

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SCHWARZSCHILD METRİĞİNDE
ELEKTROSTATİK**

Fizikçi Yeter ÇALTAY

**F.B.E. Fizik Anabilim Dalı Fizik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA (YTÜ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMÜ	3
2.1 Durağan Çözümler	3
2.2 Statik Çözümler	4
2.3 Küresel Simetrik Çözümler	5
2.4 Schwarzschild Çözümü	7
2.5 Schwarzschild Çözümünün Özellikleri	12
2.6 İzotropik Koordinatlar	13
3. KÜTLEÇEKİM ALANINDA ELEKTROSTATİK	15
3.1 Hadamard Teorisi	15
3.2 Sanki-Düzgün Kütleçekim Alanında Elektrostatik	16
3.3 Schwarzschild Metriğinde Elektrostatik: Copson Çözümü	19
4. SCHWARZSCHILD METRİĞİNDE ELEKTROSTATİK: LINET ÇÖZÜMÜ ..	23
4.1 Schwarzschild Metriğinde Maxwell Denklemleri	23
4.2 Linet Çözümü	25
5. SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR	30
EK 1	31
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGE LİSTESİ

g	Metriğin determinanı
g_{ab}	Kovaryant metrik tansör
g^{ab}	Kontravaryant metrik tansör
m	Geometrik kütle
ν, λ	Zamana ve konuma bağılı fonksiyonlar
X^a	Killing vektör alanı
$\omega_{\alpha\beta}$	Üç uzaysal dönmeyi belirleyen parametrelere bağılı bir büyüklük
h^a	Holomorfik fonksiyon
k	Holomorfik fonksiyon
Γ	İki nokta arasındaki en kısa uzaklığın karesi
A_a	Vektör potansiyel
$F^{\rho\mu}$	Elektromagnetik alan tansör
J^μ	Akım yoğunluğu
$\bar{r}$	İzotropik koordinatlar
V	Elektrostatik potansiyel
$P_l^M(\cos\theta)$	Yardımcı Legendre polinomları
$P_l^1(z)$	Birinci tip yardımcı Legendre fonksiyonları
$Q_l^1(z)$	İkinci tip yardımcı Legendre fonksiyonları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Bir boru içindeki iki gaz parçacığının (a) durağan olmayan, (b) durağan ve (c) statik hareketi.....	3
Şekil 2.2 Standart küresel koordinatlar θ ve ϕ	5

ÖZET

Whittaker metodu kullanılarak sanki-düzgün kütleçekim alanında bir elektronun potansiyeli elde edilmiştir, daha sonra olay ufkunun dışında Schwarzschild metriğinde durgun noktasal bir yükün potansiyeli Hadamard teorisinin yardımıyla elde edilmiştir (Copson çözümü).

Sonuç olarak, izotropik koordinatlarda verilen Copson çözümü incelenmiş ve Gauss yasası uygulanarak gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Düzeltilmiş Copson çözümünü olay ufkunun içine genişletmek amacıyla standart Schwarzschild koordinatları kullanılmıştır (Linet çözümü). Bu çözüm yükün bulunduğu yer hariç her yerde düzgündür.

Anahtar Sözcükler: Schwarzschild metriği, Hadamard teorisi, Copson çözümü, Linet çözümü.

ABSTRACT

The potential of an electron in the quasi-uniform gravitatioanal field has been obtained using the Whittaker method. Then, the potential of a point charge at rest in the Schwarzschild metric outside the horizon has been obtained by the aid of Hadamard's theory. This called Copson's solution.

As a result of it has been examined Copson's solution originally given in isotropic coordinates and applying Gauss's law, it has been derived the necessary correction. In order to extend the corrected solution of Copson inside the horizon the standard Schwarzschild coordinates has been used. This called Linet's solution. It is regular everywhere except at the position of the charge.

Keywords: The Schwarzschild metric, Hadamard's theory, Copson's solution, Linet's solution.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendirerek, bilimsel çalışma metotlarını sabırla öğreten sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA'ya çok teşekkür ederim.

Tez çalışmalarım sırasında benden desteğini esirgemeyen sevgili yeğenim Mehmet ÇALTAY'a teşekkürü borç bilirim.

Ayrıca, beni her zaman destekleyen ve yanımda olan değerli arkadaşım Asuman AŞIKOĞLU ve Yasemin SERDAR'a teşekkürlerimi sunarım.

Bana güvenen ve daima yanımda olan *Annem'e, Babam'a ve Kardeşim'e* ise ne kadar teşekkür etsem azdır.

1. GİRİŞ

Genel göreliliğin sonucu olarak bütün elektromagnetik ve optik olaylar kütleçekimsel alandan etkilenirler. Görelilik teorisinin ilk öngörüsü, ışığın güneş gibi büyük kütleli bir cismin yanından geçerken eğrilmesidir. Sonuç olarak, klasik elektromagnetik teori elektromagnetizm ve kütleçekim arasındaki etkileşme dikkate alınarak yeniden yazılmalıdır.

Whittaker, kütleçekimin elektromagnetik olaylar üzerine etkisini incelemiş ve özellikle iki çeşit kütleçekim alanındaki elektrostatiği ele almıştır: (1) Tek bir kütlenin oluşturduğu kütleçekimsel alan (uzay-zaman Schwarzschild metriği ile tanımlanır) (2) Bu alanın limit durumu sanki-düzgün bir alan olarak adlandırmıştır. Whittaker sanki-düzgün bir alandaki bir elektronun potansiyelini hesaplamış, fakat Schwarzschild alanındaki bir elektronun potansiyeli için benzer bir ifade elde edememiştir (Whittaker, 1927).

Copson, sanki-düzgün kütleçekim alanında durgun noktasal bir yükün oluşturduğu ve Whittaker ifadesi ile aynı olan elektrostatik potansiyeli bulmuştur, daha sonra olay ufku dışındaki Schwarzschild alanında durgun noktasal bir yükün meydana getirdiği elektrostatik potansiyeli izotropik koordinatlarda elde etmiştir. Bu çözüm Copson çözümü olarak bilinmektedir (Copson E., 1928).

Linnet, Copson çözümünden yola çıkarak sadece olay ufku dışındaki Schwarzschild alanında durgun noktasal bir yükün değil aynı zamanda olay ufku içindeki Schwarzschild alanında ikinci bir yükten kaynaklanan elektrostatik potansiyeli de dikkate almış, Copson çözümüne Gauss yasasını uygulayarak gerekli düzeltmeleri yapmış ve bir çözüm elde etmiştir: Linnet çözümü (Linnet B., 1976).

Bu tezde amaçlanan olay ufkunun içindeki ve dışındaki Schwarzschild alanında durgun noktasal bir yükün oluşturduğu elektrostatik potansiyelin belirlenmesidir. İlk bölümde Schwarzschild metriğinin elde edilmesi ve özellikleri ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde Hadamard teorisinin yardımıyla sanki-düzgün kütleçekim alanında durgun noktasal bir yükün elektrostatik potansiyelini veren temel çözüm bulunmuş, daha sonra izotropik koordinatlar kullanılarak olay ufku dışındaki Schwarzschild alanında yine durgun noktasal bir yükün elektrostatik potansiyeli elde edilmiştir. Son bölümde ise, izotropik koordinatlarda verilen Copson çözümü incelenmiş, Gauss yasasına göre, ikinci bir yük içerdiği görülmüştür. Bu durumda Copson çözümünde gerekli düzeltmeler yapılmış, olay ufkunun içindeki ve dışındaki Schwarzschild alanında noktasal durgun yüklerin oluşturduğu elektrostatik potansiyel bulunmuştur (Linnet çözümü). Düzeltilmiş Copson çözümünü olay ufkunun içine

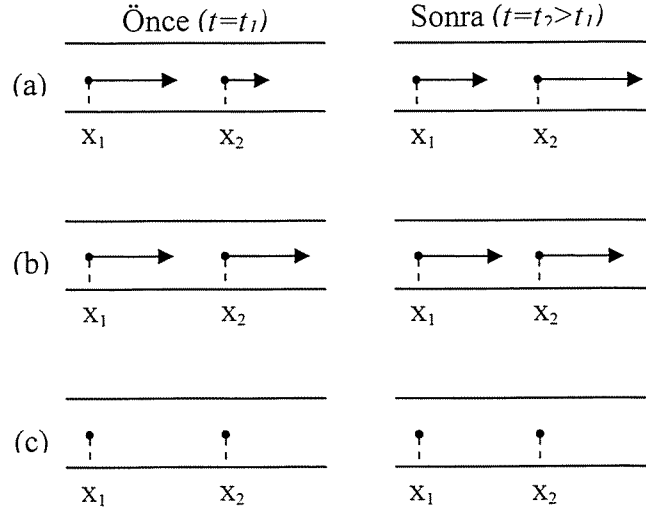
genişletmek için standart Schwarzschild koordinatları kullanılmış ve sonuç olarak, yüklerin bulunduğu yer hariç her yerde düzgün olan bir zm, $V(r\theta\phi, a\theta_0\phi_0)$, elde edilmiştir.

2. SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMÜ

2.1 Durağan Çözümler

Burada öncelikle durağan ile statik çözümler arasındaki fark belirtilecek, daha sonra Einstein boşluk alan denklemleri en basit durum olan küresel simetrik durum için çözülecektir.

