

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

128680

GEMİ FORMUNUN B-SPLINE İLE MODELLENMESİ

Gemi İnş. ve Mak. Müh. Semih ZORLU

F.B.E Gemi İnşaatı Mühendisliği Ana Bilim Dalında
hazırlanan

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

128680

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hüseyin YILMAZ

Doç. Dr. Hüseyin YILMAZ
Prof. Dr. M. Güner KEMAL
Y. Doç. Dr. Fatih TAŞCI

İSTANBUL, 2002

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	10
2. CAGD	11
2.1 CAGD nedir ?	11
2.2 CAGD'nin tarihçesi	11
2.3 CAGD neden gereklidir ?	13
2.4 CAGD matematiği	16
2.4.1 Parametrik Formlar	16
2.4.2 Parametrik Eğri	17
2.4.3 Parametrik Yüzeyler	20
2.4.4 Süreklilik	22
3. GEMİ TEKNE FORMUNUN İFADESİNDE KULLANILAN MATEMATİKSEL YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ	24
4. EĞRİLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ	26
4.1 Parabolic Blended Eğrileri	26
4.2 Kübik Spline	27
4.3 Bezier Eğrileri	27
4.4 B-spline Eğrileri	28
4.5 NURBS Eğrileri	36
5. YÜZEYLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ	40
5.1 Bezier Yüzeyleri	40
5.1.1 Bezier Yüzey Alanının Özellikleri	43
5.1.2 Bezier Yüzey Alanının Alt Bölümlemesi	44
5.2 B-spline Yüzeyleri	46
6. B-SPLINE YÜZEYLERİ ÜRETME ÇALIŞMASI: SETAFORM PROGRAMI	49
6.1 Program Modüllerinin işlevleri	49
6.2 Program Akış Şeması	50

6.3	Matematiksel Modelde Verileri Yorumlanması;	51
6.4	EgriCiz.....	52
7.	PROGRAMIN KULLANILMASI	53
7.1	DOSYA MENÜSÜ.....	53
7.2	GÖRÜNÜM MENÜSÜ.....	53
7.3	YÜZEY MENÜSÜ	54
7.4	VERİ GİRİŞİ MENÜSÜ	54
7.5	KULLANICI EKRANI	55
8.	SONUÇ.....	57
KAYNAKLAR.....		58
ÖZGEÇMİŞ.....		59



SİMGE LİSTESİ

$f(x)$	x niteliğine ilişkin fonksiyon
t	Periyot
s	Parametre
a	Vektör niceliği
P_t	Durum vektörü
R_t	3 Boyutlu parabol
Q_t	3 Boyutlu parabol
h_i	Ağırlık değerleri
n,m	Spline dereceleri
L,M	Segment numaraları



KISALTMA LİSTESİ

CAGD	Computer-Aided Geometric Design
NURBS	Non-Uniform Rational Bspline
MGK	Model Görünüm Kontrol



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Autodesk firması tarafından üretilmiş bir CAGD ürünü.....	11
Şekil 2.2 İki nokta ve yönlerle belirlenmiş eğri.....	13
Şekil 2.3 CAGD'nin başlangıcı; kontrol noktaları.....	14
Şekil 2.4 Bezier eğrisi.....	14
Şekil 2.5 Yüzeyler için 3 boyutlu kontrol poligonu (Kontrol ağları).....	15
Şekil 2.6 3 boyutlu tel çerçeve modeli.....	15
Şekil 2.7 3 boyutlu gölgelendirilmiş obje.....	15
Şekil 2.8 (x,y) noktaları kümesinin grafiği.....	16
Şekil 2.9 Çemberin bu çizgi boyunca aldığı 2 değer.....	16
Şekil 2.10 Çemberin sonsuz eğimli 2 noktası.....	17
Şekil 2.11 Parametrik çember (yaklaşık 57 derece).....	18
Şekil 2.12 Bezier teğet sunumu.....	19
Şekil 2.13 x(t) ve y(t) ile belirlenmiş eğri.....	20
Şekil 2.14 Yüzey oluşturmak için z boyutu.....	21
Şekil 2.15 Yüksek dereceli süreklilikler daha düzgün eğriler oluşturur.....	22
Şekil 2.16 C_1 eğrisinde hız değişiminden kaynaklanan çarpıklık.....	23
Şekil 2.17 Düzgün yön değişimiyle düzgün eğri.....	23
Şekil 4.1 Bezier eğrisi ve tanımlayıcı poligonu.....	28
Şekil 4.2 Poligon kontrol noktaları.....	31
Şekil 4.3 B-spline eğrileri.....	32
Şekil 4.4 Katlı kontrol noktaları için poligon kontrol noktaları.....	32
Şekil 4.5 Katlı kontrol noktaları için poligon kontrol noktalarının etkileri.....	33
Şekil 4.6 Katlı düğüm B-spline eğrileri için kontrol noktaları.....	34
Şekil 4.7 Katlı düğüm B-spline eğrileri.....	34
Şekil 4.8 B-spline eğrilerinin yerel kontrolü.....	35
Şekil 4.9 B-spline eğrilerinde çeşitli mertebeler.....	36
Şekil 4.10 Rasyonel B-spline temel fonksiyonları.....	38
Şekil 4.11 Rasyonel B-spline eğrileri.....	39
Şekil 5.1 Bezier yüzey alanı.....	40
Şekil 5.2 Bikübik 3'e 3 kontrol ağı.....	42
Şekil 5.3 Bezier yüzey alanının sınırını oluşturan Bezier eğrileri.....	43
Şekil 5.4 Bezier yüzey alanında alt bölümlendirme.....	44
Şekil 5.5 Alt bölümlendirmede biquadratik durum.....	45
Şekil 5.6 Alt bölümlendirmeden sonra ortaya çıkan 5'e 5 lik bir ızgara.....	45
Şekil 5.7 Dört yeni alanın kontrol ağları.....	46
Şekil 5.8 Kontrol noktalarının 3'e 3 lük alt alanlar tarafından paylaşımı.....	46
Şekil 5.9 Basit bir B-spline yüzey alanı.....	47
Şekil 6.1 Program modülleri ve geliştirilme metodu (MGK).....	49
Şekil 6.2 Akış şeması.....	50
Şekil 6.3 Akış şeması.....	51
Şekil 6.4 Akış şeması.....	52
Şekil 7.1 Dosya menüsü.....	53
Şekil 7.5 Yüzey menüsü.....	54
Şekil 7.9 Posta görünüşü.....	55
Şekil 7.10 Su hattı görünüşü.....	56
Şekil 7.11 3D görünüşü.....	56

ÖNSÖZ

Bu çalışma gemilerinin form dizaynlarının yapılmasında hız, kalite ve kolaylık sağlamak amacıyla hazırlanmıştır

Bu çalışmada form dizaynı için kullanılan yöntemlerin gelişimi ve içerikleri anlatılmıştır. Seçilen yöntem üzerine bir program hazırlanmış ve programın amacı, algoritması ve çalışma mantığı tezde anlatılmıştır.

Açıklanan yöntemler vasıtasıyla hazırlanan programın interaktif olması, kullanıcıya üç boyutlu görünümü vermesi ve form üzerinde yapılacak daha sonraki işlemler için kesitler sunabilmesi form dizaynını kolaylaştıracaktır.



ÖZET

Büyük yatırımlar yapılarak imal edilen gemi projelerinin en az masrafla yapılabilmesi için gemi tasarımı ve hesaplamaları işi en kısa sürede en hassas şekilde yapılmak zorundadır. Bunun gerçekleştirilmesi kuşkusuz bilgisayar veya bilgisayar programlarıyla sağlanır. Eğri çizim metotlarını temel alan CAGD programlarıyla gemi tekne formlarının tasarımı hassas ve kısa sürede yapılabilir. Bu çalışmada da bu matematiksel modellerin incelenmesi ve bu doğrultuda bir CAGD yazılımı oluşturulması amaçlanmıştır.

Bu çalışmada; gemi tekne formunun matematiksel olarak ifade edilme yöntemleri incelenmiş ve Bspline yöntemiyle gemi tekne formu modellenmesi uygulama çalışması yapılmıştır. Uygulama çalışması için Java programlama dilinde bir program yazılmıştır. Bu program verilen ofset noktalarına göre endaze planı oluşturmakta ve ofset noktalarında değişiklik yapılabilmesine olanak vererek tasarım işinin hızlı yapılmasını sağlamaktadır.

Anahtar kelimeler: Gemi formlarının tasarımı, Endaze, matematiksel modelleme.



ABSTRACT

Requiring huge investment to construct ships, it is essential making initial design of ships and relative computing within shortest time and at minimum expense providing precise knowledge. This can be accomplished by using computer and computer programs. Ship hull form design can be precisely drawn in shortest time with CAGD programs and curve drawing methods. It was aimed in this study to examine mathematical methods and to program a CAGD software.

In this work, it is examined that expressing of ship hull form mathematically and using B-spline methods, modeling ship hull form application is done. Application has been developed on Java programming language. This application compiles lines plan of ship hull form using given offset points by user and accomplishes fast design by providing of changing offsets through user interaction.

Keywords: Ship hull form design, lines plan, mathematically modeling ship hull form



1. GİRİŞ

Büyük yatırımlar yapılarak imal edilen gemi projelerinin en az masrafla yapılabilmesi için gemi tasarımı ve hesaplamaları işi, en kısa sürede en hassas şekilde yapılmak zorundadır. Bunun gerçekleştirilmesi kuşkusuz bilgisayarlar ve bilgisayar programlarıyla sağlanır. Eğri çizim metotlarını temel alan CAGD programlarıyla gemi tekne formlarının tasarımı hassas ve kısa sürede yapılabilir. Bu çalışmada da bu matematiksel modellerin incelenmesi ve bu doğrultuda bir CAGD yazılımı oluşturulması amaçlanmıştır.

Gemi inşaatı sektöründe hesap ve çizimlerin bilgisayar tarafından çok daha avantajlı olarak yapılması bilgisayarların bu alanda hızla yayılmasını sağlamıştır ve bu teknolojinin kullanılması gemi formunun matematiksel olarak ifade edilmesi zorunluluğunu doğurmuştur. Gemi formunun matematiksel olarak ifade edilme amaçları arasında, gemi tasarımı ve inşaatında bütün hesaplamaların gemi formuna bağlı olması sebebiyle diğer hesapları da düzgün yapabilmek, matematiksel yüzey denklemleriyle dizayn hesaplarında istenen hassasiyette sonuçlar elde etmek ve eğrilerin ve yüzeylerin teğetleri, eğrilik yarıçapları gibi özellikleri kolayca hesaplayabilmek vardır.

Tezin ikinci bölümünde uygulama aşamasında kullanılan CAGD konsepti hakkında ön bilgi verilmiş, tarihçesi, matematiği ve neden gerekli olduğu konusunda ayrıntılı açıklamalarda bulunulmuştur.

Üçüncü bölümde gemi tekne formunun ifadesinde kullanılan matematiksel yöntemlerin tarihçesi, kullanılan yöntemlerin en belirgin özellikleri karşılaştırılarak anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde gemi tekne formunun ifadesinde kullanılan matematiksel yöntemlere kısaca değinilmiş ve Parabolik blended eğrileri, Kübik spline eğrileri, Bezier eğrileri, B-spline eğrileri ve Nurbs eğrileri birbirleriyle olan benzerlikleri, farkları avantajları ve dezavantajları sunularak anlatılmıştır.

Beşinci bölümde temel yüzey ifade yöntemlerinden olan Bezier yüzeyleri ve günümüz gemi dizayn bilgisayar programlarının temelini oluşturduğu B-spline yüzeyleri incelenmiştir.

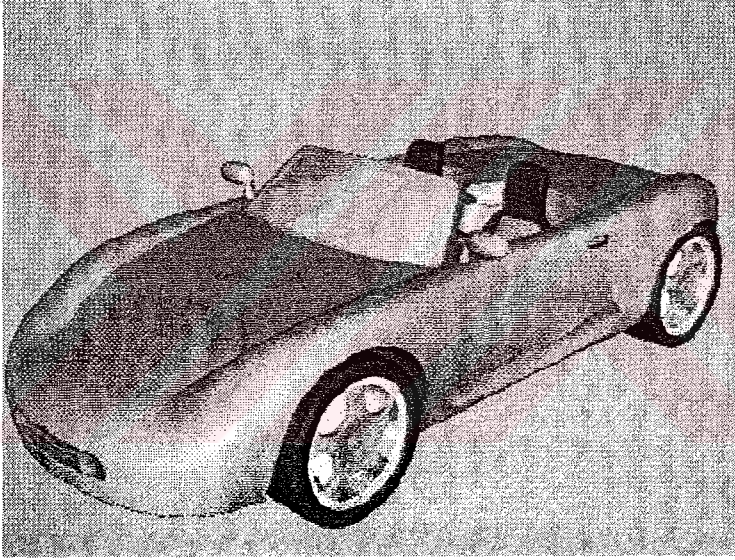
Altıncı bölümde bu tezin uygulama bölümünü oluşturan ve B-spline yüzeyleri üretme çalışması olarak programlanan Setaform programının modüllerinin işlevleri ve akış şeması sunulmuştur.

2. CAGD

2.1 CAGD nedir ?

CAGD yani bilgisayar destekli geometrik dizayn, gemi yapımı, otomotiv gibi endüstrilere bilgisayarların avantajını getirmek için geliştirilmiş yeni bir sahadır.

CAGD farmakolojik tasarımdan animasyona kadar bir çok alana hızlı bir şekilde yayılmış durumdadır. Etrafımız öncelikle bilgisayarlarda canlandırılmış ürünlerle kaplıdır. Bu ürünler bilgisayar içerisinde değişiklik yapıp arıtılmış olup ürün, üretim aşamasına geçtiğinde araçlar ve kaplamalar bilgisayar içerisindeki geometri ile üretilmektedir. Bu işlem sanal prototipleştirme olarak bilinir.



Şekil 2.1 Autodesk firması tarafından üretilmiş bir CAGD ürünü

Yeni ürünlerdeki bilgisayar canlandırmaları, tasarım döngüsünü, değişiklik yapma ve araç üretimi işlemini kolaylaştırarak azaltmıştır.

CAGD eğri ve yüzey yaratma temeline dayanır ve kesin olarak eğri ve yüzey modelleme olarak tanımlı oldukça basit olup CAGD çalışmasının yoğunlaştığı alanı oluşturmaktadır.

2.2 CAGD'nin tarihçesi

Bilgisayar destekli geometrik dizayn Euclid ve Descartes'e kadar uzanan matematiksel köklere sahiptir. Pratik uygulaması otomatik mekanizmaların serbest şekillere sahip objeleri

hesaplayıp, taslağını çıkarıp imal etmesiyle başladı. İkinci dünya savaşı sırasında uçak endüstrisindeki üretim baskıları bir çok yeni aygıtın imalını ve tasarımını hızlandırmıştır. Örneğin 1944 yılında Liming uçak gövdesi direklerini super-eliptik bir yolla tasarlamış böylelikle elektro-mekanik bir hesap makinesiyle tamamlanabilir hale sokmuştur.

Gemi yapımcıları da CAGD ile ilk ilgilenenler arasındadırlar. Bunun nedenlerinden biri garip gözükebilir fakat gemi tasarımında ciddi bir engel teşkil etmekte idi. Gemi için tam ölçek planların çizilebileceği tek yer gemi yapımcılarının gemi havuzlarıydı. Büyük çizimler nemli havada eğrilip büzülebiliyor ve bu da büyük imalat hatalarına sebep oluyordu.

Bilgisayarlar yeni fikirlere imkan sağlamanın büyük gücüyle en önemli uyarıcıyı sağladılar. 1963 yılında Ferguson, “quilt” yüzeyini oluşturmak için özel eğri-çizgisel yamaları düzgün bir şekilde bir araya getirerek ilk yüzey yama sistemini geliştirmiştir. Kendisi ayrıca, isteğe göre belirlenmiş koordinat sisteminden bağımsızlık sağladığından kabul edilir olmuş parametrik ifade edilen yüzey fikrini tanıtmıştır. Dikey teğet vektörler ayrıklama yöntemiyle açıklanabilir, örneğin bu kartezyon formunda açık değildir.

1971 yılında Pierre Bézier Ferguson’un fikrini yeniden formüle ederek teknik ressamların geniş bir matematik eğitime gerek olmadan bir yüzey tasarlamasına imkan sağladı. Bézier’in sistemi, UNISURF, Renault tarafından kullanıldı ve CAGD’nin gelişmesinde bir mihenk taşı oldu. Yüzey kaplama ve yüzey tasarımı arasındaki farkı belirginleştirdi. Tasarımın hedefi kalıp hakkında önsezileri olan fakat geniş matematik eğitimi almamış olan teknik resamlara, yüzey temsili için gelişmiş matematik kullanma yeteneğini güçlendirecek bilgisayar araçları sağlamaktır.

Zaman içerisinde CAGD’nin matematiksel altyapısı gelişmeye devam etmiştir. De Casteljau üçgen yamalar incelemiş ve değerlendirme teknikleri geliştirmiştir. Coons [Coons64] önceki çalışmaları bütün haline getirerek genel bir şema oluşturmuş ve bu Ford tarafından yapılmış PDGS’ nin temeli olmuştur. 1974 yılında General Motors’da Gordon ve Riesenfeld tasarım için B-spline eğrileri ve yüzeylerinin özelliklerini üretmişlerdir.

