

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NÜKLEER BAĞLANMA ENERJİSİNDE SİMETRİ
ENERJİSİ TERİMİNİN KATSAYISININ HESABI

Mehmet KILIÇ

FBE Fizik Anabilim Dalı Fizik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet ŞİRİN (YTÜ)

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	iv
KISALTMA LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Çekirdeğin Yapısı	1
1.1.1 Çekirdeğin Kütlesi	1
1.1.2 Çekirdek Yarıçapı ve Yük Dağılımı	3
1.2 Nükleer Kuvvet	5
1.3 Sıvı Damlası Modeli	6
1.3.1 Yarı Deneysel Bağlanma Enerjisi Formülü	7
2. FERMİ GAZ MODELİ (BAĞIMSIZ PARÇACIK MODELİ)	11
2.1 Fermi Gaz Modeli	11
2.1.1 Potansiyel Kuyusu	11
2.1.2 Durumların Sayısı	14
2.1.3 Durum Sayısının Faz Uzayında Hesabı	15
2.1.4 Fermi Momentumu ve Fermi Enerjisi	16
2.2 Çekirdeklerin Fermi Gaz Modeli	17
2.2.1 Nükleonların Fermi Momentumu ve Enerjisi	18
2.2.2 Simetri Enerjisi ve Simetri Enerjisi Teriminin Katsayısı	20
2.2.2.1 Kinetik Enerji Katkısı	20
2.2.2.2 Potansiyel Enerji Katkısı	22
3. İKİNCİ KUANTİZASYON	24
3.1 Tanımlar	24
3.1.1 Fermiyonların İkinci Kuantizasyonu	27
3.2 İşlemciler	30
3.2.1 Bir Parçacık İşlemcisi	30
3.2.2 İki Parçacık İşlemcisi	31
3.3 Fermiyonların Matris Elemanları	32
3.3.1 Bir Cisim İşlemcisinin Matris Elemanı	33
3.3.2 İki Cisim İşlemcisinin Matris Elemanı	34
4. SİMETRİ ENERJİSİNİN ÇÖZÜMÜ ve SONUÇLAR	37

4.1	Simetrik Çekirdeklerin Kinetik Enerji Matris Elemanı	37
4.2	Simetrik Çekirdeklerin Potansiyel Enerji Matris Elemanı	38
4.3	Simetrik Olmayan Çekirdeklerin Kinetik Enerji Matris Elemanı	41
4.4	Simetrik Olmayan Çekirdeklerin Potansiyel Enerji Matris Elemanı.....	42
4.5	Sonuçlar	47
KAYNAKLAR.....		60
ÖZGEÇMİŞ.....		61

SİMGE LİSTESİ

$B(Z, A)$	Toplam bağlanma enerjisi
$e(Z, A)$	Nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi
$\rho(r)$	Yük yoğunluğu
R	Çekirdek yarıçapı
r_0	Yarıçap parametresi
a_s	Simetri enerjisi terimi katsayısı
E_f	Fermi enerjisi
p_f	Fermi momentumu
$\psi_k(r)$	Tek parçacık özfonksiyonu
E_n	n. parçacığın enerji özdeğeri
$n(E)$	E enerjili durumların sayısı
$\rho(E)$	Durum yoğunluğu
N_t	Toplam fermiyon sayısı
$\langle E \rangle$	Ortalama kinetik enerji
$\hat{h}$	Tek parçacık hamiltonyeni
$\hat{H}$	Tek parçacıklı bir sistemin toplam hamiltonyeni
n_i	i. durumun doluluk sayısı
$\hat{a}$	Parçacık yok etme işlemcisi
$\hat{a}^\dagger$	Parçacık yaratma işlemcisi

$\hat{n}$	Sayı işlemcisi
σ_i	İşaret faktörü
$\hat{f}$	Bir parçacık işlemcisi
$\hat{T}$	Kinetik enerji işlemcisi
$\hat{V}$	İki parçacık işlemcisi
$\langle T \rangle$	Kinetik enerji matris elemanı
$\langle V \rangle$	Potansiyel enerji matris elemanı
k	Dalga sayısı
ρ_n	İzospin kuantum sayısı
λ_n	Spin kuantum sayısı

KISALTMA LİSTESİ

FGM Fermi Gaz Modeli

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	Çekirdeklerin nükleon başına ortalama bağlanma enerjisinin kütle numarasına göre değişimi. Sol taraftaki grafik hafif çekirdeklerin ortalama bağlanma enerjisini ayrıntılı olarak gösterirken, doğada bulunan bütün kararlı çekirdekler için ortalama bağlanma enerjisi sağ taraftaki grafikte gösterilmiştir (Shultis ve Faw, 2002).....	2
Şekil 1.2	Nükleer yük yoğunluk dağılımı (Walecka, 2004).....	3
Şekil 1.3	Nükleon- nükleon potansiyeli(Şirin, 2006).....	6
Şekil 1.4	Çekirdeklerin yüzeyinde bulunan nükleonların etkileşme sayısı iç bölgedeki nükleonlardan daha azdır. İç bölgedeki nükleonlar her bakımdan özdeştir.	8
Şekil 2.1	Sonsuz kuyu potansiyeli.....	12
Şekil 2.2	a) Klasik faz uzayı b) Kuantum faz uzayı (Şirin, 2006).....	15
Şekil 2.3	Çekirdeklerin fermi gaz modelinin potansiyeli.	18
Şekil 2.4	Aynı kuantum durumundaki (a) iki proton (b) iki nötron (c) bir proton ve bir nötron (Şirin, 2006).	22
Şekil 4.1	Kare kuyu potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.	49
Şekil 4.2	Yukawa potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.	50
Şekil 4.3	Gaussian potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.	50
Şekil 4.4	Yukawa, Karekuyu ve Gaussian potansiyelleri için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi. Üç eğride hafif çekirdekler dışında hemen hemen sabittir.....	51
Şekil 4.5	S_n çekirdeğinin kararlı izotoplarının Gaussian potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.....	51

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 1.1 Kararlı çekirdeklerin sayısı	10
Çizelge 1.2 Terimlerin katsayıları (Fetter ve Walecka, 2003).	10
Çizelge 2.1 Küp içindeki parçacığın enerjisi ve katlılığı.....	14
Çizelge 4.1 Kararlı çekirdeklerin simetri enerjisi terimi katsayıları	53

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesinde yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Öncelikle bu tezi hazırlamamda bana rehber ve yardımcı olan tez danışmanı hocam Prof. Dr. Mehmet ŞİRİN'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bana çalışma imkânı ve çalışma ortamı sağlayan Yıldız Teknik Üniversitesi Rektörü Prof. Dr. Durul ÖREN, Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof. Dr. Metin SUBAŞI, Fizik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Kubilay KUTLU, eski Fizik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Emel ÇINGİ ve hocalarımıza ayrıca teşekkür ederim.

Tez yazım sürecindeki katkılarından dolayı Arş. Gör. Önder EYECİOĞLU ve Necati VARDAR'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Benden her türlü desteklerini ve sevgilerini hiç esirgemeyen aileme teşekkürler.

ÖZET

Fermi gaz modeli kullanılarak kararlı çekirdeklerin simetri enerjisi teriminin katsayısı farklı nükleon-nükleon potansiyelleri için hesaplanmıştır. Simetri enerjisi hesaplanırken, çok parçacıktan oluşmuş bir kuantum sistem olan çekirdeklerin hamiltonyeni ikinci kuantizasyon formalizminde yazılmıştır. Sistem çok sayıda benzer parçacıktan oluştuğu için parçacıkların dalga fonksiyonlarına dayalı çözüm hesaplamada güçlük yaratır. Önemli olan her bir kuantum durumunda bulunan parçacıkların sayısıdır. Bunun için birinci kuantizasyon kullanışlı bir yöntem değildir.

Hamiltonyen yazılırken potansiyel enerjisi fonksiyonu olarak Wigner-Majorana tipi potansiyel seçilmiştir. Simetrik ve simetrik olmayan çekirdekler için hamiltonyenin beklenen değerinden elde edilen enerji özdeğerleri kullanılarak simetri enerjisi ve simetri enerjisi terimi katsayısı denklemleri elde edilmiştir.

Yukawa, kare kuyu ve gaussian potansiyelleri için simetri enerjisi terimi katsayısının hesabı Mathematica® programında yapılmıştır. Çekirdeklerin kütle numarasına göre her bir potansiyel için hesaplanan katsayıların değişimi grafiklerle verilmiştir. Ayrıca tüm kararlı çekirdekler için, simetri enerjisi terimi katsayılarının tablosu oluşturulmuştur.

Anahtar kelimeler: Fermi gaz modeli, simetri enerjisi, Wigner-Majorana, kararlı çekirdekler, ikinci kuantizasyon, nükleon-nükleon potansiyeli

ABSTRACT

Using by Fermi gas model, for different nucleon-nucleon potentials, the coefficient of symmetry energy term of stable nucleus was calculated. To calculate the symmetry energy, the Hamiltonian of nucleus which is a quantum system of many particles is written in second quantization formalism. Because of the system has many particles, it is difficult to solve the Hamiltonian based on the wave function of particles. Important point is that number of particles on each quantum state. For this reason, the first quantization is not an useful method.

As potential energy term of hamiltonian, Wigner-Majorana type potential was selected. Equations of symmetry energy and symmetry energy term coefficient were formed using energy eigenvalues which are defined from expectation values of hamiltonian for symmetrical and anti-symmetrical nucleus.

The symmetry energy term coefficient for Yukawa, the square-well and gaussian potentials were calculated in Mathematica® code. The variation of coefficient calculated from each potential with mass number of nucleus was figured. Also, for every stable nucleus, symmetry energy term coefficients were listed in a table.

Keywords: Fermi gas model, symmetry energy, Wigner-Majorana, stable nucleus, second quantization, nucleon-nucleon potential.

1. GİRİŞ

Atom çekirdeği, atomun merkezinde yarıçapı yaklaşık 10^{-15} m olan küçük bir hacim işgal eder. Atom kütlesinin yaklaşık tamamı çekirdekte toplanmıştır. Bu kadar küçük hacim içine toplanmış kütle, çekirdeğin kurucu bileşenleri arasında etkileşmenin ne kadar şiddetli olduğunun göstergesidir. Hidrojen atomunun çekirdeği olan proton bilinen en basit çekirdektir. Daha sonraki en basit çekirdek, bir proton ve bir nötrondan oluşan döteryum atomunun çekirdeğidir.

1.1 Çekirdeğin Yapısı

Çekirdek proton ve nötronlardan meydana gelmiştir. Protonların sayısı atom sayısı olarak adlandırılır ve Z ile gösterilir. Nötron sayısı ise N ile gösterilir. Nükleer parçacıklar tartışılırken, proton veya nötron olduğu belirtilmeden proton veya nötronun yerine nükleon terimi kullanılır. Kütle numarası çekirdekteki toplam nükleon sayısıdır.

$$A = N + Z \quad (1.1)$$

Bütün temel parçacıklar bozon ve fermiyon olmak üzere ikiye ayrılır. Proton ve nötronlar fermiyon ailesinin üyesidir. Fermiyonlar Pauli ilkesine uyarlar. Fermiyonların spini tek tamsayıların yarısıdır. Nötron ve protonun spini $1/2$ 'dir. Protonlar pozitif yüklü, nötronlar ise yüksüz parçacıklardır. Çekirdeğin yükü, pozitif yüklü ($+e$) olan protonların toplam yüküdür.

$$q = Ze \quad (1.2)$$

Nötronun kütlesi protonun kütlesinden biraz daha büyüktür. Serbest nötron kararsızken proton kararlıdır.

Çekirdek anlaşılması zor ve gizemli bir sistemdir. Çekirdeği, elektrik yükü, yarıçap, kütle bağlanma enerjisi, nükleon ayrılma enerjisi, açısal momentum, parite, manyetik dipol, kuadropol moment ve uyarılmış durumların enerjileri gibi statik özelliklerin yanında çekirdeğin bozunma ve reaksiyon olasılığı gibi parametreleri içeren dinamik özellikleri ile tanımlayabiliriz(Krane, 2001). Çekirdek kütlesi, kütle bağlanma enerjisi, çekirdeğin yarıçapı ve yük dağılımını inceleyelim.

1.1.1 Çekirdeğin Kütlesi

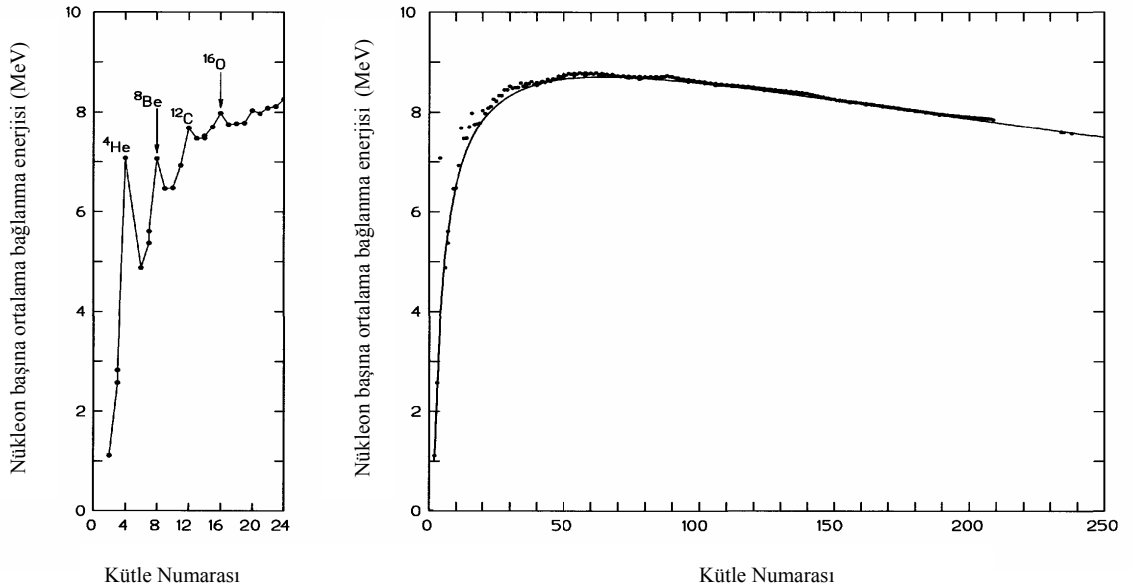
Çekirdeklerin kütlesi, kütle spektrometresi denilen bir düzenele deneysel olarak ölçülür.

Kütle spektrometresinde çekirdek değil, iyonize atomun kütlesi ölçülür. Kütle numarası A , atom numarası Z olan bir (Z, A) atomunun kütlesi $m(Z, A)$ sembolüyle gösterilir. Çekirdek kütlelerinde de aynı sembol kullanılır. Çekirdek kütlelerinin, çekirdeği meydana getiren nükleonların kütleleri toplamı olması beklenir. Ancak çekirdeğin deneysel kütlesi serbest nükleonların toplam külesinden biraz küçüktür. Serbest nükleonlar bir çekirdek meydana getirirken bir miktar kütle kaybolmaktadır. Bu Δm kütle eksiğinin enerji eşdeğerine *toplam bağlanma enerjisi* denir.

$$B(Z, A) = \Delta mc^2 = (Zm_p + Nm_n)c^2 - m(Z, A)c^2 \quad (1.3)$$

m_p ve m_n , sırasıyla proton ve nötronun serbest kütlesi olmak üzere ilk terim serbest nükleonların durgun kütle enerjisidir. İkinci terim çekirdeğin durgun kütle enerjisidir. Bir çekirdeği kurucu nükleonlarına ayırmak için verilmesi gereken enerji toplam bağlanma enerjisi kadardır.

Çekirdek fiziğinde, çekirdeklerin ortalama davranışlarının öngörülmesinde nükleonların toplam bağlanma enerjisi yerine nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi terimi kullanmak daha yararlıdır. Çekirdeğin toplam bağlanma enerjisinin nükleon sayısına oranı *nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi* olarak tanımlanır(Şirin, 2006).



Şekil 1.1 Çekirdeklerin nükleon başına ortalama bağlanma enerjisinin kütle numarasına göre değişimi. Sol taraftaki grafik hafif çekirdeklerin ortalama bağlanma enerjisini ayrıntılı olarak gösterirken, doğada bulunan bütün kararlı çekirdekler için ortalama bağlanma enerjisi sağ taraftaki grafikte gösterilmiştir (Shultis ve Faw, 2002).

$$e(Z, A) = \frac{B(Z, A)}{A} \quad (1.4)$$

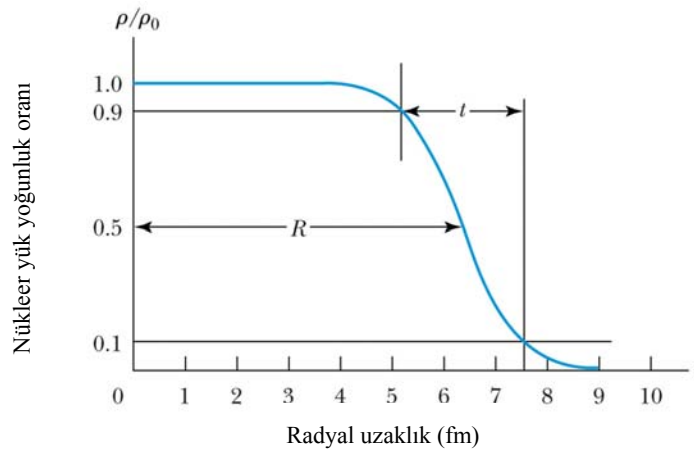
Şekil 1.1'deki grafik incelendiğinde birkaç özellik dikkat çekicidir.

- Eğri hafif çekirdekler dışında hemen hemen sabittir. Birçok çekirdeğin nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi 8 MeV civarındadır. %10 luk bir sapma vardır.
- Eğri kütle numarası $A = 60$ yakınlarında maksimum değere ulaşır, burada çekirdekler çok sıkı bağlıdır. Bu, enerjiyi iki şekilde kazanabileceğimizi gösterir. Kütle numarası 60'ın altında olan hafif çekirdekleri daha ağır çekirdekler meydana getirmek üzere birleştirmek veya $A = 60$ 'ın üzerindeki ağır çekirdekleri daha hafif çekirdeklere ayırmaktır. Her iki durumda da oluşacak daha kararlı çekirdeklerin yanında büyük miktarda enerji açığa çıkar(Krane, 2001).

