

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZGÜN MANYETİK ALANDA YÜKLÜ KERR
KARA DELİĞİNİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ**

Fizikçi Yasemin SERDAR

**F.B.E. Fizik Anabilim Dalı Fizik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA (YTÜ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖNSÖZ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL GÖRELİLİK.....	3
2.1 Einstein Alan Denklemleri	3
2.2 Kerr Kara Deliği	6
3. DÜZGÜN MANYETİK ALANDA KARA DELİK.....	9
3.1 Killing Vektörleri ve Elektromanyetik Alan	9
3.2 Elektromanyetik Alan Tansörü.....	12
3.3 Kara Deliğin Kazandığı Yük	14
4. DÜZGÜN MANYETİK ALANDA YÜKLÜ KERR KARA DELİĞİNİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ.....	16
4.1 Kerr Kara Deliğinin Elektromanyetik Alan Tansörü	17
4.2 Enerji-Gerilim Tansörü.....	21
4.3 Kerr Kara Deliğinin Elektromanyetik Enerjisi	22
5. SONUÇLAR.....	29
KAYNAKLAR.....	30
EKLER	31
Ek 1 Killing Vektörleri.....	32
Ek 2 Boşluktaki Maxwell Denklemleri	33
Ek 3 Kerr Metriğinin Christoffel Sembolleri ve Kerr Metriğinin Determinantı	35
Ek 4 Boşlukta Maxwell Alan Denklemlerinin Çözümü-Kerr Metriğinin Alan Tansörü	37
Ek 5 Enerji-Gerilim Tansörünün İzi	41

ÖZGEÇMİŞ.....	45
---------------	----

SİMGE LİSTESİ

B_0	Manyetik alan
$F_{\mu\nu}$	Elektromanyetik alan tansörü
G	Kütleçekim sabiti
$G_{\mu\nu}$	Einstein alan tansörü
$g_{\mu\nu}$	Metrik katsayıları
J_H	Kara deliğin açısal momentumu
K	Einstein sabiti
κ	Kara deliğin yüzey kütleçekimi
L_ξ	Lie türevi
m	Kara deliğin kütlesi
Q	Yük
P_μ	4-momentum
r_H	Kara deliğin olay ufku
$R_{\mu\nu}$	Eğrilik tansörü
s	Spin parametresi
$T_{\mu\nu}$	Enerji-momentum tansörü
$\xi(t)$	Zamansal Killing vektörü
$\xi(\phi)$	Eksenel Killing vektörü
ζ	Kara deliğin spin parametresine bağlı bir katsayı
Ω_H	Kara deliğin açısal hızı

KISALTMA LİSTESİ

EAD Einstein Alan Denklemleri

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Genel Görelilikte Uzay-Zaman	5
Şekil 1.2 Kerr Kara Deliği.....	7
Şekil 4.1 ζ katsayısının s spin parametresine bağlı değişimi	27

ÖNSÖZ

Tezim süresince bana yardımcı olan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Reyhan KAYA'ya teşekkür ederim.

Beni her zaman destekleyen ve yanımda olan *anneme, babama* ve *kardeşim Kemal'e* biliyorum ki ne kadar teşekkür etsem az...

Ayrıca, bana sabırla destek olduğu için Arş. Gör. Çağdaş ALLAHVERDİ'ye, yanımda olduğu için dostum Arş. Gör. Dr. Çiğdem YUMUŞAK'a, paylaşımlarıyla bana yardımcı olan Utkan GÜNGÖRDÜ'ye, Yeter ÇALYAY'a ve tüm arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

ÖZET

Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kısaca, genel görelilik teorisi, Einstein alan denklemleri ve Kerr kara deliği anlatılmıştır.

İkinci bölümde, simetri eksenini boyunca düzgün manyetik alanda bulunan durağan, eksenel simetrik kara deliğin elektromanyetik alanı için çözüm hesaplanmıştır. Elektromanyetik alan, kara delik uzay-zamanının Killing vektörlerinin o uzay-zamanın vektör potansiyelleri olmasından yararlanılarak elde edilmiştir. Kara deliğin, “enjeksiyon enerjisi” sıfır olana kadar seçici olarak yükleneceği gerçeği kullanılarak elektromanyetik enerjisini en küçük yapan yük değeri bulunmuştur.

Üçüncü bölümde, Komar kütle formülüyle düzgün manyetik alandaki yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi hesaplanmıştır. Hesaplanan enerjinin ekstremize edilmesiyle, kara deliğin en küçük elektromanyetik enerjiye sahip olması için gereken yük değeri elde edilmiştir. Bu yük ile elde edilen enerji, Wald durumu enerjisi ile karşılaştırılarak Wald durumunun enerjisinin en küçük enerjili duruma karşılık gelmediği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genel görelilik teorisi, Kerr kara deliği, manyetik alan, elektromanyetik enerji

ABSTRACT

This thesis includes three main parts. In the first part, the general theory of relativity, Einstein field equations and Kerr black hole is briefly mentioned.

In the second part, the solution for the electromagnetic field occurring when a stationary, axisymmetric black hole is placed in a uniform magnetic field aligned along the symmetry axis of the black hole is calculated. The electromagnetic field is obtained by using the Killing vectors of space-time as the vector potentials of space-time. The charge value that makes the electromagnetic energy minimum is obtained by using the fact that a black hole will selectively accrete charge until the “injection energy” is reduced to zero.

In the third part, the electromagnetic energy of the charged Kerr black hole in a uniform magnetic field is calculated with Komar mass formula. The value of charge that is needed for the minimum electromagnetic energy of black hole is obtained by extremizing the calculated energy. The fact that the Wald state isn't the state with minimum electromagnetic energy is shown by comparing the energy that is obtained with this charge and the energy of Wald state.

Keywords: General theory of relativity, Kerr black hole, magnetic field, electromagnetic energy

1. GİRİŞ

Kara deliğin elektromanyetik enerjisi hesaplanırken kara deliğin net bir elektrik yüküne sahip olup olmaması büyük önem taşır. Manyetik alan içerisinde bulunmayan, yalıtılmış kara deliğin net bir yüke sahip olamayacağı iyi bilinmektedir (Wald, 1974). Ancak kara delik manyetik alan içerisindeyken denge durumu yük değerinin ne olacağı sorusunun cevabı açık değildir.

Ruffini ve Treves, düz uzay zamanda, düzgün bir manyetik alan içerisinde bulunan dönen küre problemini inceleyerek dönen kürenin elektromanyetik enerjisinin en küçük değerini alabilmesi için net bir yüke sahip olması gerektiğini bulmuşlardır (Ruffini ve Treves, 1973).

Wald, düzgün manyetik alan içindeki, yük kazanan, durağan, eksenel simetrik kara deliğin denge durumunun yükünü $Q = 2B_0 J_H$ olarak hesaplamıştır. Wald, bu sonuca ulaşmak için kara deliğin simetri eksenindeki “enjeksiyon enerjisi”nin sıfır olması koşulunu kullanmıştır. Ancak kullanılan yöntemde eklenen parçacıkların yüklerinin işaretlerinin bilinmesi önem taşıdığı ve eksendeki ek yüklerin etkisi açık olamadığı için elde edilen sonuç genel bir sonuç olmaktan uzak kalmıştır (Wald, 1974).

Düzgün manyetik alandaki yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi Li-Xin Li tarafından Komar kütle formülü yardımıyla bulunmuştur. Bulunan manyetik enerjiyi en küçük yapan yük değeri kara deliğin enerjisi minimize edilerek hesaplanarak $Q = 2\zeta B_0 J_H$ olarak bulunmuştur. Buradaki ζ katsayısı kara deliğin spin parametresine bağlı bir katsayıdır (Li-Xin-Li, 2000).

Bu tezde amaçlanan simetri eksenini boyunca düzgün bir manyetik alanda bulunan yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisini en küçük yapan yük değerinin belirlenmesidir. Üç bölümden oluşan tezin ilk bölümünde genel görelilikle ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde, simetri eksenini boyunca düzgün B_0 manyetik alanında bulunan durağan, eksenel simetrik kara deliğin dışarısında oluşan elektromanyetik alan hesaplanmıştır. Elektromanyetik alan hesaplanırken boş uzay-zamanın Killing vektörlerinin o uzay zamanın vektör potansiyelleri olmasından yararlanılmıştır. Durağan, eksenel simetrik kara deliğin denge durumunda net bir yükü yüklenmesi gerektiği gösterilerek, bu yük değeri enjeksiyon enerjisi yöntemiyle bulunmuştur. Tezin üçüncü bölümünde ise simetri eksenini boyunca düzgün bir manyetik alan içerisinde bulunan yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi Komar kütle formülü yardımıyla hesaplanmıştır. Komar kütle formülünde kullanılmak üzere

Kerr metriğinin elektromanyetik alan tansörü hesaplanarak, bu tansörün boşluktaki Maxwell denklemlerinin çözümü olduğu gösterilmiştir. Yine Komar kütle formülü hesabında kullanılmak üzere enerji-momentum tansörünün bileşenleri bulunmuş ve izinin sıfır olduğu gösterilmiştir. Komar kütle formülü yardımıyla elde ettiğimiz Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi minimize edilerek kara deliğin minimum enerjiye ulaşması için gereken yük hesaplanmıştır. Bulunan yük değeri Wald'un bulduğu yük değeri ile karşılaştırılarak Wald değerinin Kerr kara deliğinin minimum enerjisine karşılık gelen yük değeri olmadığı belirlenmiştir.

2. GENEL GÖRELİLİK

Genel görelilik kuramı, özel göreliliğin ifade ettiği gibi yalnız eylemsiz referans sistemleri için değil eylemsiz veya eylemli tüm referans sistemleri için fizik yasalarının aynı olması gerekliliğinden doğmuş bir kuramdır. Amaç, eylemsiz referans sistemleri için elde edilen özel görelilik kuramının sonuçlarını tüm referans sistemleri için, ivmeli hareket eden sistemler için de elde ederek genişletmektir. Einstein, ivmenin kütleçekim sonucu oluştuğunu kullanarak çekim kütlesinin eylemsizlik kütlesine eşit olduğunu söylemiştir. Böylelikle ivme zamanla değişen bir çekim alanı olarak da yorumlanabilir. Bu durumda incelememiz gereken kütleçekim alanı altındaki hareket olmalıdır (Einstein,1976).

Çıkarımın çekim alanının kendisinin sağladığı yasaların incelenmesiyle ilgili olduğuna inanan Einstein, kütleçekimi açıklamak için şu devrimsel yaklaşımı yapmıştır: “Uzay-zaman içerisindeki kütle etrafındaki uzay-zamanı eğri. Böylelikle kütle çekim söz konusu olduğunda uzay-zaman artık düz değil eğri uzay-zamandır. Kütle çekim, uzay-zaman içindeki kütlenin uzay-zamanı eğmesinden dolayı oluşur.” Bu yaklaşımla Einstein kütleyle uzay-zamanın geometrisi arasında bir ilişki kurmuştur. Einstein’ın kütleçekim yasasının temelini bu varsayım oluşturur (Einstein, 1976; Dirac, 1996; Taylor ve Wheeler, 2000).

2.1 Einstein Alan Denklemleri

Kütle çekim alanı ile uzayın geometrik yapısı arasındaki ilişkiyi yansıtan, kuramın temel denklemlerine “*Einstein Alan Denklemleri*” denir. Alan denklemleri aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır:

1. Alan denklemleri, referans sistemi seçiminden bağımsız olarak ifade edilebilmelidir.
2. Alan denklemleri, kütlenin uzay-zamana etkisini içermelidir.
3. Alan denklemleri, Newton mekaniği limitinde, yani kütleçekim alanının zayıf olduğu, zamanla değişmediği ve parçacıkların hızının ışık hızına kıyasla çok küçük olduğu durumda, klasik alan denklemi olan $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ Poisson denklemine indirgenebilmelidir.

Birinci özellik dolayısıyla alan denklemleri lineer geometrik büyüklükler olan ve oluşturdukları eşitlikler her sistemde aynı kalan tansörlerle ifade edilmelidir. İkinci özellik teoremin temelini oluşturan varsayımdan hareketle alan denklemlerinin bir tarafının uzay-zamandaki madde dağılımıyla ilişkili, diğer tarafının ise uzay-zamanın yapısıyla ilişkili olması

gerektiğine işaret eder. Üçüncü özellik ise alan denkleminin Poisson denklemine indirgenebilmesi için denklemin, koordinatların en fazla ikinci türevini içeriyor olması gerekliliğini gösterir (Özemre, 1982; Soyuçok, 2004; d’Inverno, 2005).

