**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BASİT MESNETLENMİŞ, LAMİNE VE ÇİFT EĞRİLİKLİ KOMPOZİT BİR LEVHANIN STATİK MUKAVEMET ANALİZLERİ

Makine Müh. Sertan AYDIN

**FBE Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Ana Bilim Programında Hazırlanan**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Tez Danışmanı:** Yrd. Doç. Dr. İsmail BAYER

**İSTANBUL, 2010**

**İÇİNDEKİLER**

Sayfa

SİMGE LİSTESİ…………………………………………………………..………………… iv

KISALTMA LİSTESİ……………………………………………………..........................vi

ŞEKİL LİSTESİ…………………………………………………………………............... vii

ÇİZELGE LİSTESİ………………………………………………………………………viii

ÖNSÖZ……………………………………………………………………………………ix

ÖZET……………………………………………………………………………………….. x

ABSTRACT………………………………………………………………………………xi

1 GİRİŞ……………………………………………………………………………. 1

2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR…………………………………………………………..3

3 MATERYAL VE METOD………………………………………………………… 5

3.1 Tanelerle Donatılı Kompozit Malzeme………………………………………………..6
3.2 Liflerle Donatılı Kompozit Malzeme…………………………………………………6
3.3 Tabakalı Kompozit Malzeme………………………………………………………6

4 TABAKALARIN ANALİZİ………..……………………………………………7

4.1 Gerilme……………………………………………………………………………...7
4.2 Şekil Değiştirme………………………………………………………..................8
4.3 Hooke Kanunları………………………………………………………………… 9
4.4 Malzeme Modülleri…………………………………………………………………9
4.4.1 Monoklinik Malzeme…………………….....................…………………………10
4.4.2 Ortotropik Malzeme……………………………………………………………10
4.4.3 Enine (Transversely) İzotropik Malzeme…………..……………….................. 10
4.4.4 İzotropik Malzeme……………………………………………………………..10
4.5 Temel Ortotropik Malzeme Tanımları……………………………………………11
4.5.1 Ortotropik Malzemelerde Esneklik Matrisi……………....................................... 11
4.5.2 Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi……………….................................................. 11

5 LAMİNASYON TEORİLERİ……………………………………………………17

5.1 Giriş…………………………………………………….................................. 17
5.2 Klasik Laminasyon Teorisi (CLT)…………………………………….....................19
5.2.1 Birim Yer Değişimleri ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması…………………. 20
5.3 Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT)………………………25
5.3.1 Birim Yer Değişimleri ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması…………………. 27
5.4 Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi………………………………31
5.4.1 Giriş…………………………..………………………………………………... 31
5.4.2 Yer Değiştirme Denklemleri……………………………………………………31
5.4.3 Hareket Denklemlerinin Çıkartılması……………………………………………..32

5.4.3.1 Şekil Değiştirme Enerjisi..…………………………………………………….... 33
5.4.3.2 Dış Kuvvetlerin Yaptığı İş……………………………………………………... 33
5.4.3.3 Kinetik Enerji……………………………….…………………..………………33
5.4.3.4 Nihai Kinetik Enerji Denklemi…………………............................................... 35
5.4.4 Birim Yer Değişimleri Ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması………………… 37
5.4.5 Antisimetrik – Dik Katmanlı (Cross Ply)–Çift Eğrilikli Levha İçin
Kuvvet ve Moment Açılımları……………………………………………………39
5.4.5.1 Kuvvet Bileşenleri……………………………………………………………... 39
5.4.5.2 Eğilme ve Burulma Momenti Bileşenleri……………………………………… 39
5.4.5.3 Yüksek Mertebeli Gerilme Bileşenleri………………………………………… 40
5.4.5.4 Enine Kesme Kuvveti Bileşenleri……….……………………………………...41
5.4.5.5 Yüksek Mertebeli Kayma Bileşenleri…………………………………………..41
5.4.6 Hareket (Euler-Lagrange) Denklemleri…………………………………….... 42
5.4.7 Katsayı Ataması İle Denklemlerin Sadeleştirilmesi…………………................... 46
5.4.7.1 1. Denklem……………………………………………………………………...46
5.4.7.2 2. Denklem……………………………………………………………………...46
5.4.7.3 3. Denklem……………………………………………………………………...47
5.4.7.4 4. Denklem……………………………………………………………………...48
5.4.7.5 5. Denklem……………………………………………………………………...49
6 UYGULAMA…………………………………………………………………….. 50
6.1 Sınır Koşulları…………………………………………………………………..50
6.2 Sınır Koşullarının Denklemlere Dahil Edilmesi………………………………… 52
6.2.1 1.Denklem………………………………………………………………………52
6.2.2 2.Denklem………………………………………………………………………53
6.2.3 3.Denklem………………………………………………………………………54
6.2.4 4. Denklem……………………………………………………………………...55
6.2.5 5. Denklem……………………………………………………………………...56
6.3 Çözüm Denklemi………………………………………………………………57
6.4 Statik Durum İçin [C] Matrisi…………………………………………………..58
6.5 Programlama ve Çözüm……………………………………………….………..61
7 SONUÇ ………………………………………………….............................. 64
KAYNAKLAR…………………………………………………………………………65
ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………………………..67

## SİMGE LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\sigma_x$ | x doğrultusundaki normal gerilme |
| $\sigma_y$ | y doğrultusundaki normal gerilme |
| $\sigma_z$ | z doğrultusundaki normal gerilme |
| $\tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ | Eleman yüzeylerindeki kayma gerilmeleri |
| $\varepsilon_x$ | x doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| $\varepsilon_y$ | y doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| $\varepsilon_z$ | z doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| u | x doğrultusundaki birim yer değişimi |
| v | y doğrultusundaki birim yer değişimi |
| z | z doğrultusundaki birim yer değişimi |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ | Kayma şekil değiştirmeleri |
| E | Elastisite modülü |
| ν | Poisson oranı |
| G | Kayma modülü |
| $[S]$ | Esneklik (compliance) matrisi |
| $S_{ij}$ | Esneklik (compliance) matrisinin elemanları |
| $[Q]$ | katılık (rijitlik) matrisi |
| $Q_{ij}$ | Katılık (rijitlik) matrisinin elemanları |
| $[T]$ | Transformasyon matrisi |
| $[R]$ | Reuter matris |
| $\left[\overline{Q}_{ij}\right]$ | Transformasyona uğramış elemanın indirgenmiş katılık matrisi |
| $\left[\overline{S}_{ij}\right]$ | Transformasyona uğramış elemanın indirgenmiş esneklik matrisi |
| $u_0$ | Orta düzlemin x doğrultusunda yaptığı birim yer değişimi |
| $v_0$ | Orta düzlemin, y doğrultusunda yaptığı birim yer değişimi |
| $w_0$ | Orta düzlemin, z doğrultusunda yaptığı birim yer değişimi |
| $\varepsilon_x^0$ | Orta düzlemde x doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| $\varepsilon_y^0$ | Orta düzlemde y doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| $\gamma_{xy}^0$ | Orta düzlemdeki x-y kayma şekil değiştirmesi |
| $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ | Orta düzlemdeki eğrilikler |
| a, b | Plak elemanın x ve y doğrultusundaki boyutları |
| t | Herbir tabakanın kalınlığı |
| h | Tabakalı plağın toplam kalınlığı |
| $h_0$ | Birinci tabakanın üst yüzeyi |
| $h_1$ | Birinci tabakanın alt yüzeyi |
| $h_{k-1}$ | k. tabakanın üst yüzeyi |
| $h_k$ | k. tabakanın alt yüzeyi |
| $N_x, N_y / N_1, N_2$ | Birim uzunluktaki normal kuvvetler |
| $N_{xy} / N_6$ | Birim uzunluktaki kesme kuvveti |

| | |
|---|---|
| $M_x, M_y / M_1, M_2$ | Birim uzunluktaki eğilme momentleri |
| $M_{xy} / M_6$ | Birim uzunluktaki burulma momentleri |
| $\left[A_{ij}\right]$ | Uzama katılık matrisi |
| $\left[B_{ij}\right]$ | Eğilme uzama arasındaki bağlanma katılık matrisi |
| $\left[D_{ij}\right]$ | Eğilme katılık matrisi |
| $\left[E_{ij}\right], \left[F_{ij}\right], \left[H_{ij}\right]$ | Kalınlığa bağlı yüksek mertebeli katılık matrisleri |
| $q_0$ | Yük |
| $R_1$ | Kabuk elemanın 1 eksenindeki eğrilik yarıçapı |
| $R_2$ | Kabuk elemanın 2 eksenindeki eğrilik yarıçapı |
| $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0$ | Orta düzlemde x ve y doğrultusundaki normal şekil değiştirme |
| $\gamma_{xy}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{zx}^0$ | Orta düzlemdeki kayma şekil değiştirmeleri |
| $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_6$ | 1,2 ve 6 yönlerindeki eğrilikler |
| $P_1, P_2, P_6$ | Yüksek mertebeli gerilme bileşenleri |
| $K_1, K_2$ | Yüksek mertebeli kayma bileşenleri |
| U | Şekil değiştirme enerjisi |
| W | Dış kuvvetlerin yaptığı iş. |
| T | Kinetik enerji ifadesi. |
| $\left[\mathrm{I}_1,\ \mathrm{I}_2,\ \mathrm{I}_3,\ \mathrm{I}_4,\ \mathrm{I}_5\right]$ | Atalet terimleri |

## KISALTMA LİSTESİ

| | |
|---|---|
| CLPT | Clasical Lamination Plate Theory – Klasik Laminasyon Plaka Teorisi |
| FSDT | First Order Shear Deformation Theory – Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi |
| TSDT | Third Order Shear Deformation Theory - Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi |
| SS3 | Simply Supported – Basit Mesnetlenmiş (Her Kenarı) |

## ŞEKİL LİSTESİ


| | | |
|---|---|---|
| Şekil 4.1 | Sonsuz küçük kübik elemandaki gerilmeler...………………………………… | 7 |
| Şekil 4.2 | Çok küçük bir alanda x-y düzleminde normal ve kayma şekil değiştirmeleri (Kaw, 1997)...…………………………………………….. | 8 |
| Şekil 4.3 | Açılı tabakalarda global ve yerel eksen takımları….………………………… | 13 |
| Şekil 5.1 | Tabakalı kompozit kabuklarda fiber ve matris malzemelerin görünümü……. | 17 |
| Sekil 5.2 | Klasik, birinci mertebeden ve üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorilerine göre enine normallerin deformasyonları…………… | 18 |
| Sekil 5.3 | Klasik laminasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları............ | 19 |
| Sekil 5.4 | Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları………………………………………………. | 25 |
| Sekil 5.5 | Üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları.…………………………………………… | 31 |
| Şekil 6.1 | Çift eğrilikli bir levhada kuvvetlerin, momentlerin ve dönmelerin gösterimi…………………………………………………………... | 50 |
| Şekil 6.2 | Programlama ve çözüm algoritması…………………………..…………... | 62 |

**ÇİZELGE LİSTESİ**

Çizelge 6.1 (0°/90°/0°) Düzgün yayılı yüke maruz, dik katmanlanmış küresel kabuğun boyutsuz merkez sapmaları…………………………….. 62
Çizelge 6.2 (0°/90°/90°/0°) Düzgün yayılı yüke maruz, dik katmanlanmış küresel kabuğun boyutsuz merkez sapmaları…………………………….. 63

**ÖNSÖZ**

Başta tez danışman hocam Yrd.Doç.Dr. İsmail BAYER olmak üzere Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği bölüm hocalarıma gösterdikleri ilgiden ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmamın bütün süreçlerinde değerli bilgilerinden yararlandığım, bana her zaman destek olan Bnb.Y.Müh. Veysel ALANKAYA'ya çok teşekkür ederim.

Birçok yüksek lisans dersimi aldığım Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim dalı hocalarıma, başta Prof.Dr. Turgut KOCATÜRK olmak üzere çok teşekkür ederim.

Çalıştığım, Delta Denizcilik firmasındaki patronlarım S. Bülent ŞENER, Yaşar GÜL ve Cemal ŞAHİN'e bana bu çalışmayı yapabilmem için vakit tahsis ettikleri ve beni bu konuda destekledikleri için çok teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde yanımda yer alan ve beni hep destekleyen aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Ağustos, 2010

Mak. Müh. Sertan AYDIN

## ÖZET

Uygulama alanları incelendiğinde, kompozit kabukların yüksek basınçlı tanklar dahil birçok silindirik formda sıklıkla kullanılması, özellikle bu kabukların farklı kalınlıklarda davranışlarının incelenmesine neden olmuştur. Kalın kabuklarda, kalınlık ekseni boyunca gerilmelerin hesaplanabilmesi amacıyla yapılan çalışmalarda kayma gerilme etkilerinin de hesaba katıldığı yüksek mertebeli deformasyon teorileri ile elde edilen sonuçların hassasiyeti dikkat çekicidir. Bu çalışmada genel olarak Klasik ve Birinci Mertebeden Deformasyon Teorilerine de yer verilmiş olmasının sebebi; teorilerin geliştirilmesi sürecinde kayma deformasyonlarının etkisinin gösterilebilmesidir. Ancak artan mertebelerde kullanılan hesaplama gücünün artması ve elde edilen sonuçlardaki hassasiyet incelendiğinde, özellikle Üçüncü Mertebeden Deformasyon Teorisi kullanımının, hesaplama güçlüğü ve sonuç hassasiyeti bakımından optimum noktada olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle tez çalışmasında tercih edilen yöntemdir. Örnek uygulamada tercih edilen sınır şartları Navier çözümünü sağlayacak şekilde, sınır değerlerinin Çiftli Fourier Serileri kullanılarak yapılan tanımlamalarında süreksizlik oluşturmamaktadır. Belirlenen lamine kabuk simetrik ve düzgün yayılmış yük etkisindedir. Analitik çözüm neticesinde elde edilen kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak MATLAP programlama dilinde kod hazırlanmıştır. Sayısal sonuçların doğruluğu ve hassasiyeti J.N.Reddy tarafından aynı özellikteki kabuk için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

## ABSTRACT

A review of applications reveals that the use of composite shells in many cylindrical forms including high-pressure tanks led to the examination of these shells particularly at varying thicknesses. In studies conducted on thick shells for the calculation of stresses along the thickness axis, the sensitivity of results obtained by high-order deformation theories also taking into consideration shear stresses are remarkable. The reason underlying this study's inclusion of generally the Classical and First-Order Deformation Theories has been the ability to show the effect of shear deformations throughout the process of the development of theories. However, a review of the increase of the calculation difficulty used in increasing orders and the sensitivity in obtained results shows that the use of especially the Third-Order Deformation Theory was at an optimum point with regards calculation difficulty and result sensitivity. Therefore, this is the preferred method in the thesis study. The boundary conditions preferred in the example practice does not create a discontinuity in its definitions made using the Double Fourier Series of boundary values to provide for Navier solution. The determined laminated shell is under the influence of symmetrical and uniformly-distributed load. Using partial differential equations obtained as a result of analytical solution, a code was prepared in MATLAP programming language. The accuracy and sensitivity of numerical results were compared with results obtained by J.N.Reddy for shells of similar characteristics.

# 1. GİRİŞ

Tabakalı kompozit plak ve kabukların mühendislikteki kullanım alanlarının son otuz yılda hızlı bir biçimde artması ile kompozit plak ve kabukların statik ve dinamik davranışını anlamak için birçok araştırmacı bu konu ile ilgilenmiş ve çeşitli araştırmalar yapmışlardır.

Yapı malzemesi olarak kompozitler düşük ağırlık, yüksek dayanım ve rijitliğe sahip olmalarından dolayı birçok mühendislik yapılarında kullanılmaktadırlar. Kompozit malzemeler birçok avantajlara sahiptir. Sahip olduğu avantajlar sebebiyle kompozit malzemelerin kullanım alanları günden güne artmaktadır. Bu durum kompozit malzemelerin üretiminde ve geliştirilmesinde yeni yöntemler ve uygulamalara sebep olmaktadır. Bütün bu çalışmaların bir sonucu olarak, dünyada artık hemen hemen her sektörde kompozit teknolojisi kullanılmaktadır. Bunlardan bazıları betonarme çatılar, roketler, gemi imalatı, otomobil parçaları imalatı, yakıt tankları, silo imalatı, borular, uzay araçlarının yapımı olarak gösterilebilir.

Kabuklar, belirli bir eğriliğe sahip ince cidarlı yapılar olarak tanımlanabilir. Bu yapılar, tabakalı kompozit kabuklar olarak tek tabakalı veya çok tabakalı, malzeme olarak izotrop veya anizotrop olarak imal edilebilir. Plaklar ise kabuk elemanların özel bir halidir. Plaklarda eğrilik yarıçapları sonsuza gider.

Plaklar ve kabuklar, kalınlıkları diğer iki boyutuna oranla, çok küçük olan taşıyıcı elemanlardır. Düşey ve yatay yükleri aktararak taşıyıcı sistem elemanları arasındaki sürekliliği sağlamalarından dolayı, önemli bir taşıyıcı sistem elemanı olarak görülmektedirler. Taşıyıcı sistem yapılar genellikle, dikdörtgen veya düzgün geometriye sahip olmaları ve çoğunlukla düzgün yayılı yük etkisi altında kalmalarından dolayı, bu tip yapılarda plakların ve kabukların analizi daha da kolaylaşmaktadır. Belirtilen özelliklere sahip plak ve kabuk problemlerinin çözümü için yeterli olabilecek birçok yöntem geliştirilmiştir.

Kalınlığının açıklığına oranı yaklaşık olarak 1/20'den küçük olan plak ve kabuklara ince plaklar ve kabuklar denilmektedir. İnce plakların ve kabukların analizi, Kirchoff hipotezinde belirtildiği gibi, kalınlık boyunca kayma deformasyonları ihmal edilerek yapılabilmektedir. Kalınlığının fazla olduğu durumlarda, Reissner-Mindlin hipotezi veya yüksek dereceden kayma deformasyonları dağılımı teorileri yardımıyla çözüm yapılabilmektedir. Bunlara ek olarak, literatürde kayma deformasyonlarını dikkate alan çok sayıda teori de bulunmaktadır.

Bazı özel durumlarda plak ve kabuk özelliklerinin iyileştirilmesi istenir. Bu iyileştirmeler ile istenilen özelliklere sahip elemanların elde edilmesi sağlanır. Örneğin tabakalı kompozit plaklarda ve kabuklarda olduğu gibi zayıf ve güçlü malzemelerin belirli ölçülerde biraraya getirilmesi ile veya tabaka açılarının değişimi ile bu iyileştirmeler sağlanabilir.

Tabakalı kompozit plak ve kabuklar çok çeşitli tabaka dizilimlerine sahip olabilmektedirler ve bu tabaka dizilimlerine bağlı olarak farklı tabaka rijitlikleri gösterirler. Bu tabaka rijitliklerinin iyi anlaşılması ile istenilen amaca en uygun tabakalanma çeşidine ulaşmak mümkün olur.

Plak ve kabukların analizinde analitik karmaşıklıklardan dolayı bazı sınırlandırmalar ve varsayımlar yapılarak yaklaşık yöntemler uygulanabilmektedir. Tabakalandırılmış plak ve kabuk teorisinin temellendirildiği bazı sınırlamalar ve varsayımlar da bulunmaktadır. Sınırlamalar, dayandığı teorinin kullanımı üzerindeki sınırlamalardır ki bunlar giderilebilir veya giderilemez. Varsayımlar ise, belirsizlik türündeki teoriler üzerindeki sınırlamalardır. Örneğin, bir plağın yüzeyine dik olan gerilmelerin genel olarak sıfır olarak kabul edilebilmesi için boyutunun yeterince küçük olduğu varsayılır veya değerinin sıfır olduğu farz edilir. Yinede daha doğru bir teoriye başvurmadıkça, kesin olarak gerilmelerin ne kadar küçük olduğu bilinemez. Özetle sınırlamalar ve varsayımlar arasındaki fark şudur ki, sınırlamalar bilineni varsayımlar bilinmeyenleri içerirler (Jones,1975).

Plak ve kabuk elemanlar her zaman geometri ve yükleme açısından elverişli özelliklere sahip olmayabilirler. Bu tip özelliklere sahip elemanların analizi için yaklaşık yöntemler de yeterli olmayabilir. Bundan dolayı, geniş işlem hacmine sahip olan ancak bilgisayar desteğiyle bu sorunu aşan Sonlu Farklar, Sınır Eleman ve Sonlu Elemanlar Yöntemi gibi bazı sayısal çözüm yöntemleri kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Sonlu Elemanlar Yöntemi, sistematik olması, her türlü yapıya kolaylıkla uygulanabilmesi ve programlamaya elverişli olmasından dolayı yaygın olarak kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde, analizi yapılan elemanın geometrisine ve istenilen hassasiyete göre sonlu eleman ağı uygulanmaktadır. Ancak problemin doğru modellenmesi, modellenen problem için uygun ağ yapısının oluşturulması, problem çözme sürecinin zaman alıcı olması ve yoğun dikkat gerektirmesi bu yöntemin dezavantajlarıdır.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Kabuk elemanların davranışını anlamaya yönelik birçok çalışma yapılmış ve bu çalışmalar ışığında çeşitli kabuk teorileri geliştirilmiştir. Bu teoriler, kayma deformasyon etkisi dikkate alınarak geliştirilen kalın kabuk teorileri ve klasik kabuk teorisi olarak da anılan ince kabuk teorileri biçiminde iki ana başlık altında incelenebilir.

Serbest titreşim analizi ile ilgili yapılan çalışmaların öncülerinden birisi olan Galilei ipe bağlı sarkaçlar ve plakların serbest titreşim davranışı üzerine deneysel çalışmalar yapmıştır.

Kabuk teorileri ile ilgili ilk düzenli çalışmaları Germaine (1821) ve daha sonra Love (1888) yapmıştır. Germaine (1821), yaptığı çalışmalar ile ilk kez lineer izotropik kabuk teorisini geliştirmiştir. Love (1888) yaptığı çalışmalarda çeşitli kabullerde bulunmuş ve kabukların eğilme analizi için kendisinin birinci kabulünü kullanmıştır. Bu kabulle ince kabuklar için bir lineer analiz yöntemi tanımlamıştır. Yaptığı kabulleri, şekil değiştirmelerin ve deplasmanların çok küçük olduğu ve yüksek dereceden terimlerin ihmal edilebilir olduğu prensibine dayandırmıştır. Ayrıca Love kabukların kalınlıklarının diğer kabuk parametreleri ile karşılaştırıldığında çok küçük olduğu ve kayma gerilmelerinin de diğer gerilmeler yanında çok küçük olduğunu kabul etmiştir. Bu kabuller ışığında, deformasyondan önce yüzeye normal doğrultuda olan kesitler deformasyondan sonrada yüzeye normal doğrultuda kalırlar. Böylece diğer kabuk teorileri de Love’un kabullerine benzer yaklaşımları temel alarak geliştirilmiştir. İnce kabuk teorisi Kirchoff–Love hipotezi temel alınarak geliştirilmiş ve bu teori diğer teorilerin gelişimine ışık tutmuştur.