Bağlanma enerjisinin kütle numarası ile değişimini karakterize eden yarı deneysel kütle formülünde, ortalama bağlanma enerjisi eğrisinden ortaya çıkan bazı parametreler kullanılır.

1.1.2 Çekirdek Yarıçapı ve Yük Dağılımı

Atomlar gibi çekirdeklerde keskin sınırları olan, yarıçapı kesin tanımlanmış katı küreler değildir. Nükleon yoğunluğu ve nükleer potansiyel kısa bir mesafe boyunca oldukça sabit, bu mesafenin ötesinde hızla sıfır olur. Bu nedenle, çekirdeğin biçimi iki parametreyle karakterize edilir. Bunlar, merkezi yoğunluğun yarıya düştüğü ortalama yarıçap ve maksimum civarındaki değerinden minimum civarındaki değere düştüğü yüzey kalınlığıdır(Krane, 2001).



Şekil 1.2 Nükleer yük yoğunluk dağılımı (Walecka, 2004)

Çekirdeğin büyüklük, madde yoğunluğu ve yük dağılımı özelliklerini belirlemede kullanılan deneysel yöntemlerden olan elektron saçılma deneyi sonucu elde edilen nükleer yük yoğunluğu dağılımı Şekil 1.2’de gösterilmiştir. Yük yoğunluğu fonksiyonu iki parametrelili fermi dağılım fonksiyonudur(Fetter ve Walecka, 2003).

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (1.5)$$

Burada, a yüzey kalınlığını belirler ve R çekirdeğin yarı yoğunluk yarıçapıdır. ($\rho = \frac{1}{2} \rho_0$)

Bazı önemli deneysel sonuçlar aşağıda verilmiştir:

1. Merkezdeki çekirdek yük yoğunluğu $\frac{A\rho_0}{Z}$ denklemiyle tanımlanır ve bütün çekirdekler için yaklaşık aynıdır(Fetter ve Walecka, 2003). Yük yoğunluğu çekirdeğin iç bölgesinde sabit, yüzey bölgelerine doğru hızla azalır ve sıfıra gider(Krane, 2001).
2. Çekirdek yarıçapı R

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{ve} \quad r_0 \approx 1,2 \text{ fm} \quad (1.6)$$

bağıntısı ile verilir. Nükleonlar çekirdeğin merkezi yakında toplanmış gözükmez, fakat gerçekte yüzeye doğru sabit sayılabilecek bir dağılım vardır(Krane, 2001). Çekirdeğin hacmini $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ olarak kabul edersek *çekirdeğin parçacık yoğunluğu* çekirdek boyutundan bağımsız hemen hemen sabittir(Fetter vd., 2003; Walecka, 2004).

$$\frac{A}{V} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \approx 1,95 \times 10^{38} \text{ par}/\text{cm}^3 \quad (1.7)$$

3. t yüzey kalınlığı parametresi yük yoğunluğunun merkezdeki değerinin %90’ından %10’una düştüğü mesafe olarak tanımlanır ve bütün çekirdekler için aynıdır(Fetter vd., 2003; Walecka, 2004).

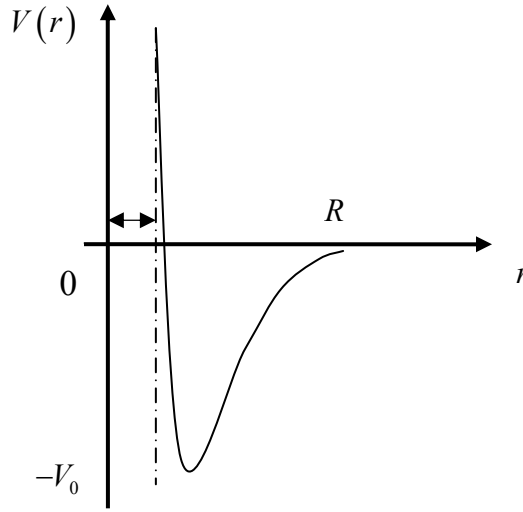
$$t = 2a \ln 9 \approx 2.4 \text{ fm} \quad (1.8)$$

1.2 Nükleer Kuvvet

Çekirdekte nükleonlar arasındaki kuvvetin özelliklerini hiçbir deneysel sonuca değinmeden özetlersek:

1. Nükleer kuvvetler kısa erimlidir. Hafif çekirdeklerin büyüklüğü mertebesinde çekirdekteki protonların Coulomb kuvvetinden daha güçlüdür. Nükleon başına bağlanma enerjisinin sabit olması çekirdekte nükleonların yalnız en yakın komşularıyla etkileştiğini gösterir. Fakat atomik boyut mertebesinde ihmal edilebilecek derecede zayıftır.
2. Nükleer kuvvetin birbirinden farklı iki bileşeni vardır: asıl olarak nükleonları bir arada tutan çekici merkezci kuvvet ve çekim etkisinde çekirdeğin kısa erim bölgesi içine çökmesini önleyen itici bileşendir(Şirin, 2006).
3. Nükleer kuvvet nükleonların proton veya nötron olup olmamasından bağımsızdır. Bu özelliğe *nükleer kuvvetin yük bağımsızlığı* denir(Krane, 2001).
4. Çekirdekte bir nükleonun etkileştiği yakın komşu sayısının bir üst sınırı vardır. Bu özelliğe *doyma özelliği* denir. Nükleer madde yoğunluğunun çekirdeğin iç bölgesinde sabit olması bu özellikten kaynaklanır(Şirin, 2006).
5. Nükleer kuvvet, nükleonları spinlerinin paralel veya antiparalel olup olmamalarına bağlıdır.
6. Bu kuvvetin merkezi olmayan veya tensör bir bileşeni vardır. Tensör kuvvet, merkezi kuvvetlerde bir hareket sabiti olan yörüngesel açısal momentumu korumaz(Krane, 2001).

Nükleer kuvvetlerin nicel özelliklerini incelemenin iki yolu vardır. Bunlardan ilki, iki nükleondan oluşan sistemleri incelemektir(proton-proton, nötron-nötron, nötron-proton sistemleri). Fakat doğada bulunan tek kararlı sistem nötron-proton sistemidir. İkinci yol *np*, *pp* ve *nn* saçılma deneylerinin çözümlenmesidir. Saçılma deneylerinde nükleonların, çiftler halinde etkileşen iki cisim etkileşmesi olduğu varsayılır. Nükleonların bu etkileşmesi bir potansiyel fonksiyonuyla temsil edilir. İki nükleon sisteminin özellikleri, bu potansiyelle Schrödinger denklemi çözülerek belirlenir.



Şekil 1.3 Nükleon- nükleon potansiyeli(Şirin, 2006)

NN potansiyeli potansiyel kuyusu ile temsil edilir. Bu potansiyellere “hard-core potansiyeller” denir. $r = R$ de nükleonlar arası etkileşme başlar, nükleer çekim kuvveti önce artar daha sonra azalır ve potansiyelin minimum noktasında sıfır olur. Bu noktadan sonra, nükleon yaklaşmaya devam ederse nükleer kuvvetin itici bileşeni devreye girer ve itici kuvvet hızla artar(Şirin, 2006).

1.3 Sıvı Damlası Modeli

Sıvı damlası modeli çekirdeklerin ilk modelidir. Bu model çekirdeğin bazı özelliklerinin açıklanmasını sağlar. Çekirdek, nükleonlardan oluşan yüklü ve sıkıştırılmaz bir sıvı damlası olarak davranır. 1930 yılında Niels Bohr tarafından önerilen bu model, çekirdeklerin bağlanma enerjisi, kütle, deformasyon ve fisyon olaylarını açıklamak için kullanıldı. Çekirdek ve klasik sıvı damlası modelinin özelliklerine bir bakalım. Çekirdeğin madde yoğunluğu sabit, küresel ve hacmi kütle numarasıyla orantılıdır. Çekirdekte nükleonlar çekici nükleer kuvvetle etkileşir. Sıvı damlasının özellikleri incelendiğinde madde yoğunluğu sabit, şekli kütle çekim kuvveti ihmal edilirse küreseldir. Bu modelde moleküller arası kuvvet doyma özeliğine sahip kısa erimli çekici kuvvettir.

Bir sıvı damlasının toplam bağlanma enerjisi, damlanın buharlaşma enerjisine eşittir. m kütleli bir damlanın buharlaşma enerjisi,

$$Q = mL \quad (1.9)$$

dir. Burada L sabit buharlaşma ısıdır. Buharlaşma enerjisi, N moleküllerin toplam sayısı ve M bir molekülün kütlesi ise

$$Q = mL = (NM)L = (ML)N = aN \quad (1.10)$$

moleküllerin sayısı ile orantılıdır. Çekirdeklerin toplam bağlanma enerjisi de kütle numarasıyla orantılıdır.

$$B(A, Z) = e(A, Z)A \quad (1.11)$$

Sıvı damlası modeli, (1.10) ile (1.11) eşitliği arasındaki benzerliğe dayanır(Şirin, 2006).

1.3.1 Yarı Deneysel Bağlanma Enerjisi Formülü

Weizacker çekirdeklerin toplam bağlanma enerjisini sıvı damlası modelini kullanarak formüle etti. *Yarı deneysel bağlanma enerjisi formülü* olarak adlandırılan bu bağıntı, çekirdeğin A kütle numarası ve Z atom numarasının yavaş değişen bir fonksiyonudur.

$$B(Z, A) = a_h A - a_y A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_s (N - Z)^2 A^{-1} + \delta(Z, A) \quad (1.12)$$

Yarı deneysel bağlanma enerjisi formülündeki ilk terim *hacim enerjisi* terimidir. Toplam bağlanma enerjisi nükleonların sayısı ile orantılıdır. Bu terim, sabit nükleon başına ortalama bağlanma enerjisi gerçeğini hesaba katar. Hacim enerjisi toplam bağlanma enerjisinin baskın olan terimidir. Diğer terimler düzeltme terimleridir.

$$E_h = a_h A \quad (1.13)$$

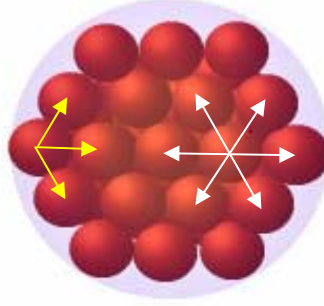
Hacim enerjisinden bahsedilirken çekirdek içindeki tüm nükleonların özdeş koşullarda bulunduğu varsayılır. Gerçekte, çekirdeğin iç bölgesindeki bir nükleonun etkileşmelerinin sayısı ile çekirdeğin yüzeyinde bulunan bir nükleonun etkileşme sayısı aynı değildir(Şekil 1.4). Bu fark yüzey gerilimini ve *yüzey enerjisini* meydana getirir(Şirin, 2006).

Yüzey enerjisi toplam bağlanma enerjisinde azalmaya neden olur. Eğer yüzey gerilimi σ ise yüzey enerjisi,

$$E_y = 4\pi R^2 \sigma = 4\pi r_0^2 \sigma A^{\frac{2}{3}} \equiv a_y A^{\frac{2}{3}} \quad (1.14)$$

denklemleri ile ifade edilir. (Çekirdek yarıçapı $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$) Yüzey enerjisi çekirdeğin yüzey

alanıyla veya $A^{\frac{2}{3}}$ ile orantılıdır(Fetter vd., 2003; Walecka, 2004).



Şekil 1.4 Çekirdeklerin yüzeyinde bulunan nükleonların etkileşme sayısı iç bölgedeki nükleonlardan daha azdır. İç bölgedeki nükleonlar her bakımdan özdeştir.

Formüldeki üçüncü terim *Coulomb enerjisi* terimidir. Yüklü protonların Coulomb etkileşmesinden kaynaklanır. İtici Coulomb potansiyel enerjisi bağlanma enerjisini azaltır. Coulomb enerjisi, çekirdek yükünün R yarıçaplı küresel hacme düzgün olarak dağıldığı varsayılarak hesaplanır.

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{Z^2 k e^2}{R} = \left[\frac{3}{5} \frac{k e^2}{r_0} \right] \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} = a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} \quad (1.15)$$

Ağır çekirdekler için Coulomb enerjisi önemlidir. Çünkü Coulomb enerjisi Z ile hızla artar. Klasik sıvı damlası modeli kullanılarak toplam bağlanma enerjisinin ilk üç terimi elde edilebilir.

$$B(Z, A) = a_h A - a_y A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} \quad (1.16)$$

Nükleon başına bağlanma enerjisi yazılırsa,

$$e(Z, A) = a_h - a_y A^{-\frac{1}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{4}{3}} \quad (1.17)$$

Z atom numarası en küçük olan çekirdeğin nükleon başına bağlanma enerjisi en büyük olur ve protondan başka kararlı çekirdek olamaz. Fakat kararlı çekirdeklerde Z artarken A kütle numarası da artar. (1.15)'deki bağlanma enerjisi formülü eksiktir ve yeni terimler eklenmelidir. Bu terimler kuantum mekanik etkilerinden kaynaklanır.

Simetri enerjisi, simetrik olmayan ($Z, A, N \neq Z$) çekirdeklerin bir özelliğidir. Simetrik ($Z, A, N = Z$) ve simetrik olmayan ($Z, A, N \neq Z$) iki izobarı Coulomb enerjileri arasındaki küçük farkı ihmal ederek inceleyelim. Simetrik çekirdekte nötron ve protonlar kendi potansiyel kuyularında ve özdeş enerji düzeylerinde bulunurlar. Simetrik olmayan izobar yaratmak için simetrik olan izobardan bir veya daha fazla protonun nötrona dönüştürülmesi gerekir. Pauli ilkesi gereği oluşan bu nötronlar, nötron kuyusunun boş olan daha yüksek enerjili bir düzeyine yerleşebilirler. Oluşan izobarın toplam enerjisi, simetrik izobara göre artar. Toplam enerjinin artması bağlanma enerjisinde azalma meydana getirecektir. Simetri enerjisi, simetrik ve simetrik olmayan iki çekirdeğin toplam enerjileri arasındaki fark olarak tanımlanır.

$$E_s = E(Z, A, N \neq Z) - E(Z, A, N = Z) \quad (1.18)$$

Simetri enerjisi nötron fazlasının bir fonksiyonudur. Proton ve nötron sayısı eşit olan çekirdeklerin simetri enerjisi sıfırdır. Simetri enerjisi,

$$E_s = a_s (N - Z)^2 A^{-1} \quad (1.19)$$

denklemleri ile gösterilir (Şirin, 2006). Simetri enerjisi ve a_s simetri enerjisi terimi katsayısı, fermi gaz modelinde (FGM) ayrıntılı olarak incelenecektir.

Benzer nükleonlar kararlı yapılar meydana getirecek şekilde ikişer ikişer çiftlenirler. Bağlanma enerjisi formülündeki (1.12) son terim, çiftlenim etkileşmesini hesaba katan *çiftlenim enerjisi*dir. Tek sayıda nükleondan oluşmuş çekirdekler için (tek Z ve çift N veya tek N ve çift Z) bu terim hesaba katılmaz. Z ve N 'nin tek olduğu durumda tek protonlardan biri nötrona (veya tersi) dönüşerek bağlanma enerjisi elde edilir. Şöyle ki, dönüşen nükleon daha önce tek olan diğer nükleonla bir çift oluşturur. Tabiatta bulunan kararlı çekirdekler incelenirse çiftlenim etkileşmesinin önemi açıkça görülür (Krane, 2001). Tek-tek çekirdeklerin sayısı yalnız dört (${}^2_1H, {}^6_3Li, {}^{10}_5B, {}^{14}_7N$) iken, çift çift çekirdek sayısı 169'dur (Tuli, 2005).

Çizelge 1.1 Kararlı çekirdeklerin sayısı

Z	N	Kararlı çekirdek sayısı
Çift	Çift	169
Çift	Tek	61
Tek	Çift	52
Tek	Tek	4
TOPLAM		286

Çiftlenim enerjisi,

$$E_{\zeta} = \delta(Z, A) = \lambda a_{\zeta} A^{-\frac{3}{4}} \quad (1.20)$$

denklemleriyle elde edilir. A kütle numarası artarken çiftlenim enerjisi azalır. Çiftlenim enerjisi toplam bağlanma enerjisine

$$\lambda \equiv \begin{cases} +1 & \text{çift } Z - \text{çift } N \\ 0 & \text{çift } Z - \text{tek } N \text{ veya tek } Z - \text{çift } N \\ -1 & \text{tek } Z - \text{tek } N \end{cases}$$

işaret anlaşmasıyla yansıtılır(Şirin, 2006).

Çizelge 1.2 Terimlerin katsayıları (Fetter ve Walecka, 2003).

a_h (MeV)	a_y (MeV)	a_c (MeV)	a_s (MeV)	a_{ζ} (MeV)
15,75	17,8	0,71	23,7	34

Simetri ve çiftlenim enerjisi terimlerinin (1.16)'ya eklenmesiyle yarı deneysel bağlanma enerjisi formülü (1.12) elde edilir.

2. FERMİ GAZ MODELİ (BAĞIMSIZ PARÇACIK MODELİ)

Fermiyonlardan meydana gelen topluluğa fermi gazı denir. Gaz içinde fermiyonlar bağımsız parçacık gibi hareket ederler. Coulomb etkileşmesi ihmal edilirse bir metaldeki serbest elektronlar, Coulomb ve nükleer etkileşme ihmal edilirse ağır bir çekirdekdeki nükleonlar fermi gazına örnek olarak verilebilir. Fermi gazında girilebilir kuantum durumlarının sayısı fermiyonların sayısı kadardır. Bu nedenle fermi gazı çoğu zaman dejenere fermi gazı olarak adlandırılır.

2.1 Fermi Gaz Modeli

Özdeş N fermiyondan oluşmuş fermi gazının V hacimli potansiyel kuyusunu doldurduğunu varsayalım. Potansiyel kuyusunun enerji düzeyleri ayrık(kuantize) ve her enerji düzeyinde Pauli ilkesi gereği spinleri ters iki fermiyon bulunur. Fermiyonlar en düşük enerjili düzeyden başlayarak artan enerjiye göre enerji düzeylerini doldururlar. Fermi gazının bu en düşük enerjiye sahip durumu *taban durumu* olarak adlandırılır. Fermi gazının karakteristik büyüklükleri, gazın taban durumunda tanımlanır. En yüksek enerjili dolu enerji düzeyine *fermi düzeyi*, bu düzeyin enerjisi *fermi enerjisi* ve bu düzeydeki fermiyonların momentumuna *fermi momentumu* denir. Fermi enerjisine karşılık gelen sıcaklık *fermi sıcaklığı* olarak adlandırılır(Şirin, 2006).