Zamana bağlı olmayan bir çözüme durağan çözüm denir. Bu çözüm zaman içinde değişmez demek değildir, fakat bu çözümde zaman terimi açıkça yer almaz. Statik çözüm zaman içinde değişmez, yani statik çözümde herhangi bir zaman orijin olarak seçilirse bu noktaya göre zaman simetriktir.



Şekil 2.1 Bir boru içindeki iki gaz parçacığının (a) durağan olmayan, (b) durağan ve (c) statik hareketi.

(Şekil 2.1) Bir boru içindeki gazın hareketi ele alındığında; eğer gaz zamana bağlı bir aletle pompalanırsa, hareket durağan olmayacaktır (a). Eğer gaz boru içinde her noktada sabit hızla ilerlerse, hareket durağandır (b). Eğer gazın hızı her yerde sıfır ise, sistem statiktir (c).

Seçilen özel bir koordinat sisteminde metrik (g_{ab}) zamandan açık olarak bağımsız ise, durağan olacaktır, yani

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^0} = 0 \quad (2.1)$$

olur. Burada x^0 zamansal koordinattır. Herhangi bir koordinat sisteminde metrik bütün koordinatlara bağlıdır. Bu yüzden (2.1) ifadesi koordinattan bağımsız olmalıdır. Özel

koordinat sisteminde vektör alanı

$$X^a = \delta_0^a \quad (2.2)$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} L_X g_{ab} &= X^c g_{ab,c} + g_{ac} X_{,b}^c + g_{bc} X_{,a}^c \\ &= \delta_0^c g_{ab,c} = g_{ab,0} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. $L_X g_{ab}$ bir tansördür. Eğer bu tansör bir koordinat sisteminde sıfırsa, bütün koordinat sistemlerinde de sıfırdır. Bu yüzden X^a , Killing vektör alanıdır. Sadece ve sadece uzay-zaman zamansal bir Killing vektör alanına sahipse, uzay-zaman durağandır [Ray d'Inverno, 1992].

2.2 Statik Çözümler

Eğer çözüm durağan ise, metrik zamandan bağımsız olacaktır, fakat çizgi elemanı hala $(dx^0 dx^a)$ terimini içerecektir. Eğer metrik statik ise, bu terimler olmayacaktır. Özel koordinat sisteminde (x^0, x^1, x^2, x^3) ve $(x^0 + dx^0, x^1 + dx^1, x^2, x^3)$ olayları arasındaki aralık ele alınırsa, çizgi elemanı,

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada bütün g_{ab} terimleri x^a 'a bağlıdır. Zamanın tersine çevrilmesi

$$x^0 \rightarrow x'^0 = -x^0 \quad (2.5)$$

durumunda g_{ab} 'ler değişmez, fakat (2.4) denklemi

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - 2g_{01}dx^0 dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 \quad (2.6)$$

halini alır.

Statik çözüm demek zamanın tersine çevrilmesi durumunda ds^2 'nin değişmez olması demektir. (2.4) ve (2.6) denklemleri eşitlenirse, g_{01} teriminin yok olduğu görülür. Benzer şekilde g_{02} ve g_{03} terimleri de sıfır olmalıdır. Böylece özel koordinat sisteminde $dx^0 dx^a$ terimlerinin çizgi elemanı içinde bulunmadığı gösterilmiş olur [Ray d'Inverno, 1992].

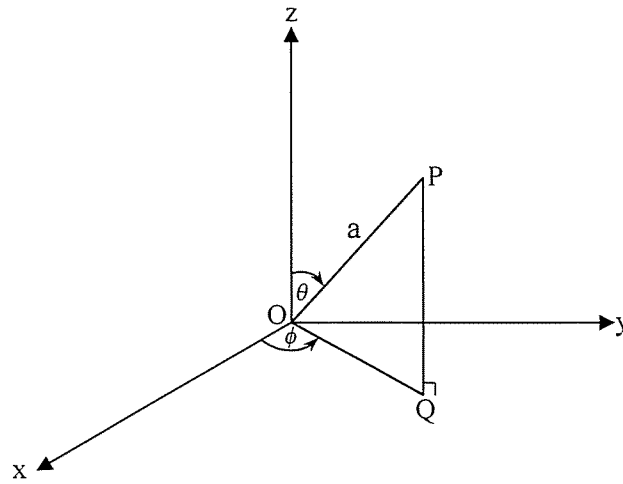
2.3 Küresel Simetrik Çözümler

Küresel simetrik uzay-zamanda, Killing alanları X^a

$$X^0 = 0 \quad (2.7)$$

$$X^a = \omega_{\beta}^a x^{\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

formundadır. Burada (x^a) Kartezyan koordinat sistemidir. $\omega_{\alpha\beta}$ büyüklüğü, üç uzaysal dönmeyi belirleyen parametrelere bağlıdır. Bir sistem O orijin noktası etrafında uzaysal dönmeler altında değişmez kalıyorsa, küresel simetriye sahiptir [Ray d'Inverno, 1992].



Şekil 2.2 Standart küresel koordinatlar θ ve ϕ .

Eğer zaman sabit tutulur ve orijinden a kadar uzaklıkta bir P noktası alınırsa, uzaysal dönmeler sonucunda P noktası O merkezli 2-küre yüzeyi süpürür. Böylece θ azimuthal ve ϕ eksensel koordinatları tanımlanır. P noktasından ekvator düzlemine bir dik çizgi çizilerek bu nokta Q olarak adlandırılınsın. OQ doğrusu ile pozitif x eksenini arasındaki açı ϕ , OP doğrusu ile z eksenini arasındaki açı θ olacaktır. 2-küre üzerindeki bütün noktalar

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ -\pi &\leq \phi \leq \pi \end{aligned} \quad (2.8)$$

koordinat noktaları ile kaplıdır. 2-kürenin çizgi elemanı

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde t ve r sabittir. Küresel simetri olduğundan θ ve ϕ

değiştğinde çizgi elemanı değişmez. $d\theta$ ve $d\phi$ içinde çapraz terimler yoktur. Çünkü; aşağıdaki dönüşümler altında metrik değişmezdir:

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta' = \pi - \theta, \\ \phi &\rightarrow \phi' = -\phi.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Özel bir koordinat sistemi,

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)\tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanırsa, çizgi elemanı

$$ds^2 = A dt^2 - 2B dt dr - C dr^2 - D(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\tag{2.12}$$

formunda yazılır. Burada A, B, C, D katsayıları t ve r 'nin fonksiyonlarıdır. Yani $A = A(t, r)$, $B = B(t, r)$, $C = C(t, r)$, $D = D(t, r)$.

$$r \rightarrow r' = D^{1/2}\tag{2.13}$$

dönüşümü ile yeni bir radyal koordinat tanımlanırsa, (2.12) çizgi elemanı

$$ds^2 = A'(t, r') dt^2 - 2B'(t, r') dt dr' - C'(t, r') dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\tag{2.14}$$

formunu alır. $A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'$ diferansiyel denklemi $I = I(t, r')$ integral faktörü ile çarpılırsa, çıkan sonuç kullanılarak yeni bir zaman koordinatı t' tanımlanır:

$$dt' = I(t, r') [A'(t, r') dt - B'(t, r') dr'].\tag{2.15}$$

Bu ifadenin karesi alınır ve düzenlenirse,

$$dt'^2 = I^2 (A'^2 dt^2 - 2A'B' dt dr' + B'^2 dr'^2),\tag{2.16}$$

$$A' dt^2 - 2B' dt dr' = A'^{-1} I^{-2} dt'^2 - A'^{-1} B'^2 dr'^2\tag{2.17}$$

sonuçları elde edilir ve (2.14) çizgi elemanı

$$ds^2 = A'^{-1} I^{-2} dt'^2 - (C' + A'^{-1} B'^2) dr'^2 - r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\tag{2.18}$$

bulunur. İki yeni fonksiyon ν ve λ ,

$$\begin{aligned}A'^{-1} I^{-2} &= e^\nu \\ C' + A'^{-1} B'^2 &= e^\lambda\end{aligned}\tag{2.19}$$

olarak tanımlanırsa,

$$ds^2 = e^v dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.20)$$

formunda elde edilir. Burada $v = v(t, r)$ ve $\lambda = \lambda(t, r)$.

2.4 Schwarzschild Çözümü

Bu bölümde Einstein boşluk alan denklemleri kullanılarak (2.20) denklemindeki v ve λ fonksiyonları belirlenecektir.

İlk olarak g_{ab} kovaryant ve g^{ab} kontravaryant metrik tansörleri bulunacak ve bunlar kullanılarak sıfırdan farklı Γ_{bc}^a Christoffel sembolleri hesaplanacaktır.

Kovaryant metrik

$$g_{ab} = \text{diag}(e^v, -e^\lambda, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (2.21)$$

formuna sahiptir ve metrik diagonal olduğundan metriğin kontravaryant formu

$$g^{ab} = \text{diag}(e^{-v}, -e^{-\lambda}, -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta) \quad (2.22)$$

şeklindedir.