Yapılan kabuller ve teoriler sonucunda elde edilen veriler dikkate alındığında araştırmacılar, gerek kirişler gerekse plak ve kabuklar için hem dönme atalet etkisini hem de kayma deformasyon etkisini dikkate almaları gerektiğini fark etmişlerdir.

Araştırmacıların, plak, kabuk ve kirişlerde dönme atalet ve kayma deformasyon etkilerinin dikkate alınmasının zorunlu olduğunu anlamaları ile bu konuda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan Gol’denveizer (1961) ince kabuklar ve kısmen kalın kabuklar için bu sorunu çözmüşlerdir. Kayma deformasyon ve dönme atalet etkilerinin işlemlere dahil edilmesi, Love (1888)’un birinci kabulünü ve diğer kabullerde gerekli değişikliklerin yapılmasına ve böylece kayma deformasyon kabuk teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Timoshenko (1921) kirişler için yaptığı çalışmada, Reissner (1945) ve Mindlin (1951) de plaklar için yaptıkları çalışmalarda kayma deformasyon etkisini hesaplara katarak çözümler yapmışlardır. Whitney ve Sun (1973), tabakalı kompozitlerde uzama hareketi için yüksek dereceden terimleri içeren bir teori geliştirmişlerdir. Whitney ve Sun (1973), tabakalı anizotropik silindirik kabuklar için bir teori geliştirmişlerdir. Srinivas vd., (1970) izotropik durumda tabakalı plakların kayma deformasyon etkisini araştırmışlardır. Whitney ve Leissa (1969) homojen olmayan anizotropik plakların analizlerini yapmışlardır. Whitney ve Pagano(1970) homojen olmayan plaklarda kayma deformasyon etkisini araştırmışlardır.

Son zamanlarda Latifa ve Sinha (2005) elips ve küresel şekle sahip çift eğrilikli tabakalı kompozit kabukların eğilme ve serbest titreşim analizini sonlu elemanlar yöntemi kullanarak modellemiştir.

Amabili (2003), dairesel silindirik kabukların geniş genlikli titreşimlerini araştırmıştır.

Gautham ve Ganesan (1997) tabakalı kompozit izotrop küresel kapakların serbest titreşim karakteristiklerini üzerine çalışmalar yapmıştır. Grigorenko ve Yaremchenko (2007) çeşitli kalınlıklardaki dikdörtgen sığ kabukların gerilme-şekil değiştirme durumunu incelemiştir.

Djoudi ve Bahai (2003) lineer ve lineer olmayan geometrilere sahip sığ kabuklar için silindirik şekil değiştirmeleri esas alarak sonlu elemanlar metodu geliştirmiştir.

Rath ve Das (1973), ortotropik silindirik kabuklar üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda dönme atalet ve kayma deformasyon etkisi içeren denklemler sunulmuştur.

Dong (1968) Tabakalı ortotropik silindirik kabukların serbest titreşimini araştırmıştır.

Liew ve Lim (1995 b) çift eğrilikli dikdörtgen izdüşüme sahip kabukların serbest titreşim analizleri için yüksek dereceden ifadeler içeren çözümler sunmuşlardır.

Liew, Peng ve Ng (2002) Küresel kabuk panellerin farklı sınır şartları etkisindeki üç boyutlu serbest titreşim analizi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Kayma deformasyon etkisini dikkate alan bir başka çalışma da Reddy(1984 b) ve Librescu ve ark.(1989) tarafından yapılmıştır. Lim ve Liew (1995 a), denklemlerde yer alan yüksek dereceden terimlerle ilgili olarak birçok çalışma yapmıştır.

Qatu (1993) eğrisel kirişlerle ilgili bir çalışma yapmıştır. Qatu (1999) plak ve kalın kabuklarla ilgili olarak birçok çalışmalar yapmıştır. Qatu (2004) tabakalı kompozit plakların ve kabukların analizini içeren bir kitap yayımlamıştır.

## 3. MATERYAL VE METOD

Kompozit malzeme, belirli bir amaca yönelik olarak, en az iki farklı malzemenin bir araya getirilmesiyle oluşan malzeme grubudur. Üç boyutlu nitelikteki bu bir araya getirmede amaç, bileşenlerin hiçbirinde tek başına mevcut olmayan bir özelliğin elde edilmesidir. Diğer bir deyişle, amaçlanan doğrultuda bileşenlerinden daha üstün özelliklere sahip bir malzeme üretilmesi hedeflenmektedir. Kompozit malzemeye, “Çok Bileşenli Malzeme”, “Çok Fazlı Malzeme” “Donatılı Malzeme” ve “Pekiştirilmiş Malzeme” gibi adlar da verilmektedir (Ersoy, 2001).

Yapı tasarımında en az kaynak ile en iyi tasarımın yapılması istenmektedir. İyi bir tasarım yapabilmek için düşük ağırlıklı, yüksek mukavemetli ve düşük maliyetli malzemeler tercih edilmektedir. Kompozit malzemeler bu özelliklerin çoğunu bünyesinde barındırmaktadır. Özellikle hafif olmaları ve yüksek mukavemet göstermeleri, böylelikle tasarımlarının kolay yapılması, daha az deformasyona uğramaları ve daha fazla yük taşıyabilmeleri kompozit malzemelerin önemini her geçen gün arttırmaktadır.

Kompozit malzemeler, rijitliği sağlayan fiber malzemeler ile fiber malzemeleri bir arada tutmayı sağlayan matris malzemelerden meydana gelmektedir.

Kompozit malzemelerin tanımından da anlaşıldığı üzere, kompozit malzemelerde genellikle şu dört koşul aranmaktadır:

1) İnsan yapısı olması, dolayısıyla doğal bir malzeme olmaması.

2) Farklı malzemelerin üç boyutlu olarak bir araya getirilmiş olması.

3) Bileşenlerinin hiçbirinin tek başına sahip olmadığı özellikleri taşıması, dolayısıyla bu amaçla üretilmiş olması.

4) Kompozit malzemeleri oluşturan fiber ve matris malzemelerin bir bütün olarak davranması.

Kompozit malzemelerin üretiminde şu özelliklerin geliştirilmesi hedeflenir; Mekanik dayanım, korozyona karşı direnç, rijitlik, ağırlık, yüksek sıcaklığa dayanım göstermek, ısı iletkenliği, kırılma tokluğu, ses tutuculuğu görünüm vb. Bu özelliklerin birisi veya birkaçı geliştirilirken, kompozit malzemenin zayıf yönleri iyileştirilir. Bu iyileştirme kompoziti oluşturan matris ve fiber elemanların analizi ile mümkündür.

Kompozitler aşağıdaki şekilde gruplandırılabilir.

### 3.1 Tanelerle Donatılı Kompozit Malzeme

Kompoziti oluşturan matris malzeme içerisinde milimetrik düzeydeki tanelerin yer almasıyla meydana gelen kompozit türüdür. Bu türe beton (agrega ve çimento) örnek olarak gösterilebilir.

### 3.2 Liflerle Donatılı Kompozit Malzeme

Çekme ve eğilme dayanımları istenen düzeyde olmayan zayıf malzemelerin zayıf olan yönlerinin iyileştirilmesi amacıyla liflerle donatılması ile elde edilen bir kompozit türüdür.

### 3.3 Tabakalı Kompozit Malzeme

En az iki farklı malzemenin, tabakalı bir şekilde kompozitin yapısında yer almasıyla meydana gelir. Bu fazlardan birisi kompozite özelliğini kazandıran sürekli faz, diğeri ise tabakaları bir arada tutan bağlayıcı fazdır.

Bu çalışmada ilk olarak tabakaların analizine değinilerek gerilme türleri ve sekil değiştirmeler genel olarak tanımlanacak, sonrasında malzeme modülleri ve simetri düzlemleri hakkında bilgi verilecektir. Çalışmada genel olarak Klasik ve Birinci Mertebeden Deformasyon Teorilerine de yer verilmiş olmasının sebebi; teorilerin geliştirilmesi sürecinde kayma deformasyonlarının etkisinin gösterilebilmesidir. Özellikle Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi kullanımının, hesaplama güçlüğü ve sonuç hassasiyeti bakımından optimum noktada olduğu belirlenmiştir (Reddy, 2003). Bu nedenle tez çalışmasında tercih edilen yöntemdir. Üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorisi özel bir durum için irdelenerek örnek bir plakanın çözümü yapılacaktır. Örnek plakada tercih edilen sınır şartları Navier çözümünü sağlayacak şekilde, sınır değerlerinin Çiftli Fourier Serileri kullanılarak yapılan tanımlamalarında süreksizlik oluşturmamaktadır. Belirlenen lamine kabuk simetrik ve düzgün yayılmış yük etkisindedir. Analitik çözüm neticesinde elde edilen kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak MATLAP programlama dilinde kod hazırlanmıştır. Sayısal sonuçların doğruluğu ve hassasiyeti J.N.Reddy tarafından aynı özellikteki kabuk için elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

# 4. TABAKALARIN ANALİZİ

## 4.1 Gerilme

Gerilme, birim alana düşen yükün yoğunluğu olarak tanımlanır. Mekanik yapılar, hacimsel kuvvetler ve yüzey kuvvetleri gibi kütle üzerinde hareket halinde bulunan dış kuvvetleri alırlar. Bu kuvvetler, kütle içinde iç kuvvetlere dönüşür. Kütle içinde bulunan tüm noktalardaki iç kuvvetlerin bilinmesi gerekir, çünkü bu kuvvetlerin değeri, yapıda kullanılan malzemelerin mukavemetlerinden daha düşük olmak zorundadır.

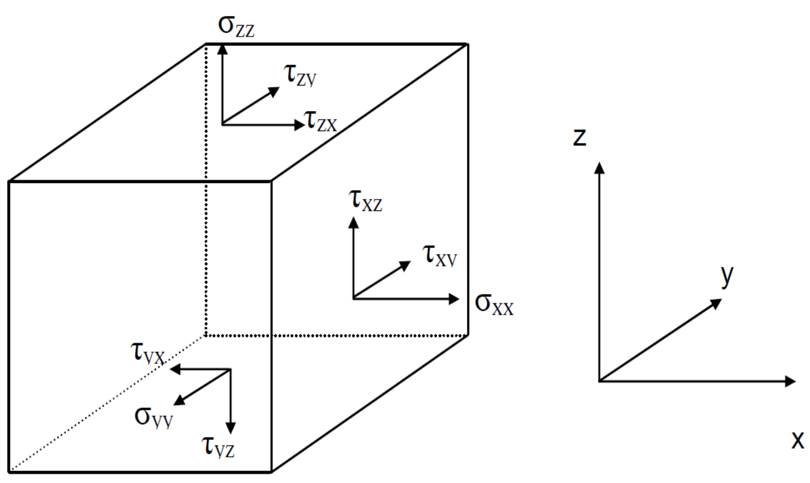
Sonsuz küçük kübik bir eleman alırsak, bu kübik elemanın herhangi bir yüzündeki gerilmeler bulunarak, bir noktadaki gerilmeler tanımlanabilir. Şekil 4.1'de görüldüğü gibi eleman üzerindeki herhangi bir noktada dokuz farklı gerilme davranışı bulunmaktadır. Bu gerilmelerin altı tanesi kayma gerilmesidir ve kayma gerilmeleri arasında şu şekilde bir ilişki bulunmaktadır.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{4.1.a}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{4.1.b}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{4.1.c}$$

Yukarıdaki üç ifade sonsuz küçük kübik elemandaki momentlerin dengesinden bulunur. Dolayısıyla geriye altı gerilme kalır. Bunlar kübik yüzeye dik doğrultudaki $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ gerilmeleri ve kübik yüzeyler boyunca bulunan $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ gerilmeleridir.




Şekil 4.1 Sonsuz küçük kübik elemandaki gerilmeler.

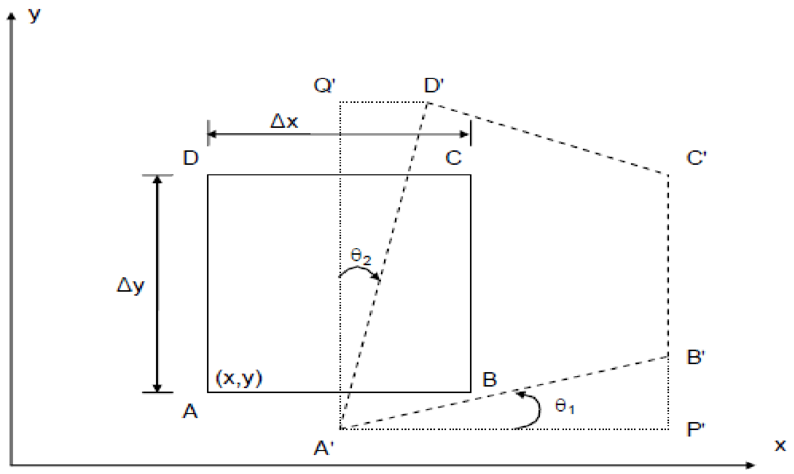
## 4.2 Şekil Değiştirme

Dış kuvvetler sebebiyle eleman içerisinde oluşan deformasyonun bilinmesi de çok önemlidir. Deformasyon, kütlenin şekil ve boyutunda meydana gelen göreceli değişim olarak tarif edilebilir. Şekil değiştirme genellikle sağ el kuralı ile oluşturulan koordinat sisteminde sonsuz küçük kübik bir eleman üzerinde tanımlanır. Çeşitli yükler altında, sonsuz küçük kübik elemanın kenar uzunluğu değişir, küp yüzeyinin şekli de bozulur. Boydaki değişim, kayma şekil değiştirmelerindeki biçim bozulmasına ve normal şekil değiştirmesine tekabül eder. Şekil 4.2'de kübik elemanın ABCD yüzündeki şekil değiştirmeler görülmektedir. Her bir şekil değiştirme ve yer değiştirmelerin birbiriyle ilişkisi vardır. Şekildeki AB ve AD kenarları şekil değiştirdikten sonra A'D' ve A'B' halini alır Buradaki yer değiştirmeler (x,y,z) koordinat sisteminde tanımlanırsa, herhangi bir nokta için;

$u = u(x, y, z);$ x doğrultusundaki yer değiştirme

$v = v(x, y, z);$ y doğrultusundaki yer değiştirme (4.2)

$w = w(x, y, z);$ z doğrultusundaki yer değiştirme olarak ifade edilir.




Şekil 4.2 Çok küçük bir alanda x-y düzleminde normal ve kayma şekil değiştirmeleri (Kaw, 1997)

Normal ve kayma şekil değiştirmelerinin tanımından Şekil 4.1'deki sonsuz küçük kübik elemanın şekil ve boy değişimi şu şekilde bulunabilir.(Doğan, 2009)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{4.3}$$

### 4.3 Hooke Kanunları

Mühendislikte kullanılan malzemelerin birçoğu lineer ve izotrop özellik gösterir. Elastik Hooke cisminde gerilme tensörü ile şekil değiştirme tensörü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{ij} = Q_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{4.4}$$

Bu denklemler İngiliz Matematikçi Robert Hooke (1635-1703) tarafından ifade edilen ve Hooke kanunu olarak bilinen ilişkilerdir. Sistemde meydana gelen her etki sisteme verilen küçük bir yükten dolayı oluşan deformasyonlarla doğrusal olarak ilişkilidir. Hooke kanunu olarak anılan ifadeler aşağıda matematiksel olarak açıklanmıştır.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\,(\sigma_{22} + \sigma_{33})\right) & \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G}\sigma_{12} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{33})\right) & \varepsilon_{13} &= \frac{1}{G}\sigma_{13} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu\,(\sigma_{11} + \sigma_{22})\right) & \varepsilon_{23} &= \frac{1}{G}\sigma_{23}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Burada ν Poisson oranıdır. Kayma modülü G ise, elastik sabit E ve poisson oranı ν'nün bir fonksiyonudur.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4.6}$$

### 4.4 Malzeme Modülleri

Üç boyutlu gerilme durumunda, lineer izotropik bir malzeme için, x-y-z ortogonal sistemindeki bir noktada, Hooke kanunlarıyla elde edilen gerilme şekil değiştirme ilişkisi matris formunda aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Eğer malzemenin mekanik özellikleri yönden bağımlı ise anizotrop malzeme denir. İzotrop malzemede ise malzemenin her doğrultusunda elastik özellikler aynıdır. Anizotrop malzeme, içerisinde herhangi bir düzleme göre simetriye sahip değilse malzeme bir noktada yirmi bir adet bağımsız elastik sabite sahiptir. Bu sabitler bir kez özel bir nokta için bulunduğu zaman gerilme-şekil değiştirme ilişkisi o noktada geliştirilebilir. Eğer malzeme homojen değilse, bu sabitler noktadan noktaya değişiklik gösterebilirler. Malzeme homojen olsa bile (veya öyle olduğu farz edilsin) analitik olarak veya deneysel olarak, bu 21 adet elastik sabiti bulmak gerekir. Anizotrop malzeme içerisinde belirli düzlemlere göre simetriye sahip ise farklı isimlerle anılmaktadır. Aşağıdaki başlıklar altında simetri düzlemlerine göre anizotrop malzemelerin ve izotrop malzemenin açıklamaları yer almaktadır.

### 4.4.1 Monoklinik Malzeme

Eğer malzemenin, bir tane malzeme simetri düzlemi varsa bu tip malzemelere monoklinik malzemeler denir. Simetri düzlemine dik olan doğrultu, “temel doğrultu” olarak adlandırılır. Bu tip malzemeler 13 adet bağımsız elastik sabite sahiptir.

### 4.4.2 Ortotropik Malzeme

Eğer malzeme, karşılıklı olarak birbirine dik üç adet malzeme simetri düzlemine sahipse bu tip malzemelere ortotropik malzeme denir. Bu tip malzemeler 9 adet bağımsız elastik sabite sahiptir.

### 4.4.3 Enine (Transversely) İzotropik Malzeme

Ortotropik elemanın düzlemlerinin birinde, bir malzeme izotropi düzlemi varsa bu tip malzemelere enine (transversely) izotropik malzemeler denir. Bu tip malzemeler beş adet bağımsız elastik sabite sahiptir.

### 4.4.4 İzotropik Malzeme

Bu malzemede malzemenin her doğrultusunda elastik özellikler aynıdır. Bu tip malzemelere izotropik malzemeler denir. İzotropik malzemeler iki adet bağımsız elastik sabite sahiptir.

## 4.5 Temel Ortotropik Malzeme Tanımları

### 4.5.1 Ortotropik Malzemelerde Esneklik Matrisi

Ortotropik bir malzeme için esneklik matrisi aşağıdaki gibidir;

$$[S]=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Yukarıdaki matris diyagonalin sağına ve soluna göre simetriktir. Esneklik matrisinin elemanları aşağıda görülmektedir.

$$\varepsilon = S.\sigma$$

$$S_{11}=\frac{1}{E_1} \qquad S_{22}=\frac{1}{E_2} \qquad S_{33}=\frac{1}{E_3}$$

$$S_{12}=S_{21}=-\frac{\nu_{12}}{E_1} \qquad S_{13}=S_{31}=-\frac{\nu_{13}}{E_1} \qquad S_{23}=S_{32}=-\frac{\nu_{23}}{E_2} \tag{4.9}$$

$$S_{44}=\frac{1}{G_{23}} \qquad S_{55}=\frac{1}{G_{31}} \qquad S_{66}=\frac{1}{G_{12}}$$

$$S_{14}=S_{41}=S_{15}=S_{51}=S_{16}=S_{61}=S_{24}=S_{42}=S_{25}=S_{52}=S_{26}=S_{62}=0$$
$$S_{34}=S_{43}=S_{35}=S_{53}=S_{36}=S_{63}=S_{45}=S_{54}=S_{46}=S_{64}=S_{56}=S_{65}=0$$

### 4.5.2 Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Plak ve kabuklar fiberlerin yönelimine bağlı olarak farklı tipte anizotropiye sahip olabilirler. Bu sebeple tabakalı kompozit elemanlar için gerilme-şekil değiştirme ifadeleri yazılırken bazı temel kabuller göz önüne alınır. Malzeme içerisinde yer alan fiberler birbirlerine paralel olarak dizilmişlerdir. Fiberler doğrusal bir düzlem üzerinde devam etmeyebilir, özellikle kabuk elemanlarda bu durum görülür. Her bir tabakadaki fiberler farklı açılarla dizilim yapabilirler. Makroskopik aşamada her bir tabakanın homojen ve ortotrop olduğu dikkate alınacaktır. Bazı durumlarda genel koordinat sistemi ile fiberlerin doğrultusunun birbirine paralel olması mümkün olmayabilir. Bu durumda dönüşüm işlemleri ile gerilme-şekil değiştirme ifadesi genel halde yazılacaktır. Ortotropik bir tabaka için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi tabakaların fiber doğrultuları dikkate alınarak üç boyutlu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Yukarıdaki denklemde $Q_{ij}$ terimleri indirgenmiş katılık (rijitlik) katsayıları olarak tanımlanır. Gerilme-şekil değiştirme ilişkisi esneklik matrisi açısından da aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

İndirgenmiş katılık (rijitlik) katsayıları ile esneklik katsayıları arasındaki bağlantı aşağıdaki gibidir.

$$\left([Q]=[S]^{-1}\right) \tag{4.12}$$

$$Q_{11}=\frac{S_{22}S_{33}-S_{23}^2}{S}, Q_{12}=-\frac{S_{13}S_{23}-S_{12}S_{33}}{S}, Q_{22}=\frac{S_{33}S_{11}-S_{13}^2}{S}, Q_{13}=\frac{S_{12}S_{23}-S_{13}S_{22}}{S}$$

$$Q_{33}=\frac{S_{22}S_{11}-S_{12}^2}{S}, Q_{23}=\frac{S_{12}S_{13}-S_{23}S_{11}}{S}, Q_{44}=\frac{1}{S_{44}}, \qquad Q_{55}=\frac{1}{S_{55}}, \qquad Q_{66}=\frac{1}{S_{66}}$$

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13} \tag{4.13}$$

Denklem (4.9), Denklem (4.13)’de yerine yazılırsa,

$$Q_{11}=\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}, Q_{12}=\frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta}, Q_{13}=\frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta}, Q_{22}=\frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}$$

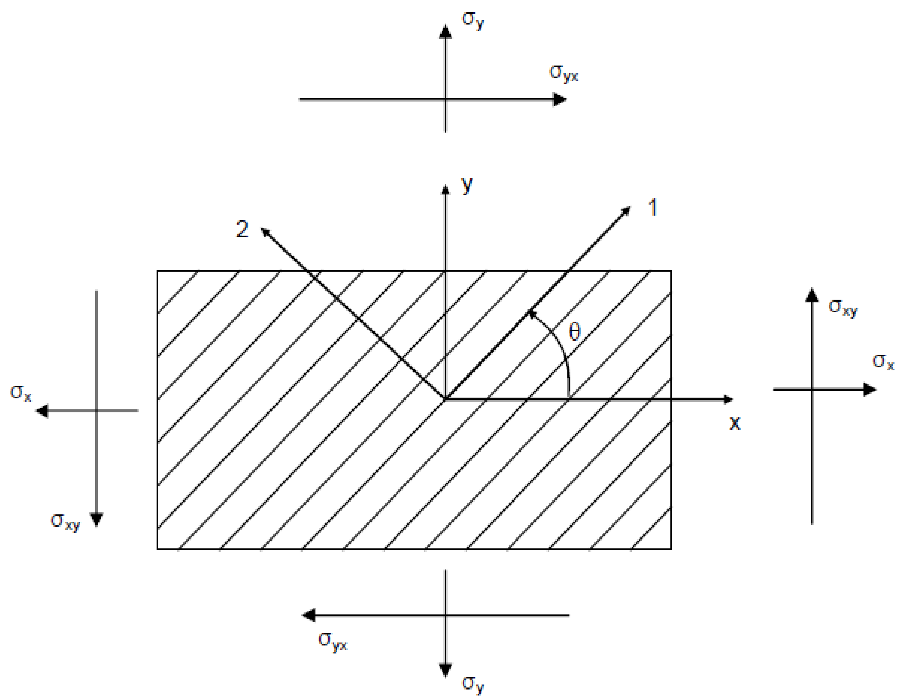
$$Q_{23}=\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}, Q_{33}=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}, Q_{44}=G_{23} \qquad Q_{55}=G_{13} \qquad Q_{66}=G_{12}$$

$$\Delta=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3} \tag{4.14}$$

(4.14) denklemleri elde edilir. Burada $E_1, E_2$ ve $E_3$ sırasıyla 1, 2 ve 3 doğrultularındaki elastisite modülleri $G_{12}, G_{23}$ ve $G_{13}$ kayma katılık (rijitlik) modülleri ve $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ ise Poisson oranlarıdır. Böylece her bir tabaka için 9 adet bağımsız malzeme sabiti vardır.