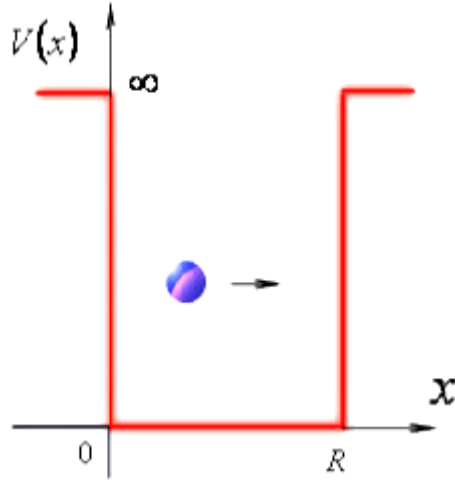
$$E_f = kT \quad k, \text{ boltzmann sabiti} \quad (2.1)$$

2.1.1 Potansiyel Kuyusu

Küçük bir hacimdeki gaz molekülleri sonsuz kuyudaki parçacıklar olarak düşünülebilir. Böyle sistemlerin kuantum mekaniği, Schrödinger denkleminin çözümünü gerektirir. İki potansiyel duvarı arasına hapsedilmiş bir parçacığı ele alalım. Problemi basitleştirmek için hareketin tek boyutta incelenmesi daha uygundur(Şirin, 2006). Potansiyel fonksiyonu

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < R \\ +\infty & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ifadesi ile tanımlanır (Şekil 2.1). Toplam enerjisi E olan bir parçacık için Schrödinger denklemi,



Şekil 2.1 Sonsuz kuyu potansiyeli

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.2)$$

$0 < x < R$ bölgesinde yazılırsa, bu bölgede potansiyel $V(x) = 0$ ise,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x) \quad (2.3)$$

olur. (2.3) eşitliğinin çözümü $e^{\pm ikx}$ gibi iki düzlem dalganın toplamıdır. Çözüm reel sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazılırsa

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (2.4)$$

ifadesi elde edilir. Diğer bölgelerde $V(x) = \infty$ potansiyel sonsuz olduğu için dalga fonksiyonu sıfıra eşit olmalıdır (Karaoğlu, 1998). Şöyle ki, $+x$ yönünde ilerleyen parçacık $x = R$ duvarına ulaşıncaya kadar serbest hareket eder ve duvardan yansıtılır. Sonuç olarak parçacık iki sınır arasında tuzaklanır. Parçacığı duvarların dışında bulmak imkânsızdır (Şirin, 2006).

$x = 0$ ve $x = R$ duvarlarında dalga fonksiyonu $\psi(x) = 0$ dır. Bu sınır koşulları (2.4)'e uygulanırsa;

- $\psi(0) = 0$ ise $A.0 + B.1 = 0$ olabilmesi için $B = 0$ olmalıdır.

- $\psi(R)=0$ ise $A \sin kR + 0 \cdot \cos kR = 0$ ifadesinin olabilmesi için sinüs fonksiyonunun argümanı π sayısının katları olmalıdır.

$$\sin kR = 0 \rightarrow kR = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (2.5)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{R} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.6)$$

$n = 0$ hiç parçacığın olmadığı durumdur.

Parçacığın mümkün enerji özdeğerleri

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mR^2} n^2 \quad (2.7)$$

bulunur. Bu sonuca göre, potansiyel kuyusundaki bir parçacığın alabileceği enerji değerleri n tam sayısına bağlıdır. Yani enerji düzeyleri kesikli(kuantize)'dir(Karaoğlu, 1998). Öz fonksiyonlar ise

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \quad (2.8)$$

olarak elde edilir. Burada A_n normalizasyon sabitidir.

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{R}} \quad (2.9)$$

Eksenler doğrultusunda R konumunda bulunan duvarlar, eni, boyu ve yüksekliği R olan bir potansiyel kutusu meydana getirir. Bu durumda problemin üç boyutlu çözümleri,

$$\begin{aligned} \psi_{n_x n_y n_z}(r) &= \psi_{n_x}(x) \cdot \psi_{n_y}(y) \cdot \psi_{n_z}(z) \\ \psi_{n_x n_y n_z}(r) &= \sqrt{\frac{8}{R^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{R} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{R} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{R} z\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y + E_z \\ E &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mR^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

denklemleri ile gösterilir. Kutu içinde potansiyel sıfır olduğu için eksenler doğrultusundaki hareketler etkileşmez ve hareketlerin enerjileri korunur. Kuantum mekanikte korunumlu niceliklere bir kuantum numarası karşılık gelir. n kuantum sayısı enerjiye karşılık gelir ve

(2.11)'de görüldüğü gibi enerji n_x, n_y, n_z kuantum sayılarına bağlıdır. Kuantum mekanikte, aynı bir E enerji özdeğerine $\psi_1, \psi_2, \dots$ gibi farklı özfonksiyonlar karşılık geliyorsa E bir katlı (dejenere) durumdur denir. (2.11)'de n^2 nin aynı değeri için farklı $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ toplamı yazılabilir (Çizelge 2.1).

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \quad (2.12)$$

Enerji aynı kalmasına rağmen (2.10)'daki dalga fonksiyonu değişir. Bu durumda enerji düzeyleri katlıdır.

Çizelge 2.1 Küp içindeki parçacığın enerjisi ve katlılığı

Enerji n^2	n_x, n_y, n_z	Katlılık
$3E_1$	(1,1,1)	1
$6E_1$	(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)	3
$9E_1$	(2,2,1), (2,1,2), (2,2,1)	3
$11E_1$	(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)	3

Problemimizdeki enerji katlılığı potansiyel kutusunun küp şeklinde seçilmesinden kaynaklanır. Katlılık küpün simetrisinden ileri gelir. Bir sistemin simetrisi varsa durağan durumları katlıdır (Şirin, 2006).

2.1.2 Durumların Sayısı

Eksenleri n_x, n_y, n_z olan dik koordinat sistemi seçilirse, bu sistemde her nokta bir enerji düzeyini gösterir. Yarıçapı n olan bir küre içinde pozitif koordinatlı noktaların sayısı enerji düzeylerinin sayısını verecektir.

$$n(E) = \frac{1}{8} \left(\frac{4\pi}{3} n^3 \right) = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2mR^2 E}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} = \frac{4\pi V}{3(2\pi\hbar)^3} (2mE)^{3/2} \quad (2.13)$$

Bu ifadenin türevi alınışa,

$$dn(E) = \frac{2\pi V}{(2\pi\hbar)^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE \quad (2.14)$$

enerjisi E ile $E + dE$ arasında kalan durumların sayısı elde edilir. Birim enerji başına durumların sayısı (durum yoğunluğu) (2.14)'den,

$$\rho(E) = \frac{dn(E)}{dE} = \frac{2\pi V}{(2\pi\hbar)^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \quad (2.15)$$

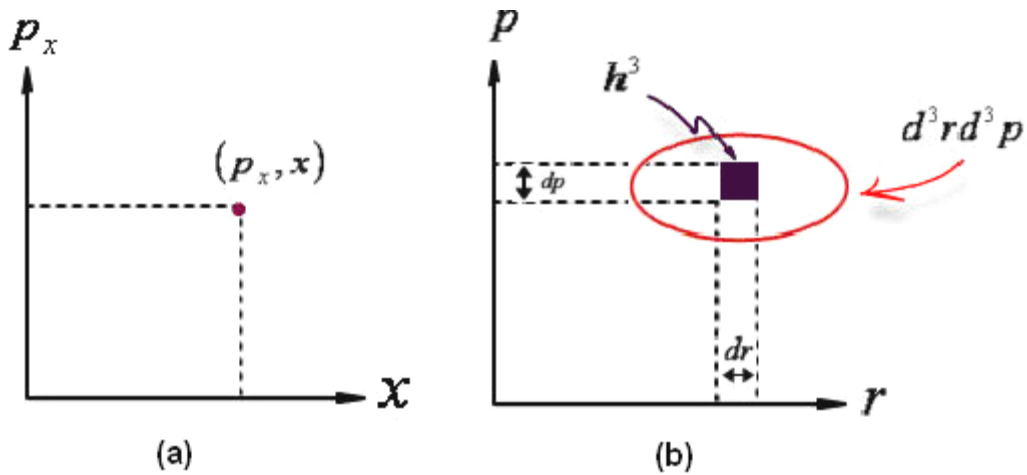
elde edilir. Momentum cinsinden durum yoğunluğu,

$$\rho(p) = \frac{dn(E)}{dp} = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \quad (2.16)$$

denklemleriyle gösterilir(Şirin, 2006).

2.1.3 Durum Sayısının Faz Uzayında Hesabı

Bir parçacığın klasik durumu faz uzayında konum ve momentum koordinatları verilerek tam olarak belirlenir. Faz uzayının her noktası bir klasik durumu belirtir. Kuantum mekanikte bir parçacığın durumu klasik fizikten farklıdır(Şirin, 2006). Heisenberg belirsizlik ilkesine göre, *bir parçacığın konumu ile momentumunu aynı anda sonsuz duyarlılıkta ölçülemez*(Karaoğlu, 1998). O halde kuantum durumu bir nokta değil $r + dr$ ile $p + dp$ koordinatlarıyla sınırlı bir hacimdir.



Şekil 2.2 a) Klasik faz uzayı b) Kuantum faz uzayı (Şirin, 2006)

Heisenberg belirsizlik ilkesi kullanılarak bir kuantum durumunun faz uzayında işgal ettiği en

küçük hacim belirlenir.

$$\Delta r \Delta p = h^3 = (2\pi\hbar)^3 \quad (2.17)$$

Faz uzayında d^2n kuantum durumlarının sayısı, d^3rd^3p faz uzayı hacminin bir kuantum durumu $(2\pi\hbar)^3$ hacmine bölünmesiyle bulunur.

$$d^2n = \frac{d^3rd^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (2.18)$$

Burada r integrali (d^3r adi uzay integralidir) V hacmini verir. Durumların sayısı

$$dn(p) = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \quad (2.19)$$

denklemleriyle belirlenir(Şirin, 2006).

2.1.4 Fermi Momentumu ve Fermi Enerjisi

Potansiyel kuyusunun dibinden fermi düzeyine kadar olan n durumların sayısı, (2.19)'un integrali alınarak bulunur.

$$n = \int_0^{p_f} dn = \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_f^3 \quad (2.20)$$

Her durumda enerji düzeyinde iki fermiyon bulunduğu için potansiyel kuyusundaki toplam fermiyon sayısı, durum sayısının iki katı olacaktır.

$$N_t = 2n = 2 \left(\frac{4\pi V}{3(2\pi\hbar)^3} \right) p_f^3 \quad (2.21)$$

Fermi momentumu bu ifadeden yazılırsa,

$$p_f = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N_t}{V} \right)^{1/3} \quad (2.22)$$

fermi momentumunun N_t/V birim hacimdeki fermiyon sayısına bağlı olduğu görülür. Fermi enerjisi ise

$$E_f = \frac{p_f^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N_t}{V} \right)^{2/3} \quad (2.23)$$

bağıntısı ile hesaplanır.

Potansiyel kuyusunda farklı enerji düzeylerinde bulunan fermiyonların kinetik enerjileri de farklıdır. Fermiyonların ortalama davranışını belirlemek için

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^p E d^3 p}{\int_0^p d^3 p} \quad (2.24)$$

bağıntısı ile tanımlanan ortalama kinetik enerji ifadesi kullanılırsa, herhangi bir düzeydeki fermiyonun ortalama kinetik enerjisi

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{p_f^2}{2m} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N_t}{V} \right)^{2/3} \quad (2.25)$$

elde edilir. Sistemin toplam ortalama kinetik enerjisi

$$E_t = N_t \langle E \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m} \left(3\pi^2 \frac{N_t^{5/2}}{V} \right)^{2/3} \quad (2.26)$$

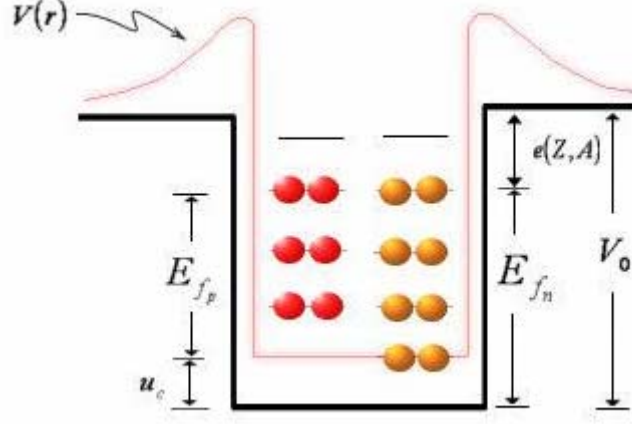
olarak bulunur(Şirin, 2006).

2.2 Çekirdeklerin Fermi Gaz Modeli

FGM, çekirdeğin yapısını kuantum mekaniği de kullanarak açıklamaya çalışan en eski yöntemdir. Bu modelde çekirdek, serbest proton ve nötronlardan oluşmuş çok küçük uzay bölgesiyle çevrelenmiş gaz olarak tanımlanır. Bu yapı çekirdek hacmi olarak adlandırılır. Fermi gaz modeli çekirdeklere uygulanırken daha dikkatli olunmalıdır. Çünkü çekirdek nötron gazı ve proton gazı olmak üzere farklı iki fermi gazından oluşur. Bu iki gazın toplam hacmi çekirdeğin hacmine eşittir.

Nötron gazı nötron potansiyel kuyusunda, proton gazı proton potansiyel kuyusunda bulunur (Şekil 2.3). Yüklü protonlar arasındaki Coulomb etkileşmesinden dolayı potansiyel kuyularının şekli ve derinliği nötronlara göre farklıdır. Proton kuyusunun dibi nötron kuyusundan u_c bir protonun ortalama Coulomb potansiyel enerjisi kadar daha yukarıdadır. Eğer küresel kuyunun derinliği proton ve nötronlar için aynı ise, ağır çekirdeklerde nötron

sayısı proton sayısından fazla olduğu için nötronların fermi düzeyi daha yüksek olmalıdır. Bu durumda son nükleonun bağlanma enerjisi yüke yani son nükleonun proton veya nötron olmasına bağlıdır.



Şekil 2.3 Çekirdeklerin fermi gaz modelinin potansiyeli.

Fakat deneysel sonuçlar göstermiştir ki fermi düzeyi nötron ve protonlar için aynıdır ve proton kuyusunun tepesinde bir $V(r)$ Coulomb potansiyel engeli vardır.

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{r} \quad (2.27)$$

Potansiyel engeli, yüklü bir parçacığın çekirdekten dışarı kaçmasını veya dışarıdan yüklü bir parçacığın çekirdek içerisine girmesini engeller. Bir parçacığın çekirdekten kaçması ve çekirdeğe katılması için kinetik enerjisinin potansiyel engelinden daha yüksek olması gereklidir (Şirin, 2006).

2.2.1 Nükleonların Fermi Momentumu ve Enerjisi

Çekirdekte en düşük enerji düzeyi en güçlü bağlanma enerjine sahiptir. Bu, taban durumun en kararlı durum olmasını sağlar. Enerji seviyeleri en alt düzeyden yukarı düzeylere doğru dolar. Dolu en yüksek enerjili düzey fermi düzeyi ve bu düzeyin enerjisi fermi enerjisi olarak adlandırılır. Eğer fermi düzeyinin üzerinde herhangi bir nükleon yoksa son nükleonun bağlanma enerjisi fermi enerjisini verir.

Proton ve nötronun fermi momentumunu sırasıyla p_{fp} ve p_{fn} ile gösterelim. Fermi

momentumu ifadesinde (2.22) proton ve nötronlar için $N_t = Z$ ve $N_t = N$, çekirdek hacmi olarak da $V = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A$ yazılırsa proton ve nötronların fermi momentumu,

$$\begin{aligned} p_{f_p} &= \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{1/3} \\ p_{f_n} &= \frac{\hbar}{r_0} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{N}{A} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Benzer olarak, E_{f_p} protonun fermi enerjisi ve E_{f_n} nötronun fermi enerjisi (2.23) kullanılarak yazılır.

$$\begin{aligned} E_{f_p} &= \frac{\hbar^2}{2m_p r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{2/3} \\ E_{f_n} &= \frac{\hbar^2}{2m_n r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{N}{A} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fermi enerjisi nükleonun kütlesine bağlıdır. Kütlesi büyük parçacıkların fermi enerjisi daha yüksektir.

Potansiyel kuyusunda nötron ve protonlar farklı enerji seviyelerinde bulunduklarından kinetik enerjileri de farklıdır. Ortalama kinetik enerji,

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} \frac{p_f^2}{2m} = \frac{3}{5} E_f \quad (2.30)$$

ise proton ve nötronların ortalama kinetik enerjileri,

$$\begin{aligned} \langle E_p \rangle &= \frac{3}{5} E_{f_p} = \frac{3\hbar^2}{10m_p r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{Z}{A} \right)^{2/3} \\ \langle E_n \rangle &= \frac{3}{5} E_{f_n} = \frac{3\hbar^2}{10m_n r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \frac{N}{A} \right)^{2/3} \end{aligned} \quad (2.31)$$

elde edilir. Bir (N, Z) çekirdeğin toplam ortalama kinetik enerjisi, protonlar ve nötronların ortalama kinetik enerjilerinin toplamıdır.

$$E_p = Z \langle E_p \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m_p r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{3/2} \left(\frac{Z^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$

$$E_n = N \langle E_n \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m_n r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{3/2} \left(\frac{N^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$
(2.32)

Proton ve nötron kütleleri aynı alınırsa ($m(p) \cong m(n) = m$) ve potansiyel kuyuları arasındaki fark ihmal edilirse bir çekirdeğin toplam ortalama kinetik enerjisi

$$\langle E(N, Z) \rangle = E_p + E_n = \frac{3\hbar^2}{10m r_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{3/2} \left(\frac{Z^{5/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}} \right)$$
(2.33)

ifadesiyle yazılır. FGM çekirdeklerin potansiyel kuyusunun derinliği ve simetri enerjisi teriminin katsayısının hesaplanmasında kullanılır(Şirin, 2006).

2.2.2 Simetri Enerjisi ve Simetri Enerjisi Teriminin Katsayısı

Birinci bölümde yarı deneysel bağlanma enerjisi formülü açıklanırken doğrudan verilen simetri enerjisi ve simetri enerjisi teriminin katsayısı FGM kullanarak elde edilir. Simetri enerjisi, simetrik ($Z, A, N = Z$) ve simetrik olmayan ($Z, A, N \neq Z$) iki izobarın toplam enerjileri arasındaki fark olarak tanımlanır.

$$E_s = E(Z, A, N \neq Z) - E(Z, A, N = Z)$$
(2.34)

Çekirdeklerin kinetik ve potansiyel enerjilerinin simetri enerjisine katkısını ayrı ayrı inceleyelim.

2.2.2.1 Kinetik Enerji Katkısı

Simetrik bir izobarın toplam ortalama kinetik enerjisi (2.33) kullanılarak elde edilir.

$$\langle E(Z = N) \rangle = \frac{3\hbar^2}{10m r_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} A$$
(2.35)

Simetrik olmayan izobarın toplam ortalama kinetik enerjisini elde edelim:

$$A = N + Z$$

$$\delta = N - Z$$
(2.36)

Bu eşitliklerden,

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\delta}{A} \right) \\
N &= \frac{A}{2} \left(1 + \frac{\delta}{A} \right)
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

ifadeleri yazılır. (2.33) eşitliğindeki $Z^{5/3}$ ve $N^{5/3}$ terimleri $\frac{\delta}{A} \ll 1$ olmak koşuluyla binom serisine açılabilir. Binom açılımı

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots \tag{2.38}$$

ise

$$\begin{aligned}
Z^{5/3} &= \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \left(1 - \frac{5\delta}{3A} + \frac{10\delta^2}{9A^2} - \dots \right) \\
N^{5/3} &= \left(\frac{A}{2} \right)^{5/3} \left(1 + \frac{5\delta}{3A} + \frac{10\delta^2}{9A^2} + \dots \right)
\end{aligned}
\tag{2.39}$$

olarak yazılır. Seri açılımında ilk üç terim yeterlidir. Seri açılımları (2.33)'de yerine yazılırsa simetrik olmayan izobar için toplam ortalama kinetik enerji ifadesi elde edilir.

$$\langle E(N, Z) \rangle = \frac{3\hbar^2}{10mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left(A + \frac{5}{9} \frac{\delta^2}{A} \right) \tag{2.40}$$

Simetri enerjisine kinetik enerjiden gelen katkı, simetri enerjisi tanımına göre,

$$E_s^k = \langle E(N, Z) \rangle - \langle E(Z = N) \rangle = \left[\frac{1}{6} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left(\frac{\hbar^2}{mr_0^2} \right) \right] \frac{(N-Z)^2}{A} \tag{2.41}$$

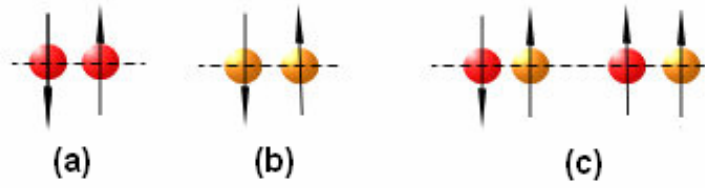
elde edilir. Yarı deneysel bağlanma enerjisi formülü (1.18) hatırlanırsa son terim simetri enerjisi, parantez içerisindeki ifadede simetri enerjisi terimi katsayısıdır. $m_p c^2 = 938,280 \text{ MeV}$, $\hbar c = 197,329 \text{ MeV}$, $r_0 = 1,2 \text{ fm}$ değerleri için simetri enerjisi terimi katsayısına kinetik enerji katkısı

$$a_s^k = \frac{1}{6} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{mr_0^2} = 11.1 \text{ MeV} \tag{2.42}$$

olarak bulunur. Bulunan bu değer deneysel değer yarısı kadardır (Heyde, 1999; Şirin, 2006).

2.2.2.2 Potansiyel Enerji Katkısı

Simetri enerjisine potansiyel enerjiden gelen katkı, tam kinetik enerji kadardır. Pauli ilkesi gereği, aynı cins nükleonlar aynı kuantum durumunda yalnız spinleri ters paralel olarak bulunabilir. Eğer nükleonlar aynı cins değilse, aynı kuantum durumunda hem paralel hem de ters paralel bulunabilir. Çekirdek içinde etkileşmenin yalnız bu durumlarda mümkün olduğunu varsayalım. Ayrıca potansiyeli, aynı cins ve farklı cins iki nükleonun etkileşmesinin eşit ve etkileşmelerin spin yönelimlerinden bağımsız olarak hesaplayacağız.



Şekil 2.4 Aynı kuantum durumundaki (a) iki proton (b) iki nötron (c) bir proton ve bir nötron (Şirin, 2006).

Bir çekirdekte, bir protonun komşu protonlarla etkileşme sayısı $\frac{Z}{A}$, yakın komşu nötronlarla etkileşme sayısı $\frac{2N}{A}$ ile orantılıdır. Nötron için etkileşme sayıları benzer olarak $\frac{N}{A}$ ve $\frac{2Z}{A}$ olur. İki nükleonun etkileşmesinden kaynaklanan ortalama nükleer potansiyel enerji $(-B)$ olarak gösterilirse, bir proton ve bir nötronun yakın komşu nükleonlarla olan toplam nükleer potansiyel enerjisi,

$$\begin{aligned} \langle v_p \rangle &= (-B) \frac{Z + 2N}{A} \\ \langle v_n \rangle &= (-B) \frac{2Z + N}{A} \end{aligned} \quad (2.43)$$

ifadeleri ile yazılır. Çekirdeğin toplam ortalama nükleer potansiyel enerjisi tüm nükleonlar hesaba katılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle E(N, Z) \rangle &= \frac{1}{2} (N \langle v_n \rangle + Z \langle v_p \rangle) \\ \langle E(N, Z) \rangle &= \frac{(-B)}{2A} (Z^2 + N^2 + 4NZ) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Buradaki $\frac{1}{2}$ çarpanı aynı etkileşmenin iki kez sayılmasını önlemek için gereklidir (Bir nükleon çifti arasındaki (1,2) ve (2,1) etkileşmeleri aynı etkileşmeyi gösterir). (2.37) eşitliğinden elde edilen,

$$Z^2 + N^2 = \frac{A^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} \quad \text{ve} \quad 4NZ = A^2 - \delta^2$$

ifadeleri (2.44)'de yerine yazılırsa çekirdeğin toplam ortalama nükleer potansiyel enerjisi elde edilir.

$$\langle E(N, Z) \rangle = \frac{3A(-B)}{4} \left(1 - \frac{\delta^2}{3A^2} \right) \quad (2.45)$$

Simetrik izobarın toplam ortalama nükleer potansiyel enerjisi

$$\langle E(Z = N) \rangle = \frac{3A(-B)}{4} \quad (2.46)$$

olacaktır. Simetri enerjisine potansiyel enerjiden gelen katkı (2.34) eşitliği kullanılarak,

$$E_s^p = \left(\frac{B}{4} \right) \frac{\delta^2}{A} = \left(\frac{B}{4} \right) \frac{(N - Z)^2}{A} \quad (2.47)$$

olarak bulunur. Parantez içerisindeki ifade simetri enerjisi terimi katsayısıdır. B iki nükleonun nükleer potansiyel enerjisi, yaklaşık olarak potansiyel kuyusunun derinliği kadardır ($V_0 = 41,4 \text{ MeV}$). Simetri enerjisi terimi katsayısına potansiyelden gelen katkı

$$a_s^p = \frac{V_0}{4} = 10,3 \text{ MeV} \quad (2.48)$$

elde edilir. Simetri enerjisi terimi katsayısı, kinetik ve potansiyel enerjiden gelen katkıların toplamıyla bulunur.

$$a_s = a_s^k + a_s^p = 11,1 + 10,3 = 21,4 \text{ MeV} \quad (2.49)$$

Bulunan bu değer, yarı deneysel kütle formülünün deneysel bağlanma enerjisine uyumundan elde edilen değere yakındır (Şirin, 2006).

3. İKİNCİ KUANTİZASYON

3.1 Tanımlar

Çok parçacıklı sistemlerin çözümünde matematiksel bir yöntem olan ikinci kuantizasyon kullanılır.

Bu matematiksel yöntem incelenirken, öncelikle parçacık yaratan ve yokeden işlemciler ve bunların komütasyon bağıntıları yazılmalıdır. Komütasyon bağıntıları, problemlerin ikinci kuantizasyonla çözümünde temel teşkil ederler.

Öncelikle birbirleriyle etkileşmeyen A sayıda parçacıktan oluşmuş bir sistemi inceleyelim. Bu durum sistemin hamiltonyenini, her bir parçacığın hamiltonyenleri toplamı şeklinde yazmayı sağlar. Hamiltonyen etkileşmelerden bağımsız, sadece parçacıkların koordinatlarına bağlıdır.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^A \hat{h}(r_i, \hat{p}_i) \quad (3.1)$$

Bu hamiltonyenin çözümleri tek parçacık durumları oluşturularak kolayca çözülebilir. Tek parçacık dalga fonksiyonları seti $\psi_k(r)$ Schrödinger denkleminde yerine yazılırsa $\hat{h}(r, \hat{p})\psi_k(r) = \varepsilon_k \psi_k(r)$, oluşan durum

$$\Psi(r_1, \dots, r_A) = \psi_{k_1}(r_1) \dots \psi_{k_A}(r_A) \quad (3.2)$$

ve hamiltonyenin öz durumu:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad E = \sum_{k=1}^A \varepsilon_k \quad (3.3)$$

Henüz çözüm tam değildir. Dalga fonksiyonu, bozonlar için simetrik fermiyonlar için antisimetrik olmalıdır. İki parçacığın yer değiştirmesi durumunda dalga fonksiyonu bozonlar için aynı, fermiyonlar için işaret değiştirir. Fermiyonlar için bu durum slater determinanı ile gösterilir. A sayıda fermiyondan oluşmuş bir sistemin slater determinanı,

$$\Psi(r_1, r_2, \dots, r_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_{k=1}^A \psi_k(r_{k_{\pi}}) \quad (3.4)$$

π , parçacık konumlarının permutasyonudur. $(-1)^{\pi}$, konumların tek permutasyonunda -1 çift permutasyonunda +1 değerini alır. Bozonlar için bu değer her zaman +1 dir.

Sistem çok sayıda benzer parçacıktan oluştuğu için parçacıkların dalga fonksiyonlarına dayalı çözüm hesaplamada güçlük yaratır. Önemli olan $\psi_k(r)$ durumunda bulunan parçacıkların sayısıdır(Greiner ve Maruhn, 1996). Çok parçacık durumu soyut vektör olarak yazılabilir.

$$|\psi\rangle = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_A\rangle \quad (3.5)$$

$n_1, n_2, \dots$ 'ler durumların doluluk sayısıdır.

Bütün bu durumlar $\{|n_1, n_2, \dots, n_A\rangle\}$ tam ve dik(ortonormal) bir set oluşturur. Bu vektör uzayı, “Fock Uzayı” olarak adlandırılır ve toplam parçacık sayısı sabit bir parametreye bağlı değildir. Her bir n_i doluluk sayısı bozonlar için $0, \dots, \infty$ değerlerini alırken, fermiyonlar için bu değer “Pauli İlkesi” gereği 0 veya 1 olacaktır(2).

Tek bir $|n\rangle$ durumu göz önüne alınırsa, bu durumdaki parçacık sayısını (n) değiştirecek işlemciye ihtiyaç vardır. Bu işlemciyi tanımlamaya çalışalım:

$$|n-1\rangle = \hat{a}|n\rangle \quad (3.6)$$

Durumlar normalize olmalıdır.

$$1 = \langle n-1|n-1\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \quad (3.7)$$

$\hat{a}^\dagger \hat{a}$ işlemcisi değişmeyen bir matris elemanı olmalıdır. Bu nedenle bu işlemci $|n\rangle$ durumunda köşegen(diyagonal) ve özdeğeri 1 olmalıdır. $n=0$ için $\hat{a}$ işlemcisi boşluk durumuna $|0\rangle$ işlerse, normalize durum $|-1\rangle$ olacaktır. Bir parçacığın negatif bir durumda bulunması fiziksel olarak anlamsızdır. Bu nedenle $\hat{a}|0\rangle = 0$ olmalıdır. $|0\rangle$ durumu için $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ işlemcilerinin özdeğeri 0 olmalıdır; fakat deneme işlemcisi $\hat{a}$ bu duruma işlememektedir. Bu sorunun giderilmesi için $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ işlemcilerinin özdeğeri 1 değil, n olarak alınacaktır. $\hat{a}|n\rangle$ durumunun normu

$$n = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Buradan yeni bir tanımlamayla, $\hat{a}$ işlemcisinin $|n\rangle$ durumuna işlemesi sonucunda

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.9)$$

veya matris elemanı formunda yazılırsa

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \quad (3.10)$$

ifadeleri elde edilir. Bu matris elemanının hermit eşleniği alınırsa $\hat{a}^\dagger$ işlemcisi ve

$$\langle n|\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n} \quad (3.11)$$

denklemleri yazılabilir. Sonuç olarak, $\hat{a}$ işlemcisi herhangi bir durumda bulunan parçacıkların sayısını 1 azaltırken, $\hat{a}^\dagger$ işlemcisi parçacıkların sayısını 1 arttıracaktır. $\hat{a}$ işlemcisi “yok etme işlemcisi”, $\hat{a}^\dagger$ işlemcisi “yaratma işlemcisi” olarak adlandırılır.

Yaratma ve yok etme işlemcilerinin komütasyon bağıntılarını inceleyelim. Herhangi bir n için,

$$\begin{aligned} \langle n|[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]|n\rangle &= \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle \\ &= (n+1) - n \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Buradan,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{a}, \hat{a}] = 0, \quad [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \quad (3.13)$$

komütasyon bağıntıları elde edilir.

Bir tek-parçacık durumu incelenirse, tek-parçacık dalga fonksiyonu seti $\psi_k(r)$ dir. İşlemcilerde k indisi alacaktır ve $\hat{a}_k$ işlemcisi dalga fonksiyonu $\psi_k(r)$ olan parçacıkların sayısını 1 azaltacaktır. Bozonlar herhangi bir durumda bulunabileceğinden işlemciler farklı indisler alabilir. Komütasyon bağıntıları da aşağıdaki gibidir.

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (3.14)$$

Bir tek-parçacık dalga fonksiyonu kullanıldığında bozon ve fermiyonlar için bu komütasyon bağıntıları geçerlidir. Fakat $\hat{a}^\dagger$ yaratma işlemcisi kullanarak oluşturulacak bir durumda, aynı tek-parçacık dalga fonksiyonuna sahip çok sayıda parçacık bulunacaktır. Pauli ilkesi gereği bir durumda ancak 1 parçacık bulunabilir yani n , 0 veya 1 değerini alabilir. Buna göre

yaratma işlemcisi bir boşluk durumuna ($|0\rangle$) sadece 1 kere işleyebilir.

$$0 = \hat{a}^\dagger |1\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger |0\rangle \quad (3.15)$$

(yaratma işlemcisinin 1 den büyük kuvveti sıfırdır $(\hat{a}^\dagger)^2 = 0$)

Ayrıca herhangi bir durumda bulunan bir parçacık için $(\hat{a})^2 = 0$ ifadesi geçerlidir. Farklı tek-parçacık dalga fonksiyonuna sahip parçacıklar için dalga fonksiyonu parçacıkların yer değiştirmesi altında işaret değiştirecektir. Bu nedenle iki işlemcinin yer değiştirmesi işaret değişikliğine neden olur.

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger = -\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger \quad (3.16)$$

Bütün bu durumlar ters komütasyon bağıntıları ile formüle edilir. $\left\{ \hat{A}, \hat{B} \right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$

$$\left\{ \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right\} = \delta_{ij}, \quad \left\{ \hat{a}_i, \hat{a}_j \right\} = 0, \quad \left\{ \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \right\} = 0 \quad (3.17)$$

İlk bağıntıyı inceleyelim: $i = j$ durumunda matris elemanı

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}\hat{a}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \rangle + \langle 0 | 1 \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

veya

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} | 1 \rangle &= \langle 1 | \hat{a}\hat{a}^\dagger | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 1 \rangle \\ &= \langle 1 | 0 \rangle + \langle 1 | 1 \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak yazılır(Greiner ve Maruhn, 1996).

3.1.1 Fermiyonların İkinci Kuantizasyonu

Fermiyonların tek bir durum için ters komütasyon bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$\left\{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right\} = 1, \quad \left\{ \hat{a}, \hat{a} \right\} = 0, \quad \left\{ \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \right\} = 0 \quad (3.20)$$

Fock uzayında toplam parçacık sayısı sabit bir parametreye bağlı değildir. Parçacık sayı işlemcisi bu değişkenliği gösterir. Her bir tek parçacık durumu sayı işlemcisi

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.21)$$

ifadesi ile tanımlanır. $\hat{n}$ işlemcisinin öz durumları kullanılırsa, özdeğer $\hat{a}^\dagger$ ve $\hat{a}$ işlemcileri ile sırasıyla artacak ve azalacaktır. n durumunun mümkün iki değeri olabileceğinden $\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger = \hat{a} \hat{a} = 0$ olacaktır ve

$$\begin{aligned}\hat{n}^2 &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a}^\dagger \left(\{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{a} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{n}\end{aligned}\quad (3.22)$$

elde edilir. $\hat{n}$ işlemcisinin özdeğerleri de 0 ve 1 dir. İşlemciler iki öz duruma (boşluk durumu $|0\rangle$ ve bir parçacık durumu $|1\rangle$) işlerlerse,

$$\begin{aligned}\hat{n}|0\rangle &= 0, & \hat{a}^\dagger|0\rangle &= |1\rangle, & \hat{a}|0\rangle &= 0 \\ \hat{n}|1\rangle &= |1\rangle, & \hat{a}^\dagger|1\rangle &= 0, & \hat{a}|1\rangle &= |0\rangle\end{aligned}\quad (3.23)$$

denklemleri elde edilir. İşlemcilerin matris elamanları yazılırsa,

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\quad (3.24)$$

olacaktır. Fakat fermiyonlar için özdeğer 0 ve 1 olacağından

$$\hat{a}|n\rangle = n|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = (1-n)|n+1\rangle\quad (3.25)$$

ifadeleri ile yazılır.

Çok sayıda tek parçacıklı durumdan oluşmuş bir sistemde işlemcilerin ters komütasyon bağıntıları şöyledir:

$$\{ \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \} = \delta_{ij}, \quad \{ \hat{a}_i, \hat{a}_j \} = 0, \quad \{ \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \} = 0\quad (3.26)$$

Sistemi oluşturan durumlar, parçacık sayı işlemcisinin özdeğerleri ile nitelendirilir.

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \sum_i \hat{n}_i = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \\ \hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\end{aligned}\quad (3.27)$$

(n_i , 0 ve 1 değerlerini alabilir.)

Dalga fonksiyonu, yaratma işlemcileriyle temel boşluk durumları $|0\rangle$ arasındaki bağıntı ile sağlanır. Normalizasyon faktörü 1! veya 0! olacağından her zaman 1 dir.

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2} \dots (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} \dots |0\rangle \quad (3.28)$$

Fermiyonların ters simetri özelliğinden dolayı, yaratma ve yok etme işlemcileri $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$ ketine işlerse, bu durumun işareti değişecektir.

$\hat{a}_i$ veya $\hat{a}_j$ işlemcisi (3.28)'deki durumuna işlenirse bu durumun işareti yaratma işlemcilerinin sıralamasıyla belirlenir. $\hat{a}_i$ işlemcisi $n_i = 0$ durumuna işlerse sonuç sıfır olacaktır. Ancak $n_i = 1$ olması durumunda $\hat{a}_i$ işlemcisi bu duruma işleyebilir. (3.28)'deki durumun işareti $\hat{a}_i^\dagger$ yaratma işlemcisinin konumuna bağlıdır. $\hat{a}_i$ yok etme işlemcisi ile $\hat{a}_i^\dagger$ yaratma işlemcisi önünde kalan tüm işlemcilerin ters komütasyonundan, $\{\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\} = \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i = 0$ ve $\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger = -\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ ise

$$\hat{a}_i (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_{i-1}^\dagger)^{n_{i-1}} \hat{a}_i^\dagger \dots |0\rangle = \sigma_i (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_{i-1}^\dagger)^{n_{i-1}} \hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger \dots |0\rangle \quad (3.29)$$

bağıntısı yazılır. Burada σ_i işaret faktörüdür ve $\hat{a}_i^\dagger$ işlemcisinden önceki sayı işlemcisi faktörüne bağlı

$$\sigma_i = (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} n_j} \quad (3.30)$$

denklemleri ile bulunur. $\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger$ işlemcileriyle diğer işlemciler arasındaki sıra değişimi de işaret değişikliğine neden olur. Sonuç olarak

$$\hat{a}_i \hat{a}_i^\dagger |0\rangle = |0\rangle \quad (3.31)$$

eşitliğinden, yok etme işlemcisinin herhangi bir duruma işlemesi sonucu aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{a}_i (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_{i-1}^\dagger)^{n_{i-1}} \hat{a}_i^\dagger \dots |0\rangle &= \sigma_i (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} \dots (\hat{a}_{i-1}^\dagger)^{n_{i-1}} (\hat{a}_{i+1}^\dagger)^{n_{i+1}} |0\rangle \\ &= \sigma_i |n_1, n_2, \dots, n_{i-1}, 0, n_{i+1}\rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

Yaratma işlemcisinin bir duruma işlemesi de benzer olarak yazılabilir. Her iki işlemci için sonuçlar aşağıda verilmiştir (Greiner ve Maruhn, 1996).

$$\hat{a}_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sigma_i (1 - n_i) |n_1, \dots, n_i - 1, \dots\rangle$$

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = \sigma_i n_i |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle \quad (3.33)$$

3.2 İşlemciler

3.2.1 Bir Parçacık İşlemcisi

Etkileşimsiz çok parçacıklı sistemlerin dalga fonksiyonları fock uzayında, kuantum durumlardaki parçacık sayısına bağlı olarak gösterildi. İşlemcileri de bu gösterim şekliyle tanımlayalım. Bir parçacığın yalnızca koordinatına bağlı olan işlemci bir cisim işlemcisi olarak tanımlanır. Örnek olarak kinetik enerji ve yüzey potansiyeli verilebilir. İki cisim işlemcisi ise iki parçacığın koordinatını içerir ve etkileşme potansiyeli iki cisim problemidir.

Bir parçacık işlemcisinin genel gösterimi $\hat{f}(i_\beta)$ dir. Burada i_β , β . parçacığın momentum, spin gibi özelliklerinden bağımsız olup koordinatlarını belirtir. Sistem aynı parçacıklardan oluştuğu için her bir parçacığın özelliği ayırt edilemez. Bunun yerine aynı kuantum durumda bulunan parçacıkların sayısı değerlendirilir. Bu açıklamalardan sonra bir parçacık işlemcisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\hat{f} = \sum_{\beta=1}^A \hat{f}(i_\beta) \quad (3.34)$$

A fermiyondan oluşan sistemin temel durumu yaratma ve yok etme işlemcileri ile $|\psi\rangle = \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle$ ketiyle gösterilir (Greiner ve Maruhn, 1996). Bir parçacık işlemcisi $\hat{f}(i_\beta)$, $|\psi\rangle$ ketine işlenir

$$\hat{f}|\psi\rangle = \sum_{\beta} f(i_\beta) \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \quad (3.35)$$

ve bu ifadeye kapalılık bağıntısı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \hat{f}|\psi\rangle &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} |i_{\alpha}\rangle \langle i_{\alpha} | f(i_{\beta}) \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \sum_{\alpha\beta} \langle i_{\alpha} | f | i_{\beta} \rangle |i_{\alpha}\rangle (-1)^{P_{\beta}} \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\beta-1}}^\dagger \hat{a}_{i_{\beta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \sum_{\alpha\beta} \langle i_{\alpha} | f | i_{\beta} \rangle (-1)^{P_{\beta}} (-1)^{P_{\alpha}} \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\beta-1}}^\dagger \hat{a}_{i_{\alpha}}^\dagger \hat{a}_{i_{\beta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $(-1)^{P_{\beta}}$, $|i_{\beta}\rangle$ durumunu oluşturan $\hat{a}_{i_{\beta}}^\dagger$ yaratma işlemcisinin diğer işlemcilerle olan permutasyonudur. $|i_{\alpha}\rangle$ durumu boşalan $|i_{\beta}\rangle$ durumunun yerini doldururken yine işlemcilerin permutasyonundan dolayı $(-1)^{P_{\alpha}}$ faktörü gelecektir. Fakat $\beta = \alpha$

olduğundan $(-1)^{2P_\beta} = 1$ olacaktır. (3.36)'da $|\psi\rangle$ ketinden $|i_\beta\rangle$ durumu kaldırılıp yerine $|i_\alpha\rangle$ durumu konmuştur. Böyle bir işlem ikinci kuantizasyonda $\hat{a}_{i_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i_\beta} |\psi\rangle$ ifadesiyle gösterilir(1).

Buna göre

$$\hat{f}|\psi\rangle = \sum_{\alpha\beta} \langle i_\alpha | f | i_\beta \rangle \hat{a}_{i_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i_\beta} |\psi\rangle \quad (3.37)$$

ve

$$\langle i_\alpha | f | i_\beta \rangle = f_{\alpha\beta} \quad (3.38)$$

olmak üzere bir parçacık işlemcisi ikinci kuantizasyonda

$$\hat{f} = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \quad (3.39)$$

bağıntısı ile gösterilir(Greiner ve Maruhn, 1996).

3.2.2 İki Parçacık İşlemcisi

İki parçacık işlemcisi, potansiyel enerjiye benzer olarak yazılabilir.

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} \hat{v}(i_\gamma, i_\delta) \quad (3.40)$$

Bir parçacık işlemcinin ikinci kuantizasyonda yazılmasına benzer yolla iki parçacık işlemcisi de yazılır. İşlemciyi $|\psi\rangle = \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle$ ketine uygulayalım:

$$\hat{V}|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\delta} V(i_\gamma, i_\delta) \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \quad (3.41)$$

Bu ifadeye kapalılık bağıntısı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{V}|\psi\rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} |i_\alpha i_\beta\rangle \langle i_\alpha i_\beta | V(i_\gamma, i_\delta) \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \sum_{\gamma\delta} \langle i_\alpha i_\beta | V(i_\gamma, i_\delta) | i_\alpha i_\beta \rangle \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\gamma-1}}^\dagger \hat{a}_{i_{\gamma+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\delta-1}}^\dagger \hat{a}_{i_{\delta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle i_\alpha i_\beta | V(i_\gamma, i_\delta) \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\gamma-1}}^\dagger \hat{a}_{i_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i_{\gamma+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_{\delta-1}}^\dagger \hat{a}_{i_\beta}^\dagger \hat{a}_{i_{\delta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle i_\alpha i_\beta | \hat{V} | i_\gamma i_\delta \rangle \hat{a}_{i_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i_\beta}^\dagger \hat{a}_{i_\gamma} \hat{a}_{i_\delta} |\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.42)$$

olarak elde edilir(1). (3.42)'de yaratma işlemcilerinin permutasyonu sonucu meydana gelen işaret faktörü σ , $\alpha = \gamma$ ve $\beta = \delta$ olduğundan 1 değerini alır.

$$\langle i_\alpha i_\beta | V | i_\gamma i_\delta \rangle = V_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (3.43)$$

ise ikinci kuantizasyonda iki parçacık işlemcisi

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta \quad (3.44)$$

olarak gösterilir(Greiner ve Maruhn, 1996). Hamiltonyen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta \quad (3.45)$$

kinetik enerji ve potansiyel enerji işlemcilerinin toplamı olarak yazılır.

3.3 Fermiyonların Matris Elemanları

Mikroskobik çekirdek modellerinin hesaplamalarında, fermiyon yaratma ve yok etme işlemcilerine dayalı matris elemanları sıkça kullanılır. Örnek olarak

$$M = \langle 0 | \hat{a}_i \hat{a}_j \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger | 0 \rangle \quad (3.46)$$

matrisini gösterebiliriz. Sıfırdan farklı herhangi bir matris elemanı eşit sayıda yaratma ve yok etme işlemcisine sahip olmalıdır. Çünkü (3.46)'da görüldüğü gibi sağdaki boşluk durumunda yaratılacak durumlar tekrardan yok edilmelidir. Eğer fazla sayıdaki yok etme işlemcisi varsa, bu işlemcilerin boşluk durumuna işlemesi herhangi bir durumu sıfır yapacaktır. Sonuç olarak yok etme işlemcisinin sağ taraftaki, yaratma işlemcisinin de sol taraftaki boşluk durumuna işlemesi matris elemanını kaldırır.

$$\hat{a}_i | 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 | \hat{a}_i^\dagger = 0 \quad (3.47)$$

Matris elemanı oluştururken kullanılacak yol, yok etme işlemcilerini matrisin sağına yaratma işlemcilerini de matrisin soluna doğru ilerletmektir. Bu amaçla işlemcilerin yer değişimi sırasında kullanılacak iki basit kural vardır:

1. Aynı tip iki işlemcinin(yaratma-yaratma veya yok etme-yok etme işlemcileri) sıra değişimi yalnızca işareti değiştirir.

$$\hat{a}_i \hat{a}_j = -\hat{a}_j \hat{a}_i, \quad \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger = -\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger \quad (3.48)$$

2. Farklı tipteki iki işlemcinin sıra değişimi

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = -\hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger + \delta_{ij}, \quad \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger = -\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i + \delta_{ij} \quad (3.49)$$

bağıntıları ile sağlanır (Greiner ve Maruhn, 1996).

3.3.1 Bir Cisim İşlemcisinin Matris Elemanı

Bir parçacık işlemcisi ikinci kuantizasyonda

$$\hat{f} = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \quad (3.50)$$

bağıntısı ile gösterilir. Kinetik enerji işlemcisi de

$$T = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \quad (3.51)$$

olarak yazılır. Şimdi kinetik enerji matris elemanını elde edelim.

A fermiyondan oluşan sistemin temel durumu yaratma ve yok etme işlemcileri ile $|\psi\rangle = \hat{a}_{i_1}^\dagger \dots \hat{a}_{i_A}^\dagger |0\rangle$ ve $|\psi'\rangle = \hat{a}_{i'_1}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger |0\rangle$ ketleriyle gösterilir. Kinetik enerji matris elemanı yazılırsa,

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \langle \psi | T | \psi' \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} \left| \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \right| \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger |0\rangle \\ &= \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} \left| \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta \right| \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (3.52)$$

Fermiyonlar için ters komütasyon bağıntısına göre,

$$\{\hat{a}_\beta, \hat{a}_{i'}^\dagger\} = \hat{a}_\beta \hat{a}_{i'}^\dagger + \hat{a}_{i'}^\dagger \hat{a}_\beta = \delta_{\beta i'} \quad \hat{a}_\beta \hat{a}_{i'}^\dagger = -\hat{a}_{i'}^\dagger \hat{a}_\beta + \delta_{\beta i'} \quad (3.53)$$

$\hat{a}_\beta$ yok etme işlemcisi önüne eksi işaretler yığarak sağa doğru yürür. Üç durum vardır:

I. $\beta \langle i'_A$ ise $\hat{a}_\beta$ işlemcisi boş durumlara işleyeceğinden $(\hat{a}_\beta |0\rangle = 0)$ matris elemanı kalkar.

II. $\beta \langle i'_A$ ise öyle bir i'_m durumu vardır ki, bu durumda $\beta = i'_m$ olur. Bu durumda

$\hat{a}_\beta \hat{a}_{i'_m}^\dagger = -\hat{a}_{i'_m}^\dagger \hat{a}_\beta + 1$ denklemi elde edilir ve i'_m durumu yok olur. Bu durumda matris elemanı

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} (-1)^{P_\beta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_\alpha^\dagger | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{m-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_{m+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.54)$$

olacaktır. Burada $(-1)^{P_\beta}$ permutasyonu, $\hat{a}_\beta$ yok etme işlemcisinin önüne yığıldığı eksi işaretinin sonucunda ki işareti belirler.

III. $\hat{a}_\alpha^\dagger$ yaratma işlemcisi de ters komütasyon bağıntısı gereği önüne eksi işaretler yığarak sola doğru yürür. Matris elemanın sıfırdan farklı olabilmesi için $\alpha = \beta$ olmalıdır. (Burada i ve i' aynı durumları göstermektedir.)

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} (-1)^{P_\beta} (-1)^{P_\alpha} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \dots \hat{a}_{i_{n+1}} \hat{a}_{i_{n-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{m-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_{m+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.55)$$

$\alpha = \beta$ ise $(-1)^{2P_\alpha} = 1$ ve β üzerinden toplam düşer. Kinetik enerji matris elemanı (bir parçacık matris elemanı)

$$\langle T \rangle = \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha} \quad (3.56)$$

bağıntısı ile gösterilir.

3.3.2 İki Cisim İşlemcisinin Matris Elemanı

İki parçacık işlemcisi

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta \quad (3.57)$$

matris elemanında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \langle \psi | V | \psi' \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} v_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger \hat{a}_\gamma \hat{a}_\delta | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.58)$$

Kinetik enerji matris elemanın belirlenmesinde izlenen yola benzer olarak matris elemanı elde edilir.

I. $\delta \langle i'_A$ ise matris elemanı, $\hat{a}_\delta$ işlemcisi boş durumlara işleyeceğinden dolayı kalkar. $\delta \langle i'_A$ ise $\delta = i'_\delta$ eşitliğini sağlayan i'_δ durumu ters komütasyon bağıntısına göre boşaltılır ve permutasyon $(-1)^{P_\delta}$ elde edilir.

II. $\hat{a}_\gamma$ işlemcisi için $\gamma \langle i'_A$ ve $\gamma = \delta$ koşulları matris elemanını kaldırır. ($\gamma = \delta$ ise γ boş durumlara karşılık gelecektir)

$\gamma \langle i'_A$ ve $\gamma \neq \delta$ ise $\gamma = i'_\gamma$ için bu durumdaki eleman kalkar ve permutasyon $(-1)^{P_\gamma}$ elde edilir.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\beta^\dagger | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\delta-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_{\delta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\gamma-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_{\gamma+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \quad (3.59)$$

III. $\beta \langle i_A$ ve $\beta \langle i_A$ iken $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq \delta$ koşullarında matris elemanı kalkar. Matris elemanın olabilmesi için $\beta \langle i_A$ iken $\beta = \gamma$ veya $\beta = \delta$ olmalıdır. Bu koşulda, $\hat{a}_\beta^\dagger$ yaratma işlemcisi $\hat{a}_\gamma$ veya $\hat{a}_\delta$ yok etme işlemcilerinden birinin yok ettiği durumda yeni bir parçacık yaratacaktır.

$\hat{a}_\alpha^\dagger$ işlemcisi de $\beta = \gamma$ ise δ durumunda, $\beta = \delta$ ise γ durumunda bir parçacık yaratır.

Matris elemanını yazmak için bu koşullar uygulanırsa:

i. $\beta = \delta$ ve $\alpha = \gamma$ ise

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + P_\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\delta-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i'_{\delta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\gamma-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i'_{\gamma+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta\alpha\beta} (-1)^{2P_\gamma + 2P_\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\beta-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\beta}^\dagger \hat{a}_{i'_{\beta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\alpha-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i'_{\alpha+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.60)$$

ii. $\beta = \gamma$ ve $\alpha = \delta$ ise

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} (-1)^{P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + P_\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\delta-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i'_{\delta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\gamma-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\beta}^\dagger \hat{a}_{i'_{\gamma+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta\beta\alpha} (-1)^{2P_{\gamma-1} + 2P_\delta} \langle 0 | \hat{a}_{i_A} \hat{a}_{i_{A-1}} \dots \hat{a}_{i_1} | \hat{a}_{i'_1}^\dagger \hat{a}_{i'_2}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\alpha-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\alpha}^\dagger \hat{a}_{i'_{\alpha+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_{\beta-1}}^\dagger \hat{a}_{i'_\beta}^\dagger \hat{a}_{i'_{\beta+1}}^\dagger \dots \hat{a}_{i'_A}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.61)$$

(3.60) ve (3.61) eşitlikleri kullanılarak iki cisim matris elemanı yazılır.