Öncelikle otomotive olmak üzere gemi yapımı endüstrileri tarafından CAGD matematiği ve tasarımcı ara yüz araçları 1970’ler boyunca gelişmeye devam etmiştir. İlk CAGD konferansı Barnhill and Riesenfeld tarafından 1974’de CAGD isminin ilk kullanıldığı yerde organize edilmiştir.

1980’lerde bilgisayar destekli tasarlamanın çok yönlü gücü, serbest biçim geometrik yüzey uygulaması herkes tarafından keşfedilir hale gelmiştir. Endüstriyel tasarımcılar bilgisayar gücünden etkilenmişlerdir ve CATIA, EUCLID, STRIM, ANVIL ve GEOMOD gibi bir çok ticari modelleme aracı önemli bir çok uygulamanın temeli olmuşlardır. Bilgisayar tasarımcıları molekül tasarımcılarının farmakoloji için yaptıkları gibi objelerini yüzeylerle modellemişlerdir. Mimarlar CAGD’yi keşfetmişler ve kelime işlem ve taslak oluşturma programları, ara yüz protokollerini serbest biçim eğrileri ile temellendirmişlerdir. Film yapımcıları ise bu yüzeylerle yapılan animasyonun gücünü “Tron” ile başlayıp “Jurassic Park” ile devam ederek keşfetmişlerdir.

2.3 CAGD neden gereklidir ?

Ürünler yaratılırken tasarımcılar şu gibi meselelerle yüz yüze gelirler;

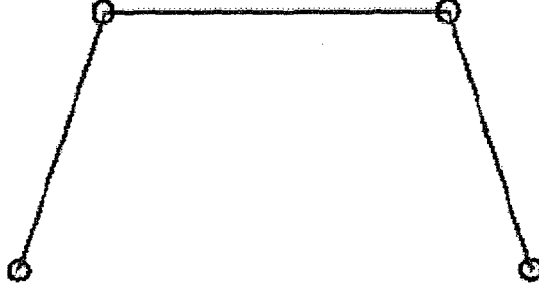
Bir düzlemde iki nokta verilmiş olsun ve noktalarla ilişkili iki yön belirlenmiş olsun. Verilen noktalardan geçen ve yönlere teğet olan bir eğriyi bulunuz.



Şekil 2.2 İki nokta ve yönlerle belirlenmiş eğri

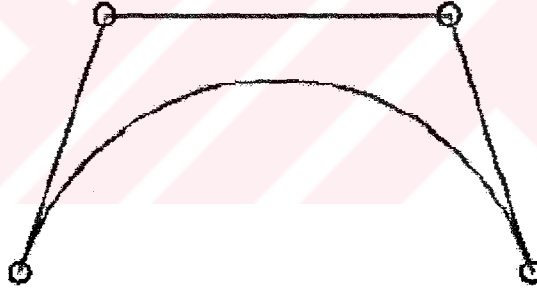
Bu iş CAGD eğri tipleriyle ve parametrik formlarla ilgilenen ve elinde kağıdı kalem olan herkes için kolay bir iştir. CAGD sezgisel ve kolay kullanılabilir araçlar üretir. Bazen bu araçların matematiksel altyapıları epey karmaşık olabilir fakat sonuç geometrik olarak seçilebilir ve kolay anlaşılır olmalıdır. Teknik bir insan bu araçlardan daha derin matematik problemleriyle uğraşırken yararlanır. CAGD geometrisi görsel sunum için çok uygundur.

CAGD’nin arka yüzünde doğal olarak gelişen bir geometri vardır. Küçük artımsal adımlarla karmaşık objeleri, noktalar ve çizgiler gibi basitliklerle tanımlamak mümkündür.



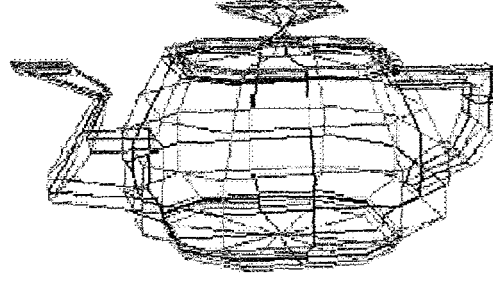
Şekil 2.3 CAGD'nin başlangıcı; kontrol noktaları

Bir düzlemde 4 nokta belirleyip bunları bir poligon oluşturacak şekilde birleştirelim. Noktalar kontrol noktaları poligon ise kontrol poligonu olarak bilinir. Bu kontrol noktaları ve poligonu oluşturulacak eğrinin yaklaşık şekline karar verirler. Kontrol noktaları sonuç eğrinin davranışını belirleyecek boyutta noktalardır. Kontrol poligonu ise kontrol noktalarının doğru sırada birleştirilmiş halidir ve yaratılacak eğrinin kaba bir örneğini sağlamış olur. Kontrol poligonu iki açık uca sahiptir ve isterse kendini kesebilir.



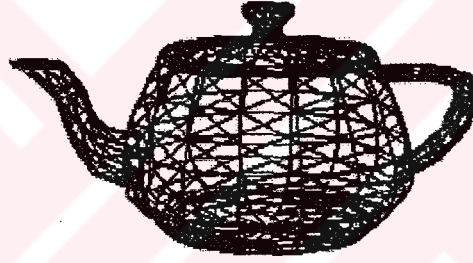
Şekil 2.4 Bezier eğrisi

Bezier eğrisi ismini Fransız araştırmacı Pierre Bézier'den almış olup kolay ve kullanışlı özelliklere sahip iyi huylu bir CAGD eğrisidir. Kontrol noktaları kullanılarak Bezier eğrisi olarak bilinen özel bir eğri oluşturulabilir. Dikkat edilirse eğri son noktalardan geçerken diğer noktalardan yakın geçmektedir.



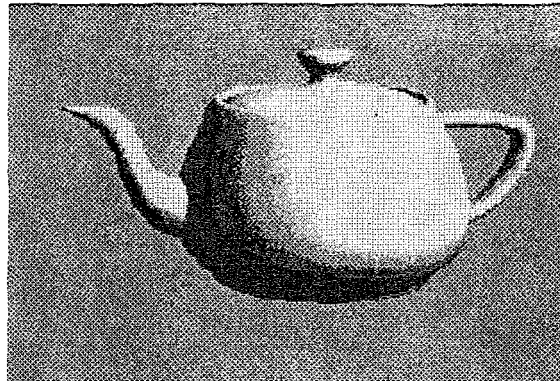
Şekil 2.5 Yüzeyler için 3 boyutlu kontrol poligonu (Kontrol ağıları)

Bezier eğrileri 3 boyutta aynı 2 boyutta davrandıkları gibi davranırlar. Şekilde 3 boyutlu bir objenin Bezier yamaları dahilinde kontrol poligonlarını göstermektedir. Bezier yamaları Bezier eğrisinin 3 boyutlu bir uzantısı olup Bezier eğrisini yüzeyi oluşturmak için uzaysal boyuta taşıyarak oluşturulur.



Şekil 2.6 3 boyutlu tel çerçeve modeli

Bezier eğrileri yaratılırken ve 3 boyutlu bir şekilde birbirlerine bağlanırken objenin tel çerçeve modeli oluşturulur.



Şekil 2.7 3 boyutlu gölgelendirilmiş obje

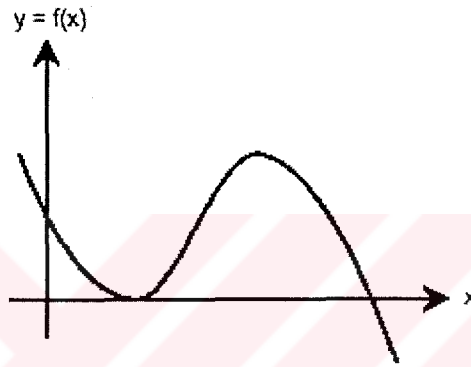
Bezier yaması ile üretilmiş yüzey ışıklandırılıp gölgelendirilirse gerçek görünümlü bir obje gibi sonuçlanır. (Rogers,D. F., Adams J.,1976)

2.4 CAGD matematiği

CAGD 2 veya 3 boyutlu uzayda geometrik olarak ifade edilen noktaları çizgileri ve yüzeyleri matematiksel objeler olarak görür.

2.4.1 Parametrik Formlar

Genel eğri, bir $f(x)$ fonksiyonun grafiği olarak sunulur.

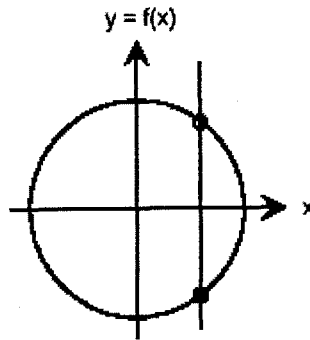


Şekil 2.8 (x,y) noktaları kümesinin grafiği

x değiştikçe fonksiyon ile $y = f(x)$ fonksiyonu ile hesaplanır ve (x,y) koordinatları ile eğri çerçevelenmiş olur. Bu eğrinin açık biçimi olarak isimlendirilir.

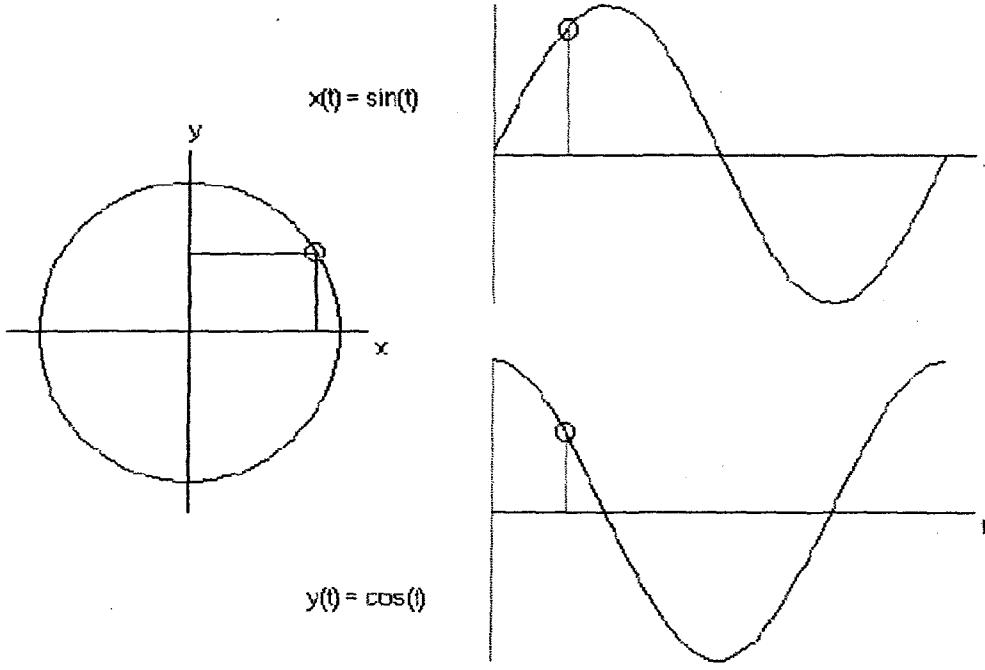
Tasarım bakış açısından açık biçimli eğriler bir çok yolda yetersiz kalmaktadır.

- Tek değerli



Şekil 2.9 Çemberin bu çizgi boyunca aldığı 2 değer

Eğri y eksenine paralel her çizgi için tek değerlidir. Örnek olarak çemberin sadece parçaları



Şekil 2.11 Parametrik çember (yaklaşık 57 derece)

CAGD yukarıda sunulan örnekte sinüsoidal fonksiyonlardan ziyade öncelikle rasyonel ve polinomal fonksiyonlarla ilgilenir. Örneğin aşağıdaki fonksiyon ile bir çember, t değişkeninin $-\infty$ dan $+\infty$ a değişmesini sağlayarak verilebilir.

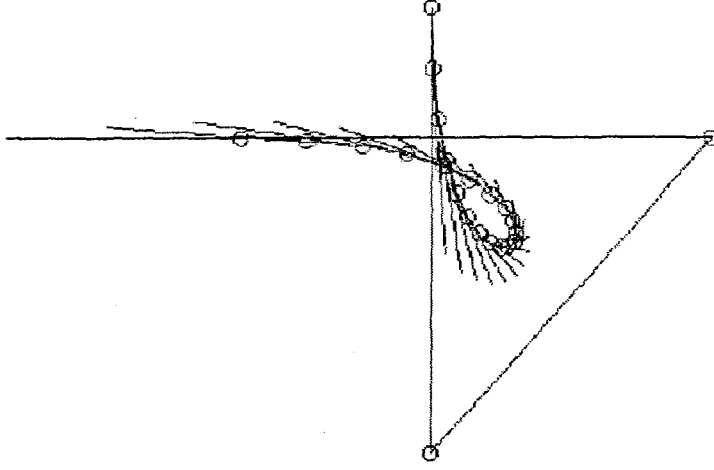
$$x(t) = \frac{2t}{(1+t^2)}, y(t) = \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \quad (2.1)$$

Her iki fonksiyonda bir çember belirttiğine göre aradaki fark nereden kaynaklanmaktadır? Bu fark parametleştirmedir. $(x(t), y(t))$ noktasının hareketi yollar aynı olmasına rağmen farklıdır.

Parametrik eğriler çizgi boyunca tek değerli olmak için zorlanmamıştır ve parametrik eğri bölümünün eğimi dikey olarak tanımlanabilir. Eğim çizginin herhangi bir noktada tanjantı olup herhangi bir t noktasında türetilmiş vektör olan $(x'(t), y'(t))$ bulunarak hesaplanır. Bu vektör t değiştikçe noktanın eğriyi izlediği hıza karar verir. Noktalarda ifade edilen eğrilerin hızlarının 0'a düşüp sorun teşkil etmesi "Sürekliliğin" bir konusudur.

Aşağıdaki koordinat fonksiyonları ile verilmiş bir parametrik eğri düşünelim.

$$\begin{aligned} x(t) &= 6t - 9t^2 + 4t^3, \\ y(t) &= 4t^3 - 3t^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$



Şekil 2.12 Bezier teğet sunumu

Bu örnek t 0 ile 1 aralığında değıştikçe bu parametrik eğri için şunları sunar.

- t parametresi $(x(t), y(t))$ noktasını eğri yolu boyunca hareket ettirir.
- Noktanın hızı t değıştikçe değışir.
- Hız eğrinin sonlarına geldikçe artar.
- Türemiş vektör noktanın hızındaki değışmeyi yansıtır bir biçimde uzunlukta değışir.
- Örnekte eğri, parametrik eğrilerde çok kolay olabildiği gibi kendini kesmektedir.

Bu denklem için en uygun notasyon şu şekilde olabilir.

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -9 \\ -3 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^3. \quad (2.3)$$

(2.2) ve (2.3) fonksiyonları aynıdır. Sadece notasyon, uygun vektörle çarpılarak bir kere yazılacak temel fonksiyonlarla gösterilmiştir. Eğer vektör scalar bir değer ile çarpılacak olursa vektördeki her koordinat bu değerle çarpılmış olur.

Genel olarak parametrik bir polinom şu şekilde yazılır;

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n. \quad 2.4$$

$\mathbf{f}(t)$ vektör değerli fonksiyon ve $\mathbf{a}$ 'lar da vektörlerdir. Vektörler 2 boyutta

sınırlandırılmamışlardır. 3 boyutlu olabilirler. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonu $x(t)$ $y(t)$ ve $z(t)$ olmak üzere 3 tane koordinat fonksiyonuna sahip olacaktır. Eğri uzayda bir eğri olabilir ve türemiş $f(t)$, $(x'(t), y'(t), z'(t))$ türemiş koordinat fonksiyonlarının vektörü olarak verilebilir.

2.4.3 Parametrik Yüzeyler

$z = f(x,y)$ fonksiyonunda z yüksekliği, $f(x,y)$ fonksiyonunu hesaplayarak verilmiştir. Bu gibi bir yüzey tanımlaması eğrilerde anlatıldığı gibi bazı kusurlara sahiptir.

- Düzlem üzerinde herhangi bir nokta tek değerli olma zorundadır.
- Dikey teğet düzlemlere sahip olamazlar.
- Dönüşümler yukarıdaki iki zorluğu ortaya çıkarabilmektedir.

Yüzeylerin parametrik olarak formu bu sorunları giderir. Parametrik yüzey tanımlayabilmek için en iyi yol önce parametrik bir eğri tanımlamak ve eğriyi uzayda ilerleterek yüzeyi tanımlamaktır.