Eşitliğinin bir tarafını uzay-zamanın yapısını tanımlayan metrik katsayılarını içeren tansörün oluşturduğu EAD’nin madde dağılımını içermesi gereken tarafını özel görelilikteki kütle enerji eşitliğinden ötürü uzay-zamanın enerji-momentum tansörü $T_{\mu\nu}$ oluşturur. Enerji-momentum tansörü 2. mertebeden simetrik bir tansördür. Enerji-momentum tansörü korunumludur, dolayısıyla kovaryant türevi sıfıra eşittir;

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (1.1)$$

Alan denklemlerinin uzay-zamanın yapısıyla ilgili kısmı da denklemlerin Poisson denklemine indirgenebilmesi için metrik katsayıların en fazla ikinci basamaktan türevini içeren, kovaryant türevi sıfır olan 2. mertebeden simetrik tansör olmalıdır. Einstein tansörü bu özellikleri taşır;

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0 \quad (1.2)$$

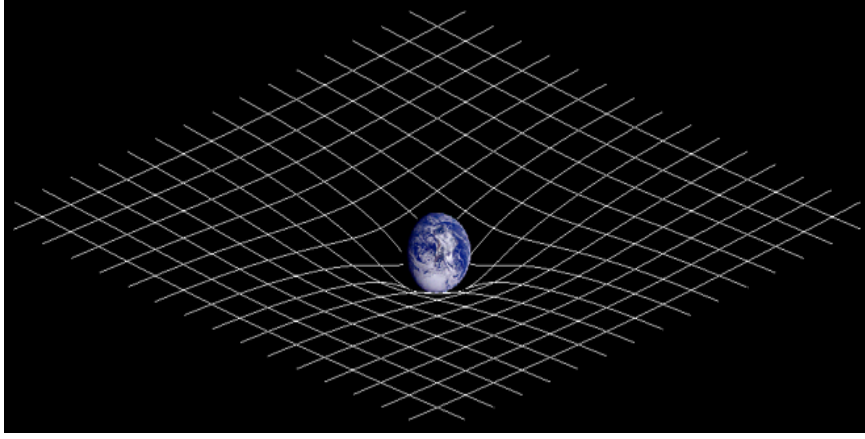
Böylelikle Einstein alan denklemleri:

$$G^{\mu\nu} = K T^{\mu\nu} \quad (1.3)$$

şeklindedir. Newton mekaniği limitinde alan denklemlerinin Poisson denklemine indirgenmesi koşulu kullanılarak Einstein sabiti adı verilen K sabiti aşağıdaki şekilde bulunur.

$$K = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (1.4)$$

Aslında Einstein alan denklemleri kozmolojik sabit adı verilen değeri sıfır kabul edilebilecek kadar küçük Λ sabitini içerir. $\Lambda \neq 0$ varsayımı altında alan denklemlerinin çözümünün Güneş sistemine hiçbir etkisinin olmadığı gösterilmiştir. Ancak tüm evren söz konusu olduğunda, bazı evren modellerinde $\Lambda \neq 0$ varsayımı önemli rol oynar (Özemre, 1982).



Şekil 1.1 Genel Görelilikte Uzay-Zaman. Kütle ($T^{\mu\nu}$) uzay-zamanın geometrisini ($G^{\mu\nu}$) tanımlar. Kütle, uzay-zamanı eğler, uzay-zamanın geometrisi de kütlelerin nasıl hareket edeceğini belirler (<http://en.wikipedia.org>).

EAD (1.3), on tanesi $T^{\mu\nu}$ bileşenleri on tanesi $g^{\mu\nu}$ bileşenleri olmak üzere yirmi bileşen içeren on denklemden oluşmaktadır. EAD soldan sağa okunduğunda verilen metrik bileşenleri $g^{\mu\nu}$ 'lere karşılık gelen enerji-momentum tansörünün bileşenlerinin bulunacağı denklem sistemini ifade edecektir. EAD sağdan sola okunduğunda, yani enerji-momentum tansörü $T^{\mu\nu}$ lerin verilmesi durumunda, enerji-momentum tansöründen hareketle metrik tansörün bileşenleri $g^{\mu\nu}$ 'lerin bulunacağı diferansiyel denklem sistemini ifade edecektir. Özel görelilikteki kütle enerji eşitliğinden hareketle tüm enerji formları kütleçekimsel alan kaynaklarıdır. Bu yüzden $T^{\mu\nu}$ alan denklemlerinin kaynağı olarak adlandırılır. En önemli durum $T^{\mu\nu} = 0$ olduğu duruma karşılık gelen boşluk çözümleridir. Einstein denklemlerinin kütleçekimsel kökenli çökmeyi tanımlayan genel çözümlerinin bulunması zor bir problem olup, yaklaşım yapılmaksızın tam olarak çözülememektedir ($T_{\mu\nu} \neq 0$). Bununla beraber, enerji-momentum tansörünün $T_{\mu\nu} = 0$ olduğu durumda, yani maddesel kütlenin etrafındaki uzay-zaman yapısını anlayacağımız “boşluk alan denklemleri”nin çözümleri (boşluk çözümleri) değişik yaklaşımlarla hesaplanmıştır (d’Inverno, 2005). $T_{\mu\nu} = 0$ olduğu durumda alan denklemleri,

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilir. Kovaryant metrik bileşenlerini içeren $R^{\mu\nu}$, uzay-zamanın eğriliğini tanımlayan eğrilik tansörüdür.

Boş uzay-zaman için EAD lineer değildir ve bu yüzden yaklaşım yapılmaksızın çözümlerinin bulunması zordur. Einstein alan denklemlerinin durgun, küresel simetrik kütle etrafındaki uzay-zamanı veren boşluk çözümü Schwarzschild tarafından, denklemlerin elde edilmesinden yalnızca bir yıl sonra 1916’da çözülmüştür. Denklemlerin eksenel simetrik, durağan kütle etrafındaki uzay-zamanı veren boşluk çözümü 1963’te Yeni Zelandalı matematikçi Roy Kerr tarafından bulunmuştur.

2.2 Kerr Karadeliği

Kütleçekim etkisinde çöken kütlelerin kara deliğe dönüşeceği ve bu kara deliğin durağan durumda kalacağı iyi bilinmektedir. Durağanlık tanımı, kara deliğin sabit olmadığını fakat her zaman aynı şekilde döndüğünü ifade eder. Eğer kara delik dönüyorsa durağan durum eksenel simetrik olmalıdır (Hawking, 1972). Bu durum Einstein alan denklemlerinin durağan, eksenel simetrik kütle etrafındaki uzay-zamanı tanımlayan Kerr çözümü ile tanımlandığından durağan, eksenel simetrik kara deliklere Kerr kara deliği denir. Boyer-Lindquist koordinatlarında (t, r, θ, ϕ) Kerr metriği,

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma}((r^2 + a^2)d\varphi - a dt)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (1.5)$$

şeklinde verilir. Burada Δ ve Σ ifadeleri aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2mr + a^2, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

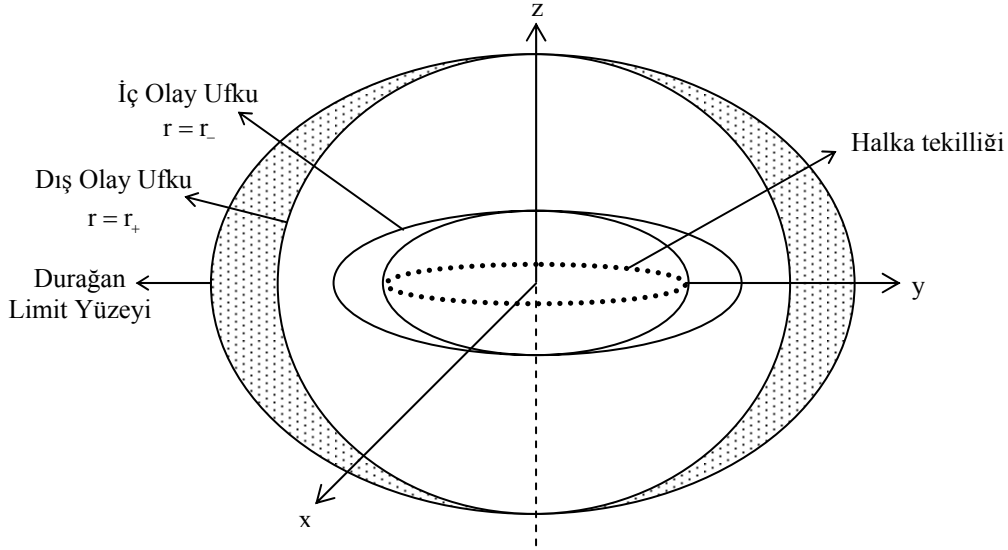
Çözüm m ve a parametrelerine bağlıdır; m , kara deliğin kütlesi, a kara deliğin birim kütesinin açısal momentumudur ($a = \frac{J_H}{m}$). Metrik katsayıları t ve ϕ 'den bağımsız olduğu için uzay-zaman eksenel ve zamansal Killing vektörlerine sahiptir (Ek1). Kara deliğin olay ufku g_{11} metrik bileşeninin tanımsız olduğu yerdedir. $\Delta = 0$ olduğu r değeri g_{11} metrik bileşenini tanımsız yapar;

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 = 0. \quad (1.7)$$

Çözümü incelerken fiziksel olarak önemli olan açısal momentumun kütleyle kıyasla küçük olduğu durumu ($a^2 \langle m^2 \rangle$) göz önüne alırsak (1.6) eşitliğinin çözümü,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (1.8)$$

şeklinde olur. Yani Kerr kara deliğinin Şekil 1.2'de gösterildiği gibi iki olay ufku vardır.



Şekil 1.2 Kerr kara deliğinin geometrisini ifade eder. Kerr kara deliğinin iki olay ufku vardır. Bunlar durağan değildirler. Dış olay ufkunun dışarısında durağan limit yüzeyi vardır. Dış olay ufkuyula durağan limit yüzeyinin arasındaki bölge ergosfer ismini alır.

g_{00} metrik bileşenini sıfır yapan değerler ise durağan yüzey yarıçaplarını verir.

$$g_{00} = -\frac{(r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta)}{\Sigma^2} = 0 \quad (1.9)$$

eşitliği elde edilir. Çözüm

$$r = r_{s\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (1.10)$$

şeklindedir. Durağan limit yüzeyleri eksenel simetriktir. r_{s-} yarıçapındaki durağan limit yüzeyi, r_{s+} yarıçapındaki durağan limit yüzeyinin içerisinde yer almaktadır. r_{s+} , ekvatorunda $2m$, kutuplarda $m + \sqrt{m^2 - a^2}$ değerlerindedir.

r_{s+} durağan limit yüzeyiyle r_+ dış olay ufku arasında kalan bölge ergosfer ismini alır. Ergosferin içindeki parçacık kara deliğin döndüğü doğrultuda hareket etmek zorundadır ama olay ufkuna doğru veya ondan uzaklaşacak şekilde hareket edebilir, parçacık ergosferden çıkabilir.

Kerr kara deliğinin tekil noktası $r=0$ 'da değildir. Tekillik, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ eğrilik değişiminin ıraksadığı $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$ noktasındadır. Toplanan terimler negatif değer

almayacağından eşitlik ancak iki terimin ayrı ayrı sıfır olmasıyla, yani $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ noktalarında sıfıra eşit olur. $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ noktalarının seti bir diskin etrafında bir halka tanımlayacaktır (Carroll, 2005; d’Inverno, 2005; O’Neill, 1995).

3. DÜZGÜN MANYETİK ALANDA KARA DELİK

Wald, simetri eksenini boyunca düzgün B_0 manyetik alanında bulunan durağan, eksenel simetrik kara deliğin elektromanyetik alanı için çözüm üretmiştir. Wald çözümünü oluştururken boş uzay-zamandaki Killing vektörünün (Ek 1), Maxwell test alanı için vektör potansiyeli gibi işlem görmesinden yararlanmıştır.

Yalıtılmış kara delik net bir yüke sahip olmadıkça elektromanyetik alana sahip olamaz. Bu yüzden yalıtılmış kara delik ancak onu yükleyecek bir mekanizmaya sahipse elektromanyetik etkiler olabilir. Fakat kara delik yalıtılmış değilse dış kaynakların etkisiyle bir manyetik alana sahip olabilir. Çöken bir cismin elektromanyetik alana çok şiddetli etkileri olacağından kara delik dış bir elektromanyetik alana yerleştirildiğinde oluşan etkiler incelenecektir.

Bu bölümde ilk olarak boş uzay-zamanda Killing vektörünün boşlukta Maxwell denklemlerinin çözümü olmasından hareketle asimptotik olarak düz olan uzay-zamanda zamansal ve eksenel Killing vektörlerinden meydana gelen çözümün özellikleri incelenecektir. Bölümün ikinci kısmında düzgün manyetik alandaki Kerr kara deliği için elektromanyetik alan tansörü hesaplanacaktır. Bölümün son kısmında ise düzgün manyetik alandaki durağan, eksenel simetrik kara deliğin tercihi olarak bir işarette yükü, $Q = 2B_0 J_H$ (Geometrik birimler $G=c=1$ olarak alınmıştır) olana kadar yükleneceği gösterilecektir. Burada B_0 düzgün manyetik alanın büyüklüğü, J_H kara deliğin açısal momentumudur ($J_H = ma$).

3.1 Killing Vektörleri ve Elektromanyetik Alan

Killing vektörü izometrinin sonsuz küçük işlemcisidir ve aşağıdaki eşitliği sağlar,

$$0 = L_{\xi} g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}.$$

Boş uzay-zamandaki Killing vektörü aynı uzay-zamandaki Maxwell denklemlerinin çözümünü oluşturur. Killing vektörleri boş uzay-zamanın vektör potansiyelleri olduğundan elektromanyetik alan aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Frolov ve Novikov, 1998):

$$F_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu} = -2\xi_{[\mu;\nu]} . \quad (3.1)$$

Böylelikle $F_{\mu\nu}$ boşluk Maxwell denklemlerini sağlar:

$$F_{;\nu}^{\mu\nu} = -2\xi^{\mu;\nu}_{;\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Düz uzay-zamanda on tane bağımsız Killing vektörü vardır. Dört öteleme Killing vektörünün oluşturduğu elektromanyetik alan sıfırlanır. Üç dönme Killing vektörü, düzgün manyetik alanı, üç “boost” Killing vektörü de düzgün elektrik alanı oluşturur (Wald, 1974).

Burada asimptotik olarak düz olan uzay-zamanın zaman öteleme ve eksenel Killing vektörlerinden oluşan, bu iki simetriye de sahip elektromanyetik alanın özellikleri incelenecektir. Zamansal Killing vektörü $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, η^μ ile ve eksenel Killing vektörü $\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$, ψ^μ ile gösterilir. Dual 1-formda sırasıyla $\eta = \eta_\mu dx^\mu$, $\psi = \psi_\mu dx^\mu$ eşitlikleri ile ifade edilebilir.