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} [\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} [V_{\alpha\beta\alpha\beta} - V_{\alpha\beta\beta\alpha}]
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Hamiltonyenin matris elemanı aşağıdaki bağıntı ile gösterilir:

$$\langle H \rangle = \sum_{\alpha} T_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} [V_{\alpha\beta\alpha\beta} - V_{\alpha\beta\beta\alpha}] \tag{3.63}$$

4. SİMETRİ ENERJİSİNİN ÇÖZÜMÜ ve SONUÇLAR

Simetri enerjisi ikinci bölümde, FGM kullanılarak basit olarak incelenmişti. Çekirdek çok parçacıklı bir kuantum sistemdir. Bu bölümde, N sayıda nükleondan oluşmuş bir çekirdeğin hamiltonyeni yazılarak, bu hamiltonyenin beklenen değerinden çekirdeğin toplam enerjisi elde edilecektir.

$$\langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle \quad (4.1)$$

Simetrik ve simetrik olmayan çekirdekler için (4.1) ifadesi yazılarak, Simetri enerjisi formülünde (2.35) bu sonuçlar yerine yazılırsa simetri enerjisi elde edilir.

FGM'ye göre her bir nükleonu temsil eden tek-parçacık özfonksiyonu düzlem dalgadır(Fetter ve Walecka, 2003).

$$\varphi_k(r) = \Omega^{-1/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (4.2)$$

Fermi gazını oluşturan proton ve nötronların spin açısal momentum vektörleri $\pm \frac{1}{2}$ (spin aşağı ve spin yukarı) değerlerini alır. Ayrıca NN kuvveti yükten bağımsızdır ve proton ve nötronlar arasındaki nükleer etkileşmeler (nn, pp, np) özdeşdir. Bu nedenle iki farklı yük durumu nükleon denilen tek bir parçacık gibi ifade edilir. Proton ve nötron ise bu nükleonun iki farklı kuantum durumu olarak yorumlanır. Bu durum izospin olarak adlandırılır. Bir nükleona $t = \frac{1}{2}$ izospin kuantum sayısı atanır. Soyut izospin uzayında, izospin vektörünün üçüncü eksen üstündeki izdüşümü $t_3 = \pm \frac{1}{2}$ değerini alır. Nükleonun proton durumuna $t_3 = +\frac{1}{2}$, nükleonun nötron durumuna $t_3 = -\frac{1}{2}$ değerleri karşılık gelir(Şirin, 2006). Spin ve izospin durumlarının da dalga fonksiyonuna eklenmesiyle tek-parçacık dalga fonksiyonu

$$\varphi_k(r) \lambda_n \rho_n \quad (4.3)$$

elde edilir(Fetter ve Walecka, 2003). Üçüncü bölümde ikinci kuantizasyon formalizmi kullanılarak bulunan hamiltonyenin matris elemanı (3.63) ifadesini çekirdeklere uygulayalım.

4.1 Simetrik Çekirdeklerin Kinetik Enerji Matris Elemanı

Herhangi bir α durumu $|\alpha\rangle = |k \lambda_n \rho_n\rangle$ olarak gösterilir. Burada k dalga sayısı, λ_n ve ρ_n spin

ve izospindir.

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | T | \beta \rangle \\
&= \sum_{\substack{k, \lambda_1, \rho_1 \\ k', \lambda_2, \rho_2}} \langle k \lambda_1 \rho_1 | T | k' \lambda_2 \rho_2 \rangle \\
&= \sum_{k, k'} \langle k | T | k' \rangle \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle \sum_{\rho_1, \rho_2} \langle \rho_1 | \rho_2 \rangle \\
&= \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\rho_1, \rho_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \\
&= 4 \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Küresel koordinatlar kullanılarak k üzerinden toplam bulunur.

$$\sum_k \rightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \iiint d\bar{k} \tag{4.5}$$

burada $d\bar{k} = k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \frac{4\Omega}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} k^2 \sin \theta dk d\theta d\phi \\
&= \left[\frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \right] \frac{3\Omega}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \tag{4.7}$$

nükleon yoğunluğu bağıntısı (Fetter ve Walecka, 2003) kullanılırsa simetrik çekirdekler için kinetik enerji matris elemanı

$$\langle T \rangle = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} A \tag{4.8}$$

olarak bulunur.

4.2 Simetrik Çekirdeklerin Potansiyel Enerji Matris Elemanı

$$\langle V \rangle = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} [\langle \alpha\beta | V | \alpha\beta \rangle - \langle \alpha\beta | V | \beta\alpha \rangle] \tag{4.9}$$

Potansiyel enerjisi fonksiyonu olarak Wigner-Majorana tipi bir potansiyel kullanılır.

$$V = (a_W + a_M P_M) v \quad (4.10)$$

Burada a_W ve a_M pozitif sabitler olmak üzere, birinci terim merkezci potansiyeli, ikinci terim nükleon-nükleon değiş tokuşunu ($P_M |r_1 r_2\rangle = |r_2 r_1\rangle$) temsil eder (Fetter ve Walecka, 2003).

Matris elemanına $\sum_{r_1 r_2} |r_1 r_2\rangle \langle r_1 r_2|$ kapalılık bağıntısını iki kez uygulayalım.

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2} \sum_{r_1 r_2} [\langle \alpha\beta | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_W V | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | \alpha\beta \rangle \\ &\quad + \langle \alpha\beta | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_M V P_M | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | \alpha\beta \rangle \\ &\quad - \langle \alpha\beta | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_M V P_M | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | \beta\alpha \rangle \\ &\quad - \langle \alpha\beta | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_W V | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | \beta\alpha \rangle] \\ &= \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2} \sum_{r_1 r_2} [\langle \alpha | r_1 \rangle \langle \beta | r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_W V | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 | \alpha \rangle \langle r_2 | \beta \rangle \\ &\quad + \langle \alpha | r_1 \rangle \langle \beta | r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_M V P_M | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 | \alpha \rangle \langle r_2 | \beta \rangle \\ &\quad - \langle \alpha | r_1 \rangle \langle \beta | r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_M V | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 | \beta \rangle \langle r_2 | \alpha \rangle \\ &\quad - \langle \alpha | r_1 \rangle \langle \beta | r_2 \rangle \langle r_1 r_2 | a_M V P_M | r_1 r_2 \rangle \langle r_1 | \beta \rangle \langle r_2 | \alpha \rangle] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\langle \alpha | r \rangle = \Omega^{-1/2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \langle \lambda \rho |$ ve $\langle r | \alpha \rangle = \Omega^{-1/2} e^{+i\vec{k} \cdot \vec{r}} | \lambda \rho \rangle$ denklemlerine göre,

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \Omega^{-2} \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2} \sum_{r_1 r_2} [a_W e^{-ikr_1} \langle \lambda_1 \rho_1 | e^{-ik'r_2} \langle \lambda_2 \rho_2 | V(r_1 - r_2) e^{ikr_1} | \lambda_1 \rho_1 \rangle e^{ik'r_2} | \lambda_2 \rho_2 \rangle \\ &\quad + a_M e^{-ikr_1} \langle \lambda_1 \rho_1 | e^{-ik'r_2} \langle \lambda_2 \rho_2 | V(r_1 - r_2) e^{ikr_2} | \lambda_1 \rho_1 \rangle e^{ik'r_1} | \lambda_2 \rho_2 \rangle \\ &\quad - a_M e^{-ikr_1} \langle \lambda_1 \rho_1 | e^{-ik'r_2} \langle \lambda_2 \rho_2 | V(r_1 - r_2) e^{ik'r_2} | \lambda_2 \rho_2 \rangle e^{ikr_1} | \lambda_1 \rho_1 \rangle \\ &\quad - a_M e^{-ikr_1} \langle \lambda_1 \rho_1 | e^{-ik'r_2} \langle \lambda_2 \rho_2 | V(r_1 - r_2) e^{ik'r_1} | \lambda_2 \rho_2 \rangle e^{ikr_2} | \lambda_1 \rho_1 \rangle] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$\langle \lambda_1 \rho_1 | \lambda_1 \rho_1 \rangle = \langle \lambda_2 \rho_2 | \lambda_2 \rho_2 \rangle = 1$ ve $\langle \lambda_1 \rho_1 | \lambda_2 \rho_2 \rangle = \langle \lambda_2 \rho_2 | \lambda_1 \rho_1 \rangle = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \Omega^{-2} \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \sum_{r_1 r_2} \sum_{r_1 r_2} V(r_1 - r_2) [a_W + a_M e^{-i(k-k')(r_1-r_2)} - a_W e^{-i(k-k')(r_1-r_2)} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} - a_M \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}] \\ &= \Omega^{-2} \sum_{\alpha\beta} \int \int dr_1 dr_2 V(r_1 - r_2) [a_W + a_M e^{-i(k-k')(r_1-r_2)} - a_W e^{-i(k-k')(r_1-r_2)} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} - a_M \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. $r_1 - r_2 = z$ ve $k - k' = q$ olarak tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
 \langle V \rangle &= \frac{\Omega^{-1}}{2} \sum_{\alpha\beta} \int dz V(z) \left[a_w + a_m e^{-iqz} - a_w e^{-iqz} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} - a_m \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \right] \\
 &= \frac{\Omega^{-1}}{2} \sum_{\alpha\beta} \int dz V(z) \left[(a_w - a_m \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}) + (a_m - a_w \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}) e^{-iqz} \right] \\
 &= \frac{\Omega^{-1}}{2} \int dz V(z) \sum_{kk'} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\rho_1 \rho_2} \left[(a_w - a_m \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}) + (a_m - a_w \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2}) e^{-iqz} \right]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Spin ve izospin üzerinden toplam alınırsa

$$= \frac{\Omega^{-1}}{2} \int dz V(z) \sum_{kk'} \left[(16a_w - 4a_m) + (16a_m - 4a_w) e^{-iqz} \right]$$

ifadesi elde edilir. k ve k' üzerinden toplam (4.5) eşitliği kullanılarak

$$\langle V \rangle = \frac{2\Omega}{(2\pi)^6} \left[(4a_w - a_m) \int dz V(z) \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k} \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k}' + (4a_m - a_w) \int dz V(z) \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k} \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k}' e^{i(\bar{k} - \bar{k}')z} \right] \tag{4.15}$$

integral ifadeye dönüştürülür.

$$\int_{k_F}^{k_F} d\bar{k} = \frac{4}{3} \pi k_F^3 \quad \text{ve} \quad \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k} e^{i\bar{k}z} = \int_{k_F}^{k_F} d\bar{k} e^{ikz \cos \theta} = \frac{4}{3} \pi k_F^3 \frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \tag{4.16}$$

İntegral çözümlerini (4.15)'de yerine yazalım.

$$\langle V \rangle = \frac{2\Omega}{(2\pi)^6} \left[\frac{4}{3} \pi k_F^3 \right]^2 \left[(4a_w - a_m) \int dz V(z) + (4a_m - a_w) \int V(z) \left(\frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \right)^2 dz \right] \tag{4.17}$$

(4.7) ifadesi kullanılarak

$$\langle V \rangle = \frac{A k_F^3}{12\pi^2} \left[(4a_w - a_m) \int dz V(z) + (4a_m - a_w) \int V(z) \left(\frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \right)^2 dz \right] \tag{4.18}$$

simetrik çekirdekler için potansiyel matris elemanı bulunur. Simetrik çekirdekler için hamiltonyenin beklenen değeri ise

$$\langle H \rangle_{N=Z} = \langle T \rangle_{N=Z} + \langle V \rangle_{N=Z} \tag{4.19}$$

$$\langle H \rangle_{N=Z} = \frac{3A}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \frac{Ak_F^3}{12\pi^2} \left[(4a_w - a_m) \int dz V(z) + (4a_m - a_w) \int V(z) \left(\frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \right)^2 dz \right] \quad (4.20)$$

olarak bulunur.

4.3 Simetrik Olmayan Çekirdeklerin Kinetik Enerji Matris Elemanı

$N \neq Z$ simetrik olmayan çekirdeklerin k_F fermi dalga sayısı izospine bağlıdır.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | T | \beta \rangle \\ &= \sum_{\substack{k, \lambda_1, \rho_1 \\ k', \lambda_2, \rho_2}} \langle k \lambda_1 \rho_1 | T | k' \lambda_2 \rho_2 \rangle \\ &= \sum_{k, k'} \langle k | T | k' \rangle \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \langle \lambda_1 | \lambda_2 \rangle \sum_{\rho_1, \rho_2} \langle \rho_1 | \rho_2 \rangle \\ &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\rho_1, \rho_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \sum_{kk'} \delta_{kk'} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Burada spin üzerinden toplam 2 olur.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= 2 \sum_{\rho_1 k} \sum_{\rho_2 k'} \delta_{\rho_1 \rho_2} \delta_{kk'} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \\ &= 2 \sum_{\rho_1 k} \sum_{\rho_2} \left[\sum_{k'} \delta_{\rho_1 \rho_2} \delta_{kk'} \right] \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &= 2 \sum_{\rho_1 k} \left[\sum_{k'} \delta_{\rho_1 \frac{1}{2}} \delta_{kk_F^Z} + \sum_{k'} \delta_{\rho_1 -\frac{1}{2}} \delta_{kk_F^N} \right] \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &= 2 \left\{ \sum_k \left[\sum_{k'} \delta_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \delta_{kk'} + \sum_{k'} \delta_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} \delta_{kk'} \right] + \sum_k \left[\sum_{k'} \delta_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \delta_{kk'} + \sum_{k'} \delta_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} \delta_{kk'} \right] \right\} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &= 2 \left\{ \sum_k \sum_{k'} \delta_{kk'} + \sum_k \sum_{k'} \delta_{kk'} \right\} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ &= 2 \left\{ \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right\} \\ &= 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{k_F^Z} d\bar{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \int_{k_F^N} d\bar{k} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

İntegral çözülür ve ifade düzenlenirse simetrik olmayan çekirdekler için kinetik enerji matris elemanı

$$\langle T \rangle = \frac{\Omega}{5\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(k_F^Z \right)^5 + \left(k_F^N \right)^5 \right] \quad (4.23)$$

olarak bulunur.

4.4 Simetrik Olmayan Çekirdeklerin Potansiyel Enerji Matris Elemanı

Simetrik çekirdeklerin potansiyel enerji matris elemanı yazılırken (4.14)'e kadar yapılan işlemler, simetrik olmayan çekirdekler içinde aynıdır.

$$\langle V \rangle = \frac{\Omega^{-1}}{2} \int dz V(z) \sum_{kk'} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\rho_1 \rho_2} \left[\left(a_W - a_M \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) + \left(a_M - a_W \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) e^{-iqz} \right] \quad (4.24)$$

Spin üzerinden toplam alınırsa

$$\langle V \rangle = \Omega^{-1} \int dz V(z) \sum_{\rho_1 \rho_2} \sum_{kk'} \left[\left(2a_W - a_M \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) + \left(2a_M - a_W \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) e^{-iqz} \right] \quad (4.25)$$

bağıntısı elde edilir. Kinetik enerji matris elemanı yazılırken yapılan işlemlere benzer olarak ifadeyi çözümleyelim:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle &= \Omega^{-1} \int dz V(z) \sum_{\rho_1 k} \sum_{\rho_2 k'} \left[\left(2a_W - a_M \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) + \left(2a_M - a_W \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) e^{-iqz} \right] \\ &= \Omega^{-1} \int dz V(z) \sum_{\rho_1 k} \sum_{\rho_2} \left\{ \sum_{k'}^{k_F^{\rho_2}} \left[\left(2a_W - a_M \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) + \left(2a_M - a_W \delta_{\rho_1 \rho_2} \right) e^{-iqz} \right] \right\} \\ &= \Omega^{-1} \int dz V(z) \sum_{\rho_1 k} \left\{ \sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_W - a_M \delta_{\rho_1 \frac{1}{2}} \right) + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_W - a_M \delta_{\rho_1 \frac{-1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_M - a_W \delta_{\rho_1 \frac{1}{2}} \right) e^{-iqz} + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_M - a_W \delta_{\rho_1 \frac{-1}{2}} \right) e^{-iqz} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \Omega^{-1} \int dz V(z) & \left\{ \sum_k^{k_F^Z} \left[\sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_W - a_M \delta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right) + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_W - a_M \delta_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} \right) \right] \right. \\
& + \sum_k^{k_F^Z} \left[\sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_M - a_W \delta_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \right) e^{-iqz} + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_M - a_W \delta_{\frac{1}{2}\frac{-1}{2}} \right) e^{-iqz} \right] \\
& + \sum_k^{k_F^N} \left[\sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_W - a_M \delta_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}} \right) + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_W - a_M \delta_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \right) \right] \\
& \left. + \sum_k^{k_F^N} \left[\sum_{k'}^{k_F^Z} \left(2a_M - a_W \delta_{\frac{-1}{2}\frac{1}{2}} \right) e^{-iqz} + \sum_{k'}^{k_F^N} \left(2a_M - a_W \delta_{\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}} \right) e^{-iqz} \right] \right\} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Bu bağıntı,

$$\begin{aligned}
= \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \int dz V(z) \times \\
& \left\{ \left[(2a_W - a_M) \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k} \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k}' + 4a_W \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k} \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k}' + (2a_W - a_M) \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k} \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k}' \right] \right. \\
& \left. + \left[(2a_M - a_W) \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k} \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k}' + 4a_M \int_{k_F^Z}^{k_F^Z} d\bar{k} \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k}' + (2a_M - a_W) \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k} \int_{k_F^N}^{k_F^N} d\bar{k}' \right] e^{-iqz} \right\} \quad (4.27)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. (4.16)'daki integral çözümleri kullanılarak potansiyel enerji matris elemanı yazılır.

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \int dz V(z) & \left\{ (2a_W - a_M) \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^Z)^3 \right]^2 + 4a_W \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^Z)^3 \right] \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^N)^3 \right] \right. \\
& + (2a_W - a_M) \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^N)^3 \right]^2 + (2a_M - a_W) \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^Z)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} \right]^2 \\
& + 4a_W \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^Z)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} \right] \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^N)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right] \\
& \left. + (2a_M - a_W) \left[\frac{4}{3} \pi (k_F^N)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right]^2 \right\} \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 & \left\{ \int dz V(z) \left[2a_W \left((k_F^Z)^3 + (k_F^N)^3 \right)^2 - a_M \left((k_F^Z)^3 + (k_F^N)^3 \right) \right] \right. \\
& + \int dz V(z) \left[2a_M \left((k_F^Z)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} + (k_F^N)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right)^2 \right. \\
& \left. \left. - a_W \left[\left((k_F^Z)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} \right)^2 + \left((k_F^N)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right)^2 \right] \right] \right\} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

$N + Z = A$ ve $N - Z = A\delta$ eşitliklerini tanımlayalım. Bu eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
N &= \frac{A}{2}(1 + \delta) \\
Z &= \frac{A}{2}(1 - \delta)
\end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Nükleon yoğunluğu simetrik çekirdekler için

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 = \underbrace{\frac{1}{3\pi^2} (k_F^Z)^3}_{\frac{Z}{\Omega}} + \underbrace{\frac{1}{3\pi^2} (k_F^N)^3}_{\frac{N}{\Omega}} \quad (4.31)$$

olarak yazılır. (4.31)'den elde edilen

$$\frac{Z}{A} = \frac{(k_F^Z)^3}{2(k_F^Z)^3} \quad , \quad \frac{N}{A} = \frac{(k_F^N)^3}{2(k_F^Z)^3} \quad (4.32)$$

sonuçları ve (4.30) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
(k_F^Z)^3 &= k_F^3 (1 - \delta) \\
(k_F^N)^3 &= k_F^3 (1 + \delta)
\end{aligned} \quad (4.33)$$

bağıntıları bulunur. Bu ifadeleri kinetik enerji ve potansiyel enerji matris elemanlarında kullanalım.

$$\begin{aligned}
\langle T \rangle &= \frac{\Omega}{5\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[(k_F^Z)^5 + (k_F^N)^5 \right] \\
&= \frac{\Omega}{5\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} \left[k_F^5 (1 - \delta)^{5/3} + k_F^5 (1 + \delta)^{5/3} \right]
\end{aligned} \quad (4.34)$$

$(1 \pm \delta)^{5/3}$ terimleri binom serisine açılabilir.

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle &= \frac{\Omega}{5\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} k_F^5 \left[2 + \frac{10}{9} \delta^2 \right] \\
 &= \frac{2}{5\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{2k_F^3} A \right) \frac{\hbar^2}{2m} k_F^5 + \frac{2}{9\pi^2} \left(\frac{3\pi^2}{2k_F^3} A \right) \frac{\hbar^2}{2m} k_F^5 \delta^2 \\
 &= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} A + \frac{\delta^2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} A
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

İlk terim simetrik çekirdekler için bulunan matris elemanıdır. Buna göre simetrik olmayan çekirdekler için kinetik enerji matris elemanını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\langle T \rangle_{N \neq Z} = \langle T \rangle_{N=Z} + \frac{\delta^2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} A \tag{4.36}$$

Potansiyel enerji matris elemanına (4.29) geri dönersek

$$\begin{aligned}
 \langle V \rangle &= \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \left\{ \int dz V(z) \left[2a_W k_F^6 (1 - \delta + 1 + \delta)^2 - a_M k_F^6 \left((1 - \delta)^2 + (1 + \delta)^2 \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \int dz V(z) \left[2a_M \left(\left(k_F^Z \right)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} + \left(k_F^N \right)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - a_W \left(\left(\left(k_F^Z \right)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} \right)^2 + \left(\left(k_F^N \right)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} \right)^2 \right) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

$k_F^Z z = q$ ve $q^2 J_1(q) = F(q)$ tanımlaması yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 \left(k_F^Z \right)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} &= \frac{3}{z^3} q^2 J_1(q) \\
 &= \frac{3}{z^3} F(q)
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.33)'den $((1 - \delta)^{1/3})$ binom serisine açılırsa

$$zk_F^Z = zk_F - \frac{1}{3} zk_F \delta \tag{4.39}$$

$$zk_F^Z = zk_F - h \quad \rightarrow q = q_0 - h$$

olarak belirlenir. $F(q)$ terimini Taylor serisine açalım:

$$F(q) = \left[F(q_0) - hF'(q)|_{q=q_0} + \frac{h^2}{2} F''(q)|_{q=q_0} \right] \quad (4.40)$$

$$= q_0^2 J_1(q) - h q_0^2 J_0(q) + \frac{h^2}{2} (2q_0 J_0(q) + q_0^2 J_1(q))$$

$$(k_F^Z)^3 \frac{3J_1(k_F^Z z)}{k_F^Z z} = \frac{3}{z^3} \left[q_0^2 J_1(q) - h q_0^2 J_0(q) + \frac{h^2}{2} (2q_0 J_0(q) + q_0^2 J_1(q)) \right] \quad (4.41a)$$

$$(k_F^N)^3 \frac{3J_1(k_F^N z)}{k_F^N z} = \frac{3}{z^3} \left[q_0^2 J_1(q) - h q_0^2 J_0(q) + \frac{h^2}{2} (2q_0 J_0(q) + q_0^2 J_1(q)) \right] \quad (4.41b)$$

(4.41a) ve (4.41b)'yi sırasıyla $[F_Z]$ ve $[F_N]$ olarak gösterelim;

$$[F_Z]^2 + [F_N]^2 = \frac{18}{z^6} \left[q_0^4 J_1(q)^2 + h^2 q_0^4 J_0(q)^2 + h^2 q_0^2 J_1(q) (2q_0 J_0(q) - q_0^2 J_1(q)) \right]$$

$$= \frac{18}{z^6} q_0^6 \left\{ \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left(\frac{J_0(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left[\left(\frac{2J_0(q)J_1(q)}{q_0^3} \right) - \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.42)$$

ve

$$\{[F_Z] + [F_N]\}^2 = \frac{36}{z^6} q_0^6 \left\{ \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left[\left(\frac{2J_0(q)J_1(q)}{q_0^3} \right) - \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 \right] + \underbrace{h^4 \dots}_{ihmal} \right\} \quad (4.43)$$

ifadeleri (4.37)'de yerine yazılırsa,

$$\langle V \rangle = \frac{\Omega}{(2\pi)^6} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \left\{ [8a_W k_F^6 - 2a_M k_F^6 + 2\delta^2 a_M k_F^6] \int V(z) dz \right.$$

$$+ 2a_M \left[36 \frac{q_0^6}{z^6} \left(\left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left[\left(\frac{2J_0(q)J_1(q)}{q_0^3} \right) - \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 \right] \right) \right] \int V(z) dz \quad (4.44)$$

$$+ a_W \left[18 \frac{q_0^6}{z^6} \left(\left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left(\frac{J_0(q)}{q_0} \right)^2 + h^2 \left[\left(\frac{2J_0(q)J_1(q)}{q_0^3} \right) - \left(\frac{J_1(q)}{q_0} \right)^2 \right] \right) \right] \int V(z) dz \}$$

(4.39)'dan q , q_0 ve h terimleri yerine yazılırsa simetrik olmayan çekirdeklerin potansiyel enerji matris elemanı bulunur.

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle = \frac{Ak_F^3}{12\pi^2} & \left\{ (4a_W - 2a_M) \int V(z) dz + (4a_M - 2a_W) \int \left(\frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \right)^2 V(z) dz \right. \\
& - \delta^2 \left[\int (a_M + a_W J_0^2(k_F z)) V(z) dz \right. \\
& \left. \left. + \int (4a_W - 2a_M) \left(\frac{2J_0(k_F z) J_1(k_F z)}{k_F z} - J_1^2(k_F z) \right) V(z) dz \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Simetrik olmayan çekirdekler için hamiltonyenin beklenen değeri ise

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_{N \neq Z} = \frac{3}{5} \frac{A \hbar^2 k_F^2}{2m} + \frac{\delta^2 A}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \\
+ \frac{Ak_F^3}{12\pi^2} & \left\{ (4a_W - 2a_M) \int V(z) dz + (4a_M - 2a_W) \int \left(\frac{3J_1(k_F z)}{k_F z} \right)^2 V(z) dz \right. \\
& - \delta^2 \left[\int (a_M + a_W J_0^2(k_F z)) V(z) dz \right. \\
& \left. \left. + \int (4a_W - 2a_M) \left(\frac{2J_0(k_F z) J_1(k_F z)}{k_F z} - J_1^2(k_F z) \right) V(z) dz \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

olarak elde edilir..

4.5 Sonuçlar

(4.20) ve (4.46) ifadelerinden simetri enerjisi tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\langle H \rangle_s = \frac{\delta^2 A}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{\delta^2 Ak_F^3}{12\pi^2} & \left\{ \int (a_M + a_W J_0^2(k_F z)) V(z) dz \right. \\
& \left. + \int (4a_M - 2a_W) \left(\frac{2J_0(k_F z) J_1(k_F z)}{k_F z} - J_1^2(k_F z) \right) V(z) dz \right\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

simetri enerjisi elde edilir. (1.12)'ye göre simetri enerjisi teriminin katsayısı (4.47)'den,

$$\begin{aligned}
a_s = \frac{1}{3} & \left\{ \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{k_F^3}{12\pi^2} \left\{ \int (a_M + a_W J_0^2(k_F z)) V(z) dz \right. \right. \\
& \left. \left. + \int (4a_M - 2a_W) \left(\frac{2J_0(k_F z) J_1(k_F z)}{k_F z} - J_1^2(k_F z) \right) V(z) dz \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$a_s = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - \frac{k_F^3}{\pi} \left\{ \int_0^R (a_M + a_W J_0^2(k_F r)) V(r) dr \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^R (4a_M - 2a_W) \left(\frac{2J_0(k_F r) J_1(k_F r)}{k_F r} - J_1^2(k_F r) \right) V(r) dr \right\} \right\} \quad (4.49)$$

olarak yazılır. Bu denklemin çözümünde kullanılan değerler aşağıda verilmiştir:

$$a_W = a_M = \frac{1}{2} \quad (4.50)$$

(4.7)'den $\frac{A}{\Omega} = \rho_n(r) + \rho_p(r)$ olmak üzere

$$k_F(r) = \left\{ \frac{3\pi^2}{2} [\rho_n(r) + \rho_p(r)] \right\}^{\frac{1}{3}} \quad (4.51)$$

olarak bulunur. Proton ve nötronun yük yoğunluğu

$$\rho_n(r) = \frac{\rho_{on}}{1 + e^{\frac{(r-c_n)}{a}}} \\ \rho_p(r) = \frac{\rho_{op}}{1 + e^{\frac{(r-c_p)}{a}}} \quad (4.52)$$

ifadeleri ile gösterilir. Burada

$$\rho_{on} = \frac{0,75N}{(\pi c_n^3 + \pi^3 c_n a^2)} \\ \rho_{op} = \frac{0,75Z}{(\pi c_p^3 + \pi^3 c_p a^2)} \quad (4.53)$$

$$c_n = \left(0,978 + 0,0206 N^{\frac{1}{3}} \right) N^{\frac{1}{3}} \\ c_p = \left(0,978 + 0,0206 Z^{\frac{1}{3}} \right) Z^{\frac{1}{3}} \quad (4.54)$$

ve yüzey kalınlığı parametresi $a = 0,5$ olarak alınmıştır. Kararlı çekirdekler (Tuli, 2005) için nükleon-nükleon saçılmasından elde edilen farklı potansiyel parametreleri (Brown ve Jackson, 1976) kullanılarak hesaplanan simetri enerjisi terimi katsayıları Çizelge 4.1'de

gösterilmiştir. Simetri enerjisi nötron fazlasının bir fonksiyonu olmasına rağmen simetri enerjisi terimi katsayıları tüm kararlı çekirdekler için Çizelge 4.1’de gösterilmiştir. 1_1H , 2_1H , 3_2He , 4_2He , 6_3Li , $^{10}_5B$, $^{12}_6C$, $^{14}_7N$, $^{16}_8O$, $^{20}_{10}Ne$, $^{24}_{12}Mg$, $^{28}_{14}Si$, $^{32}_{16}S$, $^{36}_{18}Ar$, $^{40}_{20}Ca$ çekirdekleri için simetri enerjisi sıfırdır. Kullanılan potansiyel parametreleri ve her bir potansiyel için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişim grafiklerini inceleyelim.

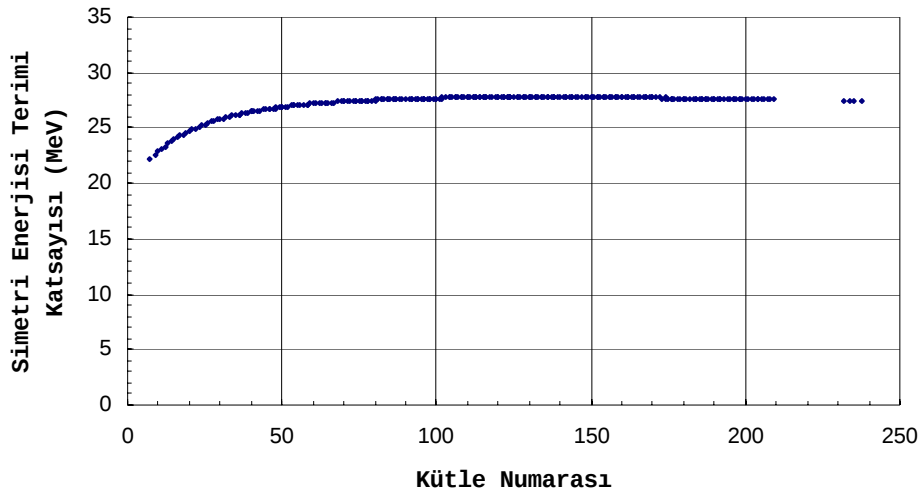
- Kare kuyu potansiyeli

$$V = -V_0 \rightarrow r < R$$

$$V = 0 \rightarrow r > R$$

$$V_0 = 31,28 MeV$$

$$R = 2,205 fm$$



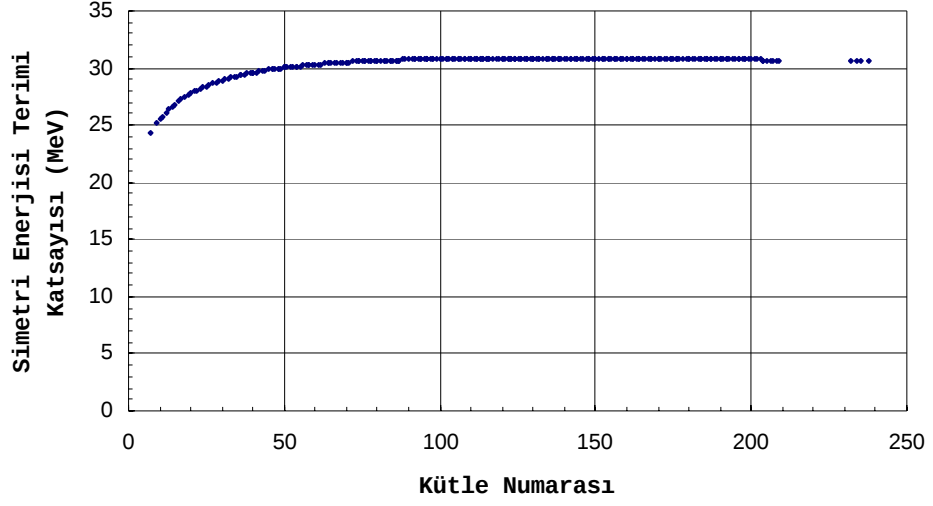
Şekil 4.1 Kare kuyu potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.

- Yukawa potansiyeli

$$V = -V_0 \frac{e^{\frac{-r}{R}}}{\frac{-r}{R}}$$

$$V_0 = 20,7 MeV$$

$$R = 2,43 fm$$



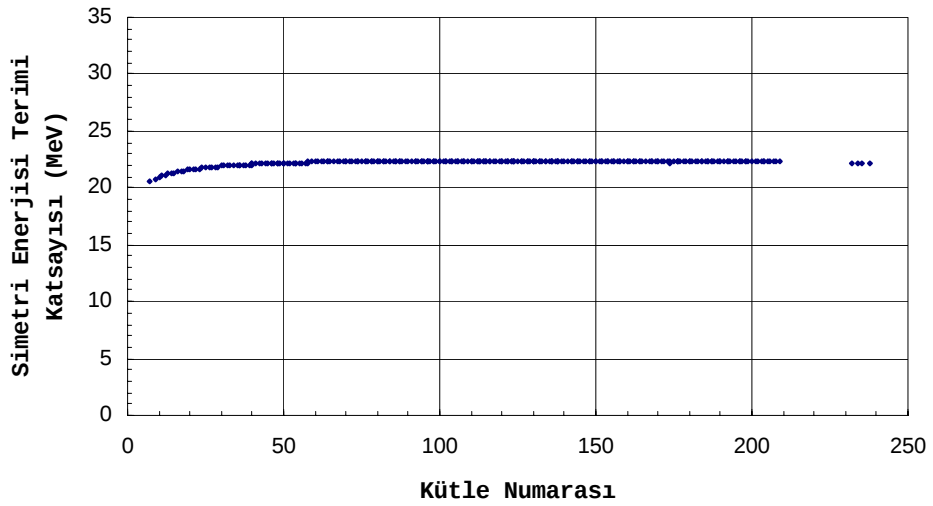
Şekil 4.2 Yukawa potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.

- Gaussian potansiyeli

$$V = -V_0 e^{\frac{-r^2}{R^2}}$$

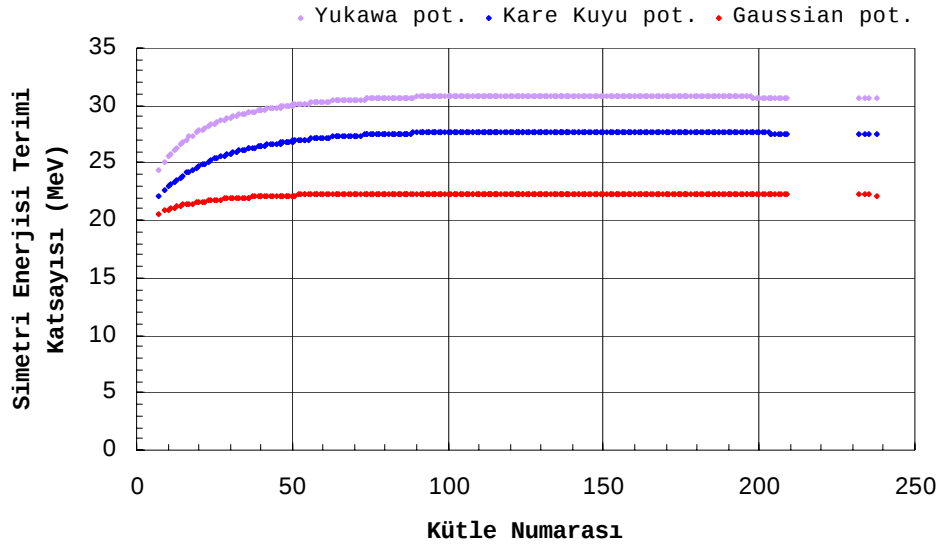
$$V_0 = 60,90 \text{ MeV}$$

$$R = 1,65 \text{ fm}$$



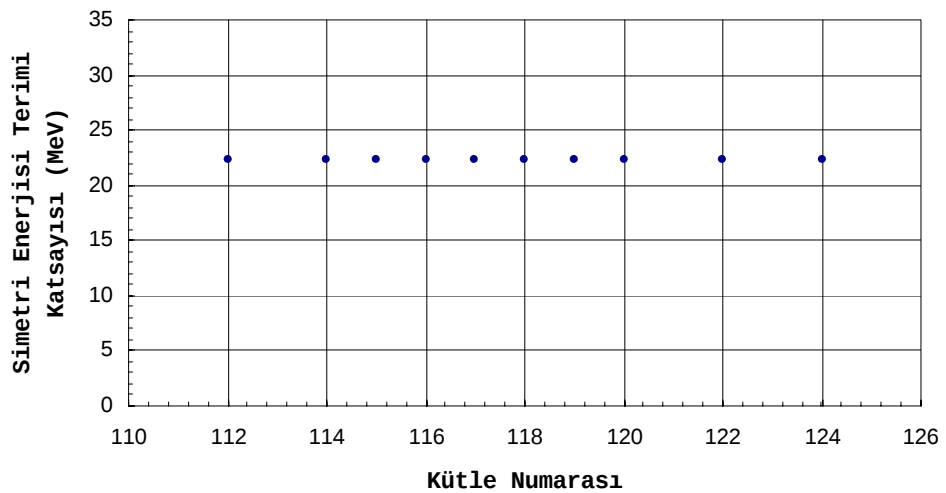
Şekil 4.3 Gaussian potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.