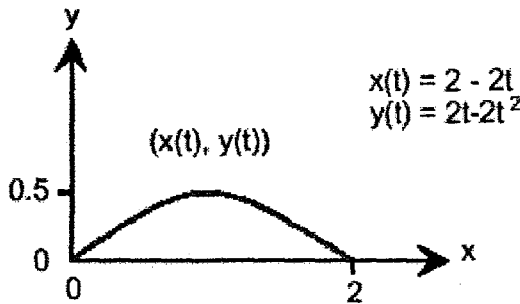
Düzlemsel bir eğri şu şekilde olsun;

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 - 2t, \\ y(t) &= 2t - 2t^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Vektörel formda ise;

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}t^2. \quad (2.6)$$

$x(t)$ ve $y(t)$ ile belirlenmiş eğri şu şekilde çizilecektir;



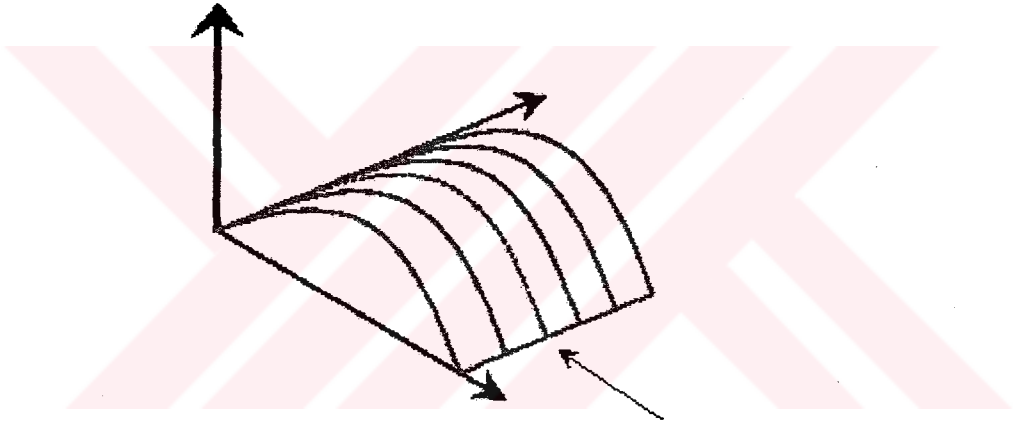
Şekil 2.13 $x(t)$ ve $y(t)$ ile belirlenmiş eğri

Burada t parametresi 0 ve 1 aralığında sınırlandırılmıştır. Bu eğri eğer diğer bir s parametresi ve z koordinat fonksiyonu eklenirse bir yüzey haline gelir.

Örneğin;

$$\begin{aligned} x(s, t) &= 2 - 2t, \\ y(s, t) &= 2t - 2t^2, \\ z(s, t) &= s. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$s = 1$ olduğu zaman (2.4)'de tanımlanan eğri $z = 1$ ile düzlemde üretilmiş olur. s içerisinde eğri değişirken bir yüzey oluşturur. Bir parametrik yüzey parametrik eğrilerin yığını olarak düşünülebilir. Yüzeyde s veya t yi seçerek bu yığından sadece tek bir eğri belirlenmiş olur.



Şekil 2.14 Yüzey oluşturmak için z boyutu

Bu şekilde düzlemsel eğri yüzey oluşturabilmek için z boyutuna taşınmıştır. s değeri 0.8 olduğunda eğri, t parametresi 0 ile 1 arasında değişirken üretilir.

(2.8) denkleminde $x(s, t)$ ve $y(s, t)$ s' de hiçbir koşulu yoktur ve $z(s, t)$ ise t de hiçbir koşula sahip değildir. Koşullar örneği basitleştirmek için sınırlandırılmıştır fakat genel olarak yüzeyler şu şekilde parametrik polinomal olarak yazılabilir;

$$f(s, t) = \begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$= a_{00} + a_{10}s + a_{01}t + a_{11}st + a_{20}s^2 + a_{02}t^2 + a_{21}s^2t \dots$$

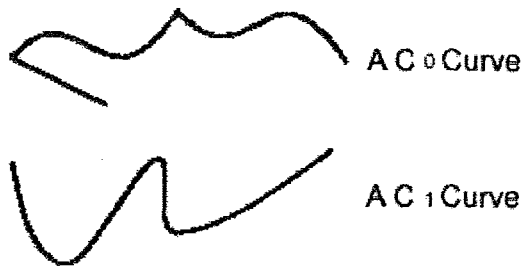
Kalın şekilde belirtilmiş olan a ' lar vektör niceliklerini, indisleri ise parametrik kuvvetlere denk gelir.

2.4.4 Süreklilik

Süreklilik notasyonu, açık fonksiyonlar için bir eğri kırılmadığı veya kopmadığı zaman açıklanabilmek için geliştirilmiştir. Süreklilik, düzgünlük notasyonunu tarif etmektedir. Yani kırılmayan veya kopmayan eğriler gibi. CAGD'nin araba gövdesi tasarımı gibi ticari uygulamaları sıkça sürekli yüzeyler ve eğriler gerektirir. Eğer bu koşullar sağlanırsa C_0 - C_0 sürekliliği olarak tanımlanır ve bilindik şu açıklamayla belirtilir: "Eğer bir eğri sürekli ise kalemi kağıttan kaldırmadan çizilebilir."

Eğer türemiş eğri de sürekli ise eğri "first-order differentiable" olur ve C_1 sürekli olarak isimlendirilir. Bu fikri genişleterek bir eğri için, k ' ıncı türemiş eğrisi sürekli ise C_k süreklidir denir.

Pratikte bu, C_1 sürekliliğinin çok eğrilmeyeceğini fakat daha yüksek dereceli sürekliliklerin daha düzgün eğriler oluşturacağı anlamına gelmektedir.



Şekil 2.15 Yüksek dereceli süreklilikler daha düzgün eğriler oluşturur

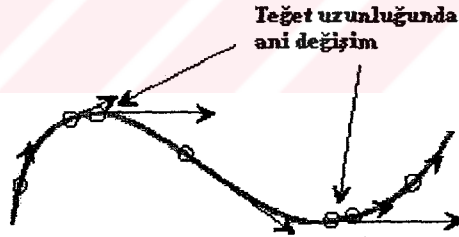
Şekildeki iki eğriden 0 dereceli olanın bir çarpıklığı varken daha yüksek dereceli olan C_1 'in genel olarak daha düzgün olduğu görülmektedir. Geleneksel C_1 notasyonu aslında eğrinin bütün özelliklerini sağlamaz. Örneğin düz bir çizgide ilerleyen bir zerre olduğunu düşünelim fakat hızında belirgin iniş çıkışlar olsun. Bu C_1 değildir fakat eğri oldukça düzgün olabilir.

Bunun tam tersi olarak C_1 eğrisinde bir çarpıklık olabilir. Bu zerre pozisyon değiştirirken ve yeniden yola çıkarken hızı 0'a yaklaşırsa meydana gelebilir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir;



Şekil 2.16 C_1 eğrisinde hız değişiminden kaynaklanan çarpıklık

Matematikçiler sürekliliği açıklamanın yeni bir yolu olarak çok çeşitli konseptler geliştirmişlerdir. CAGD'de aynı sonuca ulaşmak için daha basit bir konsept vardır. Bu tasarımcıya eğrinin düzgün olup olmadığını anında bildiren geometrik süreklilik fikridir. Eğer bir eğri C_0 eğrisi ise G_0 sürekliliğindedir. Eğer eğrinin teğet yönü sürekli olarak değişiyorsa C_1 o zaman G_1 süreklidir denir. Büyüklüğünün düzensiz değişmesi G_1 sürekli olduğunu değiştirmez. Zerrenin düzenli olmayan hız değişimleri olsa bile yönü düzenli değişiyorsa düzgün bir eğri çizebilir. Bu aşağıdaki çizimde gösterilmiştir.



Şekil 2.17 Düzgün yön değişimiyle düzgün eğri

Eğer bir C_1 eğrisi türemişleri 0'a gittiği için çarpıklıklara sahipse G_1 sürekli değildir çünkü çarpıklıkta teğet yönü düzensiz olarak değişmektedir. Bu nedenle geometrik sürekliliğinin notasyonu bir eğri veya yüzeyin düzgünlüğünü anlamada kullanışlı bir yol sağlar.

3. GEMİ TEKNE FORMUNUN İFADESİNDE KULLANILAN MATEMATİKSEL YÖNTEMLERİN TARİHÇESİ

Gemi tekne formunun matematiksel olarak ifade edilmesi uzun süreden beri araştırılmaktadır. Daire elips gibi geometrik şekiller kolay imalatından dolayı eski gemilerde sıkça kullanılmıştır. İsveçli bilim adamı Chapman 1760 yılında gemi formunun matematiksel olarak ifade yöntemini su hatları için parabol eğrilerini kullanarak araştırmıştır. Daha sonra 1863 yılında Bystrom, Chapman'ın araştırmalarını genişleterek gemi eğrilerinin ifadesinde çeşitli mertebede polinomlarda kesirleri ve integral bileşenlerini de kullanmıştır.

D.W. Taylor'ın yaptığı araştırmalar matematiksel gemi eğrilerinin ifadesinde öncülük niteliği taşımıştır. Taylor gemi formunu geometrik form parametreleriyle türeterek çeşitli gemi formu serileri yaratmıştır. Çeşitli sayıda Amerikan savaş gemisi Taylor serilerine göre inşa edilmiştir.

1950'li yıllarda bilgisayar gemi inşaa alanına girmiş ve gemi formunun matematiksel olarak ifade yöntemlerinde bazı değişiklikler olmuştur. Gemi imalatında kullanılan sayısal kontrollü cihazlar daha hassas verilere ihtiyaç doğurmuştur. Bununla birlikte eğrilerin ifadesinde yeni matematiksel yöntemler kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin kapalı ve kapalı olmayan fonksiyonlar yerine parametrik fonksiyonlar kullanılmaya başlanmıştır. Parametrik eğriler kapalı ve bağımsız değişkene bağlı çoklu değerlere sahip eğrilerin ifadesi için uygun bir yöntemdir. Böylelikle parametrik olmayan eğrilerdeki sonsuz teğet değerler ve birden fazla değer ifade edilememesi gibi sorunlar ortadan kalkmış oldu. Parametrik eğrinin transformasyon işlemlerinde diğer matris elemanlarıyla kolayca işleme sokulabilmesi bilgisayar grafik işlemlerinde avantaj sağlamıştır.

Bilgisayar destekli geometrik tasarım alanındaki en büyük gelişme spline eğri ve yüzey teorilerinin geliştirilmesiyle olmuştur. Spline ismi adını gemi endazesi çiziminde kullanılan ve adına tiriz denilen ince uzun çubuklardan almaktadır. İlk çalışmalar fiziksel spline ile yapılmıştır. Bernoulli kardeşler ince bir çubuğu eğmek için gerekli işin çubuğun eğrilığının karesiyle doğru orantılı olduğunu gördüler. Matematiksel olarak spline ilk olarak Schonberg tarafından 1946 yılında n. dereceden parça parça eğriler olarak ele alındı. Spline eğrileri verilen noktalardan geçen eğri uydurma teknikleri (Kübik Spline) ve eğri yaklaşım teknikleri (B-spline) olarak iki ayrı türde ifade edilmekteydi.

Kübik Spline gemi çiziminde kullanılan fiziksel tirizin matematiksel ifadesiydi fakat bu yöntem eğri uydurma yöntemine dayandığı için her zaman iyi sonuç vermemekteydi. Eğri

verilen her noktadan geçtiği için eğride kimi zaman hatalar ve sapmalar olmaktadır. Bu tür dezavantajları gidermek için araştırmacılar yeni teknikler geliştirmeye çalıştılar. De Casteljaou ve Bezier bu konuda birbirlerinde bağımsız araştırmalar yapmışlar ve aynı sonuca ulaşmışlardır. Bu yeni teknikle eğri kontrol poligonlarıyla ifade edilmekteydi ve eğri bu poligonların şeklini almakta, temel veya ağırlık fonksiyonlara bağlı olarak şekil değiştirmekteydi.

B-spline eğrileri ise gemi formu ifadesinde geniş yer bulmuştur. Bu teknikte herbiri bir polinomla ifade edilen eğri parçalarından oluşmaktadır. Bezier' e göre avantajı düğüm noktası vektörüne bağlı olarak eğrinin derecesi Bezier' in aksine kontrol noktası sayısından bağımsızdır.

1975 yılında Versprille tarafından B-spline eğrileri biraz daha geliştirilerek daire, elips ve hiperbol gibi konik eğrilerinde B-spline eğrileriyle ifade edilmesine olanak sağladı. Bunun adına düzgün olmayan rasyonel B-spline kısaca NURBS denildi. Bu yöntemle her kontrol noktasında ayrı bir parametreyle ek bir kontrol noktası daha eklenmiştir.

Matematiksel yüzeylerin ifadesinde 1964 yılında Ferguson yüzeylerinin genelleştirilmiş bir hali olan Coons yüzeyleriyle olmuştur. Bu yüzeyler esnek bir tasarım yöntemi olmasına karşın birleşme noktalarında ve eğri kontrolünde bir takım problemler yaşatmıştır. Bu sorun Bezier eğrilerinin yüzeye taşınmasıyla aşılmıştır. Bezier eğrilerinin de eğrinin derecesinin kontrol sayısına bağlı olması, lokal kontrolünün az olması gibi problemleri vardır. Bezier' in bu eksiklikleri ise B-spline yüzeyleriyle ortadan kalkmıştır. (Narlı, E.,1999)

4. EĞRİLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ

Son yıllarda, yüzey veya eğri oluşturma için çeşitli çizgiler ve bir çok metot geliştirilmiştir. Bunlara Kübik splines, parabolic blending ve Bezier eğrileri örnek olarak verilebilir. Tüm bu yöntemler diğerlerinde olan sorunlardan kurtulmak için üretilmiştir. Bu sorunlar; istenmeyen polinomal salınımlar, birleşme noktalarındaki sınırlı süreklilik, sınırlı yerel kontrol, aşırı hesaplama gereksinimleri, eğriyi barındıracak aşırı çok miktardaki bilgisayar depolama gereksinimleri, eğriyi keskin köşelerde kırma zorluğu ve eğrileri parçalı halde sunma zorlukları olarak sıralanabilir.

Tüm bu yöntemler gemi çizgi ve yüzey tasarımlarında kullanılmışlardır. Örneğin kübik splines U.S. Navy CASDOS sisteminde ve Bezier eğrileri gemi tekne formu tasarımında kullanılan Unisurf sisteminde kullanılmıştır.

Son zamanlarda bu sorunlara çözüm getiren yeni bir tip eğri geliştirilmiştir. Bu B-spline eğrileridir. B-spline eğrileri ve yüzeyleri ile, karmaşık eğrileri basit matematik formülleriyle sunabilir, yüksek seviyede süreklilik sağlayabilir, hesaplama gereksinimlerini en aza indirebilir, mükemmel yerel kontrol ve uygun, doğal kontrol noktaları sağlayabilir, bir eğriyi barındırmak için gerekli bilgisayar depolama gereksinimlerini en aza indirebilir ve keskin köşeler eğriyi kırmadan tek bir matematiksel formülle sunulabilir. B-spline eğrileri ayrıntılı bir şekilde incelenmeden önce parabolic blended eğrileri, kübik spline eğrileri ve Bezier eğrilerine hakkında bilgi sahibi olmak faydalı olacaktır.

4.1 Parabolic Blended Eğrileri

3 boyutlu parabolik blended eğri segmenti şu şekilde tanımlanabilir;

$$\bar{P}(t) = \bar{R}(t) + t[\bar{Q}(t) - \bar{R}(t)] \quad 0 < t < 1 \quad (4.1)$$

$\bar{P}(t)$, [$x(t)$ $y(t)$ $z(t)$] bileşenlerinden oluşan durum vektörü ve $\bar{R}(t)$ ve $\bar{Q}(t)$ yerel koordinat sisteminde 3 boyutlu paraboliklerdir. $\bar{P}(t)$ üst üste bindirme aralığında tanımlanmıştır ve $\bar{P}(t)$ denklemi temel Cartesian koordinat sisteminde gösterildiğinde kübiktir. Parabolic Blended eğrileri verilen tüm data noktalarından geçerler.

Parabolik blended segmenti, A aşağıdaki gibi;

$$[A] = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ve P1 → P4 eğri üzerindeki 3 boyutlu data noktaları olduğunda;

$$\bar{P}(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1][A][P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4]^T \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Parabolic Blended eğrileri ikinci türemiş sürekliliğe sahiptirler.

4.2 Kübik Spline

Bir 3 boyutlu kübik spline segmenti şu şekilde tarif edilir;

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=1}^4 \bar{B}_i t^{i-1}; \quad t_1 < t < t_2 \quad (4.4)$$

$\bar{P}(t)$, $[x(t) \ y(t) \ z(t)]$ bileşenlerinden oluşan durum vektörü ve $\bar{B}_i$, her biri 3 bileşenden oluşan 4 sınır durum vektörünü belirleyerek elde edilmiş 12 sabit scalar çarpan ihtiva etmektedir.

Kübik spline'lar konum ve eğim olarak sürekli parçalı ve ikinci türemişliktedir. Spline'nın başlangıcında ve sonu arasında verilen tüm data noktalarından geçer. Verilen nokta kümeleri için tek bir spline yoktur çünkü farklı son durumlar hepsi verilen data noktalarından geçen değişik eğriler yaratmak için kullanılabilir. Kübik Spline'nın bir dezavantajı data noktaları eşit aralıklarla yerleştirilmemişse sahte kırpanmalar oluşabilir.