Christoffel sembolleri,

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) \quad (2.23)$$

formunda tanımlanır. (2.21) ve (2.22) ifadeleri kullanılarak sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}\dot{v}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, \\
\Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}v', & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}e^{\lambda-v}\dot{\lambda}, & \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}, \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v', & \Gamma_{33}^2 &= -\cos \theta \sin \theta, \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2}\dot{\lambda}, & \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\lambda', & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta
\end{aligned} \tag{2.23}$$

bulunur.

Riemann tansörü (eğrilik tansörü),

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \tag{2.24}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece R_{bcd}^a metriğe (2.21) ve onun birinci ve ikinci türevlerine bağlıdır. (2.24) tansörünün sıfırdan farklı Riemann tansör bileşenleri şunlardır:

$$\begin{aligned}
R_{101}^0 &= -\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}e^{\lambda-v}\dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4}e^{\lambda-v}v\dot{\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda-v}\ddot{\lambda} - \frac{1}{4}v'^2 + \frac{1}{4}v'\lambda', \\
R_{202}^0 &= -\frac{1}{2}re^{-\lambda}v', \\
R_{212}^0 &= -\frac{1}{2}re^{-v}\dot{\lambda}, \\
R_{303}^0 &= -\frac{1}{2}re^{-\lambda} \sin^2 \theta v', \\
R_{313}^0 &= -\frac{1}{2}re^{-v} \sin^2 \theta \dot{\lambda}, \\
R_{212}^1 &= \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda', \\
R_{313}^1 &= \frac{1}{2}re^{-\lambda} \sin^2 \theta \lambda', \\
R_{323}^2 &= \sin^2 \theta - e^{-\lambda} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

(2.25) Riemann tansör bileşenleri kullanılarak Ricci tansörü ifade edilebilir. Şöyle ki:

$$R_{ab} = R_{acd}^c = g^{cd} R_{dacb}. \tag{2.26}$$

Bu tansör simetriktir. Buna göre sıfırdan farklı Ricci tansör bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{1}{2}e^{v-\lambda}v'' - \frac{1}{4}\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{4}v\dot{\lambda} - \frac{1}{2}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}e^{v-\lambda}v'^2 - \frac{1}{4}e^{v-\lambda}v'\lambda' + r^{-1}e^{v-\lambda}v', \\
R_{01} &= r^{-1}\dot{\lambda}, \\
R_{11} &= -\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{4}e^{\lambda-v}\dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4}e^{\lambda-v}v\dot{\lambda} + \frac{1}{2}e^{\lambda-v}\ddot{\lambda} - \frac{1}{4}v'^2 + \frac{1}{4}v'\lambda' + r^{-1}\lambda', \\
R_{22} &= -\frac{1}{2}re^{-\lambda}v' + \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' - e^{-\lambda} + 1, \\
R_{33} &= \sin^2\theta R_{22}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Eğrilik skaleri veya Ricci skaleri

$$R = g^{ab}R_{ab} \tag{2.28}$$

formunda tanımlanır. Bu bağıntı kullanılarak

$$\begin{aligned}
R &= e^{-\lambda}v'' - \frac{1}{2}e^{-v}\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2}e^{-v}v\dot{\lambda} - e^{-v}\ddot{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}v'^2 - \frac{1}{2}e^{-\lambda}v'\lambda' + 2r^{-1}e^{-\lambda}v' - 2r^{-1}e^{-\lambda}\lambda' \\
&+ 2r^{-2}e^{-\lambda} - 2r^{-2}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ifadesi elde edilir.

Einstein tansörü

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \tag{2.30}$$

simetriktir ve Bianchi özdeşlikleri

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} \equiv 0 \tag{2.31}$$

kullanılarak Einstein tansörü aşağıdaki Bianchi özdeşliğini sağlar:

$$\nabla_b G_a^b = 0. \tag{2.32}$$

Sıfırdan farklı Ricci tansör bileşenleri ve Ricci skaleri kullanılarak Einstein tansör bileşenleri

$$\begin{aligned}
G_{00} &= r^{-1}e^{v-\lambda}\lambda' - r^{-2}e^{v-\lambda} + r^{-2}e^v, \\
G_{01} &= r^{-1}\dot{\lambda}, \\
G_{11} &= r^{-1}v' + r^{-2} - r^{-2}e^\lambda, \\
G_{22} &= \frac{1}{2}re^{-\lambda}v' - \frac{1}{2}re^{-\lambda}\lambda' + \frac{1}{2}r^2e^{-\lambda}v'' - \frac{1}{4}r^2e^{-v}\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{4}r^2e^{-v}v\dot{\lambda} - \frac{1}{2}r^2e^{-v}\ddot{\lambda} + \frac{1}{4}r^2e^{-\lambda}v'^2 - \frac{1}{4}r^2e^{-\lambda}v'\lambda', \\
G_{33} &= \sin^2\theta G_{22}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

hesaplanır. Elde edilen bu tansör bileşenleri ve

$$G_b^c = g^{ca} G_{ab} \quad (2.34)$$

denklemini yardımıyla karışık Einstein alan tansör bileşenleri

$$G^0_0 = r^{-1} e^{-\lambda} \lambda' - r^{-2} e^{-\lambda} + r^{-2}, \quad (2.35a)$$

$$G^0_1 = r^{-1} e^{-\nu} \dot{\lambda}, \quad (2.35b)$$

$$G^1_0 = r^{-1} e^{-\lambda} \dot{\lambda}, \quad (2.35c)$$

$$G^1_1 = r^{-2} - r^{-2} e^{-\lambda} - r^{-1} e^{-\lambda} \nu', \quad (2.35d)$$

$$\begin{aligned} G^2_2 = & \frac{1}{2} r^{-1} e^{-\lambda} \lambda' - \frac{1}{2} r^{-1} e^{-\lambda} \nu' - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \nu'' + \frac{1}{4} e^{-\nu} \dot{\lambda}^2 - \frac{1}{4} e^{-\nu} \dot{\nu} \dot{\lambda} \\ & + \frac{1}{2} e^{-\nu} \ddot{\lambda} - \frac{1}{4} e^{-\lambda} \nu'^2 + \frac{1}{4} e^{-\lambda} \nu' \lambda', \end{aligned} \quad (2.35e)$$

$$G^3_3 = G^2_2 \quad (2.35f)$$

elde edilir. Yukarıdaki Einstein tansör bileşenleri kullanılarak (2.20) denklemindeki ν ve λ fonksiyonları bulunabilir. Eğer (2.35a), (2.35c) ve (2.35d) denklemleri sıfırsa, (2.32) denkleminin (2.35e)'nin otomatik olarak sıfır olduğu görülür. Böylece çözülecek üç bağımsız denklem vardır, yani

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.36)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.37)$$

$$\dot{\lambda} = 0 \quad (2.38)$$

(2.36) ve (2.37) denklemlerinden

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad (2.39)$$

bulunur. İntegral alınırsa,

$$\lambda + \nu = h(t) \quad (2.40)$$

olur. Burada $h(t)$ keyfi bir fonksiyondur. (2.38) denklemine göre, λ sadece r 'ye bağlıdır.

Buna göre (2.36) denklemi çözülürse,

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \lambda' &= 1, \\ (r e^{-\lambda})' &= 1, \\ r e^{-\lambda} &= r + \text{sabit} \end{aligned} \quad (2.41)$$

olur. Burada integral sabiti $(-2m)$ seçilirse,

$$e^{\lambda} = (1 - 2m/r)^{-1} \quad (2.42)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$e^{\nu} = e^{h(t)} (1 - 2m/r) \quad (2.43)$$

olarak bulunur. Bu değerler (2.21)'de yerine konulursa,

$$g_{ab} = \text{diag} [e^{h(t)} (1 - 2m/r), (1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta] \quad (2.44)$$

olur. (2.44) ifadesinde $h(t)$ yok edilmesi gerekir. Bunun için yeni zaman koordinatı $t \rightarrow t'$ dönüşümü ile

$$t' = \int_c^t e^{\frac{1}{2}h(u)} du \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanır. Burada c keyfi sabittir. Böylece sadece metriğin ilk bileşeni

$$g'_{00} = (1 - 2m/r) \quad (2.46)$$

olarak değişir. Sonuç olarak, uzay-zaman metriği

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dt'^2 - (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.47)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade boşluk alan denklemlerinin genel küresel simetrik boşluk çözümüdür ve Schwarzschild çizgi elemanı olarak bilinir [Ray d'Inverno, 1992].

Ayrıca (2.47)'e göre (2.21) ve (2.22) ifadelerinin

$$g_{ab} = \text{diag} [(1 - 2m/r), -(1 - 2m/r)^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta], \quad (2.48)$$

$$g^{ab} = \text{diag} [(1 - 2m/r)^{-1}, -(1 - 2m/r), -r^{-2}, -r^{-2} \sin^{-2} \theta] \quad (2.49)$$

olduğu görülür. Metriğin determinantı ise,

$$g = -r^4 \sin^2 \theta \quad (2.50)$$

olarak bulunur.

2.5 Schwarzschild Çözümünün Özellikleri

(2.47) eşitliğinde $g_{ab,0} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür ve böylece çözüm durağandır. Ayrıca koordinatlar Killing vektör alanı $X^a = \delta_0^a$ 'ya sahiptirler. (2.47) eşitliğinden çözümün zamana göre simetrik olduğu da görülür. Çünkü; zaman yansıması altında, $t \rightarrow t' = -t$, değişmezdir. Çözüm zaman ötelemesi altında da değişmezdir. Çünkü; $t \rightarrow t' = t + \text{sabit}$ dönüşümü altında aynı kalır ve böylece çözüm statiktir. Buna bağlı olarak aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Birkhoff teoremi: Bir küresel simetrik boşluk çözümü statik olmak zorundadır.