Elektromanyetik alanın diferansiyel formu

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.3)$$

şeklindedir. Eksenel Killing vektörü tarafından oluşturulan F_ψ test alanını ele alalım,

$$F_\psi = d\psi. \quad (3.4)$$

F_ψ durağan, eksenel simetrik çözümdür. Yani,

$$L_\psi F_\psi = L_\eta F_\psi = 0. \quad (3.5)$$

Çok büyük uzaklıklarda uzay-zaman düz olduğundan $d\psi$ düz uzay-zamandaki değerine yaklaşacaktır. Bu yüzden F_ψ asimptotik olarak düzgün manyetik alan olur. Manyetik tek-kutup momentini F_ψ ’nin büyük uzaklıklarda düzgün hale gelmesiyle ilişkili olarak sıfırlanır;

$$4\pi P_\psi = \int F_\psi = \int d\psi = 0. \quad (3.6)$$

Burada integral 2-küre yüzeyi üzerinden alınmıştır. F_ψ test alanının yükü aşağıdaki gibi verilir;

$$4\pi q_\psi = \int *F_\psi = \int *d\psi \quad (3.7)$$

burada (*) dual formu gösterir. Fakat ifadenin sağ tarafı uzay-zamanın açısal momentumunun bir ifadesidir (Wald, 1984):

$$\int^* d\psi = 16\pi J. \quad (3.8)$$

Böylelikle eksenel Killing vektörü, asimptotik olarak düzgün manyetik alana yaklaşan durağan, eksenel simetrik elektromanyetik test alanını oluşturur. Bu test alanı $q = 4J$ yüküne sahiptir ve manyetik tek-kutup momentine sahip değildir.

Benzer şekilde zamansal Killing vektörü tarafından oluşturulan elektromanyetik alanı ele alalım,

$$F_\eta = d\eta. \quad (3.9)$$

F_η çok büyük uzaklıklarda uzay-zaman düz olmaya başlayınca asimptotik olarak yok olur.

F_η 'nin manyetik tek-kutup momenti yok olur ve yükü aşağıdaki şekilde verilir,

$$4\pi q_\eta = \int^* F_\eta = \int^* d\eta. \quad (3.10)$$

İfadenin sağ tarafı boş uzay-zamanın kütesini veren bir ifadedir (Misner vd., 1973):

$$\int^* d\eta = -8\pi m. \quad (3.11)$$

Böylelikle zamansal Killing vektörü asimptotik olarak yok olan, durağan, eksenel simetrik elektromanyetik test alanını oluşturur. Bu test alanı $q = -2m$ yüküne sahiptir ve manyetik tek-kutup momentine sahip değildir.

Kerr kara deliğinin elektromanyetik tedirgemesi üzerine birbirlerinden bağımsız olarak Wald ve Ipser (1971) tarafından ispat edilen ve Carter (1973) tarafından herhangi bir durağan, eksenel simetrik kara delik için genelleştirilen teorem şu şekildedir:

F durağan, eksenel simetrik kara delik uzay-zamanının Maxwell test alanıysa aşağıdaki özellikleri gerçekler:

1. F durağan ve eksenel simetriktir.
2. F kara deliğin dış bölgesinde ve kara deliğin olay ufkunda tekil değildir.
3. F kara delikten büyük uzaklıklarda asimptotik olarak sıfırlanır.
4. F yüke ve manyetik tek-kutup momentine sahip değildir. Yani $F = 0$ (Wald, 1974).

Bu teorem durağan, eksenel simetrik kara deliğin, Q yükü ilavesine karşılık gelen, ancak tek bir tedirgemesinin olabileceğini gösterir. Yani asimptotik olarak sıfırlanan kara delik etrafındaki elektromanyetik test alanının bütün yüksek çok kutuplu momentleri sadece Q

tarafından belirlenir (Bu sonuç kara delik etrafında, Q yüklü herhangi iki test alanı arasındaki farkın teoremin hipotezini sağlayacağı ve böylelikle sıfırlanacağı gerçeğinden çıkarılabilir). Daha önceki tartışmamız durağan herhangi bir kara delik için daima iyi davranışlı bir tedirgemenin olduğunu, yani $\frac{-Q}{2m}F_\eta$ çözümünün olduğunu gösterir. Böylelikle $\frac{-Q}{2m}F_\eta$ çözümü kara deliğe Q yükünü ekleyen tek çözümdür. Bu Kerr metriğinden kolaylıkla doğrulanır. $\frac{-Q}{2m}F_\eta$ çözümü tam olarak Kerr-Newman (yüklü Kerr) test alanını vermektedir (Wald, 1974).

3.2 Elektromanyetik Alan Tansörü

Bu bölümde simetri ekseni boyunca düzgün bir B_0 manyetik alanına yerleştirilen, durağan, eksenel simetrik kara deliğin dışında oluşan F elektromanyetik test alanı bulunacaktır. Bu test alanının aşağıdaki özellikleri sağlaması gerektiği daha önceki tartışmamızdan bilinmektedir:

1. F , durağan ve eksenel simetrik olmalıdır.
2. F , kara deliğin dış bölgesinde ve kara delik olay ufkunda tekil olmamalıdır.
3. Kara delikten büyük uzaklıklarda F 'nin değeri asimptotik olarak düzgün manyetik alan değeri B_0 değerine yaklaşmalıdır.
4. F 'nin manyetik momenti ve yükü sıfır olmalıdır.

1- 4 özellikleri tek bir elektromanyetik alan F elektromanyetik alanını belirler. 1-4 özelliklerini sağlayan iki test alanı F ve F' 'nü ele alalım. Bu iki test alanının farkı $\tilde{F} = F - F'$ bir önceki bölümde verilen teoremin hipotezlerini sağlamalıdır, yani $\tilde{F} = 0$ olmalıdır. Böylelikle görülmektedir ki $F = F'$ 'dür ve 1-4 özellikleri tek bir F 'yi belirler.

Böylelikle önceki tartışmamızın sonucuyla birlikte düzgün manyetik alan içindeki kara deliğin çözümünü elde etmek için sadece 1-4 özelliklerini sağlayan bir alan tansörü F yazılmalıdır. Aşağıdaki alan tansörünün bu özellikleri sağladığı kolayca doğrulanabilir (Wald, 1974):

$$F = \frac{1}{2}B_0 \left(d\psi + \frac{2J_H}{m}d\eta \right). \quad (3.12)$$

Burada J_H açışal momentum, m kara delik uzay-zamanının kütlesi, ψ eksenel Killing vektör, η zamansal Killing vektördür. Böylece (3.12) eşitliği düzgün manyetik alandaki kara

deliğin çözümünü verir.

Elektromanyetik alan tansörünün diferansiyel formu olan (3.3) eşitliği, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ve $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ antisimetri özellikleri dikkate alınarak yazılırsa elektromanyetik alan tansörü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$F = F_{10}dx^1 \wedge dx^0 + F_{20}dx^2 \wedge dx^0 + F_{13}dx^1 \wedge dx^3 + F_{23}dx^2 \wedge dx^3. \quad (3.13)$$

Boyer-Lindquist formundaki Kerr metriği (1.5) kullanılarak Kerr kara deliği için elektromanyetik test alanı F'nin tam ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$F = \frac{ma(3 + \cos 2\theta)(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)B_0}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)}dx^1 \wedge dx^0 + \frac{ma(a-r)r(a+r)\sin 2\theta B_0}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}dx^2 \wedge dx^0 \\ + \frac{\sin^2 \theta B_0[(\cos^2 \theta(2a^2(r^3 + a^2(r-m)) + a^4(m-r)\sin^2 \theta) + r(-a^4 + 2a^2mr + r^4 + a^2(a^2 - mr)\sin^2 \theta)]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}$$

$$dx^1 \wedge dx^3 + \left[(a^2 + r(r-2m))\cos \theta \sin \theta + \frac{4mr(r^4 - a^4)\sin 2\theta}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^2} \right] B_0 dx^2 \wedge dx^3. \quad (3.14)$$

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.15)$$

alan değişmezi ile ölçülen alan büyüklüğü değerinin kara delik yakınında artmadığı görülür. Bununla birlikte eğer kara delik dönüyorsa ($a \neq 0$) aşağıdaki alan değişmezi sıfırdan farklı olacaktır.

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} * F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.16)$$

Böylelikle dönen kara delik çevresindeki bütün gözlemciler bir elektrik alan gözlemleyeceklerdir.

3.3 Kara Deliğın Kazandığı Yük

Kerr kara deliğının simetri eksenı üzerindeki pozitif yüklü bir parçacık kara deliğın içine doğru çekilir, negatif yüklü bir parçacık ise dışarı doğru itilir (Wald, 1974). Bu yüzden manyetik alan içerisinde, etkileşimsiz iyonize parçacıklarla çevrili kara delik pozitif net bir yük ile yükleninceye kadar yükünü arttıracaktır. Bu net yükün büyüklüğü enjeksiyon enerjisinin sıfır olması koşulundan elde edilir (Wald, 1974).

Enjeksiyon enerjisi, dönen kara deliğın ergosfer adını verdiğimiz bölgesine yüklü parçacıklar eklendiğinde parçacığın enerjisinde meydana gelen değişiktir. Durağan uzay-zaman içinde, düzgün elektromanyetik alana sahip bir parçacığın elektromanyetik enerjisi;

$$E = -P_\mu \eta^\mu \quad (3.17)$$

ile verilir (Carroll, 2004; Wald, 1974). η^μ zamansal Killing vektörü, P_μ 4-momentumdur ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$P_\mu = mu_\mu - eA_\mu. \quad (3.18)$$

Burada u_μ 4-hız, A_μ elektromanyetik alanın vektör potansiyelidir. Kolaylık için parçacık enjeksiyonunun simetri eksenı boyunca gerçekleştiğini varsayalım. Böylelikle, enjeksiyon enerjisi parçacığın kara deliğın ufkuna geldiğı noktadaki enerjisi ile başlangıçtaki enerjisinin farkı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned} \epsilon &= E_{son} - E_{ilk}, \\ \epsilon &= eA_\mu \eta^\mu \Big|_{ufuk} - eA_\mu \eta^\mu \Big|_\infty. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A_μ enjeksiyon enerjisi ϵ 'yi sıfır yapacak şekilde değişecektir. A_μ vektör potansiyeli basitçe, yüksüz durumdaki vektör potansiyeli ile Q yükünün eklenmesine karşılık gelen tedirgeme durumu için yazdığımız $\frac{-Q}{2m} \eta_\mu$ vektör potansiyelinin toplamı olarak yazılabilir:

$$A_\mu = \frac{1}{2} B_o \left(\psi_\mu + \frac{2J_H}{m} \eta_\mu \right) - \frac{Q}{2m} \eta_\mu. \quad (3.20)$$

Simetri ekseninde $\psi_\mu \eta^\mu = 0$, sonsuzda $\eta_\mu \eta^\mu \rightarrow -1$ ve simetri eksenindeki olay ufkunda $\eta_\mu \eta^\mu = 0$ ifadeleri kullanılarak (3.19) eşitliğinden enjeksiyon enerjisi ϵ ,

$$\epsilon = e \left(\frac{Q}{2m} - \frac{B_0 J_H}{m} \right) \quad (3.21)$$

şeklinde bulunur. Kara delik enjeksiyon enerjisini sıfır yapana kadar, yani yükü

$$Q_w = 2B_0 J_H \quad (3.22)$$

değerine ulaşınca kadar yüklenecektir. Bu durum kara deliğin son durumu, denge durumu yani en küçük enerjiye sahip olduğu durumdur. Denge durumu için simetri eksenini boyunca enjeksiyon enerjisi sıfır olmalıdır. Enjeksiyon enerjisi kara deliğin her yerinde sabit olduğundan (3.21) bağıntısı parçacıkların enjeksiyonu için genel bir bağıntıdır (Carter, 1973; Wald, 1974). Ayrıca bu sonuç elde edilirken kara deliğin Kerr kara deliği olmasından yararlanılmadığı için, (3.22) sonucu herhangi bir durağan, eksenel simetrik kara delik için geçerlidir. Böylelikle durağan, eksenel simetrik kara deliğin $Q = 2B_0 J_H$ yükü ile yüklendiğinde elektromanyetik enerjisinin en küçük değerini aldığı belirlenmiş olur.

Kerr kara deliğinin $J \leq m^2$ eşitliğini sağlamalıdır. Bu eşitlikten hareketle düzgün manyetik alandaki Kerr kara deliğinin yük-kütle oranı

$$\frac{Q}{m} \leq 2B_0 m = 1,7 \times 10^{-20} \left(\frac{m}{m_0} \right) B_0 \text{ (Gauss)} \quad (3.23)$$

şeklindedir. m ve B_0 güneş kütlesi birimlerine ve Gauss'a çevrilmiştir. Galaksi manyetik alanı $B_0 \approx 10^{-4} - 10^{-5}$ mertebesinde olduğu için yük-kütle oranı $\approx 10^{-24}$ mertebesinde olacak yani her zaman birden oldukça küçük olacaktır. Eğer kara delik manyetize plazma ile çevrilmişse B_0 ve dolayısıyla yük-kütle oranı daha büyük olabilir fakat astrofiziksel kara deliklerin kütleleri ve elektromanyetik alanları için yük-kütle oranı daima birden küçüktür (Wald, 1974).

4. DÜZGÜN MANYETİK ALANDA YÜKLÜ KERR KARA DELİĞİNİN ELEKTROMANYETİK ENERJİSİ

Astrofiziksel kara deliğin net bir elektrik yüküne sahip olup olamayacağı önemli bir sorudur. Manyetik alan içinde bulunmayan kara delik genellikle net bir elektrik yüküne sahip olamaz çünkü kara delik, etrafında serbestçe dolaşan parçacıklardan zıt yüklü olanları çekecek ve hemen kendini nötrleyecektir (Misner vd., 1973; Wald, 1984). Fakat kara delik bir manyetik alan içindeyse (Birçok astrofiziksel sistemin böyle olduğuna inanılmaktadır) durum farklıdır. Bir Kerr kara deliği, dönme eksenini boyunca düzgün bir manyetik alan içine yerleştirilirse net bir elektrik yüküne sahip olur (Wald, 1974). Wald bu sonucu simetri eksenini boyunca enjeksiyon enerjisinin sıfır olması koşulunu kullanarak elde etmiştir. Fakat düzgün manyetik alan içindeki Kerr kara deliğinin denge durumunun ne olduğu ve denge durumunda kara deliğin net yük kazanıp kazanmayacağı sorularının yanıtı belli değildir.