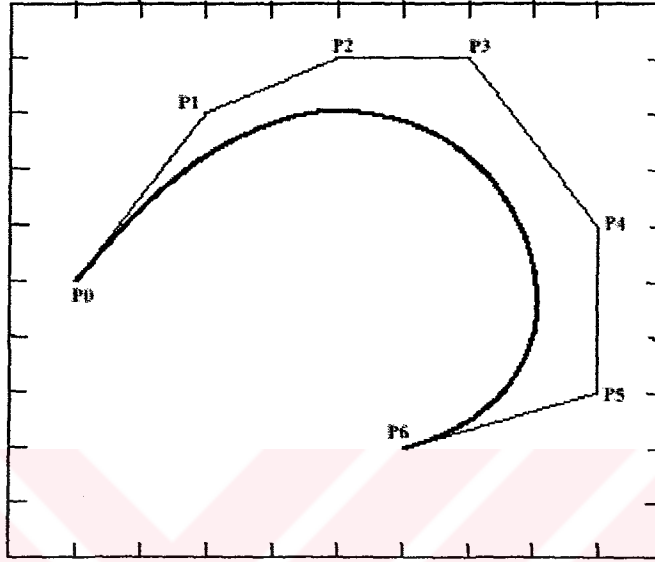
4.3 Bezier Eğrileri

Bir 3 boyutlu Bezier Eğrileri eğrisi şu şekilde tarif edilir;

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{B}_i J_{n,i}(t); \quad 0 < t < 1 \quad (4.5)$$

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

Eğrinin şekli açık poligon oluşturan 3 boyutlu B_i ile tanımlanır. Sonuç eğrisi poligonun ilk ve son açıklıklarına teğettir ve ilk ve son noktadan geçerler. Diğer bir açıdan Bezier eğrisi, poligon kontrol noktalarının yerlerini değiştirerek kolayca kontrol edilecek düzgün bir eğridir. Eğri içsel dikliklerden geçmez. Tipik bir Bezier eğrisi ve tanımlayıcı poligonu aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1 Bezier eğrisi ve tanımlayıcı poligonu

Bu eğri P. E. Bezier tarafından Renault arabaları tasarımında kullanılmak üzere geliştirilmiştir. Karmaşık eğri şekillerini tanımlamada çok pratik bir araç olduğu kanıtlanmış ve mühendisler ve sanatçılar tarafından da kullanılmıştır.

4.4 B-spline Eğrileri

Bahsedilen eğrilerden en başarılı olanı Bezier eğrisidir. B-spline eğrisi başlangıç noktası olarak temelini Bezier eğrisinden almıştır. Bezier eğrisi de B-spline eğrisi de sonuç eğrilerini tasarlayacak kontrol noktaları sağlamak için tanımlanmış poligon noktaları kümesi kullanır. Matematiksel bir bakış açısından, tanımlanmış bir poligon ile oluşturulmuş bir eğri, poligon ile eğri arasında bağlantı kurabilmesi açısından bazı enterpolasyon ve yaklaşma şemalarına bağlıdır. Bu şema, temel ve karışım fonksiyonu seçimine bağlı olarak sağlanır. Bezier eğrileri Bernstein temelini veya karışım fonksiyonunu kullanır.

Bernstein temel fonksiyonunun iki karakteristiği sonuç eğrilerinin esnekliğini sınırlar. Öncelikle belirlenen poligondaki kontrol noktası sayısı eğriyi belirleyecek sonuç polinomalının düzenini sabitleştirir. Örneğin kübik bir eğri 4 kontrol noktası ve 3 kenarlı bir

poligon ile ifade edilmek zorundadır. 6 kontrol noktasına sahip bir poligon her zaman 5. mertebeden eğri oluşturacaktır. Eğrinin sınıfını azaltacak tek yol kontrol noktası sayısını azaltmaktır ve bunun tam tersi olarak eğrinin sınıfını arttıracak tek yol ise kontrol noktası sayısını artırmak olacaktır.

İkinci kısıtlama karakteristiği ise Berstein temelini kendi doğal yapısıyla alakalıdır. Bu, karışım fonksiyonu $N_{i,k}(t)$ 'nin değeri eğrinin tüm kenarları üzerindeki tüm parametre değerleri için sıfırdan farklıdır. Bezier eğrisindeki her nokta tüm tanımlanmış kontrol noktalarının değerlerinin ağırlığı sonucu olduğundan bir noktada yapılacak bir değişiklik tüm eğri boyunca hissedilecektir. Bu lokal kenar kontrolü eksikliği bazı uygulamalarda zararlı olabilir.

B-spline temeli olarak bilinen ve Berstein temelini özel bir durum olarak barındıran başka bir temel vardır. Bu genellikle global değildir. B-spline eğrilerinin global olmayan davranışları her tepe noktası P_i 'nin tek bir temel fonksiyonla ilişkili olmasından kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı her tepe noktası, eğrinin şeklini ilgili temel fonksiyonun değerinin 0 olmadığı yerlerde parametre değer aralığına göre etkiler.

B-spline temeli, sonuç eğrisinin mertebesinin poligon kontrol noktalarının sayısını değiştirmeden değişmesini sağlar. B-spline teorisi ilk olarak Schoenberg tarafından ortaya atılmıştır. Nümerik hesaplama için kullanışlı olan rekürsif tanımlama ise tanımlama ise Cox ve de Boor tarafından yayımlanmıştır. Reisenfeld B-spline temelini eğri tanımlamasına tam olarak tatbik etmeyi başarmıştır.

$P(t)$ yi eğri boyunca durum vektörüne t parametresinin bir fonksiyonu olarak tanımlarsak B-spline temeline dayanarak yaratılan bir eğri

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \bar{B}_i N_{i,k}(t) \quad (4.6)$$

olarak verilir ve $B(i)$ yüzeyi tayin eden poligon tel kafesin kontrol noktalarıdır. i nci dereceden normalize edilmiş k mertebeli ve $N_{i,k}(t)$ karışım fonksiyonlu B-spline temel eğrisi şu rekürsif formülle tanımlanmıştır;

$$N_{i,l}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i < t < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i)N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

x_i değerleri düğüm vektörü elemanları ve t parametresi $P(t)$ eğrisi boyunca 0 dan t_{max} 'a kadar değişmektedir.

B-spline eğrilerine doğal olarak eklenmiş olan esnekliği hesaplamak için ek bir değişken kullanılması gerekmektedir. Bu düğüm vektörü kullanılarak çözülmüştür. Bir düğüm vektörü tüm x_i ler için $x_i < x_i + 1$ olacak şekilde gerçek tam sayılar serileridir. Düğüm vektörü örnekleri olarak [0 1 2 3 4] ve [0 0 0 1 1 2 3 3 3] verilebilir. x_i değerleri parametrik düğümler olarak değerlendirilir. B-spline eğrisini $0 \leq t \leq t_{max}$ ile üretebilmek için t parametresi sınırını göstermek için kullanılabilirler. Örneğin [0 1 2 3 4] düğüm vektörü t parametresinin 0 ile 4 aralığında değiştiğini göstermektedir. Arada bulunan düğüm değerleri sayısı tanımlanan poligonlardaki sıfır olmayan kenar sayısına bağlıdır.

Çift orta düğüm değeri bir noktada birden çok tepe noktası meydana geldiğini, üçlü orta düğüm değeri ise 3 tane aynı anda oluşan kontrol noktasını belirtir. B-spline eğrisi üzerinde parametrik düğümün ($t = x_i$) değerine denk gelen esas nokta geometrik düğüm olarak isimlendirilir.

Düğüm vektörü değerlerine ek olarak eğrinin mertebesi bilinmelidir. Eğer k mertebesi poligon kontrol noktalarının sayısına eşitse ve katlı kontrol noktaları yoksa bir Bezier eğrisi oluşacaktır. Mertebe azaldıkça üretilen eğri tanımlanmış poligona yaklaşılarak yatacaktır. k değeri 2 olduğunda üretilen eğri tanımlanmış poligona benzer düz çizgilerden oluşacaktır. Eğrinin mertebesi düğüm vektöründe yansıtılmıştır. Çoklu k düğümleri düğüm vektörünün hem başında hem de sonunda kullanılır. Düğüm vektörünün en büyük değeri a tanımlanmış poligondaki sıfır olmayan kenar sayısını göstermek üzere $a + k - 2$ dir. Düğüm vektöründeki tamsayı sayısı ise $n + 1 + k$ dir. Örneğin çift kontrol noktası olmayan 5 noktalı bir poligon düşünelim ($n + 1 = 5$). t parametresi tüm eğri boyunca 0 dan $n - k + 2$ ya kadar değişir. 5 kontrol noktalı 3. mertebeden tanımlanmış bir eğri için ise $t_{max} = 4 - 3 + 2 = 3$ dür. Tam düğüm vektörü

[0 0 0 1 2 3 3 3] olarak verilir. Aynı poligon tanımına sahip ikinci mertebeden bir eğrinin düğüm vektörü [0 0 1 2 3 4 4] şeklinde, Bezier eğrisine denk gelen 5. mertebeden bir

eğrinin düğüm vektörü ise $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ şeklinde olacaktır. Eğer 3. ve 4. kontrol noktaları çoklu kontrol olacak şekilde çakıştırlarsa 2. mertebe eğrinin düğüm vektörü $[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3]$ şeklinde olacaktır.

B-spline eğrisi matematiksel olarak k mertebeli ($k-1$ derecesi) polinomal spline fonksiyonu olarak tanımlanmışsa ve eğrinin düzgünlüğü yüksek mertebeli türevlerin sürekliliği temeline dayanıyorsa eğrinin mertebesi, eğrinin ne kadar düzgün olduğuna karar verecektir. Örneğin 4. mertebeden (3.dereceden) bir eğri tüm eğri boyunca ilk ve ikinci türemişlikte süreklidir. 4. mertebeden bir B-spline eğrisi kübik spline eğrilere benzerlik gösterir.

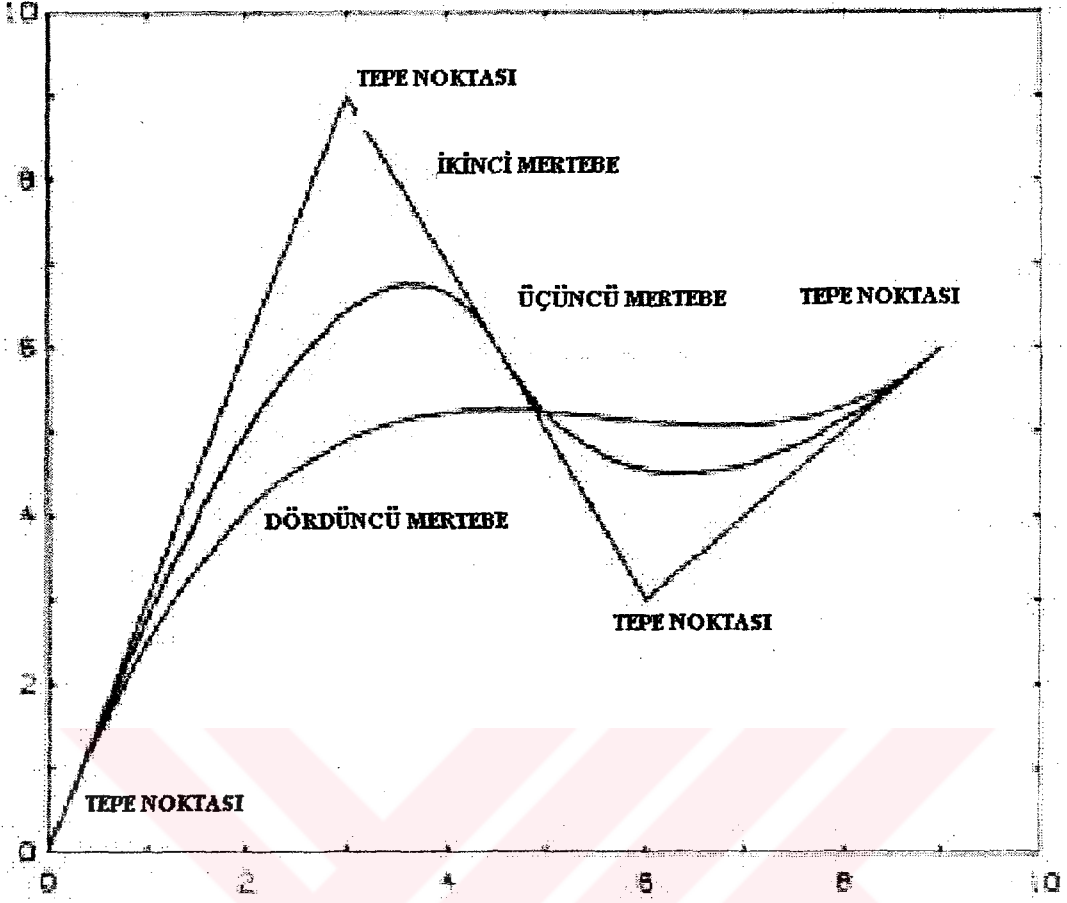
B-spline eğrilerinin esnekliğine dayanarak değişik kontrol araçları eğrinin şeklini değiştirmek için kullanılabilir. Kontrol, tam sayı olan mertebe k değerini $2 < k < n + 1$ aralığında değiştirerek ve tekrarlayan kontrol noktalarını kullanarak veya poligonda tekrarlamayan kontrol noktalarını değiştirerek sağlanabilir.

Şekilde 4.3’de aynı poligon kontrol noktalarını farklı mertebelerden kullanan B-spline eğrileri gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.2 Poligon kontrol noktaları

İkinci mertebeden eğri 4 kontrol noktası arasında 3 düz çizgi oluşturmaktadır. 4. mertebeden eğri poligon kümesi için Bezier eğrisine denk düşmekte ve 3. mertebeden eğri iki bitim noktası arasında daha dağınık bir eğri oluşturmuştur.



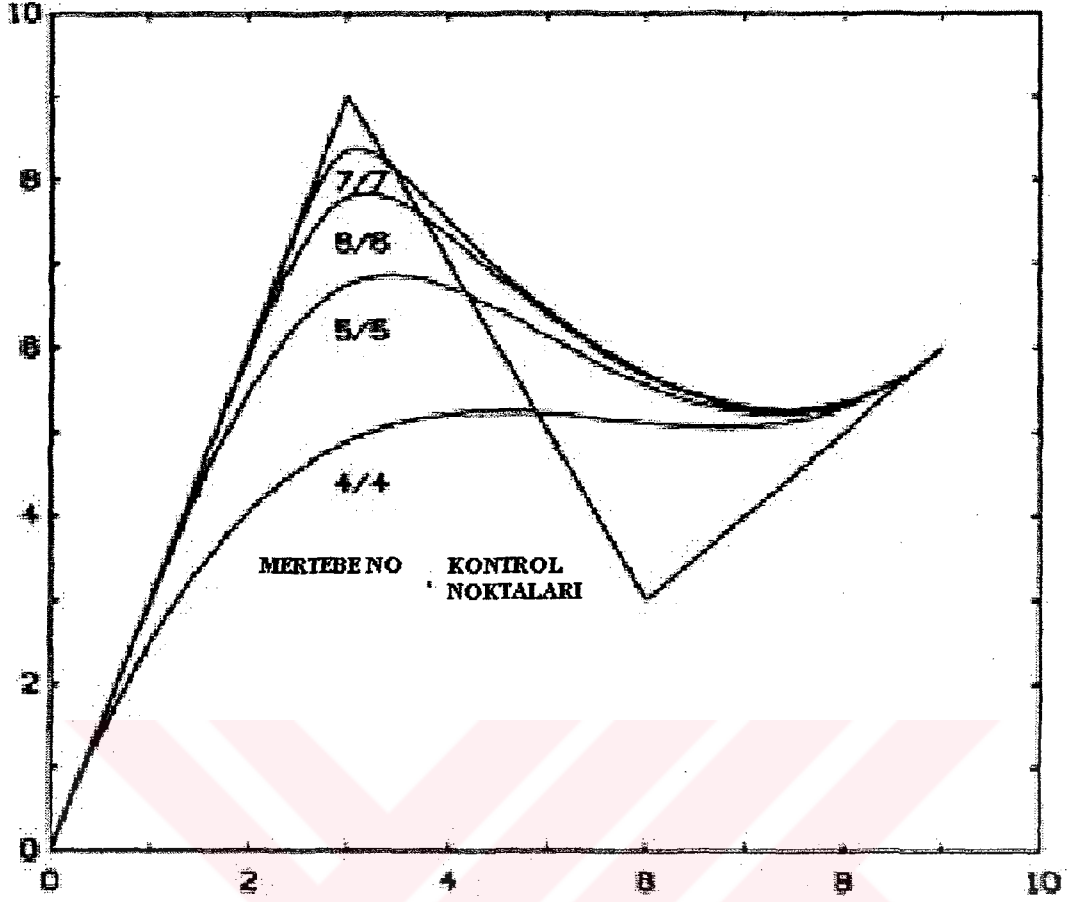
Şekil 4.3 B-spline eğrileri

Fark edildiği gibi tüm üç eğri aynı bitim eğrilerine sahiptirler. Bu tanımlanmış poligonun ilk ve son aralığı ile belirlenmiştir. Eğrinin mertebesi artıkça sonuç şekli tanımlanmış poligona daha az benzemeye başlamıştır. Bu nedenle eğrinin mertebesini artırmak eğriyi daraltmıştır.