Üç farklı potansiyel için çizilen grafikleri aynı grafik üzerinde gösterelim.



Şekil 4.4 Yukawa, Karekuyu ve Gaussian potansiyelleri için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi. Üç eğride hafif çekirdekler dışında hemen hemen sabittir.

Simetri enerjisi terimi katsayısı, kare kuyu ve Yukawa potansiyelleri için kütle numarası 50'den büyük kararlı çekirdeklerde hemen hemen aynı olduğu görülmektedir. Gaussian potansiyelinde ise yaklaşık tüm kararlı çekirdekler için simetri enerjisi terimi katsayısının sabit olduğu görülmektedir.



Şekil 4.5 Sn çekirdeğinin kararlı izotoplarının Gaussian potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi.

Her bir çekirdeğin kararlı izotopları inceleğinde simetri enerjisi terimi katsayısı yaklaşık olarak sabittir. Şekil 4.5’de Sn çekirdeğinin kararlı izotopları için simetri enerjisi terimi katsayısının kütle numarasına göre değişimi verilmiştir.

Bu çalışma sonucunda elde edilen simetri enerjisi terimi katsayıları, kare kuyu potansiyeli için $a_s \approx 27MeV$, Yukawa potansiyeli için $a_s \approx 30MeV$, gaussian potansiyeli için $a_s \approx 22MeV$ olarak alınabilir.

Çizelge 4.1 Kararlı çekirdeklerin simetri enerjisi terimi katsayıları

	Z	A	a_s^* (MeV)	a_s^{**} (MeV)	a_s^{***} (MeV)		Z	A	a_s	a_s	a_s
H	1	1	0	0	0	Mg	12	24	25,2371	28,3248	21,7394
		2	21,7323	21,7818	19,9455			25	25,3409	28,4366	21,7688
He	2	3	21,2430	21,9668	19,7857			26	25,4323	28,5347	21,7933
		4	21,4907	22,8334	20,1802	Al	13	27	25,5417	28,6507	21,8264
Li	3	6	21,8910	23,8917	20,4873	Si	14	28	25,6382	28,7528	21,8542
		7	22,1006	24,2996	20,5906			29	25,7236	28,8424	21,8777
Be	4	9	22,6279	25,1297	20,8411			30	25,7997	28,9221	21,8977
B	5	10	22,9008	25,5149	20,9606	P	15	31	25,8888	29,0150	21,9236
		11	23,1143	25,8090	21,0390	S	16	32	25,9682	29,0971	21,9458
C	6	12	23,3574	26,1257	21,1348			33	26,0392	29,1704	21,9648
		13	23,5516	26,3750	21,2006			34	26,1030	29,2361	21,9813
N	7	14	23,7649	26,6386	21,2777			36	26,2124	29,3483	22,0076
		15	23,9408	26,8530	21,3348	Cl	17	35	26,1765	29,3115	22,0020
O	8	16	24,1294	27,0770	21,3994			37	26,2880	29,4251	22,0299
		17	24,2869	27,2621	21,4482	Ar	18	36	26,2426	29,3788	22,0200
		18	24,4210	27,4178	21,4864			38	26,3560	29,4942	22,0493
F	9	19	24,5953	27,6156	21,5455			40	26,4492	29,5885	22,0714
Ne	10	20	24,7438	27,7825	21,5925	K	19	39	26,4174	29,5563	22,0661
		21	24,8411	27,9245	21,6299			40	26,4670	29,6062	22,0785
		22	24,9817	28,0471	21,6604			41	26,5120	29,6516	22,0894
Na	11	23	25,1184	28,1962	21,7038	Ca	20	40	26,4729	29,6121	22,0809

	Z	A	a_s	a_s	a_s		Z	A	a_s	a_s	a_s
Ca	20	42	26,5690	29,7087	22,1052	Co	27	59	27,1622	30,2955	22,2517
		43	26,6106	29,7506	22,1151	Ni	28	58	27,1485	30,2821	22,2502
		44	26,6487	29,7887	22,1238			60	27,1925	30,3250	22,2596
		46	26,7152	29,8550	22,1381			61	27,2119	30,3440	22,2635
		48	26,7709	29,9102	22,1489			62	27,2298	30,3613	22,2669
Sc	21	45	26,7014	29,8412	22,1386			64	27,2608	30,3912	22,2717
Ti	22	46	26,7495	29,8890	22,1516	Cu	29	63	27,2582	30,3889	22,2744
		47	26,7852	29,9245	22,1600			65	27,2902	30,4199	22,2802
		48	26,8179	29,9571	22,1674	Zn	30	64	27,2843	30,4142	22,2811
		49	26,8479	29,9867	22,1738			66	27,3166	30,4456	22,2872
		50	26,8754	30,0138	22,1795			67	27,3309	30,4595	22,2896
V	23	50	26,8929	30,0313	22,1863			68	27,3440	30,4720	22,2918
		51	26,9208	30,0588	22,1923			70	27,3672	30,4944	22,2950
Cr	24	50	26,9034	30,0415	22,1904	Ga	31	69	27,3687	30,4959	22,2983
		52	26,9624	30,0996	22,2037			71	27,3922	30,5184	22,3018
		53	26,9882	30,1252	22,2092	Ge	32	70	27,3915	30,5180	22,3041
		54	27,0120	30,1485	22,2140			72	27,4152	30,5408	22,3079
Mn	25	55	27,0507	30,1864	22,2246			73	27,4256	30,5508	22,3093
Fe	26	54	27,0352	30,1713	22,2229			74	27,4352	30,5600	22,3105
		56	27,0861	30,2210	22,2341			76	27,4520	30,5761	22,3121
		57	27,1085	30,2432	22,2387	As	33	75	27,4567	30,5808	22,3161
		58	27,1292	30,2632	22,2428	Se	34	74	27,4562	30,5804	22,3183

	<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>		<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>	
Se	34	76	27,4766	30,6000	22,3212	Zr	40	92	27,6331	30,7496	22,3491	
		77	27,4856	30,6084	22,3224			94	27,6397	30,7557	22,3485	
		78	27,4938	30,6164	22,3232			96	27,6448	30,7605	22,3474	
		80	27,5082	30,6300	22,3244		Nb	41	93	27,6451	30,7611	22,3519
		82	27,5200	30,6414	22,3248			Mo	42	92	27,6476	30,7635
Br	35	79	27,5124	30,6343	22,3280		94		27,6562	30,7716	22,3545	
		81	27,5269	30,6480	22,3292		95		27,6599	30,7750	22,3544	
Kr	36	78	27,5120	30,6340	22,3300		96		27,6631	30,7781	22,3541	
		80	27,5295	30,6507	22,3323		97		27,6659	30,7806	22,3537	
		82	27,5442	30,6648	22,3338		98	27,6684	30,7809	22,3532		
		83	27,5506	30,6707	22,3342		100	27,6722	30,7864	22,3519		
		84	27,5564	30,6762	22,3344	Ru	44	96	27,6759	30,7904	22,3588	
		86	27,5663	30,6856	22,3345			98	27,6830	30,7972	22,3586	
	Rb	37	85	27,5726	30,6918		22,3386		99	27,6859	30,7998	22,3583
		87	27,5826	30,7014	22,3387		100	27,6884	30,8020	22,3579		
Sr	38	84	27,5751	30,6944	22,3413		101	27,6906	30,8042	22,3573		
		86	27,5875	30,7063	22,3423		102	27,6924	30,8058	22,3567		
		87	27,5929	30,7114	22,3425		104	27,6951	30,8084	22,3552		
		88	27,5978	30,7159	22,3426	Rh	45	103	27,7014	30,8144	22,3587	
Y	39	89	27,6117	30,7292	22,3461	Pd	46	102	27,7055	30,8185	22,3615	
Zr	40	90	27,6246	30,7416	22,3492			104	27,7096	30,8222	22,3605	
		91	27,6291	30,7459	22,3492			105	27,7112	30,8236	22,3599	

	Z	A	a_s	a_s	a_s		Z	A	a_s	a_s	a_s
Pd	46	106	27,7125	30,8248	22,3591	Sn	50	120	27,7394	30,8497	22,3543
		108	27,7142	30,8262	22,3574			122	27,7369	30,8472	22,3516
		110	27,7148	30,8268	22,3554			124	27,7338	30,8441	22,3487
Ag	47	107	27,7201	30,8322	22,3607	Sb	51	121	27,7450	30,8551	22,3554
		109	27,7219	30,8336	22,3591			123	27,7426	30,8526	22,3527
Cd	48	106	27,7241	30,8359	22,3634	Te	52	120	27,7517	30,8615	22,3587
		108	27,7271	30,8388	22,3621			122	27,7501	30,8598	22,3563
		110	27,7289	30,8404	22,3606			123	27,7490	30,8587	22,3550
		111	27,7294	30,8409	22,3597			124	27,7477	30,8586	22,3537
		112	27,7297	30,8408	22,3587			125	27,7462	30,8560	22,3523
		113	27,7297	30,8408	22,3576			126	27,7447	30,8545	22,3509
		114	27,7295	30,8406	22,3565			128	27,7410	30,8509	22,3479
		116	27,7284	30,8395	22,3541			130	27,7369	30,8467	22,3448
In	49	113	27,7362	30,8470	22,3600	I	53	127	27,7493	30,8588	22,3518
		115	27,7361	30,8469	22,3579	Xe	54	124	27,7588	30,8681	22,3577
Sn	50	112	27,7413	30,8521	22,3629			126	27,7565	30,8658	22,3552
		114	27,7422	30,8526	22,3611			128	27,7536	30,8628	22,3525
		115	27,7423	30,8527	22,3601			129	27,7519	30,8611	22,3510
		116	27,7421	30,8526	22,3591			130	27,7500	30,8593	22,3496
		117	27,7417	30,8521	22,3580			131	27,7481	30,8574	22,3481
		118	27,7411	30,8516	22,3568			132	27,7460	30,8554	22,3465
		119	27,7404	30,8508	22,3556			134	27,7414	30,8509	22,3434

	<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>		<i>Z</i>	<i>A</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>	<i>a_s</i>
Xe	54	136	27,7364	30,8459	22,3401	Nd	60	150	27,7311	30,8403	22,3290
Cs	55	133	27,7498	30,8591	22,3472	Sm	62	144	27,7576	30,8658	22,3423
Ba	56	130	27,7608	30,8696	22,3535			147	27,7497	30,8582	22,3376
		132	27,7573	30,8662	22,3507			148	27,7468	30,8554	22,3359
		134	27,7533	30,8622	22,3477			149	27,7439	30,8527	22,3342
		135	27,7511	30,8602	22,3462			150	27,7409	30,8498	22,3326
		136	27,7488	30,8580	22,3446			152	27,7346	30,8435	22,3291
		137	27,7464	30,8556	22,3430			154	27,7281	30,8373	22,3256
		138	27,7438	30,8531	22,3414	Eu	63	151	27,7422	30,8510	22,3324
La	57	138	27,7495	30,8584	22,3434			153	27,7359	30,8447	22,3290
		139	27,7470	30,8559	22,3418	Gd	64	152	27,7432	30,8517	22,3322
Ce	58	136	27,7591	30,8676	22,3483			154	27,7370	30,8458	22,3288
		138	27,7547	30,8635	22,3453			155	27,7338	30,8426	22,3271
		140	27,7498	30,8587	22,3422			156	27,7305	30,8394	22,3253
		142	27,7445	30,8534	22,3389			157	27,7271	30,8362	22,3236
Pr	59	141	27,7522	30,8610	22,3424			158	27,7237	30,8328	22,3218
Nd	60	142	27,7543	30,8628	22,3425			160	27,7166	30,8261	22,3182
		143	27,7517	30,8603	22,3409	Tb	65	159	27,7245	30,8337	22,3216
		144	27,7491	30,8579	22,3392	Dy	66	156	27,7383	30,8469	22,3282
		145	27,7463	30,8551	22,3376			158	27,7318	30,8407	22,3248
		146	27,7434	30,8523	22,3359			160	27,7251	30,8343	22,3213
		148	27,7374	30,8465	22,3325			161	27,7216	30,8308	22,3195

	Z	A	a_s	a_s	a_s		Z	A	a_s	a_s	a_s
Dy	66	162	27,7181	30,8273	22,3177	Hf	72	177	27,6836	30,7938	22,2982
		163	27,7145	30,8240	22,3159			178	27,6797	30,7901	22,2963
		164	27,7109	30,8204	22,3141			179	27,6757	30,7862	22,2945
Ho	67	165	27,7113	30,8208	22,3137			180	27,6716	30,7825	22,2926
Er	68	162	27,7206	30,8345	22,3204	Ta	73	181	27,6709	30,7816	22,2919
		164	27,7186	30,8279	22,3169	W	74	180	27,6780	30,7884	22,2949
		166	27,7114	30,8210	22,3133			182	27,6700	30,7808	22,2912
		167	27,7078	30,8173	22,3115			183	27,6660	30,7768	22,2893
		168	27,7040	30,8138	22,3096			184	27,6619	30,7709	22,2875
		170	27,6964	30,8063	22,3060			186	27,6537	30,7650	22,2837
Tm	69	169	27,7040	30,8138	22,3092	Re	75	185	27,6609	30,7719	22,2867
Yb	70	168	27,7111	30,8206	22,3122			187	27,6526	30,7640	22,2829
		170	27,7038	30,8134	22,3086	Os	76	184	27,6678	30,7786	22,2896
		171	27,7000	30,8098	22,3068			186	27,6597	30,7707	22,2859
		172	27,6962	30,8060	22,3050			187	27,6556	30,7667	22,2840
		173	27,6924	30,8025	22,3031			188	27,6514	30,7629	22,2821
		174	27,6885	30,7987	22,3010			189	27,6473	30,7588	22,2802
		176	27,6806	30,7910	22,2975			190	27,6431	30,7549	22,2783
Lu	71	175	27,6881	30,7983	22,3007			192	27,6347	30,7466	22,2745
		176	27,6842	30,7943	22,2988	Ir	77	191	27,6418	30,7534	22,2775
Hf	72	174	27,6952	30,8051	22,2037			193	27,6334	30,7454	22,2737
		176	27,6875	30,7977	22,3000	Pt	78	190	27,6486	30,7600	22,2836

Z	A	a_s	a_s	a_s	Z	A	a_s	a_s	a_s		
Pt	78	192	27,6403	30,7521	22,2766	Hg	80	204	27,5942	30,7074	22,2557
		194	27,6319	30,7439	22,2728	Tl	81	203	27,6011	30,7141	22,2586
		195	27,6277	30,7397	22,2709			205	27,5924	30,7056	22,2548
		196	27,6234	30,7358	22,2690	Pb	82	204	27,5992	30,7122	22,2576
		198	27,6148	30,7274	22,2652			206	27,5905	30,7037	22,2538
Au	79	197	27,6218	30,7342	22,2681			207	27,5861	30,6996	22,2519
Hg	80	196	27,6286	30,7406	22,2709			208	27,5817	30,6953	22,2500
		198	27,6201	30,7324	22,2672	Bi	83	209	27,5797	30,6933	22,2489
		199	27,6158	30,7283	22,2653	Th	90	232	27,4914	30,6079	22,2104
		200	27,6115	30,7242	22,2634	U	92	234	27,4859	30,6027	22,2079
		201	27,6072	30,7199	22,2615			235	27,4814	30,5984	22,2060
		202	27,6029	30,7159	22,2596			238	27,4678	30,5852	22,2004

* Kare kuyu potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısı

** Yukawa potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısı

*** Gaussian potansiyeli için simetri enerjisi terimi katsayısı

KAYNAKLAR

- Brown, G. E. ve Jackson, A. D., (1976), The Nucleon-Nucleon Interaction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.
- Fetter, A. L. ve Walecka, J. D., (2003), Quantum Theory of Many-Particle Systems, Dover Publications, New York.
- Greiner, W. ve Maruhn, J. A., (1996), Nuclear Models, Springer, New York.
- Heyde, K., (1999), Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics, Institute of Physics Publishing, London.
- Karaoğlu, B., (1998), Kuantum Mekaniğine Giriş, Güven, İstanbul.
- Krane, K. S., (çev., B.Şarer) (2001), Nükleer Fizik, Palme Yayıncılık, Ankara.
- Shultis, J. K. ve Faw, R. E., (2002), Fundamentals of Nuclear Science and Engineering, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Şirin, M., (2006), Çekirdek Fiziği, Çekirdeklerin Zamandan Bağımsız Özellikleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.
- Tuli, J. K., (2005), Nuclear Wallet Cards, Brookhaven National Laboratory, New York.
- Walecka, J. D., (2004), Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics, Imperial College Press and World Scientific Publishing, London.

İNTERNET KAYNAKLARI

1. <http://online.physics.uiuc.edu/courses/Phys581/fall04/Lecture-24.pdf>
2. Ingersent, K., (2003), Second Quantization: Creation and Annihilation Operators, <http://www.phys.ufl.edu/~kevin/teaching/6646/03spring/2nd-quant.pdf>

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	10.08.1980	
Doğum yeri	Trabzon	
Lise	1994-1997	Sefaköy Lisesi
Lisans	1999-2003	Yıldız Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Fizik Bölümü