Birkhoff teoremine göre, eğer küresel simetrik bir kaynak bir yıldız gibi şeklini değiştirirse, daima şekli küresel simetrik kalır, yani küresel simetrik olarak titreşen bir yıldız kütleçekim dalgaları yaymaz. Eğer küresel simetrik bir kaynak $r \leq a$ bölgesi içine sınırlandırılmışsa, $r > a$ için çözüm Schwarzschild çözümü olmalıdır veya bu çözüme dış Schwarzschild çözümü denir, fakat bunun tersi doğru değildir, yani bir kaynak dış Schwarzschild çözümüne sahipse, bu kaynağın küresel simetrik olması gerekli değildir.

Eğer (2.47) ifadesinin $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa, küresel polar koordinatlarda özel göreliliğin düz uzay metriği

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.51)$$

elde edilir. Böylece küresel simetrik boşluk çözümünün asimptotik olarak düz olması gerektiği gösterilmiş olur. Bazı araştırmacılar Schwarzschild çözümünü, çözümün simetrik, statik ve asimptotik olarak düz olmasını varsayarak elde etmişlerdir, fakat çözümü elde etmek için son iki varsayıma gerek yoktur. Çünkü; alan denklemleri bu sonuçları verir. Çözümdeki m sabiti, Newtonyen limiti göz önüne alınarak yorumlanmaya çalışılırsa, Newtonyen teorisine göre O başlangıç noktasında bulunan M kütleli nokta bir yükün potansiyeli; $\phi = -GM/r$ şeklindedir. Bu ifade zayıf-alan limitine yerleştirilirse,

$$g_{00} \cong 1 + 2\phi/c^2 = 1 - 2GM/c^2 r \quad (2.52)$$

bulunur ve bu ifade, (2.47) denklemi ile karşılaştırırsa,

$$m = \frac{GM}{c^2} \quad (2.53)$$

ifadesi rölativistik olmayan birimle elde edilir. Diğer bir deyişle, başlangıç noktasında bulunan nokta yükün Schwarzschild çözümü yorumlanırsa, m sabiti basitçe parçacığın rölativistik birim sistemindeki kütesidir. (2.47) denkleminde görüldüğü gibi m uzunluk boyutuna sahiptir. m kütesine çoğunlukla geometrik kütle denir [Ray d'Inverno, 1992].

Schwarzschild çözümünün özellikleri şunlardır:

- (1) küresel simetriktir,
- (2) durağandır,
- (3) koordinatları zamansal Killing vektör alanı X^a 'ya sahiptir,
- (4) statiktir $\Leftrightarrow$ zaman simetriktir ve zaman ötelemesi altında değişmezdir,
- (5) asimptotik olarak düzdür,
- (6) geometrik kütle, $m = GMc^{-2}$, sahiptir.

2.6 İzotropik Koordinatlar

Zaman dilimlerinin $t = \text{sabit}$ olduğu alternatif koordinat seti bulunmaya çalışılırsa, çizgi elemanı aşağıdaki gibi yazılır:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)d\sigma^2. \quad (2.54)$$

Burada, $d\sigma^2$ Öklityen 3-uzayın çizgi elemanıdır. Çizgi elemanı kartezyan koordinatlarda

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.55)$$

formunda yazılır veya küresel polar koordinatlarda

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.56)$$

formunda yazılır.

θ , ϕ ve t koordinatlarının

$$r \rightarrow \bar{r} = \bar{r}(r) \quad (2.57)$$

altında değişmediği bir dönüşüm ele alınırsa, $\bar{r}$ diğer radyal koordinat olmak üzere, çözüm aşağıdaki formda yazılır:

$$ds^2 = (1 - 2m/r) dt^2 - [\lambda(\bar{r})]^2 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.58)$$

(2.57) dönüşümü altında metriğin (2.47) nasıl dönüştüğü ele alınırsa, (2.58) ve (2.47) karşılaştırıldığında, $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ teriminin katsayıları eşit olmak zorundadır ve

$$r^2 = \lambda^2 \bar{r}^2 \quad (2.59)$$

ifadesini gerektirir. İki radyal elemanın eşitliği ile

$$(1 - 2m/r)^{-1} dr^2 = \lambda^2 d\bar{r}^2 \quad (2.60)$$

elde edilir. (2.59) ve (2.60) eşitliklerinden

$$\frac{dr}{(r^2 - 2mr)^{1/2}} = \pm \frac{d\bar{r}}{\bar{r}} \quad (2.61)$$

ifadesi bulunur. Bu adi bir diferansiyel denklemdir. $r \rightarrow \infty$ olduğunda $\bar{r} \rightarrow \infty$ olması gerektiğinden, pozitif işaret alınır. Bu diferansiyel denklem çözülürse,

$$r = \bar{r}(1 + m/2\bar{r})^2 \quad (2.62)$$

elde edilir. (2.59) denkleminde

$$\lambda^2 = (1 + m/2\bar{r})^4 \quad (2.63)$$

bulunur. (2.62) denklemini kullanılarak Schwarzschild çözümü aşağıdaki izotropik formda yazılır [Ray d'Inverno, 1992]:

$$ds^2 = \frac{(1 - m/2\bar{r})^2}{(1 + m/2\bar{r})^2} dt^2 - (1 + m/2\bar{r})^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (2.64)$$

3. KÜTLEÇEKİM ALANINDA ELEKTROSTATİK

Genel göreliliğin sonucu olarak bütün elektromagnetik ve optik olaylar kütleçekimsel alandan etkilenirler. Görelilik teorisinin ilk öngörüsü, ışığın güneş gibi büyük kütleli bir cismin yanından geçerken eğrilmesidir. Sonuç olarak, klasik elektromagnetik teori elektromagnetizm ve kütleçekim arasındaki etkileşme dikkate alınarak yeniden yazılmalıdır.

Whittaker, kütleçekimin elektromagnetik olaylar üzerine etkisini incelemiş ve özellikle iki çeşit kütleçekim alanındaki elektrostatiği ele almıştır: i) Tek bir kütlenin oluşturduğu kütleçekimsel alan (uzay-zaman Schwarzschild metriği ile tanımlanır) ii) Bu alanın limit durumu sanki-düzgün bir alan olarak adlandırılır. Burada kütleçekimsel kuvvet, orijin civarında düzgündür [Whittaker, 1927].

Bu kütleçekim alanlarında, elektromagnetik alanların olduğu varsayılır. Gerçekte elektromagnetik alanın kendisi bir kütleçekim alanı oluşturur, yani uzay-zaman metriğini her yerde değiştirir, fakat bu etki genel olarak küçüktür ve ideal durumda bu ihmal edilip böylece metriğin basitçe kütleçekimsel alandan olduğu varsayılır.

Whittaker, sanki-düzgün bir alandaki bir elektronun potansiyelini hesaplamış, fakat Schwarzschild alanındaki bir elektronun potansiyeli için benzer bir ifade elde edememiştir.

Whittaker metodu yerine Hadamard'ın teorisini kullanan Copson, Schwarzschild alanındaki bir elektronun potansiyelini bulmayı başarmıştır.

Bu bölümde amaçlanan, bu potansiyel ifadesini elde etmek olacaktır. Bunun için öncelikle Hadamard teorisi kısaca açıklanacak, daha sonra bu teori kullanılarak Whittaker tarafından bulunan sanki-düzgün kütleçekim alanındaki çözüm elde edilecek ve sonuçta aynı metotdan yararlanılarak Schwarzschild alanındaki çözüm bulunacaktır [Copson E., 1928].

3.1 Hadamard Teorisi

$(x^1, x^2, \dots, x^m)$ değişkenlerinin gerçek değerlerinin bir bölgesinde $g^{\alpha\beta}$, h^α ve k holomorfik fonksiyonlar olsun. Hadamard aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemin

$$\sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \sum_{\alpha} h_\alpha \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + ku = 0 \quad (3.1)$$

m tek olduğunda sürekli ve türevlenebilir tek bir çözüme sahip olduğunu göstermiştir.

$(a^1, a^2, \dots, a^m)$ tekil noktası civarı dışında $g^{a\beta}$, h^a ve k holomorftir. Bu tekil nokta civarında çözüm sonsuz olur ve aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\Gamma^{\frac{m-2}{2}} (U_0 + U_1 \Gamma + U_2 \Gamma^2 + \dots). \quad (3.2)$$

Burada Γ , $(a^1, a^2, \dots, a^m)$ tekil noktasından $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ noktasına kadar olan en kısa uzaklığın karesini gösterir. $U_0, U_1, U_2 \dots$ fonksiyonları holomorftir. Bu çözüm temel çözüm olarak adlandırılır ve

$$[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır. Bu çözüm Laplace denkleminin temel çözümüdür. Kütleçekim alanındaki bir elektronun potansiyeli, elektrostatik potansiyelin kısmi diferansiyel denkleminin temel çözümü olduğu varsayılır. Hadamard bu problemin nasıl ele alınacağını göstermiştir.

$$U_0 = \sqrt{g(a)} \exp. \left[- \int_0^s \left(\sum_{\alpha, \beta} g^{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \sum_\alpha h^\alpha \frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} - 2m \right) \frac{ds}{4s} \right] \quad (3.4)$$

denklemi U_0 belirler. Burada integral $(a^1, a^2, \dots, a^m)$ tekil noktasından $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ noktasına kadar olan en kısa yol boyunca alınır. Tekrarlama bağıntılarıyla diğer U_n fonksiyonları belirlenir [Copson E., 1928].

3.2 Sanki-Düzgün Kütleçekim Alanında Elektrostatik

Küresel simetrik bir cismin etrafındaki uzay-zaman metriği Schwarzschild çizgi elemanı (2.47) ile verildi.

Schwarzschild metriğinin limiti alınarak daha basit bir uzay-zaman metriği

$$ds^2 = (1 + 2gx)dt^2 - \left(\frac{dx^2}{1 + 2gx} + dy^2 + dz^2 \right) \quad (3.5)$$

bulunur. Bu bütün kütleçekimsel alan tiplerinin en basit uzay-zaman metriğidir. Bu alana sanki-düzgün alan denir. Çünkü bu alan orijin civarında düzgündür [Copson E., 1928].

Sanki-düzgün kütleçekimsel alandaki elektrostatik potansiyel

$$(1+2gx)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

denklemini sağlar. Elektrostatik potansiyel için bu denklem aşağıda verilen Newton fiziğindeki denkleme karşılık gelir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \quad (3.7)$$

Aşağıdaki dönüşümler yapılırsa,

$$1+2gx = (1+\xi)^2, \quad gy = \eta, \quad gz = \zeta \quad (3.8)$$

(3.6) denklemi şu formu alır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1+\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0. \quad (3.9)$$

Bu koordinatlar cinsinden uzay-zaman metriği

$$ds^2 = (1+\xi)^2 dt^2 - \frac{1}{g^2} (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır. Burada ξ , η , ζ gerçek uzaklığı gösterir. Eğer $(1+\xi)$ pozitif ise, Hadamard teorisinin sonucu olarak temel çözüm

$$\Gamma^{-1/2} (U_0 + U_1 \Gamma + U_2 \Gamma^2 + \dots) \quad (3.11)$$

halini alır. Burada Γ ,

$$\Gamma = (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 \quad (3.12)$$

ifadesi ile tanımlanır. (3.4) denkleminde U_0 ,

$$\begin{aligned} U_0 &= \exp \left[- \int_{\alpha}^{\xi} \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1+\xi} \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} - 6 \right\} \frac{d\xi}{4(\xi - \alpha)} \right] \\ &= \exp \left[- \int_{\alpha}^{\xi} \frac{d\xi}{2(1+\xi)} \right] \\ &= \left(\frac{1+\xi}{1+\alpha} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

hesaplanır. Tekrarlama bağıntıları ile

$$U_n = -\frac{U_0}{2(2n-1)(\xi-\alpha)^n} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(\xi-\alpha)^{n-1}}{U_0} \left[\frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1+\xi} \frac{\partial U_{n-1}}{\partial \xi} \right] d\xi \quad (3.14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada integral (α, β, γ) 'dan (ξ, η, ζ) 'a düz çizgi boyunca alınır.

$U_1, U_2 \dots$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{U_0}{2(\xi-\alpha)} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(\xi-\alpha)^0}{U_0} \left[\frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1+\xi} \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= -\frac{3}{8} U_0 (1+\xi)^{-1} (1+\alpha)^{-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{U_0}{6(\xi-\alpha)^2} \int_{\alpha}^{\xi} \frac{(\xi-\alpha)}{U_0} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{1+\xi} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \right] d\xi \\ &= -\frac{5}{128} U_0 (1+\xi)^{-2} (1+\alpha)^{-2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Genelleştirme yapılarak U_n fonksiyonu

$$U_n = k_n U_0 (1+\xi)^{-n} (1+\alpha)^{-n} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\frac{k_n}{k_{n-1}} = -\frac{(2n+1)(2n-3)}{4.2n(2n-1)} \quad (3.18)$$

olarak yazılır. $U_1, U_2 \dots U_n$ fonksiyonları (3.11) denkleminde yerine konulursa, (α, β, γ) tekil noktasına sahip temel çözüm

$$\begin{aligned} &\frac{U_0}{\Gamma^{1/2}} \left[1 + k_1 \frac{\Gamma}{(1+\xi)(1+\alpha)} + k_2 \frac{\Gamma^2}{(1+\xi)^2(1+\alpha)^2} + \dots \right] \\ &= \frac{U_0}{\Gamma^{1/2}} \left(1 + \frac{\Gamma}{2(1+\xi)(1+\alpha)} \right) \left(1 + \frac{\Gamma}{4(1+\xi)(1+\alpha)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{[(1+\xi)/(1+\alpha)]^{1/2}}{[(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2]^{1/2}} \left(1 + \frac{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2}{2(1+\xi)(1+\alpha)} \right) \left(1 + \frac{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2}{4(1+\xi)(1+\alpha)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2 + 2(1+\xi)(1+\alpha)}{[(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2 + 4(1+\xi)(1+\alpha)]^{1/2} [(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2]^{1/2} (1+\alpha)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir. Eğer (α, β, γ) yerine orijinal koordinat sisteminde (a, b, c) noktası alınırsa, (x, y, z) 'a bağlı olarak temel çözüm

$$\begin{aligned} & \frac{[2+2g(x+a)+g^2\{(y-b)^2+(z-c)^2\}]}{\left\{[2+2g(x+a)+g^2\{(y-b)^2+(z-c)^2\}]^2-4(1+2gx)(1+2ga)\right\}^{1/2}\sqrt{1+2ga}} \\ &= \frac{\left[1+g(x+a)+\frac{g^2}{2}\{(y-b)^2+(z-c)^2\}\right]}{g\sqrt{1+2ga}\left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+g(x+a)\{(y-b)^2+(z-c)^2\}+\frac{g^2}{4}\{(y-b)^2+(z-c)^2\}^2\right]^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

formunda bulunur. Bu ifade sanki-düzgün kütleçekimsel bir alanda (a, b, c) noktasında durgun olan bir birim nokta yükün oluşturduğu elektrostatik potansiyeli vermektedir ve Whittaker'ın ifadesi ile aynıdır [Copson E., 1928].

3.3 Schwarzschild Metriğinde Elektrostatik: Copson Çözümü

Küresel ve durgun bir cismin etrafında uzay-zaman metriği Schwarzschild formülü (2.47) ile verildi. Bu alanda elektrostatik potansiyel denklemi aşağıdaki gibidir:

$$(1-2m/R)\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0. \quad (3.21)$$

İzotropik koordinatlar,

$$r=\frac{R-m+[R(R-2m)]^{1/2}}{m} \quad (3.22)$$

ifadesi ile tanımlanırsa, buradan

$$R=\frac{mr}{2}\left(1+\frac{1}{r}\right)^2 \quad (3.23)$$

elde edilir. İzotropik koordinatlar cinsinden (3.21)'in kısmi diferansiyel denklemi yazılırsa,

$$\frac{r^2(r-1)}{(r+1)^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{(r+1)^3}{(r-1)}\frac{\partial u}{\partial r}\right]+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0 \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(2r-4)}{(r^2-1)} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (3.25)$$

bulunur. Bu denklemin sol tarafına $\left(\frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$ terimi eklenip çıkarılırsa,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \left(\frac{2r-4}{r^2-1} - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (3.27)$$

olarak alınırsa, (3.26) ifadesi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2-4r}{r^2(r^2-1)} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.28)$$

formunda yazılır. İzotropik koordinatlar cinsinden uzay-zaman metriği

$$ds^2 = \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^2 dt^2 - \frac{m^2}{4} \left(1 + \frac{1}{r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.29)$$

şeklinde yazılır. Bu koordinatlarda ($r=1$) ulaşılabilir bir sınırdır.

$(0,0,a)$ noktasındaki bir elektronun potansiyeli, yani (3.28) denkleminin temel çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma^{-1/2} (U_0 + U_1 \Gamma + U_2 \Gamma^2 + \dots). \quad (3.30)$$

Burada, $\Gamma = x^2 + y^2 + (z-a)^2$ ve $U_0, U_1, U_2, \dots$ $r > 1$ için holomorfik fonksiyonlardır. U_0 için Hadamard formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} U_0 &= \exp \left[- \int_0^s \left\{ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} + \frac{2-4r}{r^2(r^2-1)} \left(x \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + y \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + z \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) - 6 \right\} \frac{ds}{4s} \right] \\ &= \exp \left[- \int_0^s \frac{4(1-2r)}{r^2(r^2-1)} (x^2 + y^2 + z^2 - az) \frac{ds}{4s} \right] \\ &= \exp \left[- \int_0^s \frac{(1-2r)}{r^2(r^2-1)} (r^2 - az) \frac{ds}{s} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu integral

$$\begin{aligned}
x &= s \sin \beta \cos \gamma, \\
y &= s \sin \beta \sin \gamma, \\
z &= a + s \cos \beta
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ile belirlenen düz bir çizgi boyunca alınır. β ve γ sabittir.