Şekil 4.5’de tanımlanmış poligonda katlı kontrol noktalarının etkileri gözükmemektedir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 9 \\ 3 & 9 \\ 3 & 9 \\ 3 & 9 \\ 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Şekil 4.4 Katlı kontrol noktaları için poligon kontrol noktaları



Şekil 4.5 Katlı kontrol noktaları için poligon kontrol noktalarının etkileri

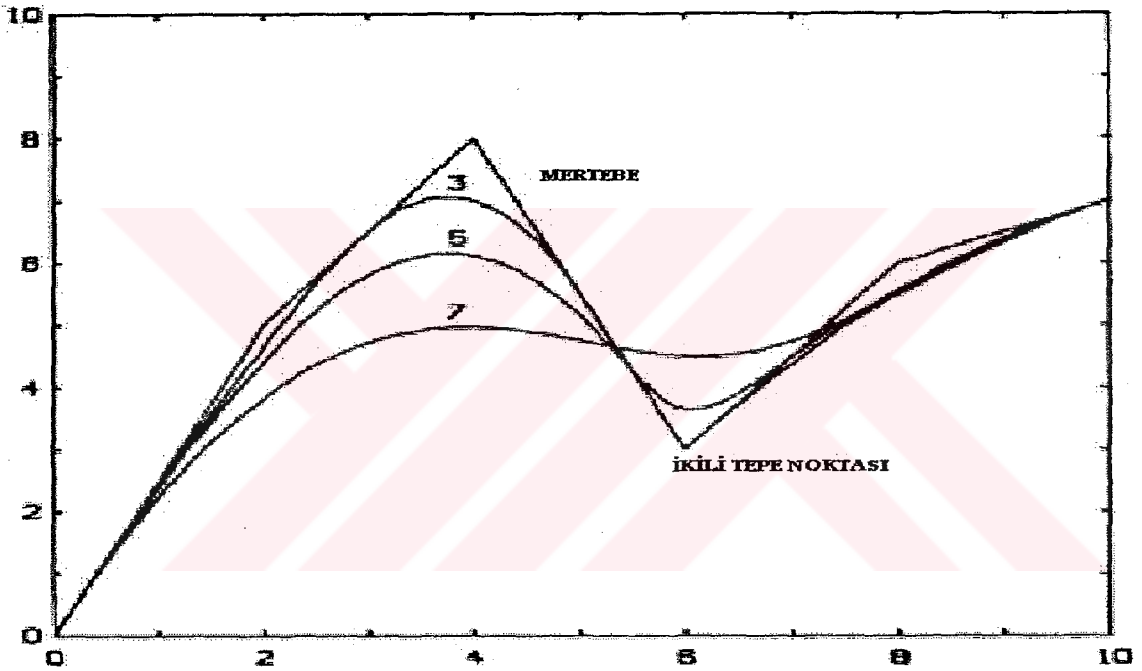
Gösterilen tüm eğriler için eğrinin mertebesi, tanımlanmış poligondaki kontrol noktası sayısına eşittir. Şekil 4.5'deki 4 poligon kontrol noktası ile belirlenmiş 4. mertebe eğri olan en düşük eğri şekil 4.3'deki en düşük eğri ile benzerdir. Şekil 4.5'deki ikinci eğri çift tepe noktasına sahip [3 9] beşinci mertebeden bir eğridir. Son eğri olan 7. mertebeden eğri [3 9] da 4 katlı kontrol noktası ile verilmiş poligona sahiptir.

Bu şekil bir eğrinin, katlı kontrol noktaları kullanarak her eğri için aynı bitim eğimlerini sürdürürken belirlenmiş tepe noktası pozisyonuna nasıl yakınlştırılarak itildiğini açıkça göstermiştir. Aynı zamanda mertebeyi düşürmek eğrinin tüm poligon tepe noktalarına yakın geçmesine itici güç olmuştur.

Şekil 4.6'da her bir eğri için tanımlanmış kontrol noktaları şöyledir;

0	0
2	5
4	8
6	3
6	3
8	6
10	7

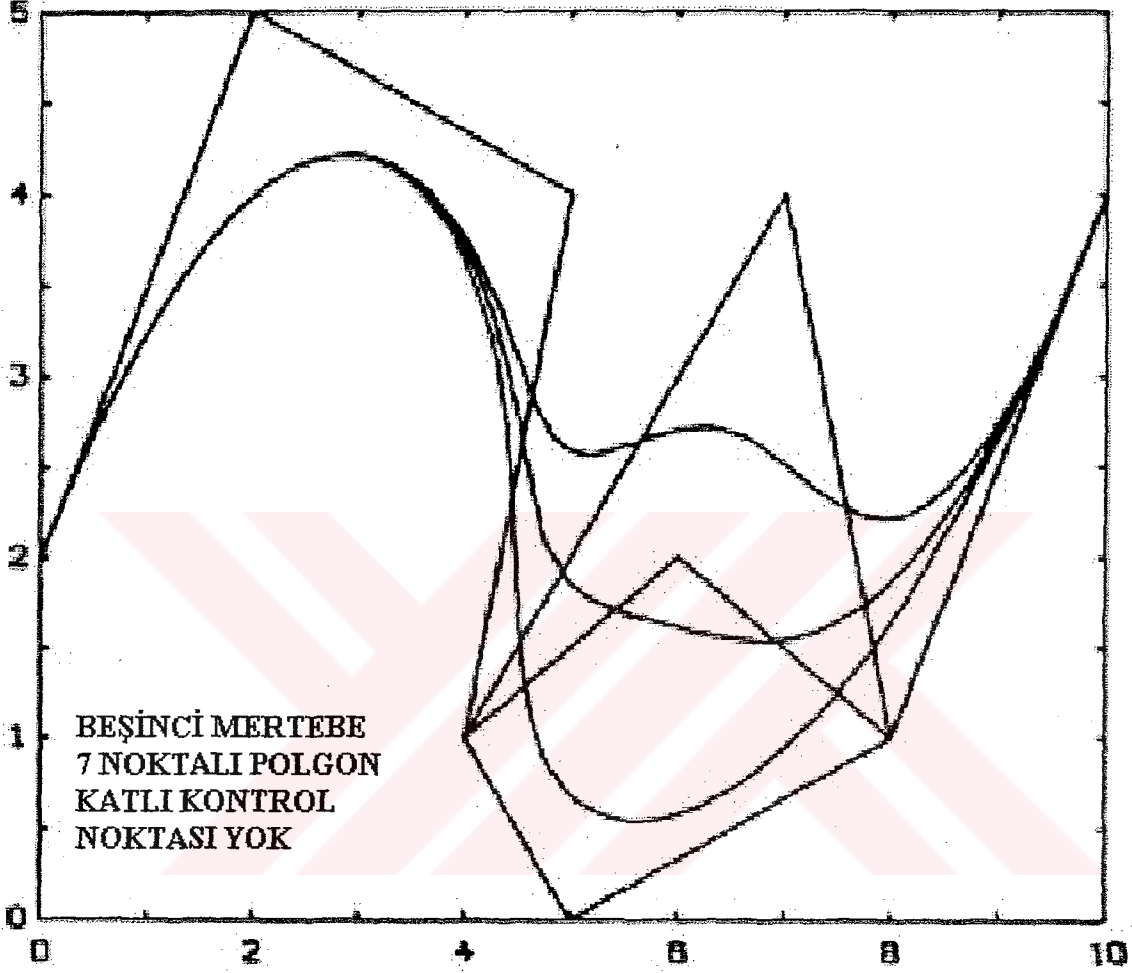
Şekil 4.6 Katlı düğüm B-spline eğrileri için kontrol noktaları



Şekil 4.7 Katlı düğüm B-spline eğrileri

Poligonun 4. elemanında ikili bir tepe noktası belirliyoruz. İşte burada tanımlanmış poligonu sabit tutarak ve her eğrinin mertebesini değiştirerek eğriyi farklılaştırabiliyoruz. İlk eğri 7. mertebeden olup poligondaki kontrol noktası sayısına eşittir. İkinci eğri 5. mertebendir ve bu eğrinin şekli poligonun şekline özellikle ikili tepe noktası civarlarında çok daha yakındır. Üçüncü eğri 3. mertebededir. Eğim ve eğrilik derecesi sürekli olmadığından ikili tepe noktasında parmağın oynak yeri gibi bir şekil belirlemiştir. Bu 4. mertebeden bir eğride üçlü tepe noktası tarafından da oluşur. Bu yetenek gemi tasarımında genel bir gereksinimdir. Eğim ve eğriliğin süreksiz olmasına rağmen eğrinin tek ve düzgün sunumu halen sağlanmaktadır. Eğri diğer metotlarda ihtiyaç duyulduğu gibi bir yerden kırılmamış veya bölünmemiştir.

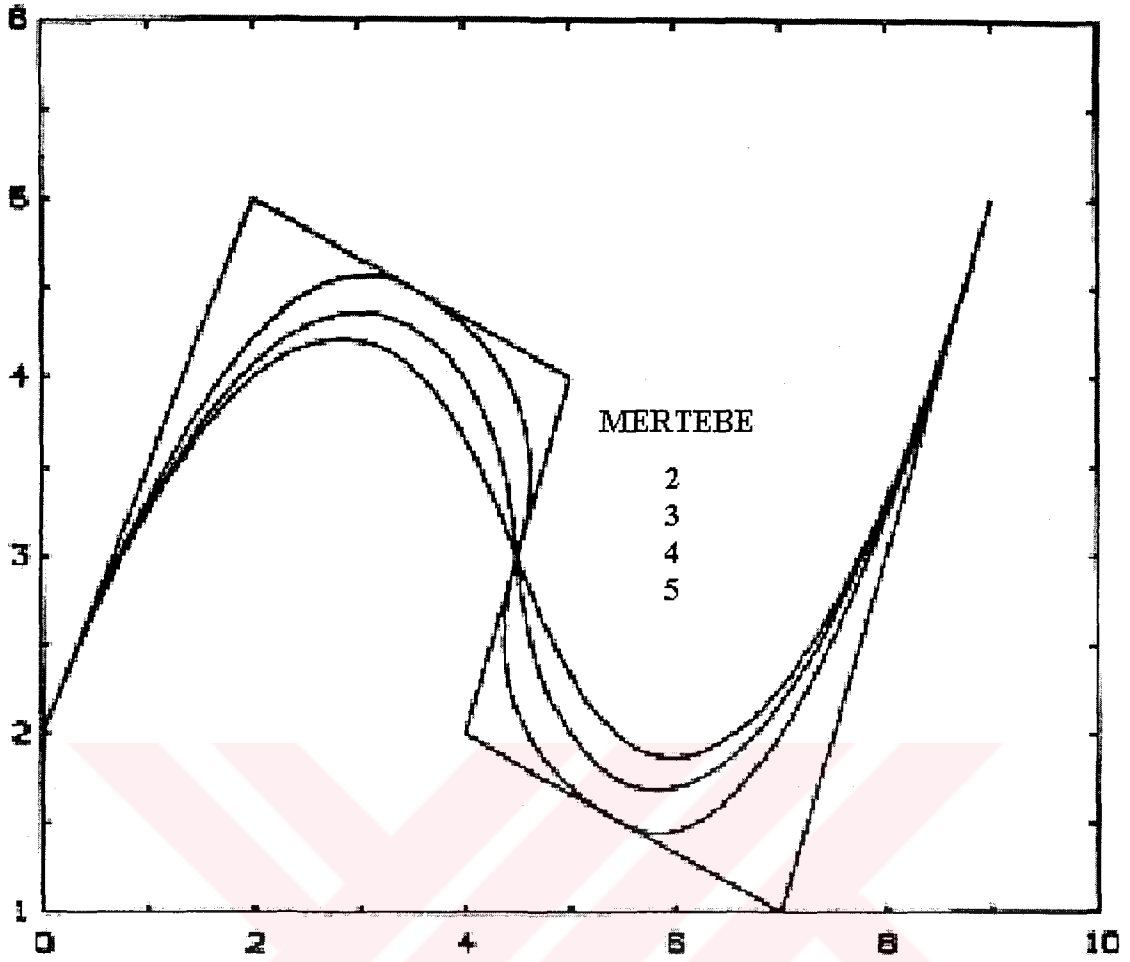
Şekil 4.8’de eğrinin tümünü etkilemeden yerel değişikliklerin nasıl yapılabileceği sunulmuştur.



Şekil 4.8 B-spline eğrilerinin yerel kontrolü

Her eğri beşinci mertebeden olup katlı kontrol noktası olmadan 7 noktalı poligon ile tanımlanmıştır. Her eğri arasındaki tek fark 5. tepe noktası yeni bir yere taşınmıştır. Görüldüğü gibi diğer tüm eğrilerin ilk parçaları değişmemiştir. Bu B-spline eğrilerinin global olmayan yani yerel yapısından kaynaklanmaktadır.

Şekil 4.9’da katlı olmayan kontrol noktaları ve 6 noktalı bir poligon ile oluşturulmuş 2-5 arasında mertebelerden oluşmuş eğriler sunulmuştur.



Şekil 4.9 B-spline eğrilerinde çeşitli mertebeler

B-spline eğri tekniği bir kübik spline'nın 3 veya daha fazla poligon kontrol noktası ile oluşturulmasını sağlar. Bu poligonda 5 kenar olduğundan 5. mertebedeki eğri Bezier eğrisidir. Üçüncü mertebedeki eğri poligon kenarlarının orta noktalarına teğet olduğundan inceleme açısından ilginç olabilir. (Bartels,R., Beatty, J., Barsky, B.,1987)

4.5 NURBS Eğrileri

Rasyonel eğri ve yüzey ifadeleri bilgisayar grafik literatüründe ilk olarak Coons tarafından ele alınmıştır. NURBS eğrileri, bilgisayar grafik tasarımı alanında bağımsız formdaki eğrilerin yanı sıra aynı zamanda çizgi, düzlem ve daire, elips, hiperbol gibi konik eğrilerin de ifadesinde kullanılan matematiksel bir yöntemdir. NURBS eğrileri ilk olarak Versprille tarafından ele alınmıştır.

Rasyonel bir B-spline eğrisi, dört boyutlu homojen koordinat uzayında ifade edilen rasyonel olmayan bir eğrinin üç boyutlu fiziksel uzaydaki izdüşümüdür. Rasyonel B-spline eğrisinin

ifadesi şu şekildedir.

$$\bar{P}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{B}_i N_{i,k}(t) \quad (4.8)$$

Burada B_i dört boyutlu uzaydaki kontrol noktalarıdır. $N_{i,k}(t)$ ise rasyonel olmayan B-spline temel fonksiyonlarıdır. Dört boyutlu uzaydan üç boyutlu uzaya izdüşüm, dört boyutlu uzayın homojen bir koordinata bölünmesiyle aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) \quad (4.9)$$

$$R_{i,k}(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)}$$

h_i burada homojen koordinatları ifade etmektedir. h_i değerlerine aynı zamanda ağırlık değerleri denmektedir. (4.7)'de görüldüğü gibi h_i değerleri 1'e eşit olduğunda denklem ifadesi rasyonel olmayan B-spline eğrisi halini almaktadır. Yukarıdaki ifadeden de görüldüğü gibi rasyonel B-spline eğrileri rasyonel olmayan B-spline eğrilerinin genel bir halidir. Dolayısıyla rasyonel olmayan B-spline eğrilerinin özelliklerine sahiptir. Rasyonel olmayan B-spline eğrilerinde kullanılan düğüm vektörleri rasyonel B-spline eğrilerinde de kullanılmaktadır.

h_i ağırlık değerlerinin Şekil 4.9 ve 4.10'da gösterilmiştir. Şekil 4.9'da 5 kontrol noktası, $k = 3$ ve açık düzgün düğüm vektörüne göre çeşitli h_i değerleri için çizilmiş temel fonksiyonlar görülmektedir. Şekil 4.10'da h_i değerlerinin eğriye olan etkisi görülmektedir. Şekilden de görüleceği gibi $h_3 = 0$ olduğu zaman eğri düz bir çizgi halini almaktadır. h_3 değeri arttığı zaman ise eğrinin kontrol noktasına aklaştığı görülmektedir.

NURBS eğrileri aynı zamanda tüm konik kesitlerin ifadesinde kullanılabilir. Konik kesitler ikinci dereceden denklemlerle ifade edildiğinden, NURBS eğrisi yöntemiyle ifade edilebilmeleri için $k = 3$ olarak ve üç kontrol noktasıyla tanımlanabilmeleri gereklidir. Üç nokta tanımlandığı için burada ağırlık değerlerinden h_2 'nin değeri konik kesitin formunu belirlemektedir. Aşağıda h belirli değerlerine göre karşılık gelen konik kesitler verilmiştir.

- $H_2 = 0$ düz çizgi
- $0 < h_i < 1$ elips eğri parçası
- $h_2 = 1$ parabolik eğri parçası
- $h_2 > 1$ hiperbolik eğri parçası

Konik kesitler gemi formu tanımında en çok sintine dönümü bölgesinde ve çeyrek daire formunda kullanılmaktadır. Sintine dönümü çeyrek daire olarak ifade edebilmek için $h_2 = \sqrt{2}/2$ değeri kullanılmalıdır.