Tek doğrultulu tabakalarda, enine doğrultudaki düşük mukavemet özellikleri ve düşük rijitlikler sebebiyle, tabakalanma genellikle sadece tek doğrultulu tabakalardan meydana gelmez. Bundan dolayı bazı tabakalar belirli açılarla tabakalanma içerisinde yer alır. Bu durumun bir sonucu olarak açılı tabakalarda gerilme-şekil değiştirme ilişkisinin geliştirilmesi gerekmektedir.

Açılı tabakalar için verilen koordinat sistemi Şekil 4.3'de görülmektedir. 1-2 koordinat sistemi, lokal eksen veya malzeme ekseni olarak adlandırılır. 1 doğrultusu fiberlere paraleldir ve 2 doğrultusu fiberlere diktir. Bazı kaynaklarda 1 doğrultusu boylamasına (longitudinal) doğrultu (L) ve 2 doğrultusu enlemesine (transverse) doğrultu (T) olarak tanımlanır. x-y koordinat sistemi global koordinat sistemi olarak isimlendirilir. İki koordinat sistemi arasında $\theta$ açısı bulunmaktadır ve açılı tabakalardaki global ve yerel eksenler doğrultusundaki gerilmeler bu $\theta$ tabaka açısına bağlıdır.




Şekil 4.3 Açılı tabakalarda global ve yerel eksen takımları.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

[$T$] Transformasyon matrisi olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Burada

$c = \cos(\theta)$ ve $s = \sin(\theta)$

Transformasyon matrisinin tersi;

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ sc & -sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

şeklindedir.

Denklem (4.10)’da yerel eksenlerdeki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kullanılarak, deklem (4.15) şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Global ve yerel eksenler doğrultusundaki şekil değiştirmeler, birbirlerine transformasyon matrisiyle bağlanır.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Denklem (4.19) aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Burada $[R]$, Reuter matrisi ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Denklem (4.20), Denklem (4.18)’de yerine konursa,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

elde edilir. Denklem (4.22) açık şekilde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

olur. Burada $\left[\bar{Q}\right]$ transformasyona uğramış elemanın indirgenmiş rijitlik matrisi olarak adlandırılır. $\left[\bar{Q}\right]$ matrisinin açık şekli aşağıda görülmektedir.

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
\bar{Q}_{12} &= \left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) \\
\bar{Q}_{13} &= Q_{13}\cos^2\theta + Q_{23}\sin^2\theta \\
\bar{Q}_{16} &= \left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta + \left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{23} &= Q_{23}\cos^2\theta + Q_{13}\sin^2\theta \\
\bar{Q}_{26} &= \left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta + \left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta \\
\bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\
\bar{Q}_{36} &= \left(Q_{13}-Q_{23}\right)\cos\theta\sin\theta \\
\bar{Q}_{66} &= \left[Q_{11}+Q_{22}-2\left(Q_{12}+Q_{66}\right)\right]\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\
\bar{Q}_{45} &= \left(Q_{55}-Q_{44}\right)\sin\theta\cos\theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{44}\sin^2\theta + Q_{55}\cos^2\theta
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Tek doğrultulu tabakalar için, Denklem (4.10) ve Denklem (4.11) de görüldüğü gibi normal ve kayma gerilmeleri ile şekil değiştirmeleri arasında bir bağlantı yoktur. Fakat açılı tabakalarda, Denklem (4.23)'de görüldüğü gibi normal ve kayma gerilmeleri ile şekil değiştirmeleri arasında bir bağlantı mevcuttur. Açılı tabakalarda, sadece normal gerilmelerin etkimesi durumunda, kayma şekil değiştirmeleri sıfır değildir ve sadece kayma gerilmeleri etkidiğinde normal şekil değiştirmeleri sıfır değildir. Bu nedenle Denklem (4.23), gerilme şekil değiştirme denklemi ortotropik tabakalar için genel denklemler olarak adlandırılır (Kaw, 1997).

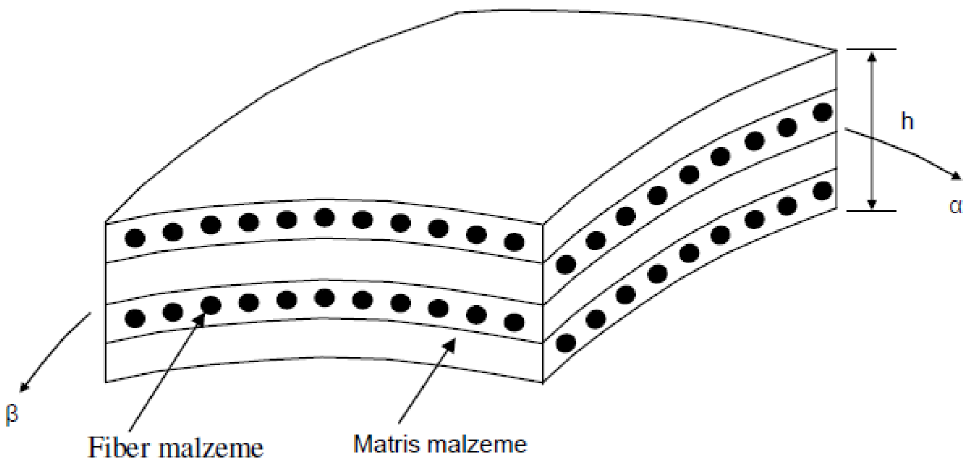
# 5. LAMİNASYON TEORİLERİ

## 5.1 Giriş

Daha önceki bölümde belirtildiği üzere, bir tabaka, homojen izotrop fiber takviyeler ile fiber malzemelerin etrafını saran, fiberlerin belirli bir dağılım ve düzen içerisinde bulunmalarına olanak sağlayan, homojen izotrop matris malzemelerin belirli oranlarda bir araya getirilmesiyle meydana gelmektedir (Şekil 5.1). Elde edilen kompozit tabakanın rijitliği, tabaka üzerindeki herhangi bir noktanın fiber eleman üzerinde, matris eleman üzerinde veya fiber-matris birleşim bölgesinde olmasına bağlı olarak noktadan noktaya çeşitlilik gösterir. Bu çeşitlilik sebebiyle, tabakalı kompozitlerin makr omekanik analizi yapılırken ortalama malzeme özellikleri temel alınır ve bazı kısıtlar kabul edilir.

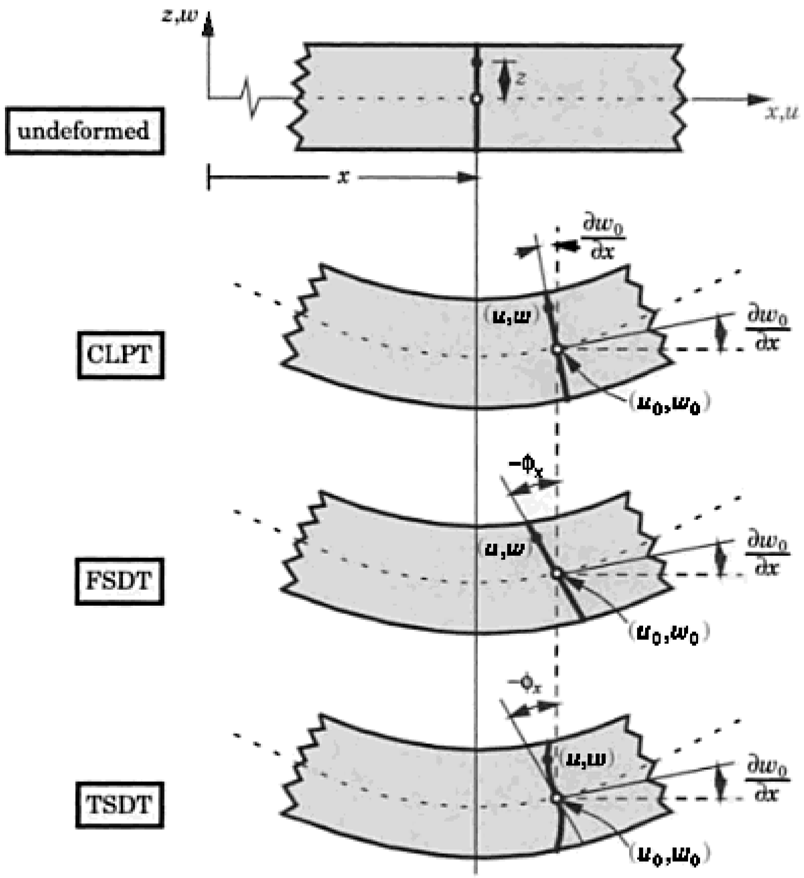
Kısıtlar;

1- Katlar birbirine mükemmel yapışmıştırlar.
2- Her katın malzemesi lineer elastik ve malzemenin 3 simetri hattı mevcuttur(ortotropik)
3- Her kat sabit kalınlıktadır.
4- Şekil değişimleri ve yer değişimleri küçüktür.
5- Laminanın taban ve üst yüzeylerindeki enine kayma gerilimleri sıfırdır.




Şekil 5.1 Tabakalı kompozit kabuklarda fiber ve matris malzemelerin görünümü.

Kabuk elemanların davranışını anlamaya yönelik birçok çalışma yapılmış ve bu çalışmalar ışığında çeşitli kabuk teorileri geliştirilmiştir. Bu teoriler, kayma deformasyon etkisi dikkate alınarak geliştirilen kalın kabuk teorileri ve klasik kabuk teorisi olarak da anılan ince kabuk teorileri biçiminde iki ana başlık altında incelenebilir.




Sekil 5.2 Klasik, birinci mertebeden ve üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorilerine göre enine normallerin deformasyonları.

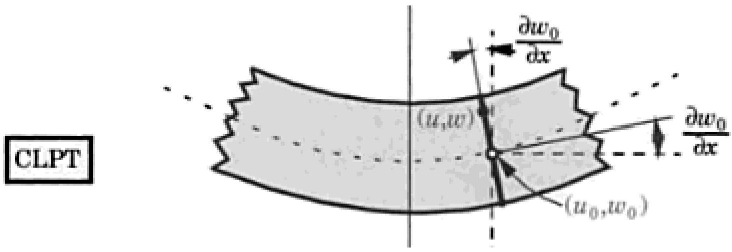
Kabuk elemanın yaptığı deformasyonların, orta düzleme göre meydana gelen yer değiştirmelere bağlı olarak yazıldığı kabul edilmiştir. Hareket denklemleri türetilirken, iki temel kabul esas alınmıştır. Bu kabullerden ilki, kabuk elemanın küçük yer değişimlerine sahip olması, ikincisi ise, kabuk kalınlığının eğrilik yarıçapı yanında çok küçük olduğu kabulüdür. Teorik yaklaşımın temelinde Love (1888,1944) ve Reissner (1941)'in yaptığı çalışmalar esas alınmıştır. Eğrilik yarıçapı düzlemsel yer değiştirmelerle karşılaştırıldığında çok büyüktür. Sığ kabuklardaki, u ve v yer değiştirme bileşenlerinin tanjantıyla meydana gelen eğrilik değişimi, normal bileşen olan w ile karşılaştırıldığında çok küçüktür. Şekil 5.2'de çözümü pratik olan klasik laminasyon teorisi birinci mertebeden plaka teorisi ve özel çözümler için uygulanan üçüncü mertebeden plaka teorisi prensip olarak gösterilmiştir.

## 5.2 Klasik Laminasyon Teorisi (CLT)

Klasik laminasyon teorisi, klasik levha teorisinin kompozit laminelere uygulanmış halidir. Klasik laminasyon teorisi Kirchoff hipotezi varsayımlarına dayanır. Bu hipoteze göre;

1- Deformasyon öncesinde orta düzleme dik olan düz hatlar deformasyon sonrasında da levhanın orta düzlemine dik ve düz kalırlar.
2- Enine normaller (transverse normals) uzamazlar.
3- Enine normaller deformasyon sonrasında da orta yüzeye dik kalacak şekilde dönerler.

İlk iki varsayım, enine yer değiştirmelerin kalınlık koordinat sisteminden bağımsız olduğunu ve enine normal uzamanın sıfır olduğunu ($\varepsilon_{zz} = 0$) gösterir. Üçüncü varsayım, enine kayma uzamalarının sıfır olduğu sonucunu verir. $\varepsilon_{xz} = 0$ $\varepsilon_{yz} = 0$




Sekil 5.3 Klasik laminasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları.

Klasik laminasyon teorisi birim yer değişimleri (displacement);

$$u(x,y,z,t) = u_{\circ}(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial x}$$
$$v(x,y,z,t) = v_{\circ}(x,y,t) - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \qquad (5.1)$$
$$w(x,y,z,t) = w_{\circ}(x,y,t)$$

Orta yüzey yer değişimleri $(u_{\circ}, v_{\circ}, w_{\circ})$ bilindiği takdirde, herhangi rastgele bir noktanın (x,y,z) yer değişimi (3 boyutlu süreklilik içindeki) belirlenebilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^{\circ}_{xx} \\ \varepsilon^{\circ}_{yy} \\ \gamma^{\circ}_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^{1}_{xx} \\ \varepsilon^{1}_{yy} \\ \gamma^{1}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (5.2)$$

$$\left\{\varepsilon^{\circ}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{array}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left\{\varepsilon^{1}\right\}=\left\{\begin{array}{c}-\frac{\partial^2 w_{\circ}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_{\circ}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_{\circ}}{\partial x \partial y}\end{array}\right\} \tag{5.4}$$

Tüm birim uzama bileşenleri lamine kalınlığı boyunca lineer olarak değişir ve materyal değişimlerinden bağımsızdır.

### 5.2.1 Birim Yer Değişimleri ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması

Kuvvet bileşenlerin genel hali ile yazılışı aşağıdaki gibidir.

$$\left\{\begin{array}{c}N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy}\end{array}\right\}=\sum_{k=1}^{N}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\left\{\begin{array}{c}\sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy}\end{array}\right\}dz=\sum_{k=1}^{N}\int_{Z_k}^{Z_{k+1}}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}^{k}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon^{\circ}{}_{xx}+z\varepsilon^{1}{}_{xx} \\ \varepsilon^{\circ}{}_{yy}+z\varepsilon^{1}{}_{yy} \\ \gamma^{\circ}{}_{xy}+z\gamma^{1}{}_{xy}\end{array}\right\}dz \tag{5.5}$$

Denklem (5.5) deki $\bar{Q}_{ij}$ matrisinin z ile ilişkilendirerek matris formunda yazarsak denklem (5.7) deki $\left(A_{i,j}, B_{i,j} D_{i,j}\right)$ matrisleri elde edilir.

$$\left(A_{i,j}, B_{i,j} D_{i,j}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\bar{Q}_{i,j}\left(1, z, z^2\right)dz \tag{5.6}$$

$$A_{i,j}=\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z_{k+1}-z_k\right) \quad B_{i,j}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z^2{}_{k+1}-z^2{}_{k}\right) \quad D_{i,j}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z^3{}_{k+1}-z^3{}_{k}\right) \tag{5.7}$$

Yukarıdaki (5.7) ifadelerinde [A] uzama katılık matrisi, [B] eğilme-uzama arasındaki bağlanma katılık matrisi, [D] eğilme katılık matrisidir. [B] matrisinin varlığı, eğilme ve uzama arasında bir girişim bulunduğunu göstermektedir, bu yüzden [B] matrisinde yer alan $B_{ij}$ terimleri tabaka üzerinde çekme etkisi yaparak, tabakanın eğilme ve burulmasına neden olur. $A_{16}$ ve $A_{26}$ terimleri, bir tabakadaki kayma şekil değiştirmesi ile normal gerilme arasında ve normal şekil değiştirme ile kayma gerilmesi arasında var olan bağı gösterir. $D_{16}$ ve $D_{26}$ ise bir tabakadaki eğilme ile burulma arasındaki bağı göstermektedir. [A], [B] ve [D] matrisleri kompozitlerin çeşitli şartlar altında davranışını anlamamızda bize yardımcı olmaktadırlar.

Genel halindeki (5.5) kuvvet bileşenlerindeki $\bar{Q}_{ij}$ katılık matrisi, $\left(A_{i,j}, B_{i,j}\right)$ matrisleri şeklinde ayrılarak yazılırsa denklem (5.8) elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_{xx} \\ \varepsilon^0{}_{yy} \\ \gamma^0{}_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

Denklem (5.3) ve (5.4)’ün denklem (5.8) de yerine koyarsak;

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.9}$$

Benzer yolla moment bileşenleri de genel haliyle yazılırsa;

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} zdz = \sum_{k=1}^{N} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon^\circ{}_{xx} + z\varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^\circ{}_{yy} + z\varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^\circ{}_{xy} + z\gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{5.10}$$

Moment bileşenlerindeki $\bar{Q}_{ij}$ katılık matrisinin$\left(B_{i,j}, D_{i,j}\right)$ matrisleri şeklinde bölünerek yazılmasıyla denklem (5.11) elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_{xx} \\ \varepsilon^0{}_{yy} \\ \gamma^0{}_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.11}$$

Denklem (5.3) ve (5.4)’ü denklem (5.11) de yerine koyarsak;

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}\dfrac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

Klasik laminasyon teorisinin (CLT) birim yer değiştirme ve birim dönme miktarı eşitlikleri aşağıda verilmiştir (Reddy, 2003). Bu denklemlerde eşitliğin karşılıkları yazılmışsa da problemleri statik kabul ettiğimizden dolayı denklemler sıfıra eşitlenir.

**1-** $$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=\mathrm{I}_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\mathrm{I}_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial t^2} \qquad (5.13)$$

**2-** $$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=\mathrm{I}_0\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}-\mathrm{I}_1\frac{\partial^3 w_0}{\partial y\partial t^2} \qquad (5.14)$$

**3-** $$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+N(w_0)+q=\mathrm{I}_0\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\mathrm{I}_1\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y\partial t^2}\right)-\mathrm{I}_2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial t^2}\right)$$

$$N(w_0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad (5.15)$$

Kuvvet bileşenlerini açık halleriyle yazarsak;

$$\begin{aligned}
N_{xx}&=A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-B_{11}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-B_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2B_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\\
N_{yy}&=A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-B_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-B_{22}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2B_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\\
N_{xy}&=A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-B_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-B_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2B_{66}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}
\end{aligned}$$

(5.16)

Kuvvet bileşenlerinin x’e göre kısmi türevlerinin alınması;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}&=A_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)-B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-B_{12}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}-2B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\\
\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}&=A_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)-B_{12}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}-2B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}&=A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)-B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}-2B_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\\
\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}&=A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)-B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}-2B_{66}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}
\end{aligned}$$

(5.17)

Kuvvet bileşenlerinin kısmi türevleri (5.13) ve (5.14) denklemlerinde yerlerine yazılır ve denklemler sıfıra eşitlenirse denklem (5.18), (5.19) elde edilir.

**1-** $$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{2}A_{11}-B_{11}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x}+\left(\frac{1}{2}A_{12}-B_{12}-2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}+2A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}$$

$$+A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\left(A_{16}-3B_{16}+\frac{1}{2}A_{16}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\left(\frac{1}{2}A_{26}-B_{26}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}=0 \qquad (5.18)$$

**2-** $$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\left(A_{66}-2B_{66}\,\frac{1}{2}A_{12}-B_{12}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}+\left(\frac{1}{2}A_{16}-B_{16}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_{26}-3B_{26}+A_{26}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}+\left(A_{66}+A_{12}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_{12}-B_{22}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0 \qquad (5.19)$$

Moment bileşenlerini açık halleriyle yazarsak;

$$M_{xx}=B_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-D_{11}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-D_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2D_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

$$M_{yy}=B_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-D_{12}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-D_{22}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2D_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

$$M_{xy}=B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)-D_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-D_{26}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-2D_{66}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}$$

(5.20)

Moment bileşenlerinin x’e göre iki defa kısmi türevleri alınırsa;

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}=B_{11}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}\right)-D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-D_{12}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2\partial x^2}-2D_{16}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}=B_{12}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x\partial y^3}\right)-D_{12}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}-D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}-2D_{26}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^3\partial x}$$

$$2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=2B_{16}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}\right)2B_{26}\left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^3\partial x}\right)+2B_{66}\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)-2D_{16}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}-2D_{26}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^3\partial x}-4D_{66}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}$$

(5.21)

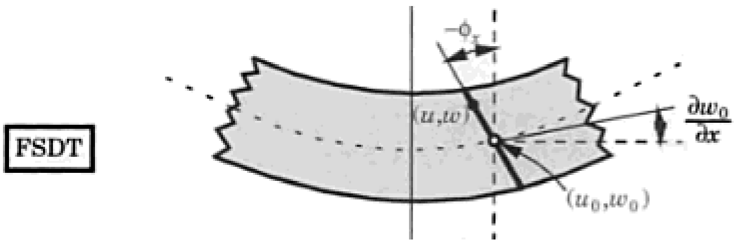
Türevleri alınmış moment bileşenleri (5.21), (5.15)’de yerlerine yazılır ve denklem sıfıra eşitlenirse klasik laminasyon teorisinin üçüncü denklemi de elde edilmiş olur.