Sonuç olarak,

$$(r^2 - az) \frac{ds}{s} = (s + a \cos \beta) ds = r dr \tag{3.33}$$

ifadesi bulunur ve böylece

$$\begin{aligned}
U_0 &= \exp \left[\int_a^r \frac{2r-1}{r(r^2-1)} dr \right] \\
&= \frac{r(r-1)^{1/2} (a+1)^{3/2}}{a(a-1)^{1/2} (r+1)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.30) ifadesi (3.28) eşitliğine yerleştirilirse, $U_1, U_2 \dots$ holomorfik fonksiyonları hesaplanır. Sonuçta,

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{3}{2} \frac{U_0}{(r^2-1)(a^2-1)}, \\
U_2 &= -\frac{5}{8} \frac{U_0}{(r^2-1)^2(a^2-1)^2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

şeklinde bulunur. Böylece temel çözüm (3.30)

$$\frac{r(a+1)^2}{a(r+1)^2} \left[\frac{(r^2-1)}{(a^2-1)\Gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\Gamma}{(r^2-1)(a^2-1)} - \frac{5}{8} \frac{\Gamma^2}{(r^2-1)^2(a^2-1)^2} + \dots \right] \tag{3.36}$$

formunu alır. Temel çözümün ilk üç teriminin formu geri kalan U_n 'i art arda belirlemek yerine, (3.28) denklemine

$$u = \frac{r}{(r+1)^2} F(\gamma) \tag{3.37}$$

ifadesini yerleştirmenin daha kolay olduğunu göstermektedir. Burada, $\gamma = \Gamma/(r^2-1)$ 'dir. Böylece $F(\gamma)$,

$$2\{\gamma^2 + (a^2 - 1)\gamma\} \frac{d^2 F}{d\gamma^2} + 3\{2\gamma + a^2 - 1\} \frac{dF}{d\gamma} = 0 \quad (3.38)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür ve aşağıdaki formda elde edilir:

$$F(\gamma) = A + B \frac{2\gamma + (a^2 - 1)}{\{\gamma^2 + \gamma(a^2 - 1)\}^{1/2}}. \quad (3.39)$$

Burada A ve B keyfi sabitlerdir. $r = a$ ve $\theta = 0$ noktalarında tekilliğe sahip olan (3.28) denkleminin temel çözümü

$$\begin{aligned} & \frac{r}{(r+1)^2} [2\Gamma + (r^2 + 1)(a^2 + 1)][\Gamma^2 + \Gamma(r^2 + 1)(a^2 + 1)]^{-1/2} \\ &= \frac{r}{(r+1)^2} \left[\left(\frac{a^2 r^2 + 1 - 2ar \cos \theta}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} \right)^{1/2} + \left(\frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}{a^2 r^2 + 1 - 2ar \cos \theta} \right)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

ifadesi ile sabit bir çarpanla çarpımı olarak elde edilir.

Schwarzschild metriğinde ($R = B$, $\theta = 0$) noktasında durgun olan bir nokta yükün oluşturduğu elektrostatik potansiyel aşağıdaki gibi verilir [Copson E., 1928]:

$$V = \frac{2br}{m(b+1)^2(r+1)^2} \left[\left(\frac{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}{b^2 r^2 - 2br \cos \theta + 1} \right)^{1/2} + \left(\frac{b^2 r^2 - 2br \cos \theta + 1}{r^2 - 2br \cos \theta + b^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (3.41)$$

Burada

$$\begin{aligned} \frac{2R}{m} &= \frac{(r+1)^2}{r}, \\ \frac{2B}{m} &= \frac{(b+1)^2}{b} \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanır.

4. SCHWARZSCHILD METRİĞİNDE ELEKTROSTATİK: LINET ÇÖZÜMÜ

Schwarzschild metriğinde durgun yüklerin oluşturduğu elektromagnetik alanın gerçekleşmesi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Cohen ve Wald (1971), Hanni ve Raffini (1973) noktasal bir yükün elektrik alanı üzerine araştırmalar yapmıştır.

Bu bölümde Schwarzschild metriğinde duran noktasal bir yükün elektrostatik alanını veren Linet çözümü ele alınacaktır.

Öncelikle izotropik koordinatlarda verilen Copson çözümü incelenecek daha sonra Gauss yasası uygulanarak gerekli düzeltmeler yapılacaktır. Düzeltilmiş Copson çözümünü olay ufkunun içine genişletmek için standart Schwarzschild koordinatları kullanılacaktır. Bu çözüm yüklerin bulunduğu yer hariç her yerde düzgündür [Linet B., 1976].

4.1 Schwarzschild Metriğinde Maxwell Denklemleri

Elektromagnetik etkinin yeterince zayıf olduğu varsayılırsa, Einstein-Maxwell denklemleri Schwarzschild metriğinde Maxwell denklemlerine indirgenir.

Standart koordinatlarda Schwarzschild metriği (2.47) ile verildi. İzotropik koordinatlar,

$$\bar{r} = \frac{r - m + [r(r - m)]^{1/2}}{2} \quad r > 2m \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır ve bu formülden r çekilirse,

$$r = \bar{r}(1 + m/2\bar{r})^2 \quad \bar{r} > m/2 \quad (4.2)$$

eşitliği elde edilir. İzotropik koordinatlarda Schwarzschild metriği (2.64) ile verildi. İzotropik koordinatlar bütün Schwarzschild manifoldunu kaplamaz sadece olay ufkunun dışında uzanan bir kısmı kapsar. (4.1)'den olay ufkunun $r = 2m$, $\bar{r} = m/2$ olduğu görülür [Linet B., 1976].

Maxwell denklemleri,

$$\partial_\rho (\sqrt{-g} F^{\rho\mu}) = \sqrt{-g} J^\mu \quad (4.3)$$

$$\partial_\rho F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\rho} + \partial_\mu F_{\rho\lambda} = 0 \quad (4.4)$$

genel formunda tanımlanır. Burada g metriğin determinanı ve J^μ akım yoğunludur. $F^{\rho\mu}$

ise elektromagnetik alan tansörüdür ve

$$F^{\rho\mu} = g^{\mu\alpha} g^{\rho b} F_{ab} \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır. F_{ab} anti-simetrik bir tansördür $[F_{ab} = -F_{ba}]$.

4-potansiyel A_a ,

$$F_{ab} = A_{a,b} - A_{b,a} \quad (4.6)$$

ifadesi ile (4.4) eşitliğini sağlar [Ray d'Inverno, 1992]. Standart koordinatlardaki elektrostatik için Maxwell denklemleri

$$\begin{aligned} E_i &= F_{0i}, \\ B_i &= F_{kl} \end{aligned} \quad (4.7)$$

notasyonu ile verilsin. Elektrostatik için $B_i = 0$ ve $\frac{\partial E_i}{\partial t} = 0$ olacağından (4.4) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} &= 0, \\ \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitlikleri bulunur. (4.3) denkleminde

$$\partial_1 \sqrt{-g} F^{10} + \partial_2 \sqrt{-g} F^{20} + \partial_3 \sqrt{-g} F^{30} = \sqrt{-g} J^0 \quad (4.9)$$

ifadesi elde edilir. F^{10} , F^{20} , F^{30} elektromagnetik alan tansör bileşenleri, $g^{\mu\nu}$ kontravaryant metrik bileşenleri (2.22) ve (4.7) eşitlikleri kullanılarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} F^{01} &= g^{00} g^{11} F_{01} = -E_r, \\ F^{02} &= g^{00} g^{22} F_{02} = -\frac{E_\theta}{(1-2m/r)r^2}, \\ F^{03} &= g^{00} g^{33} F_{03} = -\frac{E_\phi}{(1-2m/r)r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

g ifadesi (2.50) kullanılırsa, (4.9) eşitliği aşağıdaki forma dönüşür:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta E_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \theta}{1-2m/r} E_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta (1-2m/r)} E_\phi \right) = r^2 \sin \theta J^0. \quad (4.11)$$

V elektrostatik potansiyel, A_a ise vektör potansiyeldir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler indirgenir:

$$\begin{aligned} A_0 &= V, \\ A_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Elektrik alan bileşenleri

$$\begin{aligned} E_r &= -\partial V / \partial r, \\ E_\theta &= -\partial V / \partial \theta, \\ E_\phi &= -\partial V / \partial \phi \end{aligned} \quad (4.13)$$

ifadeleri ile verilir. Bu bileşenler (4.11) denkleminde yerine konulursa, elektrostatik potansiyel için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{1-2m/r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{1-2m/r} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -r^2 J^0. \quad (4.14)$$

4.2 Linet Çözümü

Copson $\bar{r}$ radyal koordinatı yerine bunun $m/2$ ile bölünmesinden elde edilen radyal koordinatı kullanmıştır. Burada izotropik koordinatlar (4.1) kullanılacaktır. Buna göre, (4.2)'den

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \frac{1}{(1-m/2\bar{r})(1+m/2\bar{r})} \quad (4.15)$$

elde edilir. Kaynak olmayan bölgede $J^0 = 0$ olacağından (4.2) ve (4.15) değerleri (4.14)'de yerine konulursa,

$$\frac{1}{\bar{r}^2} \left(\frac{1-m/2\bar{r}}{1+m/2\bar{r}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\bar{r}^2 (1+m/2\bar{r})^4 \frac{\partial V}{\partial \bar{r}} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (4.16)$$

olduğu görülür. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial V}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{2m(m-4\bar{r})}{\bar{r}^2(4\bar{r}^2-m^2)} \frac{\partial V}{\partial \bar{r}} = 0 \quad (4.17)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} x &= \bar{r} \sin \theta \cos \phi, \\ y &= \bar{r} \sin \theta \sin \phi, \\ z &= \bar{r} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

olarak alınırsa, (4.17) denklemi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{2m(m-4\bar{r})}{\bar{r}^2(4\bar{r}^2-m^2)} \left(x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (4.19)$$

olur. u yerine V yazılarak elde edilen bu denklem (3.28) denkleminde benzerdir. Tek farklılık parantez önündeki katsayılarıdır. Buda (3.28) ve (4.19) denklemlerini elde etmek için kullanılan izotropik koordinatların değişik formlarda tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Buna göre, $\bar{a} > m/2$ olmak koşulu ile $\bar{r} = \bar{a}$ ve $\theta = 0$ noktasında bulunan bir e yükü için (4.19) denkleminin çözümü (3.41) Copson çözümüdür [Linnet B., 1976]:

$$V_c(\bar{r}, \theta) = \frac{e}{(1+m/2\bar{a})^2 \bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \left(\mu(\bar{r}, \theta) + \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}} \frac{1}{\mu(\bar{r}, \theta)} \right) \quad (4.20)$$

Burada

$$\bar{a}_1 = m^2 / 4\bar{a}, \quad (4.21)$$

$$\mu(\bar{r}, \theta) = \left(\frac{\bar{r}^2 + \bar{a}_1^2 - 2\bar{a}_1\bar{r} \cos \theta}{\bar{r}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{r} \cos \theta} \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır.

(4.20) çözümünün $(\bar{a}, 0, 0)$ noktasındaki e yükünden başka diğer kaynaklara da sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. $\bar{r}$ 'nin çok büyük değerleri için elektrostatik potansiyel V_c aşağıdaki asimptotik forma sahiptir [Linnet B., 1976]:

$$V_c(\bar{r}, \theta) \approx \left(1 - \frac{m}{\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2} \right) \frac{e}{\bar{r}}. \quad (4.23)$$

Sonuç olarak, çözüm Gauss teoreminden dolayı $em/\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2$ değerine eşit ikinci bir yükü içerir.

Copson çözümü sadece olay ufku dışında kaynak e yükünü içerdiğinden ikinci kaynak olay

ufkunun içinde yer almalıdır. Elektrostatik potansiyel V_c 'ye karşılık gelen elektrik alan olay ufkunda düzenlidir. $m/2 \leq \bar{r} < \infty$ için düzenli olan elektrik alan simetriktir ve sonuç olarak [Israel W., 1967; Bkz Ek 1],

$$\frac{sabit}{\bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \quad (4.24)$$

formunda olmalıdır. Çok büyük $\bar{r}$ 'deki ikinci yüke karşılık gelen sabitin değeri:

$$sabit = \frac{em}{\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2}. \quad (4.25)$$

Sonuç olarak, $(\bar{a}, 0, 0)$ noktasındaki e yükünün elektrostatik potansiyeli

$$V(\bar{r}, \theta) = V_c(\bar{r}, \theta) + \frac{em}{\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2} \frac{1}{\bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \quad (4.26)$$

elde edilir.

Olay ufkunun içindeki alanı belirlemek için standart koordinatlar kullanılır. İzotropik koordinatlarda (4.26) eşitliği ile verilen elektrostatik potansiyel $V(\bar{r}, \theta)$, standart koordinatlarda yazmak için, aşağıdaki formda yazılır [Linnet B., 1976]:

$$V(\bar{r}, \theta) = \frac{e}{(1+m/2\bar{a})^2 \bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \left(\mu^2 + \frac{\bar{a}_l^2}{\bar{a}^2} \frac{1}{\mu^2} + \frac{2\bar{a}_l}{\bar{a}} \right)^{1/2} + \frac{em}{\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2} \frac{1}{\bar{r}(1+m/2\bar{r})^2}. \quad (4.27)$$

Burada

$$A = \frac{e}{(1+m/2\bar{a})^2 \bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \left[\left(\frac{\bar{r}^2 + \bar{a}_l^2 - 2\bar{a}_l \bar{r} \cos \theta}{\bar{r}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{a} \bar{r} \cos \theta} \right)^{1/2} + \frac{\bar{a}_l}{\bar{a}} \left(\frac{\bar{r}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{a} \bar{r} \cos \theta}{\bar{r}^2 + \bar{a}_l^2 - 2\bar{a}_l \bar{r} \cos \theta} \right)^{1/2} \right], \quad (4.28)$$

$$B = \frac{em}{\bar{a}(1+m/2\bar{a})^2} \frac{1}{\bar{r}(1+m/2\bar{r})^2} \quad (4.29)$$

olarak alınırsa, (4.2) dönüşüm formülünden

$$r - m = \bar{r} + \frac{\bar{a}\bar{a}_l}{\bar{r}}, \quad (4.30)$$

$$(r - m)^2 - \frac{m^2}{2} = \bar{r}^2 + \frac{\bar{a}^2 \bar{a}_l^2}{\bar{r}^2}$$

ifadeleri elde edilir. (4.2) dönüşüm formülüyle $\bar{a}$ karşılık gelen a büyüklüğü,

$$a = \bar{a}(1 + m/2\bar{a})^2 \quad a > 2m \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece B ifadesi

$$B = \frac{em}{ar} \quad (4.32)$$

olarak elde edilir. A ifadesi düzenlenirse,

$$A = \frac{e}{\bar{a}(1 + m/2\bar{a})^2 \bar{r}(1 + m/2\bar{r})^2} \left[\frac{\bar{a}\bar{r}^2 + \bar{a}\bar{a}_1^2 - 2\bar{a}\bar{r}\bar{a}_1 \cos\theta + \bar{a}_1\bar{r}^2 + \bar{a}_1\bar{a}^2 - 2\bar{a}_1\bar{a}\bar{r} \cos\theta}{(\bar{r}^2 + \bar{a}_1^2 - 2\bar{a}_1\bar{r} \cos\theta)^{1/2} (\bar{r}^2 + \bar{a}^2 - 2\bar{r}\bar{a} \cos\theta)^{1/2}} \right] \quad (4.33)$$

bulunur. (4.21) değeri, (4.30) ve (4.31) bağıntıları kullanılarak

$$A = \frac{e}{ar} \frac{(r-m)(a-m) - m^2 \cos\theta}{\left[(r-m)^2 + (a-m)^2 - m^2 - 2\cos\theta(r-m)(a-m) + m^2 \cos^2\theta \right]^{1/2}} \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir. Böylece $V(r, \theta)$ ifadesi

$$V(r, \theta) = \frac{e}{ar} \frac{(r-m)(a-m) - m^2 \cos\theta}{\left[(r-m)^2 + (a-m)^2 - m^2 - 2\cos\theta(r-m)(a-m) + m^2 \cos^2\theta \right]^{1/2}} + \frac{em}{ar} \quad (4.35)$$

formunda bulunur. $V(r, \theta)$ e yükünün bulunduğu konum hariç her yerde düzenlidir.

(a, θ_0, ϕ_0) noktasındaki bir e yükünün elektrostatik potansiyeli, $V(r\theta\phi, a\theta_0\phi_0)$, (4.35)

ifadesinde $\cos\theta$ yerine $\cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\phi - \phi_0)$ ifadesi yazılmasıyla elde edilir.

Böylece $V(r\theta\phi, a\theta_0\phi_0)$,

$$V(r\theta\phi, a\theta_0\phi_0) = \frac{e}{ar} \frac{(r-m)(a-m) - m^2 \lambda(\theta, \phi)}{\left[(r-m)^2 + (a-m)^2 - m^2 - 2\lambda(\theta, \phi)(r-m)(a-m) + m^2 \lambda^2(\theta, \phi) \right]^{1/2}} + \frac{em}{ar} \quad (4.36)$$

olarak bulunur. Burada $a > 2m$ ve

$$\lambda(\theta, \phi) = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\phi - \phi_0). \quad (4.37)$$

5. SONUÇLAR

Öncelikle durağan, statik ve küresel çözümlerden yararlanılarak ds^2 çizgi elemanı tanımlandı. Bu ifadede yer alan ν ve λ fonksiyonları, g_{ab} kovaryant ve g^{ab} kontravaryant metrik tansörleri ile sıfırdan farklı Christoffel sembolleri, Riemann tansör bileşenleri, Ricci tansör bileşenleri, Ricci skaleri ve Einstein tansör bileşenleri kullanılarak bulundu ve böylece küresel simetrik, durağan, statik, X^a ile tanımlanan Killing vektör alanına sahip, asimptotik olarak düz ve geometrik bir kütleye sahip Schwarzschild çözümü elde edildi. Sonra Hadamard teorisinden yararlanılarak önce sanki-düzgün kütleçekim alanında durgun noktasal bir yükün oluşturduğu elektrostatik potansiyeli veren temel çözüm bulundu, daha sonra izotropik koordinatlar kullanılarak olay ufku dışındaki Schwarzschild alanında yine durgun noktasal bir yükün elektrostatik potansiyelini veren Copson çözümü elde edildi. Son olarak, izotropik koordinatlardaki Copson çözümü incelendiğinde, Gauss yasasına göre, ikinci bir yük içerdiği görüldü. Bu durumda Copson çözümünde gerekli düzeltmeler yapılarak olay ufkunun içindeki ve dışındaki Schwarzschild alanında noktasal durgun yüklerin oluşturduğu elektrostatik potansiyel elde edildi (Linet çözümü). Bu çözümü olay ufkunun içine genişletmek için standart Schwarzschild koordinatları kullanıldı ve buna bağlı olarak elektrostatik potansiyel, $V(r\theta\phi, a\theta_0\phi_0)$, elde edildi.