Şekil 4.8 ve 4.9 rasyonel B-spline temel fonksiyonlarını $n+1 = 5$, $k=3$;

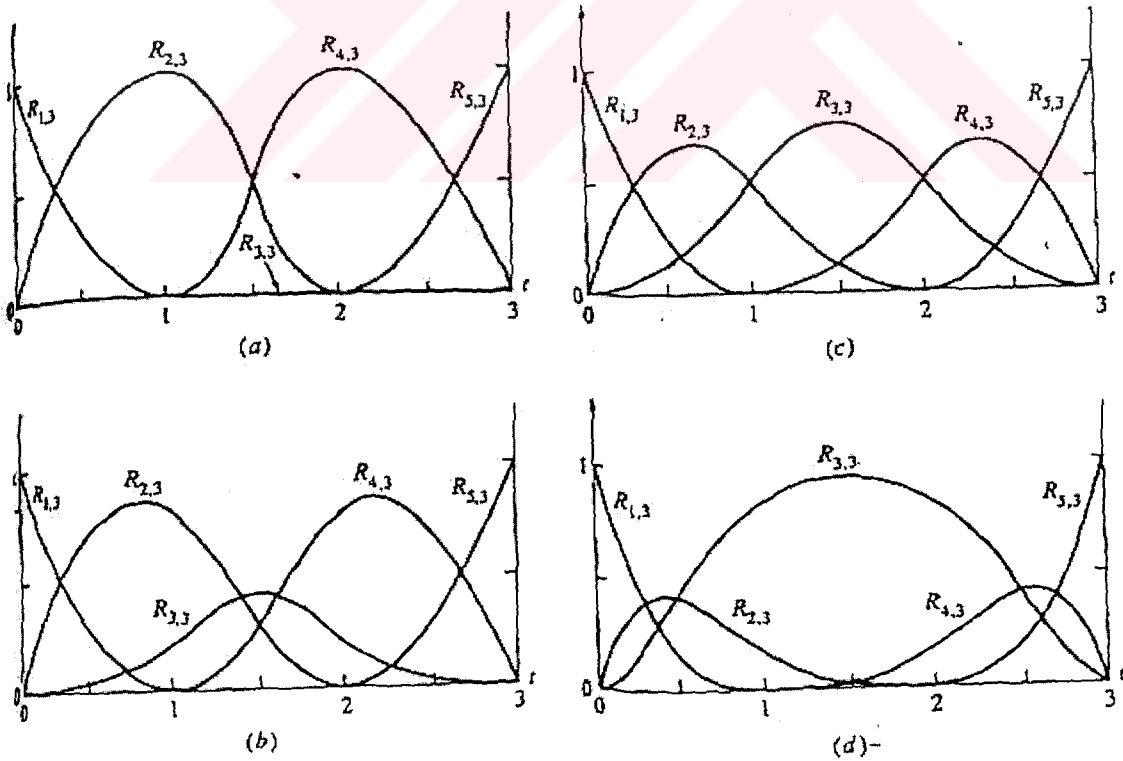
Açık düğüm vektörü $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$, $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$ olduğunda ;

$$h_3 = 0$$

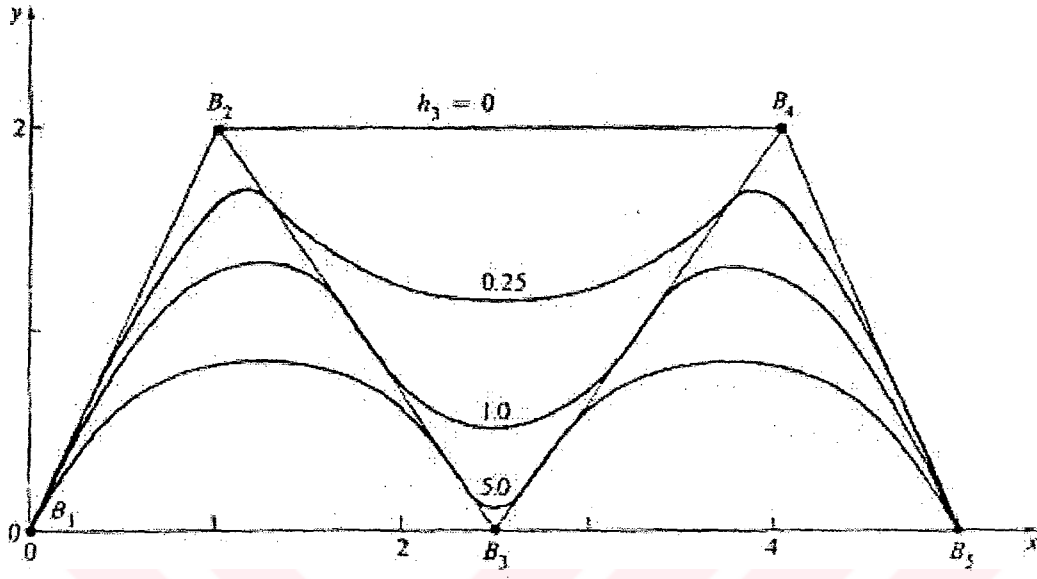
$$h_3 = 0.25$$

$$h_3 = 1.0$$

$h_3 = 5$ için gösterilmiştir. (Piegl, L., Tiller W., 1997)



Şekil 4.10 Rasyonel B-spline temel fonksiyonları



Şekil 4.11 Rasyonel B-spline eğrileri

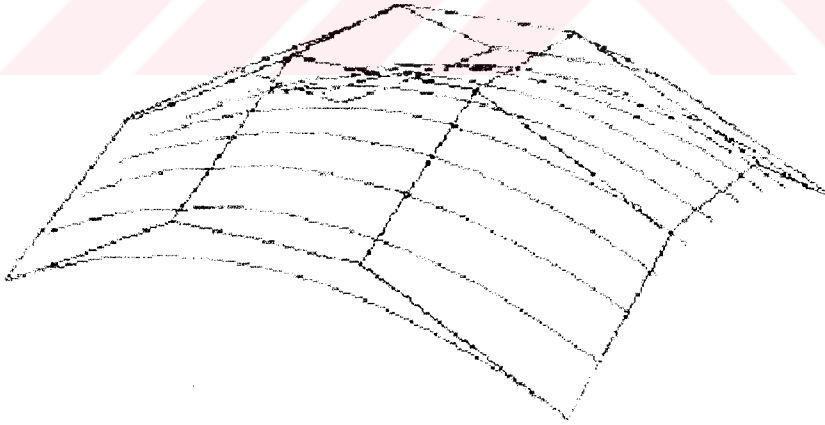
5. YÜZEYLERİN MATEMATİKSEL OLARAK İFADE YÖNTEMLERİ

Yüzeyler ve yüzey tanımlamaları bilgisayarla tasarım ve imalat alanında büyük bir rol oynamaktadır. Bilgisayar destekli tasarımda, üç boyutlu gerçek bir yüzeyin matematiksel olarak ifade edilmesi çok önemlidir. Böylelikle tasarımın ilk aşamalarında bile eğrilik gibi yüzeysel özellikleri ve hacim, yüzey alanı atalet momenti gibi fiziksel özellikleri hesaplamaya olanak sağlanmıştır. Bunun yanında elde edilen yüzeyin imalatı için gerekli bilgi klasik yöntemlere göre daha kısa sürede elde edilebilmektedir. Örnek olarak imalat için sayısal kodların çıkarılması bilgisayar yazılımlarıyla çok daha kısa sürede elde edilebilmektedir.

Yüzey belirleme tekniklerinde temel olarak iki teknik kullanılmaktadır. Bunlardan birincisi daha çok Coons'un ismiyle anılmaktadır. Coons yüzey ,ifade tekniğinde bilinen noktalardan yüzey elde etme tekniğini kullanmaktadır. İkinci olarak ise Bezier'in ismiyle anılmaktadır.

5.1 BezierYüzeyleri

Bezier eğrisinde kontrol noktaları kümesinin üç boyutta hareket ettiğini düşünürsek yeni eğrilerin oluşacağını görürüz. Eğer düzgün bir şekilde hareket ettirilirse oluşan eğri yığınları bir yüzey oluşturacaklardır. Eğer tüm kontrol noktaları Bezier eğrisi üzerinde hareket ettirilirse Bezier yüzey alanı yaratılmış olur.



Şekil 5.1 Bezier yüzey alanı

Bu, Bezier formülündeki kontrol noktalarını Bezier eğrilerine değiştirerek açıklanabilir. Yani bir yüzey şu şekilde tanımlanır;

Standart Bezier eğrisinin denklemi şu şekilde idi:

$$f(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t), \quad (5.1)$$

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n b_i(u) B_i(v), \quad (5.2)$$

Dikkat edilirse kontrol eğrileri için bir parametre ve iletirilmiş eğri için bir parametre kullanılmıştır. Orijinal kontrol eğrileri ile aynı dereceye sahip Bezier eğrileri gibi kontrol eğrileri yazmak oldukça uygundur.

i nci kontrol eğrisi b_{ij} kontrol noktalarına sahiptir. (5.2) denkleminde verilen eğri m kontrol eğrilerinin derecesi olmak üzere şu şekilde yazılabilir;

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m b_{ij} B_j(u) \right) B_i(v), \quad (5.3)$$

Bu çeşit bir yüzey bir eğri kümesini diğerinin içine yerleştirmek olarak düşünülebilir. Bu temel karakteristikten yola çıkarak yüzeyler için bir çok özellik ve çalışma türetilir.

Basit cebir ile denklem şu hale dönüşür.

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m b_{ij} B_j(u) \right) B_i(v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{ij} B_i(v) B_j(u). \quad (5.4)$$

Bu durum bir eğri diğeri boyunca ilerlemiş ve hedeflenen bir yön olmadığındadır. Yüzey alanı şu şekilde yazılabilir.

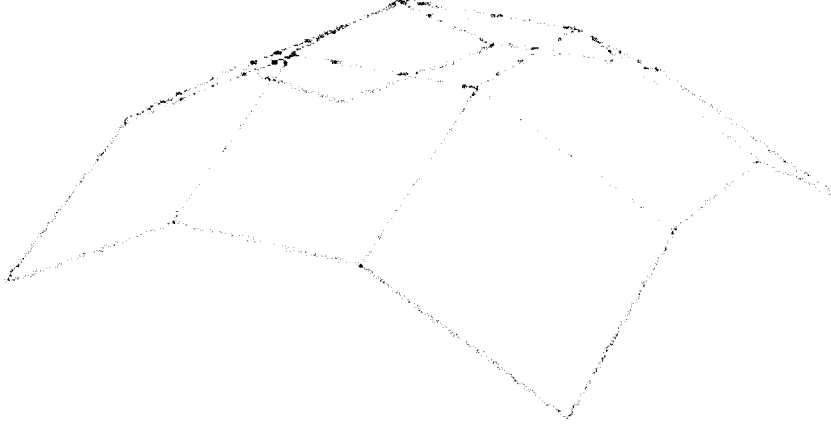
$$b_j(v) = \sum_{i=0}^n b_{ij} B_i(v) \quad (5.5)$$

Olduğunda;

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n b_i(v) B_i(u) \quad (5.6)$$

Eğri basitçe başka bir yöne doğru iletirilmişdir.

Kontrol noktaları kümesi dikdörtgen bi kontrol ağı oluşturur. Bir bikübik 3'e 3 kontrol ağı aşağıdaki gibidir:



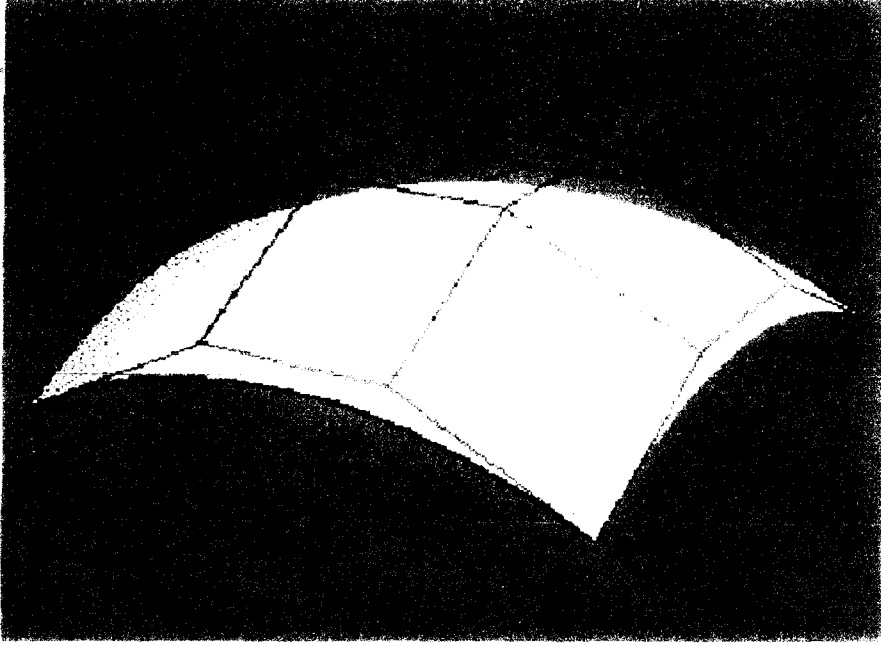
Şekil 5.2 Bikübik 3'e 3 kontrol ağı

Bu kontrol ağında 16 kontrol noktası vardır. Genel bir ifade ile $(m+1)$ 'e $(n+1)$ kadar kontrol noktası olacaktır. Geleneksel olarak i indeksi u parametresi ile, j indeksi v parametresi de ilişkilidir. Bundan dolayı;

$$\mathbf{b}_{i0}, i = 1 \dots n,$$

olursa Bezier eğrisi şu şekilde olacaktır.

$$\mathbf{b}(u,0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{i0} B_i^n(u). \quad (5.7)$$



Şekil 5.3 Bezier yüzey alanının sınırını oluşturan Bezier eğrileri

Sınırdaki her kontrol noktası kümesi Bezier eğrilerini oluşturur (4 kenar eğrileri) ve bu eğrilerin herbiri Bezier yüzey alanının sınırıdır. Bu çeşit bir Şekil 5.3'deki resmin ön kenarında görülebilmektedir.

5.1.1 Bezier Yüzey Alanının Özellikleri

Bezier yüzeyinin bir çok özelliği özellikle de alanın sınırlarını oluşturan eğriler Bezier eğrisinden türemiştir

- Son nokta enterpolasyonu

Bezier yüzey alanı tüm köşe kontrol noktalarından geçer. Bikübik durumda biçimsel olarak şu şekildedir.

$$\mathbf{b}(0,0) = \mathbf{b}_{00}; \mathbf{b}(0,1) = \mathbf{b}_{03}; \mathbf{b}(1,0) = \mathbf{b}_{30}; \mathbf{b}(1,1) = \mathbf{b}_{33}.$$

- Teğet Durumları

Bezier yüzey alanının 4 kenar eğrisi, her kenar kontrol poligonunun ilk ve son segmentinin kotanjantıdır. Her tepe noktasındaki yüzey alanının normali teğetlerin çapraz çarpımından bulunabilir.

- Yakınlık değişmezliği

Bezier yüzey alanı kontrol ağına uyan bir şekilde yakınlık değişmezliği göstermektedir. Bu, kontrol ağının doğrusal dönüşüm veya çeviriminin, orjinal alanın dönüşüm veya çeviriminin

olduğu yeni bir alan tanımlar anlamına gelmektedir.

- Değişim azalması

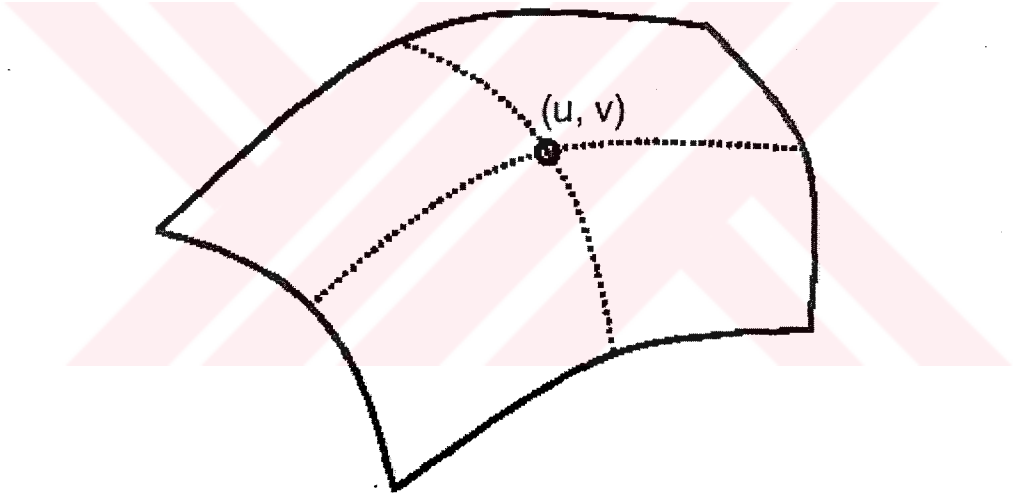
Yüzey tanımlaması için bu zor olsa da kontrol ağı alanın şeklini tavsiye eder.

- Düzlemsel kesinlik

Bezier yüzey alanı düzlemsel kesinliğe sahiptir. Kontrol ağındaki tüm noktalar bir düzlemde iseler, yüzey alanı da aynı düzlemde olacaktır. Kontrol ağındaki tüm noktalar düz bir çizgide iseler yüzey de bir çizgiye indirgenecektir. (Rogers, D.F., Fog,N.G.,1989)

5.1.2 Bezier Yüzey Alanının Alt Bölümlemesi

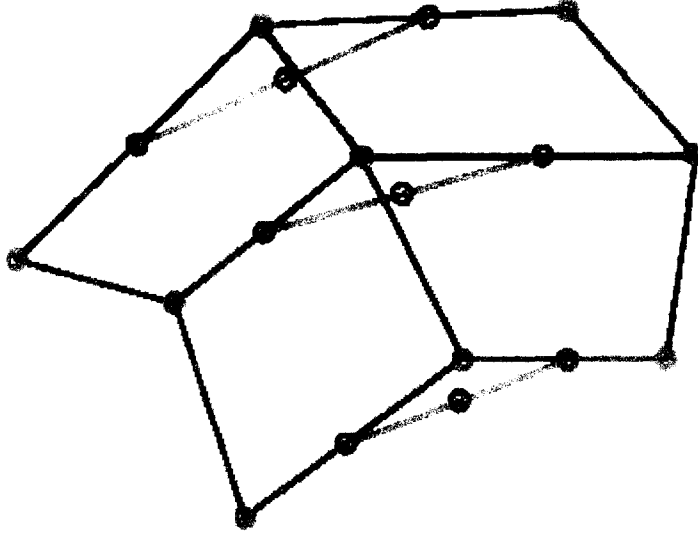
Bir Bezier yüzey alanını alt bölümlere ayırabilmek için Bezier eğrileriyle beraber de Casteljau algoritması da kullanılabilir. Bir yüzey alanı alt bölümlere ayrıldığı zaman, (u,v) alt bölümleme noktasındaki bir köşeyi paylaşan 4 alt alan ortaya çıkar.