Toplam enerjinin ekstremlere edilmesi metodu, enjeksiyon enerjisini bulma metodundan daha iyidir. Çünkü daha genel bir yaklaşım olan bu metod enjeksiyonun yörüngesine ve yük artırma işlemine bağlı değildir.

Bu bölümde düzgün manyetik alandaki yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi hesaplanacaktır. Enerji (kütle) asimptotik olarak düz olan ve asimptotik zamansal Killing vektörlerine sahip, durağan sistem için iyi belirlenebilir (Wald, 1984). Bununla birlikte düzgün manyetik alan uzayda sonsuza uzandığında toplam elektromanyetik enerji ıraksar. Bu yüzden uygun bir yaklaşım yapılmalıdır. Bu yaklaşım, elektromanyetik alanı, yarıçapı kara delik ufkunun yarıçapından çok büyük olacak şekilde küresel bir yüzey gibi küçültmek olacaktır. Böylelikle içerisinde manyetik alanın düzgün olduğu, dışarısında manyetik alanın artan yarıçapla hızla azalan değerler aldığı bir küre elde edilir. Kerr kara deliğinin bu hayali kürenin merkezinde olduğu varsayılacaktır. Bu küre içindeki elektromanyetik enerji Komar kütle formülü (Komar, 1959; Bardeen ve Carter ve Hawking, 1973) yardımıyla hesaplanarak kara delik $Q = 2\zeta(s)B_0J_H$ yükünü kazandığında elektromanyetik enerjisinin en küçük

değerini aldığı gösterilecektir. Burada $\zeta, \frac{a}{m}$ 'nin fonksiyonu olan boyutsuz bir parametredir

ve $0 \leq \frac{a}{m} \leq 1$ için $0 \leq \zeta \leq \left[\frac{3}{2}(2 + \pi) \right]^{-1} \approx 0.13$ 'tür (Küçültülmüş kürenin yarıçapı kara delik

ufkunun yarıçapından çok büyük olduğunda ζ parametresi küçültülmüş kürenin yarıçapından

bağımsızdır). B_0 düzgün manyetik alanın büyüklüğü ve J_H kara deliğin açısal momentumudur.

4.1 Kerr Kara Deliğinin Elektromanyetik Alan Tansörü

Elektromanyetik alanı yeterince zayıf olan ($\frac{Q^2}{m^2} \ll 1$ ve $B_0^2 m^2 \ll 1$) düzgün bir manyetik alana yerleştirilmiş yüklü, dönen kara deliğin uzay-zamanı Kerr metriği ile tanımlanabilir. Kerr metriği durağan, eksenel simetrik kara deliğin dışarısındaki uzay-zamanı, boş uzay-zamanı tanımlar (Ricci tansörü $R_{\mu\nu} = 0$) ve Kerr uzay-zamanı durağan ve eksenel simetrik olduğundan $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu$ zamansal ve $\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^\mu$ eksenel Killing vektörlerine sahiptir. Bu yüzden Kerr kara deliğinin uzay-zamanına ait elektromanyetik alan tansörü $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ boşluktaki Maxwell denklemlerinin çözümüdür.

(1.5) eşitliği ile tanımlanan Boyer-Lindquist formundaki Kerr metriği, metrik bileşenlerinin bulunması için düzenlenirse

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right)dt^2 - \frac{2mar}{\Sigma}\sin^2\theta dtd\phi - \frac{2mar}{\Sigma}\sin^2\theta d\phi dt + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \frac{C\sin^2\theta}{\Sigma}d\phi^2 \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Σ ve Δ (1.6) eşitliklerinde tanımlandığı gibidir,

$$C = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.

(4.1) metriğinin kovaryant tansör bileşenleri şunlardır:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right),$$

$$g_{11} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{r^2 - 2mr + a^2},$$

$$g_{22} = r^2 + a^2 \cos^2\theta,$$

$$g_{33} = \frac{-\sin^2\theta[(r^2 - 2mr + a^2)a^2 \sin^2\theta - (r^2 + a^2)^2]}{r^2 + a^2 \cos^2\theta},$$

$$g_{03} = g_{30} = -\frac{2mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.3)$$

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = I \quad (4.4)$$

eşitliği yardımıyla metriğin kontravaryant bileşenleri

$$g^{00} = \frac{-4(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)((a^2 + r^2)^2 - a^2(a^2 + r(-2m + r)) \sin^2 \theta)}{(a^2 + r(-2m + r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^2},$$

$$g^{11} = \frac{(r^2 - 2mr + a^2)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)},$$

$$g^{22} = \frac{1}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)},$$

$$g^{33} = \frac{(a^2 + 2r(-2m + r) + a^2 \cos 2\theta) \csc^2 \theta}{(a^2 + r(-2m + r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)},$$

$$g^{03} = g^{30} = \frac{-4mar}{(a^2 + r(-2m + r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)} \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir.

(3.20) eşitliğinden elektromanyetik vektör potansiyelin kontravaryant formu

$$A^\mu = \frac{B_0}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\mu + 2a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \right] - \frac{Q}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada B_0 dış manyetik alanın büyüklüğü ve Q kara deliğin elektrik yüküdür. Maxwell elektromanyetik alan tansörü $F_{\mu\nu}$ aşağıdaki gibi verilir (Ek 2):

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (4.7)$$

Kovaryant türevin tanımı olan $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ eşitliği ve Christoffel sembollerinin simetri özelliği kullanılarak ($\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$) (4.7) ifadesi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

şeklinde yazılabilir.

(4.6) eşitliğinden elektromanyetik potansiyelin sıfır olmayan bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$A^0 = B_0 a - \frac{Q}{2m},$$

$$A^3 = \frac{B_0}{2}. \quad (4.8)$$

Elektromanyetik vektör potansiyelin sıfır olmayan kovaryant bileşenleri

$$A_v = g_{v\mu} A^\mu \quad (4.9)$$

bağıntısı yardımıyla aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$A_0 = g_{0\mu} A^\mu = g_{00} A^0 + g_{03} A^3,$$

$$A_3 = g_{3\mu} A^\mu = g_{30} A^0 + g_{33} A^3. \quad (4.10)$$

Elektromanyetik vektör potansiyelin sıfır olmayan kovaryant bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki şekildedir:

$$A_0 = -\frac{mar \sin^2 \theta B_0}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) \left(-\frac{Q}{2m} + aB_0\right),$$

$$A_3 = \frac{\sin^2 \theta (4aQr + (a^4 + 2r^4 + 3a^2 r(-2m + r) + a^2(a^2 + r(-2m + r)) \cos 2\theta) B_0)}{4(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}. \quad (4.11)$$

Alan tansörünün sıfır olmayan bileşenleri:

$$F_{10} = -F_{01} = \partial_1 A_0,$$

$$F_{20} = -F_{02} = \partial_2 A_0,$$

$$F_{13} = -F_{31} = \partial_1 A_3,$$

$$F_{23} = -F_{32} = \partial_2 A_3 \quad (4.12)$$

şeklindedir. Bu ifadelere (4.11) bağıntıları yerleştirilirse bu eşitliklerin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F_{10} = -F_{01} &= \frac{(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)(-2Q + am(3 + \cos 2\theta)B_0)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^2}, \\
F_{20} = -F_{02} &= -\frac{2ar \cos \theta \sin \theta (aQ + m(-a^2 + r^2)B_0)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}, \\
F_{13} = -F_{31} &= -\frac{1}{8(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} [\sin^2 \theta (8aQ(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) + (a^4(7m - 3r) - 8r^5 \\
&\quad - 4a^2 r^2 (3m + 2r) 4a^2 (a^2 (2m - r) - r^2 (m + 2r)) \cos 2\theta + a^4 (m - r) \cos 4\theta) B_0)], \\
F_{23} = -F_{32} &= (a^2 + r(-2m + r)) \cos \theta \sin \theta B_0 + \frac{4r(a^2 + r^2) \sin 2\theta (aQ + m(-a^2 + r^2)B_0)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^2}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Elektromanyetik alan tansörünün sıfır olmayan kontravaryant bileşenleri,

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu a} g^{\nu b} F_{ab} \quad (4.14)$$

bağıntısı yardımıyla

$$\begin{aligned}
F^{10} = -F^{01} &= g^{1a} g^{0b} F_{ab} = g^{11} g^{00} F_{10} + g^{11} g^{03} F_{13}, \\
F^{20} = -F^{02} &= g^{2a} g^{0b} F_{ab} = g^{22} g^{00} F_{20} + g^{22} g^{03} F_{23}, \\
F^{13} = -F^{31} &= g^{1a} g^{3b} F_{ab} = g^{11} g^{33} F_{13} + g^{11} g^{30} F_{10}, \\
F^{23} = -F^{32} &= g^{2a} g^{3b} F_{ab} = g^{22} g^{33} F_{23} + g^{22} g^{30} F_{20}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilir. (4.5) ve (4.13) ifadeleri kullanılarak alan tansörünün kontravaryant bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
F^{10} = -F^{01} &= \frac{1}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^3} [4Q(a^2 + r^2)(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\theta) - am(a^2 - r^2) \\
&\quad (7a^2 + 4r^2 + 4(2a^2 + 3r^2) \cos 2\theta + a^2 \cos 4\theta) B_0], \\
F^{20} = -F^{02} &= \frac{4a^2 r \sin 2\theta (2Q - am(3 + \cos 2\theta) B_0)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^3}, \\
F^{13} = -F^{31} &= \frac{1}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^3} [4aQ(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\theta) - (a^4(7m - 3r) + 8(2m - r)r^4
\end{aligned}$$

$$-4a^2r^2(m+2r)+4a^2(a^2(2m-r)(m-2r)r^2)\cos 2\theta+a^4(m-r)\cos 4\theta)B_0],$$

$$F^{23} = -F^{32} = \frac{\cot \theta}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos 2\theta)^3} [16aQr (3a^4 - 24a^2mr + 8a^2r^2 + 8r^4 + 4a^2 \cos 2\theta (a^2 + 2r(-m+r)) + a^4 \cos 4\theta)B_0] \quad (4.16)$$

Böylelikle Kerr metriğine ait elektromanyetik alan tansörü bileşenleri elde edilmiştir. Bulunan ifadeler yardımıyla Kerr metriğinin $F^{\mu\nu}$ elektromanyetik alan tansörünün boşluk Maxwell denklemlerinin çözümü olduğu görülür (Ek 4).

4.2 Enerji-Momentum Tansörü

Burada elektromanyetik alanın enerji-momentum tansörünün bileşenleri ve izi hesaplanacaktır. Enerji-momentum tansörü

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{cf} F_{ac} F_{bf} - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de} \right) \quad (4.17)$$

şeklinde verilir. Enerji-momentum tansörünün sıfır olmayan kovaryant bileşenleri

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(g^{11} F_{10} F_{10} + g^{22} F_{20} F_{20} - \frac{1}{2} g_{00} (F_{10} F^{10} + F_{20} F^{20} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) \right), \\ T_{03} &= T_{30} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{11} F_{10} F_{13} + g^{22} F_{20} F_{23} - \frac{1}{2} g_{03} (F_{10} F^{10} + F_{20} F^{20} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) \right), \\ T_{11} &= \frac{1}{4\pi} \left(g^{00} F_{10} F_{10} + g^{33} F_{13} F_{13} + 2g^{03} F_{10} F_{13} - \frac{1}{2} g_{11} (F_{10} F^{10} + F_{20} F^{20} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) \right), \\ T_{22} &= \frac{1}{4\pi} \left(g^{00} F_{20} F_{20} + g^{33} F_{23} F_{23} + 2g^{03} F_{20} F_{23} - \frac{1}{2} g_{22} (F_{10} F^{10} + F_{20} F^{20} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) \right), \\ T_{12} &= T_{21} = \frac{1}{4\pi} (g^{00} F_{10} F_{20} + g^{33} F_{13} F_{23} + g^{03} F_{10} F_{23} + g^{03} F_{13} F_{20}), \\ T_{33} &= \frac{1}{4\pi} \left(g^{11} F_{13} F_{13} + g^{22} F_{23} F_{23} - \frac{1}{2} g_{33} (F_{10} F^{10} + F_{20} F^{20} + F_{13} F^{13} + F_{23} F^{23}) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilir. Enerji-momentum tansörünün sıfır olmayan kontravaryant bileşenleri

$$T^{ab} = g^{a\mu} g^{b\nu} T_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$T^{00} = g^{0\mu} g^{0\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} g^{00} T_{00} + g^{03} g^{03} T_{33} + 2g^{00} g^{03} T_{03},$$

$$T^{03} = g^{0\mu} g^{3\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} g^{03} T_{00} + g^{00} g^{33} T_{03} + g^{03} g^{03} T_{03} + g^{03} g^{33} T_{33},$$

$$T^{11} = g^{1\mu} g^{1\nu} T_{\mu\nu} = g^{11} g^{11} T_{11},$$

$$T^{22} = g^{2\mu} g^{2\nu} T_{\mu\nu} = g^{22} g^{22} T_{22},$$

$$T^{33} = g^{3\mu} g^{3\nu} T_{\mu\nu} = g^{03} g^{03} T_{00} + g^{33} g^{33} T_{33} + 2g^{03} g^{33} T_{03}. \quad (4.20)$$

Enerji-gerilim tansörünün izi T

$$T = g_{ab} T^{ab} \quad (4.21)$$

bağıntısından,

$$\begin{aligned} T = g_{00} (g^{00} g^{00} T_{00} + g^{03} g^{03} T_{33} + 2g^{00} g^{03} T_{03}) &+ 2g_{03} (g^{00} g^{03} T_{00} + g^{00} g^{33} T_{03} + g^{03} g^{03} T_{03} + g^{03} g^{33} T_{33}) \\ &+ g_{11} g^{11} g^{11} T_{11} + g_{22} g^{22} g^{22} T_{22} + g_{33} (g^{03} g^{03} T_{00} + g^{33} g^{33} T_{33} + 2g^{03} g^{33} T_{03}), \end{aligned}$$

$$T = 0 \quad (4.22)$$

olarak bulunur (Ek 5).