KAYNAKLAR

Ray d'Inverno (1992), *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, New York

Whittaker (1927), *Roy. Soc. Proc., A*, vol. 116, p. 720

Copson E. (1928), *Proc. R. Soc., A*, vol. 118, p. 184-94

Linet B. (1976), *J. Phys. A. Math. Gen.*, vol. 9, p. 1081-87

Israel W. (1968), *Commun. Math. Phys.*, vol.8, p. 245-60

Bekir Karaoğlu (1998), *Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler*, ARTe Güven Kitapevi, İstanbul

Arfken G. B. (2005), *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, Burlington

EK 1

Israel, boşluk alan denklemlerinin, $G_{ab} = 0$, çözümlerini ve yük ve akımın olmadığı Maxwell denklemlerinin, $\nabla_b F^{ab} = 0$, çözümlerini buldu. Bu çözümleri bulmak için, Israel, aşağıdaki Schwarzschild metriğinde

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

tanımlanan elektrostatik alanlarını buldu [Israel W., 1967].

$\nabla_b F^{ab} = 0$ denklemi, aşağıdaki forma indirgenir:

$$(1 - 2m/r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.2)$$

Bu denklem V 'ye göre lineerdir. Değişken ayrımı yönteminde

$$V(r, \theta, \phi) = \mathfrak{R}(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \quad (1.3)$$

şeklinde bir çözüm aranır ve (1.2) denklemi $V = \mathfrak{R} \Theta \Phi$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} (1 - 2m/r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.4)$$

ifadesi elde edilir. Birinci terim yalnız r değişkenine, ikinci terim yalnız θ değişkenine ve üçüncü terim de yalnız ϕ değişkenine bağlı olduğundan aşağıdaki denklemler elde edebilir:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -M^2, \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -l(l+1), \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} (1 - 2m/r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} \right) = l(l+1) \quad (1.7)$$

(1.5) denkleminin çözümü,

$$\Phi = e^{i M \phi} \quad (1.8)$$

formundadır. Diğer taraftan (1.6)'a göre,

$$\frac{1}{\Theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - \frac{M^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1) \quad (1.9)$$

şeklindedir. Buradan

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{M^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (1.10)$$

şeklinde yazılır

$$x = \cos \theta, \quad \frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{dx} \frac{dx}{d\theta} \quad (1.11)$$

dönüşümleri yapılır ve bu dönüşümler (1.10)'da yerine konulursa, yardımcı Legendre denklemi

$$(1-x^2)\Theta'' - 2x\Theta' + \left[l(l+1) - \frac{M^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \quad (1.12)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\Theta = P_l^M(\cos \theta) \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanan yardımcı Legendre polinomlarıdır [Bekir Karaoğlu, 1998; Arfken G. B., 2005].

Diğer taraftan radyal kısım için

$$\frac{1}{\Re} (1 - 2m/r) \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Re}{\partial r} \right) - l(l+1) = 0 \quad (1.14)$$

yazılır ve

$$x = r/2m - 1, \quad dx = \frac{dr}{2m} \quad (1.15)$$

dönüşümü yapılırsa, (1.14) denklemi

$$x(x+1)\frac{d^2\mathfrak{R}}{dx^2} + 2x\frac{d\mathfrak{R}}{dx} - l(l+1)\mathfrak{R} = 0 \quad (1.16)$$

halini alır. $l = 0$ için, küresel simetrik çözüm

$$V + sbt = e/r \quad (1.17)$$

elde edilir. Bu çözüm $2m \leq r < \infty$ aralığında düzgündür [Israel W., 1967].

$l = 1$ için, $\mathfrak{R} = x$, (1.16) denkleminin bir çözümü olduğu açıkça görülür. İkinci çözüm değişken parametre metodu ile hesaplanır. Eksensel simetri çözümleri ($M = 0$)

$$V(r, \theta) = c_1(r - 2m)\cos\theta, \quad (1.18)$$

$$V(r, \theta) = c_2[-1 + m/r - (r/2m - 1)\ln(1 - 2m/r)]\cos\theta \quad (1.19)$$

elde edilir. (1.18) ifadesi düzgün elektrostatik veya magnostatik alanı temsil eder. (1.19) ifadesi elektrik veya magnetik dipolün statik alanını ifade eder. Bunun asimptotik formu aşağıdaki gibidir:

$$V \approx c_2 \frac{\cos\theta}{r^2} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1.20)$$

(1.16) denkleminin genel bir çözümünü bulmak için

$$\mathfrak{R} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} H(z), \quad (1.21)$$

$$z = 1 + 2x \quad (1.22)$$

dönüşümleri verilsin. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}}{dx} &= \frac{d\mathfrak{R}}{dz} \frac{dz}{dx}, \\ \frac{d\mathfrak{R}}{dz} &= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} \frac{H}{(z+1)^2} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} \frac{dH}{dz}, \\ \frac{d^2\mathfrak{R}}{dz^2} &= -\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} \frac{H}{(z-1)^2(z+1)^2} - \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} \left[\frac{-2H}{(z+1)^3} \right] + 2\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2} \frac{1}{(z+1)^2} \frac{dH}{dz} + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2} \frac{d^2H}{dz^2}, \\ \frac{dz}{dx} &= 2 \end{aligned} \quad (1.23)$$

değerleri bulunur. Bu dönüşümlere göre, (1.16) denklemi aşağıdaki forma dönüşür:

$$(1-z^2)H'' - 2zH' + \left[l(l+1) - \frac{1}{1-z^2} \right] H = 0. \quad (1.24)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümleri birinci tip yardımcı Legendre fonksiyonları, $P_l^1(z)$, ve ikinci tip yardımcı Legendre fonksiyonları, $Q_l^1(z)$ 'dir [Bekir Karaoğlu, 1998; Arfken G. B., 2005]. Böylece (1.21) ifadesi

$$\mathfrak{R} = C_1 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} P_l^1(z), \quad (1.25a)$$

$$\mathfrak{R} = C_2 \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{1/2} Q_l^1(z) \quad (1.25b)$$

olarak yazılır. (1.22)'e göre dönüşüm yapılırsa,

$$\mathfrak{R} = C_1 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} P_l^1(1+2x), \quad (1.26a)$$

$$\mathfrak{R} = C_2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} Q_l^1(1+2x) \quad (1.26b)$$

olur. (1.8), (1.13), (1.26a) ve (1.26b) ifadeleri (1.3)'de yerine konulursa,

$$V = C_1 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} P_l^1(1+2x) P_l^M(\cos \theta) e^{i M \phi}, \quad (1.27a)$$

$$V = C_2 \left(\frac{x}{x+1} \right)^{1/2} Q_l^1(1+2x) P_l^M(\cos \theta) e^{i M \phi} \quad (1.27b)$$

bulunur. (1.15) ile verilen x değerleri (1.27a) ve (1.27b) denklemlerinde yerine konulursa,

$$V = C_1 (1-2m/r)^{1/2} P_l^1(r/m-1) P_l^M(\cos \theta) e^{i M \phi}, \quad (1.28a)$$

$$V = C_2 (1-2m/r)^{1/2} Q_l^1(r/m-1) P_l^M(\cos \theta) e^{i M \phi} \quad (1.28b)$$

elde edilir.

$P_l^1(z) \sim z^l$, $Q_l^1(z) \sim z^{-(l+1)}$ ($z \rightarrow \infty$, $l \geq 1$) olduğundan sadece ikinci çözüm sonsuzda iyi davranır. (1.28b) çözümünün $r = 2m$ civarındaki davranışı incelenirse, E alan büyüklüğü

$$E^2 = (1 - 2m/r)^{-1} \left[\Psi^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi} \right)^2 \right] \quad (1.29)$$

bağıntısı ile verilir.

$x \rightarrow 0$ için $Q_l^1(1+2x)$, öyle ki radyal faktör (1.25b) bir sabit limite yaklaşır. Böylece $r \rightarrow 2m$ olduğundan [$l \geq 1$ için $\partial V / \partial \theta$ ve $\partial V / \partial \phi$ ($M=0$ için) bir mertebesindedir.] ve E , $(1 - 2m/r)^{-1/2}$ mertebesindedir. Sonuç olarak, $2m \leq r < \infty$ aralığında sadece Schwarzschild arka alanındaki elektrostatik alan küresel simetriktir [Israel W., 1967].

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 10.02.1980

Doğum yeri Sivas

Lise 1994-1997 Kartal Süleyman Demirel Lisesi

Lisans 1998-2003 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Fizik Bölümü

Yüksek Lisans 2004-2007 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi Fizik Bölümü