Şekil 5.4 Bezier yüzey alanında alt bölümleme

Bir eğri alt alanlara bölündüğünde yeni eğrinin kontrol noktaları yeni oluşan dizinin bacakları gibi görünecektir. Yüzey açısından ise kontrol ağının her satırının alt ağlara bölme, dizinin noktalarını herbiri için oluşturur.

Her satır dizisinin her bacağı üzerindeki tüm noktalar, sütunsal küme için kontrol noktası haline gelir. Bir biquadatik durum Şekil 5.5’de gösterilmiştir.

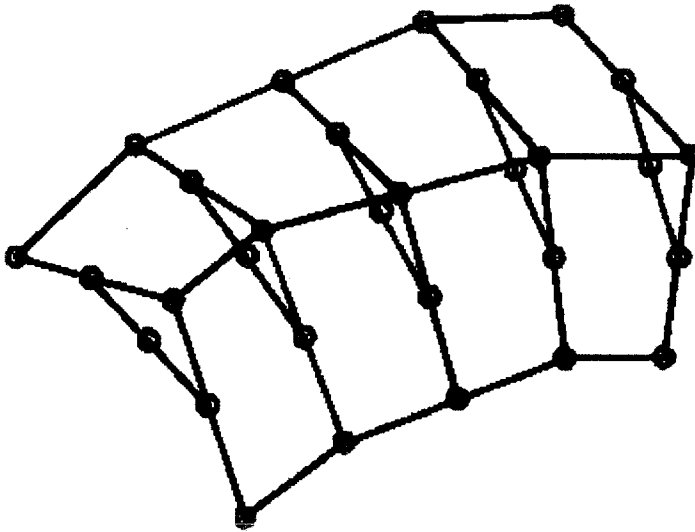


Şekil 5.5 Alt bölümlenmede biquadratik durum

Bu durumda her satırdaki 3 nokta alt bölümlenmeden sonra 5 nokta üretmiştir.

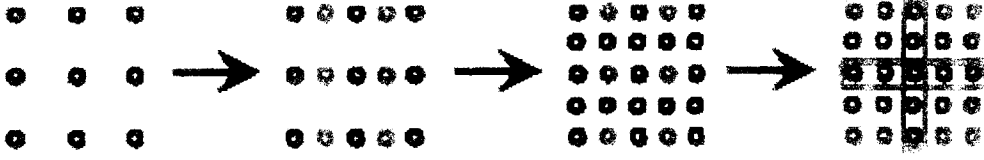
Şimdi sütundaki noktaları göz önüne alacak olursak, alt bölümlmeyi de Casteljau's algoritması ile yaparsak dizilerin bacaklarındaki noktalar yeni alt alanların kontrol noktaları haline gelir.

Şekil 5.4'de 3 kontrol noktalı satırlar 5 kontrol noktası üretmiş yani 3 noktanın 5 sütunu vardır. Her sütun 5 kontrol noktası üretir ve 3'e 3 lük bir ızgara alt bölümlenmeden sonra 5'e 5 lik bir ızgara ortaya çıkarır



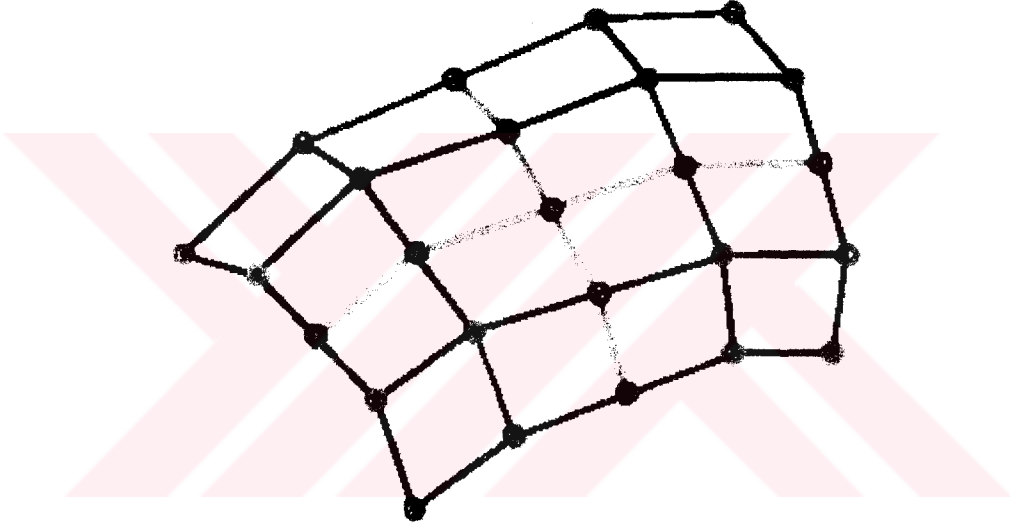
Şekil 5.6 Alt bölümlenmeden sora ortaya çıkan 5'e 5 lik bir ızgara

Dört yeni alanın kontrol ağları şu şekilde üretilmiş olur;



Şekil 5.7 Dört yeni alanın kontrol ağları

Kontrol noktalarının merkezi satır ve sütunu her 3'e 3 lük alt alanlar tarafından paylaşılmış durumdadır.



Şekil 5.8 Kontrol noktalarının 3'e 3 lük alt alanlar tarafından paylaşımı

5.2 B-spline Yüzeyleri

Bezier yüzeylerinde olduğu gibi B-spline yüzeyleri iç içe geçmiş eğri yığınlarıdır.

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{M-1} d_{ij} N_i(u) N_j(v), \quad (5.8)$$

- N_i bilindik B-spline temel fonksiyonlarıdır;
- n ve m B-spline eğrilerinin dereceleri.
- L ve M segment numaralarıdır buradan L ile M kadar alan olduğu sonucu çıkar.

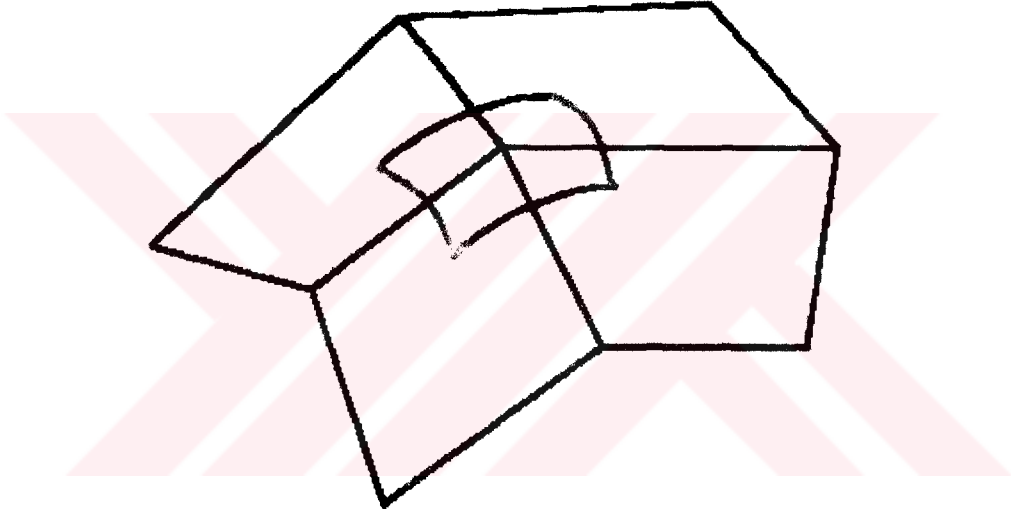
B-spline eğrileri için kullanılan tüm çalışmalar yüzeye düğüm kesişimi, de Boor Algoritması

gibi “nesting” şemasıyla taşınır. B-spline eğrileri özellikle polinomal bölümler arasında süreklilik sağlamak açısından uygundur. Bu uygunluk B-spline yüzeyleri söz konusu olduğunda çok daha güçlüdür.

- C^{m-1}, C^{n-1} süreklilikleri alt alanlar arasında sağlanır.
- B-spline uygun tasarım esnekliği ile alanlar tanımlar.

B-spline eğrileri bir tasarımı sunmada Bezier eğrilerine göre daha elverişlidir. Fakat bu gibi avantajlar Bezier eğrilerinin daha verimli çalışması karşısında azalmaktadır. Geleneksel görüş ise yüzeyleri B-spline ile tasarlayıp sunmak gerektiğini işletmesi sırasında ise Bezier formuna dönüştürülmesi gerektiğini söyler.

Basit bir B-spline yüzey alanı şu şekildedir;



Şekil 5.9 Basit bir B-spline yüzey alanı

B-spline yüzeylerinin uygulaması çok çeşitli şekillerde olabilir. En basit şekilde Kartezyen çarpımı yüzeyi (5.9)’deki gibi gösterilebilir.

x_i k düğüm vektörünün elemanları iken ve;

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \leq u < x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i)N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u)N_{i-1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \quad (5.9)$$

$$\tilde{Q}(u, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \tilde{B}_{i+1,j+1} N_{i,k}(u) M_{j,\ell}(w) \quad (5.10)$$

Ayrıca;

$$M_{j,1}(w) = \begin{cases} 1 & \text{if } y_j \leq w < y_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$M_{j,\ell}(w) = \frac{(w - y_j)M_{j,\ell-1}(w)}{y_{j+\ell-1} - y_j} + \frac{(y_{j+\ell} - w)M_{j+1,\ell-1}(w)}{y_{j+\ell} - y_{j+1}}$$

y_i , l düğüm vektörünün elemanları, m ve n , sırasıyla u ve w yönlerinde olan ortogonalin tanımlanmış poligonun kontrol noktası sayısından 1 eksiktir. $B_{i+l,j+l}$ ise tanımlanmış poligonal yüzeyde 3 boyutlu durum vektörleridir.

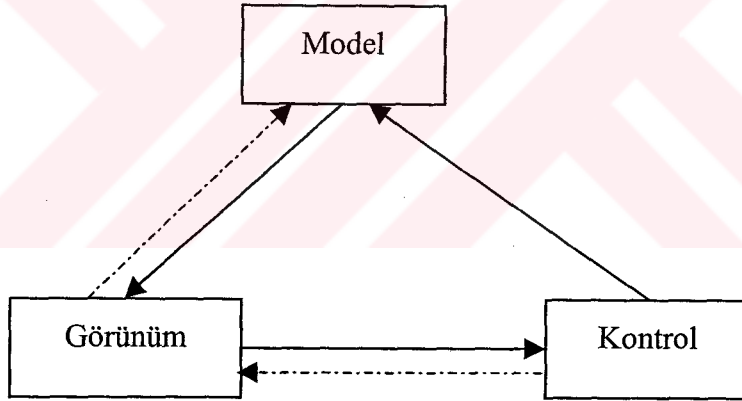
B-spline eğrileri ile çeşitli derecelerdeki katlı düğüm vektörleri u veya w yönlerinde tanımlanabilir. Bununla birlikte yukarıdaki formüller, bir yönde verilmiş tüm tanımlanan poligonların verilen yönde aynı derecede katlılığa sahip olmasını gerektirir. Alternatif formüller yerel kontrolün esnekliğini arttırabilmek için verilen yönde değişken dereceli düğüm katlılığına izin verebilir. (Catmull, E., Clark.J., 1978)

6. B-SPLINE YÜZEYLERİ ÜRETME ÇALIŞMASI: SETAFORM PROGRAMI

Seta Form programı gemi tekne formunun istenen parametreler doğrultusunda hazırlanmasını, endaze planın oluşturulmasını, istenilen değişikliklerin yapılabilmesini sağlar. Kullanıcıdan aldığı verileri B-spline eğrilerini kullanarak yorumlar. Seta Form programı ile ulaşılması amaçlanan hedefler;

- Tasarlanan gemi tekne formu üstünde eksenler doğrultusunda kesitleme yapabilmesini ve kesitleme aralığı belirlemesini sağlamak,
- Eğri kesitlerinin kontrol noktaları ile istenilen formu oluşturmak üzere fare ve klavye kontrolleriyle düzenlenebilmesini sağlamak,
- Tasarlanan gemi tekne formunun 3 boyutlu modelinin görüntülenmesi.
- Tasarlanan formu interaktif olarak yenilemekdir.

Programın geliştirilmesi esnasında MGK (Model Görünüm Kontrol) metodu temel alınmıştır. Temel amaç elde edilen programın değişik sunum ortamlarına ve yeni matematiksel modellere uyarlanabilmesinde kolaylık sağlanmasıdır.



Şekil 6.1 Program modülleri ve geliştirilme metodu (MGK)

6.1 Program Modüllerinin işlevleri

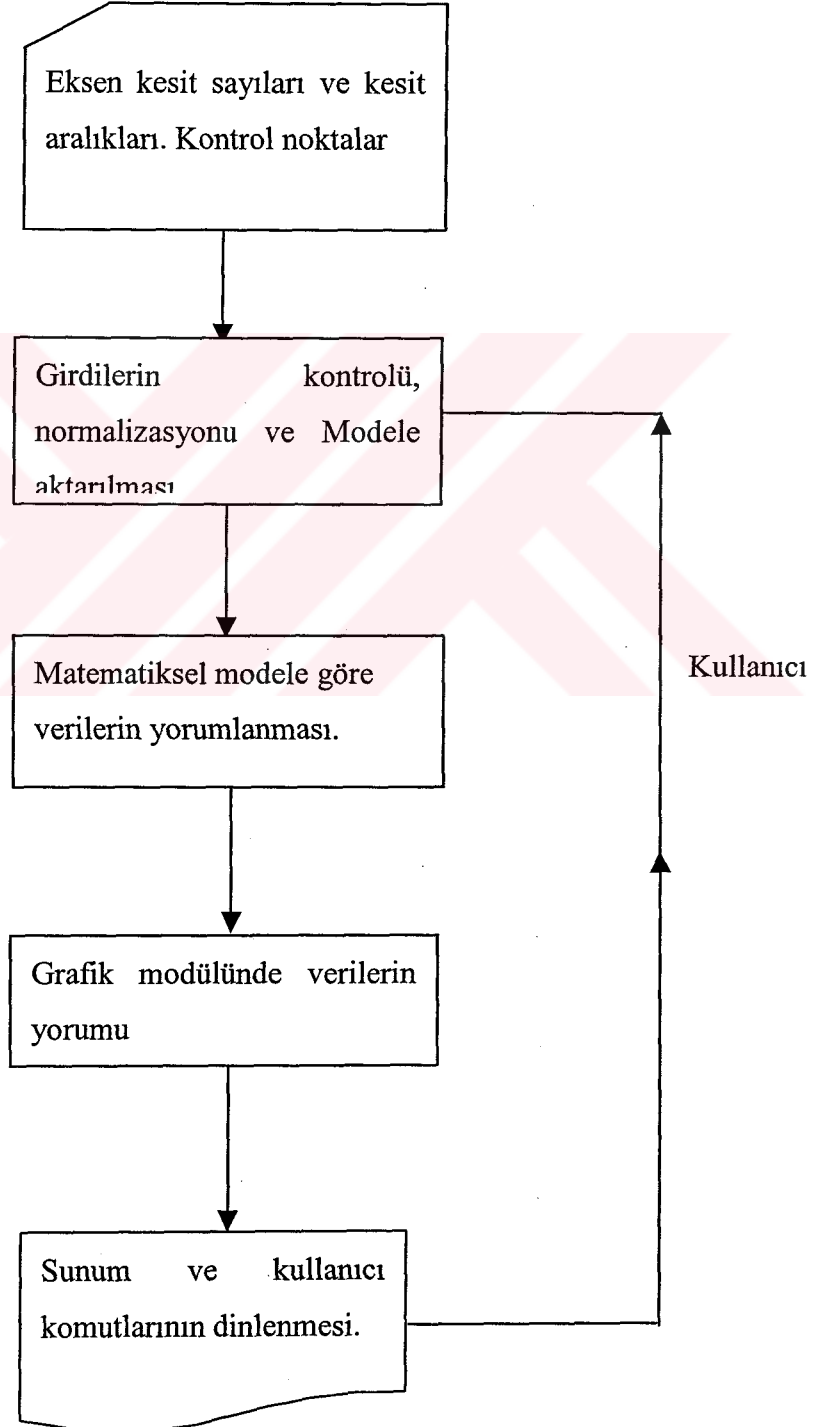
Model modülü eğri kontrol noktalarını yorumlayıp temel hesaplamaları yapar. Matematiksel hesaplamaların yapıldığı temel bölümdür. Burada kullanılan B-spline formülleri istenildiğinde kolayca değiştirilebilir. Model modülü hesaplamalar sonucu elde edilen sonuçları Görünüm modülüne iletir.

Görünüm modülü aldığı veriyi grafiksel anlamda yorumlayarak sunumları yapar. Görünüm modülü kullanıcın seçtiği profil, batok, su hattı ya da 3 boyutlu model sunumunu yapar.

Kontrol modülünün işlevi kullanıcı komutlarını dinleyip yorumlayarak gerekli işlemlerin yapılmasını sağlamaktır. Bu işlemler modele değişmiş verilerin aktarılmasından, dosyalamaya ya da büyütme, küçültme gibi işlemleri kapsar. Kullanıcı ile program arasındaki etkileşim bu kısımda sağlanır.

