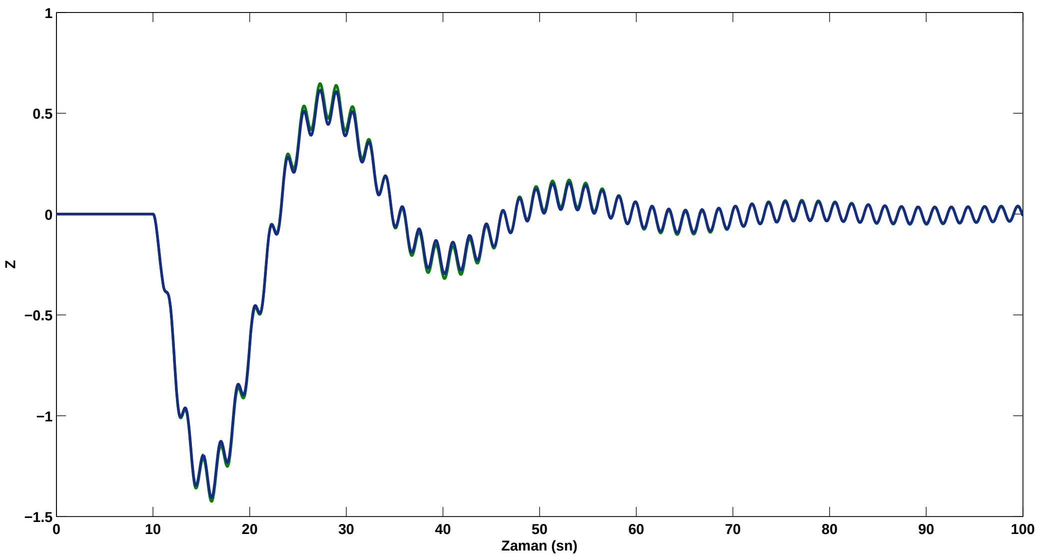
Şekil 4. 17 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



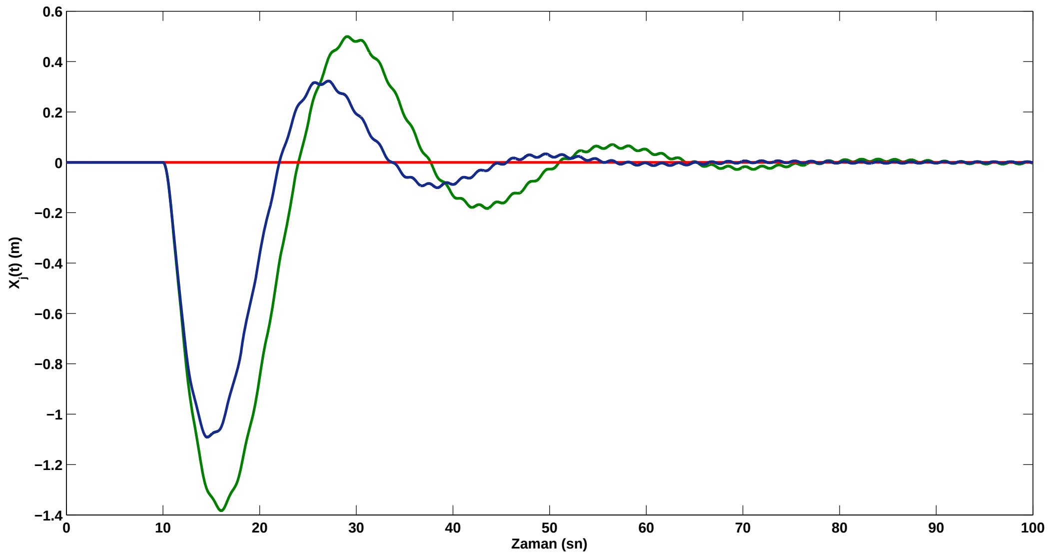
Şekil 4. 18 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



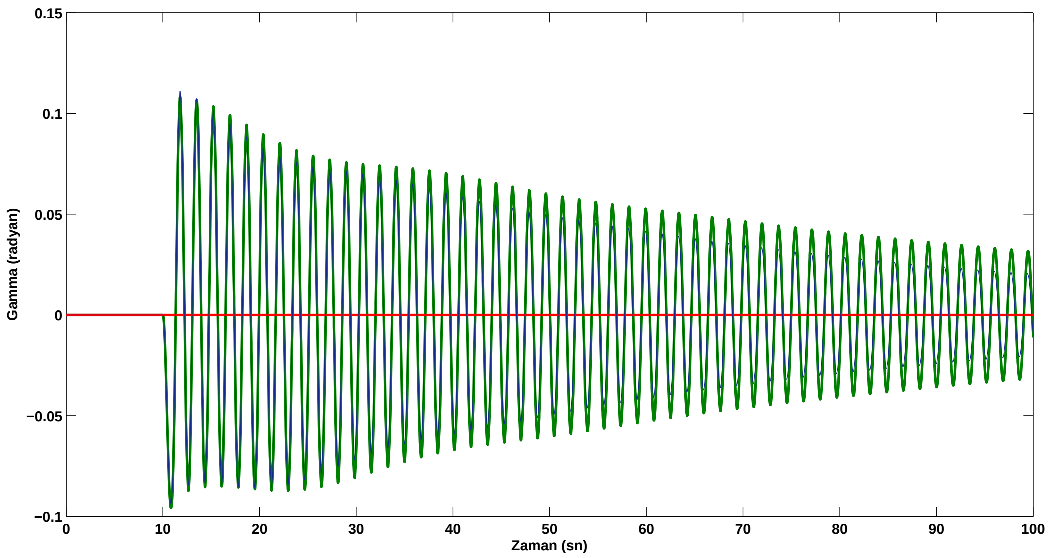
Şekil 4. 19 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



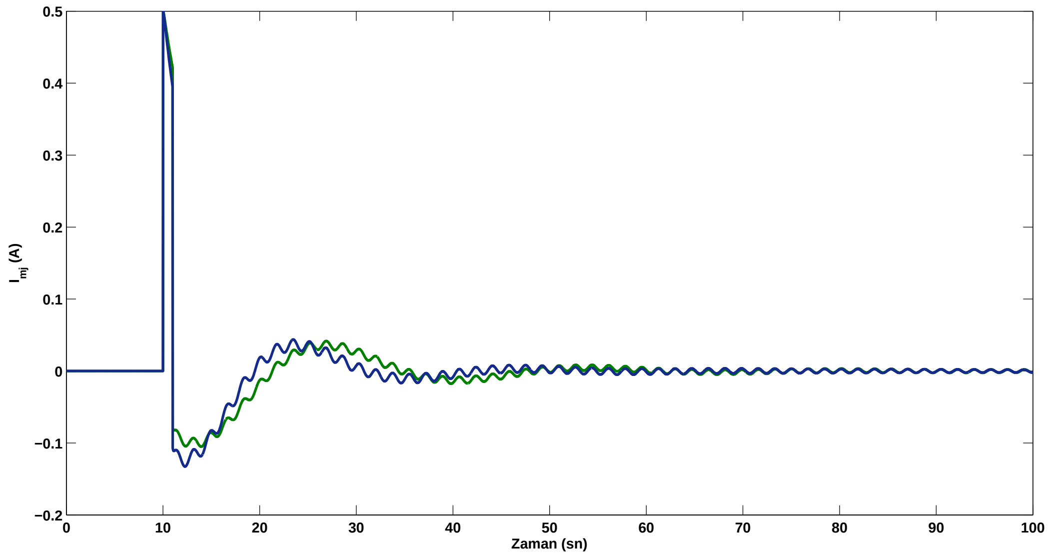
Şekil 4. 20 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



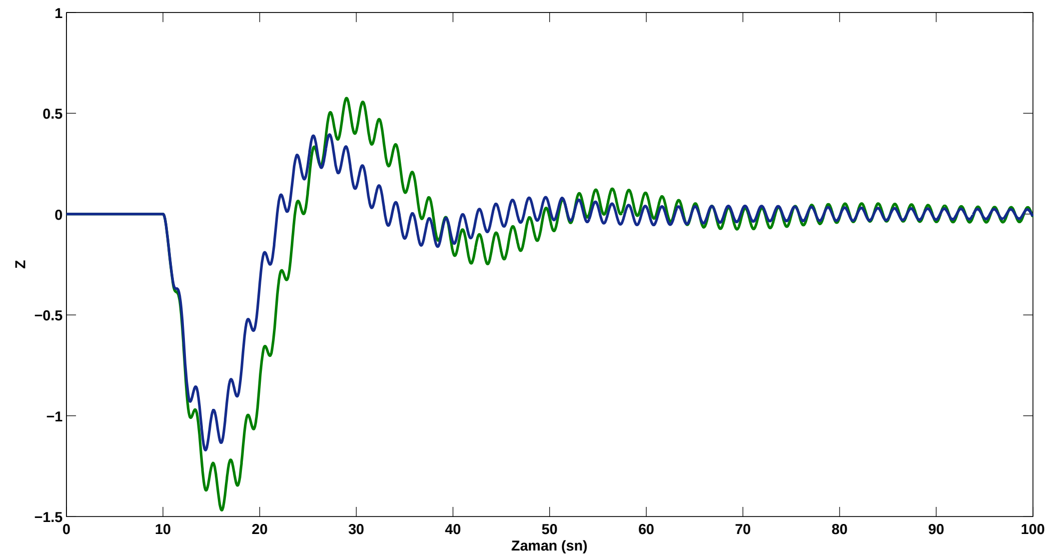
Şekil 4. 21 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



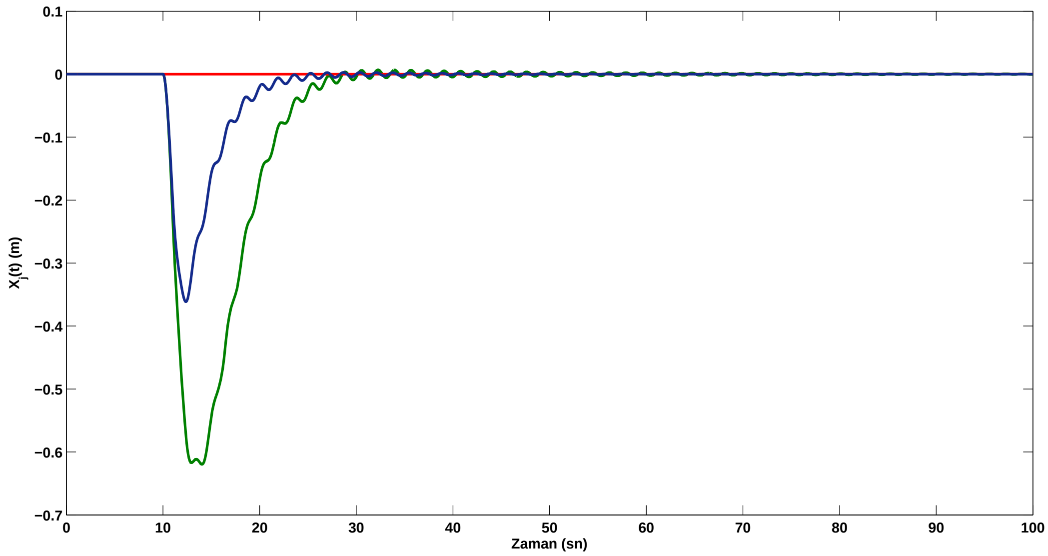
Şekil 4. 22 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



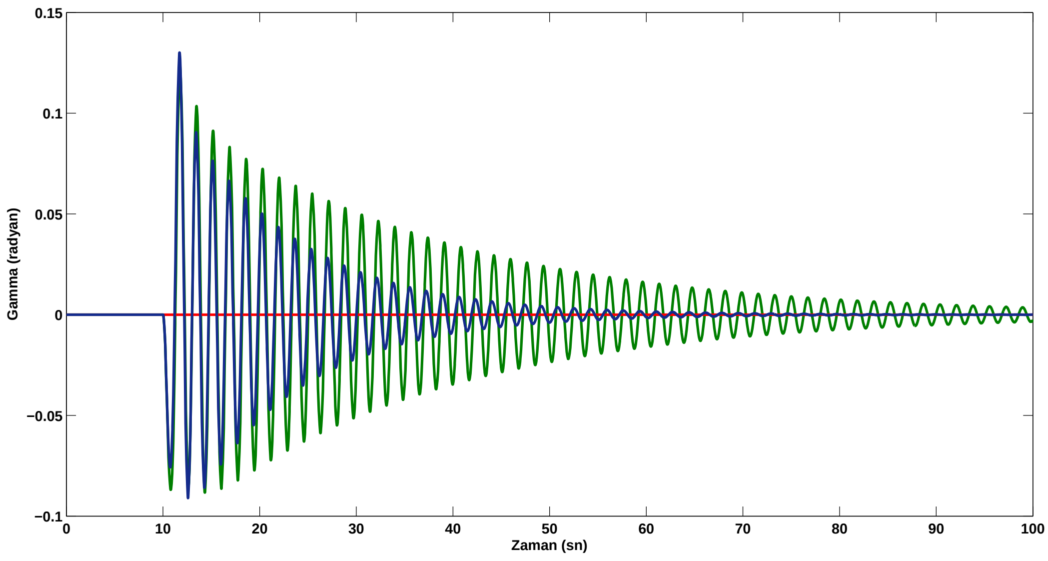
Şekil 4. 23 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



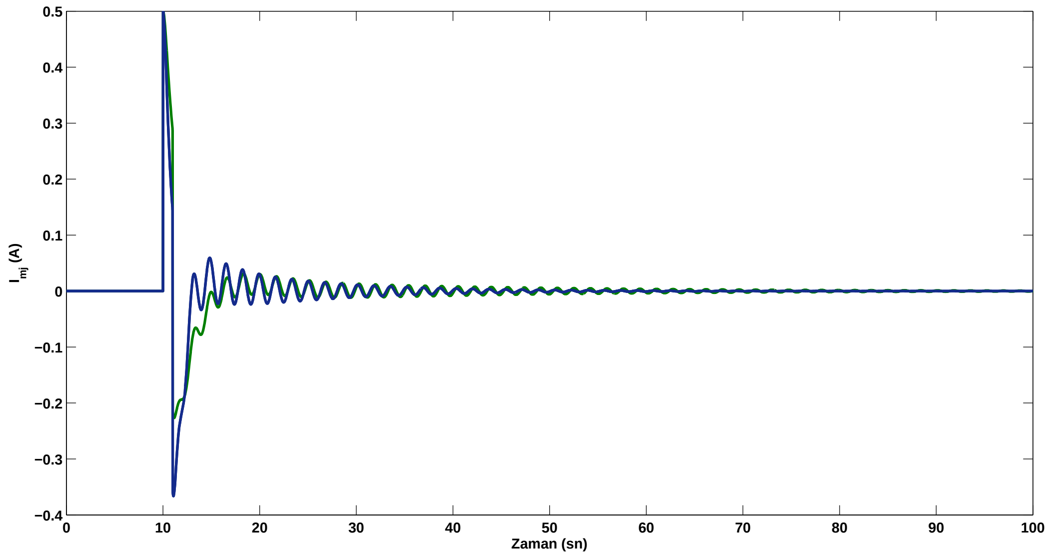
Şekil 4. 24 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



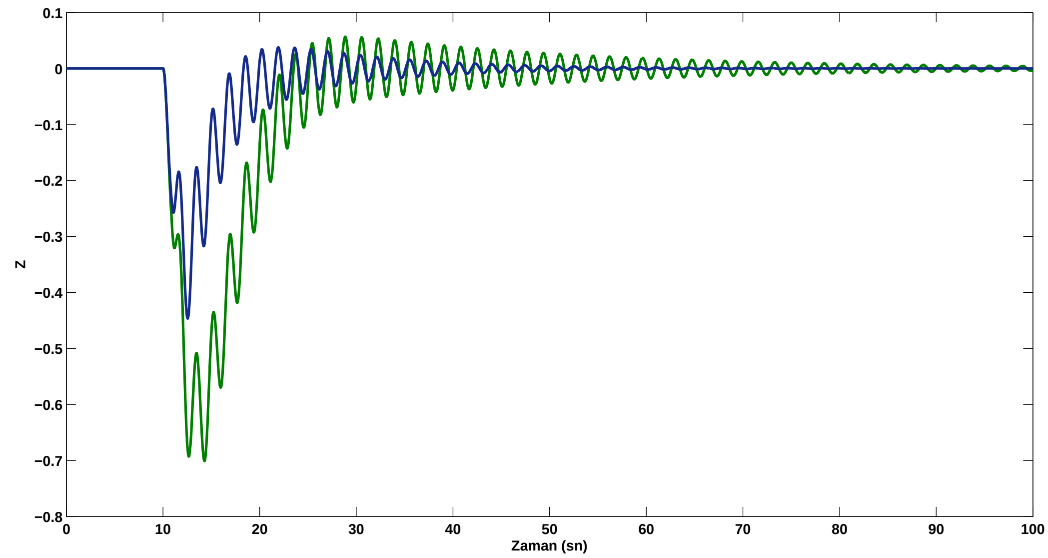
Şekil 4. 25 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



Şekil 4. 26 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



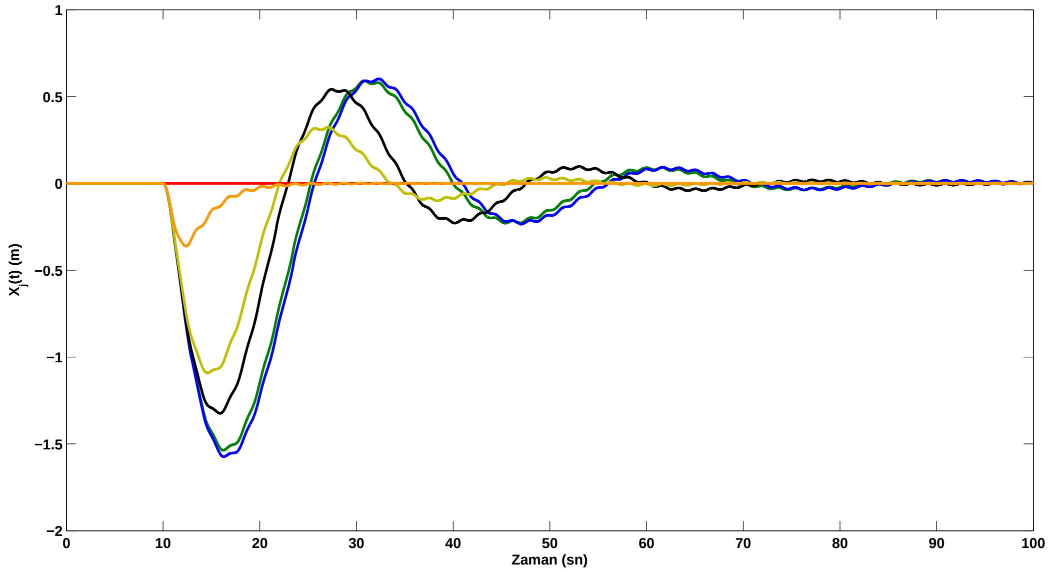
Şekil 4. 27 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



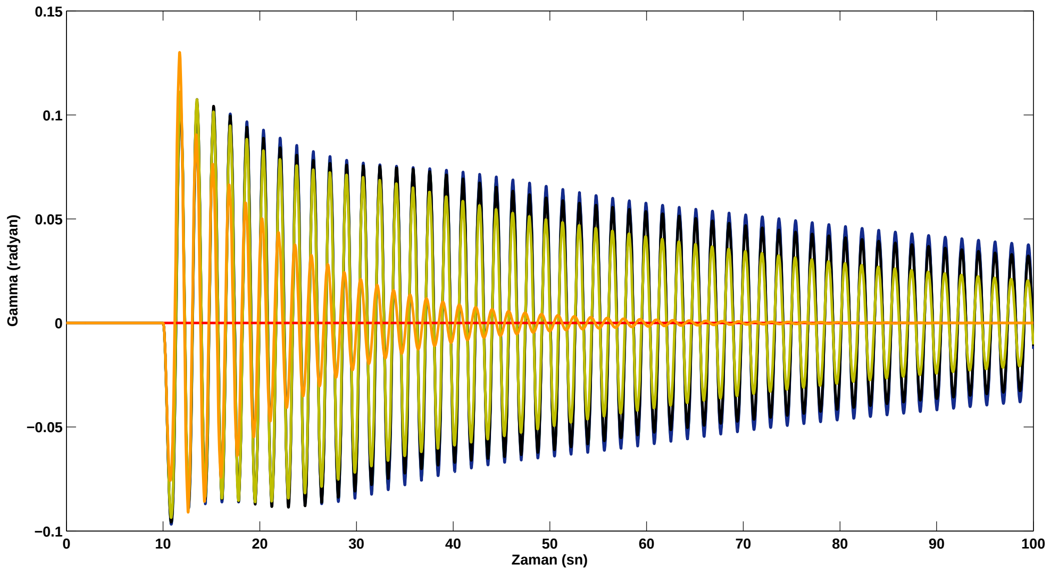
Şekil 4. 28 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı

Verilen çıktılarda görülebileceği gibi $d_{11} = 0.5$ değeri kullanılarak elde edilen D-kararlılığı arttırılmış kontrolcülerin sistem eğrileri daha hızlı cevaba sahiptir. Bundan dolayı sisteme ait cevaplar daha hızlı bir şekilde referans değerlerine ulaşabilmektedir.

Son olarak etkili karşılaştırma yapılabilmesi adına farklı derecelere sahip D - kararlılığı arttırılmış kontrolcülerin benzetim yapısına uygulanması ile elde edilen taşıyıcı pozisyonu ve sarkaç açısı çıktıları Şekil 4. 29 ve 4. 30’ bir arada verilmiştir.



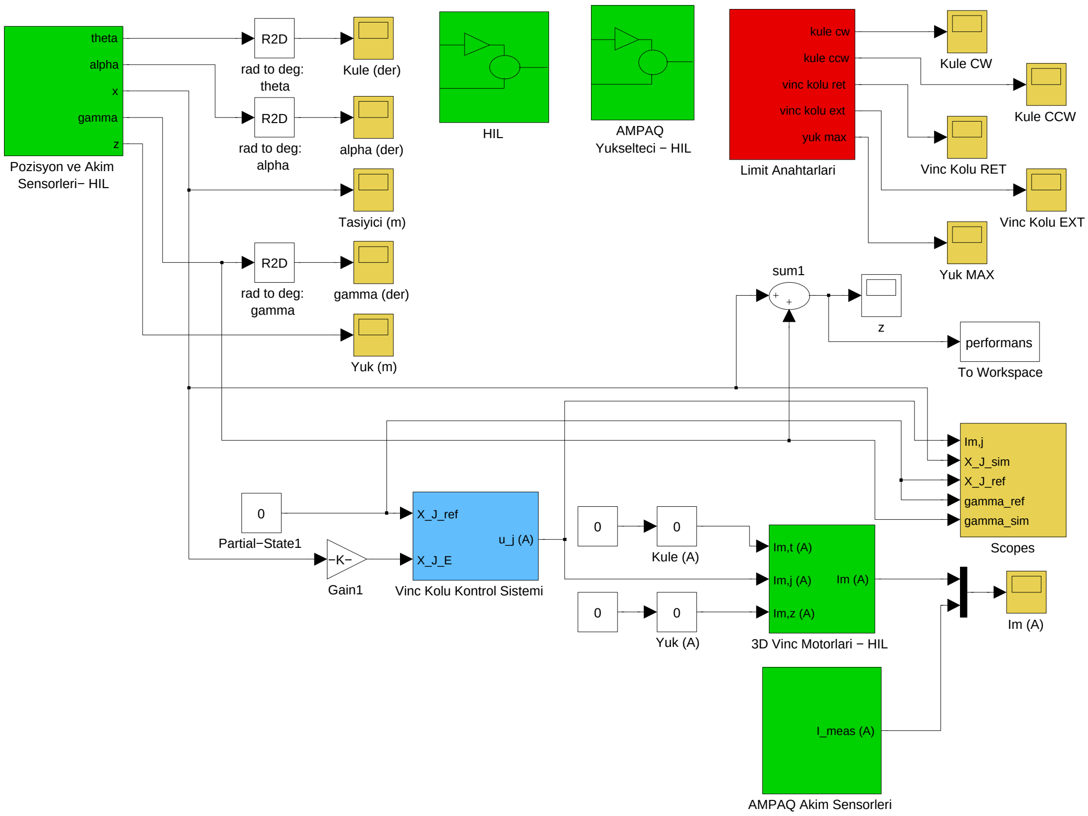
Şekil 4. 29 D - kararlılığı arttırılmış tüm kontrolcülere ait taşıyıcı pozisyonu çıktıları



Şekil 4. 30 D - kararlılığı arttırılmış tüm kontrolcülere ait sarkaç açısı çıktıları

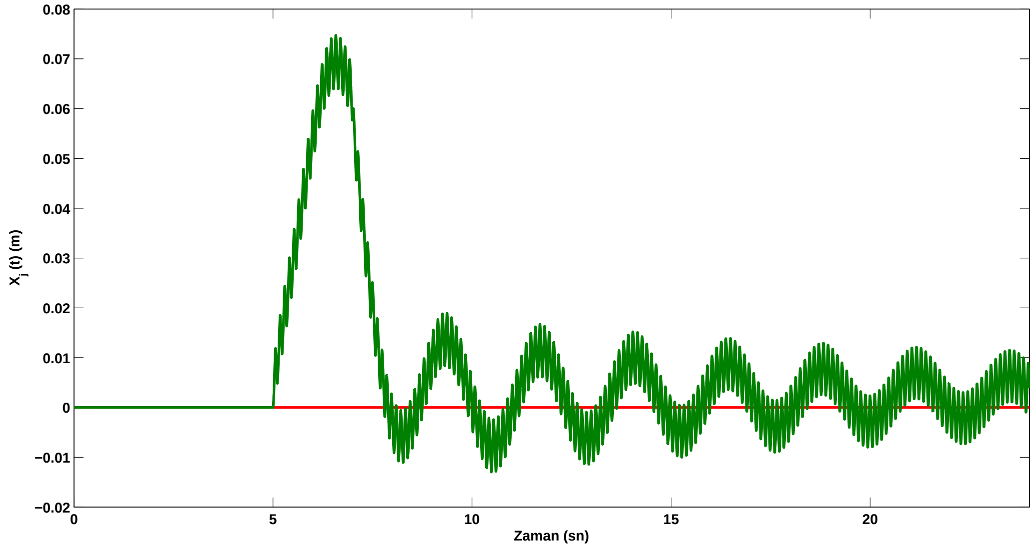
Verilen eğrilerde yer alan yeşil renk 4. dereceden, mavi renk 3. dereceden, siyah renk 2. dereceden, sarı renk 1. dereceden ve turuncu renk PD yapısına sahip olan kontrolcünün çıktısını temsil etmektedir. Kırmızı renk ise yine referans değerlerini belirtmek için kullanılmıştır.

Bu noktaya kadar elde edilmiş olan benzetim çıktıları vinç kolu sistemi için benzetim ortamında oluşturulan yapının tasarlanan kontrolcüler için oluşturduğu cevap eğrilerini kapsamakta idi. Şimdi ise tasarlanan kontrolcüler gerçek sistemi kontrol etmek için oluşturulan uygulama yapısına giriş olarak verilecek ve sisteme ait cevap eğrileri bu yapı üzerinden elde edilecektir. Gerçek sistem için `Matlab-Simulink` arayüzünde oluşturulan uygulama yapısı aşağıda verilmiştir.

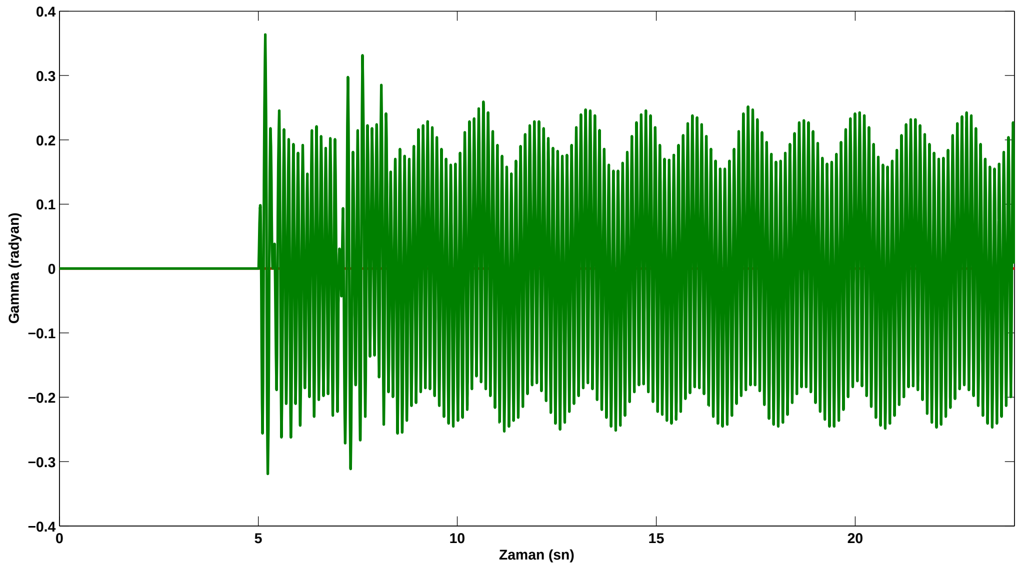


Şekil 4. 31 Vinç kolu sistemine ait uygulama yapısı

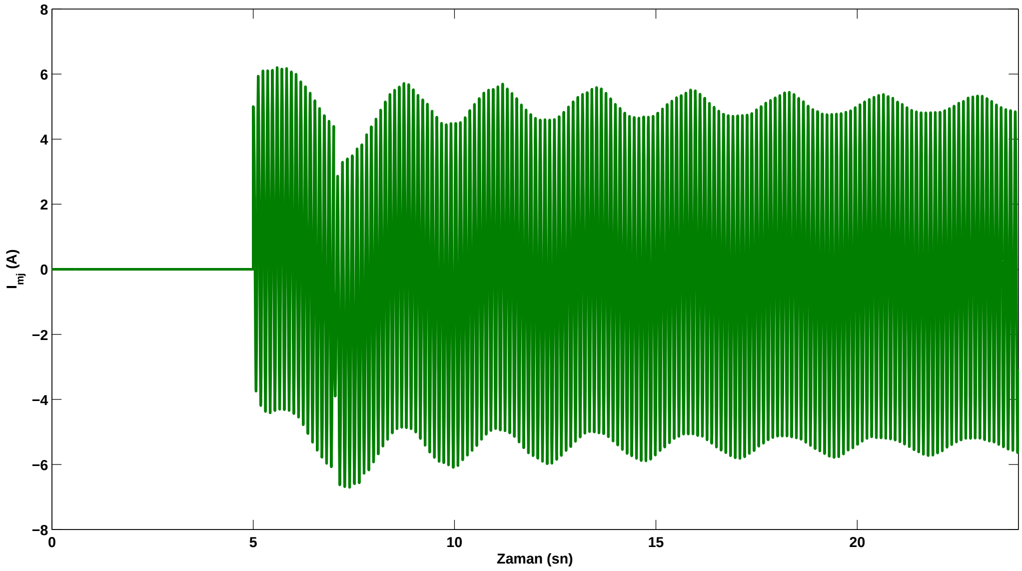
Denklem (4. 74 - 4. 82)' de verilmiş olan kontrolcülerin $w = 5*(u(t-7) - u(t-5))$ bozucu girişi için uygulama yapısına giriş olarak verilmesi ile elde edilen çıktılar Şekil 4. 32' den itibaren verilmiştir. Verilen çıktılarda yine aynı şekilde yeşil renk ile çizilmiş olan eğriler $d_{11} = 0$ değeri için tasarlanan kontrolcünün oluşturduğu çıkışı, mavi renk ile çizilmiş olan eğriler ise $d_{11} = 0.5$ değeri için tasarlanan kontrolcünün oluşturduğu çıkışı gösterirken, kırmızı renk ile çizilmiş olan eğriler referans değerlerini belirtmek için kullanılmıştır.



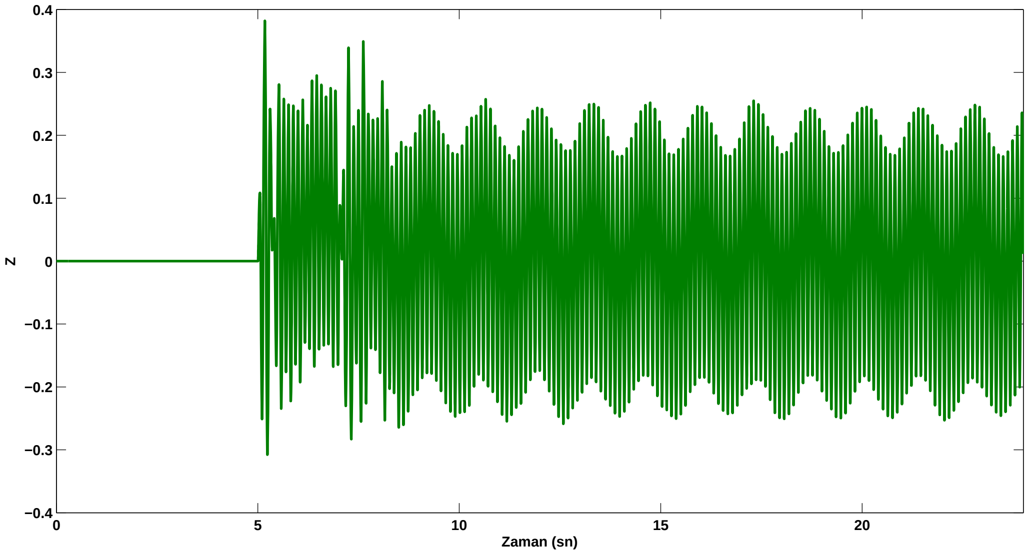
Şekil 4. 32 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



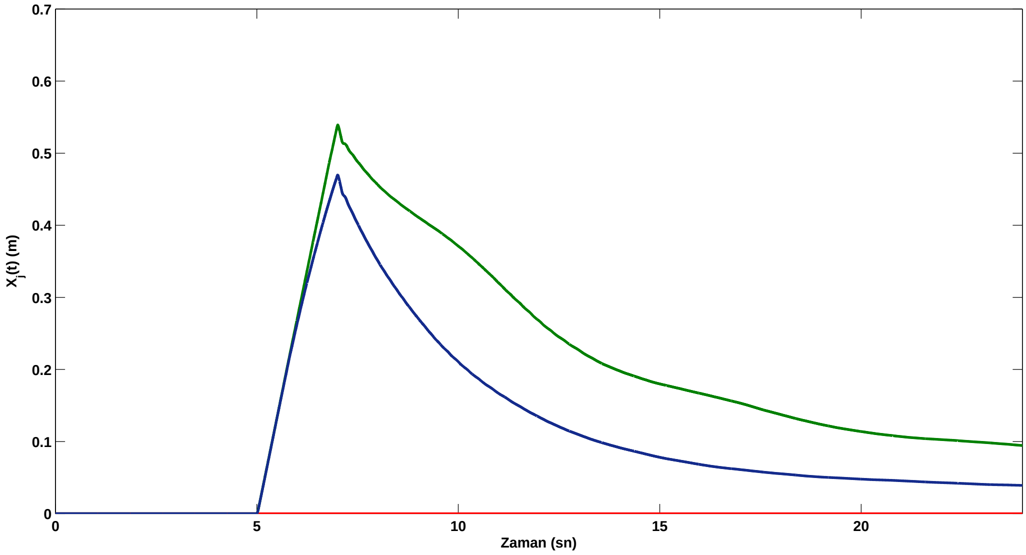
Şekil 4. 33 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



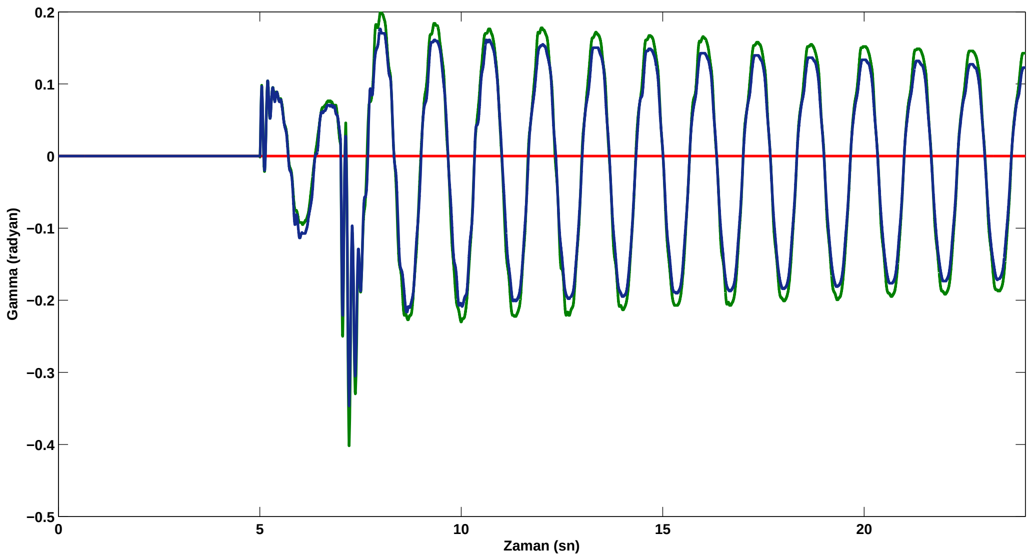
Şekil 4. 34 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



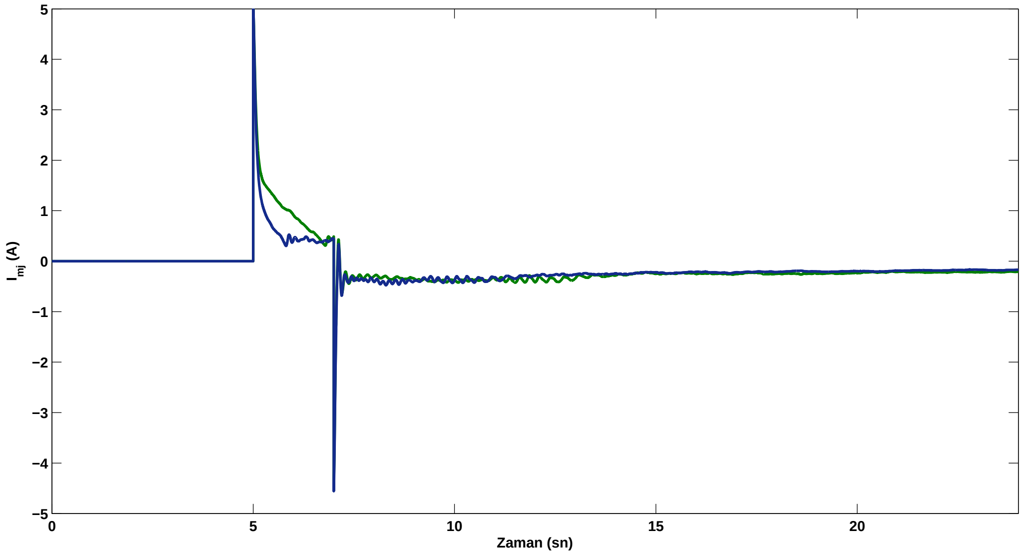
Şekil 4. 35 Tam dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



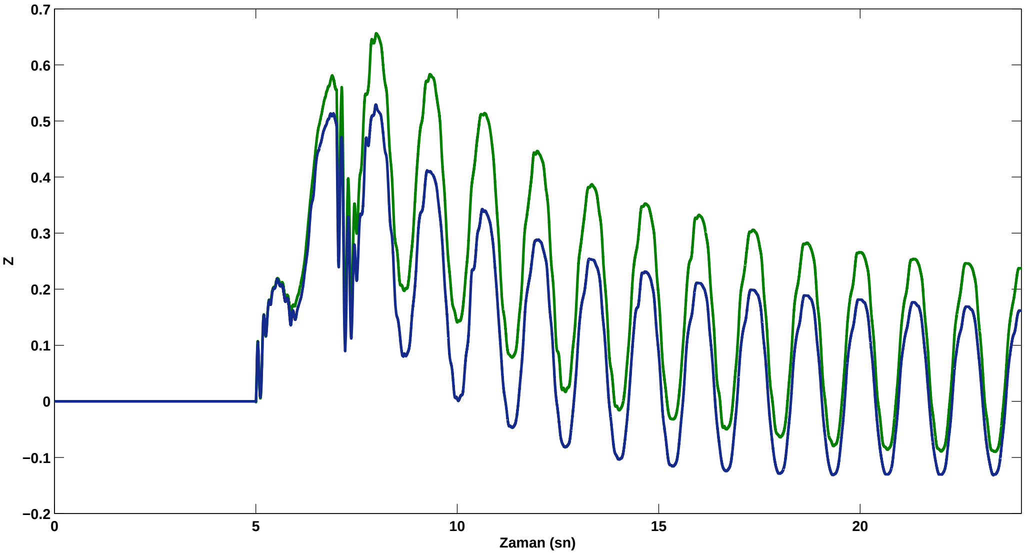
Şekil 4. 36 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