4.3 Kerr Kara Deliğinin Elektromanyetik Enerjisi

Kerr kara deliğinin toplam kütesini (enerjisini) Komar kütle formülü ile ifade edebiliriz:

$$M = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b dV + \frac{1}{4\pi} \kappa A + 2\Omega_H J_H. \quad (4.23)$$

Burada $\alpha \equiv \left(\frac{\Delta \Sigma}{C} \right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere n^a Σ hiperyüzeyinin birim gelecek-yer normalidir (t=sabit)

ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$n^a = \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{2amr}{C} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \right]. \quad (4.24)$$

(4.23) eşitliğindeki dV , Σ hiperyüzeyi üzerindeki hacim elemanı, $A = 4\pi(r_H^2 + a^2)$ kara delik ufkunun alanı, $r_H = m + \sqrt{m^2 - a^2}$ kara delik ufkunun yarıçapı, $\kappa = \frac{(r_H - m)}{2mr_H}$ kara deliğin yüzey kütle çekimi ve $\Omega_H = \frac{a}{2mr_H}$ kara deliğin açısal hızıdır.

Küçültülmüş küre içindeki elektromanyetik alanın toplam enerjisi

$$E_{EM} = \int_{r_H}^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \varepsilon \sqrt{h},$$

$$\varepsilon \equiv 2 \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) n^a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\sqrt{h}$, Σ üzerindeki hacmi ölçer ve

$$\sqrt{h} = \left(\frac{\Sigma C}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \quad (4.26)$$

olarak tanımlanır. Daha önce sözü edildiği gibi küçültülmüş küre yaklaşımı yapılması sayesinde elektromanyetik enerjinin ıraksaması engellenmiştir (4.3) ve (4.18) eşitlikleri ε ifadesinde yerlerine yazılarak

$$\varepsilon \equiv 2 \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) \frac{C^{\frac{1}{2}}}{(\Delta \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{2amr}{C} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b \quad (4.27)$$

ifadesi elde edilir. Buradan ε ,

$$\varepsilon \equiv \frac{2}{(\Delta \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \left(C^{\frac{1}{2}} T_{00} + \frac{(2amr)}{C^{\frac{1}{2}}} T_{30} \right) \quad (4.28)$$

olarak bulunur. Bu ifade

$$\varepsilon \equiv \frac{\alpha}{4\pi \Sigma^3} (f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q) \quad (4.29)$$

şeklinde yazılarak B_0^2, Q^2, B_0Q büyüklüklerinin katsayıları olan f_0, f_1, f_2 katsayıları elde edilebilir. (4.28) ve (4.29) ifadelerinden

$$(f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q) \equiv \frac{8\pi \Sigma^2}{\Delta} (CT_{00} + 2amrT_{30}) \quad (4.31)$$

özdeşliği elde edilir.

Buradan $(f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q)$ ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} (f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q) \equiv & -\frac{1}{32} \{ 16Q^2 (-3a^2 - 2r^2 + a^2 \cos 2\theta) + 8aQ(a^2 [17m - 9r] + 4(m - r)r^2 \\ & - 4r(2a^2 + 3r(r - m)) \cos 2\theta + a^2(r - m) \cos 4\theta) B_0 + \\ & [-2(5a^6 + 16r^5(r - m) - 2a^2 r^2(m^2 + 18mr - 12r^2) + 3a^4 \\ & (17m^2 - 20mr + 6r^2)) - (15a^6 + 16a^2(7m - 3r)(m - r)r^2 \\ & 32mr^5 + a^4(33m^2 - 128mr + 48r^2)) \cos 2\theta + 2a^2(-3a^4 \\ & + 2mr^5(-5m + 6r) + a^2(3m^2 + 4mr - 6r^2)) \cos 4\theta \\ & + a^4(m^2 - a^2) \cos 6\theta] B_0^2 \} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Burada $\cos 2\theta, \cos 4\theta, \cos 6\theta$ trigonometrik büyüklükleri yerine

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1,$$

$$\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1,$$

$$\cos 6\theta = 32\cos^6 \theta - 48\cos^4 \theta + 18\cos^2 \theta - 1. \quad (4.33)$$

ifadeleri yerleştirilip ifade düzenlenirse f_0, f_1, f_2 katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} f_0 = & r^5(r - 2m \sin^2 \theta) + a^2 r^2 [3r^2 \cos^2 \theta + 2mr(1 + \cos^2 \theta)(1 - 3\cos^2 \theta) - m^2(1 + \cos^2 \theta)(3 - 5\cos^2 \theta)] \\ & a^4 [3r^2 \cos^4 \theta - 2mr \cos^2 \theta(3 + \cos^2 \theta) + m^2(1 + \cos^2 \theta)^2(2 - \cos^2 \theta)] + a^6 \cos^6 \theta, \end{aligned}$$

$$f_1 = r^2 + a^2(2 - \cos^2 \theta),$$

$$f_2 = -2a[r^2(r - m)(1 - 3\cos^2 \theta) - a^2[r \cos^2 \theta(3 - \cos^2 \theta) + m(1 + \cos^2 \theta)(2 - \cos^2 \theta)]] . \quad (4.34)$$

Böylelikle Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi

$$E_{EM} = \int_{r_H}^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\alpha}{4\pi\Sigma^3} (f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q) \left(\frac{\Sigma C}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \quad (4.35)$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki ifade düzenlenirse

$$E_{EM} = \int_{r_H}^R \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{2\Sigma^2} (f_0 B_0^2 + f_1 Q^2 + f_2 B_0 Q) d\theta dr \quad (4.36)$$

şeklinde olacaktır. Bu integral alındığında

$$\begin{aligned} E_{EM} = & \left[\frac{B_0^2}{6a^3 r^2} \{ 3ma(5m-4r)r^5 + a^5(-3m^2r+2r^3) + a^3(-8m^2r^3+2r^5) + 3m[(-ma^6-4a^4r^3+ma^2r^4 \right. \\ & + r^6(-5m+4r)) \arctan\left(\frac{a}{r}\right) - 5ma^4r^2 \arctan\left(\frac{r}{a}\right) \} + \left\{ \frac{1}{2r} + \frac{a}{2r^2} \arctan\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{1}{2a} \arctan\left(\frac{r}{a}\right) \right\} Q^2 \\ & \left. \left\{ \frac{2}{a^2 r^3} [ar(ma^2+3r^2(r-m)) + (ma^4-a^2r^3+3(m-r)r^4) \arctan\left(\frac{a}{r}\right)] \right\} B_0 Q \right]_{r_H}^R \end{aligned} \quad (4.37)$$

ifadesi bulunur. $R \gg r_H$ limitinde Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi;

$$E_{EM} = E_0 + \left(\frac{Q^2}{m} \right) F_1 + \left(\frac{B_0 J_H Q}{m} \right) F_2 \quad (4.38)$$

olarak elde eldir. Burada E_0, F_1, F_2 katsayıları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{3} B_0^2 R^3 + O(R^2), \\ F_1 &= F_1(s) = \frac{1}{2s^3} (1 - \sqrt{1-s^2}) \left[s + 2 \arctan\left(\frac{s}{1 + \sqrt{1-s^2}} \right) \right] + O\left(\frac{1}{R} \right), \\ F_2 &= F_2(s) = \frac{2}{3s^3} \left[s(3\sqrt{1-s^2} - s^2) - 6(1-s^2) \arctan\left(\frac{s}{1 + \sqrt{1-s^2}} \right) \right] + O\left(\frac{1}{R^2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Burada $s = \left(\frac{a}{m} \right)$ kara deliğin spin parametresidir, $0 \leq s \leq 1$ olduğundan her zaman $F_1 > 0$ ve

$F_2 \leq 0$ olacaktır. Toplam elektromanyetik alan B_0 ve Q yükü tarafından oluşturulan elektromanyetik alanların lineer birleşimi olduğundan toplam elektromanyetik enerji üç bileşenden oluşmaktadır:

- E_0 ile gösterilen bileşen, dış manyetik alanın karesiyle (B_0^2) orantılı olan “yalın” elektromanyetik enerjiyi ifade eder.
- Q^2 ile orantılı olan bileşen, Q yükü tarafından oluşturulan elektromanyetik alanın enerjisini ifade eder (Cohen ve Felice, 1984 makalesinde bulunan Kerr-Newman kara deliğinin elektromanyetik enerjisine benzer şekilde).
- $B_0 Q$ ile orantılı olan bileşen, Q yükünün etrafındaki elektromanyetik alanın dış manyetik alan B_0 ile etkileşmesinden kaynaklanan elektromanyetik enerjiyi ifade eder.

F_1 ve F_2 katsayıları küçültülmüş küre yaklaşımından bağımsızdırlar, çünkü $R \rightarrow \infty$ alındığında yakınsaktırlar. Ancak yüksüz duruma karşılık gelen “yalın” enerji E_0 , $R \rightarrow \infty$ için ıraksaktır. Bu yüzden küçültülmüş küre yaklaşımından bağımsız olarak iyi belirlenebilir olan elektromanyetik enerji, Kerr kara deliğinin düzgün manyetik alandaki yüklü durum enerjisi ile yüksüz durum enerjisi arasındaki fark olan $\Delta E = E_{EM} - E_0$ enerjisidir.

Yüklü Kerr kara deliğinin düzgün manyetik alandaki elektromanyetik enerjisi E_{EM} ifadesinin Q 'ya göre türevinin sıfır olduğu nokta elektromanyetik enerjinin değerini en küçük yapan yükün büyüklüğünü verir ($0 \leq s \leq 1$ aralığında $F_1(s) > 0$ olduğundan E_{EM} bir minimuma sahiptir).

$$\frac{\partial E_{EM}}{\partial Q} = 0 \quad (4.41)$$

bağıntısından

$$Q = -\frac{F_2}{4F_1} B_0 J_H \quad (4.42)$$

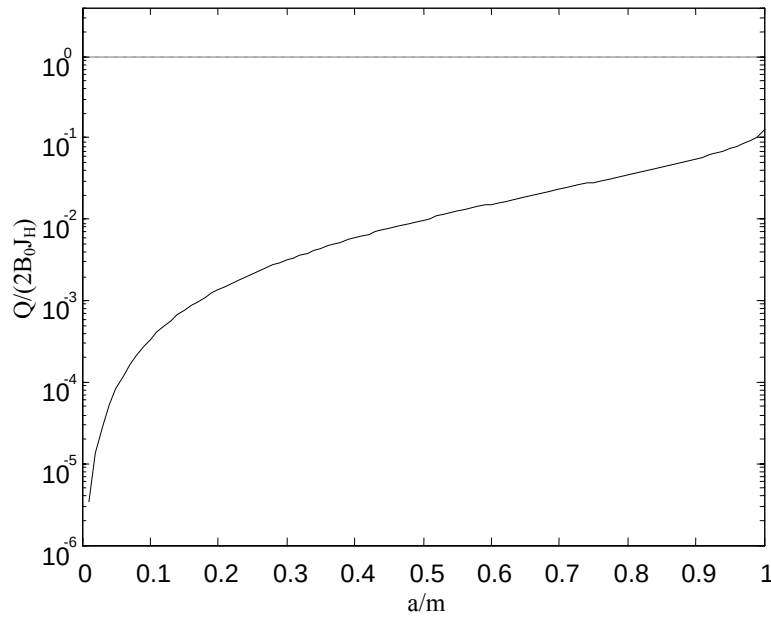
elde edilir. Eğer $\zeta(s)$;

$$\zeta(s) = -\frac{F_2}{4F_1} = \frac{s^3 - 3s\sqrt{1-s^2} + 6(1-s^2)\arctan\left(\frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}}\right)}{3(1-\sqrt{1-s^2})\left[s^2 + 2\arctan\left(\frac{s}{1+\sqrt{1-s^2}}\right)\right]} \quad (4.43)$$

olarak tanımlanırsa Q yükünü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$Q = 2\zeta(s)B_0J_H. \quad (4.44)$$

Spin parametresi s , $[0,1]$ aralığında değerler aldığından ζ , $[0,0.13]$ aralığında değerlere sahip olur. ζ katsayısının spin parametresi s 'ye bağlı değişimini gösteren grafik Şekil 4.1'de verilmiştir. s 'nin azalmasıyla ζ azalır. Örneğin; $\zeta(0) = 0$, $\zeta(0,1) \approx 3.4 \times 10^{-4}$, $\zeta(0,5) \approx 9.9 \times 10^{-3}$, $\zeta(0.99) \approx 0.10$ ve $\zeta(1) \approx 0.13$. Böylelikle düzgün manyetik alan içine yerleştirilmiş Kerr kara deliği minimum elektromanyetik enerjiye ulaşmak için (4.44) eşitliğindeki yüküne sahip olacaktır.



Şekil 4.1 $\zeta\left(\frac{Q}{2B_0J_H}\right)$ katsayısının $s\left(\frac{a}{m}\right)$ spin parametresine bağlı değişimini ifade eder.

Düzgün manyetik alan içinde bulunan Kerr kara deliği $Q = 2\zeta(s)B_0J_H$ yükünü kazandığında elektromanyetik enerjisi en küçük değeri alır. Boyutsuz ζ parametresi, $s = \frac{a}{m}$ 'nin bir fonksiyonudur. Wald'un referansındaki yük ($\zeta = 1$) kesik çizgiyle gösterilmiştir. Bu yük elektromanyetik alanın en küçük enerjisine denk gelmez.

Yüklü durum ile yüksüz durum arasındaki enerji farkı olan

$$\Delta E = \left(\frac{Q^2}{m}\right)F_1 + \left(\frac{B_0J_HQ}{m}\right)F_2 \quad (4.45)$$

ifadesine, bulduğumuz Q değerini yerleştirirsek elektromanyetik enerjinin en küçük değeri

$$\Delta E_{\min} = -\left(\frac{F_2^2}{4F_1}\right) \frac{B_0^2 J_H^2}{m} \quad (4.46)$$

şeklinde bulunur. Kara deliğin spin parametresi $s = \frac{a}{m} = 0.99$ alınırsa $Q \approx 0.20 B_0 J_H$ ve

$$\Delta E_{\min} \approx -0.045 \frac{B_0^2 J_H^2}{m} \text{ olarak elde edilir.}$$

Wald'un sonucu $Q_W = 2B_0 J_H$ kullanılırsa bu enerji farkı aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\Delta E_{\text{wald}} = 2(2F_1 + F_2) \frac{B_0^2 J_H^2}{m} \quad (4.47)$$

bu fark $0 \leq s \leq 1$ için her zaman pozitif değer alacaktır. Dolayısıyla açıkça görülmektedir ki Wald durumu en küçük enerjili duruma karşılık gelmez, hatta yüksüz durum enerjisinden daha büyük değerdedir. Karşılaştırma için $s = 0.99$ alındığında Wald durumunda bulduğumuz enerji değerinin burada bulduğumuz enerji değerinden daha büyük olduğu da görülmektedir

$$(\Delta E_{\text{wald}} = 3.4 \frac{B_0^2 J_H^2}{m}).$$

5. SONUÇLAR

İlk olarak uzay-zamanın Killing vektörlerinin Maxwell alanının vektör potansiyelleri olmasından hareketle B_0 düzgün elektromanyetik alanındaki durağan, eksenel simetrik kara deliğin elektromanyetik alan tansörü hesaplanmıştır. Durağan uzay-zamanda, düzgün manyetik alana sahip parçacığın enerjisinin vektör potansiyele bağlı ifadesinden yararlanılarak enjeksiyon enerjisi ifade edilmiştir. Simetri eksenini boyunca enjeksiyon enerjisinin sıfırlanmasıyla kara deliğin kararlı durum enerjisine yani en küçük enerjili durumuna karşılık gelen yük miktarı $Q = 2B_0J_H$ olarak bulunmuştur.

İkinci olarak düzgün manyetik alandaki yüklü Kerr kara deliğinin elektromanyetik enerjisi Komar kütle formülü yardımıyla elde edilmiştir. Bulunan enerjinin minimize edilmesiyle enerji değerini en küçük yapan yük değeri $Q = 2\zeta(s)B_0J_H$ olarak belirlenmiştir. Bu yük değerine sahip kara deliğin elektromanyetik enerjisinin Wald durumu enerjisinden daha düşük olduğu gösterilmiştir. Yüksüz durum enerjisinin bile Wald durumu enerjisinden küçük olduğu gösterilerek Wald'un bulduğu sonucun en küçük enerjili duruma karşılık gelmediği belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

Bardeen J. M., Carter B., Hawking S. W., (1973), “The Four Laws of Black Hole Mechanics”, Commun. Math. Phys., 31:161.

Carroll S.M., (2004), Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity, Princeton University Press, New Jersey.

Carter B., (1973), In Black Holes, Gordon and Breach, New York.

Cohen J. M. ve Felice F., (1984), “The Total Effective Mass of the Kerr-Newman Metric”, Journal of Mathematical Physics”, 25:992.

Dirac P. A. M., (1996), General Theory of Relativity, Princeton University Press, New Jersey.

Einstein A., (1976), İzafiyet Teorisi, Özgün Yayınları, İstanbul, (Çeviren, Fındıklı N.)

Frolov V. P. ve Novikov I. D., (1998), Black Hole Physics, Basic Concepts and New Developments, Kluwer, Dordrecht.

Hawking S. W., (1972), “Black Holes in General Relativity”, Commun. Math. Phys., 25:152.

d’Inverno R., (2005), Introducing Einstein’s Relativity, Clarendon Press, Oxford.

Ipsen J., (1971), “Electromagnetic Test Fields Around a Kerr-Metric Black Hole”, Phys. Rev. Lett., 27: 529.

Komar A., (1959), “Covariant Conservation Laws in General Relativity”, Phys. Rev., 113:934.

Misner C. W. ve Thorne K. S. ve Wheeler J. A., (1973), Gravitation, Freeman, San Francisco.

O’Neill B., (1995), The Geometry of Kerr Black Holes, AK Peters.

Özemre A.Y., (1982), Gravitasyonun Rölativist Teorileri, İ. Ü. Yayınları, İstanbul.

Ruffini R., Treves A., (1973), Astrphys. Lett., 13:109.

Soyuçok Z., Soyuçok A., (2004), Tansör Analizi ve Uygulamaları, Y.T.Ü. Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Taylor E. F., Wheeler J. A., (2000), Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity, Addison Wesley Longman, U.S.A.

Wald R. M., (1984), General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago.

Wald R. M., (1974), “Black Hole in a Uniform Magnetic Field”, Phys.Rev. D, 10:1680.

İnternet Kaynakları

[1]<http://en.wikipedia.org>

EKLER

- Ek 1 Killing Vektörleri
- Ek 2 Boşluk Maxwell Denklemleri
- Ek 3 Kerr Metriğinin Christoffel Sembolleri ve Kerr Metriğinin Determinantı
- Ek 4 Boşlukta Maxwell Alan Denklemlerinin Çözümü Kerr Metriğinin Alan Tansörü
- Ek 5 Enerji-Momentum Tansörünün İzi

Ek 1 Killing Vektörleri

Uzay-zamanın fiziksel durumunu daha basit bir şekilde tanımlamak için uzay-zamanın belirli simetrilerde olduğu varsayılır. EAD lineer olmadığı için simetri yaklaşıklıkları çözümlerin bulunmasında önemli rol oynar. Eğer belirli bir dönüşümde tansör alanı aynı kalıyorsa bu tansör alanı o dönüşüm için simetriktr. Metriğin simetrilerine “izometri” denir. Basitçe, metrik katsayılarının bağlı olmadığı koordinatların dönüşümü altında metrik aynı kalır. x^σ koordinatı metrik katsayılarının bağlı olmadığı bir koordinat olmak üzere:

$$\xi^\mu(x^\sigma) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \right)^\mu \quad (1)$$

vektörünün izometriyi oluşturduğu söylenir. Uzay-zamanın geometrisi $\xi^\mu(x^\sigma)$ doğrultusundaki sonsuz küçük harekette değişmez. Bu vektörlere Killing vektörleri denir. Killing vektörleri aşağıdaki denklemi sağlar;

$$L_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu = 0 \quad (2)$$

Bu denlemler Killing denklemleri olarak adlandırılır. L_ξ Lie türevidir.

Ek 2 Boşluktaki Maxwell Denklemleri

Minkowski uzay-zamanında, Heavyside-Lorentz biriminde ($c=1$) boşluktaki Maxwell denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

(1) denkleminin zamana göre türevi, (2) denkleminin diverjansı alınır aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (5)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}. \quad (6)$$

Buradan ρ ve $\vec{j}$ 'nin süreklilik denklemini sağladığı görülür.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Bu denklem (4) denklemini ile birlikte akışkan dinamiğinin süreklilik denklemlerini oluştururlar.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Bu eşitlikler tansörel formda ifade edildiğinde elektromanyetik alan tansörü veya Maxwell tansörü olarak adlandırılan antisimetrik $F^{\mu\nu}$ tansörü elde edilir:

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Akım yoğunluğu veya kaynak 4-vektör

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (11)$$

olmak üzere Maxwell denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (12)$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = \nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = 0. \quad (13)$$

Maxwell alan tansörü potansiyeller cinsinden ifade edilebilir:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (15)$$

4-potansiyel

$$\phi^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad (16)$$

şeklinde tanımlanmak üzere Maxwell alan tensörü potansiyeller cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\nu \phi_\mu - \nabla_\mu \phi_\nu. \quad (17)$$

Ek 3 Kerr Metriğinin Christoffel Sembolleri ve Kerr Metriğinin Determinantı

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc})$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} [g^{00} (\partial_1 g_{00}) + g^{03} (\partial_1 g_{30})]$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2} [g^{00} (\partial_2 g_{00}) + g^{03} (\partial_2 g_{30})]$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2} [g^{00} (\partial_1 g_{03}) + g^{03} (\partial_1 g_{33})]$$

$$\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2} [g^{00} (\partial_2 g_{03}) + g^{03} (\partial_2 g_{33})]$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{00})$$

$$\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{03})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_2 g_{11})$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{22})$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (-\partial_1 g_{33})$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{00})$$

$$\Gamma_{03}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{03})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{11})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{22})$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (-\partial_2 g_{33})$$

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = g^{30} (\partial_1 g_{00}) + g^{33} (\partial_1 g_{30})$$

$$\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = g^{30} (\partial_2 g_{00}) + g^{33} (\partial_2 g_{30})$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = g^{30} (\partial_1 g_{03}) + g^{33} (\partial_1 g_{33})$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = g^{30} (\partial_2 g_{03}) + g^{33} (\partial_2 g_{33}) \quad (1)$$

Metrik katsayıların oluşturduğu determinantının negatifinin karekökü olan ve sayısal ağırlık yoğunluğu olarak adlandırılan ifade aşağıdaki şekildedir:

$$\sqrt{-g} = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta. \quad (2)$$

Ek 4 Boşlukta Maxwell Alan Denklemlerinin Çözümü Kerr Metriğinin Alan Tansörü

Kerr metriğinin elektromanyetik alan tansörünün kontravaryant bileşenlerinin açık ifadeleri aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
 {}^{10}\mathbf{F} &= \\
 & \quad (-4Q(a^2 + r^2)(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]) + \\
 & \quad a m (a^2 - r^2)(7a^2 + 4r^2 + 4(2a^2 + 3r^2)\cos[2\theta] + a^2 \cos[4\theta]) B_0) / (a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3 \\
 {}^{20}\mathbf{F} &= \frac{4a^2 r \sin[2\theta](-2Q + a m(3 + \cos[2\theta]) B_0)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3} \\
 {}^{13}\mathbf{F} &= \frac{1}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3} \\
 & \quad (-4aQ(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]) + \\
 & \quad (7a^4 m - 3a^4 r - 4a^2 m r^2 - 8a^2 r^3 + 16m r^4 - 8r^5 + 4a^2(a^2(2m - r) + (m - 2r)r^2)\cos[2\theta] + \\
 & \quad a^4(m - r)\cos[4\theta]) B_0) \\
 {}^{23}\mathbf{F} &= \\
 & \quad -(\cot[\theta] \\
 & \quad (16aQr + (3a^4 - 24a^2 m r + 8a^2 r^2 + 8r^4 + 4a^2(a^2 + 2r(-m + r))\cos[2\theta] + a^4 \cos[4\theta]) B_0)) / \\
 & \quad (a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3
 \end{aligned}$$

Bu hesapta kullanılacak Christoffel sembollerinin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 {}^0\Gamma_{01} &= -\frac{2m(a^2 + r^2)(a^2 - 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])}{(a^2 + r(-2m + r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^2} \\
 {}^0\Gamma_{02} &= -\frac{4a^2 m r \sin[2\theta]}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^2} \\
 {}^1\Gamma_{11} &= \frac{r(a^2 - m r) + a^2(m - r)\cos[\theta]^2}{(a^2 + r(-2m + r))(r^2 + a^2 \cos[\theta]^2)} \\
 {}^1\Gamma_{12} &= -\frac{a^2 \cos[\theta] \sin[\theta]}{r^2 + a^2 \cos[\theta]^2} \\
 {}^2\Gamma_{12} &= \frac{r}{r^2 + a^2 \cos[\theta]^2} \\
 {}^2\Gamma_{22} &= -\frac{a^2 \cos[\theta] \sin[\theta]}{r^2 + a^2 \cos[\theta]^2} \\
 {}^3\Gamma_{13} &= \\
 & \quad (a^4 m + 3a^4 r - 12a^2 m r^2 + 8a^2 r^3 - 16m r^4 + 8r^5 + 4a^2 r(a^2 + r(-m + 2r))\cos[2\theta] - \\
 & \quad a^4(m - r)\cos[4\theta]) / (2(a^2 + r(-2m + r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^2) \\
 {}^3\Gamma_{23} &= ((3a^4 + 8a^2 m r + 8a^2 r^2 + 8r^4 + 4a^2(a^2 + 2r(-m + r))\cos[2\theta] + a^4 \cos[4\theta]) \cot[\theta]) / \\
 & \quad (2(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^2)
 \end{aligned}$$

Kerr metriğinin elektromanyetik alan tansörü bileşenleri $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ boşluk Maxwell denklemlerini sağlamalıdır.

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \nabla_0 F^{0\nu} + \nabla_1 F^{1\nu} + \nabla_2 F^{2\nu} + \nabla_3 F^{3\nu}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = & \nabla_0 F^{00} + \nabla_0 F^{01} + \nabla_0 F^{02} + \nabla_0 F^{03} + \nabla_1 F^{10} + \nabla_1 F^{11} + \nabla_1 F^{12} + \nabla_1 F^{13} \\ & + \nabla_2 F^{20} + \nabla_2 F^{21} + \nabla_2 F^{22} + \nabla_2 F^{23} + \nabla_3 F^{30} + \nabla_3 F^{31} + \nabla_3 F^{32} + \nabla_3 F^{33} \end{aligned} \quad (1)$$

$F^{\mu\nu}$ tansörünün kovaryant türevi:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + F^{\sigma\nu} \Gamma_{\sigma\mu}^\mu + F^{\mu\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^\nu \quad (2)$$

Böylelikle $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$ ifadesi:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = & F^{\sigma 3} \Gamma_{\sigma 0}^0 + F^{0\sigma} \Gamma_{\sigma 0}^3 + \partial_1 F^{10} + F^{\sigma 0} \Gamma_{\sigma 1}^1 + F^{1\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^0 + \partial_1 F^{13} + F^{\sigma 3} \Gamma_{\sigma 1}^1 + F^{1\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^3 + \partial_2 F^{20} \\ & + F^{\sigma 0} \Gamma_{\sigma 2}^2 + F^{2\sigma} \Gamma_{\sigma 2}^0 + \partial_2 F^{23} + F^{\sigma 3} \Gamma_{\sigma 2}^2 + F^{2\sigma} \Gamma_{\sigma 2}^3 + F^{\sigma 0} \Gamma_{\sigma 3}^3 + F^{3\sigma} \Gamma_{\sigma 3}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = & F^{13} \Gamma_{10}^0 + F^{23} \Gamma_{20}^0 + F^{01} \Gamma_{10}^3 + F^{02} \Gamma_{20}^3 + \partial_1 F^{10} + F^{10} \Gamma_{11}^1 + F^{20} \Gamma_{21}^1 + F^{10} \Gamma_{01}^0 + F^{13} \Gamma_{31}^0 \\ & + F^{\sigma 0} \Gamma_{\sigma 2}^2 + F^{2\sigma} \Gamma_{\sigma 2}^0 + \partial_2 F^{23} + F^{\sigma 3} \Gamma_{\sigma 2}^2 + F^{2\sigma} \Gamma_{\sigma 2}^3 + F^{\sigma 0} \Gamma_{\sigma 3}^3 + F^{3\sigma} \Gamma_{\sigma 3}^0 \\ & + F^{13} \Gamma_{11}^1 + F^{23} \Gamma_{21}^1 + F^{10} \Gamma_{01}^3 + F^{13} \Gamma_{31}^3 + \partial_2 F^{20} + F^{10} \Gamma_{12}^2 + F^{20} \Gamma_{22}^2 + F^{20} \Gamma_{02}^0 + F^{23} \Gamma_{32}^0 \\ & + \partial_2 F^{23} + F^{13} \Gamma_{12}^2 + F^{23} \Gamma_{22}^2 + F^{20} \Gamma_{02}^3 + F^{23} \Gamma_{32}^3 + F^{10} \Gamma_{13}^3 + F^{20} \Gamma_{23}^3 + F^{31} \Gamma_{13}^0 + F^{32} \Gamma_{23}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = & F^{13} (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + F^{23} (\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + F^{10} (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\ & + F^{20} (\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \partial_1 F^{10} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{20} + \partial_2 F^{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu F^{\mu\nu} = & (F^{10} + F^{13}) (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + (F^{20} + F^{23}) (\Gamma_{02}^0 + \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \partial_1 F^{10} \\ & + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{20} + \partial_2 F^{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{8a^3mr\sin[2\theta]^2B_0}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3} - \frac{\cot[\theta](-8a^2(a^2+2r(-m+r))\sin[2\theta]-4a^4\sin[4\theta])B_0}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3} + \\
&\frac{8a^2r\cos[2\theta](-2Q+am(3+\cos[2\theta])B_0)}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3} + \frac{24a^4r\sin[2\theta]^2(-2Q+am(3+\cos[2\theta])B_0)}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^4} + \\
&(16Qr(a^2+r^2)-8Qr(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])+am(a^2-r^2)(8r+24r\cos[2\theta])B_0- \\
&2amr(7a^2+4r^2+4(2a^2+3r^2)\cos[2\theta]+a^2\cos[4\theta])B_0)/(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3 - \\
&(12r(-4Q(a^2+r^2)(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])+ \\
&am(a^2-r^2)(7a^2+4r^2+4(2a^2+3r^2)\cos[2\theta]+a^2\cos[4\theta])B_0))/ \\
&(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^4 + \\
&(16aQr+ \\
&(-3a^4-8a^2mr-24a^2r^2+64mr^3-40r^4+4a^2(-a^2+2(m-2r)r-2r^2)\cos[2\theta]- \\
&a^4\cos[4\theta])B_0)/(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3 + \\
&(\csc[\theta]^2 \\
&(16aQr+(3a^4-24a^2mr+8a^2r^2+8r^4+4a^2(a^2+2r(-m+r))\cos[2\theta]+a^4\cos[4\theta]) \\
&B_0))/(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3 - \\
&(6a^2\cot[\theta]\sin[2\theta] \\
&(16aQr+(3a^4-24a^2mr+8a^2r^2+8r^4+4a^2(a^2+2r(-m+r))\cos[2\theta]+a^4\cos[4\theta]) \\
&B_0))/(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^4 - \\
&(12r(-4aQ(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])+ \\
&(7a^4m-3a^4r-4a^2mr^2-8a^2r^3+16mr^4-8r^5+ \\
&4a^2(a^2(2m-r)+(m-2r)r^2)\cos[2\theta]+a^4(m-r)\cos[4\theta])B_0))/ \\
&(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^4 + \\
&\left(((3a^4+8a^2mr+8a^2r^2+8r^4+4a^2(a^2+2r(-m+r))\cos[2\theta]+a^4\cos[4\theta])\cot[\theta])/ \right. \\
&\left. (2(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^2) - \frac{2a^2\cos[\theta]\sin[\theta]}{r^2+a^2\cos[\theta]^2} - \frac{4a^2mr\sin[2\theta]}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^2} \right) \\
&\left(\frac{4a^2r\sin[2\theta](-2Q+am(3+\cos[2\theta])B_0)}{(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3} - \right. \\
&(\cot[\theta] \\
&(16aQr+(3a^4-24a^2mr+8a^2r^2+8r^4+4a^2(a^2+2r(-m+r))\cos[2\theta]+a^4\cos[4\theta]) \\
&B_0))/(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3 \Big) + \\
&\left(\frac{r}{r^2+a^2\cos[\theta]^2} + \frac{r(a^2-mr)+a^2(m-r)\cos[\theta]^2}{(a^2+r(-2m+r))(r^2+a^2\cos[\theta]^2)} - \right. \\
&\frac{2m(a^2+r^2)(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])}{(a^2+r(-2m+r))(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^2} + \\
&(a^4m+3a^4r-12a^2mr^2+8a^2r^3-16mr^4+8r^5+4a^2r(a^2+r(-m+2r))\cos[2\theta]- \\
&a^4(m-r)\cos[4\theta])/(2(a^2+r(-2m+r))(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^2) \Big) \\
&((-4Q(a^2+r^2)(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])+ \\
&am(a^2-r^2)(7a^2+4r^2+4(2a^2+3r^2)\cos[2\theta]+a^2\cos[4\theta])B_0)/ \\
&(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3 + \\
&(-4aQ(a^2-2r^2+a^2\cos[2\theta])+ \\
&(7a^4m-3a^4r-4a^2mr^2-8a^2r^3+16mr^4-8r^5+ \\
&4a^2(a^2(2m-r)+(m-2r)r^2)\cos[2\theta]+a^4(m-r)\cos[4\theta])B_0)/ \\
&(a^2+2r^2+a^2\cos[2\theta])^3)
\end{aligned}$$

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

Böylelikle Kerr metriğinin $F^{\mu\nu}$ elektromanyetik alan tansörünün boşluk Maxwell denklemlerinin çözümü olduğu görülür.

Ek 5 Enerji-Gerilim Tansörünün İzi

Enerji-gerilim tansörünün kovaryant bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{11}{9} F_{10} F_{10} + \frac{22}{9} F_{20} F_{20} - \frac{1}{2} g_{00} \left(F_{10} \frac{10}{F} + F_{20} \frac{20}{F} + F_{13} \frac{13}{F} + F_{23} \frac{23}{F} \right) \right) \\
 T_{03} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{11}{9} F_{10} F_{13} + \frac{22}{9} F_{20} F_{23} - \frac{1}{2} g_{03} \left(F_{10} \frac{10}{F} + F_{20} \frac{20}{F} + F_{13} \frac{13}{F} + F_{23} \frac{23}{F} \right) \right) \\
 T_{11} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{00}{9} F_{10} F_{10} + \frac{33}{9} F_{13} F_{13} + 2 \frac{03}{9} F_{10} F_{13} - \frac{1}{2} g_{11} \left(F_{10} \frac{10}{F} + F_{20} \frac{20}{F} + F_{13} \frac{13}{F} + F_{23} \frac{23}{F} \right) \right) \\
 T_{22} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{00}{9} F_{20} F_{20} + \frac{33}{9} F_{23} F_{23} + 2 \frac{03}{9} F_{20} F_{23} - \frac{1}{2} g_{22} \left(F_{10} \frac{10}{F} + F_{20} \frac{20}{F} + F_{13} \frac{13}{F} + F_{23} \frac{23}{F} \right) \right) \\
 T_{33} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{11}{9} F_{13} F_{13} + \frac{22}{9} F_{23} F_{23} - \frac{1}{2} g_{33} \left(F_{10} \frac{10}{F} + F_{20} \frac{20}{F} + F_{13} \frac{13}{F} + F_{23} \frac{23}{F} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Bu bileşenlerin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= \\
 &- \left(-16 Q^2 \left(-3 a^2 + 4 m r - 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta] \right) + \right. \\
 &\quad 8 a Q \left(-17 a^2 m + 9 a^2 r + 24 m^2 r - 20 m r^2 + 4 r^3 + \right. \\
 &\quad \left. 4 r \left(2 a^2 + 2 m^2 - 7 m r + 3 r^2 \right) \cos[2 \theta] + a^2 (m - r) \cos[4 \theta] \right) B_0 + \\
 &\quad \left(10 a^6 + 102 a^4 m^2 - 144 a^4 m r - 152 a^2 m^3 r + 36 a^4 r^2 + 236 a^2 m^2 r^2 - \right. \\
 &\quad \left. 136 a^2 m r^3 + 48 a^2 r^4 + 64 m^2 r^4 - 96 m r^5 + 32 r^6 + \right. \\
 &\quad \left(15 a^6 + 32 m r^4 (-2 m + r) + a^4 (33 m^2 - 160 m r + 48 r^2) + \right. \\
 &\quad \left. 16 a^2 r (-6 m^3 + 23 m^2 r - 14 m r^2 + 3 r^3) \right) \cos[2 \theta] + \\
 &\quad \left. 2 a^2 (3 a^4 - 2 m r (2 m^2 - 9 m r + 6 r^2) + a^2 (-3 m^2 - 8 m r + 6 r^2)) \cos[4 \theta] + \right. \\
 &\quad \left. a^6 \cos[6 \theta] - a^4 m^2 \cos[6 \theta] \right) B_0^2) / (32 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3) \\
 T_{03} &= \frac{1}{4 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3} \\
 &(\sin[\theta]^2 \\
 &\quad (8 a Q^2 (a^2 + r (-m + r)) - \\
 &\quad 4 Q (a^4 (6 m - 3 r) + 2 r^4 (-2 m + r) - a^2 r (6 m^2 - 6 m r + r^2) + \\
 &\quad a^2 (a^2 (2 m - 3 r) + r (-2 m^2 + 6 m r - 3 r^2)) \cos[2 \theta]) B_0 + \\
 &\quad a m (19 a^4 m - 18 a^4 r - 19 a^2 m^2 r + 25 a^2 m r^2 - 3 a^2 r^3 - 16 m r^4 + \\
 &\quad 12 r^5 + 4 (a^4 (3 m - 5 r) + r^4 (-4 m + 3 r) - 3 a^2 r (m^2 - 3 m r + r^2)) \\
 &\quad \cos[2 \theta] + a^2 (a^2 (m - 2 r) - r (m^2 - 3 m r + r^2)) \cos[4 \theta]) B_0^2) \\
 T_{22} &= - \frac{1}{32 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])} \\
 &((8 Q^2 - 8 a Q (m - r) (3 + \cos[2 \theta]) B_0 + \\
 &\quad (3 a^4 + 19 a^2 m^2 - 36 a^2 m r + 6 a^2 r^2 + 8 m r^3 + \\
 &\quad 4 (a^4 + 2 r^3 (-m + r) + a^2 (3 m^2 - 6 m r + 2 r^2)) \cos[2 \theta] + \\
 &\quad a^2 (a^2 + m^2 - 4 m r + 2 r^2) \cos[4 \theta]) B_0^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{33} = & -(\sin[\theta])^2 (-16 Q^2 (-3 a^4 + a^2 (2 m - 5 r) r - 2 r^4 + a^2 (a^2 + r (-2 m + r)) \cos[2 \theta]) + \\
& 8 a Q (-17 a^4 m + 9 a^4 r + 10 a^2 m^2 r - 23 a^2 m r^2 + 13 a^2 r^3 + 4 m r^4 + \\
& 4 r^5 + 4 r (2 a^4 + r^3 (-5 m + 3 r) + a^2 (-2 m^2 - 3 m r + 5 r^2)) \cos[2 \theta] + \\
& a^2 (m - r) (a^2 - 2 m r + r^2) \cos[4 \theta]) B_0 + \\
& (10 a^8 + 102 a^6 m^2 - 116 a^6 m r - 52 a^4 m^3 r + 46 a^6 r^2 + 130 a^4 m^2 r^2 - \\
& 176 a^4 m r^3 + 84 a^4 r^4 - 36 a^2 m^2 r^4 - 72 a^2 m r^5 + 80 a^2 r^6 - 32 m r^7 + \\
& 32 r^8 + (15 a^8 + 32 m r^7 + 16 a^2 r^4 (7 m^2 - 10 m r + 3 r^2) + \\
& 3 a^6 (11 m^2 - 42 m r + 21 r^2) + a^4 r (30 m^3 + 145 m^2 r - 288 m r^2 + 96 r^3)) \\
& \cos[2 \theta] + \\
& 2 a^2 (3 a^6 + 2 m (13 m - 6 r) r^4 - 3 a^4 (m^2 + 2 m r - 3 r^2) + \\
& a^2 r (10 m^3 - 9 m^2 r - 24 m r^2 + 6 r^3)) \cos[4 \theta] + a^8 \cos[6 \theta] - \\
& a^6 m^2 \cos[6 \theta] - 2 a^6 m r \cos[6 \theta] + 2 a^4 m^3 r \cos[6 \theta] + \\
& a^6 r^2 \cos[6 \theta] - a^4 m^2 r^2 \cos[6 \theta]) B_0^2) / (32 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3) \quad (2)
\end{aligned}$$

Enerji-gerilim tansörünün kontravaryant bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\overset{00}{T} &= \overset{00}{g} \overset{00}{g} T_{00} + \overset{03}{g} \overset{03}{g} T_{33} + 2 \overset{00}{g} \overset{03}{g} T_{03} \\
\overset{03}{T} &= \overset{00}{g} \overset{03}{g} T_{00} + \overset{00}{g} \overset{33}{g} T_{03} + \overset{03}{g} \overset{03}{g} T_{03} + \overset{03}{g} \overset{33}{g} T_{33} \\
\overset{11}{T} &= \overset{11}{g} \overset{11}{g} T_{11} \\
\overset{22}{T} &= \overset{22}{g} \overset{22}{g} T_{22} \\
\overset{33}{T} &= \overset{03}{g} \overset{03}{g} T_{00} + \overset{33}{g} \overset{33}{g} T_{33} + 2 \overset{03}{g} \overset{33}{g} T_{03} \quad (3)
\end{aligned}$$

Bu bileşenlerin açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\overset{00}{T} = & -(-16 Q^2 (-3 a^4 + a^2 (2 m - 5 r) r - 2 r^4 + a^2 (a^2 + r (-2 m + r)) \cos[2 \theta]) + \\
& 8 a Q (-17 a^4 m + 9 a^4 r + 10 a^2 m^2 r - 23 a^2 m r^2 + 13 a^2 r^3 + 4 m r^4 + \\
& 4 r^5 + 4 r (2 a^4 + r^3 (-5 m + 3 r) + a^2 (-2 m^2 - 3 m r + 5 r^2)) \cos[2 \theta] + \\
& a^2 (m - r) (a^2 - 2 m r + r^2) \cos[4 \theta]) B_0 + \\
& (10 a^8 + 102 a^6 m^2 - 116 a^6 m r - 52 a^4 m^3 r + 46 a^6 r^2 + 130 a^4 m^2 r^2 - \\
& 176 a^4 m r^3 + 84 a^4 r^4 - 36 a^2 m^2 r^4 - 72 a^2 m r^5 + 80 a^2 r^6 - 32 m r^7 + \\
& 32 r^8 + (15 a^8 + 32 m r^7 + 16 a^2 r^4 (7 m^2 - 10 m r + 3 r^2) + \\
& 3 a^6 (11 m^2 - 42 m r + 21 r^2) + a^4 r (30 m^3 + 145 m^2 r - 288 m r^2 + 96 r^3)) \\
& \cos[2 \theta] + \\
& 2 a^2 (3 a^6 + 2 m (13 m - 6 r) r^4 - 3 a^4 (m^2 + 2 m r - 3 r^2) + \\
& a^2 r (10 m^3 - 9 m^2 r - 24 m r^2 + 6 r^3)) \cos[4 \theta] + a^8 \cos[6 \theta] - \\
& a^6 m^2 \cos[6 \theta] - 2 a^6 m r \cos[6 \theta] + 2 a^4 m^3 r \cos[6 \theta] + a^6 r^2 \cos[6 \theta] - \\
& a^4 m^2 r^2 \cos[6 \theta]) B_0^2) / (32 \pi (a^2 + r (-2 m + r)) (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3)
\end{aligned}$$

$$\overset{03}{T} =$$

$$\begin{aligned} & - (8 a Q^2 (a^2 + r (-m + r)) - \\ & 4 Q (a^4 (6 m - 3 r) + 2 r^4 (-2 m + r) - a^2 r (6 m^2 - 6 m r + r^2) + \\ & a^2 (a^2 (2 m - 3 r) + r (-2 m^2 + 6 m r - 3 r^2)) \cos[2 \theta]) B_0 + \\ & a m (19 a^4 m - 18 a^4 r - 19 a^2 m^2 r + 25 a^2 m r^2 - 3 a^2 r^3 - 16 m r^4 + 12 r^5 + \\ & 4 (a^4 (3 m - 5 r) + r^4 (-4 m + 3 r) - 3 a^2 r (m^2 - 3 m r + r^2)) \cos[2 \theta] + \\ & a^2 (a^2 (m - 2 r) - r (m^2 - 3 m r + r^2)) \cos[4 \theta]) B_0^2) / \\ & (4 \pi (a^2 + r (-2 m + r)) (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3) \end{aligned}$$

$$\overset{11}{T} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3} \\ & ((a^2 + r (-2 m + r)) \\ & (8 Q^2 - 8 a Q (m - r) (3 + \cos[2 \theta]) B_0 + \\ & (3 a^4 + 19 a^2 m^2 - 36 a^2 m r + 6 a^2 r^2 + 8 m r^3 + \\ & 4 (a^4 + 2 r^3 (-m + r) + a^2 (3 m^2 - 6 m r + 2 r^2)) \cos[2 \theta] + \\ & a^2 (a^2 + m^2 - 4 m r + 2 r^2) \cos[4 \theta]) B_0^2)) \end{aligned}$$

$$\overset{22}{T} =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{8 \pi (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3} \\ & (8 Q^2 - 8 a Q (m - r) (3 + \cos[2 \theta]) B_0 + \\ & (3 a^4 + 19 a^2 m^2 - 36 a^2 m r + 6 a^2 r^2 + 8 m r^3 + \\ & 4 (a^4 + 2 r^3 (-m + r) + a^2 (3 m^2 - 6 m r + 2 r^2)) \cos[2 \theta] + \\ & a^2 (a^2 + m^2 - 4 m r + 2 r^2) \cos[4 \theta]) B_0^2) \end{aligned}$$

$$\overset{33}{T} =$$

$$\begin{aligned} & - (\csc[\theta]^2 (-16 Q^2 (-3 a^2 + 4 m r - 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta]) + \\ & 8 a Q (-17 a^2 m + 9 a^2 r + 24 m^2 r - 20 m r^2 + 4 r^3 + \\ & 4 r (2 a^2 + 2 m^2 - 7 m r + 3 r^2) \cos[2 \theta] + a^2 (m - r) \cos[4 \theta]) B_0 + \\ & (10 a^6 + 102 a^4 m^2 - 144 a^4 m r - 152 a^2 m^3 r + 36 a^4 r^2 + 236 a^2 m^2 r^2 - \\ & 136 a^2 m r^3 + 48 a^2 r^4 + 64 m^2 r^4 - 96 m r^5 + 32 r^6 + \\ & (15 a^6 + 32 m r^4 (-2 m + r) + a^4 (33 m^2 - 160 m r + 48 r^2) + \\ & 16 a^2 r (-6 m^3 + 23 m^2 r - 14 m r^2 + 3 r^3)) \cos[2 \theta] + \\ & 2 a^2 (3 a^4 - 2 m r (2 m^2 - 9 m r + 6 r^2) + a^2 (-3 m^2 - 8 m r + 6 r^2)) \cos[4 \theta] + \\ & a^6 \cos[6 \theta] - a^4 m^2 \cos[6 \theta]) B_0^2) / \\ & (32 \pi (a^2 + r (-2 m + r)) (a^2 + 2 r^2 + a^2 \cos[2 \theta])^3) \end{aligned} \quad (4)$$

(4) ifadeleri yardımıyla enerji-gerilim tansörünün izi aşağıdaki şekilde sıfıra eşit bulunur:

$$T = g_{00} \overset{00}{T} + 2 g_{03} \overset{03}{T} + g_{11} \overset{11}{T} + g_{22} \overset{22}{T} + g_{33} \overset{33}{T}$$

T =

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8 \pi (a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3} \\
& \left((-r^2 - a^2 \cos[\theta]^2) \right. \\
& \quad (8Q^2 - 8aQ(m-r)(3 + \cos[2\theta])B_0 + \\
& \quad (3a^4 + 19a^2m^2 - 36a^2mr + 6a^2r^2 + 8mr^3 + 4(a^4 + 2r^3(-m+r) + a^2(3m^2 - 6mr + 2r^2)) \\
& \quad \cos[2\theta] + a^2(a^2 + m^2 - 4mr + 2r^2)\cos[4\theta])B_0^2)) - \\
& \quad \left. \frac{1}{8 \pi (a^2 - 2mr + r^2)(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3} \right. \\
& \quad ((a^2 + r(-2m+r))(r^2 + a^2 \cos[\theta]^2) \\
& \quad (8Q^2 - 8aQ(m-r)(3 + \cos[2\theta])B_0 + \\
& \quad (3a^4 + 19a^2m^2 - 36a^2mr + 6a^2r^2 + 8mr^3 + 4(a^4 + 2r^3(-m+r) + a^2(3m^2 - 6mr + 2r^2)) \\
& \quad \cos[2\theta] + a^2(a^2 + m^2 - 4mr + 2r^2)\cos[4\theta])B_0^2)) + \\
& \quad (amr \sin[\theta]^2 \\
& \quad (-8aQ^2(a^2 + r(-m+r)) + \\
& \quad 4Q(a^4(6m-3r) + 2r^4(-2m+r) - a^2r(6m^2 - 6mr + r^2) + \\
& \quad a^2(a^2(2m-3r) + r(-2m^2 + 6mr - 3r^2))\cos[2\theta])B_0 - \\
& \quad am(19a^4m - 18a^4r - 19a^2m^2r + 25a^2mr^2 - 3a^2r^3 - 16mr^4 + 12r^5 + \\
& \quad 4(a^4(3m-5r) + r^4(-4m+3r) - 3a^2r(m^2 - 3mr + r^2))\cos[2\theta] + \\
& \quad a^2(a^2(m-2r) - r(m^2 - 3mr + r^2))\cos[4\theta])B_0^2)) / \\
& \quad (\pi(a^2 + r(-2m+r))(r^2 + a^2 \cos[\theta]^2)(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3) - \\
& \quad ((- (a^2 + r^2)^2 + a^2(a^2 - 2mr + r^2)\sin[\theta]^2) \\
& \quad (-16Q^2(-3a^2 + 4mr - 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]) + \\
& \quad 8aQ(-17a^2m + 9a^2r + 24m^2r - 20mr^2 + 4r^3 + 4r(2a^2 + 2m^2 - 7mr + 3r^2)\cos[2\theta] + \\
& \quad a^2(m-r)\cos[4\theta])B_0 + \\
& \quad (10a^6 + 102a^4m^2 - 144a^4mr - 152a^2m^3r + 36a^4r^2 + 236a^2m^2r^2 - 136a^2mr^3 + \\
& \quad 48a^2r^4 + 64m^2r^4 - 96mr^5 + 32r^6 + \\
& \quad (15a^6 + 32mr^4(-2m+r) + a^4(33m^2 - 160mr + 48r^2) + \\
& \quad 16a^2r(-6m^3 + 23m^2r - 14mr^2 + 3r^3))\cos[2\theta] + \\
& \quad 2a^2(3a^4 - 2mr(2m^2 - 9mr + 6r^2) + a^2(-3m^2 - 8mr + 6r^2))\cos[4\theta] + a^6\cos[6\theta] - \\
& \quad a^4m^2\cos[6\theta])B_0^2)) / (32\pi(a^2 + r(-2m+r))(r^2 + a^2 \cos[\theta]^2)(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3) + \\
& \quad \left. \frac{1}{32 \pi (a^2 + r(-2m+r))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])^3} \right. \\
& \quad \left(\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos[\theta]^2} \right) \right. \\
& \quad (16Q^2(-3a^4 + a^2(2m-5r)r - 2r^4 + a^2(a^2 + r(-2m+r))\cos[2\theta]) - \\
& \quad 8aQ(-17a^4m + 9a^4r + 10a^2m^2r - 23a^2mr^2 + 13a^2r^3 + 4mr^4 + 4r^5 + \\
& \quad 4r(2a^4 + r^3(-5m+3r) + a^2(-2m^2 - 3mr + 5r^2))\cos[2\theta] + \\
& \quad a^2(m-r)(a^2 - 2mr + r^2)\cos[4\theta])B_0 - \\
& \quad (10a^8 + 102a^6m^2 - 116a^6mr - 52a^4m^3r + 46a^6r^2 + 130a^4m^2r^2 - 176a^4mr^3 + 84a^4r^4 - \\
& \quad 36a^2m^2r^4 - 72a^2mr^5 + 80a^2r^6 - 32mr^7 + 32r^8 + \\
& \quad (15a^8 + 32mr^7 + 16a^2r^4(7m^2 - 10mr + 3r^2) + 3a^6(11m^2 - 42mr + 21r^2) + \\
& \quad a^4r(30m^3 + 145m^2r - 288mr^2 + 96r^3))\cos[2\theta] + \\
& \quad 2a^2(3a^6 + 2m(13m-6r)r^4 - 3a^4(m^2 + 2mr - 3r^2) + a^2r(10m^3 - 9m^2r - 24mr^2 + 6r^3)) \\
& \quad \cos[4\theta] + a^8\cos[6\theta] - a^6m^2\cos[6\theta] - 2a^6mr\cos[6\theta] + 2a^4m^3r\cos[6\theta] + \\
& \quad \left. \left. a^6r^2\cos[6\theta] - a^4m^2r^2\cos[6\theta])B_0^2\right) \right)
\end{aligned}$$

T=0

(5)

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 08.01.1980

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993–1997

Yunus Emre Lisesi (YDA)

Lisans 1998–2003

İstanbul Üniversitesi Fen-Edebiyat

Fakültesi Fizik

Yüksek Lisans 2003–2004

İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enst.

Orta Öğretim Alan Öğretmenliği(Tezsiz)

2004–Devam Ediyor

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri

Enst. Fizik

Çalıştığı Kurumlar

2005-Devam Ediyor

Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat

Fakültesi Fizik Bölümü