**3.** $$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2}+N\left(w_0\right)+q=B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+\left(\frac{1}{2}B_{11}-D_{11}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}$$
$$+\left(B_{12}-2D_{12}+2B_{66}-4D_{66}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+3B_{16}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}$$
$$+B_{16}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}+\left(B_{16}-2D_{16}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2\partial x}$$
$$+B_{22}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}+\left(\frac{1}{2}B_{22}-D_{22}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+B_{26}\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3}+3B_{26}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^2\partial x}$$
$$+\left(2B_{26}-4D_{26}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x\partial y^3}+\left(B_{16}-2D_{16}\right)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}+N\left(w_0\right)+q=0 \tag{5.22}$$

Sonuç olarak klasik laminasyon teorisinin (CLT) üç temel hareket denklemi (5.18), (5.19) ve (5.22) elde edilmiş olur (birim yer değiştirmeler için).

### 5.3 Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT)

Kirchoff hipotezinin 3. kısmı çıkartılır (19. sayfaya bakınız). Yani deformasyon sonrasında enine normalleri orta yüzeye dik kalmazlar. **Enine kayma etkisindeki birim yer değişimleri teoriye dahil edilirler**. Bunun için de w'nin kalınlık koordinatı z'nin bir fonksiyonu olmadığı kabul edilir.




Sekil 5.4 Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları.

Birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi için birim yer değiştirme denklemleri;

$$\left.\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\varnothing_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\varnothing_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \varnothing_x &= \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{(y eksenine dönüş)} \\ \varnothing_y &= \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{(x eksenine dönüş)} \end{aligned} \tag{5.23}$$

Enine normallerinin y ve x ekseni etrafındaki dönmeleri;

$$\varnothing_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \varnothing_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 + z\frac{\partial \varnothing_x}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right) + z\left(\frac{\partial \varnothing_x}{\partial y} + \frac{\partial \varnothing_y}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 + z\frac{\partial \varnothing_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varnothing_x \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varnothing_y \qquad \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

FSDT'de enine kayma birim uzamaları $(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ lamine kalınlığı boyunca değişmediğinden birim uzamalar da $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ lamine kalınlığı boyunca lineerdir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0{}_{xx} \\ \varepsilon^0{}_{yy} \\ \gamma^0{}_{yz} \\ \gamma^0{}_{xz} \\ \gamma^0{}_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon^1{}_{xx} \\ \varepsilon^1{}_{yy} \\ \gamma^1{}_{yz} \\ \gamma^1{}_{xz} \\ \gamma^1{}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varnothing_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varnothing_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varnothing_x}{\partial_x} \\ \frac{\partial \varnothing_y}{\partial_y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \varnothing_x}{\partial y} + \frac{\partial \varnothing_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5.25}$$

Enine kayma etkisindeki birim yer değişimleri, lamine kalınlığı boyunca sabit gibi düşünülerek, Kayma Düzeltme Katsayısı ile hesaplamalara dahil edilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \qquad \text{K: Kayma düzeltme katsayısı} \tag{5.26}$$

FSDT'nin birim yer değiştirme ve birim dönme miktarı denklemleri aşağıdaki gibidir (Reddy,2003). Bu denklemlerde eşitliğin karşılıkları yazılmışsa da problemler statik kabul ettiğinde denklemler sıfıra eşitlenir.

**1-** $$\partial u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \tag{5.27}$$

**2-** $$\partial v_0 : \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \tag{5.28}$$

**3-** $$\partial w_0 : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w_0) + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \tag{5.29}$$

**4-** $$\partial \phi_x : \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \tag{5.30}$$

**5-** $$\partial \phi_y : \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \tag{5.31}$$

### 5.3.1 Birim Yer Değişimleri ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması

CLPT de olduğu gibi birinci mertebe kayma deformasyon teorisinde de kuvvet, moment ve enine kesme kuvveti bileşenlerindeki $\bar{Q}_{ij}$ katılık matrisinin z ile ilişkilendirerek $\left(A_{i,j}, B_{i,j} D_{i,j}\right)$ matrisleri halinde bölünerek yazılmasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ \cdots & A_{22} & A_{26} \\ \cdots & \cdots & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ \cdots & B_{22} & B_{26} \\ \cdots & \cdots & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5.32}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ \cdots & B_{22} & B_{26} \\ \cdots & \cdots & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ \cdots & D_{22} & D_{26} \\ \cdots & \cdots & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{5.33}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \dfrac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \tag{5.34}$$

Kuvvet bileşenlerinin açık hallerinin yazılması;

$$N_{xx} = A_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + A_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ B_{11}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{16}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$

$$N_{yy} = A_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + A_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + A_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ B_{12}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{26}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$

$$N_{xy} = A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + A_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + A_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ B_{16}\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \tag{5.35}$$

Kuvvet bileşenlerin kısmi türevlerinin alınması;

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}=A_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)$$

$$+B_{11}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}+B_{16}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}=A_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)$$

$$+B_{12}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+B_{26}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^3}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)$$

$$+B_{16}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+B_{26}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y\partial x}+B_{66}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=A_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+A_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)$$

$$+B_{16}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+B_{26}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+B_{66}\left(\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}\right) \tag{5.36}$$

Elde edilen (5.36) denklemleri (5.27) ve (5.28) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa;

**1-** $$\delta u=\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}A_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\left(\frac{1}{2}A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}$$

$$+2A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}A_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}A_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+B_{11}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}$$

$$+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}+2B_{16}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+B_{16}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}+B_{26}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}=0 \tag{5.37}$$

**2-** $$\delta v=\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=\left(A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\left(\frac{1}{2}A_{12}+A_{66}\right)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}A_{22}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}$$

$$+A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{3}{2}A_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}+A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}A_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}$$

$$+\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+B_{26}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}+2B_{26}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}+B_{16}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}=0 \tag{5.38}$$

denklemleri elde edilir.

Moment bileşenlerinin açık hallerinin yazılması;

$$M_{xx}=B_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+D_{11}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial \phi_y}{\partial y}+D_{16}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$

$$M_{yy}=B_{12}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+D_{12}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial \phi_y}{\partial y}+D_{26}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$

$$M_{xy}=B_{26}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+D_{16}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}+D_{26}\frac{\partial \phi_y}{\partial y}+D_{66}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right)$$

(5.39)

Moment bileşenlerin kısmi türevlerinin alınması;

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}=B_{11}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}$$
$$+D_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}+D_{16}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}=B_{12}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)+D_{12}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}$$
$$+D_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}+D_{26}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2\partial x}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+D_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}$$
$$+D_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=B_{16}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}\right)+B_{26}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\right)+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}\right)+D_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}$$
$$+D_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}\right)$$

(5.40)

Enine kesme kuvveti bileşenlerinin açık hallerinin yazılması;

$$Q_y=KA_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\right)+KA_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right)$$

$$Q_x=KA_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+\phi_y\right)+KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+\phi_x\right) \tag{5.41}$$

Enine kesme kuvveti bileşenlerin kısmi türevlerinin alınması;

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = KA_{44}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) + KA_{45}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = KA_{45}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) + KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) \qquad (5.42)$$

Elde edilen (5.40) ve (5.42) denklemleri (5.29), (5.30) ve (5.31) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa;

**3-** $\delta w_0 : \dfrac{\partial Q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_y}{\partial y} + N\left(w_0\right) + q = 2KA_{45}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + KA_{45}\dfrac{\partial \phi_y}{\partial x} + KA_{55}\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + KA_{55}\dfrac{\partial \phi_x}{\partial x}$

$$+KA_{44}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + KA_{44}\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + KA_{45}\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + N\left(w_0\right) + q = 0 \qquad (5.43)$$

$$N\left(w_0\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xx}\frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \qquad (5.44)$$

**4-** $\delta \phi_x : \dfrac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = B_{11}\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}B_{11}\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \left(B_{12} + B_{66}\right)\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \left(\dfrac{1}{2}B_{12} + B_{66}\right)\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2}$

$$+2B_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 1\frac{1}{2}B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2}B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}$$

$$+B_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \left(D_{12} + D_{66}\right)\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2D_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{16}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}$$

$$+D_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} - KA_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y\right) - KA_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) = 0 \qquad \underline{(5.45)}$$

**5-** $\delta \phi_y : \dfrac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = \left(B_{12} + B_{66}\right)\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \left(\dfrac{1}{2}B_{12} + B_{66}\right)\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22}\dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \dfrac{1}{2}B_{22}\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}$

$$+B_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 1\frac{1}{2}B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}$$

$$+B_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \left(D_{12} + D_{66}\right)\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y}$$

$$+D_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{66}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} - KA_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y\right) - KA_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x\right) = 0 \qquad (5.46)$$

denklemleri elde edilmiş olur. Sonuç olarak birinci mertebeden kayma deformasyon teorisinin (FSDT) beş temel hareket denklemi (5.37), (5.38), (5.43), (5.45) ve (5.46) elde edilmiş olur (birim yer değiştirmeler için).

### 5.4 Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi:

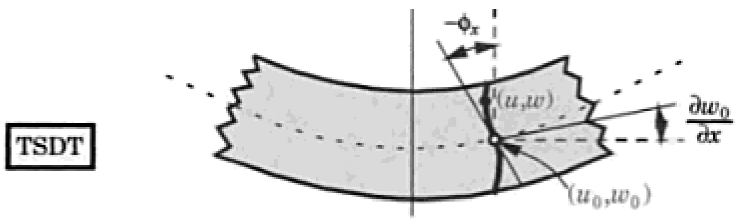
#### 5.4.1 Giriş:

Klasik laminasyon teorisi ve birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi en basit katmanlı levha teorisi olarak kabul edilir ve bu teoriler birçok levhanın kinematik davranışını yeterli derecede açıklar. Üçüncü Mertebeden Teori kinematik davranışları daha iyi gösterebilmekte, kayma düzeltme katsayısına (K) gerek duyulmamakta ve levhalar arası gerilme dağılımını daha hassas verebilmektedir (Reddy, 2003). Ancak bu teoriler, fiziksel olarak yorumlaması zor olan ve önemli hesap uğraşı gerektiren yüksek dereceli birim yer değişimi bileşenlerini içermektedir. Bu nedenle bu tür teoriler sadece gerekli olduğu durumlarda kullanılırlar.

Prensipte, kalınlık koordinatları için yer değiştirme denklemlerini tercih edilen farklı mertebeden teorilerle uygulamak mümkündür. Ancak cebirsel karışıklık ve hesaplama uğraşı gerektirmeleri nedeniyle, ayrıca daha yüksek mertebeden teoriler sonucun kesinliğinde çok ufak bir kazanç sağladıkları için üçüncü dereceden daha yüksek mertebeli teorilere başvurulmaz. Birim yer değiştirmeleri kalınlık koordinatlarında kübik terimlerle ifade etmenin nedeni; her katmandaki enine kayma gerilmelerinin neden olduğu birim yer değişimlerini ikinci mertebeden ifadelerle elde etmektir. Böylelikle birinci mertebeden teoride yer alan kayma düzeltme katsayısına gerek duyulmamış olunur.

#### 5.4.2 Yer Değiştirme Denklemleri

Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisinin (Şekil 5.5) geliştirilmesi, klasik ve birinci mertebeden kayma deformasyon teorisi ile aynı varsayımlara dayanmaktadır. Ancak bu teoride, yer değiştirmelerin kalınlık koordinatlarının kübik fonksiyonları olarak genişletilmesiyle, deformasyon sonrası enine normallerin, normallikleri ve doğrultuları konusundaki varsayımlar daha genişletilmiştir. Kirchoff hipotezi kabulleri burada da geçerlidir (19. sayfaya bakınız).




Şekil 5.5 Üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorisine göre enine normallerin deformasyonları.

Üçüncü mertebeden kayma deformasyon teorisi için genel haliyle yer değiştirme denklemleri;

$$
\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\
v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t) - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\
w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t)
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

### 5.4.3 Hareket Denklemlerinin Çıkartılması

Enerji ve varyasyon prensipleri kullanılarak elastisitede yer alan birçok denklemin türetilmesinde büyük basitleştirmeler sağlanır. Bu prensipler birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır. Enerji ifadeleri şekil değiştirme enerjisi, dış kuvvetlerin yaptığı iş ve kinetik enerji olarak tanımlanır. Sınır şartları ve denge denklemlerinin türetilmesinde ve enerji yönteminin uygulanmasında varyasyon ifadesini içeren Hamilton prensibi kullanılabilir.

Enerji, iş yapabilme kapasitesi olarak tanımlanır. Çeşitli yükler altında deformasyona uğrayan katı bir elemanda, yüzeysel yükler tarafından yapılan iş, şekil değiştirme enerjisi olarak depolanır.

Hamilton prensibi birçok mekanik problemine uygulanabilen genel bir prensiptir. Bu yöntemde, dinamik sistemler zaman uzayında bir noktadan diğer bir noktaya taşınabilirler. Sistem, potansiyel ve kinetik enerji arasındaki farkın zamana göre integrali alınıp minimize edilmesiyle uygulanır. Hamilton prensibi kullanılarak, enerji denklemlerine gerçek birim yer değiştirmeleri uygulanır ve elde edilen denklem sıfıra eşitlenerek hareket denklemlerine ulaşılabilir. En genel haliyle Hamilton prensibi (Reddy, 2003);

$$
\boxed{\int_0^t \left(\partial U + \partial V - \partial K\right) dt = 0}
\tag{5.48}
$$

Hamilton prensibindeki şekil değiştirme enerjisi, dış kuvvetlerin yaptığı iş ve kinetik enerji ifadelerinin açık halleri aşağıda verilmektedir.

### 5.4.3.1 Şekil Değiştirme Enerjisi

İnce kabuklar için enerji denklemleri yazılırken, ince kabuk elemanlar için yapılan kabuller dikkate alınır. Böylece denklemler basit bir hal alırlar. İnce kabuk elemanların şekil değiştirme enerjisi şu şekilde tanımlanır.

$$\delta U=\int_{\Omega_0}\left\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\Big[\sigma_{xx}\left(\delta\varepsilon^{(0)}{}_{xx}+z\delta\varepsilon^{(1)}{}_{xx}-c_1z^3\delta\varepsilon^{(3)}{}_{xx}\right)+\sigma_{yy}\left(\delta\varepsilon^{(0)}{}_{yy}+z\delta\varepsilon^{(1)}{}_{yy}-c_1z^3\delta\varepsilon^{(3)}{}_{yy}\right)\right.$$
$$\left.+\sigma_{xy}\left(\delta\gamma^{0}{}_{xy}+z\delta\gamma^{1}{}_{xy}-c_1z^3\delta\gamma^{(3)}{}_{xy}\right)+\sigma_{xz}\left(\delta\gamma^{0}{}_{xz}+z^2\delta\gamma^{2}{}_{xz}\right)+\sigma_{yz}\left(\delta\gamma^{0}{}_{yz}+z^2\delta\gamma^{2}{}_{yz}\right)\Big]dz\right\}dxdy \tag{5.49}$$

$$\delta U=\int_{\Omega_0}\Big(N_{xx}\delta\varepsilon^{(0)}{}_{xx}+M_{xx}\delta\varepsilon^{(1)}{}_{xx}-c_1P_{xx}\delta\varepsilon^{(3)}{}_{xx}+N_{yy}\delta\varepsilon^{(0)}{}_{yy}+M_{yy}\delta\varepsilon^{(1)}{}_{yy}-c_1P_{yy}\delta\varepsilon^{(3)}{}_{yy}+N_{xy}\delta\gamma^{(0)}{}_{xy}$$
$$M_{xy}\delta\gamma^{(1)}{}_{xy}-c_1P_{xy}\delta\gamma^{(3)}{}_{xy}+Q_x\delta\gamma^{(0)}{}_{xz}-c_2R_x\delta\gamma^{(0)}{}_{xz}+Q_y\delta\gamma^{(0)}{}_{yz}-c_2R_y\delta\gamma^{(0)}{}_{yz}\Big)dxdy$$

$$c_1=\frac{4}{3}h^2 \qquad c_2=3c_1 \tag{5.50}$$

### 5.4.3.2 Dış Kuvvetlerin Yaptığı İş

$$\delta V=-\int_{\Omega_0}\left[q_b(x,y)\,\delta w\left(x,y,-\frac{h}{2}\right)+q_t(x,y)\,\delta w\left(x,y,\frac{h}{2}\right)\right]dxdy-\int_{\Gamma}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\Big[\widehat{\sigma}_{nn}\left(\delta u_n+z\delta\phi_n-c_1z^3\delta\varphi_n\right)$$
$$+\widehat{\sigma}_{ns}\left(\delta u_s+z\delta\phi_s-c_1z^3\delta\varphi_{ns}\right)+\widehat{\sigma}_{nz}\delta w_0\Big]dzd_{\Gamma} \tag{5.51}$$

### 5.4.3.3 Kinetik Enerji

İnce kabuklar için kinetik enerji ifadesi de yapılan kabuller ve ihmaller dikkate alınarak şu şekilde yazılabilir.

$$\delta K=\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho_0\Big[\left(\dot u_0+z\dot\phi_x-c_1z^3\dot\varphi_x\right)\left(\delta\dot u_0+z\delta\dot\phi_x-c_1z^3\delta\dot\varphi_x\right)+\left(\dot v_0+z\dot\phi_y-c_1z^3\dot\varphi_y\right)\left(\delta\dot v_0+z\delta\dot\phi_y-c_1z^3\delta\dot\varphi_y\right)+\dot w_0\delta\dot w_0\Big]dv \tag{5.52}$$

$$\delta K=\int_{\Omega_0}\Big[\left(I_0\dot u_0+I_1\dot\phi_x-c_1I_3\dot\varphi_x\right)\delta\dot u_0+\left(I_1\dot u_0+I_2\dot\phi_x-c_1I_4\dot\varphi_x\right)\delta\dot\phi_x-c_1\left(I_3\dot u_0+I_4\dot\phi_x-c_1I_6\dot\varphi_x\right)\delta\dot\phi_x$$
$$+\left(I_0\dot v_0+I_1\dot\phi_y-c_1I_3\dot\varphi_y\right)\delta\dot v_0+\left(I_1\dot v_0+I_2\dot\phi_y-c_1I_4\dot\varphi_y\right)\delta\dot\phi_y-c_1\left(I_3\dot u_0+I_4\dot\phi_y-c_1I_6\dot\varphi_y\right)\delta\dot\varphi_y\Big]dxdy \tag{5.53}$$

Burada,Ω plakanın orta düzlemini göstermektedir.

Denklem (5.52) deki kinetik enerji denkleminin çift eğrilikli plaka için uyarlanması;

$$\delta K=\int_{\Omega_0}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\rho_0\left[\left[\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\dot{u}_0+z\dot{\phi}_x-\frac{4}{3h^2}z^3\dot{\varphi}_x\right]\left[\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\delta\dot{u}_0+z\delta\dot{\phi}_x-\frac{4}{3h^2}z^3\delta\dot{\varphi}_x\right]+\left[\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\dot{v}_0+z\dot{\phi}_y-\frac{4}{3h^2}z^3\dot{\varphi}_y\right].\right.$$
$$\left.\left[\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\delta\dot{v}_0+z\delta\dot{\phi}_y-\frac{4}{3h^2}z^3\delta\dot{\varphi}_y\right]+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right]dv \qquad (5.54)$$

$$\underbrace{\dot{\varphi}_x=\dot{\phi}_x+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\qquad \dot{\varphi}_y=\dot{\phi}_y+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\qquad \delta\dot{\varphi}_x=\delta\dot{\phi}_x+\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\qquad \delta\dot{\varphi}_y=\delta\dot{\phi}_y+\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}}_{} \qquad (5.55)$$

Denklem (5.55) deki dönme ifadeleri (5.54) de yerlerine yazılırsa;

$$\delta K=-\int_0^t\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}2\left\{\rho_0\int_\Omega^k\left[\left(\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\dot{u}_0+z\dot{\phi}_x-\frac{4}{3h^2}z^3\left(\dot{\phi}_x+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)\left(\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\delta\dot{u}_0+z\delta\dot{\phi}_x-\frac{4}{3h^2}z^3\left(\delta\dot{\phi}_x+\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\dot{v}_0+z\dot{\phi}_y-\frac{4}{3h^2}z^3\left(\dot{\phi}_y+\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)\left(\left(1+\frac{z}{R_2}\right)\delta\dot{v}_0+z\delta\dot{\phi}_y-\frac{4}{3h^2}z^3\left(\delta\dot{\phi}_y+\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right)\right)+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right]dxdy\right\}dt$$
$$(5.56)$$

Denklem (5.56) daki çarpma işlemleri gerçekleştirilirse;

$$\delta K=-\int_0^t\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}2\left\{\rho_0\int_\Omega^k\left[\left(\dot{u}_0+\frac{z}{R_1}\dot{u}_0+z\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)\left(\delta\dot{u}_0+\frac{z}{R_1}\delta\dot{u}_0+z\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\dot{v}_0+\frac{z}{R_2}\dot{v}_0+z\dot{\phi}_y-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{\phi}_y-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)\left(\delta\dot{v}_0+\frac{z}{R_2}\delta\dot{v}_0+z\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^3}{3h^2}\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^3}{3h^2}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\right)+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right]dxdy\right\}dt$$

$$\delta K=-\int_0^t\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}2\left\{\rho_0\int_\Omega^k\left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+\frac{z}{R_1}\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+z\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\frac{z}{R_1}\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+\frac{z^2}{R_1^2}\dot{u}_0\delta\dot{u}_0+\frac{z^2}{R_1}\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x\right.\right.$$
$$-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+z\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0+\frac{z^2}{R_1}\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0+z^2\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_x\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}$$
$$-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x+\frac{16z^6}{9h^4}\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x+\frac{16z^6}{9h^4}\dot{\phi}_x\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}-\frac{4z^3}{3h^2}\delta\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\delta\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}$$

$$-\frac{4z^4}{3h^2}\delta\dot{\phi}_x\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}+\frac{16z^6}{9h^4}\delta\dot{\phi}_x\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}+\frac{16z^6}{9h^4}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}+\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+\frac{z}{R_2}\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+z\dot{v}_0\delta\phi_y-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{v}_0\delta\phi_y$$

$$-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+\frac{z}{R_2}\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+\frac{z^2}{R_2^2}\dot{v}_0\delta\dot{v}_0+\frac{z^2}{R_2}\dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+z\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0$$

$$+\frac{z^2}{R_2}\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0+z^2\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_y\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}-\frac{4z^3}{3h^2}\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\dot{\phi}_y\delta\dot{v}_0-\frac{4z^4}{3h^2}\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y+\frac{16z^6}{9h^4}\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y$$

$$+\frac{16z^6}{9h^4}\dot{\phi}_y\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}-\frac{4z^3}{3h^2}\delta\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\delta\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}-\frac{4z^4}{3h^2}\delta\dot{\phi}_y\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}+\frac{16z^6}{9h^4}\delta\dot{\phi}_y\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}+\frac{16z^6}{9h^4}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}$$

$$+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\Big)dxdy\Big\}dt \qquad (5.57)$$

denklemi elde edilir.

İç çarpma işlemleri yapıldıktan sonra elde edilen (5.57) denklemi kendi içerisinde gruplandırılırsa denklem (5.58) elde edilir.

$$\delta K=-\int_0^t\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}2\rho_0\left\{\int_\Omega^k\left(\dot{u}_0\delta\dot{u}_0\left(1+\frac{2z}{R_1}+\frac{z^2}{R_1^2}\right)+\dot{u}_0\delta\dot{\phi}_x\left(z+\frac{z^2}{R_1}-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\right)+\dot{u}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\left(-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\right)\right.\right.$$

$$+\dot{\phi}_x\delta\dot{u}_0\left(z+\frac{z^2}{R_1}-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\right)+\dot{\phi}_x\delta\dot{\phi}_x\left(z^2-\frac{8z^4}{3h^2}+\frac{16z^6}{9h^4}\right)+\dot{\phi}_x\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}\left(-\frac{4z^4}{3h^2}+\frac{16z^6}{9h^4}\right)$$

$$+\delta\dot{u}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\left(-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_1h^2}\right)+\delta\dot{\phi}_x\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\left(-\frac{4z^4}{3h^2}-\frac{16z^6}{9h^4}\right)+\dot{v}_0\delta\dot{v}_0\left(1+\frac{2z}{R_2}+\frac{z^2}{R_2^2}\right)+\dot{v}_0\delta\dot{\phi}_y\left(z+\frac{z^2}{R_2}-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\right)$$

$$+\dot{v}_0\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\left(-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\right)+\phi_y\delta\dot{v}_0\left(z+\frac{z^2}{R_2}-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\right)+\dot{\phi}_y\delta\dot{\phi}_y\left(z^2-\frac{8z^4}{3h^2}+\frac{16z^6}{9h^4}\right)$$

$$+\dot{\phi}_y\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}\left(-\frac{4z^4}{3h^2}-\frac{16z^6}{9h^4}\right)+\delta\dot{v}_0\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\left(-\frac{4z^3}{3h^2}-\frac{4z^4}{3R_2h^2}\right)+\delta\dot{\phi}_y\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\left(-\frac{4z^4}{3h^2}-\frac{16z^6}{9h^4}\right)+\frac{16z^6}{9h^4}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial x}$$

$$\left.\left.+\frac{16z^6}{9h^2}\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\frac{\partial\delta\dot{w}_0}{\partial y}+\dot{w}_0\delta\dot{w}_0\right]dxdy\right\}dt \qquad (5.58)$$

### 5.4.3.4 Nihai Kinetik Enerji Denklemi

$$\delta K=-\int_0^t 2\int_\Omega^k\left\{\delta\dot{u}_0\left(\bar{I}_1\dot{u}_0+\bar{I}_2\dot{\phi}_1-\bar{I}_3\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial x}\right)+\delta\dot{v}_0\left(\bar{I}_1'\dot{v}_0+\bar{I}_2'\dot{\phi}_y-\bar{I}_3'\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)+\delta\phi_1\left(\bar{I}_2\dot{u}_0+\bar{I}_4\dot{\phi}_1-\bar{I}_5\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left.+\delta\phi_2\left(\bar{I}_2'\dot{v}_0+\bar{I}_4\dot{\phi}_2-\bar{I}_5\frac{\partial\dot{w}_0}{\partial y}\right)+\delta\dot{w}\left(\bar{I}_3\frac{\partial\dot{u}_0}{\partial x}+\bar{I}_5\frac{\partial\dot{\phi}_1}{\partial x}+\bar{I}_3'\frac{\partial\dot{v}_0}{\partial y}+\bar{I}_5\frac{\partial\dot{\phi}_2}{\partial y}-I_7\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial x^2}-I_7\frac{\partial^2\dot{w}_0}{\partial y^2}-I_1\dot{w}_0\right)\right\}d_\Omega dt$$

$$(5.59)$$

Yukarıda verilen enerji denkleminin çözülmesi ile 5 adet hareket denklemi (EulerLagrange denklemleri) tanımlanır (Reddy, 2003).

$$1.\ \delta u_0 : \boxed{\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_6}{\partial y}=\bar{I}_1\dot{u}_0+\bar{I}_2\dot{\phi}_1-I_3\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}} \tag{5.60}$$

$$2.\ \delta v_0 : \boxed{\frac{\partial N_6}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}=\bar{I}_1'\dot{v}_0+\bar{I}_2'\dot{\phi}_2-I_3'\frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x}} \tag{5.61}$$

$$3.\ \delta w_0 : \boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}-\frac{4}{h^2}\left(\frac{\partial K_1}{\partial x}+\frac{\partial K_2}{\partial y}\right)+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 P_6}{\partial x\partial y}\right)-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}=\\&=\bar{I}_3\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\bar{I}_5\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\bar{I}_3'\frac{\partial \dot{v}_0}{\partial y}+\bar{I}_5'\frac{\partial \phi_2}{\partial y}-I_1\dot{w}-I_7\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2}-I_7\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2}-q\end{aligned}} \tag{5.62}$$

$$4.\ \delta \phi_1 : \boxed{\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial M_6}{\partial y}-Q_1+\frac{4}{h^2}K_1-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_6}{\partial y}\right)=\bar{I}_2\dot{u}_0+\bar{I}_4\dot{\phi}_1-\bar{I}_5\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}} \tag{5.63}$$

$$5.\ \delta \phi_2 : \boxed{\frac{\partial M_6}{\partial x}+\frac{\partial M_2}{\partial y}-Q_2+\frac{4}{h^2}K_2-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_6}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)=\bar{I}_2'\dot{v}_0+\bar{I}_4'\dot{\phi}_2-\bar{I}_5\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}} \tag{5.64}$$

### 5.4.4 Birim Yer Değişimleri ve Şekil Değişimlerinin Tanımlanması

Normal kuvvet, eğilme - burulma momenti ve yüksek mertebeli kayma terimlerinin matris formunda genel haliyle yazılışı aşağıda verilmiştir (5.65). Denklem (5.66) da ise enine kesme kuvveti bileşenleri ile kayma bileşenlerinin genel halleriyle yazılışı yer almaktadır.

Bu bölümdeki indis takımında x=1, y=2, z=3 ve xy=6 olacak şekilde dönüştürülerek kullanılmıştır.

$$\left\{\begin{matrix}\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_6\end{Bmatrix}\\\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\\M_6\end{Bmatrix}\\\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\\P_6\end{Bmatrix}\end{matrix}\right\}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}\\A_{12}&A_{22}&A_{26}\\A_{16}&A_{26}&A_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\B_{12}&B_{22}&B_{26}\\B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{16}\\E_{12}&E_{22}&E_{26}\\E_{16}&E_{26}&E_{66}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{16}\\B_{12}&B_{22}&B_{26}\\B_{16}&B_{26}&B_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&D_{16}\\D_{12}&D_{22}&D_{26}\\D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{16}\\F_{12}&F_{22}&F_{26}\\F_{16}&F_{26}&F_{66}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{16}\\E_{12}&E_{22}&E_{26}\\E_{16}&E_{26}&E_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{16}\\F_{12}&F_{22}&F_{26}\\F_{16}&F_{26}&F_{66}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}&H_{16}\\H_{12}&H_{22}&H_{26}\\H_{16}&H_{26}&H_{66}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^0\\\varepsilon_2^0\\\varepsilon_6^0\\\kappa_1^0\\\kappa_2^0\\\kappa_6^0\\\kappa_1^2\\\kappa_2^2\\\kappa_6^2\end{Bmatrix} \tag{5.65}$$

$$\left\{\begin{matrix}\begin{Bmatrix}Q_2\\Q_1\end{Bmatrix}\\\begin{Bmatrix}K_2\\K_1\end{Bmatrix}\end{matrix}\right\}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{44}&A_{45}\\A_{45}&A_{55}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}D_{44}&D_{45}\\D_{45}&D_{55}\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}D_{44}&D_{45}\\D_{45}&D_{55}\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}F_{44}&F_{45}\\F_{45}&F_{55}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_4^0\\\varepsilon_5^0\\\kappa_4^1\\\kappa_5^1\end{Bmatrix} \tag{5.66}$$

A,B,D,E,F ve H matrisleri, $\left[\bar{Q}_{i,j}\right]$ indirgenmiş katılık matrisini kalınlık mertebeleriyle çarptığımızda elde ettiğimiz matrislerdir. Denklem (5.67) ve (5.68) bu matrislerin genel halleriyle yazılışlarını göstermektedir.

$$\left(A_{i,j}, B_{i,j} D_{i,j} E_{i,j}, F_{i,j} H_{i,j}\right)=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{i,j}\left(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6\right) dz \tag{5.67}$$

$$A_{i,j}=\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z_{k+1}-z_k\right) \quad B_{i,j}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z^2{}_{k+1}-z^2{}_k\right) \quad D_{i,j}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{i,j}^{k}\left(z^3{}_{k+1}-z^3{}_k\right)$$

$$E_{ij}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{ij}^{k}\left[\left(z_{k+1}\right)^4-z_k^4\right] \quad F_{ij}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{ij}^{k}\left[\left(z_{k+1}\right)^5-z_k^5\right] \quad H_{ij}=\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{N}\bar{Q}_{ij}^{k}\left[\left(z_{k+1}\right)^7-z_k^7\right] \tag{5.68}$$

Ortotropik malzeme için kalınlık mertebeleriyle çarpılmış katılık matrisleri denklem (5.69) da gösterilmektedir.

$$\left(A_{i,j}, B_{i,j} D_{i,j} E_{i,j}, F_{i,j} H_{i,j}\right) = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & 0 \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{66} \end{bmatrix} \qquad \zeta = A, B, D, E, F, H \tag{5.69}$$

Elastisite teorisinin temel ifadeleri kullanılarak denklem (5.65) ve (5.66) da yer alan birim uzamalar ve eğrilikler aşağıdaki gibi (5.70-5.71) matris formunda yazılır.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ \kappa_1^0 \\ \kappa_2^0 \\ \kappa_6^0 \\ \kappa_1^2 \\ \kappa_2^2 \\ \kappa_6^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} + \dfrac{u_3}{R_1} \\ u_{2,2} + \dfrac{u_3}{R_2} \\ u_{2,1} + u_{1,2} \\ \phi_{1,1} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{1,2} + \phi_{2,1} \\ -\dfrac{4}{3h^2}\left(\phi_{1,1} + u_{3,11}\right) \\ -\dfrac{4}{3h^2}\left(\phi_{2,2} + u_{3,22}\right) \\ -\dfrac{4}{3h^2}\left(\phi_{2,1} + \phi_{1,2} + 2u_{3,12}\right) \end{Bmatrix} \tag{5.70}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_4^0 \\ \varepsilon_5^0 \\ \kappa_4^1 \\ \kappa_5^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_2 + u_{3,2} \\ \phi_1 + u_{3,1} \\ -\dfrac{4}{h^2}\left(\phi_2 + u_{3,2}\right) \\ -\dfrac{4}{h^2}\left(\phi_1 + u_{3,1}\right) \end{Bmatrix} \tag{5.71}$$

### 5.4.5 Antisimetrik –Dik Katmanlı (Cross Ply)–Çift Eğrilikli Levha İçin Kuvvet ve Moment Açılımları

#### 5.4.5.1 Kuvvet Bileşenleri

Matris formunda verilen denklem (5.65) deki kuvvet bileşenleri bölümü alınarak $A_{ij}, B_{ij}, E_{ij}$ matrislerinin ortotropik lamine için geçerli halleri denklemde yerlerine yazılır.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1,1} + \dfrac{u_3}{R_1} \\ u_{2,2} + \dfrac{u_3}{R_2} \\ u_{2,1} + u_{1,2} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_i,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{1,2} + \phi_{2,1} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^0,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1} + u_{3,11} \\ \phi_{2,2} + u_{3,22} \\ \phi_{2,1} + \phi_{1,2} + 2u_{3,12} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^2,\, i=1,2,6} \tag{5.72}$$

Denklem (5.72) de kapalı formda verilen kuvvet denklemlerinin açık hallerinin yazılması;

$$N_1 = A_{11}\left(u_{1,1} + \frac{u_3}{R_1}\right) + A_{12}\left(u_{2,2} + \frac{u_3}{R_2}\right) + B_{11}\phi_{1,1} + B_{12}\phi_{2,2} - \frac{4}{3h^2}E_{11}\left(\phi_{1,1} + u_{3,11}\right) - \frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\phi_{2,2} + u_{3,22}\right)$$

$$N_2 = A_{12}\left(u_{1,1} + \frac{u_3}{R_1}\right) + A_{22}\left(u_{2,2} + \frac{u_3}{R_2}\right) + B_{12}\phi_{1,1} + B_{22}\phi_{2,2} - \frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\phi_{1,1} + u_{3,11}\right) - \frac{4}{3h^2}E_{22}\left(\phi_{2,2} + u_{3,22}\right)$$

$$N_6 = A_{66}\left(u_{2,1} + u_{1,2}\right) + B_{66}\left(\phi_{1,2} + \phi_{2,1}\right) - \frac{4}{3h^2}E_{66}\left(\phi_{2,1} + \phi_{1,2} + 2u_{3,12}\right) \tag{5.73}$$

#### 5.4.5.2 Eğilme ve Burulma Momenti Bileşenleri

Matris formunda verilen denklem (5.65) deki moment bileşenleri bölümü alınarak $B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$ matrislerinin ortotropik lamine için geçerli halleri denklemde yerlerine yazılır.

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1,1} + \dfrac{u_3}{R_1} \\ u_{2,2} + \dfrac{u_3}{R_2} \\ u_{2,1} + u_{1,2} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_i,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{1,2} + \phi_{2,1} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^0,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1} + u_{3,11} \\ \phi_{2,2} + u_{3,22} \\ \phi_{2,1} + \phi_{1,2} + 2u_{3,12} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^2,\, i=1,2,6} \tag{5.74}$$

Denklem (5.74) de kapalı formda verilen moment denklemlerinin açık hallerinin yazılması;

$$M_1 = B_{11}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+B_{12}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+D_{11}\phi_{1,1}+D_{12}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}F_{11}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{12}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$M_2 = B_{12}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+B_{22}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+D_{12}\phi_{1,1}+D_{22}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}F_{12}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{22}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$M_6 = B_{66}\left(u_{2,1}+u_{1,2}\right)+D_{66}\left(\phi_{1,2}+\phi_{2,1}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{66}\left(\phi_{2,1}+\phi_{1,2}+2u_{3,12}\right) \qquad (5.75)$$

### 5.4.5.3 Yüksek Mertebeli Gerilme Bileşenleri

Matris formunda verilen denklem (5.65) deki yüksek mertebeli gerilme bileşenleri bölümü alınarak $E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}$ matrislerinin ortotropik lamine için geçerli halleri denklemde yerlerine yazılır.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_{1,1}+\dfrac{u_3}{R_1} \\ u_{2,2}+\dfrac{u_3}{R_2} \\ u_{2,1}+u_{1,2} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_i,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{1,2}+\phi_{2,1} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^0,\, i=1,2,6} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_{1,1}+u_{3,11} \\ \phi_{2,2}+u_{3,22} \\ \phi_{2,1}+\phi_{1,2}+2u_{3,12} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^2,\, i=1,2,6}$$

(5.76)

Denklem (5.76) da kapalı formda verilen yüksek mertebeli gerilme bileşeni denklemlerinin açık hallerinin yazılması;

$$P_1 = E_{11}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+E_{12}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+F_{11}\phi_{1,1}+F_{12}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}H_{11}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$P_2 = E_{12}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+E_{22}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+F_{12}\phi_{1,1}+F_{22}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{22}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$P_6 = E_{66}\left(u_{2,1}+u_{1,2}\right)+F_{66}\left(\phi_{1,2}+\phi_{2,1}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{66}\left(\phi_{2,1}+\phi_{1,2}+2u_{3,12}\right) \qquad (5.77)$$

### 5.4.5.4 Enine Kesme Kuvveti Bileşenleri

Matris formunda verilen denklem (5.66) daki enine kesme kuvveti bileşenleri bölümü alınarak $A_{ij}, D_{ij}$ matrislerinin ortotropik lamine için geçerli halleri yerlerine yazılır.

$$\begin{Bmatrix} Q_2 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_2 + u_{3,2} \\ \phi_1 + u_{3,1} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_i,\, i=4,5} + \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \left( -\frac{4}{h^2} \right) \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_2 + u_{3,2} \\ \phi_1 + u_{3,1} \end{Bmatrix}}_{\kappa_i^1,\, i=4,5} \tag{5.78}$$

Denklem (5.78) de kapalı formda verilen enine kesme kuvveti denklemlerinin açık hallerinin yazılması;

$$Q_2 = A_{44}\left(\phi_2 + u_{3,2}\right) - \frac{4}{h^2} D_{44}\left(\phi_2 + u_{3,2}\right)$$

$$Q_1 = A_{55}\left(\phi_1 + u_{3,1}\right) - \frac{4}{h^2} D_{55}\left(\phi_1 + u_{3,1}\right) \tag{5.79}$$

### 5.4.5.5 Yüksek Mertebeli Kayma Bileşenleri

Matris formunda verilen denklem (5.66) daki yüksek mertebeli kayma bileşenleri bölümü alınarak $D_{ij}, F_{ij}$ matrislerinin ortotropik lamine için geçerli halleri denklemde yerlerine yazılır.

$$\begin{Bmatrix} K_2 \\ K_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_2 + u_{3,2} \\ \phi_1 + u_{3,1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \left( -\frac{4}{h^2} \right) \begin{Bmatrix} \phi_2 + u_{3,2} \\ \phi_1 + u_{3,1} \end{Bmatrix} \tag{5.80}$$

Denklem (5.80) de kapalı formda verilen yüksek mertebeli kayma denklemlerinin açık hallerinin yazılması;

$$K_2 = D_{44}\left(\phi_2 + u_{3,2}\right) - \frac{4}{h^2} F_{44}\left(\phi_2 + u_{3,2}\right)$$

$$K_1 = D_{55}\left(\phi_1 + u_{3,1}\right) - \frac{4}{h^2} F_{55}\left(\phi_1 + u_{3,1}\right) \tag{5.81}$$

Böylelikle hareket denklemleri içerisinde kullanacağımız kuvvet, moment, yüksek mertebeli gerilme, enine kesme kuvveti ve yüksek mertebeli kayma denklemlerinin açık hallerini elde etmiş oluruz.

### 5.4.6 Hareket (Euler-Lagrange) Denklemleri

Hareket denklemlerinde eşitliklerin karşılıkları, problemin dinamik olduğu varsayıldığında kullanılmaktadır. Bu çalışmada sistemin statik yüke maruz kaldığı kabul edilerek eşitliklerin karşılıkları sıfır olarak yazılacaktır.

1. Denklem: (5.60) denklemi problem statik durum için incelendiğinden dolayı sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_6}{\partial y}=0 \tag{5.82}$$

Kuvvet bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri;

$$N_{1,1}=A_{11}\left(u_{1,11}+\frac{u_{3,1}}{R_1}\right)+A_{12}\left(u_{2,21}+\frac{u_{3,1}}{R_2}\right)+B_{11}\phi_{1,11}+B_{12}\phi_{2,21}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\left(\phi_{1,11}+u_{3,111}\right)-\frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\phi_{2,21}+u_{3,221}\right)$$

$$N_{6,2}=A_{66}\left(u_{2,12}+u_{1,22}\right)+B_{66}\left(\phi_{1,22}+\phi_{2,12}\right)-\frac{4}{3h^2}E_{66}\left(\phi_{2,12}+\phi_{1,22}+2u_{3,122}\right)$$

Kuvvet bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri denklem (5.82) de yerine yazıldığında denklem (5.83) elde edilir.

$$A_{11}u_{1,11}+\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_{3,1}+\left(A_{12}+A_{66}\right)u_{2,21}-\frac{4}{3h^2}E_{11}u_{3,111}-\frac{4}{3h^2}\left(E_{12}+2E_{66}\right)u_{3,221}+A_{66}u_{1,22}+\left(B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\right)\phi_{1,11}$$
$$+\left(B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{2,21}+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{1,22}=0 \tag{5.83}$$

2. Denklem: (5.61) denklemi problem statik durum için incelendiğinden dolayı sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial N_6}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}=0 \tag{5.84}$$

Kuvvet bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri;

$$N_{6,1}=A_{66}\left(u_{2,11}+u_{1,21}\right)+B_{66}\left(\phi_{1,21}+\phi_{2,11}\right)-\frac{4}{3h^2}E_{66}\left(\phi_{2,11}+\phi_{1,21}+2u_{3,121}\right)$$

$$N_{2,2}=A_{12}\left(u_{1,12}+\frac{u_{3,2}}{R_1}\right)+A_{22}\left(u_{2,22}+\frac{u_{3,2}}{R_2}\right)+B_{12}\phi_{1,12}+B_{22}\phi_{2,22}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\left(\phi_{1,12}+u_{3,112}\right)-\frac{4}{3h^2}E_{22}\left(\phi_{2,22}+u_{3,222}\right)$$

Kuvvet bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri denklem (5.84) de yerine yazılır ve sıfıra eşitlenirse denklem (5.85) elde edilir.

$$\left(A_{12}+A_{66}\right)u_{1,12}+A_{66}u_{2,11}+\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_{3,2}+A_{22}u_{2,22}-\frac{4}{3h^2}\left(E_{12}+2E_{66}\right)u_{3,112}-\frac{4}{3h^2}E_{22}u_{3,222}$$
$$+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}+B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\right)\phi_{1,21}+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{2,11}+\left(B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\right)\phi_{2,22}=0 \tag{5.85}$$

3. Denklem: (5.62) denklemi problem statik durum için incelendiğinden dolayı sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}-\frac{4}{h^2}\left(\frac{\partial K_1}{\partial x}+\frac{\partial K_2}{\partial y}\right)+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 P_6}{\partial x\partial y}\right)-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}=-q \qquad (5.86)$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri;

$$Q_{1,1}=A_{55}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{h^2}D_{55}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)$$

$$Q_{2,2}=A_{44}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)-\frac{4}{h^2}D_{44}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$K_{1,1}=D_{55}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{h^2}F_{55}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)$$

$$K_{2,2}=D_{44}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)-\frac{4}{h^2}F_{44}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$P_{1,11}=E_{11}\left(u_{1,111}+\frac{u_{3,11}}{R_1}\right)+E_{12}\left(u_{2,211}+\frac{u_{3,11}}{R_2}\right)+F_{11}\phi_{1,111}+F_{12}\phi_{2,211}-\frac{4}{3h^2}H_{11}\left(\phi_{1,111}+u_{3,1111}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{2,211}+u_{3,2211}\right)$$

$$P_{2,22}=E_{12}\left(u_{1,122}+\frac{u_{3,22}}{R_1}\right)+E_{22}\left(u_{2,222}+\frac{u_{3,22}}{R_2}\right)+F_{12}\phi_{1,122}+F_{22}\phi_{2,222}-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{1,122}+u_{3,1122}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{22}\left(\phi_{2,222}+u_{3,2222}\right)$$

$$P_{6,12}=E_{66}\left(u_{1,212}+u_{2,112}\right)+F_{66}\left(\phi_{1,212}+\phi_{2,112}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{66}\left(\phi_{2,112}+\phi_{1,212}+2u_{3,1212}\right)$$

$$\frac{N_1}{R_1}=\frac{A_{11}}{R_1}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+\frac{A_{12}}{R_1}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+\frac{B_{11}}{R_1}\phi_{1,1}+\frac{B_{12}}{R_1}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

$$\frac{N_2}{R_2}=\frac{A_{12}}{R_2}\left(u_{1,1}+\frac{u_3}{R_1}\right)+\frac{A_{22}}{R_2}\left(u_{2,2}+\frac{u_3}{R_2}\right)+\frac{B_{12}}{R_2}\phi_{1,1}+\frac{B_{22}}{R_2}\phi_{2,2}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\left(\phi_{1,1}+u_{3,11}\right)-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\left(\phi_{2,2}+u_{3,22}\right)$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri denklem (5.86) de yerine yazılır ve yüke eşitlenirse denklem (5.87) elde edilir.

$$\left(A_{55}-\frac{8}{h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)u_{3,11}$$

$$+\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)u_{3,22}$$

$$+\left(A_{55}-\frac{8}{h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}-\frac{B_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}-\frac{B_{12}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)\phi_{1,1}+\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}-\frac{B_{12}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}-\frac{B_{22}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)\phi_{2,2}$$

$$+\left(\frac{4}{3h^2}F_{11}-\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)\phi_{1,111}+\left(\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{16}{9h^4}H_{12}+\frac{8}{3h^2}F_{66}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,211}$$

$$+\left(\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{16}{9h^4}H_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{1,212}+\left(\frac{4}{3h^2}F_{22}-\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)\phi_{2,222}$$
$$-\frac{16}{9h^4}H_{11}u_{3,1111}+\frac{4}{h^2}E_{11}u_{1,111}+\frac{4}{3h^2}\left(E_{1,2}+2E_{66}\right)u_{2,211}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{8}{3h^2}H_{12}+\frac{16}{3h^2}H_{66}\right)u_{3,2211}$$
$$+\frac{4}{3h^2}\left(E_{12}+2E_{66}\right)u_{1,122}+\frac{4}{3h^2}E_{22}u_{2,222}-\frac{16}{9h^4}H_{66}u_{3,2222}-\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_{1,1}-\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_{2,2}$$
$$-\frac{1}{R_1}\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_3-\frac{1}{R_1}\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_3=-q \qquad (5.87)$$

<u>4. Denklem:</u> (5.63) denklemi problem statik durum için incelendiğinden dolayı sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial M_1}{\partial x}+\frac{\partial M_6}{\partial y}-Q_1+\frac{4}{h^2}K_1-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{\partial P_6}{\partial y}\right)=0 \qquad (5.88)$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri;

$$M_{1,1}=B_{11}\left(u_{1,11}+\frac{u_{3,1}}{R_1}\right)+B_{12}\left(u_{2,21}+\frac{u_{3,1}}{R_2}\right)+D_{11}\phi_{1,11}+D_{12}\phi_{2,21}-\frac{4}{3h^2}F_{11}\left(\phi_{1,11}+u_{3,111}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{12}\left(\phi_{2,21}+u_{3,221}\right)$$
$$M_{6,2}=B_{66}\left(u_{2,12}+u_{1,22}\right)+D_{66}\left(\phi_{1,22}+\phi_{2,12}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{66}\left(\phi_{2,12}+\phi_{1,22}+2u_{3,122}\right)$$
$$Q_1=A_{55}\left(\phi_1+u_{3,1}\right)-\frac{4}{h^2}D_{55}\left(\phi_1+u_{3,1}\right)$$
$$K_1=D_{55}\left(\phi_1+u_{3,1}\right)-\frac{4}{h^2}F_{55}\left(\phi_1+u_{3,1}\right)$$
$$P_{1,1}=E_{11}\left(u_{1,11}+\frac{u_{3,1}}{R_1}\right)+E_{12}\left(u_{2,21}+\frac{u_{3,1}}{R_2}\right)+F_{11}\phi_{1,11}+F_{12}\phi_{2,21}-\frac{4}{3h^2}H_{11}\left(\phi_{1,11}+u_{3,111}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{2,21}+u_{3,221}\right)$$
$$P_{6,2}=E_{66}\left(u_{1,22}+u_{2,12}\right)+F_{66}\left(\phi_{1,22}+\phi_{2,12}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{66}\left(\phi_{2,12}+\phi_{1,22}+2u_{3,122}\right)$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri denklem (5.88) de yerine yazılır ve sıfıra eşitlenirse denklem (5.89) elde edilir.

$$\left(B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\right)u_{1,11}+\left(\frac{B_{11}}{R_1}+\frac{B_{12}}{R_2}-A_{55}+\frac{8}{h^2}D_{55}-\frac{16}{h^4}F_{55}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)u_{3,1}+\left(B_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{2,21}$$
$$+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{1,22}+\left(D_{11}-\frac{8}{3h^2}F_{11}+\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)\phi_{1,11}+\left(D_{12}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+D_{66}-\frac{4}{3h^2}F_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,12}$$
$$-\left(\frac{4}{3h^2}F_{11}-\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)u_{3,111}-\left(\frac{4}{3h^2}F_{12}+\frac{8}{3h^2}F_{66}-\frac{16}{9h^4}H_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)u_{3,122}+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{1,22}$$
$$-\left(A_{55}-\frac{8}{3h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}\right)\phi_1=0 \qquad (5.89)$$

<u>5. Denklem:</u> (5.64) denklemi problem statik durum için incelendiğinden dolayı sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial M_6}{\partial x}+\frac{\partial M_2}{\partial y}-Q_2+\frac{4}{h^2}K_2-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial P_6}{\partial x}+\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)=0 \tag{5.90}$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri;

$$M_{6,1}=B_{66}\left(u_{2,11}u_{1,21}\right)+D_{66}\left(\phi_{1,21}+\phi_{2,11}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{66}\left(\phi_{2,11}+\phi_{1,21}+2u_{3,121}\right)$$

$$M_{2,2}=B_{12}\left(u_{1,12}+\frac{u_{3,2}}{R_1}\right)+B_{22}\left(u_{2,22}+\frac{u_{3,2}}{R_2}\right)+D_{12}\phi_{1,12}+D_{22}\phi_{2,22}-\frac{4}{3h^2}F_{12}\left(\phi_{1,12}+u_{3,112}\right)-\frac{4}{3h^2}F_{22}\left(\phi_{2,22}+u_{3,222}\right)$$

$$Q_2=A_{44}\left(\phi_2+u_{3,2}\right)-\frac{4}{h^2}D_{44}\left(\phi_2+u_{3,2}\right)$$

$$K_2=D_{44}\left(\phi_2+u_{3,2}\right)-\frac{4}{h^2}F_{44}\left(\phi_2+u_{3,2}\right)$$

$$P_{6,1}=E_{66}\left(u_{1,21}+u_{2,11}\right)+F_{66}\left(\phi_{1,21}+\phi_{2,11}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{66}\left(\phi_{2,11}+\phi_{1,21}+2u_{3,121}\right)$$

$$P_{2,2}=E_{12}\left(u_{1,12}+\frac{u_{3,2}}{R_1}\right)+E_{22}\left(u_{2,22}+\frac{u_{3,2}}{R_2}\right)+F_{12}\phi_{1,12}+F_{22}\phi_{2,22}-\frac{4}{3h^2}H_{12}\left(\phi_{1,12}+u_{3,112}\right)-\frac{4}{3h^2}H_{22}\left(\phi_{2,22}+u_{3,222}\right)$$

Bileşenlerinin türevlerinin alınmış halleri denklem (5.90) de yerine yazılır ve sıfıra eşitlenirse denklem (5.91) elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{2,11}+\left(B_{66}+B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\right)u_{1,12}-\left(\frac{4}{3h^2}F_{22}-\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)u_{3,222}\\
&+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+D_{12}-\frac{8}{3h^2}F_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{12}\right)\phi_{1,21}+\left(B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\right)u_{2,22}\\
&+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,11}-\left(\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}-\frac{16}{9h^4}H_{12}\right)u_{3,112}\\
&+\left(\frac{B_{12}}{R_1}+\frac{B_{22}}{R_2}-A_{44}+\frac{8}{h^2}D_{44}-\frac{16}{h^4}F_{44}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)u_{3,2}+\left(D_{22}-\frac{8}{3h^2}F_{22}+\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)\phi_{2,22}\\
&-\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}\right)\phi_2=0
\end{aligned} \tag{5.91}$$

### 5.4.7 Katsayı Ataması İle Denklemlerin Sadeleştirilmesi

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz hareket denklemleri alınır ve gerekli katsayı atamaları yapılır. Böylelikle denklemleri daha basit yazabiliriz.

#### 5.4.7.1 1.Denklem

Denklem (5.83) birinci denklemimizdir.

$$A_{11}u_{1,11}+\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_{3,1}+\left(A_{12}+A_{66}\right)u_{2,21}-\frac{4}{3h^2}E_{11}u_{3,111}-\frac{4}{3h^2}\left(E_{12}+2E_{66}\right)u_{3,221}+A_{66}u_{1,22}$$
$$+\left(B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\right)\phi_{1,11}+\left(B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{2,21}+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{1,22}=0$$

Denklem (5.83) de yer alan katsayılara kısaltma ifadeleri atanır.

$$Q_{1=}\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)\qquad Q_2=\left(B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\right)\qquad Q_3=B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\qquad Q_4=\frac{4}{3h^2}E_{11}$$
$$Q_5=\frac{4}{3h^2}E_{12}\qquad Q_9=B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\qquad Q_{10}=\frac{8}{3h^2}E_{66}$$
$$\partial_1=A_{12}+A_{66}\qquad \partial_2=Q_3+Q_9\qquad \partial_3=-Q_{10}-Q_5$$

Denklem (5.83) deki katsayılara kısaltma atamalarının yazılması, denklem (5.92) yi elde etmemizi sağlar.

$$A_{11}u_{1,11}+Q_1u_{3,1}+\partial_1u_{2,12}+Q_2\phi_{1,11}+\partial_2\phi_{2,12}-Q_4u_{3,111}+\partial_3u_{3,122}+A_{66}u_{1,22}+Q_9\phi_{1,22}=0 \tag{5.92}$$

#### 5.4.7.2 2. Denklem

Denklem (5.85) ikinci denklemimizdir.

$$\left(A_{12}+A_{66}\right)u_{1,12}+A_{66}u_{2,11}+\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_{3,2}+A_{22}u_{2,22}-\frac{4}{3h^2}\left(E_{12}+2E_{66}\right)u_{3,112}-\frac{4}{3h^2}E_{22}u_{3,222}$$
$$\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}+B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\right)\phi_{1,21}+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)\phi_{2,11}+\left(B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\right)\phi_{2,22}=0$$

Denklem (5.85) de yer alan katsayılara kısaltma ifadeleri atanır.

$$Q_3=B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\qquad Q_5=\frac{4}{3h^2}E_{12}\qquad Q_6=\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\qquad Q_7=B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\qquad Q_8=\frac{4}{3h^2}E_{22}$$
$$Q_9=B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\qquad Q_{10}=\frac{8}{3h^2}E_{66}\qquad \partial_1=A_{12}+A_{66}\qquad \partial_2=Q_3+Q_9\qquad \partial_3=-Q_{10}-Q_5$$

Denklem (5.85) deki katsayılara kısaltma atamalarının yazılması, denklem (5.93)'ü elde etmemizi sağlar.

$$A_{66}u_{2,11}+\partial_1u_{1,12}+Q_9\phi_{2,11}+\partial_2\phi_{1,12}+\partial_3u_{3,112}+A_{22}u_{2,22}+Q_6u_{3,2}+Q_7\phi_{2,22}-Q_8u_{3,222}=0 \tag{5.93}$$

### 5.4.7.3 3. Denklem

Denklem (5.87) üçüncü denklemimizdir.

$$\left(A_{55}-\frac{8}{h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)u_{3,11}+\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)u_{3,22}+\left(\frac{4}{3h^2}F_{11}-\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)\phi_{1,111}+\left(A_{55}-\frac{8}{h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}-\frac{B_{11}}{R_1}-\frac{B_{12}}{R_2}\right.$$
$$\left.\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)\phi_{1,1}+\left(\frac{4}{3h^2}F_{22}-\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)\phi_{2,222}+\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}-\frac{B_{12}}{R_1}-\frac{B_{22}}{R_2}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)\phi_{2,2}$$
$$-\frac{16}{9h^4}H_{11}u_{3,1111}+\frac{4}{h^2}E_{11}u_{1,111}+\left(\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{16}{9h^4}H_{12}+\frac{8}{3h^2}F_{66}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,211}+\left(\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{16}{9h^4}H_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{1,212}$$
$$+\frac{4}{3h^2}(E_{12}+2E_{66})u_{2,211}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{8}{3h^2}H_{12}+\frac{16}{3h^2}H_{66}\right)u_{3,2211}+\frac{4}{3h^2}(E_{12}+2E_{66})u_{1,122}+\frac{4}{3h^2}E_{22}u_{2,222}-\frac{16}{9h^4}H_{22}u_{3,2222}$$
$$-\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_{1,1}-\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_{2,2}-\frac{1}{R_1}\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)u_3-\frac{1}{R_2}\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)u_3=-q$$

Denklem (5.87) de yer alan katsayılara kısaltma ifadeleri atanır.

$$Q_1=\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\qquad Q_2=B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\qquad Q_3=B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\qquad Q_4=\frac{4}{3h^2}E_{11}\qquad Q_5=\frac{4}{3h^2}E_{12}$$
$$Q_6=\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\qquad Q_7=B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\qquad Q_8=\frac{4}{3h^2}E_{22}$$
$$d_1=A_{44}-\frac{4}{h^2}D_{44}\qquad d_2=A_{55}-\frac{4}{h^2}D_{55}\qquad d_3=D_{44}-\frac{4}{h^2}F_{44}\qquad d_4=D_{55}-\frac{4}{h^2}F_{55}$$
$$b_{11}=\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{E_{12}}{R_2}\qquad b_{12}=F_{11}-\frac{4}{3h^2}H_{11}\qquad b_{13}=F_{12}-\frac{4}{3h^2}H_{12}\qquad b_{18}=F_{66}-\frac{4}{3h^2}H_{66}\qquad b_{20}=\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{E_{22}}{R_2}$$
$$b_{14}=\frac{4}{3h^2}H_{11}\qquad b_{15}=\frac{4}{3h^2}H_{12}\qquad b_{16}=F_{22}-\frac{4}{3h^2}H_{22}\qquad b_{17}=\frac{4}{3h^2}H_{22}\qquad b_{19}=\frac{8}{3h^2}H_{66}$$
$$\partial_4=d_2-\frac{4}{h^2}d_4-\frac{Q_2}{R_1}-\frac{Q_3}{R_2}\qquad \partial_5=d_1-\frac{4}{h^2}d_3-\frac{Q_3}{R_1}-\frac{Q_7}{R_2}\qquad \partial_6=d_2-\frac{4}{h^2}d_4+\frac{4}{3h^2}b_{11}+\frac{Q_4}{R_1}+\frac{Q_5}{R_2}$$
$$\partial_7=d_1-\frac{4}{h^2}d_3+\frac{4}{3h^2}b_{20}+\frac{Q_5}{R_1}+\frac{Q_8}{R_2}\qquad \partial_8=\frac{4}{3h^2}E_{12}+\frac{8}{3h^2}E_{66}\qquad \partial_9=\frac{4}{3h^2}b_{12}\qquad \partial_{10}=\frac{4}{3h^2}b_{13}+\frac{8}{3h^2}b_{18}$$
$$\partial_{11}=\frac{4}{3h^2}b_{14}\qquad \partial_{12}=-\frac{8}{3h^2}b_{15}-\frac{8}{3h^2}b_{19}\qquad \partial_{13}=\frac{4}{3h^2}b_{16}\qquad \partial_{14}=\frac{4}{3h^2}b_{17}\qquad \partial_{15}=-\frac{Q_1}{R_1}-\frac{Q_6}{R_2}$$

Denklem (5.87) deki katsayılara kısaltma atamalarının yazılması, denklem (5.94)'ü elde etmemizi sağlar.

$$\partial_4\phi_{1,1}+\partial_5\phi_{2,2}+\partial_6u_{3,11}+\partial_7u_{3,22}+Q_4u_{1,111}+\partial_8u_{2,112}+\partial_9\phi_{1,111}+\partial_{10}\phi_{2,112}-\partial_{11}u_{3,1111}+\partial_{12}u_{3,1122}+\partial_8u_{1,122}+Q_8u_{2,222}$$
$$+\partial_{10}\phi_{1,122}+\partial_{13}\phi_{2,222}-\partial_{14}u_{3,2222}-Q_1u_{1,1}-Q_6u_{2,2}+\partial_{15}u_3=-q \tag{5.94}$$

### 5.4.7.4 4. Denklem

Denklem (5.89) dördüncü denklemimizdir.

$$\left(B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\right)u_{1,11}+\left(\frac{B_{11}}{R_1}+\frac{B_{12}}{R_2}-A_{55}+\frac{8}{h^2}D_{55}-\frac{16}{h^4}F_{55}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{11}}{R_1}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_2}\right)u_{3,1}$$

$$+\left(B_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{2,21}+\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{1,22}+\left(D_{11}-\frac{8}{3h^2}F_{11}+\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)\phi_{1,11}$$

$$+\left(D_{12}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+D_{66}-\frac{4}{3h^2}F_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,21}-\left(\frac{4}{3h^2}F_{11}-\frac{16}{9h^4}H_{11}\right)u_{3,111}$$

$$-\left(\frac{4}{3h^2}F_{12}+\frac{8}{3h^2}F_{66}-\frac{16}{9h^4}H_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}\right)u_{3,122}+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{1,22}-\left(A_{55}-\frac{8}{3h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}\right)\phi_1=0$$

Denklem (5.89) da yer alan katsayılara kısaltma ifadeleri atanır.

$$b_1=\frac{B_{11}}{R_1}+\frac{B_{12}}{R_2}\qquad b_2=D_{11}-\frac{4}{3h^2}F_{11}\qquad b_3=D_{12}-\frac{4}{3h^2}F_{12}\qquad b_4=\frac{4}{3h^2}F_{11}\qquad b_5=\frac{4}{3h^2}F_{12}$$

$$b_9=D_{66}-\frac{4}{3h^2}F_{66}\qquad b_{10}=\frac{8}{3h^2}F_{66}\qquad b_{11}=\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{E_{12}}{R_2}\qquad b_{12}=F_{11}-\frac{4}{3h^2}H_{11}\qquad b_{13}=F_{12}-\frac{4}{3h^2}H_{12}$$

$$b_{14}=\frac{4}{3h^2}H_{11}\qquad b_{15}=\frac{4}{3h^2}H_{12}\qquad b_{18}=F_{66}-\frac{4}{3h^2}H_{66}\qquad b_{19}=\frac{8}{3h^2}H_{66}$$

$$Q_2=B_{11}-\frac{4}{3h^2}E_{11}\qquad Q_9=B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\qquad d_1=A_{44}-\frac{4}{h^2}D_{44}\qquad d_2=A_{55}-\frac{4}{h^2}D_{55}\qquad d_4=D_{55}-\frac{4}{h^2}F_{55}$$

$$e_1=B_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\qquad e_2=b_1-d_2+\frac{4d_4}{h^2}-\frac{4b_{11}}{3h^2}\qquad e_3=b_2-\frac{4}{3h^2}b_{12}\qquad e_5=b_9-\frac{4}{3h^2}b_{18}$$

$$e_4=b_3+b_9-\frac{4}{3h^2}b_{13}-\frac{4}{3h^2}b_{18}\qquad e_6=-b_4+\frac{4}{3h^2}b_{14}\qquad e_7=-b_5-b_{10}+\frac{4}{3h^2}b_{15}+\frac{4}{3h^2}b_{19}\qquad e_8=-d_2+\frac{4}{h^2}d_4$$

Denklem (5.89) daki katsayılara kısaltma atamalarının yazılması, denklem (5.95) i elde etmemizi sağlar.

$$Q_2u_{1,11}+e_1u_{2,12}+e_2u_{3,1}+e_3\phi_{1,11}+e_4\phi_{2,21}+e_5\phi_{1,22}+e_6u_{3,111}+e_7u_{3,122}+Q_9u_{1,22}+e_8\phi_1=0 \qquad (5.95)$$

### 5.4.7.5 5. Denklem

Denklem (5.91) beşinci denklemimizdir.

$$\left(B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\right)u_{2,11}+\left(B_{66}+B_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}\right)u_{1,12}-\left(\frac{4}{3h^2}F_{22}-\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)u_{3,222}$$
$$+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+D_{12}-\frac{8}{3h^2}F_{12}+\frac{16}{9h^4}H_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{12}\right)\phi_{1,21}+\left(B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\right)u_{2,22}+\left(D_{66}-\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\phi_{2,11}$$
$$-\left(\frac{8}{3h^2}F_{66}+\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{32}{9h^4}H_{66}-\frac{16}{9h^4}H_{12}\right)u_{3,112}+\left(\frac{B_{12}}{R_1}+\frac{B_{22}}{R_2}-A_{44}+\frac{8}{h^2}D_{44}-\frac{16}{h^4}F_{44}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{12}}{R_1}-\frac{4}{3h^2}\frac{E_{22}}{R_2}\right)u_{3,2}$$
$$+\left(D_{22}-\frac{8}{3h^2}F_{22}+\frac{16}{9h^4}H_{22}\right)\phi_{2,22}-\left(A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}\right)\phi_2=0$$

Denklem (5.91) de yer alan katsayılara kısaltma ifadeleri atanır.

$$Q_7=B_{22}-\frac{4}{3h^2}E_{22}\qquad Q_9=B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{66}$$

$$b_3=D_{12}-\frac{4}{3h^2}F_{12}\qquad b_5=\frac{4}{3h^2}F_{12}\qquad b_6=\frac{B_{12}}{R_1}+\frac{B_{22}}{R_2}\qquad b_7=D_{22}-\frac{4}{3h^2}F_{22}\qquad b_8=\frac{4}{3h^2}F_{22}$$
$$b_9=D_{66}-\frac{4}{3h^2}F_{66}\qquad b_{10}=\frac{8}{3h^2}F_{66}\qquad b_{13}=F_{12}-\frac{4}{3h^2}H_{12}\qquad b_{15}=\frac{4}{3h^2}H_{12}\qquad b_{16}=F_{22}-\frac{4}{3h^2}H_{22}$$
$$b_{17}=\frac{4}{3h^2}H_{22}\qquad b_{18}=F_{66}-\frac{4}{3h^2}H_{66}\qquad b_{19}=\frac{8}{3h^2}H_{66}\qquad b_{20}=\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{E_{22}}{R_2}$$

$$d_1=A_{44}-\frac{4}{h^2}D_{44}\qquad d_3=D_{44}-\frac{4}{h^2}F_{44}$$

$$e_1=B_{12}+B_{66}-\frac{4}{3h^2}E_{12}-\frac{4}{3h^2}E_{66}\qquad e_4=b_3+b_9-\frac{4}{3h^2}b_{13}-\frac{4}{3h^2}b_{18}\qquad e_5=b_9-\frac{4}{3h^2}b_{18}\qquad e_9=b_7-\frac{4}{3h^2}b_{16}$$
$$e_7=-b_5-b_{10}+\frac{4}{3h^2}b_{15}+\frac{4}{3h^2}b_{19}\qquad e_{10}=-b_8+\frac{4}{3h^2}b_{17}\qquad e_{11}=-d_1+\frac{4}{h^2}d_3\qquad e_{12}=b_6-d_1+\frac{4}{h^2}d_3-\frac{4}{3h^2}b_{20}$$

Denklem (5.91) deki katsayılara kısaltma atamalarının yazılması, denklem (5.96) yı elde etmemizi sağlar.

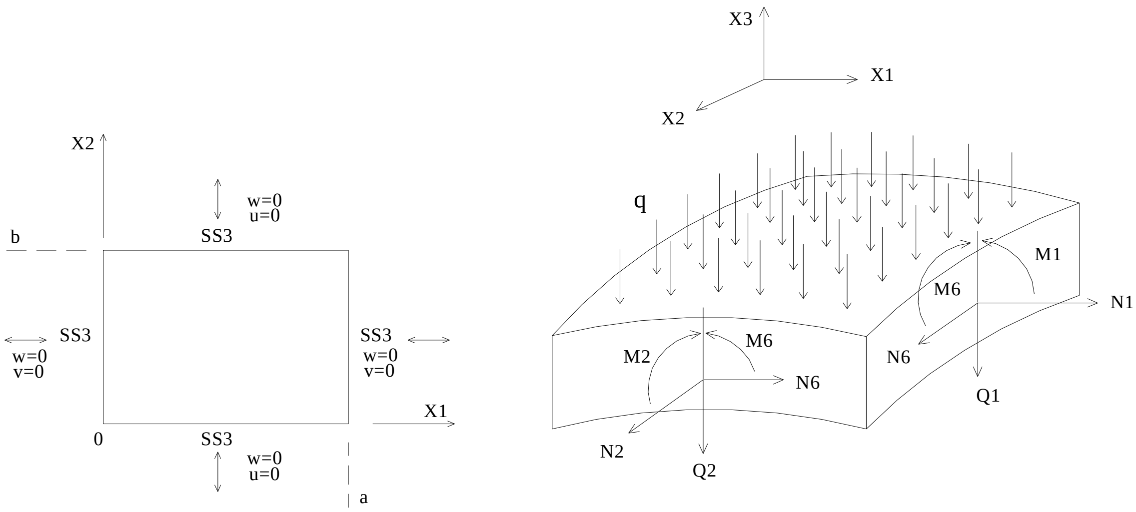
$$Q_9u_{2,11}+e_1u_{1,12}+e_5\phi_{2,11}+e_4\phi_{1,12}+e_7u_{3,112}+\phi_7u_{2,22}+e_{12}u_{3,2}+e_9\phi_{2,22}+e_{10}u_{3,222}+e_{11}\phi_2=0 \qquad (5.96)$$

Sonuç olarak 5 adet yönetici denklemin kısaltılmış hallerine ulaşmış oluruz. Elde edilen denklemler; yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerdir.

# 6. UYGULAMA

## 6.1 Sınır Koşulları

Çift eğrilikli olarak belirlenmiş ve her kenarı basit mesnetlenmiş (SS3) kabul edilen kare bir levha seçilmiştir. Levhaya şekil 6.1 de gösterildiği gibi q yayılı yükü uygulanmaktadır. Uygulanan yük neticesinde, belirlediğimiz sınır koşulları nedeniyle levhada tepki kuvvetleri, momentler ve dönmeler meydana gelmektedir. Örnek levha için sınır koşulları aşağıda tanımlanmaktadır.




Şekil 6.1 Çift eğrilikli bir levhada kuvvetlerin, momentlerin ve dönmelerin gösterimi.

Alt ve üst kenarlarda $x_1$ yönünde birim yer değişimi olmaz.

$$u(x_1,0)=u(x_1,b)=0 \tag{6.1.a}$$

Sol ve sağ kenarlarda $x_2$ yönünde birim yer değişimi olmaz.

$$v(0,x_2)=v(a,x_2)=0 \tag{6.1.b}$$

Kenarlarda $x_3$ yönünde birim yer değişimi olmaz.

$$\begin{aligned} w(x_1,0)&=w(x_1,b)=0 \\ w(0,x_2)&=w(a,x_2)=0 \end{aligned} \tag{6.1.c}$$

Hareketin serbest olduğu yönlerde tepki kuvveti oluşmaz.

$$\begin{aligned} N_2(x_1,0)&=N_2(x_1,b)=0 \\ N_1(0,x_2)&=N_1(a,x_2)=0 \end{aligned} \tag{6.1.d}$$

Kuvvet oluşmayan yönlerde moment de oluşmaz.

$$M_2(x_1,0)=M_2(x_1,b)=0 \qquad (6.1.e)$$
$$M_1(0,x_2)=M_1(a,x_2)=0$$

Hareketin serbest olmadığı yönlerde dönme olmaz.

$$\phi_1(x_1,0)=\phi_1(x_1,b)=0 \qquad (6.1.f)$$
$$\phi_2(0,x_2)=\phi_2(a,x_2)=0$$

Yüksek mertebeli kayma terimleri;

$$P_2(x_1,0)=P_2(x_1,b)=0 \qquad (6.1.g)$$

$$P_1(0,x_2)=P_1(a,x_2)=0$$

Her kenarı basit mesnetlenmiş (SS3), dik katmanlı (cross-ply), simetrik/anti simetrik, ortotropik levhaya Çiftli Fourier serilerine göre atamaları yapılır.

$$u_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$$

$$u_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn}\sin\alpha x_1\cos\beta x_2$$

$$u_3=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\alpha x_1\sin\beta x_2 \qquad (6.2)$$

$$\phi_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$$

$$\phi_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}y_{mn}\sin\alpha x_1\cos\beta x_2$$

(6.2) denklemlerinde α ve β katsayılardır.

$$\alpha=\frac{m\pi}{a} \qquad \beta=\frac{n\pi}{b}$$

## 6.2 Sınır Koşullarının Denklemlere Dahil Edilmesi

Belirlenen sınır koşulları için elde edilen Çiftli Fourier serilerinin türevleri gerek duyulduğu şekilde alınır ve denklemlerde yerlerine yazılır.

### 6.2.1 1.Denklem:

$$A_{11}u_{1,11}+Q_1u_{3,1}+\partial_1u_{2,12}+Q_2\phi_{1,11}+\partial_2\phi_{2,12}-Q_4u_{3,111}+\partial_3u_{3,122}+A_{66}u_{1,22}+Q_9\phi_{1,22}=0$$

Yukarıdaki denklemde türevlerinin alınmasına gerek duyulan değerler, denklem (6.2) takımının türevlerinin alınmasıyla elde edilir.

$$u_{1,11}=-\sum\sum u_{mn}\alpha^2\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$$

$$u_{3,1}=\sum\sum w_{mn}\alpha\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$$

$$u_{2,12}=-\sum\sum v_{mn}\alpha\beta\cos\alpha x_1\sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,11}=-\sum\sum x_{mn}\alpha^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{2,12}=-\sum\sum y_{mn}\alpha\beta Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,111}=-\sum\sum w_{mn}\alpha^3 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,122}=-\sum\sum w_{mn}\alpha\beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{1,22}=-\sum\sum u_{mn}\beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,22}=-\sum\sum x_{mn}\beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

İstenen türevleri alınan Double Fourier serilerinin denklemde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi bizi denklemin son hali olan (6.3) e ulaştırır.

1.Denklem:

$$\sum\sum Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2\left\{-A_{11}\alpha^2U_{mn}+Q_1\alpha W_{mn}-\partial_1\alpha\beta V_{mn}-Q_2\alpha^2X_{mn}-\partial_2\alpha\beta Y_{mn}+Q_4\alpha^3W_{mn}\right.$$
$$\left.-\partial_3\alpha\beta^2W_{mn}-A_{66}\beta^2U_{mn}-Q_9\beta^2X_{mn}\right\}=0$$

$$\sum\sum Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2\left\{-\left(A_{11}\alpha^2+A_{66}\beta^2\right)U_{mn}-\partial_1\alpha\beta V_{mn}+\left(Q_1\alpha+Q_4\alpha^3-\partial_3\alpha\beta^2\right)W_{mn}\right.$$
$$\left.-\left(Q_2\alpha^2+Q_9\beta^2\right)X_{mn}-\partial_2\alpha\beta Y_{mn}\right\}=0 \qquad (6.3)$$

### 6.2.2 2.Denklem:

$$A_{66}u_{2,11}+\partial_1 u_{1,12}+Q_9\phi_{2,11}+\partial_2\phi_{1,12}+\partial_3 u_{3,112}+A_{22}u_{2,22}+Q_6 u_{3,2}+Q_7\phi_{2,22}-Q_8 u_{3,222}=0$$

Yukarıdaki denklemde türevlerinin alınmasına gerek duyulan değerler, denklem (6.2) takımının türevlerinin alınmasıyla elde edilir.

$$u_{2,11}=-\sum\sum V_{mn}\alpha^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{1,12}=-\sum\sum U_{mn}\alpha\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{2,11}=-\sum\sum Y_{mn}\alpha^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{1,12}=-\sum\sum X_{mn}\alpha\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,112}=-\sum\sum W_{mn}\alpha^2\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{2,22}=-\sum\sum V_{mn}\beta^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,2}=\sum\sum W_{mn}\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{2,22}=-\sum\sum Y_{mn}\beta^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,222}=-\sum\sum W_{mn}\beta^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

İstenen türevleri alınan Double Fourier serilerinin denklemde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi bizi denklemin son hali olan (6.4) e ulaştırır.

2.Denklem:

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2\left\{-A_{66}\alpha^2 V_{mn}-\partial_1\alpha\beta U_{mn}-Q_9\alpha^2 Y_{mn}-\partial_2\alpha\beta X_{mn}-\partial_3\alpha^2\beta W_{mn}\right.$$
$$\left.-A_{22}\beta^2 V_{mn}+Q_6\beta W_{mn}-Q_7\beta^2 Y_{mn}+Q_8\beta^3 W_{mn}\right\}$$

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2\left\{-\partial_1\alpha\beta U_{mn}-\left(A_{66}\alpha^2+A_{22}\beta^2\right)V_{mn}+\left(Q_6\beta+Q_8\beta^3-\partial_3\alpha^2\beta\right)W_{mn}\right.$$
$$\left.-\partial_2\alpha\beta X_{mn}-\left(Q_9\alpha^2+Q_7\beta^2\right)Y_{mn}\right\}=0 \qquad (6.4)$$

### 6.2.3 3.Denklem:

$$\partial_4\phi_{1,1}+\partial_5\phi_{2,2}+\partial_6 u_{3,11}+\partial_7 u_{3,22}+Q_4 u_{1,111}+\partial_8 u_{2,112}+\partial_9\phi_{1,111}+\partial_{10}\phi_{2,112}-\partial_{11}u_{3,1111}+\partial_{12}u_{3,1122}+\partial_8 u_{1,122}+Q_8 u_{2,222}$$
$$+\partial_{10}\phi_{1,122}+\partial_{13}\phi_{2,222}-\partial_{14}u_{3,2222}-Q_1 u_{1,1}-Q_6 u_{2,2}+\partial_{15}u_3=-q$$

Yukarıdaki denklemde türevlerinin alınmasına gerek duyulan değerler, denklem (6.2) takımının türevlerinin alınmasıyla elde edilir.

$$\phi_{1,1}=-\sum\sum X_{mn}\alpha Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{2,2}=-\sum\sum Y_{mn}\beta Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,11}=-\sum\sum W_{mn}\alpha^2 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,22}=-\sum\sum W_{mn}\beta^2 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{1,111}=-\sum\sum U_{mn}\alpha^3 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{2,112}=\sum\sum V_{mn}\alpha^2\beta Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,111}=\sum\sum X_{mn}\alpha^3 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{2,112}=\sum\sum Y_{mn}\alpha^2\beta Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,1111}=\sum\sum W_{mn}\alpha^4 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,1122}=\sum\sum W_{mn}\alpha^2\beta^2 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{1,122}=\sum\sum U_{mn}\alpha\beta^2 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{2,222}=\sum\sum V_{mn}\beta^3 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,122}=\sum\sum X_{mn}\alpha\beta^2 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{2,222}=\sum\sum Y_{mn}\beta^3 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,2222}=\sum\sum W_{mn}\beta^4 Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{1,1}=-\sum\sum U_{mn}\alpha Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{2,2}=-\sum\sum V_{mn}\beta Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_3=\sum\sum W_{mn} Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

İstenen türevleri alınan Double Fourier serilerinin denklemde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi bizi denklemin son hali olan (6.5) e ulaştırır.

3.Denklem:

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2 \{-\partial_4 \alpha X_{mn} - \partial_5 \beta Y_{mn} - \partial_6 \alpha^2 W_{mn} - \partial_7 \beta^2 W_{mn} - Q_4 \alpha^3 U_{mn} + \partial_8 \alpha^2 \beta V_{mn} + \partial_9 \alpha^3 X_{mn}$$
$$+\partial_{10} \alpha^2 \beta Y_{mn} - \partial_{11} \alpha^4 W_{mn} + \partial_{12} \alpha^2 \beta^2 W_{mn} + \partial_8 \alpha \beta^2 U_{mn} + Q_8 \beta^3 V_{mn} + \partial_{10} \alpha \beta^2 X_{mn} + \partial_{13} \beta^3 Y_{mn} - \partial_{14} \beta^4 W_{mn}$$
$$+Q_1 \alpha U_{mn} + Q_6 \beta V_{mn} + \partial_{15} W_{mn}\}$$

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Sin\beta x_2 \{(Q_1\alpha + \partial_8 \alpha\beta^2 - Q_4 \alpha^3) U_{mn} + (\partial_8 \alpha^2 \beta + Q_8 \beta^3 + Q_6 \beta) V_{mn} - (\partial_6 \alpha^2 + \partial_7 \beta^2$$
$$+\partial_{11}\alpha^4 - \partial_{12}\alpha^2\beta^2 + \partial_{14}\beta^4 - \partial_{15}) W_{mn} + (\partial_9 \alpha^3 + \partial_{10}\alpha\beta^2 - \partial_4 \alpha) X_{mn} + (\partial_{13}\beta^3 + \partial_{10}\alpha^2\beta - \partial_5 \beta) Y_{mn}\} = -q$$
(6.5)

### 6.2.4 4. Denklem:

$$Q_2 u_{1,11} + e_1 u_{2,12} + e_2 u_{3,1} + e_3 \phi_{1,11} + e_4 \phi_{2,21} + e_5 \phi_{1,22} + e_6 u_{3,111} + e_7 u_{3,122} + Q_9 u_{1,22} + e_8 \phi_1 = 0$$

Yukarıdaki denklemde türevlerinin alınmasına gerek duyulan değerler, denklem (6.2) takımının türevlerinin alınmasıyla elde edilir.

$$u_{1,11} = -\sum\sum U_{mn} \alpha^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{2,12} = -\sum\sum V_{mn} \alpha\beta Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,1} = \sum\sum W_{mn} \alpha Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,11} = -\sum\sum X_{mn} \alpha^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{2,21} = -\sum\sum Y_{mn} \alpha\beta Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_{1,22} = -\sum\sum X_{mn} \beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,111} = -\sum\sum W_{mn} \alpha^3 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{3,122} = -\sum\sum W_{mn} \alpha\beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$u_{1,22} = -\sum\sum U_{mn} \beta^2 Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

$$\phi_1 = \sum\sum X_{mn} Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2$$

İstenen türevleri alınan Double Fourier serilerinin denklemde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi bizi denklemin son hali olan (6.6) e ulaştırır.

4. Denklem:

$$\sum\sum Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2 \{-Q_2 \alpha^2 U_{mn} - e_1 \alpha\beta V_{mn} + e_2 \alpha W_{mn} - e_3 \alpha^2 X_{mn} - e_4 \alpha\beta Y_{mn} - e_5 \beta^2 X_{mn} - e_6 \alpha^3 W_{mn}$$
$$-e_7 \alpha\beta W_{mn} - Q_9 \beta^2 U_{mn} + e_8 X_{mn}\}$$

$$\sum\sum Cos\alpha x_1 Sin\beta x_2 \{-(Q_2\alpha^2 + Q_9\beta^2) U_{mn} - e_1 \alpha\beta V_{mn} + (e_2 \alpha - e_6 \alpha^3 - e_7 \alpha\beta^2) W_{mn} - (e_3 \alpha^2 + e_5 \beta^2 - e_8) X_{mn}$$
$$-e_4 \alpha\beta Y_{mn}\} = 0$$
(6.6)

### 6.2.5 5. Denklem:

$$Q_9 u_{2,11} + e_1 u_{1,12} + e_5 \phi_{2,11} + e_4 \phi_{1,12} + e_7 u_{3,112} + \phi_7 u_{2,22} + e_{12} u_{3,2} + e_9 \phi_{2,22} + e_{10} u_{3,222} + e_{11} \phi_2 = 0$$

Yukarıdaki denklemde türevlerinin alınmasına gerek duyulan değerler, denklem (6.2) takımının türevlerinin alınmasıyla elde edilir.

$$u_{2,11} = -\sum\sum V_{mn} \alpha^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{1,12} = -\sum\sum U_{mn} \alpha\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{2,11} = -\sum\sum Y_{mn} \alpha^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{1,12} = -\sum\sum X_{mn} \alpha\beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,112} = -\sum\sum W_{mn} \alpha^2 \beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{2,22} = -\sum\sum V_{mn} \beta^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,2} = \sum\sum W_{mn} \beta Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_{2,22} = -\sum\sum Y_{mn} \beta^2 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$u_{3,222} = -\sum\sum W_{mn} \beta^3 Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

$$\phi_2 = \sum\sum Y_{mn} Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2$$

İstenen türevleri alınan Double Fourier serilerinin denklemde yerine yazılması ve denklemin düzenlenmesi bizi denklemin son hali olan (6.7) e ulaştırır.

5.Denklem:

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2 \{ -Q_9 \alpha^2 V_{mn} - e_1 \alpha\beta U_{mn} - e_5 \alpha^2 Y_{mn} - e_4 \alpha\beta X_{mn} - e_7 \alpha^2 \beta W_{mn} - Q_7 \beta^2 V_{mn} + e_{12} \beta W_{mn}$$
$$- e_9 \beta^2 Y_{mn} - e_{10} \beta^3 W_{mn} + e_{11} Y_{mn} \}$$

$$\sum\sum Sin\alpha x_1 Cos\beta x_2 \{ -e_1 \alpha\beta U_{mn} - \left( Q_9 \alpha^2 + Q_7 \beta^2 \right) V_{mn} - \left( e_7 \alpha^2 \beta - e_{12} \beta + e_{10} \beta^3 \right) W_{mn} - e_4 \alpha\beta X_{mn}$$
$$- \left( e_5 \alpha^2 + e_9 \beta^2 - e_{11} \right) Y_{mn} \} = 0 \qquad (6.7)$$

Daha önce elde edilen beş adet yüksek mertebeli diferansiyel denklemleri artık, genliklere bağlı ve yüksek mertebeli türev ifadelerini içermeyen halleriyle yani cebirsel denklemler şeklinde yazmış oldum.

### 6.3 Çözüm Denklemi

Çözüm denkleminin matris formunda genel haliyle yazılmış şekli aşağıdaki gibidir. Bu formdaki ilk kısım dinamik bölümü oluşturmaktadır. İkinci kısım ise statik bölümü oluşturmaktadır.

$$[M]\begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn} \\ \ddot{V}_{mn} \\ \ddot{W}_{mn} \\ \ddot{X}_{mn} \\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.8}$$

Dinamik kısım      Statik kısın

Zamana göre değişimin olmadığı varsayıldığından dolayı ilk bölüm hesaplara katılmaz. Bu durumda çözüm denkleminin statik durum için genel haliyle yazılışı denklem (6.9) da gösterilmektedir.

$$[C]\begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.9}$$

[C] matrisi bir önceki bölümde Double Fourier serilerinin uygulandığı beş adet hareket denkleminden elde edilir. [C] matrisinin elemanları, hareket denklemlerindeki katsayıları göstermektedir.

### 6.4 Statik Durum İçin $[C]$ Matrisi

Bölüm 6.2.3 de elde edilen beş adet denklemin katsayıları bize denklem (6.10) da gösterilen [C] matrisinin satır ve sütun elemanlarını verir. Denklem (6.10), denklem (6.9) da kullanılacaktır.

$$[C]=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

$C[\xi,1]=U_{mn}$ 'ye bağlı değişkenler satırı $(\xi=1,2,3,4,5)$

1. Denklemden; $C[1,1]=-\left(A_{11}\alpha^2+A_{66}\beta^2\right)=\boxed{-A_{11}\alpha^2-A_{66}\beta^2}$

2. Denklemden; $C[2,1]=-\partial_1\alpha\beta=\boxed{-A_{12}\alpha\beta-A_{66}\alpha\beta}$

3. Denklemden; $C[3,1]=Q_1\alpha+\partial_8\alpha\beta^2-Q_4\alpha^3=\boxed{\frac{A_{11}}{R_1}\alpha+\frac{A_{12}}{R_2}\alpha+\frac{4}{3h^2}E_{12}\alpha\beta^2+\frac{8}{3h^2}E_{66}\alpha\beta^2-\frac{4}{3h^2}E_{11}\alpha}$

4. Denklemden; $C[4,1]=-Q_2\alpha^2-Q_9\beta^2=\boxed{-B_{11}\alpha^2+\frac{4}{3h^2}E_{11}\alpha^2-B_{66}\beta^2+\frac{4}{3h^2}E_{66}\beta^2}$

5. Denklemden; $C[5,1]=-e_1\alpha\beta=\boxed{-B_{12}\alpha\beta-B_{66}\alpha\beta+\frac{4}{3h^2}E_{12}\alpha\beta-\frac{4}{3h^2}E_{66}\alpha\beta}$

$C[\xi,2]=V_{mn}$ 'ye bağlı değişkenler satırı $(\xi=1,2,3,4,5)$

1. Denklemden; $C[1,2]=-\partial_1\alpha\beta=C[2,1]$ simetrik

2. Denklemden; $C[2,2]=\boxed{-A_{66}\alpha^2-A_{22}\beta^2}$

3. Denklemden $C[3,2]=\partial_8\alpha^2\beta+Q_8\beta^3+Q_6\beta=\boxed{\frac{4}{3h^2}E_{12}\alpha^2\beta+\frac{8}{3h^2}E_{66}\alpha^2\beta+\frac{4}{3h^2}E_{22}\beta^3+\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)}$

4. Denklemden; $C[4,2]=-e_1\alpha\beta=\boxed{-B_{12}\alpha\beta-B_{66}\alpha\beta+\frac{4}{3h^2}E_{12}\alpha\beta+\frac{4}{3h^2}E_{66}\alpha\beta}$

5. Denklemden; $C[5,2]=-Q_9\alpha^2-Q_7\beta^2=\boxed{-B_{66}\alpha^2+\frac{4}{3h^2}E_{66}\alpha^2-B_{22}\beta^2+\frac{4}{3h^2}E_{22}\beta^2}$

$C[\xi,3]=W_{mn}$ 'ye bağlı değişkenler satırı $(\xi=1,2,3,4,5)$

1. Denklemden; $C[1,3]=C[3,1]$ simetrik

2. Denklemden; $C[2,3]=C[3,2]$ simetrik

3. Denklemden; $C[3,3]=-\partial_6\alpha^2-\partial_7\beta^2-\partial_{11}\alpha^4+\partial_{12}\alpha^2\beta^2-\partial_{14}\beta^4+\partial_{15}$

$$=\alpha^2\left[-A_{55}+\frac{8}{h^2}D_{55}+\frac{16}{h^4}F_{55}-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{E_{12}}{R_2}\right)-\frac{4}{3h^2}\left(\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{E_{12}}{R_2}\right)\right]$$

$$-\beta^2\left[A_{44}-\frac{8}{h^2}D_{44}+\frac{16}{h^4}F_{44}+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{E_{22}}{R_2}\right)+\frac{4}{3h^2}\left(\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{E_{22}}{R_2}\right)\right]-\frac{16}{9h^4}H_{11}\alpha^4-\frac{32}{9h^4}H_{12}\alpha^2\beta^2$$

$$-\frac{64}{9h^4}H_{66}\alpha^2\beta^2-\frac{16}{9h^4}H_{22}\beta^4-\frac{1}{R_1}\left(\frac{A_{11}}{R_1}+\frac{A_{12}}{R_2}\right)-\frac{1}{R_2}\left(\frac{A_{12}}{R_1}+\frac{A_{22}}{R_2}\right)$$

4. Denklemden; $C[4,3]=e_2\alpha-e_6\alpha^3-e_7\alpha\beta^2$

$$=\left(\frac{B_{11}}{R_1}+\frac{B_{12}}{R_2}\right)\alpha-A_{55}\alpha+\frac{8}{h^2}D_{55}\alpha-\frac{16}{h^4}F_{55}\alpha-\frac{4}{3h^2}\alpha\left(\frac{E_{11}}{R_1}+\frac{E_{12}}{R_2}\right)+\frac{4}{3h^2}F_{11}\alpha^3-\frac{16}{9h^4}H_{11}\alpha^3+\frac{4}{3h^2}F_{12}\alpha\beta^2$$

$$+\frac{8}{3h^2}F_{66}\alpha\beta^2-\frac{16}{9h^4}H_{12}\alpha\beta^2-\frac{32}{9h^4}H_{66}\alpha\beta^2$$

5. Denklemden; $C[5,3]=-e_7\alpha^2\beta+e_{12}\beta-e_{10}\beta^3$

$$=\frac{4}{3h^2}F_{12}\alpha^2\beta+\frac{8}{3h^2}F_{66}\alpha^2\beta-\frac{16}{9h^4}H_{12}\alpha^2\beta-\frac{32}{9h^4}H_{66}\alpha^2\beta+\beta\left(\frac{B_{12}}{R_1}+\frac{B_{22}}{R_2}\right)-A_{44}\beta+\frac{8}{h^2}D_{44}\beta$$

$$-\frac{16}{h^4}F_{44}\beta-\frac{4}{3h^2}\beta\left(\frac{E_{12}}{R_1}+\frac{E_{22}}{R_2}\right)+\frac{4}{3h^2}F_{22}\beta^3-\frac{16}{9h^4}H_{22}\beta^3$$

$C[\xi,4]=X_{mn}$ 'ye bağlı değişkenler satırı $(\xi=1,2,3,4,5)$

1. Denklemden; $C[1,4]=C[4,1]$ simetrik

2. Denklemden; $C[2,4]=C[4,2]$ simetrik

3. Denklemden; $C[3,4]=C[4,3]$ simetrik

4. Denklemden; $C[4,4]=-e_3\alpha^2-e_5\beta^2+e_8$

$$=-D_{11}\alpha^2+\frac{8}{3h^2}F_{11}\alpha^2-\frac{16}{9h^4}H_{11}\alpha^2-D_{66}\beta^2+\frac{8}{3h^2}F_{66}\beta^2-\frac{16}{9h^2}H_{66}\beta^2-A_{55}+\frac{8}{h^2}D_{55}-\frac{16}{h^4}F_{55}$$

5. Denklemden; $C[5,4]=-e_4\alpha\beta$

$$=\left(-D_{12}+\frac{8}{3h^2}F_{12}+\frac{4}{3h^2}F_{66}+\frac{4}{3h^2}F_{12}-\frac{16}{9h^4}H_{12}+\frac{4}{3h^2}F_{66}-D_{66}-\frac{16}{9h^4}H_{66}\right)\alpha\beta$$

$C[\xi,5]=Y_{mn}$ 'ye bağlı değişkenler satırı $(\xi=1,2,3,4,5)$

1. Denklemden; $C[1,5]=C[5,1]$ simetrik

2. Denklemden; $C[2,5]=C[5,2]$ simetrik

3. Denklemden; $C[3,5]=C[5,3]$ simetrik

4. Denklemden; $C[4,5]=C[5,4]$ simetrik

5. Denklemden; $C[5,5]=-e_5\alpha^2-e_9\beta^2+e_{11}$

$$=-D_{66}\alpha^2+\frac{8}{3h^2}F_{66}\alpha^2-\frac{16}{9h^4}H_{66}\alpha^2-D_{22}\beta^2+\frac{8}{3h^2}F_{22}\beta^2-\frac{16}{9h^4}H_{22}\beta^2-A_{44}+\frac{8}{h^2}D_{44}-\frac{16}{h^4}F_{44}$$

bulduğumuz beş adet hareket denkleminim katsayılarını oluşturan [C] matrisi tamamlanmış olur.

**6.5 Programlama ve Çözüm**

Elde ettiğimiz [C] matrisinin MATLAP programı yardımıyla çözülmesi sonucunda Fourier serilerinde kullanılan $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn} ve Y_{mn}$ genlik değerleri elde edilir. Değerler elde edilirken m,n tekrarlama sayıları J.N.Reddy'nin kullandığı değer ile aynı yani 99 alınmıştır(m,n=99). $W_{mn}$ genliği bulunduktan sonra, levhanın merkez noktası için deformasyon miktarı belirlenir. Sonrasında, levhanın merkezindeki deformasyon miktarı denklem (6.11) yardımıyla boyutsuzlaştırılır. Denklem (6.11) de gösterilen w değeri levhanın merkez noktası için denklem (6.12) yardımıyla hesaplanır. Sonuç olarak aradığımız boyutsuz merkez sapmalarının değerlerine ulaşırız. Elde edilen boyutsuz merkez sapma değerleri J.N.REDDY nin aynı özelliklerdeki levhaya uyguladığı çözümün sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır (Reddy,1984 a). Şekil 6.2 de programın algoritması gösterilmektedir.

Boyutsuz merkez sapmalarının formülü (Reddy, 1984 a);

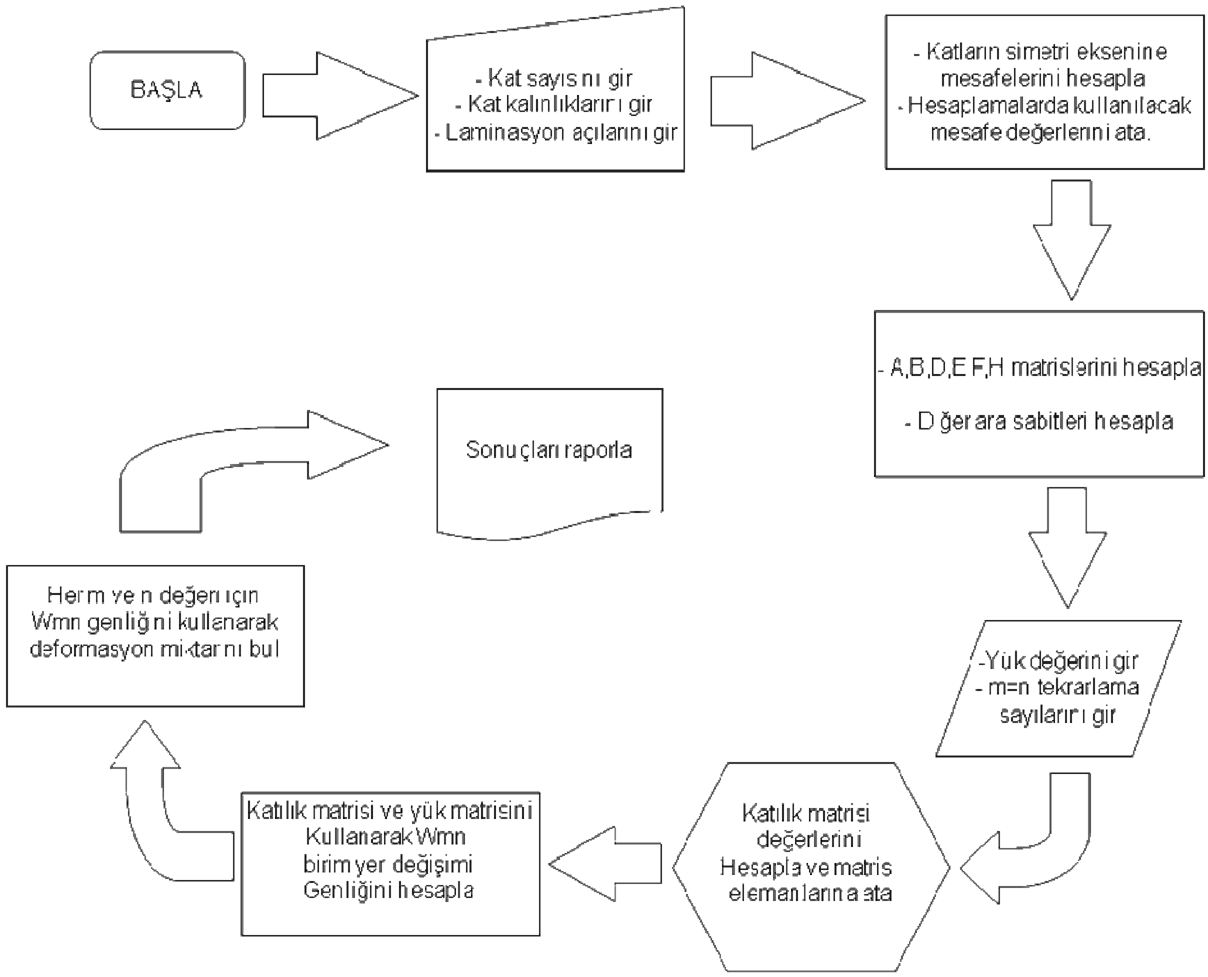
$$W = -\frac{w.E_2.h^3}{q_0.a^4}10^3 \tag{6.11}$$

w değerini hesaplamada levhanın merkez noktasının değeri için $x_1$ ve $x_2$ değerleri $L/2$ olarak alınmıştır.

$$w = W_{mn}.\sin\alpha x_1 \sin\beta x_2 \tag{6.12}$$

Seçilen dik katmanlı, küresel kabuk levhanın katmanlarının malzeme özellikleri (6.13) de gösterilmektedir. Her katmanın özellikleri aynı kabul edilmektedir.

$$\begin{aligned}
&E_1 = 25x10^6\ psi = 175\ \ GPa\\
&E_2 = 10^6\ psi = 7\ \ GPa\\
&G_{12} = G_{13} = 0.5x10^6\ psi = 3.5\ \ GPa\\
&G_{23} = 0.2x10^6\ psi = 1.4\ \ GPa\\
&\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25
\end{aligned} \tag{6.13}$$




Şekil 6.2 Programlama ve çözüm şeması.

Çizelge 6.1 (0°/90°/0°) şeklinde dik katmanlı (cros ply) küresel kabuk levhaya ait boyutsuz merkez sapmaları yer almaktadır. Küresel kabuk levhada a/b=1 (kenar uzunlukları eşit) olarak belirlenmiş kare levhadır. Örnek küresel kabuk levha eşit kalınlıklarda katmanlanmış ve düzgün yayılı yüke maruzdur. Levhanın kenar uzunluğu kalınlığının on katı seçilmiştir (a/h=10).

Çizelge 6.1 (0°/90°/0°) Düzgün yayılı yüke maruz, dik katmanlanmış küresel kabuğun boyutsuz merkez sapmaları

| R/L | W (Boyutsuz çökme oranı) | (Reddy,1984 a) |
|---|---|---|
| 5 | 10,332393 | 10,332 |
| 10 | 10,752141 | 10,752 |
| 20 | 10,862303 | 10,862 |
| 50 | 10,893542 | 10,893 |
| 100 | 10,898019 | 10,898 |
| Levha | 10,899497 | 10,899 |

Çizelge 6.2 (0°/90°/90°//0°) şeklinde dik katmanlı (cros ply) küresel kabuk levhaya ait boyutsuz merkez sapmaları yer almaktadır. Küresel kabuk levhada a/b=1 (kenar uzunlukları eşit) olarak belirlenmiş kare levhadır. Örnek küresel kabuk levha eşit kalınlıklarda katmanlanmış ve düzgün yayılı yüke maruzdur. Levhanın kenar uzunluğu kalınlığının on katı seçilmiştir (a/h=10)

Çizelge 6.2 (0°/90°/90°/0°) Düzgün yayılı yüke maruz, dik katmanlanmış küresel kabuğun boyutsuz merkez sapmaları

| R/L | W (Boyutsuz çökme oranı) | (Reddy,1984 a) |
|---|---|---|
| 5 | 10,476330 | 10,476 |
| 10 | 10,904527 | 10,904 |
| 20 | 11,017019 | 11.017 |
| 50 | 11,049921 | 11,049 |
| 100 | 11,053493 | 11,053 |
| Levha | 11,055003 | 11,055 |

## 7. SONUÇ

Bu çalışmada genel olarak Klasik ve Birinci Mertebeden Kayma Deformasyon Teorilerine de yer verilmiş olmasının sebebi; teorilerin geliştirilmesi sürecinde kayma deformasyonlarının etkisinin gösterilebilmesidir. Ancak artan mertebelerde kullanılan hesaplama gücünün artması ve elde edilen sonuçlardaki hassasiyet incelendiğinde, özellikle Üçüncü Mertebeden Kayma Deformasyon Teorisi kullanımının, hesaplama güçlüğü ve sonuç hassasiyeti bakımından optimum noktada olduğu belirlenmiştir(Reddy, 2003). Bu nedenle tez çalışmasında tercih edilen yöntemdir.

Örnek uygulamada tercih edilen sınır şartları Navier çözümünü sağlayacak şekilde, sınır değerlerinin Çiftli Fourier Serileri kullanılarak yapılan tanımlamalarında süreksizlik oluşturmamaktadır. Belirlenen lamine dik katmanlı (cros-ply) küresel kabuk levhadır ve düzgün yayılı yük etkisindedir. Uygulama örneği olarak iki farklı kompozit levha seçilmiştir. Levhalardan biri (0°/90°/0°) şeklinde dik katmanlı (cros-ply) küresel kabuk levha, diğeri ise (0°/90°/90°//0°) şeklinde dik katmanlı (cros-ply) küresel kabuk levhadır. Çalışmada, analitik çözümün ara işlemleri ayrıntılarıyla gösterilmeye çalışılmıştır. Analitik çözüm neticesinde elde edilen kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak MATLAP programlama dilinde kod hazırlanmıştır. Sayısal sonuçların doğruluğu ve hassasiyeti J.N.Reddy tarafından aynı özellikteki kabuk için elde edilen sonuçlar, J.N.Reddy'nin elde ettiği sonuçlar ile kıyaslandığında (Reddy,1984 a), sonuçların örtüştüğü görülmektedir. Sonuçların aynı çıkması dolayısıyla matematik modelin doğru programlandığı görülmüştür. Aynı zamanda elde edilen veriler neticesinde, çift eğrilikli küresel kabuk levhanın eğrilik yarıçaplarının kenar boyutlarına olan oranı artıkça yani küresel kabuk düz levhaya yaklaştıkça boyutsuz çökme oranının arttığı görülmektedir. Bu sonuç bize küresel kabuk plakanın çökmeye karşı daha dayanıklı olduğunu göstermektedir.

**KAYNAKLAR**

Amabili, M., (2003). “A Comparison of Shell Theories For Large-Amplitude Vibrations of Circular Cylindrical Shells”, Lagrangian Approach. J Sound Vib., 264:1091-1125.

Djoudi, M.S. ve Bahai, H., (2003), “A Shallow Shell Finite Element For The Linear and Non-Linear Analysis of Cylindrical Shells”, Eng. Struct., 25(6):769-778.

Doğan A., (2009), Tabakalı Kompozit Plakaların ve Silindirik Sığ Kabukların Serbest Titreşim Analizi, Çukurova Üniversitesi FBE. İnşaat Müh.A.B.D, Adana.

Dong, S.B., (1968), “Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells”, Journal of Acoustical Society of America, 44:1628-1635.

Ersoy, H.Y., (2001), Kompozit Malzeme. Literatür Yayıncılık Dağıtım Pazarlama San. ve Tic. Ltd. Şti., İstanbul, Türkiye.

Gautham, B.P., Ganesan, N., (1997), “Free Vibration Characteristics of Isotropic and Laminated Orthotropic Spherical Caps.”, J. Sound Vib., 204(1):17-40.

Germaine, S., (1821), Recherches sur la Theories des Surfaces Elastiques, Paris.

Gol’denveizer, A.L., (1961), Theory of Elastic Thin Shells (English Translation), Pergamon Press, New York.

Grıgorenko, A.Y., Yaremchenko, N.P., (2007), “Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform and varying thickness”, Int Appl Mech, 43(10):1132-1141.

Jones, R.M., (1975), Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Company, Washington D.C..

Kaw, A.K.,(1997), Mechanics of Composite Materials, CRC Press, New York.

Latifa, S.K., Sinha, P.K., (2005), “Improved Finite Element Analysis of Multilayered, Doubly Curved Composite Shells”, J. Reinf. Plast. Comp., 24:385-404.

Liberscu, L., Khdeir, A.A., Frederick, D.,(1989a), “A Shear Deformable Theory For Laminated Composites Shallow Shell-Type Panels and Their Response Analysis I”, Free Vibration and Buckling, Acta Mech, 76;1-33.

Liberscu, L., Khdeir, A.A., Frederick, D.,(1989b), “A Shear Deformable Theory For Laminated Composites Shallow Shell-Type Panels and Their Response Analysis II”, Static Analysis. Acta Mech, 77:1-12.

Liew, K.M., Lim, C.W., (1995b), “A Higher Order Theory For Vibration Analysis of Constrained Curvilinear Shallow Shells”, Journal of Vibration and Control, 1(1):15-39.

Liew, K.M., Peng, L.X, NG, T.Y., (2002), “Three Dimensional Vibration Analysis of Spherical Shell Panels Subjected to Different Boundary Conditions”, Int J Mech Sci, 44:2103-2117.

Lim, C.W., Liew, K.M., (1995a), “A Higher Order Theory For Vibration of Shear Deformable Cylindrical Shallow Shells”, International Journal of Mechanical Sciences, 37(3):277-295.

Love, A.E.H., (1888), “On the Small Free Vibrations and Deformation of Thin Elastic Shell”, Philosophical Transactions of The Royal Society; 179: 527-546.

Love, A.E.H., (1944), A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York.

Mindlin, R.D., (1951), “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates”, Journal of Applied Mechanics, 73:31-38.

Qatu, M.S., (1993), “Vibration of Doubly Cantilevered Laminated Composite Thin Shallow Shells”, Thin Walled Struct, 15:235-248.

Qatu, M.S., (1999), “Accurate Theory For Laminated Composite Deep Thick Shells”, Int. J. Solids Struct., 36(19):2917-2941.

Qatu, M.S., (2004), Vibration of laminated shells and plates. Netherlands, Elsevier.

Rath, B.K. ve Das, Y.C.,(1973), “Vibration of Layered Shells”, Journal of Sound and Vibration, 28: 737-757.

Reddy, J.N., C.F.Liu, (1984 a), “A Higher Order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells”, Virgininia Polytechnic Institute and State University, 24061:319-330.

Reddy, J.N.,(1984 b), “Exact Solutions of Moderately Thick Laminated Shells”, Journal of Engineering Mechanics, 110(5): 794-809.

Reddy, J.N., (2003). Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, CRC Press, Boca Raton, FL.

Reissner, E., (1941), “A New Derivation of Equations of The Deformation of Elastic Shells”, American Journal of Mathematics, 63(1): 177-184.

Reissner, E., (1945), “The Effect of Transverse Shear Deformation on The Bending of Elastic Plates”, Journal of Applied Mechanics, 67:A69-A77.

Srinivas, S., Joga Rao, C.V., Rao, A.K., (1970), “An Exact Analysis of Vibration of Simply Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates”, Journal of Sound and Vibration, 12:187-199.

Timoshenko, SP., (1921), “On The Correction of Shear of The Differential Equation For Transverse Vibration of Prismatic Bars”, Philos Mag, 41:744.

Whitney, J.M., Sun, C.T., (1973), “A Higher Order Theory For Extensional Motion of Laminated Composites”, Journal of Sound and Vibration, 41(2):471-476.

Whitney, J.M., Leissa, A.W., (1969), “Analaysis of Heterogeneous Anisotropic Plates”, Journal of Applied Mechanics, 36:261-266.

Whitney, J.M., Pagano, N.J., (1970), “Shear Deformation in Heterogeneous Plates”, Journal of Applied Mechanics, 37:1031-1036.

**ÖZGEÇMİŞ**

| | | |
|---|---|---|
| Doğum tarihi | 03.11.1983 | |
| Doğum yeri | Ordu – Perşembe | |
| Lise | 1997-2000 Üsküdar Burhan Felek Lisesi (Fen) | |
| Lisans | 2000-2005 | Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi<br>Makine Mühendisliği Bölümü |
| Yüksek Lisans | 2007-2010 | Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü<br>Gemi İnşaatı ve Denizcilik Fakültesi<br>Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Bölümü |

**Çalıştığı kurumlar**

| | |
|---|---|
| 2005-Devam ediyor | Delta Denizcilik Mühendislik ve Bilgisayar<br>San. Ve Tic. A.Ş. (Milli Gemi Projesi) |