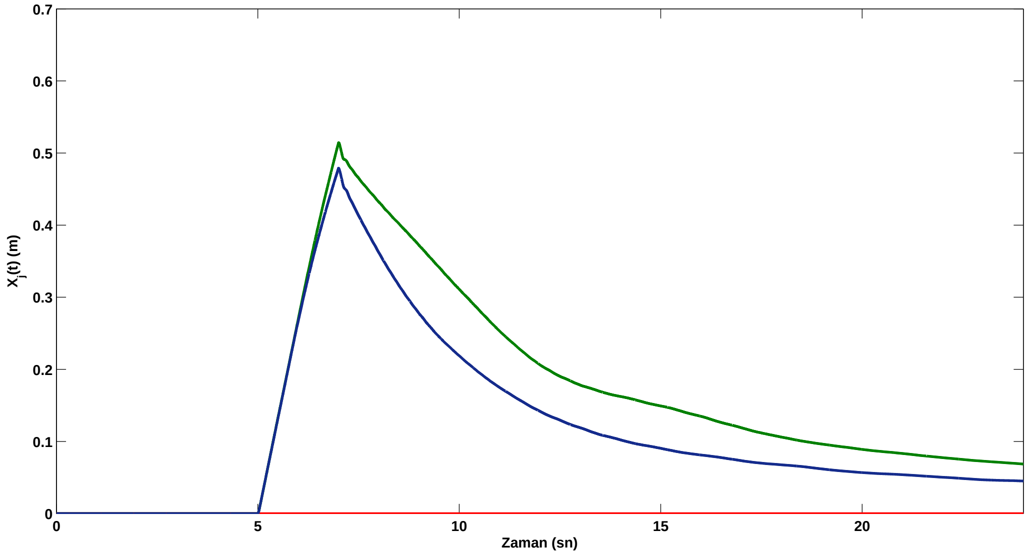
Şekil 4. 37 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



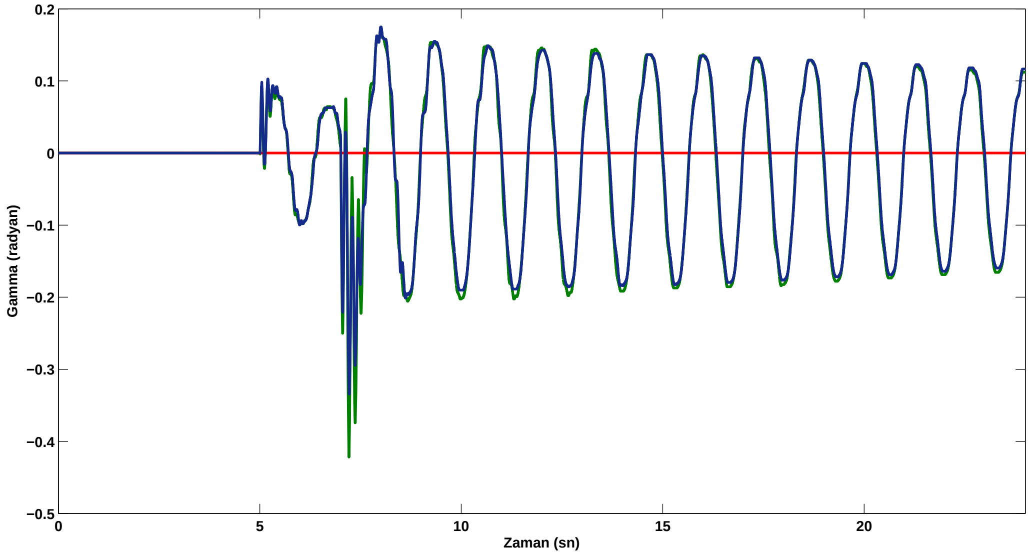
Şekil 4. 38 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



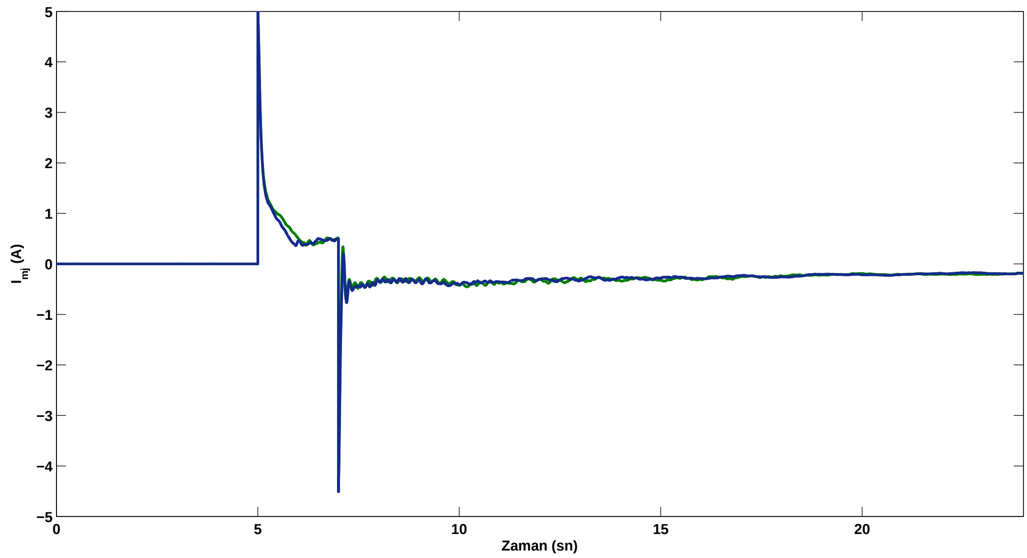
Şekil 4. 39 4. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



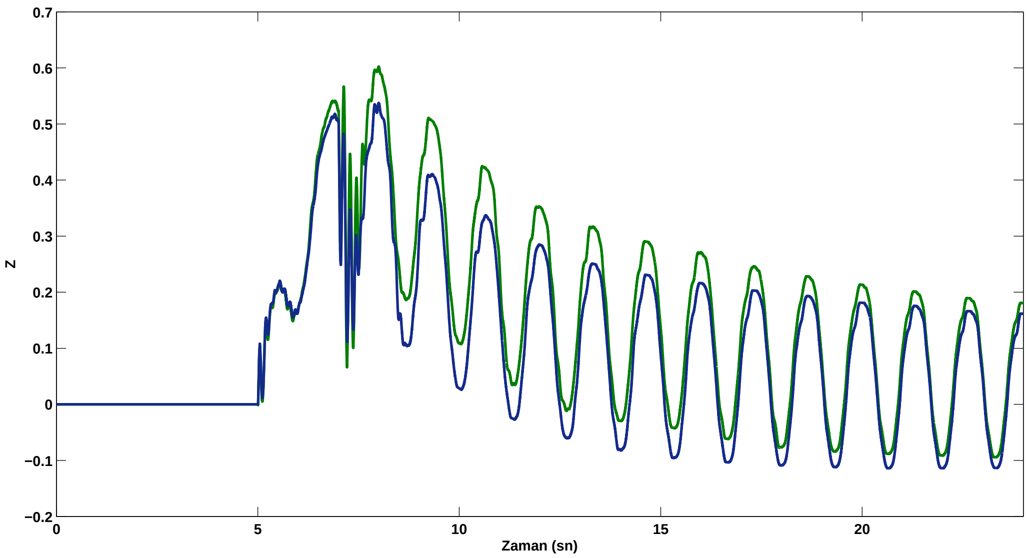
Şekil 4. 40 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



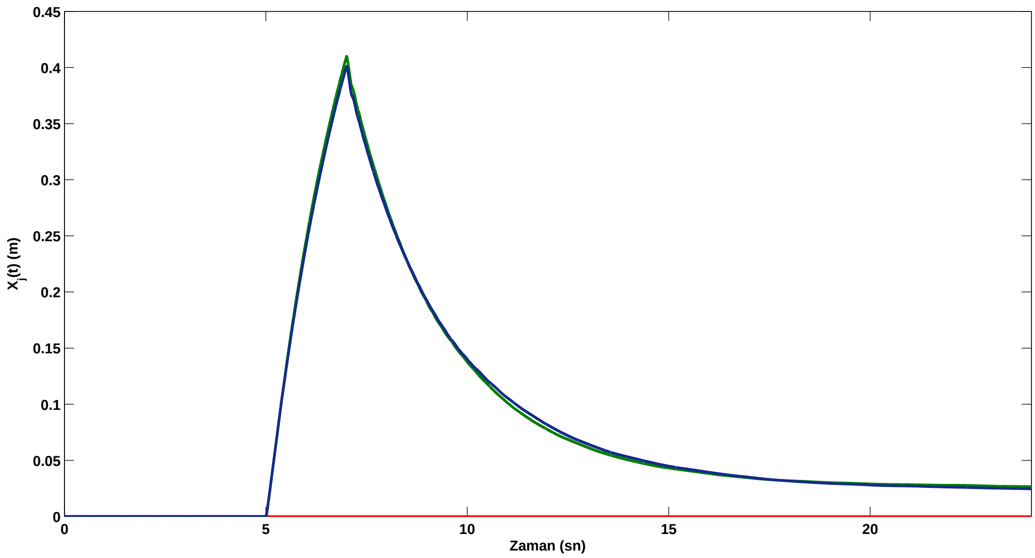
Şekil 4. 41 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



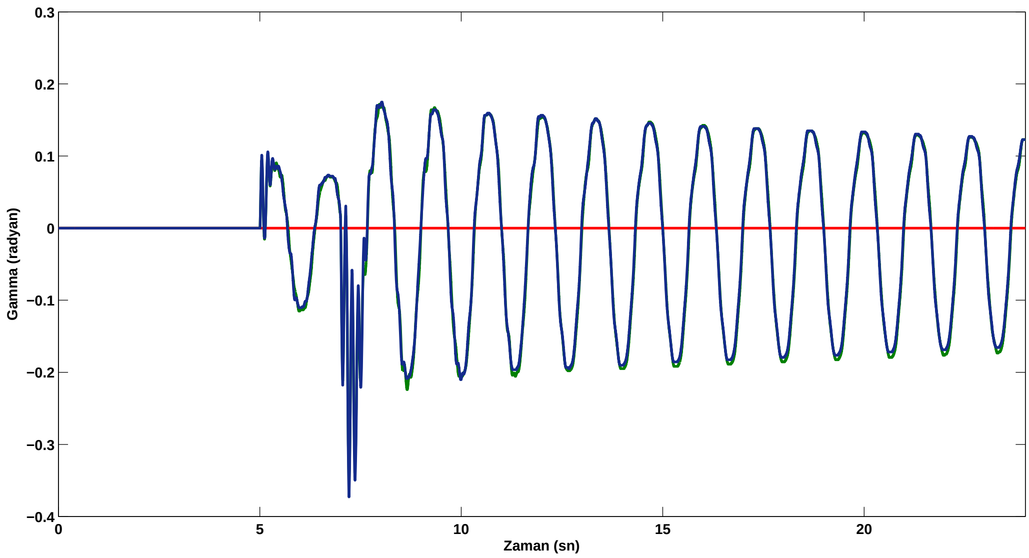
Şekil 4. 42 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



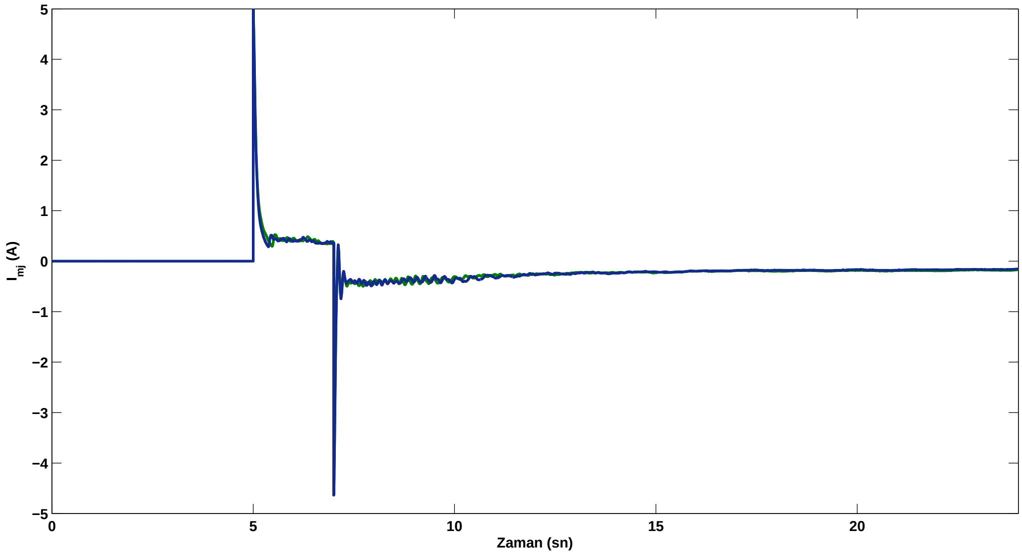
Şekil 4. 43 3. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



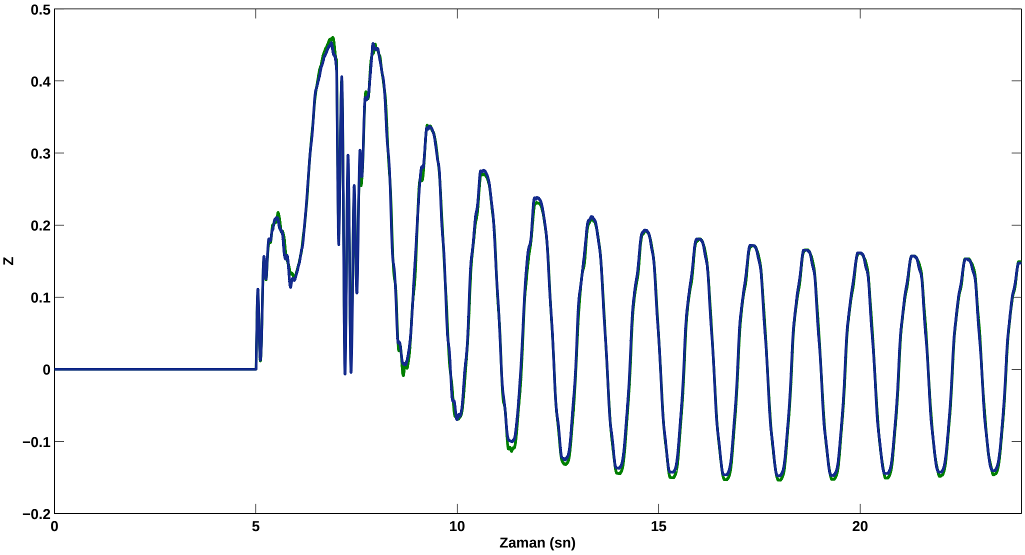
Şekil 4. 44 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



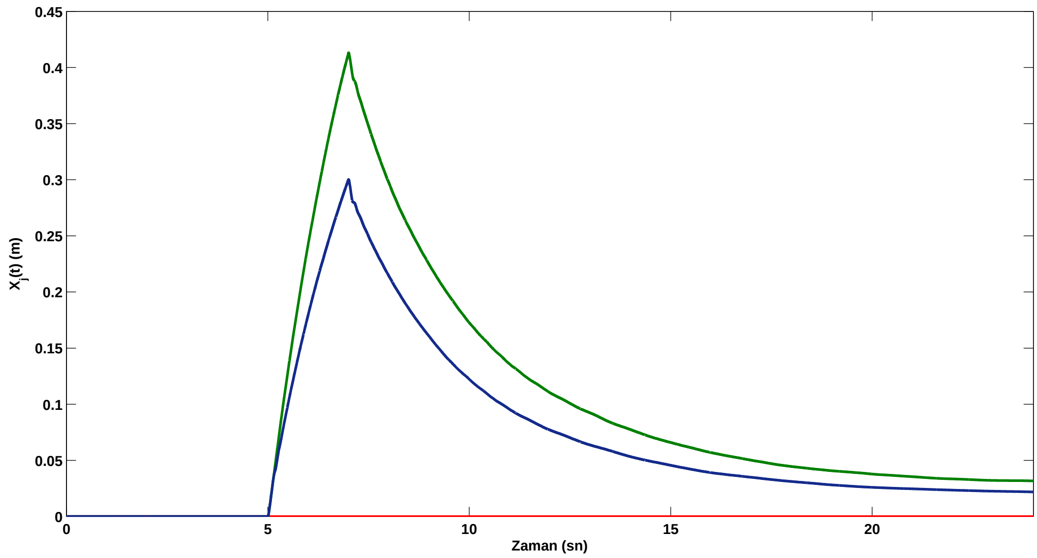
Şekil 4. 45 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



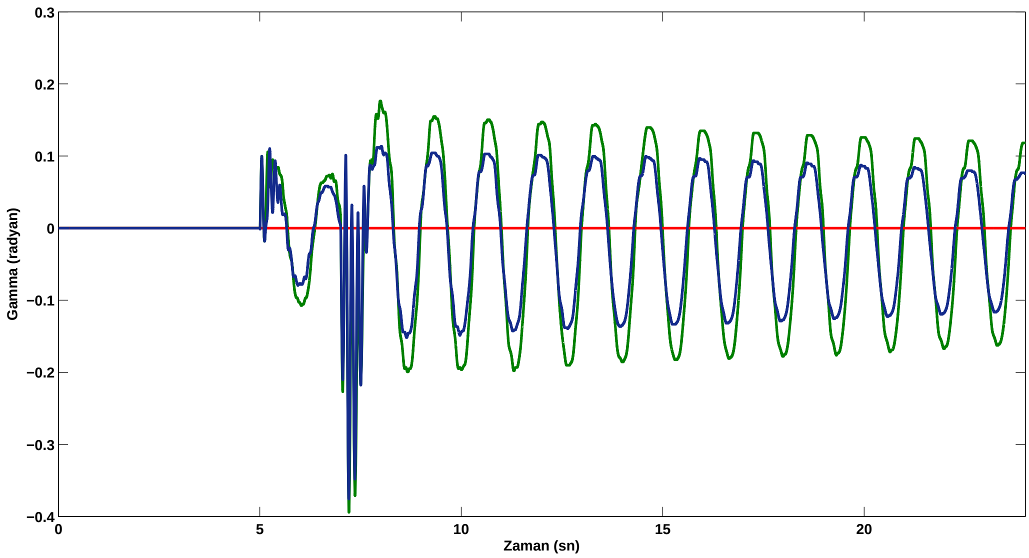
Şekil 4. 46 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



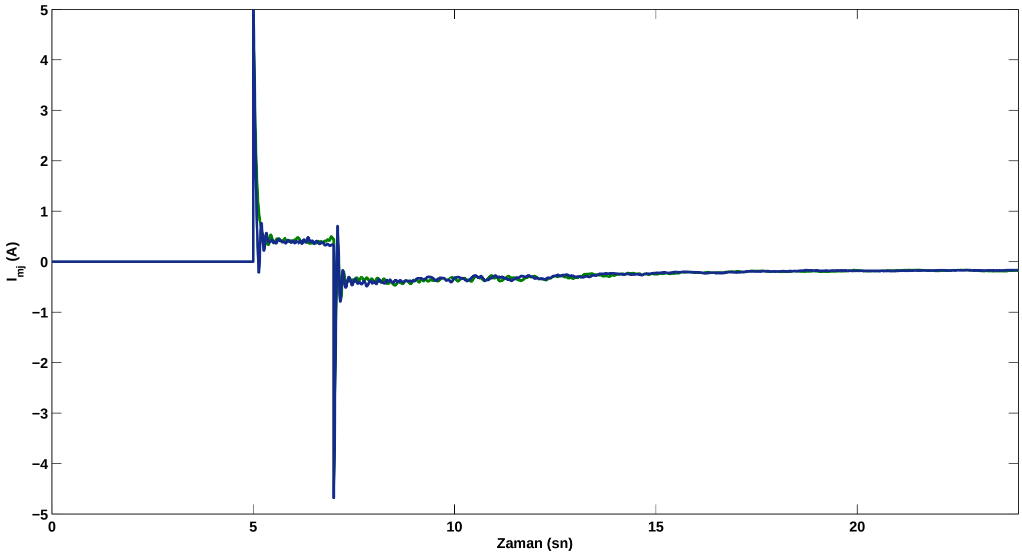
Şekil 4. 47 2. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



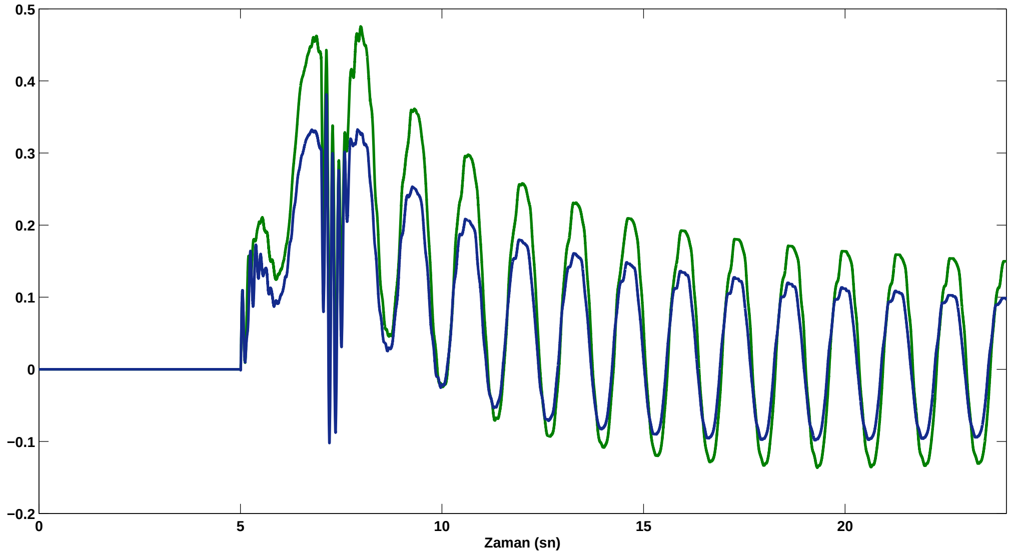
Şekil 4. 48 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



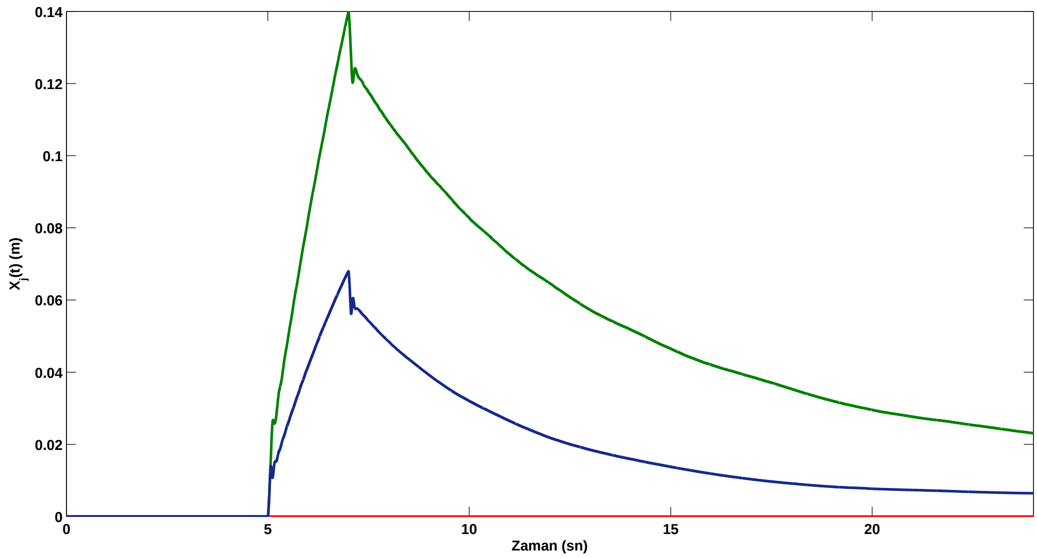
Şekil 4. 49 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



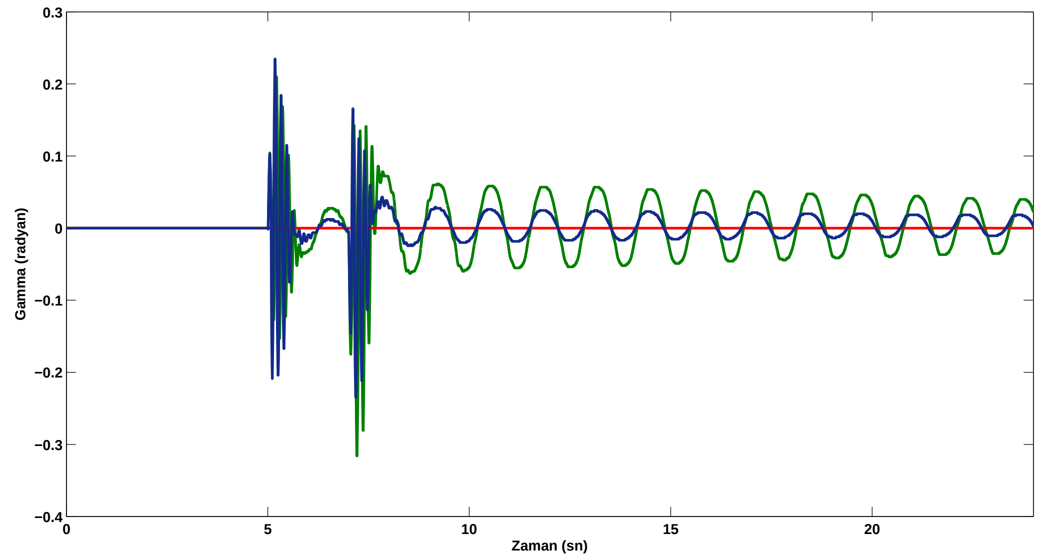
Şekil 4. 50 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



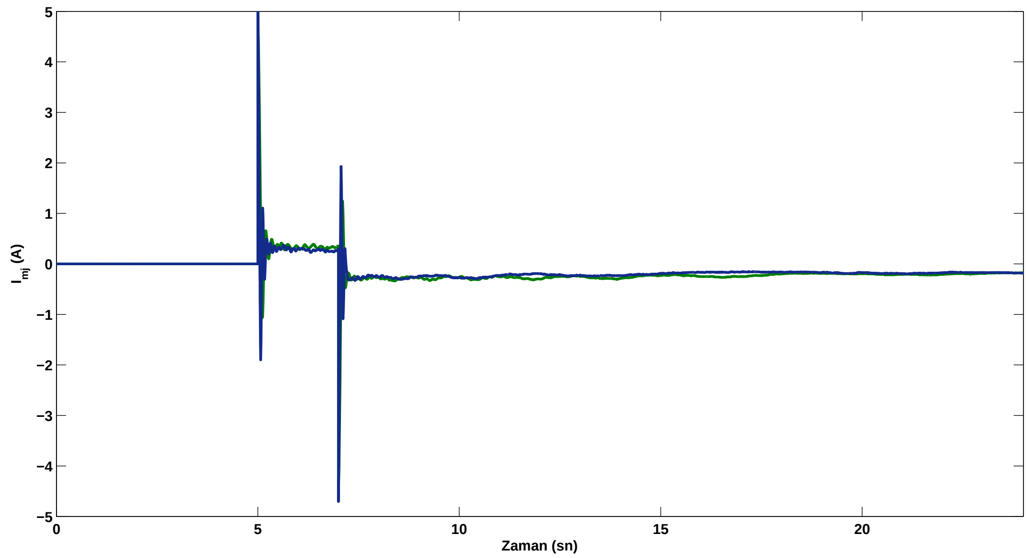
Şekil 4. 51 1. dereceden sabit dereceli kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı



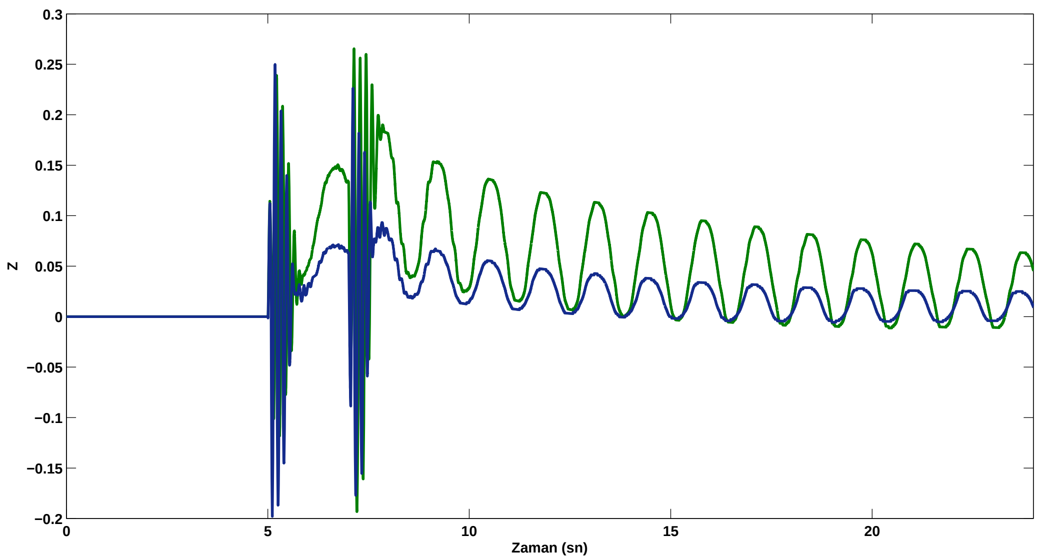
Şekil 4. 52 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Taşıyıcı pozisyonu



Şekil 4. 53 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Sarkacın gamma açısı



Şekil 4. 54 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Uygulanan kontrol işareti



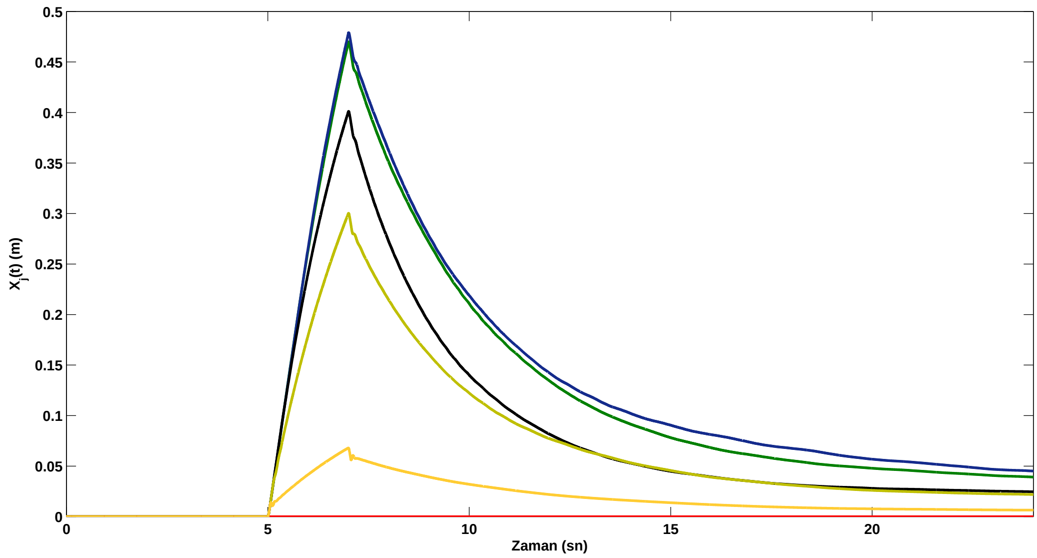
Şekil 4. 55 Dayanıklı PD kontrolcü çıktıları: Performans çıkışı

Daha önce oluşturulan benzetim yapısından elde edilen çıktılara benzer şekilde uygulama yapısına ait çıktılarda da $d_{11} = 0.5$ değeri kullanılarak elde edilen D-kararlılığı arttırılmış kontrolcülerin sistem eğrileri daha hızlı cevaba sahiptir. Bundan dolayı sisteme ait cevaplar daha hızlı bir şekilde referans değerlerine ulaşabilmektedir.

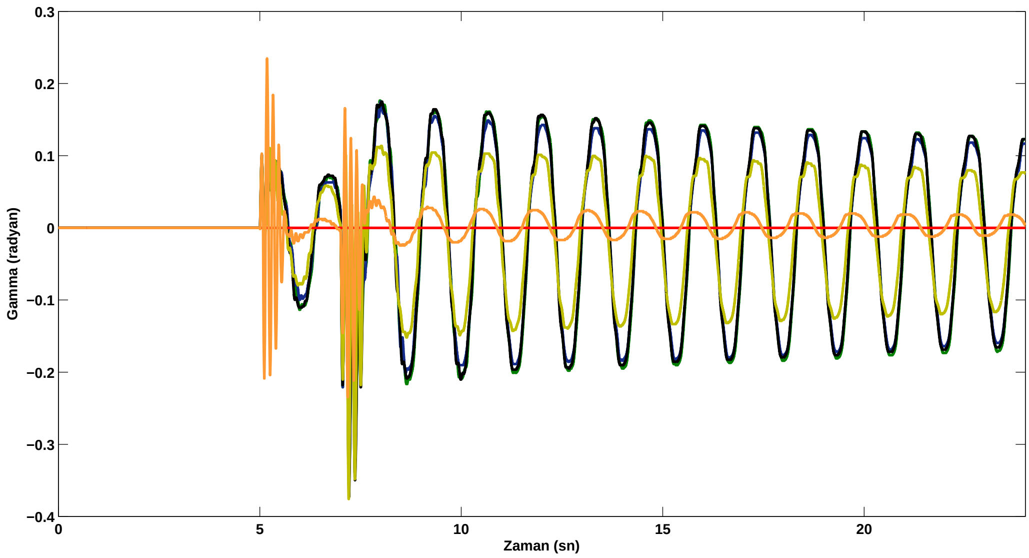
Farklı derecelere sahip D - kararlılığı arttırılmış kontrolcülerin uygulama yapısına giriş olarak verilmesi ile elde edilen taşıyıcı pozisyonu ve sarkaç açısı çıktıları Şekil 4. 56 ve 4. 57' de bir arada verilmiştir.

Uygulama çıktılarında daha önce verilen eğrilerde olduğu gibi yer alan yeşil renk 4. dereceden, mavi renk 3. dereceden, siyah renk 2. dereceden, sarı renk 1. dereceden ve turuncu renk PD yapısına sahip olan kontrolcünün çıktısını temsil etmektedir. Kırmızı renk ise yine referans değerlerini belirtmek için kullanılmıştır.

Bu çıktılardan yola çıkılarak önerilen tasarım metodu ile tasarlanan sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcülerin vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcıyı bozucu girişe rağmen kontrol edebildiği ve istenen performans kriterlerini sağladığı söylenebilir.



Şekil 4. 56 D - kararlılığı arttırılmış tüm kontrolcülere ait taşıyıcı pozisyonu çıktıları



Şekil 4. 57 D - kararlılığı arttırılmış tüm kontrolcülere ait sarkaç açısı çıktıları

Diğer yandan uygulama sonuçlarında görülebileceği gibi çıkış geri besleme yöntemi kullanılarak tasarlanan tam dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü sisteme ait uygulama yapısına giriş olarak verildiğinde sisteme ait cevap eğrilerinde osilasyona neden olmuş ve kontrolcü tasarımıyla hedeflenen performans kriterlerini yerine getirememiştir. Bundan dolayı vinç kolu sistemi için tez çalışmasında önerilen tasarım metodunun çıkış geri besleme yöntemine oranla çok daha verimli olduğu ve sistemi kontrol edebilecek düşük dereceli kontrolcü tasarımına olanak sağladığı nettir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde tez kapsamında hangi konu üzerinde çalışıldığından, çalışmada elde edilen sonuçlardan ve ileriye dönük olarak yapılabilecek çalışmalardan bahsedilecektir.

Giriş bölümünde bahsedilen ana hedef çerçevesinde bu tezde, belirsizlik içeren bir sistem için sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı üzerinde çalışılmıştır. Tasarım için çok terimli yaklaşım çerçevesinde performans çıkışı ile bozucu girişi arasında kalan sistemin transfer fonksiyonunun sonsuz normu, Kesin Pozitif Reel Lemma ve D- kararlılık teoremi kullanılarak sınırlandırılmıştır. Kontrolcü tasarımında kullanılan çok terimli yaklaşım metodunda dikkat edilmesi gereken en önemli noktanın merkezi çok terimlinin seçimi olduğu vurgulanmıştır.

Tezin ilk kısmında dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ PD kontrolcüsü tasarlanacak olan taşıyıcının üzerinde bulunduğu vinç kolu alt sistemi dâhil kule ve yük alt sistemlerini bünyesinde barındıran üç serbestlik dereceli vinç sistemi tanıtılmıştır. Üç serbestlik dereceli vinç sisteminde yer alan bileşenlere dair açıklamalar ve tanımlamalar, sistem parametreleri, kablo yapısı ve alt sistemlere ait sistem modelleri bu bölümde verilmiştir.

İkinci kısımda kontrolcü tasarımı için geliştirilen yaklaşım metodunda kullanılan DME' lerin kullanım alanları kısaca özetlenmiş, DME' lerin kullanılmış olduğu optimizasyon problemlerinde çözüm için kullanılan iki tekniğe yer verilmiştir. DME aracının kolay kullanılabilir olmasında en önemli etkinin iç nokta algoritmasının geliştirilmesi olduğu bu bölümde vurgulanmıştır. Ayrıca kontrolcü tasarım problemlerinde oluşan kapalı çevrim sistemin kararlılığını sağlamak adına kullanılan kararlılık modellerine bu bölümde yer verilmiştir.

Üçüncü kısımda ise vinç kolu alt sisteminde yer alan taşıyıcıya uygulanan bozucu etki dikkate alınarak belirsizliğe sahip sistem tekrar modellenmiş ve oluşturulan yeni model kullanılarak vinç kolu sisteminde yer alan taşıyıcı için ilk olarak tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bölümün ikinci kısmında dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ PD kontrolcü tasarımı için problem tanımı yapılmış ve oluşturulan tasarım problemi için literatürde benzer amaç doğrultusunda geliştirilen tasarım metodu dikkate alınarak çok terimli yaklaşım çerçevesinde yeni bir tasarım metodu geliştirilmiştir. Ardından geliştirilen tasarım metodu kullanılarak belirsizliğe sahip taşıyıcı için dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ PD kontrolcü başta olmak üzere farklı derecelere sahip sabit dereceli dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımları gerçekleştirilmiştir. Bölümün son kısmında ise tam dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü dâhil tasarlanan kontrolcülerin sistem için oluşturulan benzetim ve uygulama yapılarına giriş olarak verilmesi ile elde edilen sonuçlar paylaşılmıştır.

Vinç kolu alt sistemi için $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarımında kullanılan iki farklı tasarım yöntemi farklı derecelerde iki kontrolcünün elde edilmesine neden olmuştur. Elde edilen tam dereceli kontrolcü vinç kolu sisteminin derecesi ile aynı dereceye sahip olurken, çok terimi yaklaşım çerçevesinde geliştirilen tasarım metodu kullanılarak elde edilen sabit dereceli $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü PD yapısında olmuştur. Bunun yanında önerilen tasarım metodu dâhilinde arzulanan performans kriterlerini gerçekleyebilen farklı derecelere sahip kontrolcü tasarımına imkân sağlanmıştır. İki farklı tasarım metodu kullanılarak elde edilen farklı derecelerden kontrolcüler dikkate alınarak, geliştirilen sabit dereceli dayanıklı $\mathcal{H}_\infty$ kontrolcü tasarım metodunun yüksek dereceli sistemlerin kontrolcü tasarımında standart yöntemlere oranla daha kullanışlı olduğu söylenebilir.

Tez içerisinde önerilen tasarım yöntemini bir çok sisteme uygulamak mümkündür. Özellikle uzay endüstrisi ve gömülü sistemler başta olmak üzere yüksek dereceli sistemlere bu tez çalışmasında geliştirilen tasarım yöntemi kullanılarak düşük dereceli kontrolcü tasarlanabilir. Ayrıca bu yöntem PID ve benzeri yapısal kontrolcülerin tasarımında da kolaylıkla kullanılabilmekte ve bu çalışmada tasarlanan kontrolcü ile benzer şekilde sabit dereceli $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcü PID yapısında tasarlanabilmektedir.

Yapılan bu çalışmada geliştirilen tasarım metodu tek giriş tek çıkış sistemlerin sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcüsünü tasarlamak için geliştirilmiştir. Ancak gerçel uygulamalarda düşük dereceli kontrolcü tasarımı sadece tek giriş tek çıkış sistemlerin gereksinimi değildir. Bu yüzden çok giriş çok çıkış sistemlerin sabit dereceli dayanıklı $\mathscr{H}_\infty$ kontrolcüsünü tasarlamak için yeni bir tasarım metodu geliştirmek, ileriye dönük etkili bir çalışma olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Zhou, K., Doyle, J.C. ve Glover, K., (1996). Robust and Optimal Control, Upper Saddle River, Printice-Hall, New Jersey.

[2] Gahinet, P. ve Apkarian, P., (1994). "A Linear Matrix Inequality Approach to $\mathscr{H}_\infty$ Control", Int. J. Robust and Nonlinear Control, 4: 421–448.

[3] Iwasaki, T. ve Skelton, R.E., (1994). "All Controllers for the General $\mathscr{H}_\infty$ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas", Automatica, 30 (8): 1307–1317.

[4] Chilali, M. ve Gahinet, P., (1996). "$\mathscr{H}_\infty$ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach", IEEE Trans. Automatic Control, 41 (3): 358-367.

[5] Henrion, D., Sebek, M. ve Kucera, V., (2003). "Positive Polynomials and Robust Stabilization with Fixed-Order Controllers", IEEE Trans. Automatic Control, 48 (7): 1178-1186.

[6] Henrion, D. ve Lasserre, J.B., (2004). "Solving Nonconvex Optimization Problems - How GloptiPoly is Applied to Problems in Robust and Nonlinear Control", IEEE Control Systems Magazine, 24 (3): 72-83.

[7] Wang, S. ve Chow, J.H., (2000). "Low Order Controller Design for SISO Systems Using Coprime Factors and LMIs", IEEE Trans. Automatic Control, 45 (6): 1166-1169.

[8] Amirifiar, R. ve Sadati, N., (2006). "Low Order $\mathscr{H}_\infty$ Controller Design for an Active Suspension System via LMIs", IEEE Trans. Industrial Electronics, 53 (2): 554-560.

[9] Apkarian, P., Noll, D. ve Tuan, H.D., (2003). "Fixed-Order $\mathscr{H}_\infty$ Control Design via a Partially Augmented Lagrangian Method", Int. J. Robust and Nonlinear Control, 13 (12): 1137-1148.

[10] Henrion, D., Arzelier, D. ve Peaucelle, D., (2003). "Positive Polynomials Matrices and Improved LMI Robustness Conditions", Automatica, 39 (8) : 1479-1485.

[11] Henrion, D., (2003). "LMI Optimization for Fixed-Order $\mathscr{H}_\infty$ Controller Design", In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 5: 4646-4651.

[12] Yang, F., Gani, M. ve Henrion, D., (2007). "Fixed Order Robust $\mathscr{H}_\infty$ Controller Design with Regional Pole Assignment", IEEE Trans. Automatic Control, 52 (10): 1959-1963.

[13] McFarlane, D., ve Glover, K., (1992). "A Loop Shaping Design Procedure Using $\mathscr{H}_\infty$ Synthesis", IEEE Trans. Automatic Control, 27 (6): 759-769.

[14] Sohn, J.S., ve Seong, P.H., (2010). "A Steam Genarator Model Identification and Robust $\mathscr{H}_\infty$ Controller Design with v-gap Metric for a FeedWater Control System", Annals of Nuclear Energy, 37 (2): 180-195.

[15] Apkarian, P., Bompart, V. ve Noll, D., (2007). "Non-Smooth Structured Control Design with Application to PID Loop-Shaping of a Process", Int. J. Robust and Nonlinear Control, 17: 1320-1342.

[16] Genç, A.U., (2000). "A State-Space Algorithm for Designing $\mathscr{H}_\infty$ Loop Shaping PID Controller" (Yayınlamamış).

[17] Burke, J.V., Henrion, D., Lewis, A.S. ve Overton, M.L., (2006). "HIFOO-A Matlab Package for Fixed-Order Controller Design and $\mathscr{H}_\infty$ Optimization", IFAK Sypm. Robust Control Design, 2006, Toulouse, France.

[18] Keel, L.H., ve Bhattacharyya, S.P., (1999). "Robust Stability and Performance with Fixed-Order Controllers", Automatica, 35 (10): 1717-1724.

[19] Khatibi, H., Karimi, A. ve Longchamp, P., (2008). "Fixed-Order Controller Design for Polytopic Systems Using LMIs", IEEE Trans. Automatic Control, 53 (1): 428-434.

[20] Quanser, (2011). 3 DOF Crane User Manual, Canada.

[21] Delibaşı, A., (2008). Doyumlu Eyleyicilere Sahip DPD Sistemler için Parametrelerine Bağımlı Homojen Çok Terimli Lyapunov Fonksiyonu Tabanlı Dayanıklı Kontrolcü Tasarımı, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[22] Nesterov, E., ve Nemirovskii, A.S., (1993). Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.

[23] Grman, L., Rosinova, D., Kozakova, A. ve Vesely, V., (2005). "Robust Stability Conditions for Polytopic Systems", Int. J. System Science, 36: 961-973.

[24] De Oliveira, M.C., Bernussou, J., ve Geromel, J.G., (1999). "A New Discrete Time Robust Stability Condition", System and Control Letters, 37: 261-265.

[25] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. ve Balakrishnan, V., (1994). Linear Matrix Inequalities in Sytem and Control Theory, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia.

[26] Gahinet, P., Apkarian, P., ve Chilali, M., (1996). “Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty”, IEEE Trans. Circuits and Systems, 41 (3): 436-442.

[27] Sturm, J.F., (1999). “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones”, Optimization Methods and Software, 11-12 (3): 625-653.

[28] Löfberg, J., (2004). “YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in Matlab”, Proceedings of the IEEE Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD), Taipei, Taiwan, 284-289.

EK-A

ÖNERİLEN TASARIM METODUNUN m. DOSYASI

```
function [G,K,H,Tn,eG,eH]=fixord21(b,a,opt)
% Fixed-Order Robust H-Infinity Controller Design
% Function FIXORD solves a fixed order H-infinity controller design
% problem and looks a controller with the help of LMI relaxations.
%
% Input Parameters:
% b : Numerator of the open loop system.
% a : Denominator of the open loop system.
% opt : Structure with rep, repindex, bd, ad, B, A, gam, T, s , c, m.
% opt.rep : Yes to design controller considering uncertainty of the
% system.
%           No to design controller without considering the
% uncertainty of the system.
% opt.repindex : If opt.rep is equal to Yes, this parameter should be
% entered.
%                1 to enter uncertainty as a percentage and specify
% which coefficient has this uncertainty.
%                2 to specify numerator and denominator directly with
% uncertainty.
% opt.bd : In case of repindex is equal to 1, information about
% which coefficient has uncertainty and this uncertainty as a
% percantage for numerator matrix.
% opt.ad : In case of repindex is equal to 1, information about
% which coefficient has uncertainty and this uncertainty as a
% percantage for denominator matrix.
%       bd, ad = [which coefficient, uncertainty as a percentage]
%       bd = [3 10];
% opt.B : In case of repindex is equal to 2, numerator matrix which
% has uncertainty.
% opt.A : In case of repindex is equal to 2, denominator matrix which
% has uncertainty.
%       Ex. b = [4 5 6 7], first and second coefficients have
% uncertainty of %10 and %20 respectively. In this case opt.B should
% be entered as [4.4 5 6 7;3.6 5 6 7;4 6 6 7;4 4 6 7].
% opt.bet : H-infinity norm bound. If this value is not be entered,
% software will specify this value automatically.
% opt.T : Time constant for PI, PD or PID structures. If opt.s will be
% entered, user should specify this value.
% opt.s : Controller structure. This value can be entered for
% specifying controller degree but if it was not entered, software
```

```
% will specify this value according to other parameters and continue
% to run. Capital letters should be used to input and only 'PI', 'PD'
% and 'PID' selections can be used.
% opt.c : Central Polynomial. This polynomial can be specified by user
% but if it was not specified, software will specify this polynomial
% according to length of the denominator matrix of the open loop
% plant(as) and degree of the controller(m).
%       pol = poly(-1*ones(1,as+m-1));
%       c = fliplr(pol);
% opt.m : Degree of the controller. This value can be specified but if
% it was not specified, software will specify this value according to
% below procedure. When m is not entered, if opt.s is entered,
% software will specify this value according to the length of the
% numerator matrix of the structure of the controller.
%       if (strcmp(opt.s, 'PI'))
%       y = [Ki Kp];
%       x = [0 1];
%       m = length(y) - 1;
% If opt.s is not entered, software will specify this value according
% to denominator length of the open loop plant(as).
%       m = as-1;
% When opt.m is not entered, if opt.c and opt.s is entered software
% will specify this value according to the length of the numerator
% matrix of the structure of the controller
%       if (strcmp(opt.s, 'PI'))
%       y = [Ki Kp];
%       x = [0 1];
%       m = length(y) - 1;
% When opt.m is not entered, if opt.c is entered but opt.s is not
% entered, opt.s will specify this value according to length of the
% central polynomial and length of the denominator matrix of the open
% loop plant(as).
%       m = length(c) - as;
% For solving the LMI problem and design controller the following
% equality must be provided.
% Central polynomial degree = m + denominator degree of the open loop
% system.
% Note : In this function, while input parameters are being entered
% like opt.A, opt.B, opt.c, b, a, the lower degree term is written as
% first element of input parameters' matrix.
%
% Output Parameters:
% G : Open Loop Transfer Function.
% K : Fixed Order H-Infinity Controller.
% H : Closed Loop Transfer Function.
% Tn : Complemantary Sensitivity Function.
% eG : Eigenvalues Of Open Loop Transfer Function.
% eH : Eigenvalues Of Closed Loop Transfer Function.
%
% In FIXORD function, after specified input parameters with necessary
% informations like uncertainty or controller degree, system
% polynomial is specified with the help of the Toeplitz Tp and
% controller polynomials C matrix. And then LMI problem is being
% solving. Finally with the LMI results output parameters are
% specified and the function is finished.
%
% Example:
% Fixed Order Robust H-Infinity Controller Design for 3 Dof Crane
% clear all
% syms s
```

```
% opt.T=5;
% opt.s='PD';
% opt.bet=3.24
% opt.rep='Yes';
% opt.repindex=2;
% opt.c=fliplr(sym2poly(((s+3
% -3.6510i))*(s+3+3.6510i)*(s+2)*((s+1)^2)));
% opt.B=[-13.41 0 -2.547];
% opt.A=[0 0 13.33 0 1];
% [G,K,H,Tn,eG,eH]=fixord21([-13.41 0 -2.547],[0 0 13.33 0 1],opt)
%
%      -2.547 s^2 - 13.41
% G = --------------------
%        s^4 + 13.33 s^2
%
%       -2.961 s - 0. 5605
% K = --------------------
%             s + 5
%
%            -2.547 s^3 - 12.74 s^2 - 13.41 s - 67.05
% H = -----------------------------------------------------
%      s^5 + 5 s^4 + 20.87 s^3 + 68.08 s^2 + 39.7 s + 7.516
%
%               7.541 s^3 + 1.428 s^2 + 39.7 s + 7.516
% Tn = -----------------------------------------------------
%         s^5 + 5 s^4 + 20.87 s^3 + 68.08 s^2 + 39.7 s + 7.516
%
%      0
% eG = 0
%      0 + 3.6510i
%      0 - 3.6510i
%
%      -0.3491 + 3.8951i
%      -0.3491 - 3.8951i
% eH = -3.6301
%      -0.3358 + 0.1503i
%      -0.3358 - 0.1503i
%
% Written by Gökhan Akça, January 10, 2013.
% Last modified by Gökhan Akça, June 23, 2013.
% Copyright 2013-2014 by Yıldız Technical University

if(nargin>3)
   error('Input arguments are more than expected')
elseif(nargin<2)
   error('Input arguments are less than expected')
elseif(nargin==2)
    opt=[];
end

bs=length(b); %length of the numerator of the open loop plant%
as=length(a); %length of the denominator of the open loop plant%
if (bs>as) %test of equality length of the a and b%
    error('Open loop system is not casual')
elseif(bs<as)
    b=[b zeros(1,as-bs)];
end
b1=b;
a1=a;
```

```
    if(isfield(opt,'s'))&&(isfield(opt,'m')) %control of the input
parameters%
        error('You wanted to enter controller degree and controller
structure at the same time, this is a contradiction');
    end

    if(isfield(opt,'s')) %control of the controller structure%
    if(isfield(opt,'T')) %control of the time constant%
        T=opt.T;
    else
        error('Time constant is not entered');
    end
    end
    conu=0;
    if(isfield(opt,'s')) %control of the controller structure%
        conu=1;
        Ki=sdpvar(1,1);
        Kp=sdpvar(1,1);
        Kd=sdpvar(1,1);
            if (strcmp(opt.s, 'PI'))
                y=[Ki Kp];
                x=[0 1];
                m=length(y)-1;
            elseif (strcmp(opt.s, 'PD'))
                y=[Kp*T Kd*T+Kp];
                x=[T 1];
                m=length(y)-1;
            elseif (strcmp(opt.s, 'PID'))
                y=[Ki*T Kp*T+Ki+Kd*T Kp];
                x=[0 T 1];
                m=length(y)-1;
            end
     end

    if(isfield(opt,'m')) %specify of the controller degree%
         m=opt.m;
    elseif(isfield(opt,'s'))
         m=length(y)-1;
    else
         m=as-1;
    end

    if(isfield(opt,'c')) %specify of the central polynomial%
        c=opt.c;
        if(isfield(opt,'s'))
            m=length(y)-1;
        elseif(isfield(opt,'m'))
            if(opt.m~=(length(c)-as))
            error('Central polynomial degree is not equal to sum of
controller degree and denominator degree of the open plant')
            end
            m=opt.m;
        else
            m=length(c)-as;
        end
    else
        pol=poly(-1*ones(1,as+m-1)); %if c is not entered, central
polynomial is specified according to 'as' and 'm' with selecting the
root at -1%
        c=fliplr(pol);
```

```
     end

    if((isfield(opt,'m'))||(isfield(opt,'s')))&&(isfield(opt,'c'))
%control of the central polynomial and controller degree%
        c=opt.c;
        if(m~=(length(c)-as))
            error('Central polynomial degree is not equal to sum of
controller degree and denominator degree of the open plant')
        end
    end

    if(isfield(opt,'bet')) %control of the lower bound for H-inf norm%
        bet=opt.bet;
    else
        sdpvar bet;
    end

n=as+m-1; %P matrix length%
if(conu==0)
    x=sdpvar(1,m+1);
    y=sdpvar(1,m+1);
end
% necessary matrix definitions%
C=[x y]; %use for specifying system polynomial matrix(d=C*Tp)%
num=[];
val=[];
F=[];
% constant values for executing software%
v=1;
e=0.1; %epsilon value for LMI%

if (isfield(opt,'rep') && strcmp(opt.rep, 'Yes')) %control of the
which parameter has uncertainty%
    if (isfield(opt,'repindex') && (opt.repindex==1))
        disp('Uncertainty Matrix Specified Indirectly');
        if isfield(opt,'bd') && (mod(length(opt.bd),2)==0)
            lb=length(opt.bd)/2;
            for i=1:1:lb
                be=b;
                b(opt.bd(2*i-1))=b(opt.bd(2*i-1))+(b(opt.bd(2*i
-1))*opt.bd(2*i)/100);
                B(2*i-1,:)=b;
                b=be;
                b(opt.bd(2*i-1))=b(opt.bd(2*i-1))-(b(opt.bd(2*i
-1))*opt.bd(2*i)/100);
                B(2*i,:)=b;
            end
        elseif isfield(opt,'bd') && (mod(length(opt.bd),2)==1)
            error('This matrix is not suitable for specifying
uncertainty percentage and coefficients which has uncertainty of the
numerator matrix');
        else
            lb=0.5;
            opt.bd=[0 0];
            for i=1:1:2*lb
                B(i,:)=b;
            end
        end
        if isfield(opt,'ad') && (mod(length(opt.ad),2)==0)
            la=length(opt.ad)/2;
```

```
            for i=1:1:la
                ae=a;
                a(opt.ad(2*i-1))=a(opt.ad(2*i-1))+(a(opt.ad(2*i
-1))*opt.ad(2*i)/100);
                A(2*i-1,:)=a;
                a=ae;
                a(opt.ad(2*i-1))=a(opt.ad(2*i-1))-(a(opt.ad(2*i
-1))*opt.ad(2*i)/100);
                A(2*i,:)=a;
            end
        elseif isfield(opt,'ad') && (mod(length(opt.ad),2)==1)
            error('This matrix is not suitable for specifying
uncertainty percentage and coefficient which has uncertainty of the
denominator matrix');
        else
             la=0.5;
             opt.ad=[0 0];
             for i=1:1:2*la
                A(i,:)=a;
             end
        end

    elseif (isfield(opt,'repindex') && (opt.repindex==2)) %control of
the uncertainty matrix%
        disp('Uncertainty Matrix Specified Directly');

        if isfield(opt,'B') && isfield(opt,'A')
            BS=size(opt.B,2);
            AS=size(opt.A,2);
                if (BS>AS) %control equality length of the A and B%
                    error('Open loop system which has uncertainty is
not casual')
                elseif(BS<AS)
                    for i=1:1:size(opt.A,1)
                        val(i,:)=[opt.B(i,:) zeros(1,AS-BS)];
                    end
                    opt.B=val;
                end
        end

        if isfield(opt,'B') %control of the row and column number of
the numerator matrix%
            if (size(b,2)==size(opt.B,2))
                B=opt.B;
                lb=size(opt.B,1);
            else
                error('Unsuitable column number for numerator
matrix');
            end
        else
            if isfield(opt,'A')
                lb=size(opt.A,1);
                for i=1:1:lb
                    B(i,:)=b;
                end
            else
                lb=1;
                for i=1:1:lb
                    B(i,:)=b;
                end
```

```
            end
        end

        if isfield(opt,'A') %control of the row and column number of
the denominator matrix%
            if (size(a,2)==size(opt.A,2))
                A=opt.A;
                la=size(opt.A,1);
            else
                error('Unsuitable column number for denominator
matrix');
            end
        else
            la=1;
            for i=1:1:la
                A(i,:)=a;
            end
        end

    else
        disp('Wrong entered for repindex parameter.');
    end

    for i=1:1:la
                b=B(i,:);
                a=A(i,:);
                    for j=0:1:m %Toeplitz matrix%
                        Tp(j+1,:)=[zeros(1,j) a zeros(1,m-j)];
                    end
                    for j=m+1:1:2*m+1 %Toeplitz matrix%
                        Tp(j+1,:)=[zeros(1,j-m-1) b zeros(1,2*m-j+1)];
                    end
                num=y*Tp(m+2:2*m+2,:);
                %num=x*Tp(1:m+1,:);
                num(v,:)=num;
                S1=[eye(n) zeros(n,1)];
                S2=[zeros(n,1) eye(n)];
                S=[S1;S2]; %projection matrix%
                D=[0 1;1 0]; %D Stability matrix%
                P=sdpvar(n);
                SPS=S'*kron(D,P)*S;
                M=[-SPS+(C*Tp)'*c+c'*(C*Tp)-e*c'*c num(v,:)';num(v,:)
e*bet]; %LMI
                F=F+set(M>=0);
                v=v+1;
    end

sol=solvesdp(F,[bet],sdpsettings('solver','sedumi')) %solve the LMI%

else %system with out uncertainty
    %use for specifying system polynomial matrix(d=C*Tp)%
    C=[x y]; % numerator and denominator of the controller%
    for j=0:1:m %Toeplitz matrix%
        Tp(j+1,:)=[zeros(1,j) a zeros(1,m-j)];
    end

    for j=m+1:1:2*m+1 %Toeplitz matrix%
        Tp(j+1,:)=[zeros(1,j-m-1) b zeros(1,2*m-j+1)];
    end
```

```
d=C*Tp; %specify the system polynomial matrix d=[d1 d2 d3 ...]%
num=y*Tp(m+2:2*m+2,:);
%num=x*Tp(1:m+1,:);
S1=[eye(n) zeros(n,1)];
S2=[zeros(n,1) eye(n)];
S=[S1;S2]; %projection matrix%
D=[0 1;1 0]; %D stability matrix%
P=sdpvar(n);
SPS=S'*kron(D,P)*S;
M=[-SPS+d'*c+c'*d-e*c'*c num';num e*bet]; %LMI%

sol=solvesdp(set(M>=0),[bet],sdpsettings('solver','sedumi')); %solve
the LMI%
end
    x=fliplr(double(x));
    y=fliplr(double(y));
    bet=double(bet)
    x=x/x(1);
    y=y/x(1);
        if nargout<=1
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
        elseif nargout==2
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
            K=tf(y,x); %controller
        elseif nargout==3
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
            K=tf(y,x); %controller
            H=feedback(G,K); %closed loop transfer function%
        elseif nargout==4
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
            K=tf(y,x); %controller%
            H=feedback(G,K); %closed loop transfer function%
            Tn=tf(conv(fliplr(b1),y),(conv(fliplr(a1),x)
+conv(fliplr(b1),y))); %complemantary sensitivity function%
        elseif nargout==5
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
            K=tf(y,x); %controller%
            H=feedback(G,K); %closed loop transfer function%
            Tn=tf(conv(fliplr(b1),y),(conv(fliplr(a1),x)
+conv(fliplr(b1),y))); %complemantary sensitivity function%
            eG=eig(G); %eigenvalues of open loop transfer function%
        elseif nargout==6
            G=tf(fliplr(b1),fliplr(a1)); %open loop transfer function%
            K=tf(y,x); %controller%
            H=feedback(G,K); %closed loop transfer function%
            Tn=tf(conv(fliplr(b1),y),(conv(fliplr(a1),x)
+conv(fliplr(b1),y))); %complemantary sensitivity function%
            eG=eig(G); %eigenvalues of open loop transfer function%
            eH=eig(H); %eigenvalues of closed loop transfer function%
            end
```

EK-B

YÜK ALT SİSTEMİNE AİT .mws MODELLEME DOSYASI

3-DOF Crane Payload Position Equation

URL: http://www.quanser.com

NOTE: This worksheet presents the equations modelling the payload position on the 3D Crane plant.

Description

- This worksheet presents the equations related to the payload of the 3D Crane system modelling and position control experiment.
- For an overview of some of the control challenges offered by the Quanser please visit www.quanser.com

Worksheet Initialization

```
> restart: interface( imaginaryunit = j ):
> with( inttrans ):
```

z =payload height m]

```
> alias( Z = laplace( z(t), t, s ) ):
```

F_y = Linear force produced by the trolley motor at the motor pinion

```
> alias( F[y] = laplace( f[y](t), t, s ) ):
```

F_{ai} = Inertial force produced by the motor's armature in rotation

```
> alias( F[ai] = laplace( f[ai](t), t, s ) ):
```

Model

Find the transfer function respresenting the position of the payload with respect to the trolley motor input current.

Newton's second law of motion (i.e. equation of motion in the time domain) and application of D'Alembert's principle:

```
> EOM_DT_FULL := m[p] * diff( z(t), t$2 ) + f[ai](t) = f[y](t)
  - m[p]*g - B[y] * diff( z(t), t ) - f[coulomb]( t ) :
  EOM_DT_FULL;
```

$$m_p \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t) \right) + f_{ai}(t) = f_y(t) - m_p\, g - B_y \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) - f_{coulomb}(t)$$

To construct a model for a PIV control system, assume the viscous friction, B_y, and the Coulomb friction froce, $f_{coulomb}$, are negligible.

```
> FRICTION_PARAM := {B[y]=0, f[coulomb](t)=0}:
  FRICTION_PARAM;
```

$$\{ B_y = 0, f_{coulomb}(t) = 0 \}$$

The equation of motion therefore becomes

```
> EOM_DT := subs(FRICTION_PARAM,EOM_DT_FULL):
  EOM_DT;
```

$$m_p\left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)+f_{ai}(t)=f_y(t)-m_p\,g$$

Transfer function is

```
> TF_Z_F_IC := laplace( EOM_DT, t, s):
  TF_Z_F_IC;
```

$$m_p\,(s^2\,Z-\mathrm{D}(z)(0)-s\,z(0))+F_{ai}=F_y-\frac{m_p\,g}{s}$$

the initial conditions are null

```
> IC := { z(0) = 0, D(z)(0) = 0 }:
```

and the transfer function becomes

```
> TF_Z_F := subs( IC, TF_Z_F_IC ):
  TF_Z_F;
```

$$m_p\,s^2\,Z+F_{ai}=F_y-\frac{m_p\,g}{s}$$

Linear force generated by the trolley motor relative to its input current.

```
> F_Y := F[y] = eta[g,y] * K[g,y] * eta[m,y] * K[t,y] * I[m,y]
  / r[y,reel]:
  F_Y;
```

$$F_y=\frac{\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,I_{m,\,y}}{r_{y,\,reel}}$$

Torque due to the motor moment of inertia, where J_ϕ is the total moment of inertia acting on the motor shaft (i.e. the motor armature inertia plus the inertia from the wheel attached).

```
> T_AI := tau[ai] = J[phi] * diff(phi(t),t$2):
  T_AI;
```

$$\tau_{ai}=J_\phi\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)$$

Relationship between the linear distance z and the angle of the rotary wheel ϕ.

```
> EQN_PHI_Z := phi(t) = z(t) / r[y,reel]:
  EQN_PHI_Z;
```

$$\phi(t)=\frac{z(t)}{r_{y,\,reel}}$$

Torque with respect to z.

```
> T_AI_Z := subs(EQN_PHI_Z,T_AI):
  T_AI_Z;
```

$$\tau_{ai}=\frac{J_\phi\left(\frac{d^2}{dt^2}z(t)\right)}{r_{y,\,reel}}$$

Force and torque relationship

```
> F_T_AI := f[ai] = tau[ai] / r[y,reel]:
  F_T_AI;
```

$$f_{ai}=\frac{\tau_{ai}}{r_{y,\,reel}}$$

Force due to the rotation of the motor w.r.t. position z is therefore.

```
> F_AI_dt := subs(T_AI_Z,F_T_AI):
  F_AI_dt;
```

$$f_{ai} = \frac{J_\phi \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t)\right)}{r_{y,\,reel}^{\;2}}$$

Corresponding transfer function is

```
> F_AI := F[ai] = J[phi] * s^2 * Z / r[y,reel]^2:
  F_AI;
```

$$F_{ai} = \frac{J_\phi\, s^2\, Z}{r_{y,\,reel}^{\;2}}$$

Substitute the linear force transfer function, F_y, and the rotary force transfer function, F_{ai}, into the main equation to obtain the open-loop representation of the system.

```
> EQN_Z_I := collect( expand( subs(F_Y, F_AI, TF_Z_F), Z),
  {Z,s}):
  EQN_Z_I;
```

$$\left(m_p + \frac{J_\phi}{r_{y,\,reel}^{\;2}}\right) s^2\, Z = \frac{\eta_{g,y} K_{g,y} \eta_{m,y} K_{t,y} I_{m,y}}{r_{y,\,reel}} - \frac{m_p\, g}{s}$$

Solve for Z to get the current to position transfer function in proper form.

```
> TF_Z_I := Z(s) = expand(subs( I[m,y]=I[m,y](s),
  solve(EQN_Z_I,Z) )):
  TF_Z_I;
```

$$Z(s) = \frac{r_{y,\,reel}\, \eta_{g,y} K_{g,y} \eta_{m,y} K_{t,y} I_{m,y}(s)}{s^2 \,(m_p\, r_{y,\,reel}^{\;2} + J_\phi)} - \frac{r_{y,\,reel}^{\;2}\, m_p\, g}{s^3\,(m_p\, r_{y,\,reel}^{\;2} + J_\phi)}$$

Position Control Design

Design a PIV compensator to control the vertical position of the payload.

PIV Controller

```
> PIV := I[m,y](s) = (k[p] + k[i]/s)*(Z[d](s)-Z(s)) -
  k[v]*s*Z(s):
  PIV;
```

$$I_{m,y}(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)(Z_d(s) - Z(s)) - k_v\, s\, Z(s)$$

Transfer function of a first-order high-pass filter

```
> HPF := V[z](s) = omega[f]^2*s*Z(s) / (s + omega[f]):
  HPF;
```

$$V_z(s) = \frac{\omega_f^{\;2}\, s\, Z(s)}{s + \omega_f}$$

Substitute controller in model and find closed-loop transfer function

```
> TF_Z_ZD_FULL := Z(s) = collect( solve( subs( PIV,TF_Z_I ),
  Z(s) ), Z[d](s) ):
  TF_Z_ZD_FULL;
```

$$Z(s) = r_{y,\,reel}\,(\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s + \eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i)\,Z_d(s) \Big/ (s^3\,m_p\,r_{y,\,reel}^2 + s^3\,J_\phi + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_v\,s^2) - r_{y,\,reel}^2\,m_p\,g \Big/ (s^3\,m_p\,r_{y,\,reel}^2 + s^3\,J_\phi + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_v\,s^2)$$

Consider only Z/Zd closed-loop transfer function

```
> TF_Z_ZD:= Z(s) = collect( simplify(
  coeff(rhs(TF_Z_ZD_FULL),Z[d](s) ) ), s):
  TF_Z_ZD;
```

$$Z(s) = r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,(k_p\,s + k_i) \Big/ (s^3\,(m_p\,r_{y,\,reel}^2 + J_\phi) + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_v\,s^2 + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i)$$

Denominator of the closed-loop transfer function.

```
> TF_Z_ZD_denom := denom( rhs( TF_Z_ZD ) ):
  TF_Z_ZD_denom;
```

$$s^3\,m_p\,r_{y,\,reel}^2 + s^3\,J_\phi + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i + r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_v\,s^2$$

```
> EQN_CHAR := collect( TF_Z_ZD_denom /
  coeff(TF_Z_ZD_denom,s,3), s ) :
  EQN_CHAR;
```

$$s^3 + \frac{r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_v\,s^2}{m_p\,r_{y,\,reel}^2 + J_\phi} + \frac{r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_p\,s}{m_p\,r_{y,\,reel}^2 + J_\phi} + \frac{r_{y,\,reel}\,\eta_{g,\,y}\,K_{g,\,y}\,\eta_{m,\,y}\,K_{t,\,y}\,k_i}{m_p\,r_{y,\,reel}^2 + J_\phi}$$

Standard third-order characteristic equation

```
> EQN_CHAR_STD_factored := ( s^2 + 2 * zeta * omega[0] * s +
  omega[0]^2 ) * ( s + p[0] ):
  EQN_CHAR_STD_factored;
```

$$(s^2 + 2\,\zeta\,\omega_0\,s + \omega_0^2)\,(s + p_0)$$

This expands to

```
> EQN_CHAR_STD := collect( expand( EQN_CHAR_STD_factored ), s
  ):
  EQN_CHAR_STD_factored = EQN_CHAR_STD;
```

$$(s^2 + 2\,\zeta\,\omega_0\,s + \omega_0^2)\,(s + p_0) = s^3 + (2\,\zeta\,\omega_0 + p_0)\,s^2 + (\omega_0^2 + 2\,\zeta\,\omega_0\,p_0)\,s + \omega_0^2\,p_0$$

Derivative gain to map DCMCT characteristic equation to standard characteristic equation.

```
> EQN_KV := coeff(EQN_CHAR,s,2) = coeff(EQN_CHAR_STD,s,2):
```

```
EQN_KV;
```

$$\frac{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}\,k_v}{m_p\,r_{y,reel}^2+J_\phi}=2\,\zeta\,\omega_0+p_0$$

Proportional gain to map DCMCT characteristic equation to standard characteristic equation.

```
> EQN_KP := coeff(EQN_CHAR,s,1) = coeff(EQN_CHAR_STD,s,1):
  EQN_KP;
```

$$\frac{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}\,k_p}{m_p\,r_{y,reel}^2+J_\phi}=\omega_0^2+2\,\zeta\,\omega_0\,p_0$$

Integral gain to map DCMCT characteristic equation to standard characteristic equation.

```
> EQN_KI := coeff(EQN_CHAR,s,0) = coeff(EQN_CHAR_STD,s,0):
  EQN_KI;
```

$$\frac{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}\,k_i}{m_p\,r_{y,reel}^2+J_\phi}=\omega_0^2\,p_0$$

Solve the above system of equations for gains $\{k_p, k_i, k_d\}$.

```
> sol := solve( {EQN_KV,EQN_KP,EQN_KI}, {k[v],k[p],k[i]} );
```

$$sol:=\{k_p=\frac{\omega_0\,(2\,\zeta\,p_0\,J_\phi+\omega_0\,m_p\,r_{y,reel}^2+\omega_0\,J_\phi+2\,\zeta\,p_0\,m_p\,r_{y,reel}^2)}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}},$$
$$k_v=\frac{p_0\,J_\phi+2\,\zeta\,\omega_0\,m_p\,r_{y,reel}^2+2\,\zeta\,\omega_0\,J_\phi+p_0\,m_p\,r_{y,reel}^2}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}},\;k_i=\frac{\omega_0^2\,p_0\,(m_p\,r_{y,reel}^2+J_\phi)}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}}\}$$

```
> assign(sol);
```

Proportional gain meeting specification.

```
> kp_symb := k[p]:
  'k[p]' = kp_symb;
```

$$k_p=\frac{\omega_0\,(2\,\zeta\,p_0\,J_\phi+\omega_0\,m_p\,r_{y,reel}^2+\omega_0\,J_\phi+2\,\zeta\,p_0\,m_p\,r_{y,reel}^2)}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}}$$

Derivative gain meeting specification.

```
> kv_symb := k[v]:
  'k[v]' = kv_symb;
```

$$k_v=\frac{p_0\,J_\phi+2\,\zeta\,\omega_0\,m_p\,r_{y,reel}^2+2\,\zeta\,\omega_0\,J_\phi+p_0\,m_p\,r_{y,reel}^2}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}}$$

Integral gain meeting specification.

```
> ki_symb := k[i]:
  'k[i]' = ki_symb;
```

$$k_i=\frac{\omega_0^2\,p_0\,(m_p\,r_{y,reel}^2+J_\phi)}{r_{y,reel}\,\eta_{g,y}\,K_{g,y}\,\eta_{m,y}\,K_{t,y}}$$

```
> unassign('k[p]','k[v]','k[i]');
```

Control Specifications

Find the PIV gains needed to meet a given peak time, percentage overshoot, and pole location specification.

Model parameters

```
> MDL_PARAM := {m[p] = 0.147, r[y,reel] = 0.0143, J[phi] =
  3.642e-6, eta[g,y] = 1, K[g,y] = 2*14, eta[m,y] = 0.81,
  K[t,y] = 0.0261 }:
  MDL_PARAM;
```

$$\{K_{t,y} = 0.0261, m_p = 0.147, r_{y,reel} = 0.0143, J_\phi = 0.3642\ 10^{-5}, K_{g,y} = 28, \eta_{m,y} = 0.81, \eta_{g,y} = 1\}$$

Peak time equation

```
> TP_EQN := t[p] = Pi / ( omega[0] * sqrt(1-zeta^2) ):
  TP_EQN;
```

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Percentage overshoot equation

```
> PO_EQN := PO = 100*exp(-zeta*Pi/sqrt(1-zeta^2)):
  PO_EQN;
```

$$PO = 100\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

Control design specifications

```
> CNTRL_SPECS := {t[p] = 0.02, PO = 10, p[0] = 0.125}:
  CNTRL_SPECS;
```

$$\{t_p = 0.02, PO = 10, p_0 = 0.125\}$$

Minimum damping ratio required to meet overshoot specification.

```
> temp := solve(PO_EQN,zeta):
  ZETA_SPEC := zeta = temp:
  ZETA_SPEC;
```

$$\zeta = -\ln\left(\frac{PO}{100}\right)\sqrt{\frac{1}{\ln\left(\frac{PO}{100}\right)^2 + \pi^2}}$$

Natural frequency required to meet peak time and overshoot specifiations.

```
> W0_SPEC := omega[0] = solve( TP_EQN, omega[0] ):
  W0_SPEC;
```

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Evaluate the damping ratio needed.

```
> ZETA_SPEC_VAL := evalf(subs(CNTRL_SPECS,ZETA_SPEC)):
  lhs(ZETA_SPEC_VAL) = evalf(rhs(ZETA_SPEC_VAL),3);
```

$$\zeta = 0.591$$

Evaluate the natural frequency needed

```
> W0_SPEC_VAL :=
  evalf(subs(ZETA_SPEC_VAL,CNTRL_SPECS,W0_SPEC)):
  lhs(W0_SPEC_VAL) = evalf(rhs(W0_SPEC_VAL),4)*Unit(rad/s);
```

$$\omega_0 = 194.8 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Given the damping ratio and natural frequency, the PIV gains needed to attain the specified peak time and overshoot requirements are

```
> KP_VAL := k[p] =
  subs(ZETA_SPEC_VAL,W0_SPEC_VAL,MDL_PARAM,CNTRL_SPECS,kp_sy
  mb):
  lhs(KP_VAL) = evalf(rhs(KP_VAL),4)*Unit(A/m);
```

$$k_p = 151.1 \left[\frac{A}{m}\right]$$

```
> KI_VAL := k[i] =
  subs(ZETA_SPEC_VAL,W0_SPEC_VAL,MDL_PARAM,CNTRL_SPECS,ki_sy
  mb):
  lhs(KI_VAL) = evalf(rhs(KI_VAL),3)*Unit(A/m/s);
```

$$k_i = 18.9 \left[\frac{A}{m\,s}\right]$$

```
> KV_VAL := k[v] =
  subs(ZETA_SPEC_VAL,W0_SPEC_VAL,MDL_PARAM,CNTRL_SPECS,kv_sy
  mb):
  lhs(KV_VAL) = evalf(rhs(KV_VAL),3)*Unit(A*s/m);
```

$$k_v = 0.917 \left[\frac{A\,s}{m}\right]$$

```
>
```

EK-C

VİNÇ KOLU ALT SİSTEMİNE AİT .mws MODELLEME DOSYASI

Dynamic Equations for the 3-DOF Crane Jib System

URL: http://www.quanser.com

NOTE: This worksheet presents the dynamic equations modelling the jib on the 3D crane system.

Description

- This worksheet presents the dynamic equations modelling a single pendulum gantry mounted on a linear cart or trolley.
- Specifically, this worksheet is used to derive the state-space matrices for the **Jib** system on Quanser's **3D Crane** experiment
- The system has 2-Degrees-Of-Freedom (DOF) for motions in a two-dimensional plane.
- The Lagrange's method is used to obtain the dynamic model of the system.

The ***Quanser_Tools*** Package

- The *Quanser_Tools* module defines generic procedures and data in relation to determining the state-space representation of all the Quanser experiments. Specifically, this means deriving and solving the Lagrange's equations of the Quanser systems.
- The *quanser* repository containing the *Quanser_Tools* package is implemented in the 2 following files: *quanser.ind* and *quanser.lib*. If these two files are not readily available, they can be generated by executing the Maple worksheet titled: *quanser_tools.mws*.
- **To install** the *Quanser_Tools* package, copy the two files *quanser.ind* and *quanser.lib* into a directory of your choice, like for example: "C:\Program Files\Quanser\Maple Repository".
- **To use** the *Quanser_Tools* package in a Maple worksheet, add the path to its disk location to the Maple global variable *libname*. For example, this can be achieved by the following Maple command:
  libname := *"C:/Program Files/Quanser/Maple Repository", libname:*

References

- For additional control challenges offered by the Quanser please visit our website at: www.quanser.com

Worksheet Initialization

```
> restart: interface( imaginaryunit = j ):
> with( LinearAlgebra ):
> libname := "C:/Program Files/Quanser/Maple Repository", ".",
  libname:
> with( Quanser_Tools );
```

[*HTM*, *deriveA*, *deriveB*, *deriveF*, *kinetic_energy*, *lagrange_equations*, *moment_of_inertia*,

n_norm, potential_energy, write_ABCD_to_Mfile]
environment variable representing the order of series calculations

```
> Order := 2:
```

Notations

Generalized Coordinates: q_i's

The generalized coordinates are also called Lagrangian coordinates.

$x_j(t)$ = linear position of the trolley on the 3D crane system

$\gamma(t)$ = gimble γ deflection angle of payload about the vertical: the zero angle [mod 2*pi] is defined when the load is suspended in the perfect downward position.

```
> q := [ x[j](t), gamma(t) ];
```

$$q := [x_j(t), \gamma(t)]$$

Nq = number of Lagrangian coordinates (e.g. here, it is Nq = 2)
Nq is also the number of position states.

```
> Nq := nops( q ):
```

qd = first-order time derivative of the generalized coordinates, e.g. position and angular velocities

```
> qd := map( diff, q, t );
```

$$qd := \left[\frac{d}{dt}x_j(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right]$$

Cartesian Coordinates of the Pendulum's Centre Of Gravity

conventions:

1) $0 < \frac{\partial}{\partial t}x_j$ when facing cart it goes to the right towards the end of the jib.

2) $\gamma = 0$ corresponds to pendulum perfectly vertical, pointing downwards.

3) positive rotation is CW when facing the cart.

x_p = x-coordinate of the payload in absolute Cartesian position

y_p = y-coordinate of the payload in absolute Cartesian position

```
> x[p] := q[1] - l[p] * sin( q[2] );
  y[p] := -l[p] * cos( q[2] );
```

$$x_p := x_j(t) - l_p \sin(\gamma(t))$$

$$y_p := -l_p \cos(\gamma(t))$$

xd_p = x-coordinate of the SPG's COG absolute Cartesian velocity

yd_p = y-coordinate of the SPG's COG absolute Cartesian velocity

```
> xd[p] := diff( x[p], t );
  yd[p] := diff( y[p], t );
```

$$xd_p := \left(\frac{d}{dt}x_j(t)\right) - l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)$$

$$yd_p := l_p \sin(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)$$

State-Space Variables

- The chosen states should at least include the generalized coordinates and their first-time derivatives.
- X is the state vector.
- In the state vector X: Lagrangian coordinates are first, followed by their first-time derivatives, and finally any other states, as required.

Substitution sets for the states (to obtain time-independent state equations).

```
> subs_Xq := { seq( q[i] = X[i], i=1..Nq ) };
  subs_Xqd := { seq( qd[i] = X[i+Nq], i=1..Nq ) };
```

$$subs\_Xq := \{x_f(t) = X_1, \gamma(t) = X_2\}$$

$$subs\_Xqd := \{\frac{d}{dt} x_f(t) = X_3, \frac{d}{dt} \gamma(t) = X_4\}$$

Substitution set for the input(s):
set the input to be the current applied to the jib motor

```
> subs_U := { I[m,j] = U[1] };
```

$$subs\_U := \{I_{m, J} = U_1\}$$

set the input to be the cart's driving force: F_c (if not expressed as a function of the motor current)

```
> #subs_U := { F[c] = U[1] }:
```

Nu = number of inputs; U = input (row) vector (e.g. U = [I[m]])

```
> Nu := nops( subs_U ):
```

substitution set for the position states' second time derivatives

```
> subs_Xqdd := { seq( diff( q[i], t$2 ) =  Xd[i+Nq], i=1..Nq
  ) };
```

$$subs\_Xqdd := \{\frac{d^2}{dt^2} x_f(t) = Xd_3, \frac{d^2}{dt^2} \gamma(t) = Xd_4\}$$

second time derivatives of the position states (written as time-independent variables).
The set of unknowns is obtained from this list to solve the Lagrange's equations of motion.

```
> Xqdd := [ seq( Xd[i+Nq], i=1..Nq ) ];
```

$$Xqdd := [Xd_3, Xd_4]$$

substitution set to linearize the state-space matrices (i.e. A and B)
about the quiescent null state vector (small-displacement theory)

```
> subs_XUzero := { seq( X[i] = 0, i=1..2*Nq ), seq( U[i] =
  0, i=1..Nu ) }:
```

Nx = dim(X) = total number of states (should be greater than or equal to: 2 * Nq)
Ny = chosen number of outputs

```
> Nx := 2 * Nq + 0:
  Ny := Nq:
```

Total Potential and Kinetic Energies of the System

The total potential and kinetic energies are needed to calculate the Lagragian of the system.

Total Potential Energy: V_T

The total potential energy can be expressed in terms of the generalized coordinates alone.

V[e] = Total Elastic Potential Energy of the system

```
> V[e] := 0:
```

V[g] = Total Gravitational Potential Energy of the system.

```
> V[g] := potential_energy( 'gravity', m[p], g, y[p] );
```

$$V_g := -m_p\, g\, l_p \cos(\gamma(t))$$

V[T] = Total Potential Energy of the system

```
> V[T] := simplify( V[g] + V[e] );
```

$$V_T := -m_p\, g\, l_p \cos(\gamma(t))$$

Total Kinetic Energy: T_T

The total kinetic energy can be expressed in terms of the generalized coordinates and their first-time derivatives.

T_{t1} = translational kinetic energy of the motorized trolley

$m_{trolley}$ = mass of the trolley

```
> Tt[1] := kinetic_energy( 'translation', m[trolley], qd[1] );
```

$$Tt_1 := \frac{1}{2} m_{trolley} \left(\frac{d}{dt} x_I(t)\right)^2$$

The cart's directions of translation and rotation are orthogonal.

T_{r1} = kinetic energy due to rotation tied to the motorized cart

J_ψ = equivalent moment of inertia acting on the jib motor

```
> Tr[1] := kinetic_energy( 'rotation', J[psi], diff(psi[m](t),t));
```

$$Tr_1 := \frac{1}{2} J_\psi \left(\frac{d}{dt} \psi_m(t)\right)^2$$

Motor angle and linear distance relationship.

$K_{g,j}$ = gear ratio of jib motor

$r_{j,pulley}$ = pulley radius

```
> REL_XJ_TO_PSI := diff(psi[m](t),t) = K[g,j] * qd[1] / r[j,pulley]:
  REL_XJ_TO_PSI;
```

$$\frac{d}{dt} \psi_m(t) = \frac{K_{g,I} \left(\frac{d}{dt} x_I(t)\right)}{r_{I,pulley}}$$

Redefine rotation kinetic energy such that it is with respect to the trolley linear distance.

```
> Tr[1] := subs(REL_XJ_TO_PSI,Tr[1]);
```

$$Tr_1 := \frac{1}{2} \frac{J_\psi K_{g,I}^2 \left(\frac{d}{dt} x_I(t)\right)^2}{r_{I,pulley}^2}$$

The maximum linear velocity of the trolley is about 0.125 m/s. Using the 3D crane parameters, the : $\frac{J_\psi K_{g,j}^2}{r_{mp}^2} < 0.24$ kg $< M_c$

Hence, the rotational kinetic energy (on the HFLC) can be neglected:

```
> #Tr[1] := 0;
```

The pendulum motion is composed of one rotation and one translation, both directions are orthogonal.

Tr[2] = pendulum rotational kinetic kinergy

```
> Tr[2] := kinetic_energy( 'rotation', J[gamma], qd[2] );
```

$$Tr_2 := \frac{1}{2} J_\gamma \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2$$

$\frac{\partial}{\partial t}\gamma$ = pendulum absolute angular velocity

v[p] = pendulum cartesian velocity (magnitude)

Tt[2] = pendulum translational kinetic kinergy

```
> v[p] := n_norm( [ xd[p], yd[p] ], 2 ):
  Tt[2] := kinetic_energy( 'translation', m[p], v[p] );
```

$$Tt_2 := \frac{1}{2} m_p \left(\left(\left(\frac{d}{dt}x_I(t)\right) - l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\right)^2 + l_p^2 \sin(\gamma(t))^2 \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2\right)$$

T_T = Total Kinetic Energy of the system initialization:

```
> T[T] := Tt[1] + Tt[2] + Tr[1] + Tr[2]:
> T[T] := collect( T[T], diff );
```

$$T_T := \left(\frac{1}{2} m_{trolley} + \frac{1}{2} m_p + \frac{1}{2} \frac{J_\psi K_{g,I}^2}{r_{I,pulley}^2}\right)\left(\frac{d}{dt}x_I(t)\right)^2 - m_p l_p \cos(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\left(\frac{d}{dt}x_I(t)\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} m_p (l_p^2 \cos(\gamma(t))^2 + l_p^2 \sin(\gamma(t))^2) + \frac{1}{2} J_\gamma\right)\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2$$

Generalized Forces: Q_i's

The non-conservative forces corresponding to the generalized coordinates are: F_c and the viscous damping forces, where

F_j = linear force generated by the motorized trolley.

B_γ = pendulum viscous friction torque coefficient (a.k.a. viscous damping)

B_ψ = trolley viscous damping force coefficient

Both viscous dampings are neglected

```
> B[psi] := 0:
  B[gamma] := 0:
```

Q[i] = generalized force applied on generalized coordinate q[i]

the Coulomb friction is neglected, as well as the force due to the pendulum and acting on the linear cart

```
> Q[1] := F[j] - B[psi] * qd[1];
```

$$Q_1 := F_I$$

```
> Q[2] := - B[gamma] * qd[2];
```

$$Q_2 := 0$$

F_j = Linear force produced by the motor at the motor pinion: cart driving force

```
> F[j] := eta[g,j] * K[g,j] * eta[m,j] * K[t,j] * I[m,j] /
  r[j,pulley];
```

$$F_I := \frac{\eta_{g,I} K_{g,I} \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}}{r_{I,pulley}}$$

```
> Q := [ seq( Q[i], i=1..Nq ) ];
```

$$Q := \left[\frac{\eta_{g,I} K_{g,I} \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}}{r_{I,pulley}}, 0 \right]$$

Euler-Lagrange's Equations

For a N-DOF system, the Lagrange's equations can be written:

$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial qdot_i} L\right)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_i} L\right) = Q_i$ for $i = 1$ through N

where:

Q_i's are special combinations of external forces and called the *generalized forces,*

$q_1, ..., q_N$, are N independent coordinates chosen to describe the system and called the *generalized coordinates,*

and L is the *Lagrangian* of the system.

L is defined by:

$L = T - U$

where T is the total kinetic energy of the system and U the total potential energy of the system.

```
> EOM_orig := lagrange_equations( T[T], V[T], q, Q ):
```

this is to display the EOM's

```
> EOM_orig := collect( EOM_orig, { seq( diff( q[i], t$2 ),
  i=1..Nq ), seq( diff( q[i], t ), i=1..Nq ), seq( q[i],
  i=1..Nq ) } );
```

$$EOM\_orig := \left[m_p\, l_p \sin(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2 - \frac{(-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 - m_p\, r_{I,pulley}^2 - J_\psi K_{g,I}^2)\left(\frac{d^2}{dt^2}x_I(t)\right)}{r_{I,pulley}^2} - m_p\, l_p \cos(\gamma(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\right) = \frac{\eta_{g,I} K_{g,I} \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}}{r_{I,pulley}}, \right.$$

$$-m_p\, l_p \cos(\gamma(t))\left(\frac{d^2}{dt^2} x_I(t)\right) + (m_p\, l_p^{\,2} + J_\gamma)\left(\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t)\right) + m_p\, g\, l_p \sin(\gamma(t)) = 0 \Bigg]$$

Express the Euler-Lagrange equations of motion as functions of the states:
1) substitute (i.e. name) the acceleration states first!
2) then substitute the velocity states!
3) and only after, the position states, and the inputs!

```
> EOM_states := subs( subs_Xqd, subs( subs_Xqdd, EOM_orig ) ):
> EOM_states := subs( subs_Xq, subs_U, EOM_states );
```

$$EOM\_states := \Bigg[$$

$$m_p\, l_p \sin(X_2)\, X_4^{\,2} - \frac{(-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^{\,2} - m_p\, r_{I,pulley}^{\,2} - J_\psi\, K_{g,I}^{\,2})\, Xd_3}{r_{I,pulley}^{\,2}} - m_p\, l_p \cos(X_2)\, Xd_4 =$$

$$\frac{\eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I}\, U_1}{r_{I,pulley}}, -m_p\, l_p \cos(X_2)\, Xd_3 + (m_p\, l_p^{\,2} + J_\gamma)\, Xd_4 + m_p\, g\, l_p \sin(X_2) = 0 \Bigg]$$

Linearization in the EOM's of the Trigonometric Functions

Linearization of the equations of motion around the quiescent point of operation (in order to solve them).
Here, linearization around the zero angles, i.e. for small-amplitude oscillations.
Linearization around: alpha0 = 0, and alpha_dot0 = 0

```
> EOM_ser := EOM_states:
```

Generalized series expansions of the trigonometric functions is used (for small angles).

```
> for i from 1 to Nq do
    EOM_ser[i] := subsop( 1 = convert( series( op( 1,
  EOM_ser[i] ), X[2] ), polynom ), EOM_ser[i] );
    EOM_ser[i] := simplify( EOM_ser[i] );
  end do:
> EOM_ser;
```

$$\Big[(Xd_3\, m_{trolley}\, r_{I,pulley}^{\,2} + Xd_3\, m_p\, r_{I,pulley}^{\,2} + Xd_3\, J_\psi\, K_{g,I}^{\,2} - m_p\, l_p Xd_4\, r_{I,pulley}^{\,2}$$

$$+ m_p\, l_p X_4^{\,2} X_2\, r_{I,pulley}^{\,2}) \Big/ r_{I,pulley}^{\,2} = \frac{\eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I}\, U_1}{r_{I,pulley}},$$

$$-m_p\, l_p Xd_3 + Xd_4\, m_p\, l_p^{\,2} + Xd_4\, J_\gamma + m_p\, g\, l_p X_2 = 0 \Big]$$

Additional Insight: Inertia (or mass) Matrix: Fi

The nonlinear system of equations resulting from the Lagrangian mechanics can be written in the following matrix form:
F(q) . qdd + G(q, qd) . qd + H(q) . q = L(q, qd, u)

F, G, and H are called, respectively, the mass, damping, and stiffness matrices.
They are symmetric in form.
The inertia (a.k.a. mass) matrix, F, gives indications regarding the coupling existing in the system.

```
> Fi := Matrix( Nq, Nq ):
> for i from 1 to Nq do
    for k from 1 to Nq do
      Fi[ i, k ] := simplify( diff( op( 1, EOM_states[i] ),
  Xd[k+Nq] ) );
      Fi[ i, k ] := collect( combine( Fi[ i, k ], trig ),
  cos );
    end do;
  end do:
> 'F[i]' = Fi;
```

$$F_i = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2 + J_\psi\, K_{g,I}^2}{r_{I,pulley}^2} & -m_p\, l_p \cos(X_2) \\ -m_p\, l_p \cos(X_2) & m_p\, l_p^2 + J_\gamma \end{bmatrix}$$

Linearization of the inertia matrix for small-displacements

```
> Fi_lin := Matrix( Nq, Nq ):
> for i from 1 to Nq do
    for k from 1 to Nq do
      Fi_lin[ i, k ] := Fi[ i, k ];
      Fi_lin[ i, k ] := convert( series( Fi_lin[ i, k ], X[
  2 ] ), polynom );
      Fi_lin[ i, k ] := subs( subs_XUzero, Fi_lin[ i, k ]
  );
    end do;
  end do:
> 'F_lin' = Fi_lin;
```

$$F\_lin = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2 + J_\psi\, K_{g,I}^2}{r_{I,pulley}^2} & -m_p\, l_p \\ -m_p\, l_p & m_p\, l_p^2 + J_\gamma \end{bmatrix}$$

Solving the Euler-Lagrange's Equations

To solve the Euler-Lagrange's equations, they need to be linear.

Reverse State Substitution for Pretty Display of the Solved EOM's

only for pretty print

```
> subs_Xq_rev := { seq( X[i] = q[i], i=1..Nq ) }:
  subs_Xqd_rev := { seq( X[i+Nq] = qd[i], i=1..Nq ) }:
> subs_U_rev := { U[1] = I[m,j] }:
  #subs_U_rev := { U[1] = F[j] }:
> eom_collect_list := { seq( diff( q[i], t ), i=1..Nq ),
  seq( q[i], i=1..Nq ), J[psi], J[gamma] };
```

$$eom\_collect\_list := \{x_I(t), \gamma(t), \frac{d}{dt}x_I(t), \frac{d}{dt}\gamma(t), J_\psi, J_\gamma\}$$

Solution to the Non-Linear Equations of Motion

Solve the non-linear form of the equations of motion for the states' second time derivatives

```
> Xqdd_solset_nl := solve( convert( EOM_states, set ),
  convert( Xqdd, set ) ):
> assign( Xqdd_solset_nl );
> for i from 1 to Nq do
    Xd_nl[i+Nq] := simplify( Xd[i+Nq] ):
    unassign( 'Xd[i+Nq]' ):
  end do:
```

pretty display w.r.t. the named system states

```
> for i from 1 to Nq do
    Xd_nl[i+Nq] := simplify( subs( subs_U_rev, subs_Xq_rev,
  subs_Xqd_rev, Xd_nl[i+Nq] ) ):
  end do:
> for i from 1 to Nq do
    diff( qd[i], t ) = collect( Xd_nl[i+Nq],
  eom_collect_list );
  end do;
```

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}x_I(t) = {} & r_{I,pulley}\,(J_\gamma\, r_{I,pulley}\, m_p\, l_p \sin(\gamma(t)) + m_p^2\, l_p^3\, r_{I,pulley} \sin(\gamma(t)))\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2 \Big/ (\\
& (-K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 - J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 - m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma - m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2\\
& - m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 + m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 \cos(\gamma(t))^2) + r_{I,pulley}\,(\\
& m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}\, g \sin(\gamma(t)) \cos(\gamma(t)) - m_p\, l_p^2\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}\\
& - J_\gamma\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}) \Big/ ((-K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 - J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi\\
& + (-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 - m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma - m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2 - m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2\\
& + m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 \cos(\gamma(t))^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t) = {} & m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 \cos(\gamma(t)) \sin(\gamma(t)) \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2 \Big/ ((-K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 - J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi\\
& + (-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 - m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma - m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2 - m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2\\
& + m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 \cos(\gamma(t))^2) + m_p\, l_p\,(m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, g \sin(\gamma(t))\\
& + m_p\, r_{I,pulley}^2\, g \sin(\gamma(t)) + \sin(\gamma(t))\, g\, K_{g,I}^2\, J_\psi - r_{I,pulley} \cos(\gamma(t))\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}\\
&) \Big/ ((-K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 - J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (-m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 - m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma\\
& - m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2 - m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 + m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2 \cos(\gamma(t))^2)
\end{aligned}$$

Solution to the Linearized EOM's

Solve the linear form of the equations of motion for the states' second time derivatives

```
> Xqdd_solset_ser := solve( convert( EOM_ser, set ),
  convert( Xqdd, set ) ):
> assign( Xqdd_solset_ser );
```

Moreover, for small angles

```
> subs_avsq_list := { X[Nq+2]^2 = 0 }:
> for i from 1 to Nq do
    Xd[i+Nq] := subs( subs_avsq_list, Xd[i+Nq] );
  end:
```

pretty display w.r.t. the named system states

```
> for i from 1 to Nq do
    diff( qd[i], t ) = collect( subs( subs_U_rev,
  subs_Xq_rev, subs_Xqd_rev, Xd[i+Nq] ), eom_collect_list
  );
  end do;
```

$$\frac{d^2}{dt^2}x_f(t) = -\frac{g\, m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2\, \gamma(t)}{(K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2} - \frac{r_{I,pulley}\,(-m_p\, l_p^2\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I} - J_\gamma\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I})}{(K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\gamma(t) = -\frac{m_p\, l_p\,(m_p\, r_{I,pulley}^2\, g + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, g + g\, K_{g,I}^2\, J_\psi)\, \gamma(t)}{(K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2} + \frac{m_p\, l_p\, \eta_{g,I} K_{g,I}\, \eta_{m,I} K_{t,I} I_{m,I}\, r_{I,pulley}}{(K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2)\, J_\psi + (m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2 + m_p\, r_{I,pulley}^2)\, J_\gamma + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2}$$

Determine the System State-Space Matrices: A, B, C, and D

```
> A_ss := Matrix( Nx, Nx ):
> A_ss := deriveA( Xqdd, A_ss, Nq, subs_XUzero ): 'A' = A_ss;
```

$A =$

$[0, 0, 1, 0]$

$[0, 0, 0, 1]$

$$\left[0, -\frac{g\, m_p^2\, l_p^2\, r_{I,pulley}^2}{m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, m_p\, l_p^2 + m_{trolley}\, r_{I,pulley}^2\, J_\gamma + m_p\, r_{I,pulley}^2\, J_\gamma + J_\psi K_{g,I}^2\, m_p\, l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2\, J_\psi}\right.$$

$$, 0, 0 \Big]$$

$$\left[0, -\frac{m_p l_p g (m_{trolley} r_{I,pulley}^2 + m_p r_{I,pulley}^2 + J_\psi K_{g,I}^2)}{m_{trolley} r_{I,pulley}^2 m_p l_p^2 + m_{trolley} r_{I,pulley}^2 J_\gamma + m_p r_{I,pulley}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,I}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2 J_\psi} \right.$$

$$, 0, 0 \Big]$$

```
> #lprint( A_ss );
> B_ss := Matrix( Nx, Nu ):
> B_ss := deriveB( Xqdd, B_ss, Nq, subs_XUzero ): 'B' = B_ss;
```

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r_{I,pulley} \eta_{g,I} K_{g,I} \eta_{m,I} K_{t,I} (m_p l_p^2 + J_\gamma)}{m_{trolley} r_{I,pulley}^2 m_p l_p^2 + m_{trolley} r_{I,pulley}^2 J_\gamma + m_p r_{I,pulley}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,I}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2 J_\psi} \\ \frac{m_p l_p \eta_{g,I} K_{g,I} \eta_{m,I} K_{t,I} r_{I,pulley}}{m_{trolley} r_{I,pulley}^2 m_p l_p^2 + m_{trolley} r_{I,pulley}^2 J_\gamma + m_p r_{I,pulley}^2 J_\gamma + J_\psi K_{g,I}^2 m_p l_p^2 + J_\gamma K_{g,I}^2 J_\psi} \end{bmatrix}$$

```
> #lprint( B_ss );
> C_ss := IdentityMatrix( Ny, Nx );
```

$$C\_ss := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> #lprint( C_ss );
> D_ss := Matrix( Ny, Nu, 0 );
```

$$D\_ss := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> #lprint( D_ss );
```

Write A, B, C, and D to a Matlab file

Save the state-space matrices A, B, C and D to a MATLAB file.

```
> Matlab_File_Name := "CRANE_JIB_ABCD_eqns.m":
```

substitution set containing a notation consistent with that used in the MATLAB design script(s)

```
> Matlab_Notations := { m[p] = mp, l[p] = lp, m[trolley] =
  m_trolley, J[psi] = J_psi, J[gamma] = J_gamma, K[t,j] = Kt_j,
  eta[m,j] = eff_m_j, K[g,j] = Kg_j, eta[g,j] = eff_g_j,
  r[j,pulley] = r_j_pulley, B[psi] = B_psi, B[gamma] = B_gamma
  }:
> Experiment_Name := "3D CRANE TROLLEY/PENDULUM MODEL":
> write_ABCD_to_Mfile( Matlab_File_Name, Experiment_Name,
  Matlab_Notations, A_ss, B_ss, C_ss, D_ss );
```

Procedure Printing

EK-D

KULE ALT SİSTEMİNE AİT .mws MODELLEME DOSYASI

Dynamic Equations for the Tower of the 3-DOF Crane

URL: http://www.quanser.com

NOTE: This worksheet presents the general dynamic equations modelling a Double Inverted Pendulum mounted on a rotary arm.

Description

- This worksheet presents the general dynamic equations modelling a rotary pendulum gantry system.
- Specifically, this worksheet is used to derive the state-space matrices for the **Tower** system on Quanser's **3D Crane** experiment.
- The resulting system has 3-Degrees-Of-Freedom (DOF) for motions in a three-dimensional space.
- The Lagrange's method is used to obtain the dynamic model of the system.

The *Quanser_Tools* Package

- The *Quanser_Tools* module defines generic procedures and data in relation to determining the state-space representation of all the Quanser experiments. Specifically, this means deriving and solving the Lagrange's equations of the Quanser systems.
- The *quanser* repository containing the *Quanser_Tools* package is implemented in the 2 following files: *quanser.ind* and *quanser.lib*. If these two files are not readily available, they can be generated by executing the Maple worksheet titled: *quanser_tools.mws*.
- **To install** the *Quanser_Tools* package, copy the two files *quanser.ind* and *quanser.lib* into a directory of your choice, like for example: "C:\Program Files\Quanser\Maple Repository".
- **To use** the *Quanser_Tools* package in a Maple worksheet, add the path to its disk location to the Maple global variable *libname*. For example, this can be achieved by the following Maple command:
  libname := *"C:/Program Files/Quanser/Maple Repository", libname:*

References

- For additional control challenges offered by the Quanser please visit our website at: www.quanser.com

Worksheet Initialization

```
> restart: interface( imaginaryunit = j ):
> with( LinearAlgebra ):
> libname := "C:/Program Files/Quanser/Maple Repository", ".",
  libname:
```

```
> with( Quanser_Tools );
```

[*HTM*, *deriveA*, *deriveB*, *deriveF*, *kinetic_energy*, *lagrange_equations*, *moment_of_inertia*, *n_norm*, *potential_energy*, *write_ABCD_to_Mfile*]

environment variable representing the order of series calculations

```
> Order := 2:
```

Notations

Generalized Coordinates: q_i's

The generalized coordinates are also called Lagrangian coordinates.

$\theta(t)$ = base joint angle of rotary arm

$\alpha(t)$ = deflection angle of the payload that is perpendicular w.r.t. to the transversal of the rotary arm..

When $\alpha = 0$ the payload line, i.e. pendulum, is in the perfect downward position.

Np = number of links in pendulum

```
> Np := 1:
> q := [ theta(t), alpha(t) ];
```

$$q := [\theta(t), \alpha(t)]$$

Nq = number of Lagrangian coordinates (e.g. here, it is Nq = 3)

Nq is also the number of position states.

```
> Nq := nops( q ):
```

qd = first-order time derivative of the generalized coordinates, e.g. position and angular velocities

```
> qd := map( diff, q, t );
```

$$qd := \left[\frac{d}{dt}\theta(t), \frac{d}{dt}\alpha(t)\right]$$

Transformation Matrices

T_0_1: rotation about the base axis rot($Z0$, θ).

```
> R[theta] := HTM( 'rot', 'Z', q[1] );
```

$$R_\theta := \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_1_2: translation to the trolley along the jib: T_1_2 = trans($X1$, l_j).

```
> T[lj] := HTM( 'trans', l[j], 0, 0 );
```

$$T_{lj} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_j \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_0_2: base coordinate to carriage position: T_0_2 = rot($Z0$, θ)*trans($X1$, lj).

```
> T_0_2 := Multiply( R[theta], T[lj]);
```

$$T\_0\_2 := \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t))\, l_I \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t))\, l_I \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

From trolley position to gimble α deflection: T_2_3 = rot($X2$, α).

```
> R[alpha] := HTM( 'rot', 'X', q[2]);
```

$$R_\alpha := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

From gimble deflection down to payload: T_3_4 = trans($Z3$, $-lp$).

```
> T[h] := HTM( 'trans', 0, 0, -l[p]);
```

$$T_h := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> T_2_4 := Multiply( R[alpha], T[h] );
```

$$T\_2\_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & \sin(\alpha(t))\, l_p \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & -\cos(\alpha(t))\, l_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Base coordinate system to payload: T_0_4.

```
> T_0_4 := Multiply( T_0_2, T_2_4 );
```

$T\_0\_4 :=$

$[\cos(\theta(t)), -\sin(\theta(t))\cos(\alpha(t)), \sin(\theta(t))\sin(\alpha(t)),$
$-\sin(\theta(t))\sin(\alpha(t))\, l_p + \cos(\theta(t))\, l_I]$

$[\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))\cos(\alpha(t)), -\cos(\theta(t))\sin(\alpha(t)),$
$\cos(\theta(t))\sin(\alpha(t))\, l_p + \sin(\theta(t))\, l_I]$

$[0, \sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t)), -\cos(\alpha(t))\, l_p]$

$[0, 0, 0, 1]$

Cartesian Coordinates of the Pendulum's Centre Of Gravity

conventions:

1) $\alpha = 0$ correspond to the payload wire being in the perfect downward position.

2) positive rotation of arm, $0 < \frac{d}{dt}\theta(t)$, is CCW

3) positive rotation of gimble angle, $0 < \frac{d}{dt}\alpha(t)$ is also CCW.

Absolute 3-dimensional Cartesian position: carriage position.

```
> x[1] := T_0_2[1,4];
  y[1] := T_0_2[2,4];
```

```
z[1] := T_0_2[3,4];
```

$$x_1 := \cos(\theta(t))\, l_I$$
$$y_1 := \sin(\theta(t))\, l_I$$
$$z_1 := 0$$

Absolute 3-dimensional Cartesian position: payload position.

```
> x[2] :=  T_0_4[1,4];
  y[2] :=  T_0_4[2,4];
  z[2] :=  T_0_4[3,4];
```

$$x_2 := -\sin(\theta(t))\sin(\alpha(t))\, l_p + \cos(\theta(t))\, l_I$$
$$y_2 := \cos(\theta(t))\sin(\alpha(t))\, l_p + \sin(\theta(t))\, l_I$$
$$z_2 := -\cos(\alpha(t))\, l_p$$

Absolute 3-dimensional Cartesian velocities.

```
> xd[1] := diff( x[1], t );
  yd[1] := diff( y[1], t );
  zd[1] := diff( z[1], t );
  xd[2] := diff( x[2], t );
  yd[2] := diff( y[2], t );
  zd[2] := diff( z[2], t );
```

$$xd_1 := -\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I$$
$$yd_1 := \cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I$$
$$zd_1 := 0$$
$$xd_2 := -\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\sin(\alpha(t))\, l_p - \sin(\theta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) l_p - \sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I$$
$$yd_2 := -\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\sin(\alpha(t))\, l_p + \cos(\theta(t))\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) l_p + \cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I$$
$$zd_2 := \sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) l_p$$

State-Space Variables

- The chosen states should at least include the generalized coordinates and their first-time derivatives.

- X is the state vector.
- In the state vector X: Lagrangian coordinates are first, followed by their first-time derivatives, and finally any other states, as required.

Substitution sets for the states (to obtain time-independent state equations).

```
> subs_Xq := { seq( q[i] = X[i], i=1..Nq ) };
  subs_Xqd := { seq( qd[i] = X[i+Nq], i=1..Nq ) };
```

$$subs\_Xq := \{\theta(t) = X_1, \alpha(t) = X_2\}$$

$$subs\_Xqd := \{\frac{d}{dt}\theta(t) = X_3, \frac{d}{dt}\alpha(t) = X_4\}$$

Control varible is tower motor input current.

```
> subs_U := { I[m,t] = U[1] };
```

$$subs\_U := \{I_{m,t} = U_1\}$$

Nu = number of inputs; U = input (row) vector (e.g. U = [V[m]])

```
> Nu := nops( subs_U ):
```

substitution set for the position states' second time derivatives

```
> subs_Xqdd := { seq( diff( q[i], t$2 ) =  Xd[i+Nq], i=1..Nq
  ) };
```

$$subs\_Xqdd := \{\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = Xd_3, \frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = Xd_4\}$$

second time derivatives of the position states (written as time-independent variables).
The set of unknowns is obtained from this list to solve the Lagrange's equations of motion.

```
> Xqdd := [ seq( Xd[i+Nq], i=1..Nq ) ];
```

$$Xqdd := [Xd_3, Xd_4]$$

substitution set to linearize the state-space matrices (i.e. A and B)
about the quiescent null state vector (small-displacement theory)

```
> subs_XUzero := { seq( X[i] = 0, i=1..2*Nq ), seq( U[i] =
  0, i=1..Nu ) }:
```

Nx = dim(X) = total number of states (should be greater than or equal to: 2 * Nq)
Ny = chosen number of outputs

```
> Nx := 2 * Nq + 0:
  Ny := Nq:
```

Total Potential and Kinetic Energies of the System

The total potential and kinetic energies are needed to calculate the Lagrangian of the system.

Total Potential Energy: V_T

The total potential energy can be expressed in terms of the generalized coordinates alone.

V[e] = Total Elastic Potential Energy of the system

```
> V[e] := 0:
```

V_g = potential energy of payload.

```
> V[g] := potential_energy( 'gravity', m[p], g, z[2] );
```

$$V_g := -m_p\, g \cos(\alpha(t))\, l_p$$

V[T] = Total Potential Energy of the system

```
> V[T] := simplify( V[g] + V[e] );
```

$$V_T := -m_p\, g \cos(\alpha(t))\, l_p$$

Total Kinetic Energy: T_T

The total kinetic energy can be expressed in terms of the generalized coordinates and their first-time derivatives.

T_{r1} = kinetic energy due to rotation of arm

J_m = moment of inertia of base motor, rotary arm, and the carriage.

```
> Tr[1] := kinetic_energy( 'rotation', J[theta], qd[1] );
```

$$Tr_1 := \frac{1}{2} J_\theta \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2$$

Kinetic energy from the rotation of the payload about the α deflection gimble.

```
> Tr[2] := kinetic_energy( 'rotation', J[alpha],qd[2] );
```

$$Tr_2 := \frac{1}{2} J_\alpha \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2$$

v[2] = cartesian velocity of the mass (magnitude)

Tt[2] = translational kinetic kinergy of the mass

```
> v := n_norm( [ xd[2], yd[2], zd[2] ], 2 ):
  Tt := simplify( kinetic_energy( 'translation', m[p], v) );
```

$$Tt := \frac{1}{2} m_p \left(2\cos(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) l_p \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I + \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_I^2 + \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_p^2 - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_p^2 \cos(\alpha(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 l_p^2\right)$$

Total kinetic energy of 3D Crane tower subsystem

```
> T[T] := Tr[1] + Tr[2] + Tt;
  T[T] := collect( T[T], diff ):
```

$$T_T := \frac{1}{2} J_\theta \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 + \frac{1}{2} J_\alpha \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 + \frac{1}{2} m_p \left(2\cos(\alpha(t)) \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) l_p \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) l_I + \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_I^2 + \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_p^2 - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 l_p^2 \cos(\alpha(t))^2 + \left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)^2 l_p^2\right)$$

Generalized Forces: Q_i's

The non-conservative forces corresponding to the generalized coordinates are: $\tau_{m,j}$ and the viscous damping forces, where

$\tau_{m,t}$ = torque generated by the tower motor that drives the rotary arm, i.e. jib

B_θ = tower motor viscous friction torque coefficient (a.k.a. viscous damping)

B_α = gimble α deflection viscous friction torque coefficient (a.k.a. viscous damping)

Set viscous dampings to zero to neglect

```
> B[theta] := 0:
  B[alpha]:=0:
```

Q[i] = generalized force applied on generalized coordinate q[i]

```
> Q[1] := tau[m,t] - B[theta] * qd[1];
```

$$Q_1 := \tau_{m,t}$$

```
> Q[2] := - B[alpha] * qd[2];
```

$$Q_2 := 0$$

Torques produced by the motor at the motor pinion (i.e. after the gearbox)

$\tau_{m,t}$ = output torque from tower motor driving rotary arm

```
> tau[m,t] := eta[g,t] * K[g,t] * eta[m,t] * K[t,t] * I[m,t];
```

$$\tau_{m,t} := \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} I_{m,t}$$

```
> Q := [ seq( Q[i], i=1..Nq ) ];
```

$$Q := [\eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} I_{m,t}, 0]$$

Euler-Lagrange's Equations

For a N-DOF system, the Lagrange's equations can be written:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial qdot_i} L\right)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial q_i} L\right) = Q_i \text{ for } i = 1 \text{ through } N$$

where:

Q_i's are special combinations of external forces and called the *generalized forces,*

$q_1, ..., q_N$, are N independent coordinates chosen to describe the system and called the *generalized coordinates,*

and L is the *Lagrangian* of the system.

L is defined by:

$L = T - U$

where T is the total kinetic energy of the system and U the total potential energy of the system.

```
> EOM_orig := lagrange_equations( T[T], V[T], q, Q ):
```

this is to display the EOM's

```
> EOM_orig := collect( EOM_orig, { seq( diff( q[i], t$2 ),
  i=1..Nq ), seq( diff( q[i], t ), i=1..Nq ), seq( q[i],
  i=1..Nq ) } ):
```

Express the Euler-Lagrange equations of motion as functions of the states:

1) substitute (i.e. name) the acceleration states first!

2) then substitute the velocity states!

3) and only after, the position states, and the inputs!

```
> EOM_states := subs( subs_Xqd, subs( subs_Xqdd, EOM_orig ) ):
> EOM_states := subs( subs_Xq, subs_U, EOM_states ):
```

Linearization in the EOM's of the Trigonometric Functions

Linearization of the equations of motion around the quiescent point of operation (in order to solve them).

Here, linearization around the zero angles, i.e. for small-amplitude oscillations.

Linearization around: alpha0 = 0, and alpha_dot0 = 0

```
> EOM_ser := EOM_states:
```

Generalized series expansions of the trigonometric functions is used (for small angles).

```
> for i from 1 to Nq do
```

```
    for k from 1 to 3 do
      EOM_ser[i] := subsop( 1 = convert( series( op( 1,
  EOM_ser[i] ), X[ k+1 ] ), polynom ), EOM_ser[i] );
    end do:
    EOM_ser[i] := simplify( EOM_ser[i] );
  end do:
> EOM_ser;
```

$$[Xd_3 J_\theta + Xd_3 m_p l_I^2 + m_p Xd_4 l_p l_I + 2 m_p l_p^2 X_4 X_2 X_3 = \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} U_1,$$
$$m_p l_p l_I Xd_3 + Xd_4 J_\alpha + Xd_4 m_p l_p^2 + m_p g l_p X_2 = 0]$$

Additional Insight: Inertia (or mass) Matrix: Fi

The nonlinear system of equations resulting from the Lagrangian mechanics can be written in the following matrix form:

F(q) . qdd + G(q, qd) . qd + H(q) . q = L(q, qd, u)

F, G, and H are called, respectively, the mass, damping, and stiffness matrices.

They are symmetric in form.

The inertia (a.k.a. mass) matrix, F, gives indications regarding the coupling existing in the system.

```
> Fi := Matrix( Nq, Nq ):
> for i from 1 to Nq do
    for k from 1 to Nq do
      Fi[ i, k ] := simplify( diff( op( 1, EOM_states[i] ),
  Xd[k+Nq] ) );
      Fi[ i, k ] := collect( combine( Fi[ i, k ], trig ),
  cos );
    end do;
  end do:
> 'F[i]' = Fi;
```

$$F_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_p l_p^2 - \frac{1}{2} m_p l_p^2 \cos(2 X_2) + J_\theta + m_p l_I^2 & m_p \cos(X_2) l_p l_I \\ m_p \cos(X_2) l_p l_I & J_\alpha + m_p l_p^2 \end{bmatrix}$$

Linearization of the inertia matrix for small-displacements

```
> Fi_lin := Matrix( Nq, Nq ):
> for i from 1 to Nq do
    for k from 1 to Nq do
      Fi_lin[ i, k ] := Fi[ i, k ];
      Fi_lin[ i, k ] := convert( series( Fi_lin[ i, k ], X[
  k ] ), polynom );
      Fi_lin[ i, k ] := subs( subs_XUzero, Fi_lin[ i, k ]
  );
    end do;
  end do:
> 'F_lin' = Fi_lin;
```

$$F\_lin = \begin{bmatrix} J_\theta + m_p l_I^2 & m_p l_p l_I \\ m_p l_p l_I & J_\alpha + m_p l_p^2 \end{bmatrix}$$

Solving the Euler-Lagrange's Equations

Reverse State Substitution for Pretty Display of the Solved EOM's

only for pretty print

```
> subs_Xq_rev := { seq( X[i] = q[i], i=1..Nq ) }:
  subs_Xqd_rev := { seq( X[i+Nq] = qd[i], i=1..Nq ) }:
> subs_U_rev := { U[1] = I[m,t] };
```

$$subs\_U\_rev := \{U_1 = I_{m,t}\}$$

```
> eom_collect_list := { seq( diff( q[i], t ), i=1..Nq ),
  seq( q[i], i=1..Nq ), J[theta], J[alpha] };
```

$$eom\_collect\_list := \{J_\theta, J_\alpha, \theta(t), \alpha(t), \frac{d}{dt}\theta(t), \frac{d}{dt}\alpha(t)\}$$

Solution to the Non-Linear Equations of Motion

Solve the non-linear form of the equations of motion for the states' second time derivatives

```
> Xqdd_solset_nl := solve( convert( EOM_states, set ),
  convert( Xqdd, set ) ):
> assign( Xqdd_solset_nl );
> for i from 1 to Nq do
    Xd_nl[i+Nq] := simplify( Xd[i+Nq] ):
    unassign( 'Xd[i+Nq]' ):
  end do:
```

pretty display w.r.t. the named system states

```
> for i from 1 to Nq do
   Xd_nl[i+Nq] := simplify( subs( subs_U_rev, subs_Xq_rev,
  subs_Xqd_rev, Xd_nl[i+Nq] ) ):
  end do:
> for i from 1 to Nq do
    diff( qd[i], t ) = collect( Xd_nl[i+Nq],
  eom_collect_list );
  end do:
```

Solution to the Linearized EOM's

Solve the linear form of the equations of motion for the states' second time derivatives

```
> Xqdd_solset_ser := solve( convert( EOM_ser, set ),
  convert( Xqdd, set ) ):
> assign( Xqdd_solset_ser );
```

Moreover, for small angles

```
> subs_avsq_list := { X[Nq+2]^2 = 0, X[Nq+3]^2 = 0 }:
```

```
> for i from 1 to Nq do
    Xd[i+Nq] := subs( subs_avsq_list, Xd[i+Nq] );
  end:
```

pretty display w.r.t. the named system states

```
> for i from 1 to Nq do
    diff( qd[i], t ) = collect( subs( subs_U_rev,
  subs_Xq_rev, subs_Xqd_rev, Xd[i+Nq] ), eom_collect_list
  );
  end do:
```

Determine the System State-Space Matrices: A, B, C, and D

```
> A_ss := Matrix( Nx, Nx ):
> A_ss := deriveA( Xqdd, A_ss, Nq, subs_XUzero ):
> 'A' = A_ss;
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{m_p^2 \, l_p^2 \, l_I \, g}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_I^2 J_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{m_p l_p g \,(m_p l_I^2 + J_\theta)}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_I^2 J_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B_ss := Matrix( Nx, Nu ):
> B_ss := deriveB( Xqdd, B_ss, Nq, subs_XUzero ):
> 'B' = B_ss;
```

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} (J_\alpha + m_p l_p^2)}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_I^2 J_\alpha} \\ -\dfrac{m_p l_p \eta_{g,t} K_{g,t} \eta_{m,t} K_{t,t} l_I}{J_\alpha J_\theta + J_\theta m_p l_p^2 + m_p l_I^2 J_\alpha} \end{bmatrix}$$

```
> C_ss := IdentityMatrix( Ny, Nx ):
  'C' = C_ss;
```

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> D_ss := Matrix( Ny, Nu, 0 ):
  'D' = D_ss;
```

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Write A, B, C, and D to a Matlab file

Save the state-space matrices A, B, C and D to a MATLAB file.

```
> Matlab_File_Name := "CRANE_TOWER_ABCD_eqns.m":
```

substitution set containing a notation consistent with that used in the MATLAB design script(s)

```
> Matlab_Notations := {m[p] = mp, l[p] = lp, l[j] = lj,
  J[theta] = J_theta, J[alpha]=J_alpha, K[t,t] = Kt_t, eta[m,t]
  = eff_m_t, K[g,t] = Kg_t, eta[g,t] = eff_g_t }:
> Experiment_Name := "3D CRANE":
> write_ABCD_to_Mfile( Matlab_File_Name, Experiment_Name,
  Matlab_Notations, A_ss, B_ss, C_ss, D_ss );
```

Procedure Printing

default:

```
> interface( verboseproc = 1 );
> eval( lagrange_equations ):
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Gökhan AKÇA

Doğum Tarihi ve Yeri : MANİSA-23.06.1989

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

E-posta : gokhanakca89@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek Lisans	Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Elektronik Mühendisliği	Uludağ Üniversitesi	2011
Lise	Fen Bilimleri	Soma Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
Nisan 2012 - Eylül 2013	Digiturk	Yazılım Test Uzmanı

Bildiri

1. **TOK2013 - Sabit Dereceli Dayanıklı H-Sonsuz Kontrolcü Tasarımı**

ÖDÜLLERİ

1. **Uludağ Üniversitesi Elektronik Mühendisliği Bölüm Birincisi**