6.2 Program Akış Şeması

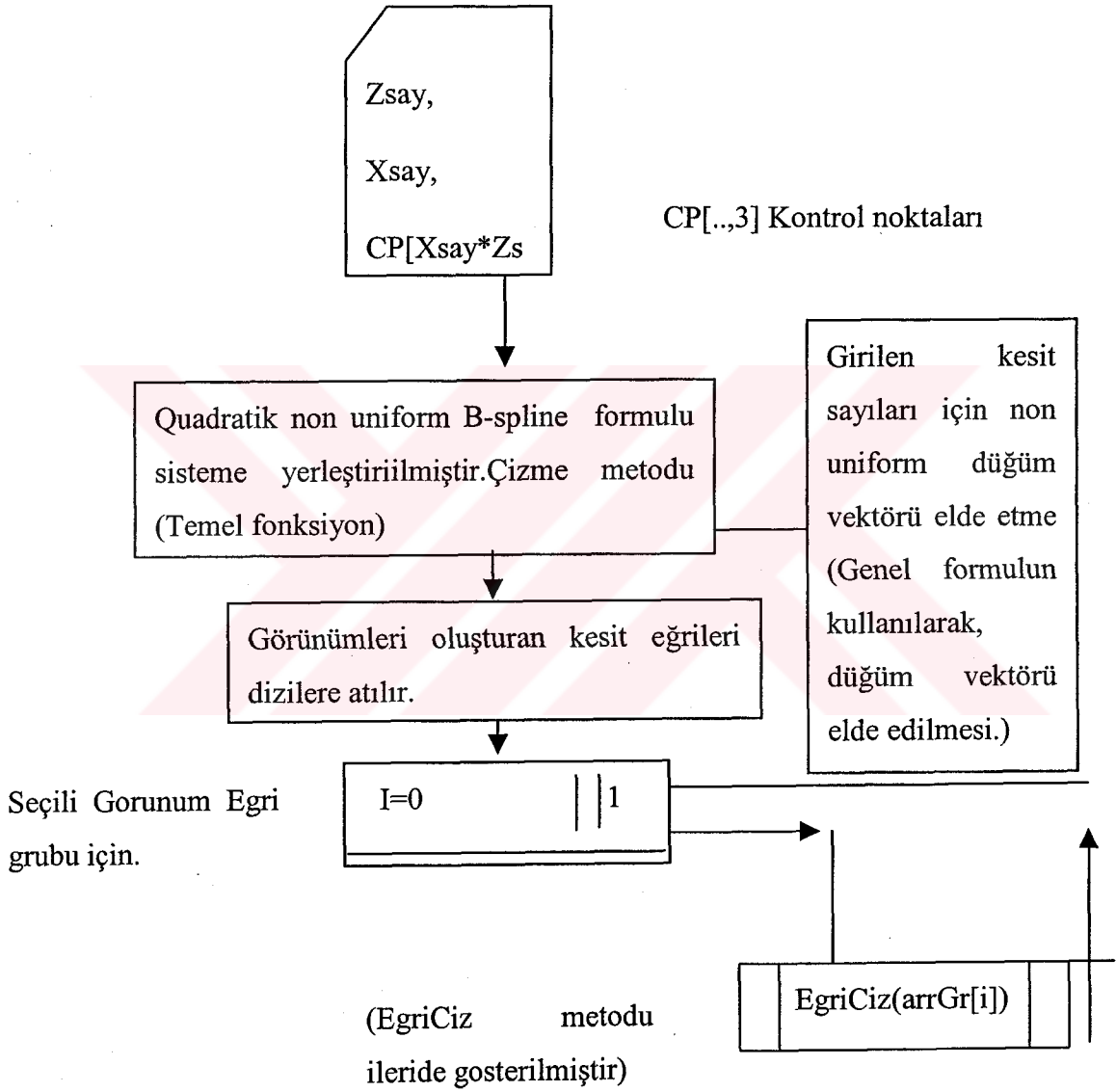
Akış şemasında adım adım verilerin geçtiği adımlar gösterilmiştir.



Şekil 6.2 Akış şeması

6.3 Matematiksel Modelde Verileri Yorumlanması;

Verilerin yorumlanmasında yapılan işlemler Kuadratik B-Spline eğrisi için non uniform düğüm vektörünün oluşturulması, ve görünümü oluşturacak dizi gruplarının oluşturulmasıdır. Görünüm grupları (posta, profil, 3D ve Su hattı) kesit sayıları ve girilen noktalar matrisi kullanılarak oluşturulur. Kullanıcının seçtiği görünümün çizimi oluşturulan veriler kullanılarak gerçekleştirilir.

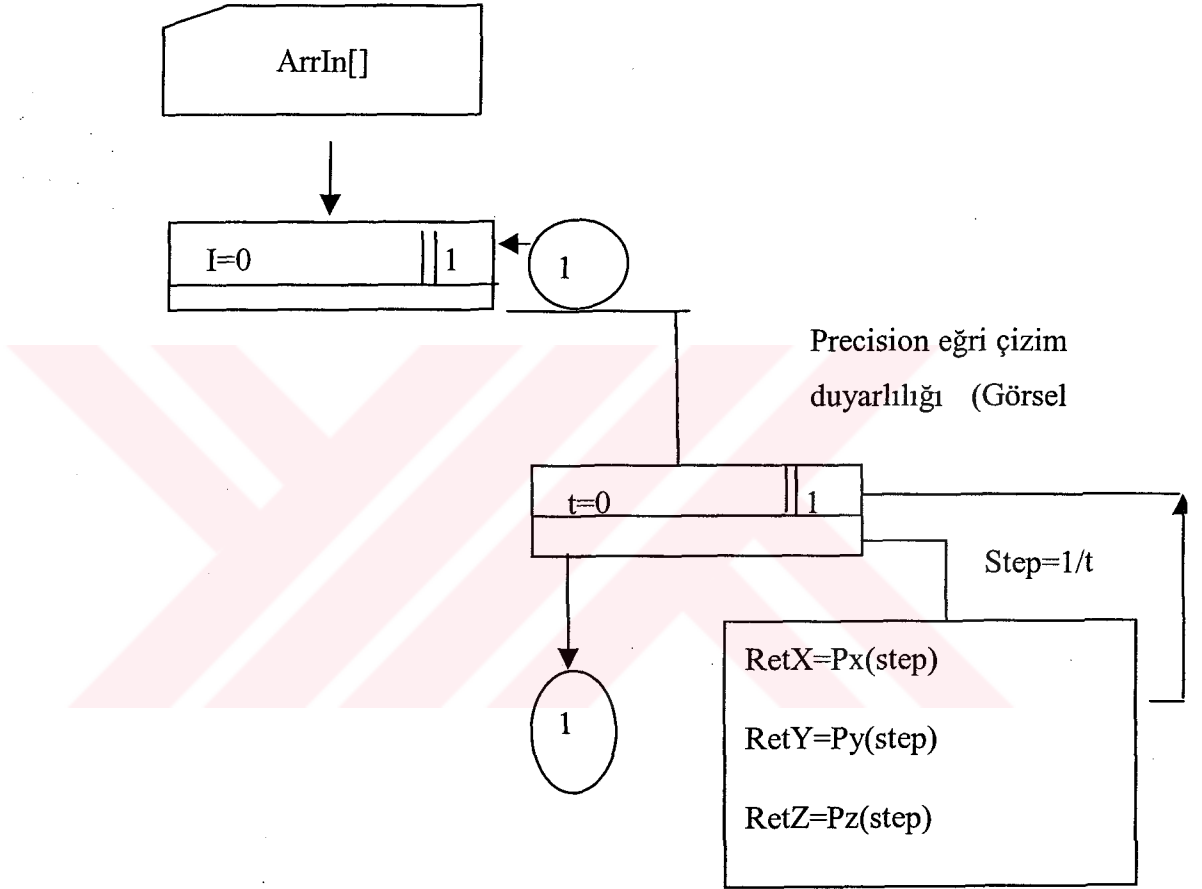


Şekil 6.3 Akış şeması

6.4 EgriCiz

Egriyi çizdiren metoddur. Burada yapılan $P(t)$ fonksiyonu ve oluşturulan düğüm vektörü kullanılarak t aralıkları boyunca adım adım, eğrinin çizgiler şeklinde çizilmesidir. Kullanımı için bir eğri bütün noktalarıyla parametre olarak geçilir. Bu egride daha önce oluşturulan düğüm vektörü ve temel fonksiyonlar kullanılarak. Her $t_x - t_{x+1}$ aralığı için çizim yapılır.

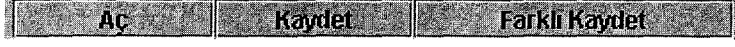
EgriCiz



Şekil 6.4 Akış şeması

7. PROGRAMIN KULLANILMASI

7.1 DOSYA MENÜSÜ



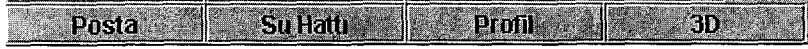
Şekil 7.1 Dosya menüsü

AÇ: Yeni dosya açılması

KAYDET: Mevcut dosyanın kaydedilmesi

FARKLI KAYDET: Mevcut dosyanın farklı bir isimle kaydedilmesi

7.2 GÖRÜNÜM MENÜSÜ



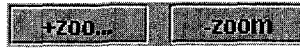
Şekil 7.2 Görünüm menüsü

POSTA: Hazırlanan gemi formunun posta kesitlerinin görünmesi

SU HATTI: Hazırlanan gemi formunun su hatlarının görünmesi

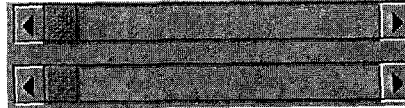
PROFİL: Geminin profil görünümünün elde edilmesi

3D: X-Y-Z üç boyutlu ortamda modelin görüntülenmesi



Şekil 7.3 Zoom menüsü

+ / - ZOOM: Ekrandaki görüntünün zumlanması



Şekil 7.4 Rotate menüsü

ROTATE: X veya Y yönünde şeklin döndürülmesi

7.3 YÜZEY MENÜSÜ



Şekil 7.5 Yüzey menüsü

Gemi SETAFORM programında iki yüzeyle modellenmektedir. Bu iki yüzey sırasıyla seçilerek kontrol noktaları girilir.

X kesit #	10
Z kesit #	15

Şekil 7.6 Kesit sayısı menüsü

Gemi SETAFORM programıyla modellenmeden önce kesit sayıları girilmelidir. Girilecek kontrol noktaları sayısına göre X ve Y kesitleri sayıları kullanıcı tarafından belirlenir.

7.4 VERİ GİRİŞİ MENÜSÜ



Şekil 7.7 Yenileme tuşu

Form üzerinde yapılan değişikliklerin ekranda görüntülenebilmesi için yenileme komutudur. Bu komut sayesinde program hatalı çalışma şartlarından kurtulmaktadır.

Z kesit	X kesit
0	0
0	1
0	2
0	3
0	4
0	5
0	6
0	7
0	8
0	9
1	0

Şekil 7.8 Kesitlerin kodlanması

Z kesitleri su hatları, X kesitleri postalardır. Form verilerinin girilmesi sırasında sistematığı sağlamak amacıyla 0'dan başlayan sayılarla kodlanmıştır.

Z	Y	X
1980	0	0
1980	0	0
1900	0	0
2000	0	0
4000	0	0
6000	0	0
8000	0	0
12000	0	0
16000	0	0
20000	0	0
24000	0	0

Şekil 7.9 Kontrol noktaları

Z: Kontrol noktalarının boyuna yeri (AP orijin)

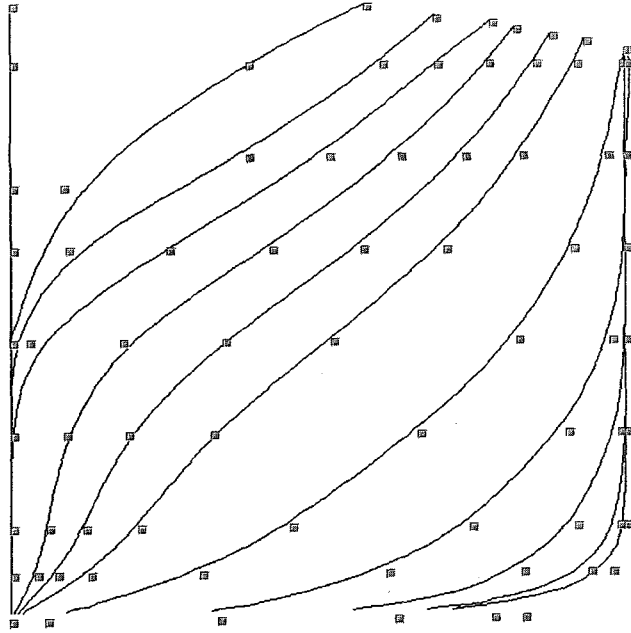
Y:Yarı genişlik (CL orijin)

X: Su hattı yüksekliği (BL orijin)

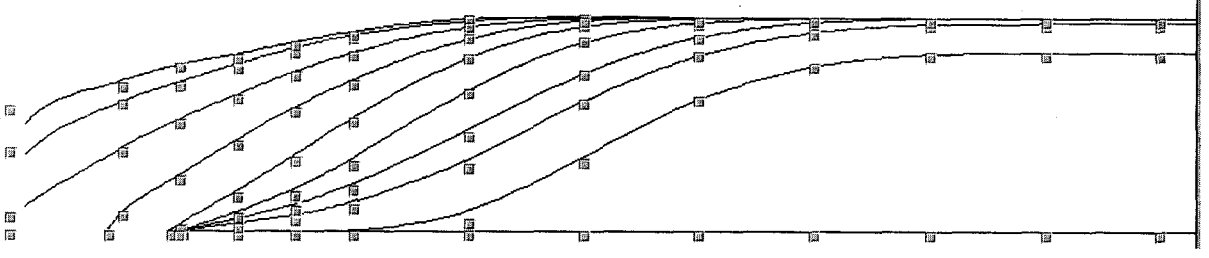
Veriler yukarıda açıklanan orijin sistemine göre kullanıcı tarafından girilebilir.

7.5 KULLANICI EKRANI

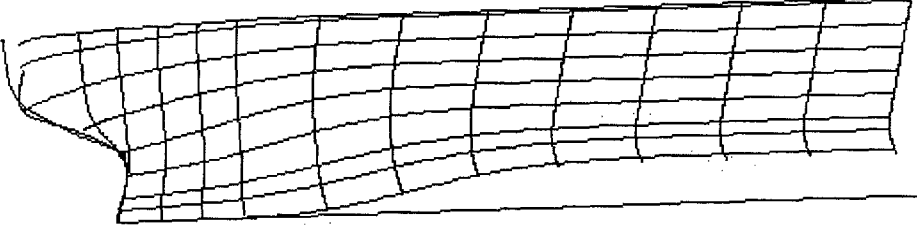
Kullanıcı ekranda hazırladığı modeli çeşitli bakışlardan görebilmektedir. Kontrol noktaları da ekranda yer almaktadır. Kontrol noktaları mouse vasıtasıyla değiştirilebilir ve form üzerindeki değişim interaktif olarak yansımaktadır.



Şekil 7.9 Posta görünüşü



Şekil 7.10 Su hattı görünüşü



Şekil 7.11 3D görünüşü

8. SONUÇ

Gemi tekne formunun ifadesinde kullanılan matematiksel yöntemler incelenmiş Bspline yönteminin;

- Geometriden bağımsız olma özelliği
- Değişimin yok olma özelliği
- Mertebeden bağımsızlık özelliği
- İçbükey kabuk özelliği
- Geometrinin lokal kontrol özelliği
- Son noktalar özelliği
- Katlı kontrol noktası özelliği

gibi diğer yöntemlere nazaran sağladığı avantajlar tespit edilmiştir.

Bu nedenle B-spline eğri uydurma yöntemi temel alınarak gemi tekne formunun modellemesini yapan bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Seta Form programı ile ulaşılması amaçlanan hedefler;

- Tasarlanan gemi tekne formu üstünde eksenler doğrultusunda kesitleme yapabilmesini ve kesitleme aralığı belirlemesini sağlamak,
- Eğri kesitlerinin kontrol noktaları ile istenilen formu oluşturmak üzere fare ve klavye kontrolleriyle düzenlenebilmesini sağlamak,
- Tasarlanan gemi tekne formunun 3 boyutlu modelinin görüntülenmesi,
- Tasarlanan formu interaktif olarak yenilemek,

olarak belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

Barnhill, R. E., Riesenfeld, R. F., (1974) "Computer Aided Geometric Design", Academic Press, New York.

Bartels, R., Beatty, J., Barsky, B., (1987) "An Introduction of Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling" Morgan Kaufmann.

Catmull, E., Clark, J., (1978) "Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes" Computer Aided Design.

Narlı, E., (1999) "Computer Aided Fairing of Ship Hull Forms", Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Piegl, L., Tiller W., (1997) "The NURBS Book, Springer", New York.

Rogers, D.F., Fog, N.G. (1989), "Constrained B-Spline Curve and Surface Fitting, Computer aided design"

Rogers, D. F., Adams J., (1976) "Mathematical Elements for Computer Graphics" McGrawHill, New York.



ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	02.01.1978	
Doğum yeri	İzmit	
Lise	1991-1995	Deniz Lisesi
Lisans	1995-1999	Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fak. Gemi İnş. Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans	1999-2002	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Gemi İnş. Müh. Anabilim Dalı
Yüksek Lisans	1999-2002	İstanbul Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Anabilim Dalı

Çalıştığı kurum(lar)

1999-2001	YTÜ Makine Fakültesi, Gemi İnş.Müh.Bölümü Araştırma Görevlisi
2001-	SETA Gemi Mühendislik Genel Müdür, Proje Yöneticisi

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI